



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

Doble grado en Economía – Matemáticas y Estadística

**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

# **Modelización de los rendimientos del IBEX35 usando un modelo ARIMA- GARCH**

Autor: Pedro Manuel Morales Muñoz

Tutor: Dña. Sonia Sotoca López

Madrid, febrero de 2021



## Resumen

El IBEX35 terminó marzo como el peor mes de su historia con una caída del 22,21%. Es interesante generar modelos que traten de predecir la evolución de índices bursátiles como el IBEX35, ya que pueden ser de gran utilidad en el cálculo del valor en riesgo ante posibles caídas de este índice, y que las instituciones financieras puedan seguir funcionando con normalidad.

A pesar de que en noviembre las vacunas contra el Covid-19 todavía no habían llegado a la población, sirvieron para que las expectativas de los inversores y en las bolsas es una realidad y mejoraran notablemente. El selectivo español, que hasta octubre era el peor índice europeo con diferencia, cerró noviembre con la mayor subida mensual de su historia: un 25,18%.

El objetivo de este trabajo de fin de grado es construir un modelo ARIMA-GARCH capaz de generar predicciones de los rendimientos y de predecir la evolución de la volatilidad del IBEX35.

Palabras clave: Series temporales, Modelos ARIMA, Modelos GARCH, Previsión a corto plazo

# ÍNDICE

<b>1. Introducción</b>	<b>pg. 5</b>
<b>1.1 Antecedentes del estudio</b>	<b>pg. 5</b>
<b>1.2 Objetivos del estudio</b>	<b>pg. 6</b>
<b>2. Datos y representación</b>	<b>pg. 6</b>
<b>3. Metodología</b>	<b>pg. 8</b>
<b>3.1 Identificación</b>	<b>pg. 8</b>
<b>3.2 Estimación</b>	<b>pg. 10</b>
<b>3.3 Diagnóstico</b>	<b>pg. 11</b>
<b>3.4 Análisis de intervención</b>	<b>pg. 11</b>
<b>4. Resultados empíricos</b>	<b>pg. 12</b>
<b>4.1 Modelo ARIMA para rendimientos</b>	<b>pg. 12</b>
<b>4.2 Modelo ARIMA-GARCH</b>	<b>pg. 18</b>
<b>4.3 Predicción</b>	<b>pg. 26</b>
<b>5. Conclusiones</b>	<b>pg. 28</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>pg. 29</b>

## **1. Introducción**

### **1.1 Antecedentes del estudio**

El COVID-19, conocido como enfermedad por coronavirus, está considerado como una emergencia de salud pública de preocupación mundial. La Fundación Funcas (Torres y Fernández, 2020) consideraba que el mayor impacto de la crisis se produciría en marzo y abril, relajándose las medidas de confinamiento e iniciándose una progresiva reactivación de la economía.

Además de las catastróficas consecuencias que ha causado en los sistemas de salud pública de muchos países, este ha afectado en numerosas vías al estado actual de la economía. En particular, en marzo de 2020 se observó una transitoria caída en los rendimientos del IBEX35. Durante la evolución de la pandemia se pueden observar algunos momentos claves en el comportamiento de las principales variables en el mercado financiero internacional. Cuando aparecieron los primeros casos del virus, los mercados no sufrieron pérdidas, aunque sí se observó cierta desaceleración en algunos sectores industriales. Los mercados financieros reaccionaron cuando se conocieron los primeros casos en Europa. En la semana del lunes 24 de febrero, varios agentes financieros comenzaron a refugiarse en activos teóricamente más seguros. Los principales índices bursátiles mostraron caídas entorno al 10 % en esta semana. El jueves 5 de marzo se observaron pérdidas en cadena que fueron generalizadas al comienzo de la semana del lunes 9 de marzo. En esta semana los mercados financieros reaccionaron de manera muy severa frente a la crisis sanitaria. Desde junio de 2020 las bolsas mundiales tendieron al alza en medio de expectativas positivas por parte de los inversores, empujadas por el levantamiento de los confinamientos en varios países del mundo y la esperanza de que se aprueben nuevos paquetes de estímulo económico.

Aunque la economía mundial sigue sufriendo los efectos de la pandemia de coronavirus los mercados bursátiles reflejan entusiasmo.

Mientras el desempleo superaba el 13% en Estados Unidos, uno de los indicadores más emblemáticos de Wall Street, el S&P 500, no paraba de recuperar terreno, desde que tocó fondo a mediados de marzo. En este caso, parece ser que las expectativas por parte de los inversores eran las correctas pues el paro en economía estadounidense descendió hasta el 6,9% en octubre.

Esto puede deberse a que el mercado está apostando por una rápida recuperación de la economía.

## 1.2 Objetivo del trabajo

A lo largo del trabajo, se tratará de predecir la evolución de los rendimientos del IBEX 35. Se adaptará la metodología de Box-Jenkins para series financieras. Se utilizarán los modelos ARIMA-GARCH. Se introducirá el modelo ARCH de Engle (1982) y el modelo GARCH de Bollerslev (1986). Dado el fuerte aumento de la volatilidad del IBEX35 observado sobre todo en marzo 2020 provocado por la crisis del coronavirus, se tratará de conseguir un modelo para los rendimientos utilizando un modelo ARIMA-GARCH, con el objetivo de ser usado por diferentes instituciones financieras para evaluar sus riesgos o por un comité regulador para establecer requisitos de margen.

## 2. Datos y representación:

### 2.1 Datos

Los datos utilizados corresponden al IBEX35, que es el principal índice bursátil de referencia de la bolsa española. Formado por las 35 empresas con más liquidez que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Español en las cuatro bolsas españolas. La base de datos se obtiene de la página web <https://finance.yahoo.com/>. Los datos son diarios, y corresponden al período comprendido entre 2018/02/01 - 2020/12/01, con un total de 723 observaciones. La mayoría de los estudios financieros utilizan rendimientos, en lugar de precios, de los activos.

Tabla 1: Estadísticos descriptivos

	<i>Precios ajustados</i>	<i>Rendimientos</i>
Media	9546.14	0
Desviación típica	998.52	0.01
Mediana	9486.85	0
Asimetría	-0.45	-2.04
Curtosis	0.93	22.09
Mínimo	6107.2	-0.15
Máximo	11866.39	0.08

Los rendimientos presentan media 0 y un elevado exceso de curtosis, esto es provocado por el cambio en la volatilidad de la serie.

## 2.1 Representación de los datos

A continuación, se representan los datos con los que se va a trabajar: el precio de cierre ajustado del IBEX35 y el rendimiento logarítmico de este mismo índice. Los precios de cierre ajustados del IBEX35 son representados en euros. El precio de cierre ajustado se define como el precio resultante de aplicar al precio de cierre el valor que implique el ejercicio de un derecho corporativo.

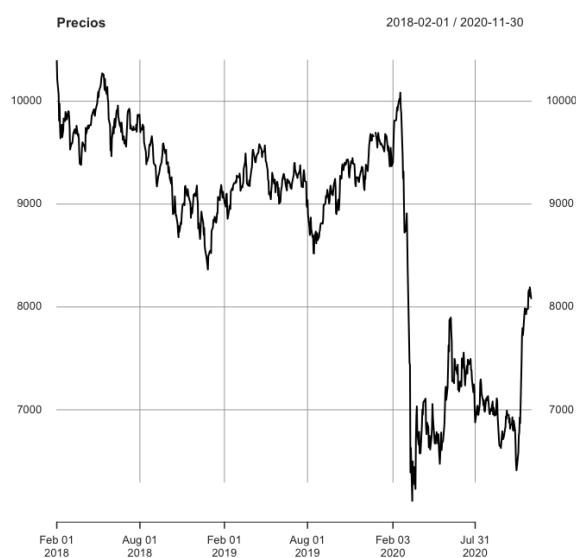


Gráfico 1: Precio de cierre ajustado del IBEX35

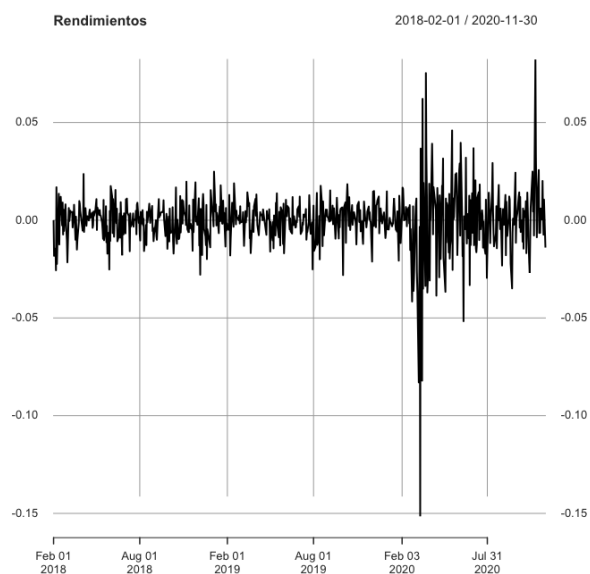


Gráfico 1: Rendimiento logarítmico del IBEX35

El precio de cierre ajustado del IBEX35 no muestra un comportamiento claro por lo que es difícil averiguar la tendencia. Se puede observar en el gráfico el desprendimiento tan notorio que la serie de precios sufrió en marzo de 2020.

La serie de rendimientos parece mostrar un comportamiento de media 0 pero con valores atípicos. Además, muestra agrupaciones de volatilidad. Por ejemplo, la volatilidad parece ser mayor durante el año 2020 que en los años previos.

### 3. Metodología

En la práctica, existen una serie de características comunes de los datos financieros, estas son:

- La tendencia de los rendimientos de los activos financieros a tener distribuciones que exhiben colas gordas.
- Agrupación de la volatilidad. Así pues, se espera que los grandes rendimientos sigan a los grandes rendimientos, y que los pequeños rendimientos sigan a los pequeños rendimientos.
- Efectos de apalancamiento; la tendencia a que la volatilidad aumente más tras una gran caída de los precios.

Asumimos que la serie de rendimientos se descompone en dos partes: La parte predecible y la impredecible

$$r_t = E(r_t|I_{t-1})$$
$$r_t = \mu_t + a_t$$

Siendo  $I_{t-1}$  la información disponible en el período t-1,  $\mu_t$  la parte predecible del proceso y  $a_t$  la parte impredecible o las innovaciones del proceso.

Para la elección del modelo se adaptará la metodología Box - Jenkins a los modelos ARIMA-GARCH.



### 3.1 Identificación

La identificación del modelo para los rendimientos se divide en dos partes:

#### 1) Identificación de $\mu_t$

Para identificar la parte predecible del modelo se estudian distintos modelos ARMA(p,q) y se elige cuál ha podido generar la serie temporal.

Un modelo general de ARMA(p,q) es de la forma

$$r_t = \alpha_0 + \sum_{k=1}^p \alpha_k r_{t-k} - \sum_{k=1}^q \beta_k a_{t-k} + a_t$$

En el modelo ARMA(p,q) se asume que  $a_t$  es un ruido blanco y que p y q son números naturales. Este modelo describe el comportamiento de la variable endógena  $r_t$ , la cual es linealmente dependiente de los retardos de esta misma variable y de las innovaciones ocurridas en el pasado y en el presente.

Para identificar  $\{\alpha_k\}$  y  $\{\beta_k\}$   $k \in \mathbb{N}$ , se comparan las funciones estimadas de autocorrelación simple (ACF) y parcial (PACF) con sus respectivas funciones teóricas.

#### 2) Identificación de $a_t$

La parte impredecible del modelo se ajustará haciendo uso de los modelos de la familia GARCH (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity).

La idea básica es que las innovaciones  $a_t$  del rendimiento de una acción no están correlacionados en serie, pero son dependientes y la dependencia de  $a_t$  puede describirse mediante una simple función cuadrática de sus retardos. Un **ARCH(p)** asume que la componente impredecible se puede expresar de la siguiente manera:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{k=1}^p \alpha_k a_{t-k}^2$$

Siendo  $\varepsilon_t$  una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

$$\omega \geq 0, \alpha_k \geq 0$$

El modelo ARCH es un caso especial de los modelos GARCH.

Los modelos de GARCH se ajustan a un rango más amplio de comportamiento, en particular, a una volatilidad más persistente. La diferencia es que el modelo **GARCH(p,q)** incluye los retardos de la varianza en el modelo para la volatilidad

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{k=1}^p \alpha_k a_{t-k}^2 + \sum_{k=1}^q \beta_k \sigma_{t-k}^2$$
$$\beta_k \geq 0$$

Una vez se ha escogido el mejor modelo para la volatilidad, queda solamente determinar la distribución de  $\varepsilon_t = \frac{a_t}{\sigma_t}$ , conocida como innovaciones estandarizadas.

La elección de la distribución de los rendimientos es algo que siempre ha desconcertado a los académicos y profesionales de las finanzas. La suposición generalizada desde la década de 1960 ha sido que los precios financieros son movimientos geométricos Brownianos y, por lo tanto, los rendimientos logarítmicos siguen una distribución normal (Mills,1993).

Se realizará una comparación entre 3 tipos de innovaciones estandarizadas: normal, t-student y t-student asimétrica. El objetivo de esta comparación es determinar que distribución tendrá la variable  $\varepsilon_t$ , puesto que esto tendrá importantes implicaciones en la etapa posterior, la de estimación.

### 3.2 Estimación

Una vez se haya identificado el modelo ARMA(p,q), se estimarán todos los parámetros  $\{\alpha_k\}$  y  $\{\beta_k\}$ . El método que se utiliza para estimar los parámetros de un modelo ARMA(p,q) es el de máxima verosimilitud

Los modelos GARCH se estiman utilizando un enfoque de MV. Bollerslev (1992) propone un método de cuasi máxima verosimilitud (QML) que es robusto en presencia de normalidad de rendimientos. Las series cronológicas financieras suelen presentar pautas de no normalidad, es decir, exceso de curtosis y asimetría. La serie de rendimientos del IBEX35 presenta esta estructura. Ye (1997) propone resolver este problema por el método aumentado de Lagrange para problemas no lineales.

### 3.3 Diagnóstico del modelo

Una vez que el modelo ARIMA-GARCH ha sido estimado, se analizará el comportamiento de los residuos estandarizados del modelo  $\hat{\varepsilon}_t = \frac{\hat{a}_t}{\hat{\sigma}_t}$ .

Se llevarán a cabo los contrastes de Ljung-Box y ARCH-LM para ver si estos residuos tienen un comportamiento de ruido blanco. Además, se comprobará si efectivamente el supuesto acerca de la distribución de  $\varepsilon_t$  es acertado.

### 3.4 Análisis de intervención

Los datos financieros de alta frecuencia suelen estar influidos por acontecimientos externos, por ejemplo, un aumento del precio del petróleo. Para manejar los efectos de los eventos externos, se puede utilizar el análisis de intervención de Box y Tiao (1975). Con el objetivo de que datos atípicos conduzcan a realizar predicciones poco fiables, se utiliza un modelo de intervención para tratar de captar y eliminar sus efectos. Un modelo de intervención es una función de transferencia con variables explicativas deterministas diseñadas para captar el tipo de intervención necesario a realizar.

Dependiendo de si el efecto del acontecimiento es externo, tiene un efecto transitorio o permanente en la serie financiera, se deberán de añadir una de las siguientes variables deterministas al modelo:

- En el caso en que el efecto sea permanente (variable escalón).

$$E_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$$

Siendo  $t_0$  el momento en el que se produce el efecto.

- En el caso en que el efecto sea transitorio (variable impulso).

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in T_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Siendo  $T_0$  el periodo en el que se observa el efecto.

## 4. Resultados empíricos:

### 4.1 Modelo ARIMA para los rendimientos

Para la selección de un modelo ARIMA para los rendimientos medios, se aplica la metodología Box-Jenkins:

El primer paso es comprobar si la serie es estacionaria.

**Contraste de Dickey-Fuller aumentado:** En estadística y econometría, un contraste de Dickey-Fuller aumentado (ADF) prueba la hipótesis nula de que una raíz unitaria está presente en una muestra de serie temporal. La hipótesis alternativa será que la serie es estacionaria o de tendencia.

Tabla 2: Contraste estacionariedad de rendimientos

	<i>Estadístico</i>	<i>P-valor</i>
ADF-Test	-8.8309	0.01

$H_0$ : La serie es no estacionaria

$H_1$ : La serie es estacionaria

De acuerdo con estos resultados, se concluye que la serie de rendimientos del IBEX 35 es estacionaria según el contraste de Dickey-Fuller aumentado para un nivel de significación del 5% ( $p\text{-valor} = 0.01 < 0.05$ ). Por tanto, el orden de integración de la serie es 0.

Para identificar  $p$  y  $q$  se utiliza la ACF y PACF (función de autocorrelación y autocorrelación parcial).

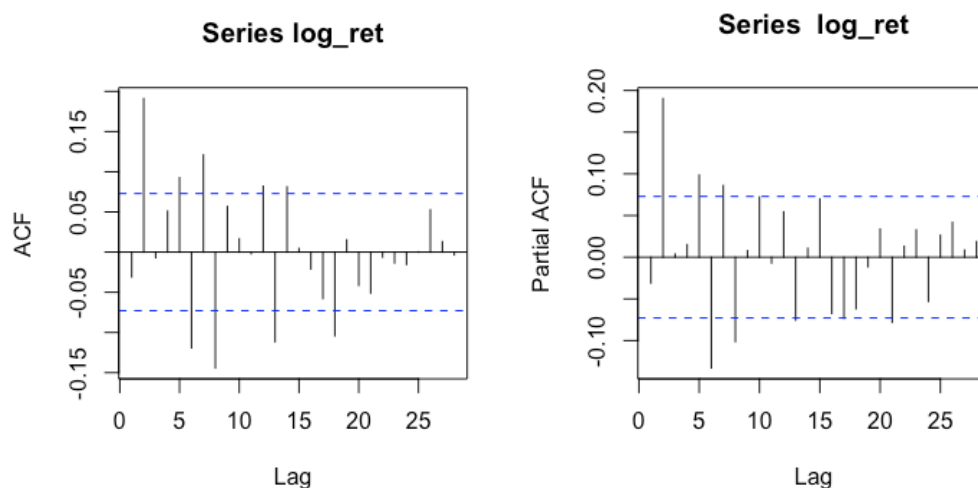


Gráfico 3: Función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial

De acuerdo con las dos funciones, existen retardos levemente significativos (el segundo por ejemplo). La ACF y la PACF son prácticamente iguales, lo que parece indicar que el modelo ARIMA(0,0,0) es el más apropiado. La existencia de retardos significativos se puede deber a la existencia de datos atípicos, por lo que posteriormente se realizará un análisis de intervención.

Calculamos los parámetros del modelo ARIMA(0,0,0). Para calcular los parámetros del modelo se utiliza el método de máxima verosimilitud empleado en la función `sarima` de la librería “`astsa`” de R.

Tabla 3: Estimación de parámetros modelo ARIMA(0,0,0)

	<i>Estimado</i>	<i>Desviación estándar</i>	<i>t valor</i>	<i>p valor</i>
Constante	-3,00E-04	5,00E-04	-0.6522	0.5145

Varianza Var. dep	0.0002067
Log-likelihood	2041.24
Media innov.	5.67e-20

Desv. Típ. Innov.	0.0143
Criterio BIC	-5.6283
Criterio de Akaike	-5.6410

Dado que la constante no es significativa, se retira del modelo.

En la serie de precios, se puede observar, que desde el 21 de febrero hasta el 12 de marzo el precio cae desde 9886,2 hasta 6390,9 euros. Esto conlleva a que la serie de rendimientos presente una gran volatilidad, principalmente con valores negativos. A partir de aquí, el precio tiende a crecer. Por este motivo, incluiremos en el modelo una variable de tipo impulso y estudiaremos su significatividad. Llevamos a cabo una regresión lineal en la que la variable endógena es la serie de rendimientos y la variable explicativa la siguiente variable de tipo impulso

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in T_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Siendo  $T_0$  el periodo comprendido entre el 21 de febrero y el 12 de marzo de 2020, ambos incluidos.

Tabla 4: Estimación ARIMA(0,0,0) con variable impulso

	<i>Estimación</i>	<i>Desviación típica</i>	<i>t-valor</i>	<i>p-valor</i>
Constante	0.0002589	0.0005155	0.502	0.616
Impulso	-0.0314207	0.0037047	-8.481	<2e-16

La constante sigue siendo no significativa, mientras que la variable impulso sí que lo es, por lo que podemos incluirla en el modelo ARIMA(0,0,0) y comparar con los resultados obtenidos en el modelo previo.

Varianza Var. dep	0.00018
Log-likelihood	2075.61
Media innov.	2.69e-18

Desv. Típ. Innov.	0.0137
Criterio BIC	-5.7143
Criterio de Akaike	-5.7333

La función logarítmica de verosimilitud es mayor en esta variante del modelo estimado. El criterio de Akaike y el criterio de información bayesiano son menores, esto quiere decir que, de acuerdo con estos criterios, este nuevo modelo es mejor que el anterior.

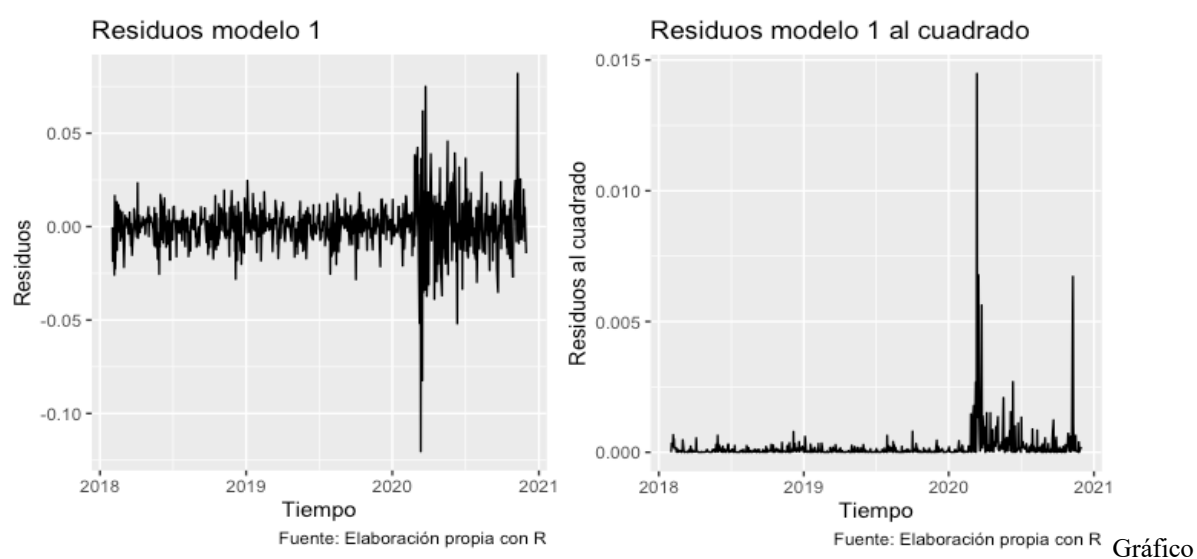
### Modelo 1:

$$r_t = -0.031I_t + a_t$$

Según Tsay (2010), en la mayoría de las series de rendimiento, las correlaciones de las series son débiles, si es que las hay. Para algunas series de rendimiento diario, podría ser necesario un modelo simple AR.

### **Diagnosis del modelo 1:**

Con el fin de determinar un modelo adecuado para los rendimientos, se debe comprobar que los residuos se comporten como ruido blanco. Un ruido blanco es un proceso de media cero, homocedástico y con autocorrelaciones nulas. A continuación, se presentan los residuos y los residuos al cuadrado del modelo 1.



Gráficamente, los residuos del modelo no parecen tener una varianza constante. Además, los residuos al cuadrado parecen mostrar cierta autocorrelación.

Para comprobar si realmente existen correlación en los residuos del modelo, se utiliza el contraste de Ljung-Box.

**Contraste de autocorrelación de Ljung-Box:** Se trata de una prueba estadística, en la que, bajo la hipótesis nula, los datos se distribuyen de forma independiente. La hipótesis alternativa defiende que los datos no se distribuyen independientemente.

Continuando con el estudio del comportamiento de los residuos de ruido blanco, se lleva a cabo el contraste del multiplicador de Lagrange con el objetivo de estudiar si estos son homocedásticos.

**Contraste del multiplicador de Lagrange:** Este contraste, propuesto por Engle (1982), consiste en ajustar un modelo de regresión lineal para los residuos al cuadrado y examinar si el modelo ajustado es significativo. La hipótesis nula es que los residuos al cuadrado son una secuencia de ruido blanco, es decir, los residuos son homocedásticos. La hipótesis alternativa afirma que los residuos son heterocedásticos.

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \sum_{k=1}^p \beta_k \hat{\varepsilon}_{t-k}^2$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

estadístico se calcula como T veces el  $R^2$  de esta regresión auxiliar (T es el nº de datos de esta regresión).  $TR^2$  se distribuye como una distribución  $\chi_p^2$  (distribución chi-cuadrado de p grados de libertad).

Para saber cuantos residuos incluir en ambos contrastes podemos ver la función de autocorrelación de los residuos y de los residuos al cuadrado.



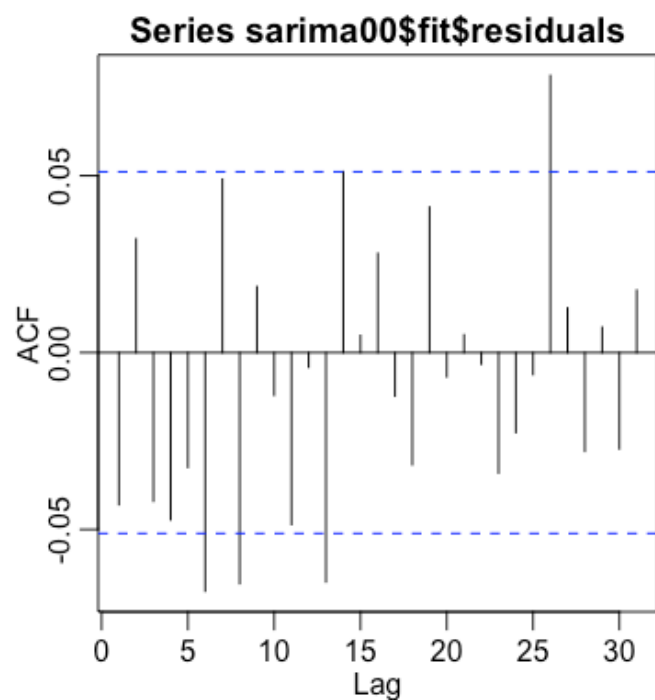


Gráfico 5: Función de autocorrelación de los residuos del modelo 1

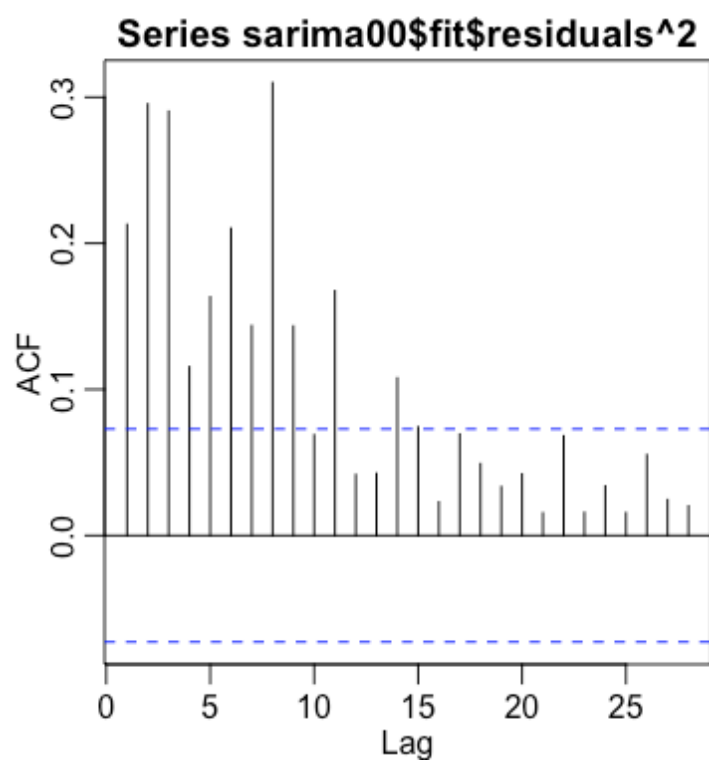


Gráfico 6: Función de autocorrelación de los residuos al cuadrado del modelo 1

La función de autocorrelación de los residuos tiene algunos retardos significativos.

La función de autocorrelación de los residuos al cuadrado muestra que los retardos desde el 1 hasta el 9 son significativos.

Tabla 5: Contrastes independencia y homocedasticidad

Contraste Ljung-Box		Contraste ARCH-LM	
<i>Estadístico</i>	<i>P-Valor</i>	<i>Estadístico</i>	<i>P-Valor</i>
82.368	1.632e-14	165.43	2.2e-16

En ambos contrastes se han incluido los primeros 28 coeficientes de autocorrelación. Se rechazan ambas hipótesis nulas de independencia y homocedasticidad de acuerdo con ambos contrastes.

La metodología Box-Jenkins propone que elijamos otro modelo que sí que cumpla con los requisitos de independencia y homocedasticidad.

## 4.2 Modelo ARIMA – GARCH

Debemos introducir un modelo para las innovaciones una vez comprobadas que estas no tienen comportamiento de ruido blanco. Aquí, introducimos los modelos tipo ARCH y GARCH. Lo que faltaría para la especificación del modelo es la parte de las innovaciones del modelo en la siguiente ecuación

$$r_t = \mu_t + a_t$$

Asumimos que  $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$  y estudiamos los distintos modelos para la volatilidad presentados en el apartado 3.

### Supuesto acerca de la distribución de $\varepsilon_t$ :

Primero, necesitamos hacer una suposición previa en torno a la distribución  $\varepsilon_t$  para llevar a cabo la estimación de los distintos parámetros del modelo ARIMA - GARCH. Veamos la distribución empírica de los residuos del modelo 1.

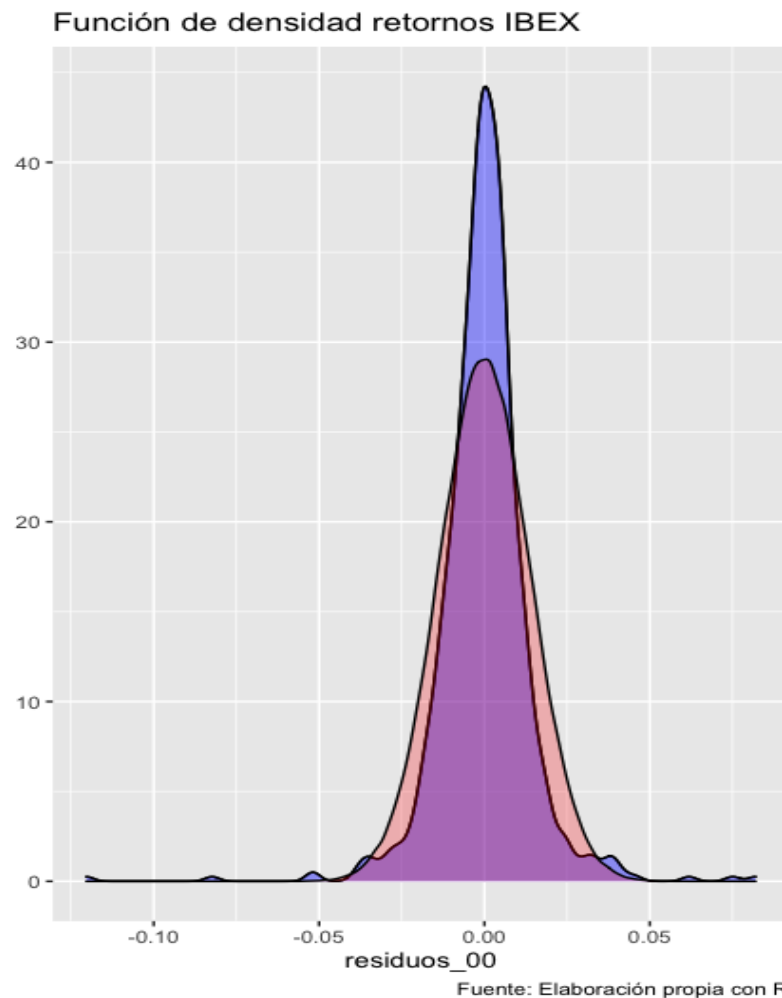


Gráfico 7: Función de densidad de los residuos del modelo para la media (en azul) comparada con distribución normal (en rojo)

El coeficiente de curtosis es 13,496, que es significativamente mayor que 3, lo que indica que la distribución de los residuos tiene forma leptocúrtica.

Dado el exceso de curtosis presente en la distribución, la distribución t-student presenta un comportamiento más parecido al de los residuos del modelo para la media. Así mismo, la asimetría es de -0,6065 por lo que la distribución t-student asimétrica recoge mejor el comportamiento de los residuos que la t-student.

### **Identificación del modelo para la volatilidad:**

Para identificar un modelo para la volatilidad se estudian distintos modelos GARCH(p,q) y se elige cuál ha podido generar la volatilidad de la serie temporal.

Dada la similitud con los modelos ARMA, se puede adaptar la metodología de Box-Jenkins para la identificación de los modelos ARCH y GARCH, viendo las funciones de autocorrelación (gráfico 6) y de autocorrelación parcial de los residuos al cuadrado del modelo 1 estimado.

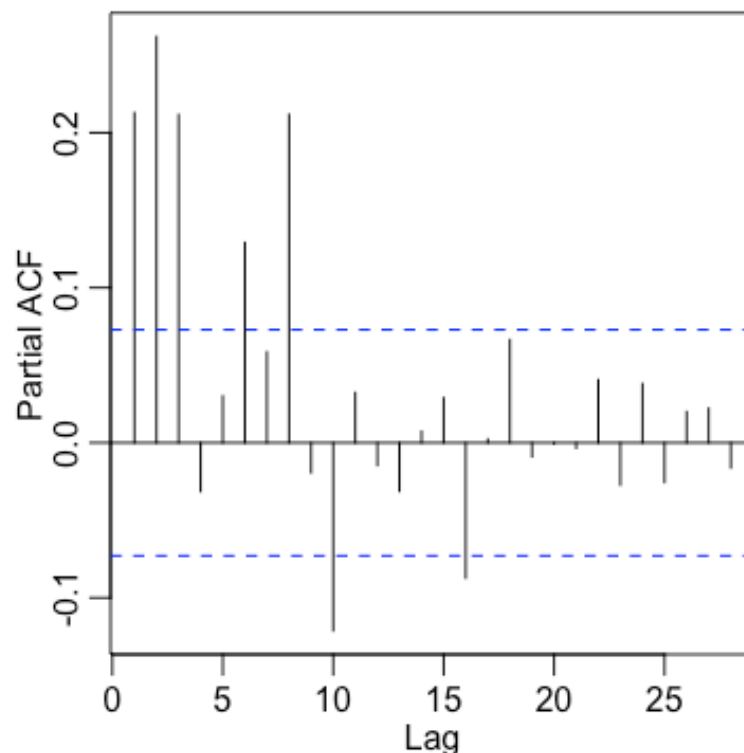


Gráfico 8: Función de autocorrelación parcial de los residuos al cuadrado del modelo 1

Dado que la función de autocorrelación decrece exponencialmente y los retardos de la función de autocorrelación parcial son cada vez más cercanos a 0, de las dos funciones se puede concluir que el modelo teórico GARCH(p,q) parece ser más apropiado que el ARCH(p). Además, en el gráfico 2 se puede observar cierta persistencia en la volatilidad, lo que es una característica propia del modelo teórico GARCH(p,q). La función de autocorrelación parcial es decreciente, presentando un comportamiento sinusoidal. Además, los 3 primeros retardos son significativos, por lo que orden de p (que se corresponde con la componente autorregresiva) puede ser 3. En cuanto al orden de q, es difícil sacar conclusiones a partir de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial, por lo que probaremos con distintos modelos y eligiremos aquel que minimice los criterios AIC, BIC, HQ y SIC.

Además, para órdenes superiores como el GARCH(3,2) o el GARCH(3,3), la mayoría de parámetros resultan ser no significativos por lo que también se incluirá el modelo GARCH(1,1) para la comparación. Del mismo modo que hicimos para identificar el modelo para la media, podemos introducir la variable impulso  $I_t$  descrita en el modelo para la media.

En la siguiente tabla podemos ver que la mayoría de parámetros del modelo GARCH(3,3) no son significativos.

Tabla 6: Parámetros modelo ARIMA-GARCH con análisis de intervención				
	<i>Estimación</i>	<i>Desviación típica</i>	<i>t-valor</i>	<i>p-valor</i>
$\mu$	0.000067	0.000329	0.203621	0.838649
$\omega$	0.000005	0.000010	0.435737	0.663027
$\alpha_1$	0.025630	0.030443	0.841888	0.399851
$\alpha_2$	0.094836	0.058199	1.629.491	0.103209
$\alpha_3$	0.000000	0.056235	0.000003	0.999997
$\beta_1$	0.488805	0.857240	0.570208	0.568537
$\beta_2$	0.341644	0.870853	0.392310	0.694830
$\beta_3$	0.000697	0.923046	0.000755	0.999398
Impulso	0.000311	0.000091	3.399.963	0.000674
Asimetría	0.885185	0.048215	18.359.023	0.000000
Forma	8.026.321	2.755.026	2.913.338	0.003576

Todos los parámetros del modelo para la volatilidad son no significativos.

Tabla 7: Comparación distintos modelos GARCH					
	<i>GARCH(3,0)</i>	<i>GARCH(1,1)</i>	<i>GARCH(3,1)</i>	<i>GARCH(3,2)</i>	<i>GARCH(3,3)</i>
Akaike	-6.2251	-6.3011	-6.2985	-6.2960	-6.2933
Bayes	-6.1744	-6.2568	-6.2414	-6.2326	-6.2235
Shibata	-6.2254	-6.3013	-6.2988	-6.2964	-6.2937
Hannan-Quinn	-6.2055	-6.2840	-6.2765	-6.2715	-6.2663

De acuerdo con los 4 criterios, el mejor modelo de los 5 es el GARCH(1,1).

### Estimación de los parámetros:

Calcularemos los parámetros estimados utilizando la librería “rugarch” de R. En particular, utilizando la función “ugarchfit”. Esta función nos permite introducir una especificación para la media, una especificación para la distribución de las innovaciones y una especificación para el modelo para la volatilidad. La estimación se calcula utilizando el método aumentado de Lagrange para problemas no lineales.

Tabla 8: Parámetros modelo ARIMA-GARCH

	Estimación	Desviación típica	t-valor	p-valor
$\mu$	0.000061	0.000336	0.18247	0.855215
$\omega$	0.000003	0.000002	1.17054	0.241785
$\alpha_1$	0.064930	0.026946	2.40961	0.015970
$\beta_1$	0.903918	0.030985	29.17259	0.000000
Covid impulso	0.000204	0.000096	2.12782	0.033352
Asimetría	0.890896	0.048391	18.41023	0.000000
Forma	7.780780	1.995370	3.89942	0.000096

Log-likelihood	2279.584
Criterio de Akaike	-6.2865
Criterio BIC	-6.2422

Estos criterios son comparados con los obtenidos sin incluir la variable impulso. El AIC sin incluir la variable impulso es -6.2689, mientras que el BIC es -6.2309. Ambos son mayores, por lo que, el modelo que incluye la variable impulso es mejor de acuerdo con estos criterios. El modelo estimado resultante, una vez eliminados los parámetros no significativos es:

Modelo 2:

$$r_t = \hat{a}_t - 0.031I_t$$

$$\sigma_t^2 = 0.06\hat{a}_{t-1}^2 + 0.9\hat{\sigma}_{t-1}^2 + 0.0002I_t$$

Donde  $a_t$  sigue una distribución t-student asimétrica, con un coeficiente de asimetría igual a 0,89 y un parámetro de forma igual a 7,78. El parámetro de forma determina el exceso de curtosis de la distribución de las innovaciones. El exceso de curtosis se calcula por  $\frac{6}{v-4}$  siendo v el parámetro de forma. Dado que  $\alpha_1 = 0.06$ , las innovaciones del día anterior conducen a una mayor volatilidad en el día siguiente. Como  $\beta_1 = 0.9$ , la volatilidad parece mostrar una persistencia alta. Además, dado que  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ , no tenemos un problema de raíz unitaria y por tanto el impacto de los shocks al cuadrado pasados no son persistentes.

## Diagnosis del modelo 2:

Los residuos resultantes del modelo escogido deben tener un comportamiento similar al de un ruido blanco. Veamos la función de autocorrelación para los residuos estandarizados

$\hat{\varepsilon}_t = \frac{\hat{a}_t}{\hat{\sigma}_t}$  de este modelo.

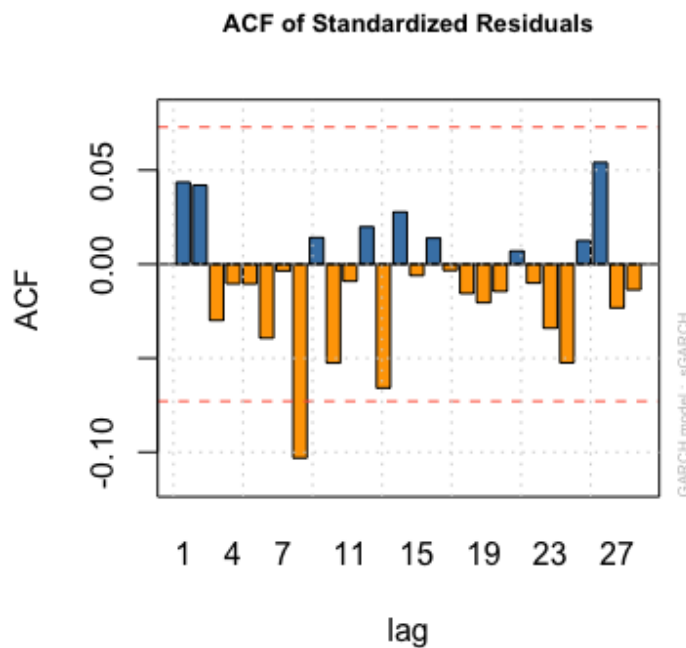


Gráfico 9: Función de autocorrelación residuos estandarizados del modelo

Aquí, observamos que las correlaciones son muy débiles, por lo que parece que se ha conseguido eliminar el problema de la autocorrelación en los residuos estandarizados. El único retardo fuera de las bandas es el 8.

Para comprobar si los residuos son homocedásticos, podemos ver la función de autocorrelación de los residuos estandarizados al cuadrado, con el objetivo de estudiar si hay alguna dependencia lineal entre estos.

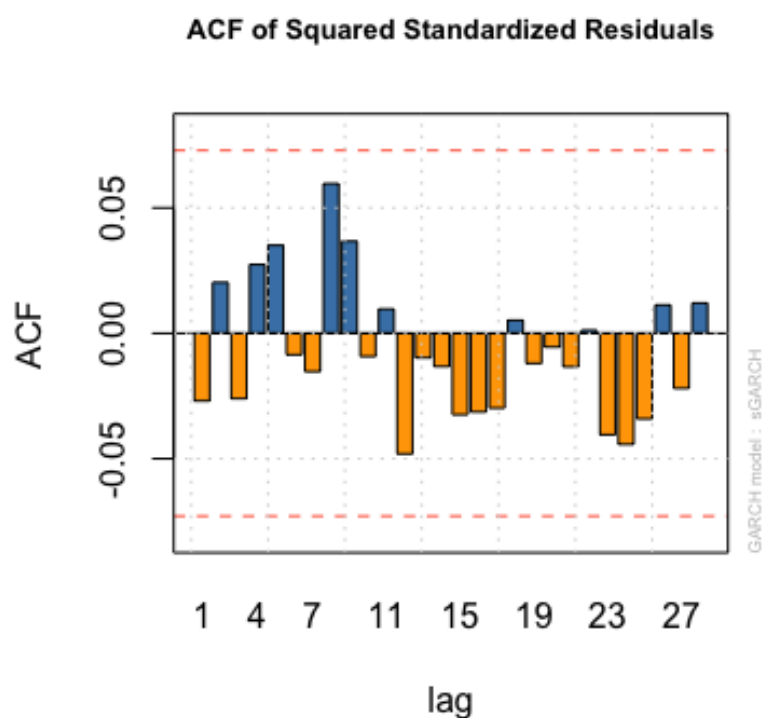


Gráfico 10: Función de autocorrelación residuos estandarizados al cuadrado del modelo

Tabla 9: Contrastes independencia y homocedasticidad

Contraste Ljung-Box		Contraste ARCH-LM	
<i>Estadístico</i>	<i>P-Valor</i>	<i>Estadístico</i>	<i>P-Valor</i>
25.43	0.4945	18.638	0.9089

En ambos contrastes se han incluido los 28 primeros coeficientes de autocorrelación. Según estos contrastes, los residuos estandarizados son homocedásticos e independientes.

Además, debemos asegurarnos de que la suposición acerca de la distribución de  $\varepsilon_t$  sirve como una aproximación suficientemente buena para la distribución de esta variable aleatoria.



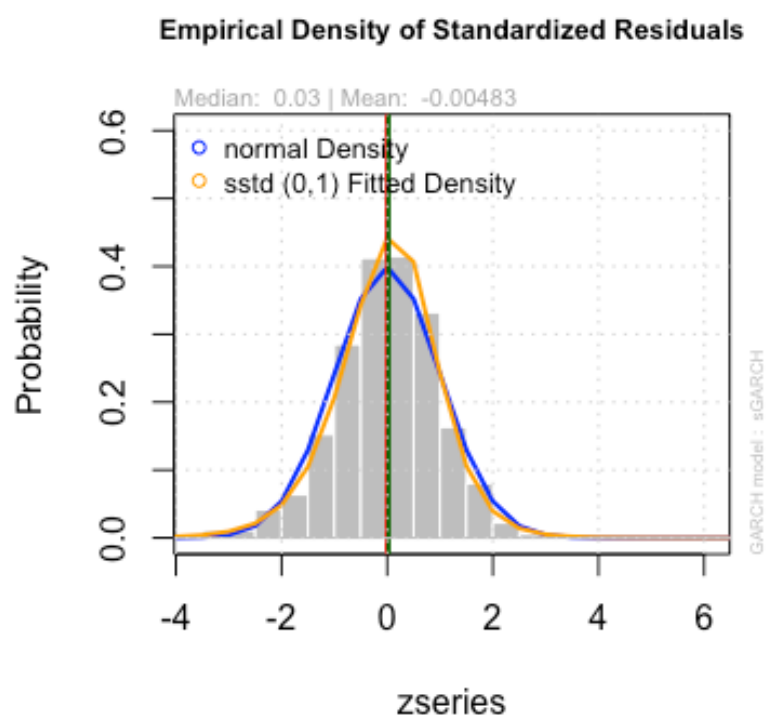


Gráfico 11: Función de densidad empírica de los residuos estandarizados

La distribución empírica de los residuos estandarizados es muy similar a la que previamente se decidió que iba a ser la distribución de  $\varepsilon_t$ . Esto se puede observar con el gráfico cuantil-cuantil.

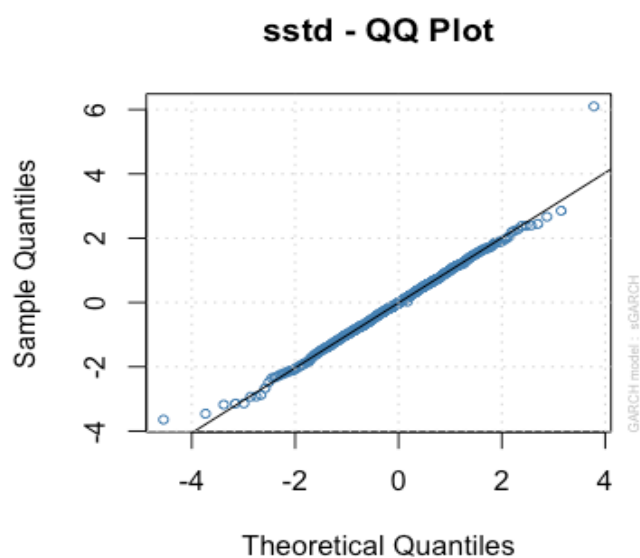


Gráfico 12: Gráfico cuantil-cuantil de la distribución empírica y la teórica

Viendo el gráfico anterior, se corrobora que la distribución elegida para los residuos estandarizados es muy similar a la distribución empírica de estos una vez estimado el modelo, ya que la mayoría de los residuos se sitúan sobre la bisectriz del gráfico cuantil-cuantil.

### 4.3 Predicción:

Para realizar predicciones se utiliza el modelo previamente escogido. La predicción para el día siguiente se define como:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{t+1}^2 &= 0.11\hat{a}_t^2 + 0.85\hat{\sigma}_t^2 + 0.0002I_{t+1} \\ \hat{r}_{t+1} &= \hat{a}_{t+1} - 0.031I_{t+1}\end{aligned}$$

La predicción para el día k se define como

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{t+k}^2 &= 0.11\hat{a}_{t+k-1}^2 + 0.85\hat{\sigma}_{t+k-1}^2 + 0.0002I_{t+k} \\ \hat{r}_{t+k} &= \hat{a}_{t+k} - 0.031I_{t+k}\end{aligned}$$

Para realizar predicciones se están llevando a cabo una serie de supuestos. El primero es que los parámetros se van a mantener constantes. El segundo es que la distribución de los rendimientos va a seguir siendo la misma. Hay que tener en cuenta que la variable impulso no va a tener ningún efecto sobre las predicciones, ya que esta variable solo afecta a los datos comprendidos entre el 21 de febrero y el 12 de marzo de 2020.

La situación actual, así como las medidas que pueda tomar el gobierno ante la evolución de la pandemia, pueden acarrear implicaciones importantes en la evolución de los rendimientos y de la volatilidad de la serie. Por esta razón, solo se realizarán 10 predicciones hacia delante.

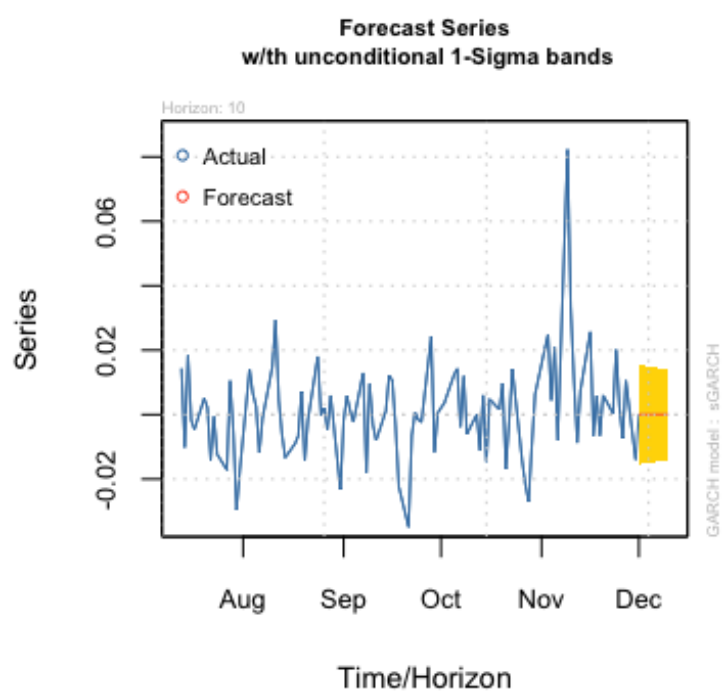


Gráfico 13: Predicciones hacia delante para los rendimientos

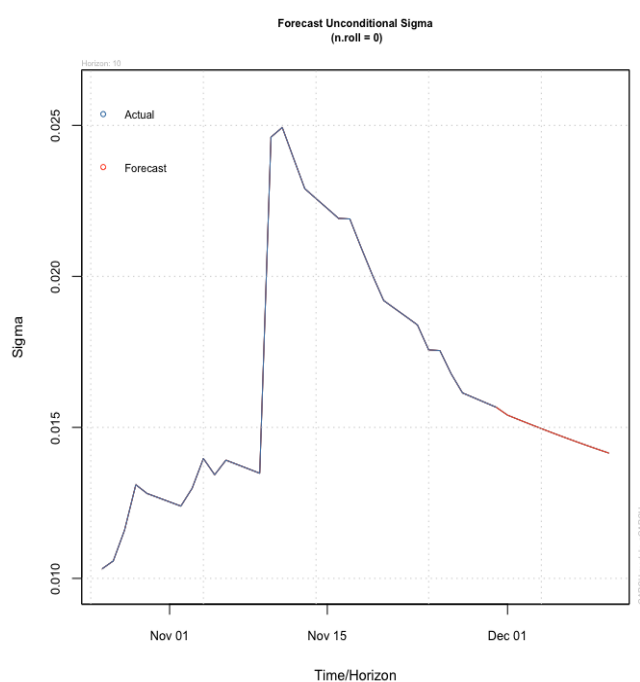


Gráfico 14: Predicciones hacia delante para la volatilidad

El rendimiento esperado para las próximas 10 observaciones es  $6,1e-05$ . La volatilidad se espera que disminuya desde 0.015 hasta 0.014.

## 5. Conclusiones

Este trabajo ha servido para realizar predicciones acerca de los 10 próximos rendimientos diarios del IBEX35. Primero, se estima un modelo ARIMA(0,0,0) para los rendimientos. Si introducimos una variable de tipo impulso que toma el valor 1 en los días comprendidos entre el 21 de febrero y el 12 de marzo, el modelo resultante resulta ser mejor de acuerdo con los criterios AIC y BIC. Se comprueba que los residuos del modelo no se comportan como un ruido blanco, ya que los residuos no superan las pruebas de diagnóstico de independencia y homocedasticidad de residuos. Esto conlleva a la introducción de un modelo para la volatilidad.

Así se llega a los modelos ARIMA-GARCH. Se elige el modelo ARIMA(0,0,0)-GARCH(1,1) y se introduce una variable impulso en el modelo para la media y para la volatilidad. Esta variable resulta ser significativa, por lo que se concluye que la crisis provocada por el coronavirus ha causado un efecto transitorio sobre los rendimientos y la volatilidad del IBEX35. Además, el coeficiente que acompaña a esta variable impulso en el modelo para los rendimientos medios es negativo, mientras que en el modelo para la volatilidad es positivo. Esto quiere decir que la crisis provocada por el coronavirus tuvo un efecto transitorio negativo sobre los rendimientos del IBEX35 y provocó un aumento transitorio de la volatilidad.

### **Bibliografía:**

Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327.

Mills 1993 T. Mills *The Econometric Modelling of Financial Time series*, Cambridge University Press, Cambridge (1993)

Campbell, J. Y., Lo, A. W., and MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton, NJ.

Lambert, P., and S. Laurent (2000): “Modelling Skewness Dynamics in Series of Financial Data,” Discussion Paper, Institut de Statistique, Louvain-la-Neuve.

Heather Mitchell & Michael D Mckenzie (2003) GARCH model selection criteria, *Quantitative Finance*, 3:4, 262-284, DOI: 10.1088/1469-7688/3/4/303

Tsay, R. S. (2010), *Financial Time Series and Their Characteristics*, John Wiley and Sons, Inc.

Alfonso Novales, (2013) “Modelos ARCH univariantes y multivariantes” Departamento de Economía Cuantitativa, Universidad Complutense

Ghalanos, A. (2020). *Introduction to the rugarch package* (version 1.3-8). Retrieved from <http://cran.r-project.org/web/packages/rugarch> [ Links ]

La información (31/03/2020) “El Ibex cierra en marzo el peor mes de su historia tras caer un 22% por el Covid-19”

<https://www.lainformacion.com/mercados-y-bolsas/el-ibex-35-cierra-en-marzo-el-peor-mes-de-su-historia-tras-caer-el-22-por-el-covid-19/6555607/>