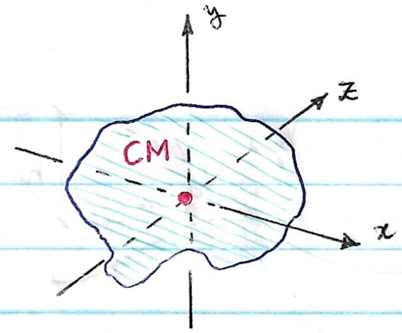
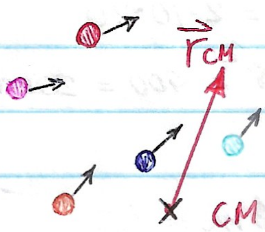
Centro de Massa



É um ponto geométrico onde se encontra concentrada boa parte da massa de um corpo. O movimento tem sua trajetória guiada por ele.

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}$$



Suas coordenadas são uma média ponderada das demais partículas do sistema.

$$\boxed{C = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i C_i}$$

$\Rightarrow \vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$

$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{i} + y_{CM}\hat{j} + z_{CM}\hat{k}$

$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i \cdot \hat{i} + \frac{1}{M}\sum m_i y_i \cdot \hat{j} + \frac{1}{M}\sum m_i z_i \hat{k}$ * C sendo x, y, ou z

$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} m_i (\sum x_i \cdot \hat{i} + \sum y_i \hat{j} + \sum z_i \hat{k})$

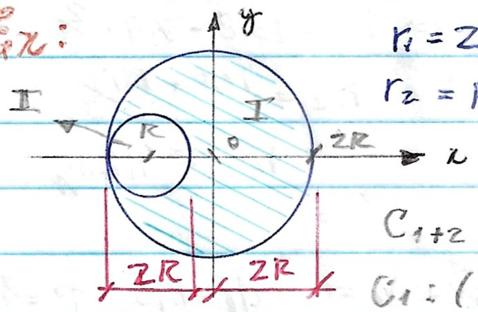
$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} m_i \cdot \sum \vec{r}_i \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$

Corpos maciços

$$\boxed{\begin{aligned} C &= \frac{1}{M}\int c\, dm \\ \Rightarrow \rho &= \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \\ C &= \frac{1}{V}\int c\, dV \end{aligned}}$$

* Conceitos de simetria ajudam a localizar o centro de massa

Ex:



$r_1 = 2R$

$r_2 = R$

$C_{1+2} : (0,0)$

$C_1 : (x_c, y_c)$

$C_2 = (-R, 0)$

$\Rightarrow x_{1+2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_1 x_1 = -m_2 x_2$

$x_1 = \frac{-m_2}{m_1} x_2$

$\Rightarrow \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot A_s \cdot h$

$x_1 = -\frac{\rho \cdot \pi R^2 \cdot h x_2}{\rho \cdot (\pi(2R)^2 - \pi R^2) \cdot h} = \frac{-\pi R^2}{\pi(4R^2 - R^2)} x_2 = \frac{-R^2}{3R^2} x_2$

$x_1 = -\frac{1}{3} x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} R$

$C_1 : (\frac{1}{3}R, 0)$

Força em um sistema de Partículas

$$\boxed{\sum F_r = \sum m \cdot a_{CM}}$$

$\Rightarrow M\vec{r}_{CM} = \sum m_i \vec{r}_i \; (\frac{dr}{dt})$

$\Rightarrow M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i \; (\frac{dv}{dt})$

$M\vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i$

$\Rightarrow \vec{F}_r = \sum F_i$

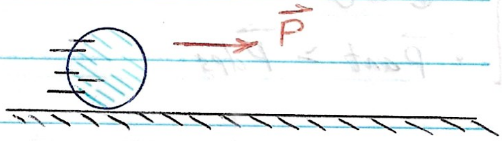
*Obs: O CM apresenta suas próprias grandezas, diferentes das partículas

Momento Linear / Quantidade de Movimento

É uma grandeza vetorial associado à capacidade de colisão de uma partícula.

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

$$\boxed{\vec{F_r} = \frac{d\vec{P}}{dt}} \qquad \boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{CM}}$$



$$\boxed{\Sigma \vec{P_i} = \Sigma \vec{P_f}} \quad \text{p/ } F_r = 0$$

Impulso

É dado como a variação da quantidade de movimento.

$$\boxed{\vec{P_f} - \vec{P_i} = \vec{I} = \Delta\vec{P}}$$

$\Rightarrow \Delta\vec{P} = mv_f - mv_i = I$

$\Rightarrow m(v_f - v_i) = I \ (\div)\ \Delta t,\ \Delta t \to 0^+$

$m\,a_m = I/\Delta t \Rightarrow I = F_m \cdot \Delta t$

$$\boxed{\begin{array}{c} I = F_m \cdot \Delta t \\ \Delta t \to 0^+ \end{array}}$$

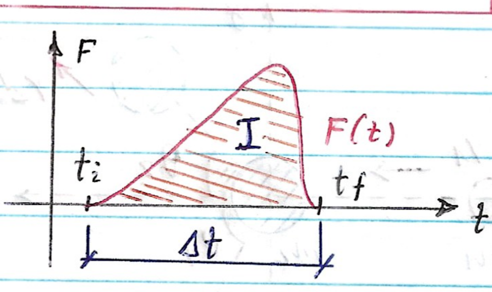
Para um Δt muito pequeno

Para calcular pequenas variações de Impulso, integramos:

$\Rightarrow d\vec{p} = \vec{F}(t)\,dt$

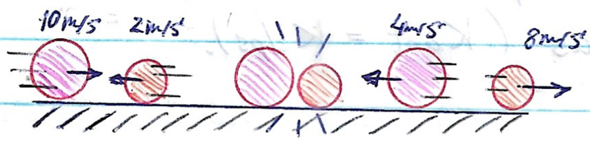
$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{P} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{P} = \vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} F(t)\,dt}$$



Colisões

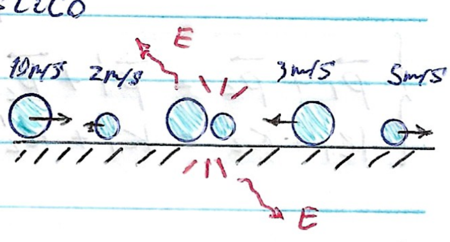
Perfeitamente Elástico



- $K_{ant} = K_{dps}$
- $e = 1$
- $\vec{P}_{ant} = \vec{P}_{dps}$

Parcialmente Elástico

- $K_{ant} > K_{dps}$
- $0 < e < 1$
- $\vec{P}_{ant} > \vec{P}_{dps}$

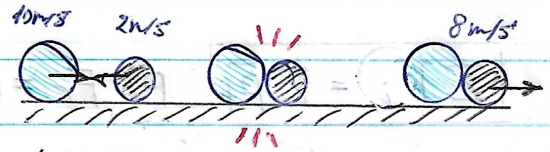


Perfeitamente Inelástico

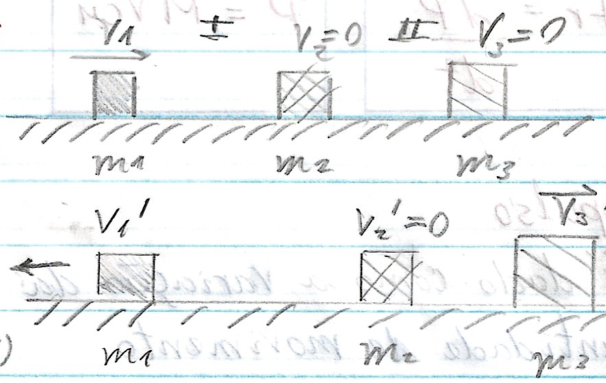
- $K_{ant} > K_{dps}$
- $e = 0$
- $\vec{P}_{ant} > \vec{P}_{dps}$

$$\boxed{e = \frac{V_2' - V_1'}{V_1 - V_2}}$$

* Considera-se o sentido das velocidades (sinais)



Ex:



$V_1 = 10 m/s$ $m_1 = ?$
$m_3 = 6 kg$ $m_2 = ?$
$V_2' = 0$ $V_1' = ?$
$V_3' = 5 m/s$

<u>1 e 2</u>

$\Rightarrow \vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}'$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{V_2' - V_1'}{10 - 0} \Rightarrow V_2' - V_1' = 10$ (I)

$\Rightarrow m_1 \cdot 10 + \cancel{m_2 \cdot 0} = m_1 V_1' + m_2 V_2'$

$10 m_1 = m_1 V_1' + m_2 V_2'$ (II)

<u>2 e 3</u>

$\Rightarrow 1 = \dfrac{5 - 0}{V_2' - 0} \Rightarrow V_2' = 5 m/s$

$\Rightarrow \vec{p_2} + \vec{p_3} = \vec{p_2}' + \vec{p_3}'$

$m_2 \cdot 5 + \cancel{m_3 \cdot 0} = \cancel{m_2 \cdot 0} + 6 \cdot 5$

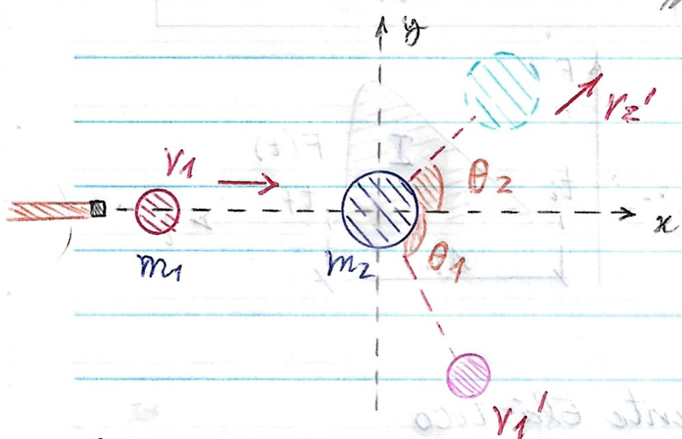
$\boxed{m_2 = \frac{30}{5} = 6 kg}$

I $\Rightarrow \boxed{V_1' = 5 - 10 = -5 m/s}$

II $\Rightarrow 10 m_1 = m_1(-5) + 6 \cdot 5$

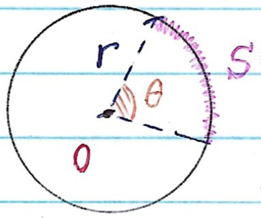
$15 m_1 = 30 \Rightarrow \boxed{m_1 = 2 kg}$

Para Colisões em 2 Dimensões devemos empregar também as equações de energia cinética, principalmente em colisão elásticas ($K_{ant} = K_{dps}$).



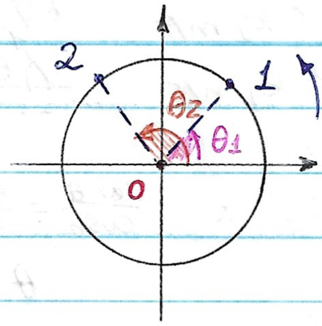
$$\begin{cases} \vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}' & \text{Eq. Principal} \\ K_1 + K_2 = K_1' + K_2' & \text{Eq. Auxiliar} \end{cases}$$

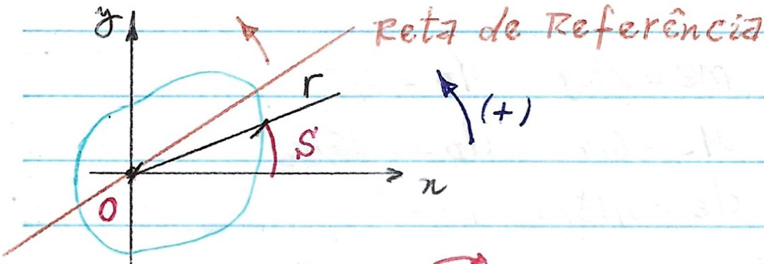
Rotação



$$\boxed{\theta = S/r \ [rad]}$$

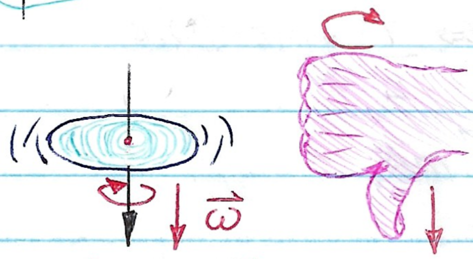
$1 rev = 360° = 2\pi \ rad$





$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$



$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta \end{cases}$$

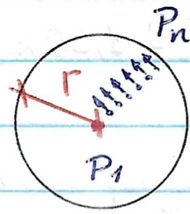
Cinemática

$$\boxed{v = \omega r} \qquad \boxed{a = \alpha r}$$

$$\boxed{a = \omega^2 r} \qquad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

$$\boxed{T = 1/f} \qquad \alpha = \frac{v^2}{r}$$

Energia



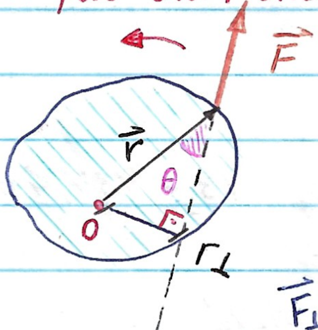
P_n $K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$\therefore K = \frac{1}{2}(\sum mr^2)\omega^2$

Momento de Inércia

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

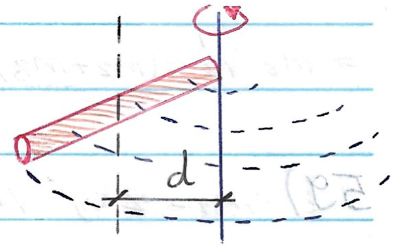
Torque ou Momento de uma força

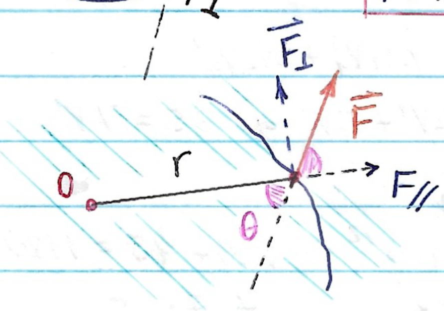


$$\boxed{M^o r = \vec{F} \cdot sen\theta \cdot r}$$

$$\boxed{M^o r = I \cdot \alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \int [r(m)]^2 \, dm \\ I &= I_{CM} + M d^2 \end{aligned}}$$





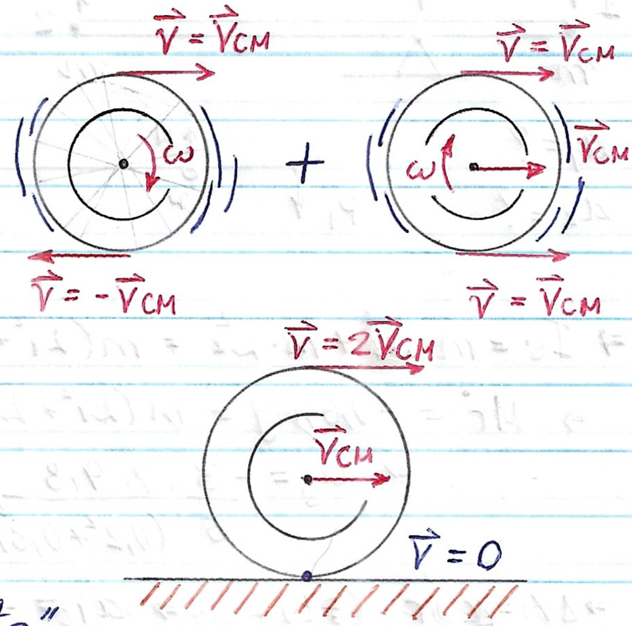
$$\boxed{\begin{aligned} \tau &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} M^o r \, d\theta \\ \tau &= M^o r \Delta\theta \end{aligned}}$$

$$\boxed{M^o r = F_1 \cdot r_1 + F_2 \cdot r_2 + \ldots F_n \cdot r_n}$$

$$\boxed{P = \frac{d\tau}{dt} = M^o r \frac{d\theta}{dt} = M^o r \omega}$$

Rolagem

Combinação da Translação com a Rotação, tomando como referência, um ponto do corpo

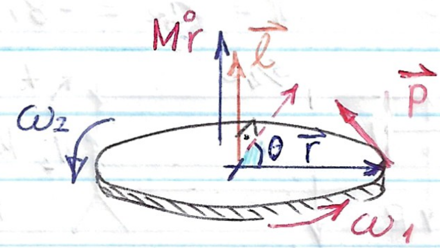


$$R = E_c + \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2}$$

Momento Angular

É a "Quantidade de movimento" para uma rotação.



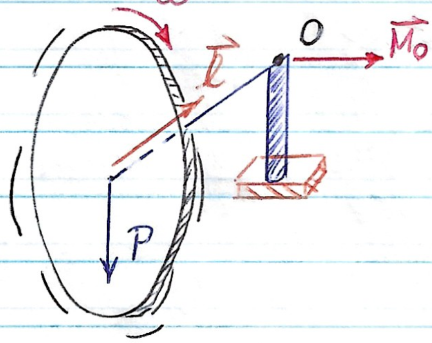
$$\vec{l} = \vec{p} \times \vec{r} \cdot \operatorname{sen}\theta$$

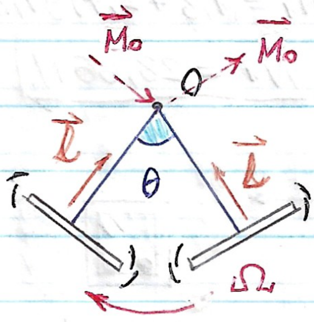
$$\boxed{\vec{l} = \vec{p} \times \vec{r} = m(\vec{r} \times \vec{v})}$$

$$\boxed{M_r^o \cdot t = \Delta \vec{l}} \Rightarrow \boxed{M_r^o = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{l} = I_{CM} \cdot \omega}$$

Giroscópio





$$\boxed{M^o r = I \cdot \alpha}$$

$$\boxed{\Omega = \frac{M_r^o}{\vec{L}} = \frac{mgl}{I\omega}}$$

$\Rightarrow \Delta L \to S$

$\Rightarrow \theta \to 0^+$

$\Rightarrow \vec{L}_o \to \vec{L}$

$$\theta \simeq \operatorname{sen}\theta \simeq \operatorname{tg}\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{S}{r} = \frac{\Delta L}{L_o}$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{\theta}{t} = \frac{M_o \cdot \cancel{t}}{L \cdot \cancel{t}}$$