TRABALHO 3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

OBS. 1: PARA OS PROBLEMAS, UTILIZE OS MÉTODOS VISTOS EM AULA (TRAPÉZIO, SIMPSON 1/3, SIMPSON 3/8 e TRAPÉZIO FUNÇÕES).

OBS. 2: COMPARE OS RESULTADOS COM A INTEGRAL EXATA.

OBS. 3: ESCOLHA 5 PROBLEMAS PARA RESOLVER.

Problema 1 — Cálculo de Energia Consumida por CPU sob Carga Intensiva

Durante a execução de um **benchmark intensivo**, deseja-se estimar a **energia total consumida** por uma CPU ao longo de um intervalo de tempo de 6 segundos. A **potência instantânea dissipada** $P(t)$, em watts, é modelada por uma função quadrática que representa a variação da carga computacional com o tempo. A função fornecida é:

$$P(t) = 3t^2 - 2t + 5$$

Objetivo: Estimar numericamente a energia total dissipada no intervalo de $t = 0$ a $t = 6$ segundos, utilizando os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação física: A energia total E, em joules, consumida no intervalo de tempo especificado é dada pela integral definida da potência:

$$E = \int_0^6 P(t)\, dt$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos pelos métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções devem ser comparados com a solução exata acima para análise do erro relativo e comportamento dos métodos.

Para fins de simulação numérica com dados tabulados, considere os valores de potência $P(t_i)$ obtidos experimentalmente nos instantes $t_i = 0, 1, 2, \ldots, 6$. Os dados simulados com pequenas perturbações (ruído) são apresentados a seguir:

Tempo t_i (s)	**Potência $P(t_i)$ (W)**
0	5,04
1	5,93
2	12,08
3	26,01
4	44,91
5	70,21
6	100,87

Utilize esses valores para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos, e compare com a integral exata para calcular os erros de cada método.

Problema 2 — Estimativa do Volume de Dados Trafegados em Rede com Congestionamento Progressivo

Um engenheiro de redes analisa o **volume acumulado de dados transmitidos** em um enlace de comunicação durante 6 segundos. O sistema opera sob **congestionamento progressivo**, o que faz com que a **taxa de transferência instantânea** varie de forma logarítmica ao longo do tempo. A taxa de transmissão de dados é modelada por:

$$f(t) = \ln(t+1) \quad \text{(em MB/s)}$$

Objetivo: Estimar numericamente o **volume total de dados** transmitido no intervalo $t \in [0,\ 6]$ segundos, aplicando os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação física: O volume total transmitido é obtido pela integral da taxa de transferência:

$$V = \int_0^6 f(t)\, dt$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos pelos métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Para fins de simulação numérica com dados tabulados, considere os valores da taxa de transmissão $f(t_i)$ obtidos experimentalmente nos instantes $t_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Os dados simulados com pequenas perturbações (ruído) são apresentados a seguir:

Tempo t_i (s)	**Taxa de Transmissão $f(t_i)$ (MB/s)**
0	0,01
1	0,69
2	1,09
3	1,40
4	1,60
5	1,79
6	1,95

Utilize esses valores para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos, e compare com a integral exata para calcular os erros de cada método.

Problema 3 — Determinação da Carga Elétrica Acumulada em Circuito Digital

Durante um pulso de sinal, deseja-se calcular a **carga elétrica total acumulada** em um capacitor presente em um circuito digital. A **corrente instantânea** $I(t)$, em amperes, que atravessa o capacitor ao longo do tempo t, em segundos, é modelada por uma função senoidal de meia onda. O modelo fornecido para a corrente é:

$$I(t) = \sin(\pi t) \quad \text{(em A)}$$

Objetivo: Estimar numericamente a **carga total acumulada** Q, em coulombs, no intervalo de tempo $t \in [0,\ 1]$, aplicando os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação física: A carga acumulada em um capacitor é dada pela integral da corrente ao longo do tempo:

$$Q = \int_0^1 I(t)\,dt$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos pelos métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Para fins de simulação numérica com dados tabulados, considere os valores da corrente $I(t_i)$ obtidos experimentalmente nos instantes $t_i = 0,\ 0{,}1667,\ 0{,}3333,\ 0{,}5000,\ 0{,}6667,\ 0{,}8333,\ 1{,}0000$. Os dados simulados com pequenas perturbações (ruído) são apresentados a seguir:

Tempo t_i (s)	**Corrente $I(t_i)$ (A)**
0,0000	0,00
0,1667	0,515
0,3333	0,866
0,5000	1,000
0,6667	0,866
0,8333	0,515
1,0000	0,01

Utilize esses valores para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos, e compare com a integral exata para calcular os erros de cada método.

Problema 4 — Tempo Total de Execução em Algoritmo com Complexidade Racional

Considere uma rotina de busca que realiza chamadas sucessivas a uma estrutura de dados. O **tempo de execução instantâneo** $T(n)$, em milissegundos, varia com o índice n de chamadas, modelado por uma função racional. Essa relação reflete a desaceleração do ganho por chamadas consecutivas, típica em estruturas com saturação de desempenho. O modelo fornecido é:

$$T(n) = \frac{1}{1+n^2} \quad \text{(em ms)}$$

Objetivo: Estimar numericamente o **tempo total acumulado de execução** no intervalo de chamadas $n \in [0,\ 6]$, utilizando os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação computacional: O tempo total é obtido pela integral definida da função $T(n)$, que representa a soma contínua dos tempos parciais de execução ao longo das chamadas:

$$\int_0^6 T(n)\, dn$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos pelos métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções devem ser comparados com a solução exata acima para análise de erro.

Para fins de simulação numérica com dados tabulados, considere os valores da função $T(n_i)$ obtidos experimentalmente nos instantes $n_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Os dados simulados com pequenas perturbações (ruído) são apresentados a seguir:

Chamadas n_i	**Tempo Instantâneo $T(n_i)$ (ms)**
0	1,00
1	0,49
2	0,20
3	0,099
4	0,060
5	0,038
6	0,027

Utilize esses valores para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos, e compare com a solução analítica para avaliar os erros de cada método.

Problema 5 — Estimativa de Energia em Sensor IoT com Operação Intermitente

Durante a operação em modo de economia de energia, um sensor IoT alterna entre estados ativos e repouso, fazendo com que sua **potência instantânea** $P(t)$, em miliwatts, varie de forma oscilatória e decrescente ao longo do tempo t, em segundos. Esse comportamento é modelado por uma função composta que simula pulsos de atividade amortecidos. A função fornecida é:

$$P(t) = e^{-0,2t} \cdot \cos(t) \quad \text{(em mW)}$$

Objetivo: Estimar numericamente o **consumo total de energia** no intervalo de tempo $t \in [0,\ 6]$, aplicando os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação física: A energia total dissipada é dada pela integral da potência:

$$E = \int_0^6 P(t)\,dt \quad \text{(em mJ)}$$

Solução Numérica: Estime a energia utilizando os métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções. Considere uma malha com espaçamento uniforme de $h = 1$, utilizando 7 pontos ($t_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$), o que garante compatibilidade com os métodos compostos indicados.

A tabela a seguir apresenta valores simulados da função $P(t_i)$, com pequenas variações atribuídas a ruído de medição:

Tempo t_i (s)	**Potência $P(t_i)$ (mW)**
0,0	1,00
1,0	0,44
2,0	−0,23
3,0	−0,47
4,0	−0,24
5,0	0,13
6,0	0,27

Utilize os dados tabulados para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos e discuta o comportamento das estimativas obtidas em comparação com o valor de referência obtido com malha refinada ($n = 1000$).

Problema 6 — Volume de Água Infiltrada em Solo Argiloso Saturado

Durante a realização de um **ensaio de permeabilidade**, mede-se a **taxa de infiltração de água** $f(t)$, em milímetros por hora, em um solo argiloso previamente saturado. Observa-se que a taxa de infiltração diminui com o tempo devido à saturação progressiva e ao gradativo equilíbrio de pressões capilares. Esse comportamento é modelado pela função:

$$f(t) = 10e^{-0,5t} \quad \text{(em mm/h)}$$

Objetivo: Estimar numericamente o **volume total de água infiltrada** ao longo das primeiras 4 horas de ensaio, utilizando os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação física: O volume acumulado de água infiltrada é obtido pela integral da taxa de infiltração no intervalo de interesse:

$$V = \int_0^4 f(t)\,dt$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos pelos métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções devem ser comparados com a solução exata acima para análise de erro.

Para fins de simulação numérica com dados tabulados, considera-se agora uma malha refinada com 7 pontos uniformemente espaçados no intervalo $t \in [0,\ 4]$. Os valores da taxa de infiltração $f(t_i)$, obtidos experimentalmente, são apresentados a seguir com pequenas perturbações (ruído de medição):

Tempo t_i **(h)**	**Taxa de Infiltração** $f(t_i)$ **(mm/h)**
0,0	10,00
0,666	7,20
1,333	5,20
2,0	3,64
2,666	2,51
3,333	1,74
4,0	1,37

Utilize esses valores para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos, considerando 6 subintervalos igualmente espaçados ($n = 6$). Compare os resultados com a solução exata para avaliar os erros de cada método.

Problema 7 — Cálculo da Força Total Distribuída em Viga com Carregamento Não Uniforme

Considere uma viga submetida a uma **carga distribuída não uniforme**, cuja intensidade varia ao longo do comprimento da viga de acordo com a posição x, em metros. A função de carregamento é dada por um polinômio cúbico que representa um perfil assimétrico de força por unidade de comprimento. A função fornecida para a carga distribuída é:

$$q(x) = x^3 - 2x + 1 \quad \text{(em N/m)}$$

Objetivo: Estimar numericamente a **força total aplicada** sobre a viga no intervalo $x \in [0,\ 3]$, utilizando os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação física: A força total corresponde à área sob o gráfico da função de carregamento, ou seja:

$$F = \int_0^3 q(x)\, dx$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos pelos métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções devem ser comparados com a solução exata acima para análise de erro.

Para fins de simulação numérica com dados tabulados, considere os valores da função $q(x_i)$ obtidos experimentalmente nos pontos $x_i = 0{,}0,\ 0{,}5,\ 1{,}0,\ 1{,}5,\ 2{,}0,\ 2{,}5,\ 3{,}0$. Os dados simulados com pequenas variações (ruído) são apresentados a seguir:

Posição x_i (m)	**Carga $q(x_i)$ (N/m)**
0,0	1,00
0,5	0,47
1,0	0,01
1,5	−0,16
2,0	1,00
2,5	4,39
3,0	10,00

Utilize esses valores para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos e comparar com a solução exata para avaliar os erros dos métodos.

Problema 8 — Estimativa de Recalque Vertical ao Longo de Perfil Estratificado

Em um perfil de solo estratificado, o **recalque vertical acumulado** é influenciado pelas deformações locais que ocorrem ao longo da profundidade. Esse comportamento é descrito por uma função de deformação $\varepsilon(z)$, dependente da profundidade z, em metros. O modelo assume maior deformação nas camadas superficiais e decaimento com a profundidade. A função fornecida para a deformação vertical é:

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \quad \text{(adimensional)}$$

Objetivo: Estimar numericamente o **recalque total da camada de solo** entre $z = 0$ e $z = 6$ metros, aplicando os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação geotécnica: O recalque total é obtido pela integral da deformação ao longo da profundidade:

$$S = \int_0^6 \varepsilon(z)\, dz$$

Solução Numérica: Estime o recalque total utilizando os métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções, e compare os resultados obtidos com a solução exata acima.

Para fins de simulação numérica com dados tabulados, considere os valores da função $\varepsilon(z_i)$ obtidos experimentalmente nos pontos $z_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Os dados simulados com pequenas perturbações (ruído de medição) são apresentados a seguir:

Profundidade z_i (m)	**Deformação $\varepsilon(z_i)$ (adimensional)**
0	1,01
1	0,24
2	0,11
3	0,062
4	0,039
5	0,027
6	0,021

Utilize esses valores para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos e avaliar os erros de cada método.

Problema 9 — Força Total Exercida pela Água em Parede de Tanque Cilíndrico

A **pressão hidrostática** exercida pela água sobre a parede de um tanque aumenta proporcionalmente à profundidade. Em um tanque cilíndrico vertical, deseja-se estimar a **força total por metro de largura** aplicada pela água na parede lateral, entre o fundo do tanque e a superfície da água, situada a 2 metros de altura.

A pressão hidrostática, em função da profundidade z, é dada por:

$$p(z) = 1000z \quad (\text{em N/m}^2)$$

Objetivo: Estimar numericamente a **força total** exercida pela água na parede do tanque entre $z = 0$ e $z = 2$ metros, considerando uma unidade de largura da parede. Aplicar os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação física: A força total F, por metro de largura, é obtida pela integral da pressão sobre a altura vertical da parede:

$$F = \int_0^2 p(z)\, dz$$

Solução Numérica: Estime a força total utilizando os métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções, e compare os resultados obtidos com a solução exata.

Para fins de simulação numérica com dados tabulados, considere os valores de pressão $p(z_i)$ obtidos experimentalmente nos pontos $z_i = 0, 0{,}33, 0{,}67, 1{,}00, 1{,}33, 1{,}67, 2{,}00$, com passo constante $h = 0{,}33\overline{3}$ m. Os dados simulados com pequenas variações (ruído) são apresentados a seguir:

Profundidade z_i (m)	**Pressão $p(z_i)$ (N/m^2)**
0,00	0
0,33	335
0,67	675
1,00	995
1,33	1335
1,67	1680
2,00	2015

Utilize esses valores para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos e avaliar os erros de cada método.

Problema 10 — Energia Dissipada por Amortecedor Viscoso em Fundação Dinâmica

Durante um evento sísmico, amortecedores viscosos instalados em fundações profundas dissipam energia por meio de forças resistivas dependentes da velocidade relativa. Neste modelo simplificado, a **força resistiva** $F(t)$, em newtons, é descrita por uma função exponencial decrescente ao longo do tempo t, em segundos:

$$F(t) = 100e^{-t} \quad \text{(em N)}$$

Objetivo: Estimar numericamente o **trabalho total** W, em joules, dissipado pelo amortecedor no intervalo de $t = 0$ a $t = 5$ segundos, utilizando os métodos de integração numérica indicados.

Interpretação física: O trabalho realizado por uma força variável ao longo do tempo é dado pela integral:

$$W = \int_0^5 F(t)\,dt$$

Solução Numérica: Estime o valor de W utilizando os métodos de Trapézio, Simpson 1/3, Simpson 3/8 e Trapézio com Funções. Compare os resultados com a solução exata para análise de erro.

Para fins de simulação numérica com dados tabulados, considere os valores da força $F(t_i)$ obtidos experimentalmente nos instantes $t_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, com espaçamento constante de 1 segundo. Os dados simulados com pequenas perturbações (ruído) são apresentados a seguir:

Tempo t_i (s)	**Força $F(t_i)$ (N)**
0	100,00
1	36,85
2	13,50
3	5,02
4	1,82
5	0,68
6	0,27

Utilize esses valores para aplicar os métodos de integração numérica com dados discretos e avaliar os erros de cada método.