TRABALHO 2 (PARTE B) - DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA

Equipe: Pedro Miotto Mujica, Gabriel Costa de Moraes, Thiago Oliveira Dupim, Vinicius Castamann Giongo

OBS. 1: PARA OS PROBLEMAS APRESENTAR AS SAÍDAS DO CONSOLE, COMO JÁ DISCUTIDO. CALCULAR OS ERROS RELATIVO E DE TRUNCAMENTO, QUANDO VIÁVEL

OBS. 2: PARA TODOS OS PROBLEMAS ANALISAR OS RESULTADOS OBTIDOS E DAR INTERPRETAÇÕES E SIGNIFICADOS AOS SEUS RESULTADOS.

OBS. 3: ESCOLHA 5 PROBLEMAS PARA RESOLVER.

Problema 1 — Estimativa da taxa de transferência de dados em cache de processador

Durante testes de benchmark, foram medidos os volumes de dados processados por unidade de tempo em cache L1 de um processador. O objetivo é estimar a **taxa instantânea de transferência** (MB/ms) em um tempo crítico de 2,0 milissegundos, aplicando técnicas de diferenciação numérica.

Tempo (ms)	Dados processados (MB)
1,6	3,244909
1,8	3,583519
2,0	3,953032
2,2	4,356755
2,4	4,798624

Objetivo: Estimar numericamente a **1 derivada** da função no instante t = 2,0 **ms**, utilizando métodos de diferenças finitas e interpolação de Lagrange, e comparar os resultados com a derivada da função analíitica:

$$D(t) = \sqrt{t^{3} + 9}$$

Discussão: Com base na derivada estimada, avalie se o desempenho do cache está em aceleração ou estabilização no instante analisado. O comportamento da taxa de transferência condiz com o padrão esperado em testes de benchmark? Justifique sua resposta com base nos valores e no modelo adotado.

```
***** DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA - MÓDULO COMPLETO *****

>> Progressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pela fórmula Progressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk)) / h
   Computando: (4.356755 - 3.953032) / 0.200000
   Resultado: 2.018615
   Erro relativo percentual: |(1.455213 - 2.018615) / 1.455213| * 100% = 38.716119%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.094161

>> Regressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pela fórmula Regressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk) - f(xk-1)) / h
   Computando: (3.953032 - 3.583519) / 0.200000
   Resultado: 1.847565
   Erro relativo percentual: |(1.455213 - 1.847565) / 1.455213| * 100% = 26.961826%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.094161

>> Centrada de 2a Ordem (1a derivada):
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / (h1 + h2)
   Computando: (4.356755 - 3.583519) / 0.400000
   Resultado: 1.933090
   Erro relativo percentual: |(1.455213 - 1.933090) / 1.455213| * 100% = 32.838973%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 1a derivada): (h^2/6) * terceiraDerivada| = 0.001796

>> Centrada de 2a Ordem (2a derivada):
   Cálculo da derivada de 2a ordem em x = 2 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - 2*f(xk) + f(xk-1)) / (h1 * h2)
   Computando: (4.356755 - 2*3.953032 + 3.583519) / 0.040000
   Resultado: 0.855250
   Erro relativo percentual: |(0.941608 - 0.855250) / 0.941608| * 100% = 9.171332%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 2a derivada): (h/12) * quartaDerivada| = 0.001765

>> Lagrange - 1o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pelo Método de Lagrange - 1o caso:
   Aproximação: (-3*f(xk) + 4*f(xk+1) - f(xk+2)) / h
   Computando: (-3*3.953032 + 4*4.356755 - 4.798624) / 0.400000
   Resultado: 1.923250
   Erro relativo percentual: |(1.455213 - 1.923250) / 1.455213| * 100% = 32.162783%

>> Lagrange - 2o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pelo Método de Lagrange - 2o caso (centrado):
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / h
   Computando: (4.356755 - 3.583519) / 0.400000
   Resultado: 1.933090
   Erro relativo percentual: |(1.455213 - 1.933090) / 1.455213| * 100% = 32.838973%

>> Lagrange - 3o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pelo Método de Lagrange - 3o caso:
   Aproximação: (f(xk-2) - 4*f(xk-1) + 3*f(xk)) / h
   Computando: (4.798624 - 4*3.583519 + 3*3.953032) / 0.400000
   Resultado: 1.924822
   Erro relativo percentual: |(1.455213 - 1.924822) / 1.455213| * 100% = 32.270843%

***** FIM DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA *****
```

A derivada analítica no ponto 2,0 **ms** é aproximadamente 1,455213 MB/ms, e todas as aproximações numéricas estão acima desse valor, com erros variando entre 9% e 38%. A derivada positiva indica que a taxa de transferência está aumentando no instante t=2ms ou seja, o cache está acelerando sua taxa de leitura/escrita.

Isso é **coerente com o comportamento esperado em benchmarks**, onde a performance costuma crescer inicialmente à medida que o cache é aquecido e otimizado com dados mais acessíveis. Assim, a função tem crescimento não linear, o que influencia diretamente o erro dos métodos numéricos.

Problema 2 — Cálculo da taxa de crescimento de usuários simultâneos em sistema web

Ao monitorar o comportamento de um sistema web sob carga, registrou-se o número de usuários simultâneos em instantes sucessivos. Deseja-se estimar a **taxa de crescimento** de usuários no instante 4,0 segundos após o início da carga, a fim de avaliar o ponto de inflexão no escalonamento automático do sistema.

Tempo (s)	Usuários simultâneos
3,6	156,071214
3,8	164,706967
4,0	173,831305
4,2	183,496384
4,4	193,761447

Objetivo: Estimar numericamente a **primeira derivada** da função no instante t = 4,0 **s**, utilizando métodos de diferenças finitas e interpolação de Lagrange, e comparar os resultados com a derivada da função analítica:

$$U(t) = 60 \cdot \ln(t^2 + 1)$$

Discussão: Com base na derivada estimada, avalie se o sistema está em fase de aceleração ou estabilização no crescimento de usuários simultâneos. O comportamento da função e da sua derivada sugere necessidade iminente de escalonamento automático? Justifique com base nos dados e na interpretação do modelo.

```
***** DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA - MÓDULO COMPLETO *****

>> Progressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 4 pela fórmula Progressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk)) / h
   Computando: (183.496384 - 173.831305) / 0.200000
   Resultado: 48.325395
   Erro relativo percentual: |(28.235294 - 48.325395) / 28.235294| * 100% = 71.152441%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.622837

>> Regressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 4 pela fórmula Regressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk) - f(xk-1)) / h
   Computando: (173.831305 - 164.706967) / 0.200000
   Resultado: 45.621690
   Erro relativo percentual: |(28.235294 - 45.621690) / 28.235294| * 100% = 61.576819%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.622837

>> Centrada de 2a Ordem (1a derivada):
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 4 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / (h1 + h2)
   Computando: (183.496384 - 164.706967) / 0.400000
   Resultado: 46.973542
   Erro relativo percentual: |(28.235294 - 46.973542) / 28.235294| * 100% = 66.364630%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 1a derivada): (h^2/6) * terceiraDerivada| = 0.016935

>> Centrada de 2a Ordem (2a derivada):
   Cálculo da derivada de 2a ordem em x = 4 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - 2*f(xk) + f(xk-1)) / (h1 * h2)
   Computando: (183.496384 - 2*173.831305 + 164.706967) / 0.040000
```

```
   Resultado: 13.518525
   Erro relativo percentual: |(-6.228373 - 13.518525) / -6.228373| * 100% = 317.047454%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 2a derivada): (h/12) * quartaDerivada| = 0.004626

>> Lagrange - 1o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 4 pelo Método de Lagrange - 1o caso:
   Aproximação: (-3*f(xk) + 4*f(xk+1) - f(xk+2)) / h
   Computando: (-3*173.831305 + 4*183.496384 - 193.761447) / 0.400000
   Resultado: 46.825435
   Erro relativo percentual: |(28.235294 - 46.825435) / 28.235294| * 100% = 65.840083%

>> Lagrange - 2o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 4 pelo Método de Lagrange - 2o caso (centrado):
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / h
   Computando: (183.496384 - 164.706967) / 0.400000
   Resultado: 46.973542
   Erro relativo percentual: |(28.235294 - 46.973542) / 28.235294| * 100% = 66.364630%

>> Lagrange - 3o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 4 pelo Método de Lagrange - 3o caso:
   Aproximação: (f(xk-2) - 4*f(xk-1) + 3*f(xk)) / h
   Computando: (193.761447 - 4*164.706967 + 3*173.831305) / 0.400000
   Resultado: 46.843153
   Erro relativo percentual: |(28.235294 - 46.843153) / 28.235294| * 100% = 65.902832%

***** FIM DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA *****
```

A derivada analítica de aproximadamente **28,23 usuários/s** indica que o sistema ainda está em **crescimento**. No entanto, esse crescimento não é explosivo, como seria em uma função exponencial, pois a função é **logarítmica**, o que significa que a taxa de crescimento tende a **diminuir com o tempo**.
Ainda no momento não há necessidade de escalonamento automático pois a derivada ainda é positiva indicando que há crescimento de usuários. A função analítica também mostra que, embora a carga cresça, o crescimento está desacelerando, sugerindo uma fase de transição para estabilização, ou seja a função tem um crescimento decrescente, típico de sistema próximos da saturação.

Problema 3 — Estimativa da variação do tempo de resposta em servidor sob carga crescente

Durante um teste de estresse em um servidor de aplicações, o tempo médio de resposta foi registrado conforme a carga de requisições aumentava. Deseja-se estimar a **taxa de crescimento do tempo de resposta** quando a carga atinge 5,0 mil requisições por segundo.

Carga (mil req/s)	Tempo de resposta (ms)
4,6	35,777857
4,8	38,285845
5,0	41,000000
5,2	43,967944
5,4	47,240617

Objetivo: Estimar a **primeira derivada** do tempo de resposta no ponto $x = 5,0$ **mil req/s**, utilizando métodos de diferenças finitas e interpolação de Lagrange, e comparar os resultados com a derivada da função analítica:

$$T(x) = x^2 + 5 \cdot \sin(x)$$

Discussão: Com base na derivada estimada, avalie se o tempo de resposta está aumentando de forma linear ou acelerada com o aumento da carga. O comportamento observado justifica a necessidade de balanceamento ou escalonamento de recursos? Justifique sua análise com base na tendência do modelo e nos dados observados.

```
***** DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA - MÓDULO COMPLETO *****

>> Progressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 5 pela fórmula Progressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk)) / h
   Computando: (43.967944 - 41.000000) / 0.200000
   Resultado: 14.839720
   Erro relativo percentual: |(11.418310 - 14.839720) / 11.418310| * 100% = 29.964242%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.679462

>> Regressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 5 pela fórmula Regressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk) - f(xk-1)) / h
   Computando: (41.000000 - 38.285845) / 0.200000
   Resultado: 13.570775
   Erro relativo percentual: |(11.418310 - 13.570775) / 11.418310| * 100% = 18.850995%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.679462

>> Centrada de 2a Ordem (1a derivada):
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 5 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / (h1 + h2)
   Computando: (43.967944 - 38.285845) / 0.400000
   Resultado: 14.205247
   Erro relativo percentual: |(11.418310 - 14.205247) / 11.418310| * 100% = 24.407618%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 1a derivada): (h^2/6) * terceiraDerivada| = 0.009455

>> Centrada de 2a Ordem (2a derivada):
   Cálculo da derivada de 2a ordem em x = 5 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - 2*f(xk) + f(xk-1)) / (h1 * h2)
   Computando: (43.967944 - 2*41.000000 + 38.285845) / 0.040000
```

```
   Resultado: 6.344725
   Erro relativo percentual: |(6.794621 - 6.344725) / 6.794621| * 100% = 6.621355%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 2a derivada): (h/12) * quartaDerivada| = 0.001453

>> Lagrange - 1o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 5 pelo Método de Lagrange - 1o caso:
   Aproximação: (-3*f(xk) + 4*f(xk+1) - f(xk+2)) / h
   Computando: (-3*41.000000 + 4*43.967944 - 47.240617) / 0.400000
   Resultado: 14.077898
   Erro relativo percentual: |(11.418310 - 14.077898) / 11.418310| * 100% = 23.292304%

>> Lagrange - 2o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 5 pelo Método de Lagrange - 2o caso (centrado):
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / h
   Computando: (43.967944 - 38.285845) / 0.400000
   Resultado: 14.205247
   Erro relativo percentual: |(11.418310 - 14.205247) / 11.418310| * 100% = 24.407618%

>> Lagrange - 3o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 5 pelo Método de Lagrange - 3o caso:
   Aproximação: (f(xk-2) - 4*f(xk-1) + 3*f(xk)) / h
   Computando: (47.240617 - 4*38.285845 + 3*41.000000) / 0.400000
   Resultado: 14.086192
   Erro relativo percentual: |(11.418310 - 14.086192) / 11.418310| * 100% = 23.364951%

***** FIM DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA *****
```

Derivada Analítica: $T'(x)=2x+5\cdot\cos(x)$

A derivada analítica em x=5.0 mil requisições é aproximadamente 11,42 e os métodos numéricos fornecem valores maiores (13,5 a 14,8). Isso indica que o tempo de resposta está aumentando de forma acelerada, e não linear. Assim A função T(x)=x^2+5sin(x) tem uma componente quadrática dominante, o que confirma a tendência de crescimento acelerado da latência com o aumento da carga.

Com isso concluímos que o escalonamento é necessário pois o aumento da derivada com a carga indica que o sistema não está absorvendo bem a pressão da carga adicional e o crescimento também não é constante.

Problema 4 — Cálculo da aceleração de uma partícula em simulação computacional

Em uma simulação de física computacional, a posição de uma partícula foi registrada ao longo do tempo. Deseja-se calcular numericamente a **segunda derivada da posição**, ou seja, a aceleração, no instante t = 2,0 segundos.

Tempo (s)	Posição (m)
1,6	0,955512
1,8	1,029619
2,0	1,098612
2,2	1,163151
2,4	1,223775

Objetivo: Estimar a **segunda derivada** da posição no instante t = 2,0 **s**, utilizando o método centrado de segunda ordem, e comparar o resultado com a derivada da função analítica:

$$s(t) = \ln(t + 1)$$

Discussão: Com base na aceleração estimada, avalie se a partícula tende a estabilizar sua velocidade ou se está desacelerada. O sinal negativo da segunda derivada é compatível com o tipo de movimento representado? Justifique sua resposta com base na função e na dinâmica simulada.

```
***** DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA - MÓDULO COMPLETO *****

>> Progressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pela fórmula Progressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk)) / h
   Computando: (1.163151 - 1.098612) / 0.200000
   Resultado: 0.322695
   Erro relativo percentual: |(0.333333 - 0.322695) / 0.333333| * 100% = 3.191403%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.011111

>> Regressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pela fórmula Regressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk) - f(xk-1)) / h
   Computando: (1.098612 - 1.029619) / 0.200000
   Resultado: 0.344965
   Erro relativo percentual: |(0.333333 - 0.344965) / 0.333333| * 100% = 3.489603%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.011111

>> Centrada de 2a Ordem (1a derivada):
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / (h1 + h2)
   Computando: (1.163151 - 1.029619) / 0.400000
   Resultado: 0.333830
   Erro relativo percentual: |(0.333333 - 0.333830) / 0.333333| * 100% = 0.149100%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 1a derivada): (h^2/6) * terceiraDerivada| = 0.000494

>> Centrada de 2a Ordem (2a derivada):
   Cálculo da derivada de 2a ordem em x = 2 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - 2*f(xk) + f(xk-1)) / (h1 * h2)
   Computando: (1.163151 - 2*1.098612 + 1.029619) / 0.040000
   Resultado: -0.111350
   Erro relativo percentual: |(-0.111111 - -0.111350) / -0.111111| * 100% = 0.215100%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 2a derivada): (h/12) * quartaDerivada| = 0.000247

>> Lagrange - 1o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pelo Método de Lagrange - 1o caso:
   Aproximação: (-3*f(xk) + 4*f(xk+1) - f(xk+2)) / h
   Computando: (-3*1.098612 + 4*1.163151 - 1.223775) / 0.400000
   Resultado: 0.332483
   Erro relativo percentual: |(0.333333 - 0.332483) / 0.333333| * 100% = 0.255150%

>> Lagrange - 2o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pelo Método de Lagrange - 2o caso (centrado):
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / h
   Computando: (1.163151 - 1.029619) / 0.400000
   Resultado: 0.333830
   Erro relativo percentual: |(0.333333 - 0.333830) / 0.333333| * 100% = 0.149100%

>> Lagrange - 3o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 2 pelo Método de Lagrange - 3o caso:
   Aproximação: (f(xk-2) - 4*f(xk-1) + 3*f(xk)) / h
   Computando: (1.223775 - 4*1.029619 + 3*1.098612) / 0.400000
   Resultado: 0.332180
   Erro relativo percentual: |(0.333333 - 0.332180) / 0.333333| * 100% = 0.345900%

***** FIM DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA *****
```

A **segunda derivada negativa** indica que a velocidade está **diminuindo com o tempo** — ou seja, o movimento da partícula está **desacelerado**. Também o sinal negativo é coerente com a função devido ao fato dela ser classificada como crescente mas com concavidade voltada para baixo, isso significa que a partícula está se deslocando para frente, mas sua velocidade está diminuindo progressivamente.

Fisicamente, a aceleração negativa, combinada com o valor cada vez menor da primeira derivada, sugere que a partícula tende a uma velocidade estável, eventualmente chegando a uma condição de equilíbrio ou repouso dinâmico. Indicando um comportamento que é típico em simulações com resistência ao movimento (como atrito e arrasto) ou potenciais limitantes. Ademais, o modelo simulado representa adequadamente um sistema que tende à estabilização do movimento.

Problema 5 — Estimativa da variação do uso de CPU em função do número de processos

Durante a gestão dinâmica de escalonamento em sistemas operacionais, é importante prever como o uso da CPU se altera conforme o número de processos ativos. Pretende-se estimar essa variação para 20 processos ativos.

Processos ativos	Uso da CPU (%)
16	57,432743
18	63,591787
20	70,000000
22	76,744138
24	83,816777

Objetivo: Estimar a **primeira derivada** da utilização da CPU no ponto $x = 20$ **processos**, utilizando métodos de diferenças finitas e interpolação de Lagrange, e comparar os resultados com a derivada da função analítica:

$$U(x) = 23 \cdot \ln(x + 1)$$

Discussão: A partir da derivada estimada, avalie se o crescimento do uso de CPU está se mantendo linear ou se há indícios de saturação do sistema. O comportamento da função e sua derivada sugerem necessidade de políticas de balanceamento de carga ou limitação de processos? Justifique com base nos dados observados.

```
***** DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA - MÓDULO COMPLETO *****

>> Progressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 20 pela fórmula Progressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk)) / h
   Computando: (76.744138 - 70.000000) / 2.000000
   Resultado: 3.372069
   Erro relativo percentual: |(1.095238 - 3.372069) / 1.095238| * 100% = 207.884588%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.052152

>> Regressiva de 1a Ordem:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 20 pela fórmula Regressiva de 1a Ordem:
   Aproximação: (f(xk) - f(xk-1)) / h
   Computando: (70.000000 - 63.591787) / 2.000000
   Resultado: 3.204107
   Erro relativo percentual: |(1.095238 - 3.204107) / 1.095238| * 100% = 192.548880%
   Erro de truncamento (progressiva 1a ordem): |-(h/2) * segundaDerivada| = 0.052152

>> Centrada de 2a Ordem (1a derivada):
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 20 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / (h1 + h2)
   Computando: (76.744138 - 63.591787) / 4.000000
   Resultado: 3.288088
   Erro relativo percentual: |(1.095238 - 3.288088) / 1.095238| * 100% = 200.216734%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 1a derivada): (h^2/6) * terceiraDerivada| = 0.029978

>> Centrada de 2a Ordem (2a derivada):
   Cálculo da derivada de 2a ordem em x = 20 pela fórmula Centrada de 2a Ordem:
   Aproximação: (f(xk+1) - 2*f(xk) + f(xk-1)) / (h1 * h2)
   Computando: (76.744138 - 2*70.000000 + 63.591787) / 4.000000
   Resultado: 0.083981
   Erro relativo percentual: |(-0.052152 - 0.083981) / -0.052152| * 100% = 261.031696%
   Erro de truncamento (centrada 2a ordem 2a derivada): (h/12) * quartaDerivada| = 0.000236

>> Lagrange - 1o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 20 pelo Método de Lagrange - 1o caso:
   Aproximação: (-3*f(xk) + 4*f(xk+1) - f(xk+2)) / h
   Computando: (-3*70.000000 + 4*76.744138 - 83.816777) / 4.000000
   Resultado: 3.289944
   Erro relativo percentual: |(1.095238 - 3.289944) / 1.095238| * 100% = 200.386195%

>> Lagrange - 2o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 20 pelo Método de Lagrange - 2o caso (centrado):
   Aproximação: (f(xk+1) - f(xk-1)) / h
   Computando: (76.744138 - 63.591787) / 4.000000
   Resultado: 3.288088
   Erro relativo percentual: |(1.095238 - 3.288088) / 1.095238| * 100% = 200.216734%

>> Lagrange - 3o Caso:
   Cálculo da derivada de 1a ordem em x = 20 pelo Método de Lagrange - 3o caso:
   Aproximação: (f(xk-2) - 4*f(xk-1) + 3*f(xk)) / h
   Computando: (83.816777 - 4*63.591787 + 3*70.000000) / 4.000000
   Resultado: 3.266399
   Erro relativo percentual: |(1.095238 - 3.266399) / 1.095238| * 100% = 198.236434%

***** FIM DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA *****
```

Como a função $U(x)=23 \cdot \ln(x+1)$ é logarítmica, significa que o crescimento da CPU diminui à medida que o número de processos aumenta. Dessa forma, a derivada analítica $f(20)\approx 1{,}095$ mostra que a taxa de crescimento está desacelerando, o que é característico de saturação. Entretanto, os métodos numéricos superestimaram significativamente essa taxa (valores acima de 3), devido à não linearidade da função e à distância entre os pontos.

Com isso, existem indícios de saturação do sistema para continuar aumentando com mais processos, a taxa de crescimento (derivada) está diminuindo. Isso indica que: A eficiência marginal por processo está caindo. O sistema pode estar se aproximando de um limite de desempenho. O comportamento da função indica uma tendência de saturação, mesmo que os métodos numéricos não tenham captado isso com precisão.