TRABALHO — RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE VALOR INICIAL (PVI)

OBS. 1: PARA RESOLVER OS PVIs, UTILIZE OS MÉTODOS VISTOS EM AULA (EULER, EULER MODIFICADO, TAYLOR, RK 3aOr, RK 4aOr). MOSTRE SAÍDAS DO CONSOLE E COMPARE COM A SOLUÇÃO ANALÍTICA.

OBS. 2: CALCULAR O ERRO RELATIVO DE CADA MÉTODO, E ANALISAR A INFLUÊNCIA DO PASSO, TESTANDO ELE PARA PELO MENOS 2 PASSOS DISTINTOS.

OBS. 3: ESCOLHA 5 PROBLEMAS DA LISTA PARA RESOLVER.

Problema 1 — Avaliação do Tempo de Resposta de Servidor Web em Alta Demanda

Um cientista da computação estuda o **tempo de resposta** $y(x)$, em milissegundos, de um servidor web em função da **carga de requisições simultâneas** x, expressa em milhares. O comportamento observado indica que, à medida que a carga aumenta, o tempo de resposta também cresce, mas tende a estabilizar-se em um valor limite $T_{\max}$, como resultado de estratégias de paralelismo e balanceamento de carga implementadas no servidor.

Para modelar esse comportamento, ele adotou como um modelo aproximado a equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$y' = k(T_{\max} - y), \quad y(0) = y_0$$

Objetivo: Estimar numericamente o tempo de resposta para $x = 1{,}0$, utilizando os métodos numéricos indicados, com base nos parâmetros fornecidos.

Parâmetros para o estudo:

$$T_{\max} = 200, \quad y_0 = 50, \quad k = 1{,}5$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com a solução analítica para s análise de erros.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = T_{\max} - (T_{\max} - y_0) \cdot e^{-kx}$$

Derivada total de segunda ordem (para Taylor):

$$y'' = -k^2(T_{\max} - y)$$

Problema 2 — Simulação da Dissipação de Calor em Núcleo de Processador

Um engenheiro da computação investiga o **comportamento térmico** de um núcleo de CPU durante sua operação contínua. A **temperatura** $y(x)$, em graus Celsius, é observada ao longo do **tempo de funcionamento** x, em segundos. Devido à dissipação de calor e à ação do sistema de resfriamento, o aquecimento do núcleo tende a um valor de equilíbrio térmico de 50 °C.

Para descrever essa dinâmica, ele adotou como modelo simplificado a equação diferencial ordinária de primeira ordem, que representa um processo de relaxação térmica τ constante e igual a 10 segundos:

$$y' = \frac{50 - y}{\tau}, \quad y(0) = 20$$

Objetivo: Estimar numericamente a temperatura do núcleo após $x = 5{,}0$ segundos de operação, utilizando os métodos numéricos indicados, com base nos parâmetros fornecidos.

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = 50 - 30 \cdot e^{-x/10}$$

Derivada total de segunda ordem:

$$y'' = -\frac{1}{10}y'$$

Problema 3 — Carga em Capacitor durante Inicialização de Sistema

Durante o processo de inicialização de um sistema embarcado, o circuito de alimentação precisa estabilizar a tensão de operação. Esse processo envolve a **carga de um capacitor**, cuja **tensão** $y(x)$, em volts, depende do **tempo** x, em segundos. Devido à resistência do circuito, a tensão se aproxima gradualmente de um valor máximo de 5 V.

O modelo assumindo considera uma constante de tempo τ igual a 2 segundos, gerando a seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$y' = \frac{5 - y}{\tau}, \quad y(0) = 0$$

Objetivo: Estimar numericamente a tensão acumulada no capacitor após $x = 3{,}0$ segundos, utilizando os métodos numéricos indicados, com base nos parâmetros fornecidos.

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = 5 - 5e^{-x/2}$$

Derivada total de segunda ordem:

$$y'' = -\frac{1}{2}y'$$

Problema 4 — Resfriamento de Componente Eletrônico

Após o desligamento de um componente eletrônico, sua **temperatura** $y(x)$, em graus Celsius, começa a diminuir gradualmente em função do **tempo** x, em minutos. Esse processo é regido pela **Lei de Resfriamento de Newton**, segundo a qual a taxa de variação da temperatura é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura ambiente.

Considerando que a temperatura ambiente é de 20 °C, e que a constante de resfriamento do sistema é $k = 0{,}1$, obtém-se o seguinte modelo:

$$y' = -k(y - T_{amb}), \quad y(0) = 80$$

Objetivo: Estimar numericamente a temperatura do componente após $x = 10{,}0$ minutos, utilizando os métodos numéricos indicados, com base nos parâmetros fornecidos.

Parâmetros para o estudo:

$$T_{\text{amb}} = 20, \quad k = 0{,}1$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = 20 + 60e^{-0{,}1x}$$

Derivada total de segunda ordem:

$$y'' = -0{,}1y'$$

Problema 5 — Modelagem de Uso de Memória por Algoritmo Recursivo

Durante a execução de um algoritmo recursivo, o **uso acumulado de memória** $y(x)$, em megabytes, cresce ao longo do **tempo** x, em segundos. Esse crescimento é modelado por uma equação diferencial que expressa a taxa de variação da memória utilizada como uma função logarítmica do tempo decorrido.

O modelo simplificado que foi adotado para modelar esse comportamento é:

$$y' = \ln(x+1), \quad y(0) = 0$$

Objetivo: Estimar numericamente o uso de memória após $x = 3{,}0$ segundos de execução, utilizando os métodos numéricos indicados, com base nos parâmetros fornecidos.

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

Derivada total de segunda ordem:

$$y''(x) = \frac{1}{x+1}$$

Problema 6 — Previsão da Concentração de Contaminante em Aquífero

A **concentração** $y(x)$, em miligramas por litro, de um contaminante em um aquífero subterrâneo varia ao longo do **tempo** x, em dias, de acordo com um modelo que combina dois efeitos: o **decaimento natural do contaminante** e a **entrada contínua** de poluente. Este comportamento é descrito por uma equação diferencial linear não homogênea.

O modelo matemático para esse problema é formulado como:

$$y' = -k_{\text{dec}} y + F_{ext}, \quad y(0) = 10$$

Objetivo: Estimar numericamente a concentração do contaminante após $x = 5{,}0$ dias, utilizando os métodos numéricos indicados, com base nos parâmetros fornecidos.

Parâmetros para o estudo:

$$k_{\text{dec}} = 0{,}3, \quad F_{ext} = e^{-0{,}1x}$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = 10e^{-0{,}3x} + \frac{e^{-0{,}1x} - e^{-0{,}3x}}{0{,}2}$$

Derivada total de segunda ordem:

$$y'' = -0{,}3y' - 0{,}1e^{-0{,}1x}$$

Problema 7 — Variação da Temperatura durante a Cura do Concreto

Durante o processo de cura do concreto, a **temperatura interna** $y(x)$, em graus Celsius, evolui ao longo do **tempo** x, em horas, devido à liberação exotérmica de calor pela hidratação do cimento e à **dissipação de calor** para o ambiente. Um modelo linear com termo forçante crescente no tempo pode representar adequadamente a fase inicial de cura.

Adota-se o seguinte modelo:

$$y' = T_{ger} - k_{\text{diss}} y, \quad y(0) = 25$$

Objetivo: Estimar numericamente a temperatura do concreto após $x = 6{,}0$ horas de cura, utilizando os métodos numéricos indicados.

Parâmetros para o estudo:

$$T_{ger} = 0{,}8x, \quad k_{\text{diss}} = 0{,}1$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = 8x - 80 + 105e^{-0{,}1x}$$

Derivada total de segunda ordem:

$$y'' = 0{,}8 - 0{,}1y'$$

Problema 8 — Velocidade de Escoamento em Canal Trapezoidal

Considere o escoamento de um fluido em um **canal trapezoidal** ao longo de um trecho de comprimento x, em metros. A **velocidade média** $y(x)$, em metros por segundo, aumenta inicialmente com a distância devido à aceleração do escoamento, mas é limitada por efeitos geométricos e de atrito, conduzindo a um comportamento **logístico**.

O modelo adotado para representar tal escoamento é:

$$y' = 0{,}1y(1 - y), \quad y(0) = 0{,}5$$

Objetivo: Estimar numericamente a velocidade média após $x = 10{,}0$ metros de canal, utilizando os métodos numéricos indicados.

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-0{,}1x}}$$

Derivada total de segunda ordem:

$$y'' = 0{,}1y'(1 - 2y)$$

Problema 9 — Deflexão de Viga sob Carga Variável

Considere a **deflexão vertical** $y(x)$, em metros, de uma viga submetida a uma **carga distribuída variável** ao longo do comprimento x, em metros. Essa deflexão pode ser modelada por uma equação diferencial linear com coeficiente dependente da posição, representando a relação entre rigidez da viga e ação da carga.

Adota-se o seguinte modelo:

$$y' = C_{car.var} - R_{rig}, \quad y(0) = 0$$

Objetivo: Estimar numericamente a deflexão da viga no ponto $x = 2{,}0$ metros, utilizando os métodos numéricos indicados.

Parâmetros para o estudo:

$$C_{car.var} = x^2, \quad R_{rig} = -3y$$

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}(1 - e^{-3x})$$

Derivada total de segunda ordem:

$$y'' = 2x + 3y'$$

Problema 10 — Recalque de Solo Argiloso após Carregamento

O **recalque** $y(x)$, em milímetros, de um solo argiloso saturado submetido a carregamento varia ao longo do **tempo** x, em dias, devido ao processo de adensamento primário. Esse comportamento pode ser modelado pela mesma equação que descreve fenômenos logarítmicos cumulativos, como o fechamento de poros com dissipação de pressão neutra.

Para simplificar o estudo foi adotado o seguinte modelo:

$$y' = \ln(x + 1), \quad y(0) = 0$$

Objetivo: Estimar numericamente o recalque acumulado após $x = 4{,}0$ dias, utilizando os métodos numéricos indicados.

Solução Numérica: Os valores aproximados obtidos por cada método devem ser comparados com essa solução para análise de erro.

Solução analítica da equação diferencial:

$$y(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

Derivada total de segunda ordem:

$$y'' = \frac{1}{x+1}$$