

Redes Complexas - CPS765 - 2020.2

Primeira Lista de Exercícios

Pedro Maciel Xavier

116023847

9 de novembro de 2020

Questão 1.: Matriz de Adjacência

Podemos supor, neste caso, que as matrizes em questão vivem em um espaço vetorial construído sobre o semianel $(\mathcal{B}, \vee, \wedge)$ em vez de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, onde $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. Assim, as entradas das matrizes serão sempre 0 ou 1 e as operações usuais de soma e multiplicação são substituídas pela disjunção e pela conjunção lógica, respectivamente.

a) A fim de obter uma expressão para a alcançabilidade em k passos do vértice i ao j , dado pela entrada $\mathbf{B}_{i,j}^{(k)}$ vamos empregar um raciocínio indutivo. É claro que a alcançabilidade em 0 passos é dada pela matriz identidade \mathbf{I} , uma vez que só é possível chegar ao vértice em que já encontramos. O caso para um único passo é dado pela matriz de adjacências \mathbf{A} , trivialmente. Logo, $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{A}$. Vamos supor, por hipótese de indução, que a matriz $\mathbf{B}^{(k)} \in \mathcal{B}^{n \times n}$ representa a alcançabilidade em exatamente k passos, isto é, se existe um caminho de comprimento k ligando o vértice i ao vértice j , então $\mathbf{B}_{i,j}^{(k)} = 1$. Caso contrário, $\mathbf{B}_{i,j}^{(k)} = 0$. Para saber se existe um caminho de tamanho $k + 1$ entre os vértices i e j é preciso que exista um caminho de tamanho k entre i e algum vértice ξ assim como ξ deve ser incidente em j . Portanto,

$$\mathbf{B}_{i,j}^{(k+1)} = \bigvee_{\xi=1}^n \mathbf{B}_{i,\xi}^{(k)} \wedge \mathbf{A}_{\xi,j}$$

de onde concluímos quem, para todo $k \geq 1$, $\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{A}$. O resultado é dado pelo produto usual de matrizes induzido pelo semianel booleano. Logo, escrevemos $\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{A}^k$.

b) Seguindo raciocínio semelhante, dizemos que i alcança j em k ou menos passos se $\mathbf{B}_{i,j}^{(\xi)} = 1$ para algum $0 \leq \xi \leq k$. Isto é,

$$\mathbf{C}_{i,j}^{(k)} = \mathbf{B}_{i,j}^{(0)} \vee \mathbf{B}_{i,j}^{(1)} \vee \mathbf{B}_{i,j}^{(2)} \dots \vee \mathbf{B}_{i,j}^{(k)} = \bigvee_{\xi=0}^k \mathbf{B}_{i,j}^{(\xi)}$$

resultado que, por conta do espaço onde as matrizes se encontram, é caracterizado pela soma usual. Ou seja, $\mathbf{C}^{(k)} = \sum_{\xi=0}^k \mathbf{B}^{(\xi)}$.

c) Análise da complexidade:

$\mathbf{B}^{(k)}$ - A multiplicação usual de matrizes tem custo $O(n^3)$. Como temos de calcular este produto $k - 1$ vezes, temos uma complexidade assintótica total de ordem $O(n^3 k)$.

$\mathbf{C}^{(k)}$ - A soma de matrizes possui complexidade $O(n^2)$. Contando as $k - 1$ somas temos um total de $O(n^2 k)$ para esta etapa. Se recalculamos $\mathbf{B}^{(k)}$ a cada passo, a complexidade das multiplicações segue uma progressão aritmética em k , totalizando $O(n^3 k^2)$. Se aproveitamos a matriz anterior a cada soma, podemos realizar este processo em tempo $O(n^3 k)$. O termo quadrático em n é de ordem inferior e pode ser omitido em ambos os casos.

d) Seguindo o conselho de multiplicar diferentemente, apresento duas abordagens para reduzir a complexidade do cálculo de $\mathbf{B}^{(k)}$ e $\mathbf{C}^{(k)}$. A primeira, se aplica a um grafo qualquer e se baseia

na seguinte relação:

$$\mathbf{A}^k = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{para } k = 0 \\ \left(\mathbf{A}^{\frac{k}{2}}\right)^2 & \text{para } k \text{ par} \\ \left(\mathbf{A}^{\frac{k-1}{2}}\right)^2 * \mathbf{A} & \text{para } k \text{ ímpar} \end{cases}$$

para $k \geq 0$. Em geral, esta relação vale para qualquer operação $*$ associativa e, portanto, utilizaremos para o cálculo das potências de matrizes. Isso nos traz complexidade $O(\log k)$ nesta tarefa. Com este aprimoramento, somos capazes de calcular $\mathbf{B}^{(k)}$ em tempo $O(n^3 \log k)$ enquanto $\mathbf{C}^{(k)}$ sai por $O(n^3 \log k!) = O(n^3 k \log k)$. Apesar do ganho no cálculo de $\mathbf{B}^{(k)}$, simplesmente aplicar este método requer calcular cada ξ -ésima potência de \mathbf{A} . É melhor, portanto, multiplicar por \mathbf{A} e somar ao resultado iterativamente, com custo $O(n^3 k + n^2 k) = O(n^3 k)$.

Ainda podemos fazer melhor em alguns casos, dadas algumas condições. Vamos retornar ao espaço euclidiano usual $\mathbb{R}^{n \times n}$, pagando um custo $O(n^2)$ ao final do cálculo para definir cada entrada de $\mathbf{B}^{(k)}$ e $\mathbf{C}^{(k)}$ como 0 ou 1 verificando se cada elemento da matriz é ou não nulo, respectivamente. Se $\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (-1)^n \det(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \neq 0$, isto é, para cada autovalor λ de \mathbf{A} temos que $\lambda \neq 1$, podemos dizer que

$$\sum_{\xi=0}^k \mathbf{A}^\xi = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{k+1})$$

A inversão da matriz $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ pode ser feita em tempo $O(n^3)$ pela eliminação de *Gauss-Jordan*. Isso nos permite calcular $\mathbf{C}^{(k)}$ em tempo $O(n^3) + O(n^3 \log k)$, ou seja, $O(n^3 \log k)$.

Temos ainda um caso ainda mais específico, para grafos não-direcionados. Neste caso, a estrutura confere $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. O Teorema Espectral nos garante, portanto, que a matriz \mathbf{A} é diagonalizável e, além disso, a simetria permite encontrar a forma $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$ em tempo $O(n^3)$ através da transformação de *Householder* seguida da aplicação do algoritmo *QR*. Em seguida, calculamos $\mathbf{B}^{(k)} \sim \mathbf{A}^k = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{S}^{-1}$ em tempo $O(n^3 + n \log k)$, uma vez que basta calcular a potência de cada uma das n entradas da diagonal principal de $\mathbf{\Lambda}$, o que possui complexidade $O(\log k)$ segundo o método visto acima. Por fim, isso também se aplica ao cálculo de $\mathbf{C}^{(k)}$, que pelo método da soma geométrica de matrizes descrito acima pode ser feito em tempo $O(n^3 + n \log k)$. Isso se verifica também por outra propriedade da forma diagonal de \mathbf{A} , uma vez que

$$\sum_{\xi=0}^k \mathbf{A}^\xi = \mathbf{S} \left[\sum_{\xi=0}^k \mathbf{\Lambda}^\xi \right] \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \sum_{\xi=0}^k \lambda_1^\xi & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{\xi=0}^k \lambda_n^\xi \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \frac{1 - \lambda_1^{k+1}}{1 - \lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1 - \lambda_n^{k+1}}{1 - \lambda_n} \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1}$$

onde fica clara a condição de que $\lambda \neq 1$.

Questão 2.: Grau médio e densidade

Para analisar o comportamento das duas propriedades (grau médio \bar{g} e densidade ρ) vamos escrever cada uma em função da outra. Partimos das expressões

$$\bar{g} = \frac{2m}{n} \text{ e } \rho = \frac{2m}{n(n-1)}$$

de onde definimos as funções

$$\bar{g}(\rho) = \rho(n-1) \text{ e } \rho(\bar{g}) = \frac{\bar{g}}{(n-1)}$$

O grau médio é, portanto, uma dilatação da densidade por um fator $(n-1)$ para $n \in \mathbb{N}$ qualquer. Possui comportamento monotônico crescente como função de ρ . Desta forma, para um grafo

qualquer de n vértices, independentemente de sua configuração de arestas, sabemos que o grau médio e a densidade estão relacionados de maneira linear. Mais do que isso, dizemos que $\bar{g} \propto \rho$. Isso garante que altas densidades levam a um alto grau médio da rede, e vice-versa.

Questão 3.: clusterização

- 1 Calculando a clusterização local de cada vértice do grafo:

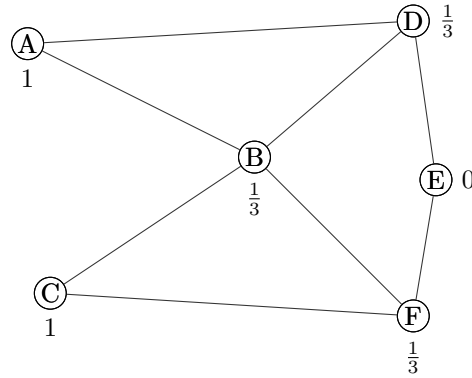


Figura 1: Clusterização local

A clusterização média será, portanto,

$$\frac{1}{6} \sum_{i=A}^F c_i = \frac{1}{2} = 0.5$$

- 2 Contando as triplas e os triângulos:

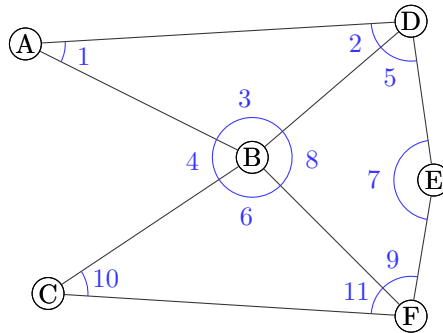


Figura 2: Triplas numeradas

Temos, então, 11 triplas e 2 triângulos ($\triangle ABD$ e $\triangle BCF$). Logo, a clusterização global é dada por

$$\frac{3 \times \text{n}^\circ \text{ de triângulos}}{\text{n}^\circ \text{ de triplas}} = \frac{6}{11} = 0.\bar{54}$$

- 3 A densidade da rede é dada por simplesmente $\rho = \frac{2m}{n(n-1)}$, ou seja, $\rho = \frac{16}{30} = 0.\bar{53}$. Observa-se que o valor da densidade se encontra entre o da clusterização média e o da clusterização global, estando mais próximo desta última.

Questão 4.: Closeness

Lembrando que o *closeness* de um vértice v é dado pela expressão

$$c_v = \frac{1}{n-1} \sum_{u \neq v \in V} d(u, v)$$

onde $d(u, v)$ é a distância entre u e v definimos as métricas globais:

- *Average Pairwise Distance* (APD):

$$\text{APD}(V, E) = \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{u \in V} \sum_{v > u \in V} d(u, v)$$

- *Average Path Length* (APL):

$$\text{APL}(V, E) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} d(u, v)$$

É importante notar que a métrica APD só se aplica a grafos não-direcionados, uma vez que os pares (u, v) do somatório sempre tem $v > u$. Aplicar sobre grafos direcionados geraria assimetria conforme a numeração dos vértices.

1 Reescrevendo APD:

$$\begin{aligned} \text{APD}(V, E) &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{u \in V} \sum_{v > u \in V} d(u, v) \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{u \in V} \sum_{v > u \in V} d(u, v) \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u \in V} \left[\sum_{v > u \in V} d(u, v) + \sum_{v < u \in V} d(u, v) \right] \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u \in V} \left[\sum_{v > u \in V} d(u, v) + \sum_{v < u \in V} d(u, v) + \sum_{v = u \in V} d(u, v) \right] \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} d(u, v) \\ &= \text{APL}(V, E) \end{aligned}$$

Aqui assumimos que $d(u, v) = d(v, u) \forall u, v \in V$ e $d(u, u) = 0 \forall u \in V$. Esta última suposição apenas explicita que *loops* não são levados em consideração, deixando assim a definição compatível com o termo $n(n-1)$ que divide o total.

Vamo agora reescrever a métrica APD em função do *closeness* dos vértices:

$$\begin{aligned} \text{APD}(V, E) &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u \in V} \left[\sum_{v > u \in V} d(u, v) + \sum_{v < u \in V} d(u, v) \right] \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u \in V} \sum_{v \neq u \in V} d(u, v) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{u \in V} c_u \end{aligned}$$

onde c_u é o *closeness* do vértice u . Vale notar que isso diz que APD e APL podem ser entendidos como o *closeness* médio.

2 Se o APL e o diâmetro de uma rede são iguais, então

$$\text{APL}(V, E) = D(V, E)$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{u \in V} \sum_{v \in V} d(u, v) = \max_{u, v \in V} d(u, v)$$

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{u, v \in V} |d(u, v)| = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\sum_{u, v \in V} |d(u, v)|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\therefore \frac{1}{n(n-1)} =$$

3

4 Seja $L_{h,k}$ um grafo pirulito fruto da junção da clique \mathcal{K}_h com um caminho simples \mathcal{C}_k onde $n = k + h$ é o total de vértices.

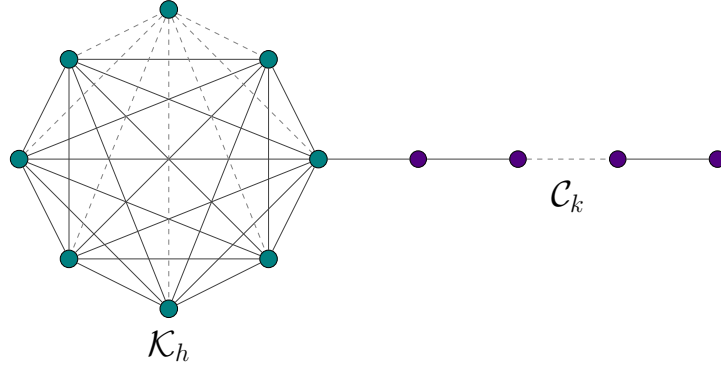


Figura 3: Um Grafo Pirulito

Para calcular o valor da métrica APD para este grafo vamos utilizar a expressão que o relaciona com o *closeness* de cada vértice.

Questão 5.: *Betweenness*

Seja $b_v(i, j)$ a contribuição do par (i, j) para o *betweenness* do vértice v . Temos as seguintes definições:

1. $\hat{b}_v(i, j) = \mathbb{I}\{\sigma_v(i, j) > 0\}$
2. $b_v(i, j) = \frac{\sigma_v(i, j)}{\sigma(i, j)}$
3. $\check{b}_v(i, j) = \mathbb{I}\{\sigma_v(i, j) = \sigma(i, j)\}$

Podemos pensar as definições 1 e 3 como sendo as versões otimista e pessimista da definição 2, respectivamente.

1 Em um grafo completo com $|V| = n$ vértices, sempre existe uma aresta entre um par (i, j) . Portanto, todo caminho mínimo entre i e j é único e possui comprimento 1. Desta forma, $b_v(i, j) = 0$ independentemente da métrica utilizada. O *betweenness* de cada vértice é, portanto, igual a zero.

2 Em um grafo bipartido completo, com conjuntos disjuntos de vértices V_1 e V_2 , onde $V = V_1 \cup V_2$, temos dois casos a serem analisados separadamente. Para um dado par de vértices (i, j) temos que, se $v \in V_\xi, \xi = 1, 2$:

$$b_v(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in V_1 \text{ e } j \in V_2 \\ & \text{se } i, j \in V_1 \\ b_v(j, i) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

3

Questão 6.: PageRank

1 A centralidade de *PageRank* é a solução para o sistema de equações abaixo:

$$\mathbf{x}_i = \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{j,i} \frac{\mathbf{x}_j}{\mathbf{d}_j^s} + \frac{1-\alpha}{n}$$

onde \mathbf{d}_j^s é o grau de saída do vértice j . Este termo pode ser absorvido pela matriz de adjacências, dividindo cada j -ésima linha da matriz por \mathbf{d}_j^s , obtendo assim a matriz \mathbf{D} . Além disso, o somatório está representando um produto interno, entre a i -ésima linha de \mathbf{D}^T e o vetor \mathbf{x} , que mede a centralidade de cada vértice. Tomando $\beta = \frac{1-\alpha}{n}$, podemos reescrever a equação como:

$$\mathbf{x} = [\alpha \mathbf{D}^T + \beta \mathbf{1}] \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tem entradas $\mathbb{1}_{i,j} = 1$. Esta equação vale quando levamos em consideração que $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ e que $0 \leq \mathbf{x}_i \leq 1$. Seja $\mathbf{M} = \alpha \mathbf{D}^T + \beta \mathbf{1}$, temos que a solução do sistema \mathbf{x} é o autovetor principal de \mathbf{M} com autovalor correspondente $\lambda = 1$. Como a primeira equação é equivalente a esta última, e cada iteração do método da potência é dada por $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(k)}$ a menos de uma normalização, podemos calcular o *PageRank* iterativamente, pela relação

$$\mathbf{x}_i^{(k+1)} = \alpha \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{j,i} \frac{\mathbf{x}_j^{(k)}}{\mathbf{d}_j^s} + \frac{1-\alpha}{n}$$

Para tratar todos os nós com igual importância inicial, atribui-se $\mathbf{x}_i^{(0)} = \frac{1}{n}$.

2 Vamos agora calcular o *PageRank* da rede abaixo:

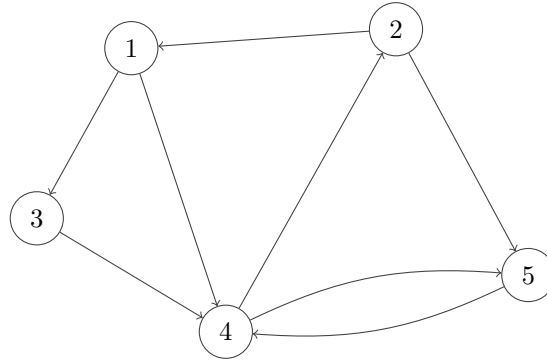


Figura 4: Rede abaixo

Nas tabelas a seguir, temos o valor da centralidade de cada vértice após 5, 10, e 30 iterações, para os valores de α 0.1 e 0.9, respectivamente.

v	5	10	30
1	.189	.189	.189
2	.191	.191	.191
3	.189	.189	.189
4	.228	.228	.228
5	.200	.200	.200

Figura 5: $\alpha = 0.1$

v	5	10	30
1	.103	.104	.104
2	.188	.186	.186
3	.064	.066	.066
4	.371	.371	.370
5	.271	.271	.271

Figura 6: $\alpha = 0.9$

Esta análise permite ver que o algoritmo converge muito rapidamente. Este fato se mostra ainda mais contundente quando se observa que o mais relevante para o resultado é a ordenação hierárquica e não os valores propriamente ditos.

Mesmo assim, acredito que para entender melhor o comportamento do algoritmo ao longo do processo é interessante apresentar os gráficos com a evolução temporal para cada valor de α , na figura a seguir.

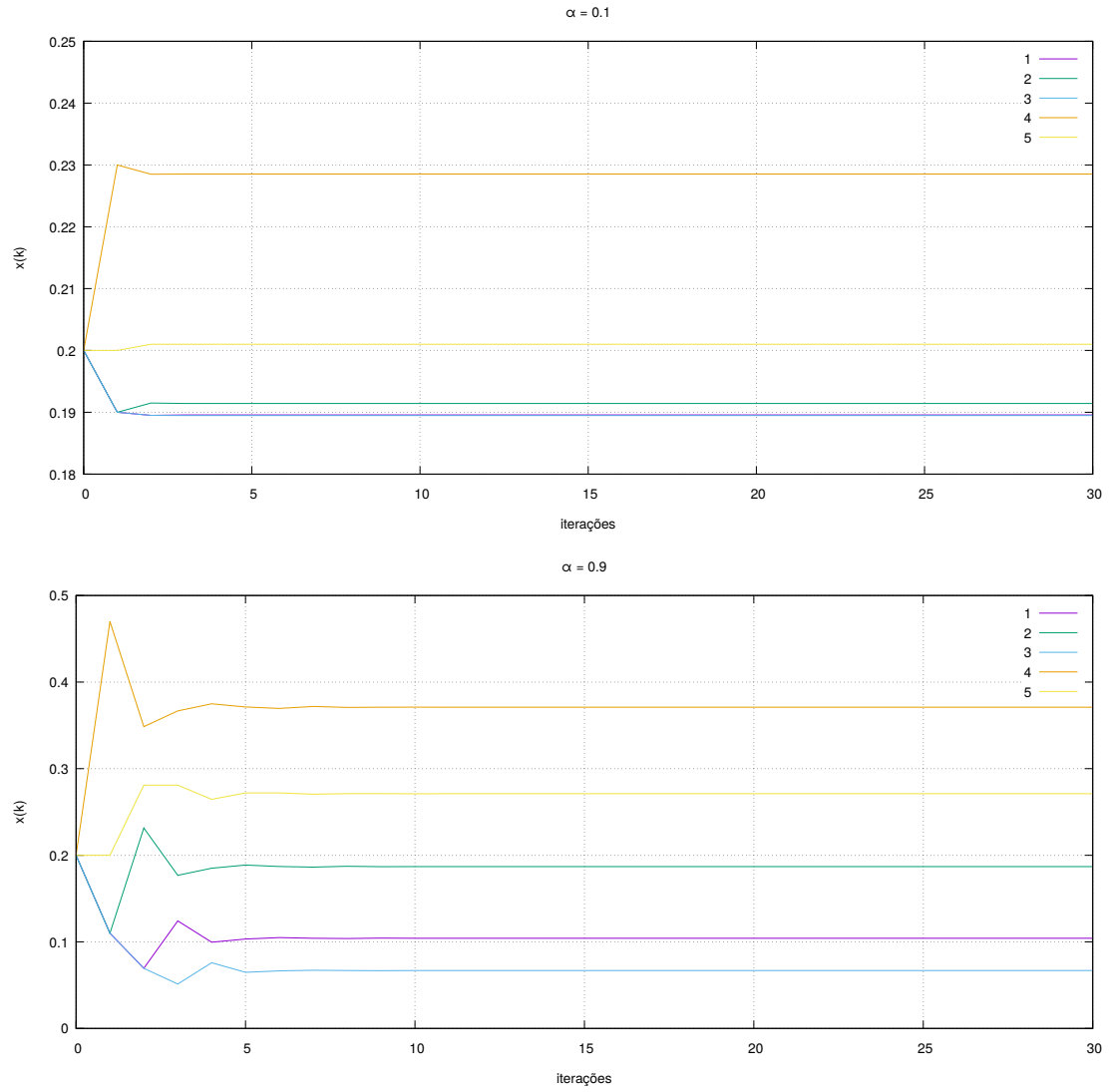


Figura 7: Evolução do *PageRank*

Questão 7.: Similaridade entre vértices

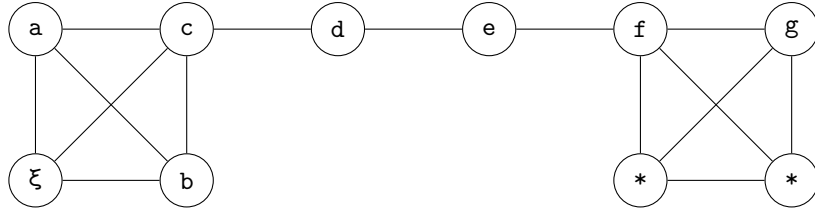


Figura 8: Grafo de *Barbell* $\mathcal{B}_{4,2}$

1 Recapitulando as definições da similaridade de *Jaccard* $\mathcal{J}(i, j)$ e da similaridade do Cosseno $\mathcal{C}(i, j)$ dizemos que

$$\mathcal{J}(i, j) = \frac{|\text{viz } i \cap \text{viz } j|}{|\text{viz } i \cup \text{viz } j|} \text{ e } \mathcal{C}(i, j) = \frac{\langle \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j \rangle}{\|\mathbf{A}_i\| \cdot \|\mathbf{A}_j\|} = \frac{|\text{viz } i \cap \text{viz } j|}{\sqrt{|\text{viz } i| \cdot |\text{viz } j|}}$$

onde $\text{viz } \xi$ denota o conjunto dos vértices na vizinhança de ξ e \mathbf{A}_ξ é a linha correspondente na matriz de adjacências.

Organizando os resultados em uma tabela:

i, j	$\text{viz } i$	$\text{viz } j$	$\text{viz } i \cap \text{viz } j$	$\text{viz } i \cup \text{viz } j$	$\mathcal{J}(i, j)$	$\mathcal{C}(i, j)$
a, b	$\{b, c, \xi\}$	$\{a, c, \xi\}$	$\{c, \xi\}$	$\{a, b, c, \xi\}$.50	.66
b, c	$\{a, c, \xi\}$	$\{a, b, d, \xi\}$	$\{a, \xi\}$	$\{a, b, c, d, \xi\}$.40	.58
c, d	$\{a, b, d, \xi\}$	$\{c, e\}$	\emptyset	$\{a, b, c, d, e, \xi\}$	0	0
d, e	$\{c, e\}$	$\{d, f\}$	\emptyset	$\{c, d, e, f\}$	0	0

2 Não, muito pelo contrário. Como ambas possuem a interseção das vizinhanças no numerador, vértices cujas conexões são idênticas a menos de isomorfismo não serão contemplados por estas duas métricas. Do ponto de vista da *identidade estrutural*, poderíamos afirmar que os vértices d e e são estruturalmente idênticos. Se alguém removesse as etiquetas da Figura 8 e chacoalhasse o grafo um pouco, já seria impossível afirmar com certeza quais vértices estavam marcados por d e e . No entanto, em ambas as métricas este par de vértices foi tratado como plenamente dissemelhante.

3 O grafo de *Barbell* foi colorido na figura abaixo de modo que dois vértices possam ter suas identidades trocadas e ainda pertencer a um automorfismo σ caso tenham sido coloridos com a mesma cor.

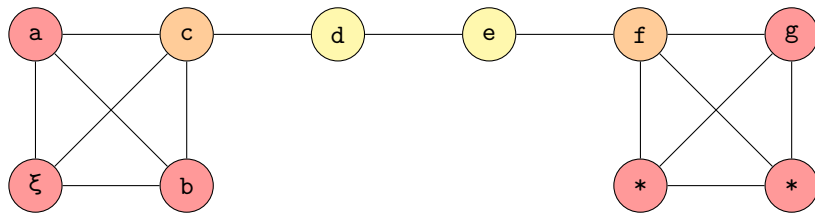


Figura 9: Um mapa para o Automorfismo