Questão 1. Filtro Linear Invariante no Tempo (L.T.I.)

Se $\mathbf{T}[\cdot]$ é um filtro linear, então vale que

$$\mathbf{T}[\alpha\mathbf{x}(t) + \beta\mathbf{y}(t)] = \alpha\mathbf{T}[\mathbf{x}(t)] + \beta\mathbf{T}[\mathbf{y}(t)]$$

Se $\mathbf{T}[\cdot]$ é invariante no tempo e se $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}[\mathbf{x}(t)]$ então

$$\mathbf{T}[\mathbf{x}(t + \Delta t)] = \mathbf{y}(t + \Delta t)$$

Sabido isso, podemos concluir que $\mathbf{T}[\cdot]$ pode ser expresso matematicamente por uma convolução no domínio do tempo entre o sinal de entrada e a resposta ao impulso $\mathbf{h}(t)$, ou seja,

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{T}[\delta(t)]$$

onde

$$\delta(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$$

Como ele é L.T.I, temos também que

$$\mathbf{h}(t + \tau) = \mathbf{T}[\delta(t + \tau)] \quad \forall\tau$$

Supomos que

$$x(n) = x(n) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(i) \cdot \delta(i - n)$$

Dessa forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}[x(n)] &= \mathbf{T}\left[\sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(i) \cdot \delta(i - n)\right] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{T}[\mathbf{x}(i) \cdot \delta(i - n)] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(i) \cdot \mathbf{T}[\delta(i - n)] \\
&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{x}(i) \cdot \mathbf{h}(i - n)
\end{aligned}$$

Questão 2. Cálculo do centróide

Enunciado. Dados os vetores $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ calcule o centróide.

Resposta. Sejam $\vec{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix}3\\1\\1\end{bmatrix}$ e $\vec{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$.

Centróide é o ponto com a menor distância média em relação aos demais pontos da amostra. O termo $\frac{1}{N}$ não é importante e podemos usar a distância ao quadrado para comparação. Portanto, calculamos para cada $\vec{\mathbf{x}}_i$

$$d_i^2 = \sum_{i \neq j} ||\vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_j||^2$$

$$\begin{aligned} d_1^2 &= ||\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2||^2 + ||\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_3||^2 \\ &= \left[(-2)^2 + 1^2 + 2^2\right] + \left[0^2 + 0^2 + 2^2\right] \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2^2 &= ||\vec{\mathbf{x}}_2 - \vec{\mathbf{x}}_1||^2 + ||\vec{\mathbf{x}}_2 - \vec{\mathbf{x}}_3||^2 \\ &= \left[2^2 + (-1)^2 + (-2)^2\right] + \left[2^2 + (-1)^2 + 0^2\right] \\ &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3^2 &= ||\vec{\mathbf{x}}_3 - \vec{\mathbf{x}}_1||^2 + ||\vec{\mathbf{x}}_3 - \vec{\mathbf{x}}_2||^2 \\ &= \left[0^2 + 0^2 + (-2)^2\right] + \left[(-2)^2 + 1^2 + 0^2\right] \\ &= 9 \end{aligned}$$

Como $d_3^2 < d_1^2 < d_2^2$, dizemos que $\vec{\mathbf{x}}_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ é o centróide.

Questão 3. Modulação AM/FM

Questão Extra. Convolução das Transformadas

Enunciado. Demonstre as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} &\text{a) } \mathcal{F}\left\{a(t) \cdot b(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{a(t)\right\} * \mathcal{F}\left\{b(t)\right\} \\ &\text{b) } \mathcal{F}\left\{a(t) * b(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{a(t)\right\} \cdot \mathcal{F}\left\{b(t)\right\} \end{aligned}$$

Resposta.

a) Pela definição

$$\mathcal{F}\left\{a(t) \cdot b(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \cdot b(t) \cdot e^{-2\pi j f t}\ dt$$

No entanto,

$$b(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{B(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} B(f) \cdot e^{2\pi j f t} df$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{a(t) \cdot b(t)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} B(\hat{f}) \cdot e^{2\pi j \hat{f} t} d\hat{f} \right) \cdot e^{-2\pi j f t} \ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} B(\hat{f}) \int_{-\infty}^{\infty} a(t) \cdot e^{-2\pi j (f - \hat{f}) t} \ dt \ d\hat{f} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} B(\hat{f}) \cdot A(f - \hat{f}) d\hat{f} \\
\mathcal{F}\left\{a(t) \cdot b(t)\right\} &= B(f) * A(f) = A(f) * B(f) = \mathcal{F}\left\{a(t)\right\} * \mathcal{F}\left\{b(t)\right\}
\end{aligned}$$

■

b) Seguindo o mesmo raciocínio,

$$\mathcal{F}\left\{a(t) * b(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) \cdot b(t - \tau) \ d\tau \right) e^{-2\pi j f t} \ dt$$