# MAA355 - Lista 1

Pedro Maciel Xavier

116023847

13 de abril de 2021

**Questão 1.:** Seja $V$ um $K$-espaço vetorial, $W_1, W_2 \subset V$ subespaços tais que $W_1 + W_2 = V$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Mostre que $\forall \alpha \in V$ $\alpha$ se escreve de forma única $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2$.

Vamos supor por absurdo que $\exists \alpha \in V$ que não se escreve de forma única como $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 \in W_1, \alpha_2 \in W_2$, isto é, $\alpha = \beta_1 + \beta_2, \alpha_1 \neq \beta_1 \in W_1, \alpha_2 \neq \beta_2 \in W_2$.
Logo, $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2$ e, portanto, $\gamma = \alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2$. É certo que, como $W_i$ são espaços vetoriais, $\alpha_i - \beta_i \in W_i$, $i = 1, 2$. Por fim, $\gamma \neq 0$ pertence tanto a $W_1$ como a $W_2$ e $\{\gamma\} \subseteq W_1 \cap W_2$ é a contradição que buscávamos. ■

**Questão 2.:** Seja $V$ um $K$-espaço vetorial. Mostre que se $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$ tais que $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle = V$ então $\dim_K V < \infty$.

Se $V$ for um $K$-espaço vetorial de dimensão infinita,

**Questão 3.:** Seja $V$ um $K$-espaço vetorial, $\mathbf{T} \in \operatorname{End}_K V$. Prove que a) e b) são equivalentes.

a) $\operatorname{Im} \mathbf{T} \cap \ker \mathbf{T} = \{0\}$

b) Se $\mathbf{T}^2\alpha = 0$ então $\mathbf{T}\alpha = 0$

a) $\implies$ b) $\mathbf{T}^2\alpha = 0$ é o mesmo que dizer que $\mathbf{T}(\mathbf{T}\alpha) = 0$, ou seja, $\mathbf{T}\alpha \in \ker \mathbf{T}$. Naturalmente, $\mathbf{T}\alpha \in \operatorname{Im} \mathbf{T}$ e, portanto, $\mathbf{T}\alpha \in \operatorname{Im} \mathbf{T} \cap \ker \mathbf{T} = \{0\}$. Logo, se $\mathbf{T}^2\alpha = 0$ então $\mathbf{T}\alpha = 0$.

a) $\impliedby$ b) Seja $\beta \in \operatorname{Im} \mathbf{T} \cap \ker \mathbf{T}$. Como $\beta \in \operatorname{Im} \mathbf{T}$, $\beta = \mathbf{T}\alpha$ para algum $\alpha \in V$. Por outro lado, $\beta \in \ker \mathbf{T}$ significa que $\mathbf{T}\beta = 0$. Por conseguinte, $\mathbf{T}\beta = \mathbf{T}(\mathbf{T}\alpha) = \mathbf{T}^2\alpha = 0$ então $\beta = \mathbf{T}\alpha = 0$. Isso conclui a prova. ■

**Questão 4.:** Seja $V$ um $K$-espaço vetorial com $\dim_K V < \infty$ e $\mathbf{T} \in \operatorname{End}_K V$. Suponha que o posto de $\mathbf{T}^2$ é o mesmo que o posto de $\mathbf{T}$. Mostre que

$$\operatorname{Im} \mathbf{T} \cap \ker \mathbf{T} = \{0\}$$

**Questão 5.:** Sejam $m, n \geq 1$ inteiros, $K$ um corpo e $f_1, \ldots, f_m \in (K^n)^*$. Para $\alpha \in K^n$ definimos

$$\mathbf{T}\alpha = (f_1\alpha, \ldots, f_m\alpha)$$

Mostre que $\mathbf{T} : K^n \to K^m$ é uma transformação $K$-linear. Mostre também que $\forall \mathbf{T} \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^n)$ é desta forma.