

# CPS846 - Lista 1

Pedro Maciel Xavier  
116023847

23 de agosto de 2020

**Questão 1.:** Mostre que todo grafo  $G$  pode ser transformado em um grafo bipartido pela remoção de, no máximo,  $|E(G)|/2$  arestas. Quantas arestas precisamos adicionar no grafo bipartido obtido para obtermos um grafo bipartido completo?

**Questão 2.:** Prove que  $ex(n, K_{s,t}) = O(n^{2-\frac{1}{s}})$ .

**Questão 3.:** Seja  $A$  um *conjunto multiplicativo de Sidon*, i.e., um conjunto tal que  $x, y, z, w \in A$  são tais que  $xy = zw$  então  $\{x, y\} = \{z, w\}$ . Use  $A$  para construir um grafo  $G_A$  livre de  $C_4$  tal que  $|E(G_A)| \geq |A|$ .

Seja  $E = \{(a, b) : a \cdot b \in A\}$  o conjunto de arestas de um grafo  $G$ .

**Suposição.**  $C_4 \not\subseteq G$

*Demonstração.* Sejam  $a, b, c, d \in V(G)$ . Os possíveis ciclos de tamanho 4 formados entre estes vértices necessariamente passam pelos 4, onde cada vértice tem grau 2 no ciclo. Isso indica uma tentativa de encontrar dois múltiplos distintos de cada vértice em  $A$ . Dessa forma, estaríamos dizendo que  $ab, cd, ac$  e  $bd$  (ou combinação equivalente) pertencem a  $A$ . Isso é impossível, visto que  $ab \cdot cd = ac \cdot bd$ . ■

Por fim, para mostrar que  $|E(G)| \geq |A|$ , basta observar que  $1 \in V(G)$ . Assim, existe pelo menos uma aresta para cada elemento de  $A$ .