CPS740 - Prova 1

Pedro Maciel Xavier
116023847

14 de agosto de 2020

Questão 1

1) Se G é 3-colorível, então G possui um ciclo ímpar. **Verdadeiro.**

O **Teorema 5.1**[1] afirma que $\chi(G) = \max\{\chi(\alpha_{v,w}(G)), \chi(\beta_{v,w}(G))\}$ quando, tendo $(v,w) \notin E(G)$, $\alpha_{v,w}(G)$ é o grafo obtido pela inclusão da aresta (v,w) ao grafo G e $\beta_{v,w}(G)$ é aquele obtido pela identificação do vértice v com o vértice w. Segue do teorema que $\chi(G)$ é o tamanho do menor grafo completo encontrado através das aplicações recursivas da relação acima. Vale lembrar que como condição de parada, temos que $\chi(G) = r$ se $G = K_r$.

Como $\chi(G) = 3$, podemos afirmar que G possui ao menos uma clique K_3 como subgrafo e, portanto, um ciclo ímpar de tamanho 3.

2) Seja $G(V_1 \cup V_2, E)$ um grafo bipartido conexo. Então o grafo complementar G^c também é conexo. **Falso.**

Como V_1 e V_2 são conjuntos independentes, é evidente que o grafo complementar contará com duas cliques, formadas pelos vértices de V_1 e V_2, respectivamente.

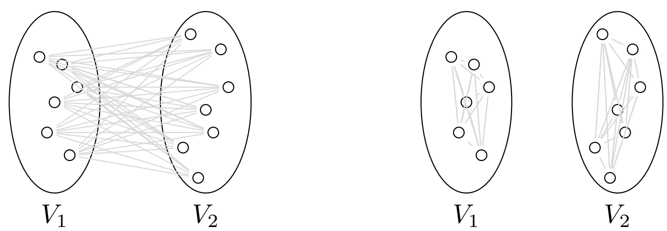

Figura 1: O Grafo $G(V_1 \cup V_2, E) = K_{|V_1|,|V_2|}$ e seu complemento G^c

No entanto, no caso do grafo bipartido completo $K_{|V_1|,|V_2|}$ temos que seu complemento não possui nenhuma aresta que ligue um vértice de V_1 a algum outro em V_2. Temos assim um contraexemplo.

3) Se retirarmos uma aresta qualquer do grafo $K_{3,3}$, o grafo resultante é planar. **Verdadeiro.**

O **Teorema 2.7**[1] afirma que um grafo é planar se e somente se não possuir nenhum subgrafo que seja uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. A subdivisão de um grafo G consiste em inserir um vértice $u \notin V(G)$ ao grafo após a remoção de uma aresta $(v,w) \in E(G)$ seguida da adição das arestas (v,u) e (u,w).

Seja $\pi_{v,w}(G)$ uma subdivisão do grafo G através da aresta (v,w). Sabemos, pela construção deste processo, que $|V(\pi_{v,w}(G))| = |V(G)| + 1$ e que $|E(\pi_{v,w}(G))| = |E(G)| + 1$. Conclui-se que, sendo $\pi(G)$ uma subdivisão qualquer de G, temos que $|E(\pi(G))| \geq |E(G)|$. Seja G o grafo obtido removendo uma aresta de $K_{3,3}$, temos que todo subgrafo H de G possui $|E(H)| \leq |E(G)|$. Como $|H(G)| \leq |E(G)| < |E(K_{3,3})|$, é claro que nenhum subgrafo H de G é subdivisão de $K_{3,3}$.

Da mesma forma, nenhum subgrafo próprio de $K_{3,3}$ é capaz de conter uma subdivisão de K_5, já que pra isso é necessário possuir ao menos 5 vértices de grau 5. Portanto, qualquer grafo $G = K_{3,3} - (v, w)$ tal que $(v, w) \in E(K_{3,3})$ é planar.

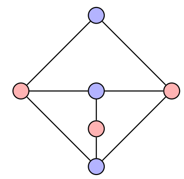

Figura 2: Um grafo bipartido planar

Outro raciocínio possível seria verificar pela remoção de uma das arestas que se obtêm um grafo planar. Em seguida, basta observar que todos os grafos obtidos pela remoção de uma aresta de $K_{3,3}$ são isomorfos e, portanto, planares.

4) Seja f um isomorfismo de um grafo G para um grafo H, e seja w um vértice em G. O grau de w em G é igual ao grau de $f(w)$ em H. **Verdadeiro.**

Dados dois grafos, G e H, dizemos que $G \cong H$ se $\exists f : V(G) \to V(H)$ tal que

$$(w, v) \in E(G) \iff (f(w), f(v)) \in E(H) \tag{1}$$

Satisfeito, f é dito um isomorfismo entre G e H. Sabemos, portanto, que para um vértice qualquer $w \in V(G)$ tendo $f(w) \in V(H)$,

$$\text{Seja } \mathbb{I}_{\Omega}\{\omega\} \triangleq \begin{cases} 1 \text{ se } \omega \in \Omega \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{grau}(w) &= \sum_{v \in V(G)} \mathbb{I}_{E(G)}\{(w, v)\} && (2) \\ &= \sum_{f(v) \in V(H)} \mathbb{I}_{E(H)}\{(f(w), f(v))\} && (3) \\ &= \text{grau}(f(w)) && \blacksquare \end{aligned}$$

De (2) para (3) utilizamos a relação (1), extraída da definição de isomorfismo em grafos presente no Capítulo 2 do livro[1].

5) O Grafo abaixo é planar: **Falso.**

Seja $\pi(G)$ uma subdivisão qualquer de G. Invocando mais uma vez o **Teorema 2.7**[1], vamos buscar por subdivisões de K_5 e $K_{3,3}$ no grafo. Certamente não há nenhuma instância de $\pi(K_5)$, visto que só existe um vértice que possui grau maior ou igual a 5, quando são necessários ao menos 5.

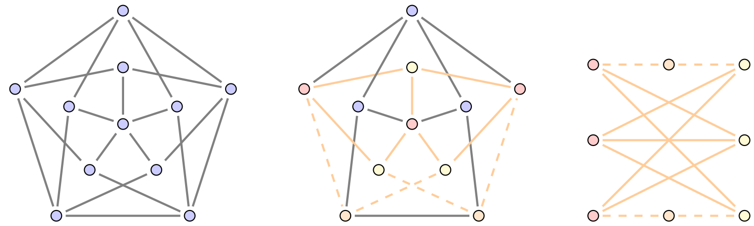

Figura 3: Um Grafo que, infelizmente, não é planar.

No entanto, encontramos uma subdivisão de $K_{3,3}$ e podemos afirmar que o grafo não é planar.

6) Todo hipercubo de dimensão n, $n \geq 1$, possui ciclo Hamiltoniano. **Verdadeiro.**

Seja $\mathscr{H}_n$ o n-ésimo hipercubo, um grafo com 2^n vértices de grau n. Por construção, $\mathscr{H}_k$

Questão 2

Vamos supor que utilizamos r_1 cores em uma coloração ótima para G_1 e que precisamos de r_2 cores para colorir G_2.

Questão 3

Referências

[1] SZWARCFITER, Jayme Luiz, **Teoria Computacional de Grafos**, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2018.