CPS740 - Prova 2

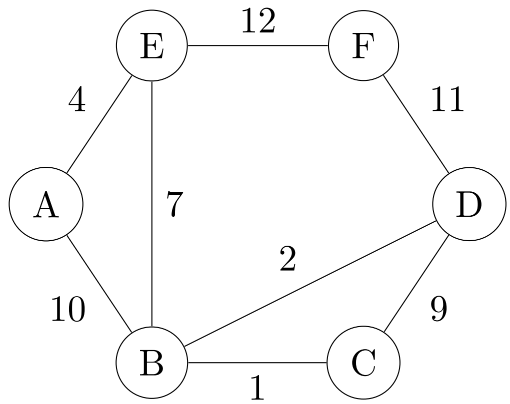
Pedro Maciel Xavier

116023847

27 de setembro de 2020

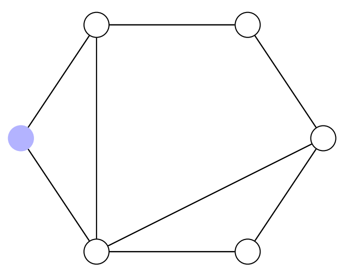
Questão 1.:

Vejamos o seguinte grafo:

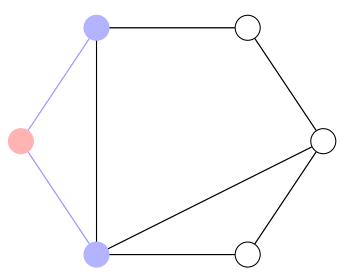


1 .: Algoritmo de *Djkstra*

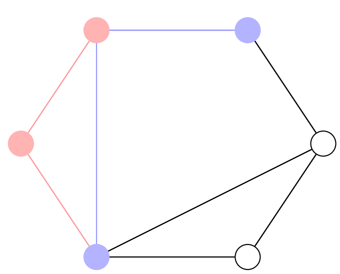
Abaixo temos passo-a-passo do algoritmo de *Djkstra*. Vemos uma miniatura do grafo ao lado da tabela respectiva a cada iteração. Seja u a raiz da busca, para cada vértice v temos a distância até a raiz $d(v, u)$ e o vetor de retorno $\mathbf{r}[v]$ que vamos usar para construir a árvore geradora.



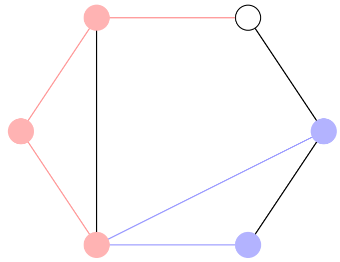
v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	∞	□
C	∞	□
D	∞	□
E	∞	□
F	∞	□



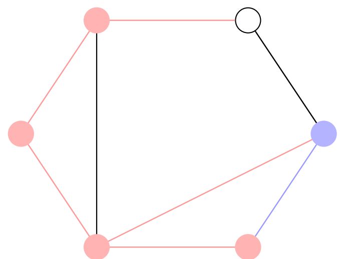
v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	10	A
C	∞	□
D	∞	□
E	4	A
F	∞	□



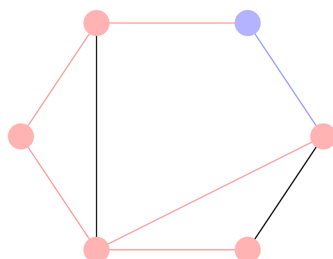
v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	10	A
C	∞	□
D	∞	□
E	4	A
F	16	E



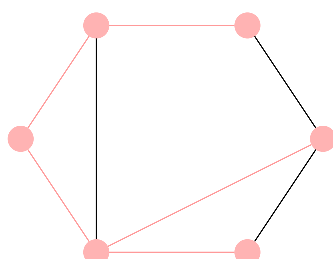
v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	10	A
C	11	B
D	12	B
E	4	A
F	16	E



v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	10	A
C	11	B
D	12	B
E	4	A
F	16	E



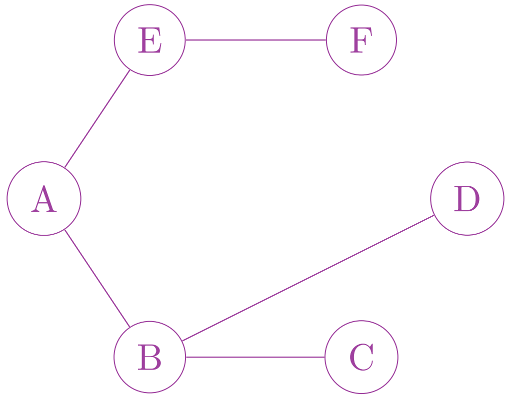
v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	10	A
C	11	B
D	12	B
E	4	A
F	16	E



v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	10	A
C	11	B
D	12	B
E	4	A
F	16	E

2 .: Árvore Geradora de *Djkstra*

Observando com atenção a configuração final da tabela construída pelo algoritmo, podemos construir a árvore geradora:

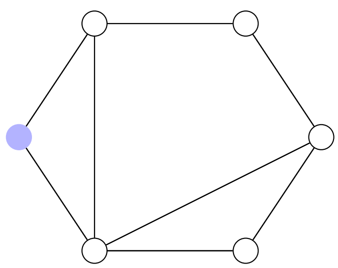


3 .: Árvore de busca em largura

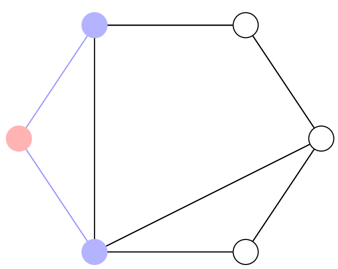
Independentemente do critério de ordenação na busca, uma árvore geradora oriunda de uma busca em largura optaria por atingir o vértice C utilizando-se da aresta (D, C), de custo 9. A árvore de caminho mínimo, no entanto, chegaria ao vértice C através de B, uma vez que o caminho (D, B, C) possui distância total $2 + 1 = 3$.

4 .: Algoritmo de *Prim*

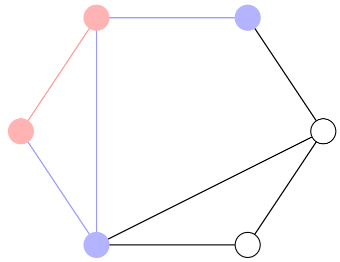
O passo-a-passo para este algoritmo é apresentado de maneira semelhante ao anterior, com a miniatura do grafo ao lado da tabela de cada iteração.



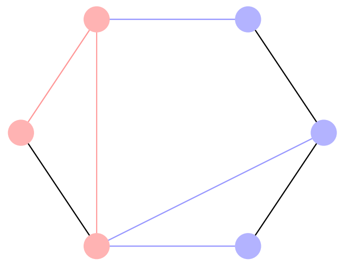
v	$d(u, v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	∞	$\square$
C	∞	$\square$
D	∞	$\square$
E	∞	$\square$
F	∞	$\square$



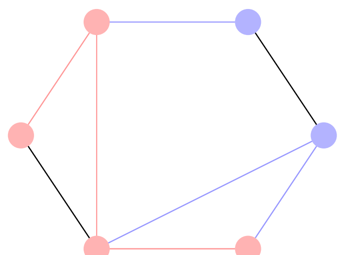
v	$d(u, v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	∞	$\square$
C	∞	$\square$
D	∞	$\square$
E	4	A
F	∞	$\square$



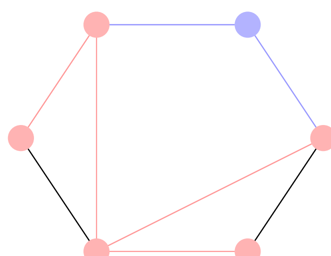
v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	11	E
C	∞	$\square$
D	∞	$\square$
E	4	A
F	∞	$\square$



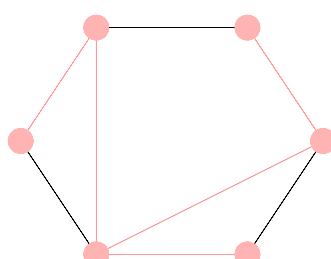
v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	11	E
C	12	B
D	∞	$\square$
E	4	A
F	∞	$\square$



v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	11	E
C	12	B
D	13	B
E	4	A
F	∞	$\square$



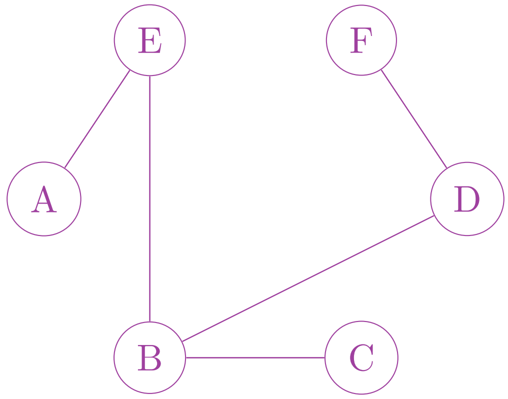
v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	11	E
C	12	B
D	13	B
E	4	A
F	24	D



v	$d(u,v)$	$\mathbf{r}[v]$
A	0	A
B	11	E
C	12	B
D	13	B
E	4	A
F	24	D

5 .: Árvore Geradora de *Prim*

Abaixo, temos a árvore geradora obtida a partir da tabela resultante.



6 .: Árvore de busca em profundidade

Iniciando uma busca em profundidade a partir do vértice A, seguindo pelo caminho proposto segundo a árvore obtida pelo algoritmo de *Prim*, chegaríamos a B passando por E. Aqui encontramos um problema: caso decidamos prosseguir por C, alcançaríamos D logo em seguida. Se optamos pelo contrário e seguimos pela aresta (B, D), temos que (D, C) pertence a busca em profundidade que continua a partir de D. Logo, não é possível reconstruir a árvore geradora através de uma busca em profundidade com raiz em A.

Questão 2.:

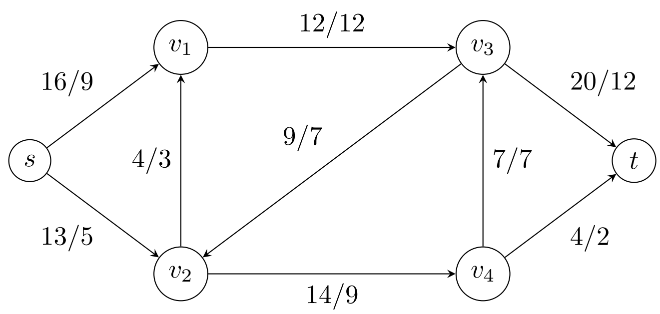
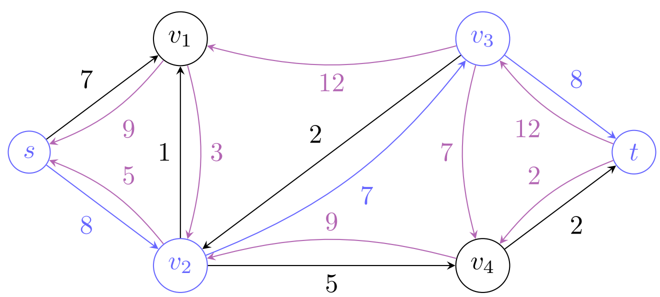


Figura 1: Rede de fluxos

1 .: O fluxo não é maximal pois existe um caminho aumentante, isto é, que liga s a t cujas arestas não se encontram saturadas. Mais precisamente, o caminho (s, v_2, v_4, t), cujo gargalo é 2.

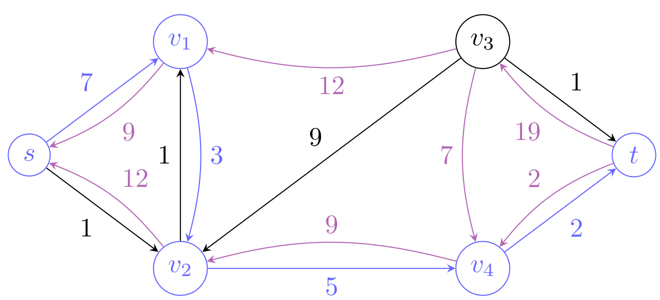
2 .: A capacidade do corte $(S - \{t\}, \{t\})$ é $20 + 4 = 24$. O corte $(S - \{v_3, t\}, \{v_3, t\})$, por sua vez, possui capacidade $12 + 7 + 4 = 23$. Logo, existe um corte de capacidade inferior àquele apresentado que, portanto, não pode ser o mínimo.

3 .: Encontrando o caminho aumentante (em azul) de maneira gulosa, e recalculando a respectiva rede residual (em violeta) temos:



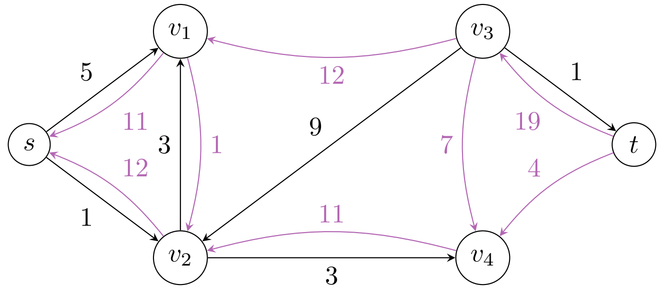
Caminho aumentante: (s, v_2, v_3, t)

Gargalo: 7

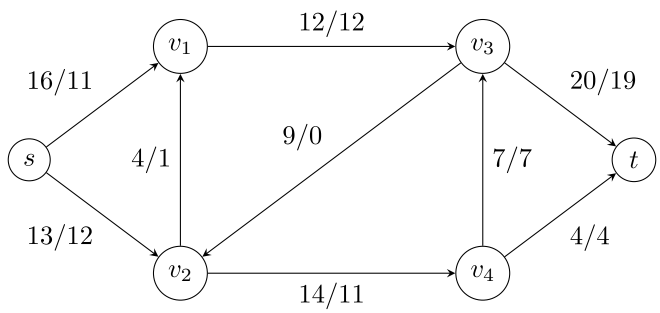


Caminho aumentante: (s, v_1, v_2, v_4, t)

Gargalo: 2



Por fim, não temos mais caminhos aumentante que levem de s até t. De fato, já atingimos o fluxo de 23 unidades, que sabemos ser máximo pois é o valor do corte mínimo. A rede resultante é, portanto:



4 .: Um fluxo maximal é aquele onde todas os caminhos da origem ao destino incluem ao menos uma aresta saturada. A rede de fluxos abaixo apresenta fluxo maximal, pois para chegar ao destino t é preciso passar por ao menos uma das arestas saturadas $\{(v_1, v_3), (v_4, v_3), (v_4, t)\}$.

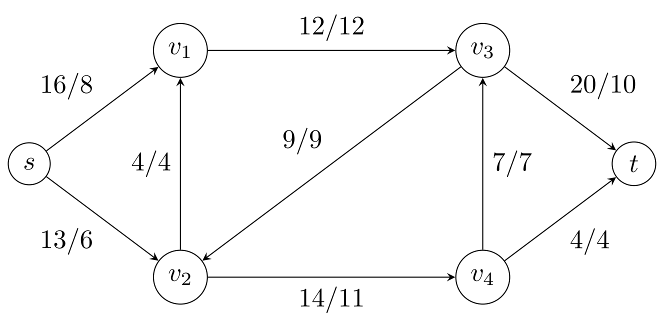


Figura 2: Uma rede de fluxo maximal mas que não é máximo.

O fluxo desta rede é $10 + 4 = 14$, menor do que o máximo, que já sabemos ser 23.

Referências

[1] SZWARCFITER, Jayme Luiz, **Teoria Computacional de Grafos**, 1ª edição, Rio de Janeiro, 2018.