

# Lista Extra de Computação

DCC / UFRJ

Pedro Maciel Xavier (monitor)  
pedromxavier@poli.ufrj.br

24 de novembro de 2019

## Introdução

—”Fala galerinha do YouTube!”

Essa lista de exercícios tenta cobrir toda a matéria dos cursos de Computação da UFRJ e ainda se encontra em desenvolvimento. A intenção é que ela tenha um gabarito bem aberto, deixando muito das respostas pra criatividade do aluno. As questões são, em geral, grandes para se resolver e podem necessitar de alguma pesquisa adicional. Elas tem estrelinhas ★ indicando a dificuldade estimada. Alguns exercícios foram inspirados em outros propostos nos materiais dos professores que estão devidamente citados no final. É importante você tire suas dúvidas e dê um retorno do que achou dos exercícios através do e-mail no cabeçalho.

Boa diversão!

# 1 Orientação a Objeto (Classes)

## 1.1 O Bidicionário [1] ★

Todos conhecemos os dicionários do Python, que guardam diversos objetos em pares da forma "chave":valor. Vejamos um exemplo:

```
>>> casa = {'quartos':4, 'banheiros':5, 'andares':3, 'm^2':210}
>>> casa['quartos']
4
```

O objetivo deste exercício é criar um dicionário de mão dupla! Tudo que você precisa fazer é sobrescrever o método `__setitem__` em um novo tipo que herda as propriedades de um dicionário comum do Python, o `dict`. Basta completar o exemplo abaixo!

```
class Bidict(dict):
    def __init__(self, mapping={}):
        dict.__init__(self, mapping)
    ...
>>> bd = Bidict()
>>> bd["a"] = 4
>>> bd[3] = "d"
>>> print bd
{"a":4, 4:"a", 3:"d", "d":3}
```

Lembrando que se um objeto não puder ser chave de um dicionário, ele também não poderá ser um valor do bidicionário!

## 1.2 Ora Bolas! ★

Agora você tem que fazer o seguinte: Crie uma classe chamada Bola que deve implementar objetos com as seguintes características:

1. O raio nominal da bola.
2. A pressão de ar máxima (em *bar*).
3. A pressão de ar atual. (em *bar*).
4. A condição da bola (furada ou não).

5. Uma onomatopeia correspondente ao barulho que a bola faz quando quica, e outra para caso ela fure.
6. A probabilidade da bola furar quando quica.

Além disso, tendo uma bola em mãos você deve poder:

1. Quicar! Caso ela não esteja vazia.
2. Encher em alguma quantidade de *bar*, passada como argumento da função, caso ela não esteja furada. Se você encher de mais ela deve furar!
3. Calcular o seu volume.

Feita a bola, você deve criar uma classe `BolaQuadrada` que herde as propriedades de uma bola comum, mas tenha as adaptações necessárias para o seu formato. Ela deve, por exemplo, ter 50% de chance de quicar em uma tentativa.

Faça também a classe `BolaDeFesta`, que deve furar sempre que quicar. Dê a ela um som de estouro interessante.

### 1.3 Frações ★

Um número racional  $r \in \mathbb{Q}$  é aquele que pode ser escrito como:

$$r = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0$$

Crie uma classe `Fracao` que implemente as seguintes operações e métodos:

1. Um método que simplifique a fração.
2. `+`, `-`, `*`, `**` e `/`.
3. `-` (`--neg--`) e `~` (`--invert--`).
4. `--repr--` que retorna "`p|q`".
5. `--float--`, que calcula a divisão em ponto-flutuante.

```
class Fracao(object):

    def __init__(self, p, q):
        assert type(p) is int
        assert type(q) is int
        assert q != 0
        ...
```

## 1.4 Polinômios [2] ★★

Um polinômio de grau  $n$  é aquele da forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Sabendo isso, faça uma classe `Polinomio` que implemente:

1. A definição de um coeficiente do polinômio através do método `__setitem__`, ou seja, `p[2] = 3` faria com que o coeficiente  $a_2$  do polinômio  $p$  tivesse valor 3.
2. O cálculo do grau do polinômio  $p$ , que deve ser retornado quando chamamos `len(p)`.
3. A soma, a subtração e a multiplicação usual de polinômios usando os operadores da linguagem  $(+, -, *)$ , que deve retornar um novo objeto da classe `Polinomio`.
4. E por fim, a avaliação da função num ponto  $x$ , usando o método especial `__call__`.

Bônus:

1. O método especial `__repr__` que deve retornar uma `string` que represente o polinômio  $2 + x + 3x^2$  na forma `"2x^0 + 1x^1 + 3x^2"`, por exemplo.
2. Duas funções, `Polinomio.integral` e `Polinomio.derivada` que retornem os respectivos polinômios resultantes destas operações.
3. Divisão de polinômios  $(f/g$  e  $f\%g)$ , que devem retornar respectivamente o quociente  $q(x)$  e o resto  $r(x)$  tais que  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ .

## 1.5 Grupos \*\*\*



### 1.5.1 Interlúdio: Conjuntos

No Python temos um tipo muito bacana, mas muito mesmo, chamado `set`. Esse carinha simula um conjunto do ponto de vista matemático, ou seja, é uma coleção de objetos distintos. Um `set` pode ser criado usando-se outro objeto ou informando os elementos entre colchetes:

```
>>> A = set([1, 2, 3])
>>> B = {x for x in range(2, 5)}
>>> A
set([1, 2, 3])
>>> B
set([2, 3, 4])
>>> A - B
set([1])
>>> A | B
set([1, 2, 3, 4])
```

O `set` permite realizar diversas operações entre conjuntos, sendo as mais importantes: a diferença (`-`), a união (`|`, ou *binário*) e a interseção (`&`, e *binário*).



Em Álgebra, um Grupo  $G = (A, *)$  é formado por um conjunto  $A$  e uma operação qualquer  $*$ , quando valem as seguintes regras:

1.  $(a * b) \in A \quad \forall a, b \in A$  [O grupo é fechado para a operação.]
2.  $\exists e \in A : e * a = a * e = a \quad \forall a \in A$  [Existe o elemento neutro.]
3.  $\exists a^{-1} \in A : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \quad \forall a \in A$  [Existe o elemento inverso.]

Construa um objeto Grupo que herda as características do `set`. Devem ser passados ao construtor: os elementos em uma coleção A, e uma função  $f(a, b)$  que realiza a operação  $*$  sobre dois elementos do Grupo.

```
def f(a,b):
    return (a + b) % 5

class Grupo(set):
    def __init__(self, A, f):
        ...

    def __hash__(self):
        return hash(tuple(self))

>>> G = Grupo([0,1,2,3,4], f)
>>> G
{0, 1, 2, 3, 4}
>>> H = Grupo([0,1,2], f)
Traceback (most recent call last):
  File "<pyshell#1>", line 1, in <module>
    raise Exception('Isso não é grupo!')
Exception: Isso não é grupo!
```

Sabido isso:

1. O construtor deve criar um erro quando as regras de Grupo não forem atendidas.
2. A visualização do grupo mostre os elementos entre colchetes usando o método `__repr__`.

## 1.6 Subparte I: Produto

O produto entre dois grupos é dado da seguinte forma:

$$GH := \{g * h : g \in G, h \in H\}$$

Defina o método `__mul__` para atender a esse propósito.

### 1.6.1 Subparte II: Quociente

Existe uma operação entre grupos chamada *quociente* definida por:

$$G/H := \{gH : g \in G\} = \{\{g * h : h \in H\} : g \in G\}$$

Essa operação deve retornar um *conjunto de grupos* e isso só é possível se o método `__hash__` estiver definido como no modelo. Implemente essa operação usando o método `__div__`.

### 1.6.2 Subparte III: Subgrupos

Um Subgrupo  $H$  de um Grupo  $G$ , que escrevemos  $H < G$ , é aquele cujo conjunto é subconjunto de  $G$  e  $H$  também um Grupo. O tipo `set` já implementa os operadores `>`, `>=`, `<`, `<=` e `==` comparando dois objetos do ponto de vista dos conjuntos. Reescreva os métodos `__gt__`, `__ge__`, `__lt__`, `__le__` e `__eq__`, respectivamente, para dizer verificar, por exemplo, se  $H$  é subgrupo de  $G$  através da expressão  $H < G$ . Feito isso, construa um método da classe Grupo que retorne um conjunto contendo todos os subgrupos de um grupo  $G$ .

Dica Teorema:

O *Teorema de Lagrange* diz que sendo  $G$  um grupo finito e  $H$  um subgrupo de  $G$ , a ordem de  $H$  divide a ordem de  $G$ .

$$H < G \implies |G| = |H| \cdot k, k \in \mathbb{N}$$

A ordem de um grupo  $G$ , escrita como  $|G|$ , é simplesmente o número de elementos em  $G$ , que pode ser obtida diretamente pela expressão `len(G)`.

## 1.7 Musical ★★☆☆

A nota *lá* (A4) na musica ocidental corresponde a frequência de  $440Hz$ . A partir desta nota podemos conhecer todas as outras frequências usando a simples fórmula:

$$f(n) = 440 \times \sqrt[12]{2^n}$$

A escala musical *cromática* é dividida em 12 semitons, cada um correspondente a uma nota:

..., fá#[−3], sol[−2], sol#[−1], lá[0], lá#[1], si[2], dó[3], dó#[4], ré[5], ré#[6], mi[7], fá[8], fá#[9]...

Essa sequência se repete nos dois sentidos e símbolo # lê-se *sustenido*. Assim, se queremos a frequência de um *dó* logo após o *lá* central (A4), basta calcular  $f(3) \approx 523.25Hz$ .

Note que se temos alguma nota cuja frequência é  $f(\bar{n})$ , ao avançarmos 12 semitons na escala cromática voltamos para a mesma nota, mas com frequência  $f(\bar{n} + 12)$ . Ao tirar a razão entre as duas frequências:

$$\frac{f(\bar{n} + 12)}{f(\bar{n})} = \frac{440 \times \sqrt[12]{2^{\bar{n}+12}}}{440 \times \sqrt[12]{2^{\bar{n}}}} = 2$$

Isso nos diz que cada vez que avançamos até a próxima repetição de uma nota, dobramos a frequência! Na escala de *dó maior*, que todos sabemos de cor, isso equivale a avançar uma *oitava acima*.

### 1.7.1 Interlúdio: Beep



Um jeito fácil de fazer barulho no computador é usando a função `Beep`. Se você usa o Python no Windows boas notícias: você só vai precisar importar a função `Beep` do módulo `winsound`.

```
>>> Beep(440, 1000)

# windows
from winsound import Beep
```



Pra turminha do Linux, que precisa construir a função:

```
$ sudo apt-get install beep

# linux
import os
def Beep(f, ms):
    os.system("beep -f %i -l %i" % (f, ms))
```

~~~~~

Vamos construir agora um sensacional tocador de músicas! Você deve fazer duas classes: Som e Musica conforme os protótipos a seguir:

```
class Som(object):

    def __init__(self, nota, duracao):
        ...

class Musica(list):

    def __init__(self, partitura, tempo, nome="", autor=""):
        ...

    def __repr__(self):
        # mostra "<nome>", <autor> (<tempo> bps)
        ...

    def __call__(self):
        # toca a musica
        ...
```

Um Som deve ter:

1. O número da nota ( $lá=0$ ,  $si=2$ , ...), que será usado para calcular a frequência dela.
2. A duração da nota, que deve ser uma fração da *batida* que seja potência de  $\frac{1}{2}$ . Você pode até informar somente o expoente  $m$  de  $(\frac{1}{2})^m$ , onde  $m \in [-2, 6]$ .

A duração absoluta da nota dependerá da música em que o Som será tocado.

Já uma instância de `Musica` deve receber na construção:

1. A `partitura`, que é uma lista de objetos do tipo `Som`.
2. O `tempo`, dado em *batidas por minuto* (bps).

`Musica` herda as propriedades de lista, e assim pode ser percorrida com um `for`, tocando nota por nota.

Tendo essa parafernália toda em mãos, construiremos esses objetos de forma que a música seja tocada através da função `Beep(f, ms)`, que recebe a frequência `f` da nota e a sua duração `ms` em *milissegundos*.

## 1.8 Quaterniões! ★★

Não contente com os números complexos ( $\mathbb{C}$ ) da forma  $z = a + bi$ , a turma da matemática trouxe pra gente um ser ainda mais esquisito: o conjunto dos *Quaternions* ( $\mathbb{H}$ ).

$$\begin{aligned} q \in \mathbb{H} &\iff q = a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -1 \end{aligned}$$

Com regras de soma convencionais, similares aos números reais e complexos, mas com uma multiplicação que mais parece o produto externo entre vetores, implemente uma classe `Quaternion`, que é criada a partir dos seus 4 coeficientes reais e implementa:

1. O operador de soma `+` (`--add--`)
2. A subtração `-` (`--sub--`)
3. A multiplicação `*` (`--mul--`)
4. O método `--repr--` que imprima na tela, pra  $q = 3 + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$  a `string`  
`(3.00) + (0.00)i + (4.00)j + (-2.00)k`

Extra:

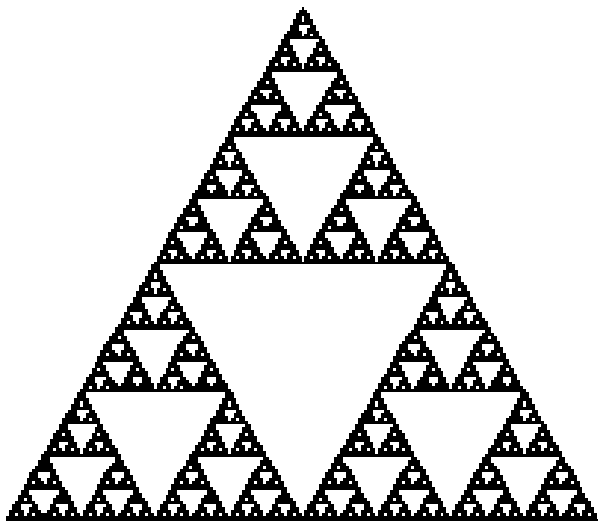
1. O módulo do quaternião, através da função `abs(q)`, implementada pelo método especial `__abs__`
2. A divisão `/` (`__div__`)

Dica: Implemente os métodos `__invert__` e `__neg__` para auxiliar na definição de `__div__` e `__sub__`, respectivamente.

## 2 Interface Gráfica

### 2.1 O Triângulo de Sierpinsky ★★

A figura a seguir chama-se *Triângulo de Sierpinsky*:



Ela é composta por triângulos equiláteros dispostos de forma que cada triângulo contém três outros em seu interior, cada um com  $\frac{1}{3}$  do lado do triângulo original. Desenhe essa estrutura usando o Tkinter ou o turtle, assim como uma função para compôr a figura de forma recursiva.

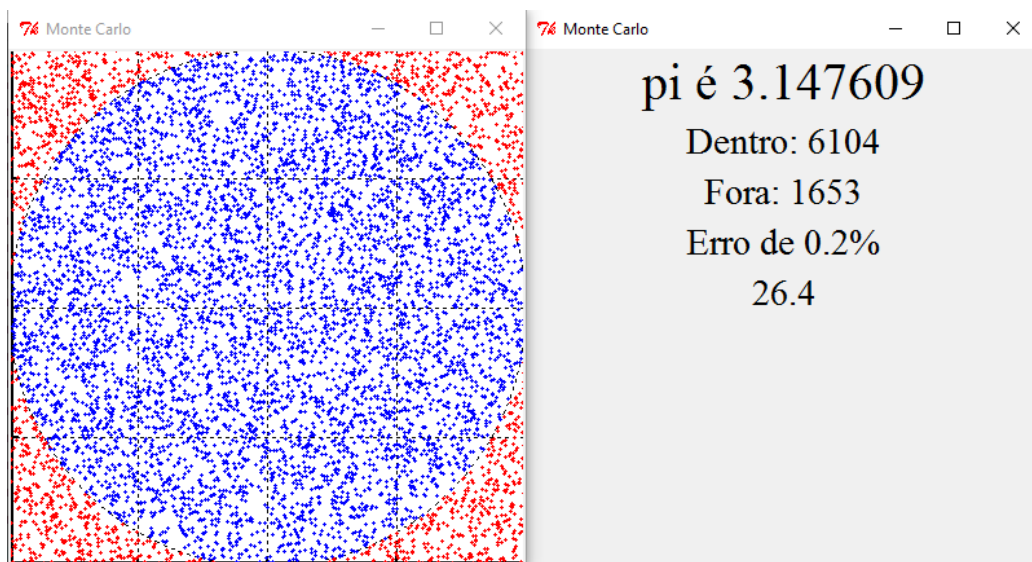
### 2.2 O Método de Monte Carlo ★★

O Método de *Monte Carlo* funciona da seguinte forma: Se temos uma determinada região e queremos calcular sua área, basta fazer com que ela esteja contida em uma outra região cuja área é conhecida. Em seguida, sorteamos pontos aleatórios  $P_i = (x_i, y_i)$  e contamos quantos pontos caem dentro da região que estamos avaliando. Assim:

$$\frac{A_{figura}}{A_{total}} \approx \frac{P_{dentro}}{P_{total}} \rightarrow A_{figura} \approx \frac{P_{dentro}}{P_{total}} \times A_{total}$$

Queremos então calcular a área de um círculo cujo raio é 1. Sabemos de antemão que valor da área é  $\pi$ , e vamos então usar o método acima para estimar o seu valor numérico.

Faça duas janelas usando o Tkinter. A primeira mostra onde os pontos estão sendo posicionados, colorindo os que caem dentro de **azul** e os que caem fora de **vermelho**. Na segunda tela, mostre em tempo real a aproximação para a área em azul conforme os pontos vão sendo posicionados.



dica: use o módulo random para sortear os pontos!

## 2.3 A proporção áurea ★★

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 ...

Muitos conhecem esse conjunto de números, a famosa *Sequência de Fibonacci*, que tem seu  $n$ -ésimo número definido por:

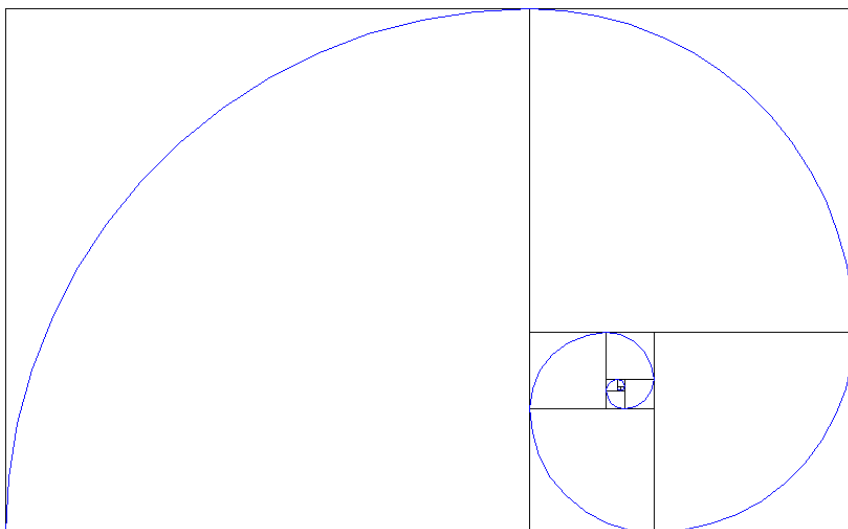
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$F_0 = 0 \text{ e } F_1 = 1$$

Se tomamos a razão entre dois números de *Fibonacci* consecutivos obtemos, no limite, um número que já era conhecido pelos gregos como símbolo da beleza e da perfeição da natureza.

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Sabido isso, sua tarefa é gerar a figura abaixo, usando o módulo que preferir, mas de forma recursiva. Para que os gregos realmente fiquem contentes com a majestade da sua figura é preciso que ela esteja conforme a proporção dada por  $\varphi$ .



## 2.4 O Piano ★★★

O Desafio agora é pegar os resultados da Questão **Musical** e construir um Piano Virtual com o Tkinter! Desenhe as teclas em um Canvas e use o método `Canvas.bind` para associar letras como `a, s, d, f, g, h, j` e `k` às teclas brancas e `w, e, r, y` e `u` às pretas, por exemplo.

## Referências

- [1] Prof. Pedro Asad (2016)
- [2] Prof. Claudio Esperança (2018)