Lista de Computação II (Python)

DCC / UFRJ

Pedro Maciel Xavier (monitor)
pedromxavier@poli.ufrj.br

27 de dezembro de 2019

Introdução

Essa lista de exercícios ainda se encontra em desenvolvimento. A intenção é que ela tenha um gabarito bem aberto, deixando muito das respostas para a criatividade do aluno. As questões são, em geral, grandes para se resolver e podem necessitar de alguma pesquisa adicional. Elas tem estrelinhas $\star$ indicando a dificuldade estimada. Alguns exercícios foram inspirados em outros propostos em materiais cujas fontes estão devidamente referenciadas no final. É importante você tire suas dúvidas e dê um retorno do que achou dos exercícios através do `e-mail` no cabeçalho.

Boa diversão!

Sumário

Revisão de Computação I

Não sei se vai ter isso aqui não em.

1 Orientação a Objeto (`class`)

1.1 O Bidicionário ⋆

Todos conhecemos os dicionários do `Python`, que guardam diversos objetos em pares da forma `"chave":valor`. Vejamos um exemplo:

```
>>> casa = {
            'quartos':4,
            'banheiros':5,
            'andares':3,
            'm^2':210
            }

>>> casa['quartos']
4
```

Listing 1: "Dicionário Normal"

O objetivo deste exercício é criar um dicionário de mão dupla! Tudo que você precisa fazer é sobrescrever o método `__setitem__` em um novo tipo que herda as propriedades de um dicionário comum do `Python`, o **`dict`**. Basta completar o exemplo abaixo!

```
class Bidict(dict):
    def __init__(self, mapping={}):
        dict.__init__(self, mapping)
    ...
>>> bd = Bidict()
>>> bd["a"] = 4
>>> bd[3] = "d"
>>> print(bd)
{"a":4, 4:"a", 3:"d", "d":3}
```

Lembrando que se um objeto não puder ser chave de um dicionário, ele também não poderá ser um valor do bidicionário!

1.2 Ora Bolas! ⋆

Mais um exercício pra esquentar: Crie uma classe chamada `Bola` que deve implementar objetos com as seguintes características:

1. O raio nominal da bola.
2. A pressão de ar máxima (em *bar*).
3. A pressão de ar atual. (em *bar*).
4. A condição da bola (furada ou não).
5. Uma onomatopeia correspondente ao barulho que a bola faz quando quica, e outra para caso ela fure.
6. A probabilidade da bola furar quando quica.

Além disso, tendo uma bola em mãos você deve poder:

1. Quicar! Caso ela não esteja vazia.
2. Encher em alguma quantidade de *bar*, passada como argumento da função, caso ela não esteja furada. Se você encher de mais ela deve furar!
3. Calcular o seu volume.

Feita a bola, você deve criar uma classe `BolaQuadrada` que herde as propriedades de uma bola comum, mas tenha as adaptações necessárias para o seu formato. Ela deve, por exemplo, ter 50% de chance de quicar em uma tentativa.

Faça também a classe `BolaDeFesta`, que deve furar sempre que quicar. Dê a ela um som de estouro interessante.

1.3 Frações ⋆

Um número racional $r \in \mathbb{Q}$ é aquele que pode ser escrito como:

$$r = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0$$

Desafio: Crie uma classe `Fracao` que implemente as seguintes operações e métodos:

1. Um método que simplifique a fração.
2. As operções:
   - `+` (`__add__`)
   - `-` (`__sub__`)
   - `*` (`__mul__`)
   - `**` (`__pow__`)
   - `/` (`__truediv__`)
   - `-` (`__neg__`)
   - `~` (`__invert__`).
3. `__repr__` que retorna `"p|q"`.
4. `__float__`, que calcula a divisão em ponto-flutuante.

```
class Fracao(object):

    def __init__(self, p, q):
        assert type(p) is int
        assert type(q) is int
        assert q != 0
        ...
```

1.4 Polinômios [2] ⋆ ⋆

Um polinômio de grau n é aquele da forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Desafio: Sabendo isso, faça uma classe `Polinomio` que implemente:

1. A definição de um coeficiente do polinômio através do método `__setitem__`, ou seja, `p[2] = 3` faria com que o coeficiente a_2 do polinômio p tivesse valor 3.

2. O cálculo do grau do polinômio p, que deve ser retornado quando chamamos `len(p)`.

3. A soma, a subtração e a multiplicação usual de polinômios usando os operadores da linguagem (+,−,⋆), que deve retornar um novo objeto da classe `Polinomio`.

4. E por fim, a avaliação da função num ponto x, usando o método especial `__call__`.

Desafio Bônus:

1. O método especial `__repr__` que deve retornar uma `string` que represente o polinômio $2 + x + 3x^2$ na forma `"2 + x + 3x^2"`, por exemplo.

2. Duas funções, `Polinomio.integral` e `Polinomio.derivada` que retornem os respectivos polinômios resultantes destas operações.

3. Divisão de polinômios (`f/g` e `f%g`) , que devem retornar respectivamente o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ tais que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

1.5 Grupos ⋆ ⋆ ⋆

Interlúdio: Conjuntos

No `Python` temos um tipo muito bacana, mas muito mesmo, chamado **set**. Esse carinha simula um conjunto do ponto de vista matemático, ou seja, é uma coleção de objetos distintos. Um **set** pode ser criado usando-se outro objeto ou informando os elementos entre colchetes:

```
>>> A = set([1,2,3])
>>> B = {x for x in range(2,5)}
>>> A
```

```
    set([1, 2, 3])
    >>> B
    set([2, 3, 4])
    >>> A - B
    set([1])
    >>> A | B
    set([1, 2, 3, 4])
```

O **set** permite realizar diversas operações entre conjuntos, sendo as mais importantes: a diferença (−), a união (`|`, *ou binário*) e a interseção (`&`, *e binário*).

Em Álgebra, um Grupo $G = (A, *)$ é formado por um conjunto A e uma operação qualquer $*$, quando valem as seguintes regras:

1. $(a * b) \in A \;\; \forall a, b \in A$ [O grupo é fechado para a operação.]
2. $\exists\, e \in A : e * a = a * e = a \;\; \forall a \in A$ [Existe o elemento neutro.]
3. $\exists\, a^{-1} \in A : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \;\; \forall a \in A$ [Existe o elemento inverso.]

Construa um objeto `Grupo` que herda as características do **set**. Devem ser passados ao construtor: os elementos em uma coleção `A`, e uma função `f(a,b)` que realiza a operação $*$ sobre dois elementos do Grupo.

```
def f(a,b):
    return (a + b) % 5

class Grupo(set):
    def __init__(self, A, f):
        ...

        def __hash__(self):
            return hash(tuple(self))

>>> G = Grupo([0,1,2,3,4], f)
>>> G
{0, 1, 2, 3, 4}
```

```
>>> H = Grupo([0,1,2], f)
Traceback (most recent call last):
    File "<pyshell#1>", line 1, in <module>
        raise Exception('Isso não é grupo!')
Exception: Isso não é grupo!
```

Sabido isso:

1. O construtor deve criar um erro quando as regras de Grupo não forem atendidas.

2. A visualização do grupo mostre os elementos entre colchetes usando o método `__repr__`.

1.6 Subparte I: Produto

O produto entre dois grupos é dado da seguinte forma:

$$GH := \{g * h : g \in G, h \in H\}$$

Defina o método `__mul__` para atender a esse propósito.

1.6.1 Subparte II: Quociente

Existe uma operação entre grupos chamada *quociente* definida por:

$$G/H := \{gH : g \in G\} = \{\{g * h : h \in H\} : g \in G\}$$

Essa operação deve retornar um *conjunto de grupos* e isso só é possível se o método `__hash__` estiver definido como no modelo. Implemente essa operação usando o método `__truediv__`.

1.6.2 Subparte III: Subgrupos

Um Subgrupo H de um Grupo G, que escrevemos $H < G$, é aquele cujo conjunto é subconjunto de G e é H também um Grupo. O tipo **`set`** já implementa os operadores >, >=, <, <= e == comparando dois objetos do ponto de vista dos conjuntos. Reescreva os métodos `__gt__`, `__ge__`, `__lt__`, `__le__` e `__eq__`, respectivamente, para dizer verificar, por exemplo, se `H` é subgrupo de `G` através da expressão `H < G`. Feito isso, construa um método da classe

`Grupo` que retorne um conjunto contendo todos os subgrupos de um grupo `G`.

Dica Teorema:
O *Teorema de Lagrange* diz que sendo G um grupo finito e H um subgrupo de G, a ordem de H divide a ordem de G.

$$H < G \implies |G| = |H| \cdot k, k \in \mathbb{N}$$

A ordem de um grupo G, escrita como $|G|$, é simplesmente o número de elementos em G, que pode ser obtida diretamente pela expressão `len(G)`.

1.7 Música III - Partituras ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

A nota *lá* (A4) na musica ocidental corresponde a frequência de 440Hz. A partir desta nota podemos conhecer todas as outras frequências usando a simples fórmula:

$$f(n) = 440 \times \sqrt[12]{2^n}$$

A escala musical *cromática* é dividida em 12 semitons, cada um correspondente a uma nota:

```
..., fá#[-3], sol[-2], sol#[-1], lá[0], lá#[1], si[2],
dó[3], dó#[4], ré[5], ré#[6], mi[7], fá[8], fá#[9]...
```

Essa sequência se repete nos dois sentidos e símbolo # lê-se *sustenido*. Assim, se queremos a frequência de um *dó* logo após o *lá* central (A4), basta calcular $f(3) \approx 523.25$Hz.
Note que se temos alguma nota cuja frequência é $f(\bar{n})$, ao avançarmos 12 semitons na escala cromática voltamos para a mesma nota, mas com frequência $f(\bar{n} + 12)$. Ao tirar a razão entre as duas frequências:

$$\frac{f(\bar{n}+12)}{f(\bar{n})} = \frac{440 \times \sqrt[12]{2^{\bar{n}+12}}}{440 \times \sqrt[12]{2^{\bar{n}}}} = 2$$

Isso nos diz que cada vez que avançamos até a próxima repetição de uma nota, dobramos a frequência! Na escala de *dó maior*, que todos sabemos de cor, isso equivale a avançar uma *oitava acima*.

Interlúdio: `Beep`

Um jeito fácil de fazer barulho no computador é usando a função `Beep`. Se você usa o `Python` no `Windows` boas notícias: você só vai precisar importar a função `Beep` do módulo `winsound`.

```
>>> Beep(440, 1000)
```

```python
# windows
from winsound import Beep
```

Pra turminha do `Linux`, que precisa construir a função:

```
$ sudo apt-get install beep
```

```
# linux
import os
def Beep(f, ms):
    os.system("beep␣-f␣%i␣-l␣%i" % (f, ms))
```

Vamos construir agora um sensacional tocador de músicas! Você deve fazer duas classes: `Som` e `Musica` conforme os protótipos a seguir:

```
class Som(object):

    def __init__(self, nota, duracao):
        ...

class Musica(list):

    def __init__(self, partitura, tempo, nome="",autor=""):
        ...

    def __repr__(self):
        # mostra "<nome>", <autor> (<tempo> bps)
        ...

    def __call__(self):
        # toca a musica
        ...
```

Um `Som` deve ter:

1. O número da nota (*lá*=0, *si*=2, ...), que será usado para calcular a frequência dela.

2. A duração da nota, que deve ser uma fração da *batida* que seja potência de $\frac{1}{2}$. Você pode até informar somente o expoente m de $(\frac{1}{2})^m$, onde $m \in [-2, 6]$.

A duração absoluta da nota dependerá da música em que o `Som` será tocado.

Já uma instância de `Musica` deve receber na construção:

1. A `partitura`, que é uma lista de objetos do tipo `Som`.
2. O `tempo`, dado em *batidas por minuto* (bpm).

`Musica` herda as propriedades de lista, e assim pode ser percorrida com um `for`, tocando nota por nota.

Tendo essa parafernália toda em mãos, construiremos esses objetos de forma que a música seja tocada através da função `Beep(f, ms)`, que recebe a frequência `f` da nota e a sua duração `ms` em *milissegundos*.

1.8 Quaterniões! ⋆ ⋆ ⋆

Não contente com os números complexos ($\mathbb{C}$) da forma $z = a + b\mathbf{i}$, a turma da matemática trouxe pra gente um ser ainda mais esquisito: o conjunto dos *Quaternions* ($\mathbb{H}$).

$$
\begin{aligned}
q \in \mathbb{H} \iff q &= a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} : \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \\
\mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) = \mathbf{k} \\
\mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \\
\mathbf{k} \times \mathbf{i} &= -(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = \mathbf{j} \\
\mathbf{i} \times \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -1
\end{aligned}
$$

Com regras de soma convencionais, similares aos números reais e complexos, mas com uma multiplicação que mais parece o produto externo entre vetores, implemente uma classe `Quaternion`, que é criada a partir dos seus 4 coeficientes reais e implementa:

1. O operador de soma `+` (`__add__`)
2. A subtração `-` (`__sub__`)
3. A multiplicação `*` (`__mul__`)
4. O método `__repr__` que imprima na tela, pra $q = 3 + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ a **`string`** `(3.00) + (0.00)i + (4.00)j + (-2.00)k`

Extra:

1. O módulo do quaternião, através da função **abs**(q), implementada pelo método especial `__abs__`

2. A divisão `/` (`__truediv__`)

Dica: Implemente os métodos `__invert__` e `__neg__` para auxiliar na definição de `__truediv__` e `__sub__`, respectivamente.

2 Interface Gráfica (**Tkinter**)

2.1 O Triângulo de Sierpinsky ⋆ ⋆

A figura a seguir chama-se *Triângulo de Sierpinsky*:

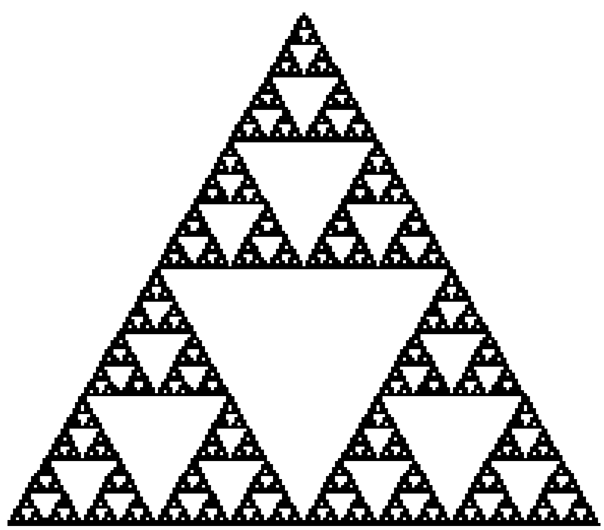

Figura 1: Triângulo de Sierpinsky

Ela é composta por triângulos equiláteros dispostos de forma que cada triângulo contém três outros em seu interior, cada um com $\frac{1}{3}$ do lado do triângulo original.

Desafio: Desenhe essa estrutura usando o `Tkinter` ou o `turtle`. Crie uma função para compôr a figura de forma recursiva.

2.2 O Método de Monte Carlo $\star\star\star$

O Método de *Monte Carlo* funciona da seguinte forma: Se temos uma determinada região e queremos calcular sua área, basta fazer com que ela esteja contida em uma outra região cuja área é conhecida. Em seguida, sorteamos pontos aleatórios $P_i = (x_i, y_i)$ e contamos quantos pontos caem dentro da região que estamos avaliando. Assim:

$$\frac{A_{figura}}{A_{total}} \approx \frac{P_{dentro}}{P_{total}} \rightarrow A_{figura} \approx \frac{P_{dentro}}{P_{total}} \times A_{total}$$

Queremos então calcular a área de um círculo cujo raio é 1. Sabemos de antemão que valor da área é π, e vamos então usar o método acima para estimar o seu valor numérico.

Faça duas janelas usando o `Tkinter`. A primeira mostra onde os pontos estão sendo posicionados, colorindo os que caem dentro de azul e os que caem fora de vermelho. Na segunda tela, mostre em tempo real a aproximação para a área em azul conforme os pontos vão sendo posicionados.

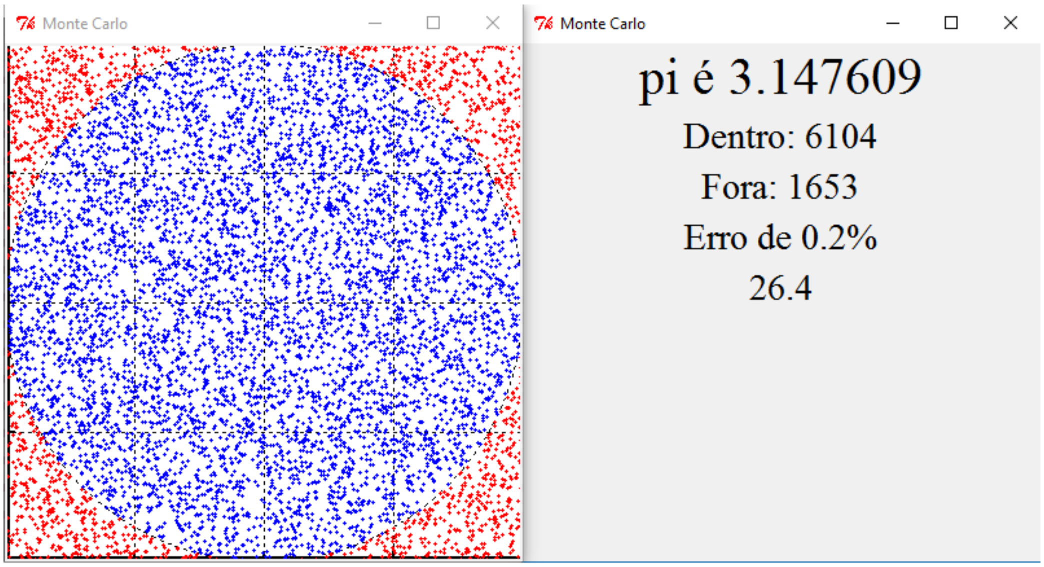

Figura 2: Cálculo de π pelo método de Monte Carlo

2.3 A proporção áurea $\star\star$

$$0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5\ 8\ 13\ 21\ 34\ 55\ 89\ ...$$

Muitos conhecem esse conjunto de números, a famosa *Sequência de Fibonacci*, que tem seu n-ésimo número definido por:

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_0 = 0 \ e \ F_1 = 1 \end{cases}$$

Se tomamos a razão entre dois números de *Fibonacci* consecutivos obtemos, no limite, um número que já era conhecido pelos gregos como símbolo da beleza e da perfeição da natureza.

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Sabido isso, sua tarefa é gerar a figura abaixo, usando o módulo que preferir, mas de forma recursiva. Para que os gregos realmente fiquem contentes com a majestade da sua figura é preciso que ela esteja conforme a proporção dada por φ.

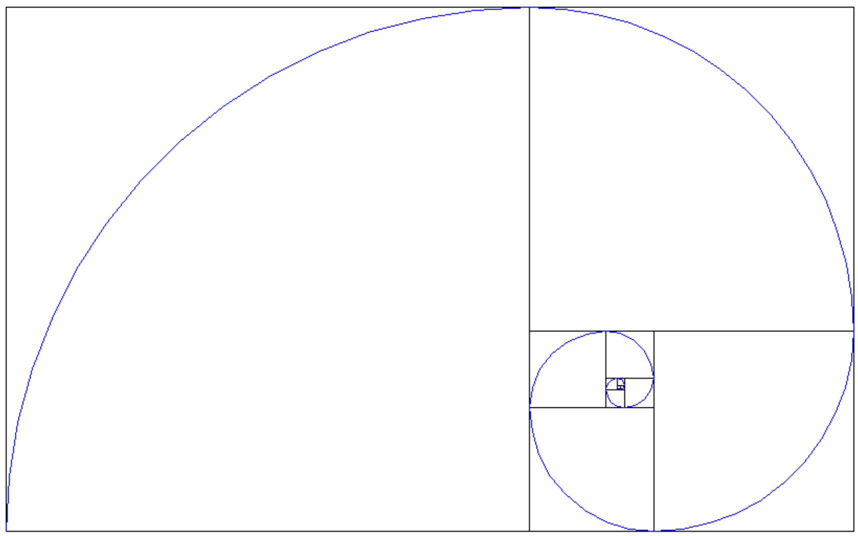

Figura 3: A proporção áurea

2.4 Música IV - O Piano $\star\star\star$

Desafio: Use os resultados das etapas enteriores(**Musical** e construa um Piano Virtual com o `Tkinter`. Desenhe as teclas em um `Canvas` e use o método `Canvas.bind` para associar letras como `a,s,d,f,g,h,j` e `k` às teclas brancas e `w,e,t,y` e `u` às pretas, por exemplo.

3 Métodos numéricos (`Numpy`)

4 Plotagem de Gráficos (`Matplotlib`)

Referências

[1] Prof. Pedro Asad (2016)

[2] Prof. Claudio Esperança (2018)