Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Mestrado Integrado em Eng. Informática
Recurso de Álgebra (COVID) - MT 2
14 Abril de 2021

90 minutos; sem máquinas de calcular

Perguntas:
1. Seja o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^4$, $S = \{A, B, C, D\}$,
onde $A = (-2, 1, 2, 1)$, $B = (1, 1, -1, 1)$, $C = (0, -2, 2, 0)$ e $D = (1, 1, 1, 3)$.
[2 valores] 1.1 Calcule o subespaço, $L(S)$, gerado por S. Obtenha uma base para o subespaço e sua dimensão.
[3 valores] 1.2 Obtenha uma base ortogonal para o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, que contenha um número máximo de elementos de $L(S)$, sendo um destes elementos o vetor $V = (1, -1, 0, 0)$

2. Considere o plano $M : 2x + y + z = 4$, a reta $r : X(t) = P + tA, t \in \mathbb{R}$, em que $P = (2, 1, 2)$ e $A = (1, 2, -1)$, e ainda o ponto $Q = (2, -1, 4)$. Determine:
[2 valores] 2.1 A distância do ponto Q ao plano M e ainda o ponto (I) de interseção da reta r com o plano M.
[3 valores] 2.2 A equação vetorial de uma reta h que passa no ponto Q, é complanar com a reta r e faz, com esta reta, um ângulo de 90 graus.

3. Considere a transformação linear $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, representada pela matriz real

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \delta \\ 3 & 6 & -3 \\ \gamma & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

relativamente à base canónica para o espaço linear $\mathbb{R}^3$.
[2 valores] 3.1 Calcule os valores dos parâmetros reais $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ tendo em conta que o traço de A é 6, $X = (1, 1, 2)$ é um dos seus vetores próprios e o cofator $A_{32} = 9$
[3 valores] 3.2 Mostre que A é diagonalizável. Indique, justificando, a matriz diagonal que lhe é semelhante e a respectiva matriz diagonalizadora. Considere $\alpha = 0, \beta = -\delta = -\gamma = -3$, caso não tenha resolvido a alínea anterior.

4. Considere as transformações lineares $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
tal que $S(1, 1, 1) = (1, -2)$, $S(1, 0, 0) = (-1, 1)$, $S(1, 1, 0) = (-1, 2)$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, representada pela matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Considere ainda a base de $\mathbb{R}^2$, $V = \{(1, 1), (0, 1)\}$
[2 valores] 4.1 Obtenha o núcleo e o contradomínio de T. Identifique, para cada um destes subespaços, uma base e conclua quanto à sua dimensão.
[1 valor] 4.2 Classifique as transformações S e T quanto à sua injetividade e determine, caso seja possível, as transformações inversas. Justifique.
[2 valores] 4.3 Determine a matriz $m(ST)_{VV}$, ou seja a matriz da transformação composta S após T relativamente às bases V do domínio e V do conjunto de chegada