Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

Álgebra – MIEIC - 2020/2021

1.º teste – 12dez2020
Duração: 1h30min sem tolerância

Nota: Não é permitido o uso de telemóveis e máquinas de calcular

1. [2 valores] Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Calcule, se possível, as matrizes $C = 2B(A^T)$ e $D = (3A)(4B)$.

2. [4 valores] Considere a matriz A dada na pergunta anterior

2.1. Calcule, se possível, A^{-1}, a matriz inversa da matriz A, recorrendo à matriz dos cofatores.

2.2. Seja o sistema de equações $AX = B$, sendo $B = (1,0,2)^T, X = (x, y, z)^T$. Calcule a variável x do sistema pelo método de Cramer

3. [2 valores] Calcule $r(B)$, a característica da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. [6 valores] Considere o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ $S = \{\vec{a}, \vec{b}\}$, sendo $\vec{a} = (1, 0, 1)$ e $b = (1,1,0)$.

4.1. Calcule $L(S)$, o subespaço gerado por S. Escolha uma base de $L(S)$ e indique a sua dimensão.

4.2. Conclua quanto à dependência linear dos vetores de S.

4.3. Calcule uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, a partir duma base de $L(S)$

4.4. Seja $\vec{c} \in L(S)$. **Justifique** se a expressão $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ é verdadeira ou falsa.

5. [4 valores] Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ tais que $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = 1$, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{d}//\vec{a}$ e $\measuredangle(\vec{d}, \vec{b}) = 60º$. Determine

5.1. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

5.2. $\measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$

5.3. $\|a \times b\|$

6. [2 valores] Deduza a expressão que permite determinar a projeção ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

Os Docentes: Ana Neves, Francisca Alves, António Ferreira

1.

$$2B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & -1 \\ \hline 4 & 2 & -2 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$D = (3A)(4B)$

dim $(3\times \underline{3})(\underline{2}\times 3)$

Como o número de colunas de 3A

$\neq$

número de linhas de 4B

Não é possível calcular D

2.1

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(\mathrm{cof}(A)\right)^T$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$l_3 + l_1 \rightarrow l_3$

D.L.

$$= 1\,(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\mathrm{cof}(A)\right)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2.

$|A| = 3 \neq 0$, logo, é possível resolver o sistema pelo método de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\begin{array}{r} \text{C.A.} \\ \text{D.L.} \rightarrow \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1-2) = -(-3) = 3$$

3. B é uma matriz 3×4

logo, $r(B) \leq 3$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ \text{D.L.} \end{array} = (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

logo, $r(B) = 3$

4.1. $a_1\vec{a} + a_2\vec{b} = (x, y, z)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right] \underset{l_3 - l_1 \to l_3}{\longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & -x+z \end{array}\right] \underset{l_3 + l_2 \to l_3}{}$$

$$\longleftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ \hline 0 & 0 & -x+y+z \end{array}\right] \qquad -x+y+z=0$$

$$L(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x+y+z=0\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y+z\}$$

$$(x,y,z) = (y+z, y, z)$$
$$= y(1,1,0) + z(1,0,1)$$

Base $= S$

$\dim(L(S)) = 2$

4.2. S é constituído por 2 vectores e $\dim(L(S)) = 2$, logo, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes

4.3. $S=\{\vec{a},\vec{b}\}$ é uma base de $L(S)$ mas não é ortogonal pois $\vec{a}.\vec{b}\neq 0$, i.e, $\vec{a}\not\perp\vec{b}$ 5

B: Base ortogonal de $L(S)$

$B=\{\vec{a},\vec{u}\}$ com $\vec{u}\in L(S)$
e $\vec{u}\perp\vec{a}$

$\vec{u}=(a,b,c)=(b+c,\ b,\ c)$

$\vec{u}.\vec{a}=0 \Leftrightarrow (b+c,\ b,\ c).(1,0,1)=0$

$\Leftrightarrow b+c+c=0 \Leftrightarrow b=-2c$

$\vec{u}=(b+c,b,c)=(-2c+c,\ -2c,\ c)$

$=(-c,-2c,c)$

p. exmp. $\vec{u}=(-1,-2,1)$

$B=\{(1,0,1),(-1,-2,1)\}$

b: base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

$b=\{(1,0,1),\ (-1,-2,1),\ \vec{v}\}$

com $\vec{v}\perp\vec{a}$ e $\vec{v}\perp\vec{u}$

p. exmp. $\vec{v}=\vec{a}\times\vec{u}$

$$\vec{a} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2, -2, -2)$$

podemos considerar $\vec{v} = (1, -1, -1)$
(ou qualquer outro colinear)

$b = \{ (1,0,1), \ (-1,-2,1), \ (1,-1,-1) \}$

Para obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, basta dividir cada vetor pela respectiva norma.

Assim, base ortonormal de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \ \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1), \ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) \right\}$$

4.4. O vetor $\vec{a} \times \vec{b}$ é ortogonal a $\vec{a}$

é ortogonal a $\vec{b}$

e é ortogonal a qualquer vetor que seja combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$

ou seja,

$\vec{a} \times \vec{b}$ é ortogonal a qualquer vetor $\vec{c} \in L(S)$

Logo, $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{c}\| \cdot \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \cos 90^\circ$

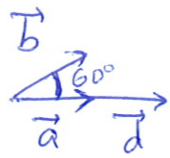
$= 0$

A afirmação é falsa pois $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$

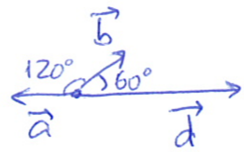
8

5.1

(A)



(B)



(A) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \cos 60° = \frac{1}{2}$

ou

(B) $\vec{a} . \vec{b} = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \cos(120°) = -\frac{1}{2}$

5.2. $\cos \measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\| . \|\vec{c}\|} = \dfrac{0}{\|\vec{a} \times \vec{b}\| . \|\vec{c}\|} = 0$

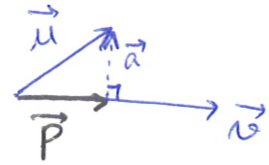
Logo, $\measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 90°$

5.3. $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 * \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$

$= 1 - 1/4 = 3/4$

$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{3}/2$

6.



$$\vec{p} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\cdot\vec{v}$$

$\vec{p}$ é colinear com $\vec{v}$, ou seja, $\vec{p} = K\cdot\vec{v}$, $K \in \mathbb{R}$

$$\vec{p} + \vec{a} = \vec{u}$$

$$(\vec{p} + \vec{a})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{v} + \underbrace{\cancel{\vec{a}\cdot\vec{v}}}_{=0 \text{ pois } \vec{a}\perp\vec{v}} = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$\vec{p}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$K\vec{v}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$K\|\vec{v}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

$$K = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

Logo, $\vec{p} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = K\cdot\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\cdot\vec{v}$