Exercícios resolvidos de transformações lineares (ALGA II)

J. A. T. Barbosa, A. J. M. Ferreira e J. M. A. César de Sá

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial

2004

237 h.

Mostre que a função $T : R^3 \to R^3$ com $T(x , y , z) = (xy , yz , z)$ não é uma transformação linear.

Resolução:

Quer o domínio, quer o conjunto de chegada de T, em ambos os casos R^3, são espaços vectoriais reais. Assim, T será uma transformação linear, se e só se verificar a condição

$$\forall X_1, X_2 \in R^3 \quad \forall a,b \in R \qquad T(aX_1 + bX_2) = a\ T(X_1) + b\ T(X_2)$$

Considerando $X_1 = (x_1 , y_1 , z_1) \in R^3$ e $X_2 = (x_2 , y_2 , z_2) \in R^3$, tem-se

$$a\ X_1 + b\ X_2 = (ax_1 + bx_2 , ay_1 + by_2 , az_1 + bz_2)$$

sendo a sua imagem dada por

$$T(a\ X_1 + b\ X_2) = T(ax_1 + bx_2 , ay_1 + by_2 , az_1 + bz_2) =$$

$$= ((ax_1 + bx_2)\ (ay_1 + by_2) , (ay_1 + by_2)\ (az_1 + bz_2) , az_1 + bz_2)$$

Por outro lado, obtém-se

$$a\ T(X_1) + b\ T(X_2) = a\ T(x_1 , y_1 , z_1) + b\ T(x_2 , y_2 , z_2) =$$

$$= a\ (x_1y_1 , y_1z_1 , z_1) + b\ (x_2y_2 , y_2z_2 , z_2) =$$

$$= (ax_1y_1 + bx_2y_2 , ay_1z_1 + by_2z_2 , az_1 + bz_2)$$

Verifica-se que $T(a\ X_1 + b\ X_2) \neq a\ T(X_1) + b\ T(X_2)$, pelo que a função T não é uma transformação linear.

238 a.

Seja a transformação linear $T : R^3 \rightarrow R^2$ com $T(x , y , z) = (3x - 2z , y + z)$. Determine o seu núcleo e contradomínio. Para cada um destes conjuntos, indique uma base e as respectivas dimensões.

Resolução:

Comecemos por obter o núcleo de *T*: $N(T) = \{X \in R^3 : T(X) = (0 , 0)\}$. Resolvendo a equação

$$T(x , y , z) = (3x - 2z , y + z) = (0 , 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \quad -2z = 0 \\ \quad y \quad +z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z/3 \\ y = \quad -z \end{cases}$$

resulta

$$N(T) = \{X = (2c/3 , -c , c) \in R^3\}$$

Tem-se ainda

$$B_N = \text{Base } N(T) = \{(2 , -3 , 3)\} \quad (c = 3)$$

$$dim\ N(T) = 1$$

Dado que $N(T) \neq \{(0 , 0 , 0)\}$, ou $dim\ N(T) \neq 0$, a transformação linear *T* não é injectiva, ou seja, não admite transformação inversa.

A dimensão do contradomínio tem, então, o valor

$$dim\ T(R^3) = dim\ R^3 - dim\ N(T) = 3 - 1 = 2$$

Calculemos o contradomínio de *T*: $T(R^3) = \{Y \in R^2 : \exists X \in R^3 , T(X) = Y\} \subseteq R^2$. Como as dimensões do contradomínio e do conjunto de chegada são idênticas, isto é, $dim\ T(R^3) = dim\ R^2 = 2$, conclui-se que $T(R^3) = R^2$, pelo que *T* é sobrejectiva.

251.

Para cada uma das transformações lineares abaixo definidas, obtenha a respectiva lei de transformação.

a) $T : R^3 \to R^2$ com

$$T(1\ ,\ 0\ ,\ 0) = (2\ ,\ 1)\ ,\ T(0\ ,\ 1\ ,\ 0) = (1\ ,\ 3) \text{ e } T(0\ ,\ 0\ ,\ 1) = (0\ ,\ 1)$$

b) $T : R^2 \to R^3$ com

$$T(2\ ,\ 1) = (7\ ,\ 2\ ,\ 1) \text{ e } T(-1\ ,\ 1) = (3\ ,\ 1\ ,\ 4)$$

c) $T : R^3 \to R^3$ com

$$T(0\ ,\ 1\ ,\ 2) = (3\ ,\ 3\ ,\ 5)\ ,\ T(1\ ,\ 2\ ,\ 2) = (1\ ,\ 1\ ,\ -1) \text{ e } T(1\ ,\ 1\ ,\ 1) = (0\ ,\ 1\ ,\ -1)$$

Resolução:

a) Designe-se por $E_3 = \{\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\ \vec{k}\}$ e por $E_2 = \{(1\ ,\ 0)\ ,\ (0\ ,\ 1)\}$, as bases canónicas de R^3 e R^2 respectivamente.

A matriz da transformação linear T em relação às bases E_3 e E_2 é

$$T = m(T) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Tem-se, então,

$$T(x\ ,\ y\ ,\ z) = T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+3y+z \end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{aligned} T :\quad & R^3 \to R^2 \\ & (x\ ,\ y\ ,\ z) \to (2x+y\ ,\ x+3y+z) \end{aligned}$$

b) Calculemos, em primeiro lugar, as imagens dos vectores que constituem a base canónica do domínio, $E_2 = \{(1\ ,\ 0)\ ,\ (0\ ,\ 1)\}$.

Sabendo que

$$T(2\ ,\ 1) = T(2\ ,\ 0) + T(0\ ,\ 1) = 2\ T(1\ ,\ 0) + T(0\ ,\ 1)$$

$$T(-1\ ,\ 1) = T(-1\ ,\ 0) + T(0\ ,\ 1) = -T(1\ ,\ 0) + T(0\ ,\ 1)$$

resolva-se o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2\ T(1\ ,\ 0)+T(0\ ,\ 1)=(7\ ,\ 2\ ,\ 1) \\ -T(1\ ,\ 0)+T(0\ ,\ 1)=(3\ ,\ 1\ ,\ 4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T(0\ ,\ 1)=(7\ ,\ 2\ ,\ 1)-2\ T(1\ ,\ 0) \\ -T(1\ ,\ 0)-2\ T(1\ ,\ 0)=(3\ ,\ 1\ ,\ 4)-(7\ ,\ 2\ ,\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ -3\ T(1\ ,\ 0)=(-4\ ,\ -1\ ,\ 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T(0\ ,\ 1)=(13\ ,\ 4\ ,\ 9)/3 \\ T(1\ ,\ 0)=(4\ ,\ 1\ ,\ -3)/3 \end{cases}$$

A matriz da transformação linear T em relação às bases canónicas de R^2 e R^3 é

$$T=m(T)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 1 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$T(x\ ,\ y)=T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 1 & 4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4x+13y \\ x+4y \\ -3x+9y \end{bmatrix}$$

Obtém-se, então,

$$\begin{aligned} T\ :\ R^2 &\ \rightarrow\ R^3 \\ (x\ ,\ y) &\ \rightarrow\ \left(\frac{4x+13y}{3}\ ,\ \frac{x+4y}{3}\ ,\ -x+3y\right) \end{aligned}$$

c) Antes de mais, convém notar que $\{(0\ ,\ 1\ ,\ 2)\ ,\ (1\ ,\ 2\ ,\ 2)\ ,\ (1\ ,\ 1\ ,\ 1)\}$ constitui uma base do domínio de T.

Calculemos, agora, as imagens dos vectores que constituem a base canónica de R^3, $E_3=\{\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\ \vec{k}\}$.

Sabendo que

$$T(0\ ,\ 1\ ,\ 2)=T(\vec{j})+2\ T(\vec{k})$$

$$T(1\ ,\ 2\ ,\ 2)=T(\vec{i})+2\ T(\vec{j})+2\ T(\vec{k})$$

$$T(1\ ,\ 1\ ,\ 1) = T(\vec{i}) + T(\vec{j}) + T(\vec{k})$$

resolva-se o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} T(\vec{j}) + 2\ T(\vec{k}) = (3\ ,\ 3\ ,\ 5) \\ T(\vec{i}) + 2\ T(\vec{j}) + 2\ T(\vec{k}) = (1\ ,\ 1\ ,\ -1) \\ T(\vec{i}) + T(\vec{j}) + T(\vec{k}) = (0\ ,\ 1\ ,\ -1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T(\vec{j}) = (3\ ,\ 3\ ,\ 5) - 2\ T(\vec{k}) \\ T(\vec{i}) - 4\ T(\vec{k}) + 2\ T(\vec{k}) = (1\ ,\ 1\ ,\ -1) - (6\ ,\ 6\ ,\ 10) \\ T(\vec{i}) - 2\ T(\vec{k}) + T(\vec{k}) = (0\ ,\ 1\ ,\ -1) - (3\ ,\ 3\ ,\ 5) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ T(\vec{i}) = (-5\ ,\ -5\ ,\ -11) + 2\ T(\vec{k}) \\ 2\ T(\vec{k}) - 2\ T(\vec{k}) + T(\vec{k}) = (-3\ ,\ -2\ ,\ -6) - (-5\ ,\ -5\ ,\ -11) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T(\vec{j}) = (-1\ ,\ -3\ ,\ -5) \\ T(\vec{i}) = (-1\ ,\ 1\ ,\ -1) \\ T(\vec{k}) = (2\ ,\ 3\ ,\ 5) \end{cases}$$

A matriz da transformação linear T em relação à base canónica de R^3 é

$$T = m(T) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$T(x\ ,\ y\ ,\ z) = T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x - y + 2z \\ x - 3y + 3z \\ -x - 5y + 5z \end{bmatrix}$$

Obtém-se, então,

$$\begin{aligned} T:\quad & R^3 \quad \to \quad R^3 \\ & (x\ ,\ y\ ,\ z) \to (-x - y + 2z\ ,\ x - 3y + 3z\ ,\ -x - 5y + 5z) \end{aligned}$$

257.

Seja a transformação linear

$$T : R^3 \rightarrow R^3 \text{ com } T(x , y , z) = (x - z , y - z , -x - y + 2z)$$

e a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

a) Determine o núcleo e o contradomínio de *T*.

b) Será *T* invertível? Justifique.

c) Defina a transformação linear *S* representada pela matriz *S* em relação à base canónica de R^3.

d) Determine a transformação linear *TS* e represente-a matricialmente.

Resolução:

a) Sabendo que $T(\vec{i}) = (1 , 0 , -1)$, $T(\vec{j}) = (0 , 1 , -1)$ e $T(\vec{k}) = (-1 , -1 , 2)$, a matriz que representa a transformação linear *T* em relação à base canónica de R^3, $E = \{\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\}$, é

$$T = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Em relação à matriz anterior verifica-se que

$$|\, T \,| = 2 - 1 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; r(T) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; r(T) = 2$$

isto é, é uma matriz com característica igual a 2. Sabendo que $r(T) = dim\, T(R^3)$, obtém-se

$$dim\, T(R^3) = 2 \;\Rightarrow\; T(R^3) \subset R^3$$

ou seja, a transformação linear T não é sobrejectiva.

Podemos, desde já, concluir que

$$dim\, N(T) = dim\, R^3 - dim\, T(R^3) = 3 - 2 = 1 \;\Rightarrow\; N(T) \neq \{(0\ ,\ 0\ ,\ 0)\}$$

e, portanto, T não é injectiva $(\dim\ N(T) \neq 0)$. Calculando o seu núcleo

$$\begin{cases} x \quad\;\; - z = 0 \\ \quad\;\; y \; - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

pelo que

$$N(T) = \left\{ X = (w\ ,\ w\ ,\ w) \in R^3 \right\}$$

$$S_N = \text{Base } N(T) = \{(1\ ,\ 1\ ,\ 1)\}$$

Calculando o contradomínio de T

$$\begin{cases} x \quad\;\; - z = a \\ \quad\;\; y \; - z = b \\ -x - y + 2z = c \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ -1 & -1 & 2 & c \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & -1 & 1 & a+c \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{array}\right]$$

isto é,

$$Y = (a\ ,\ b\ ,\ c) \in T(R^3) \;\Leftrightarrow\; a + b + c = 0$$

$$T(R^3) = \left\{ Y = (-b - c\ ,\ b\ ,\ c) \in R^3 \right\}$$

$$S_T = \text{Base}\, T(R^3) = \{(-1\ ,\ 1\ ,\ 0)\ ,\ (-1\ ,\ 0\ ,\ 1)\}$$

b) A transformação linear T não é invertível, já que, tal como foi verificado na alínea anterior, não é injectiva.

c) Verifica-se que

$$S(x\ ,\ y\ ,\ z)=S\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&1\\-1&6&2\\1&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-3y+z\\-x+6y+2z\\x+4z\end{bmatrix}$$

pelo que

$$\begin{array}{rccc}S: & R^3 & \rightarrow & R^3\\ & (x\ ,\ y\ ,\ z) & \rightarrow & (x-3y+z\ ,\ -x+6y+2z\ ,\ x+4z)\end{array}$$

d) Seja P a matriz que representa a transformação linear composta $TS\ :\ R^3\ \rightarrow\ R^3$ em relação à base canónica de R^3.

Assim,

$$P=m(T)\ m(S)=T\ S=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3&1\\-1&6&2\\1&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&-3\\-2&6&-2\\2&-3&5\end{bmatrix}$$

Tem-se, então,

$$(TS)(x\ ,\ y\ ,\ z)=P\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-3&-3\\-2&6&-2\\2&-3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3y-3z\\-2x+6y-2z\\2x-3y+5z\end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{array}{rccc}TS: & R^3 & \rightarrow & R^3\\ & (x\ ,\ y\ ,\ z) & \rightarrow & (-3y-3z\ ,\ -2x+6y-2z\ ,\ 2x-3y+5z)\end{array}$$

A transformação linear composta TS poderia, ainda, ser calculada, aplicando a definição de função composta, isto é,

$$(TS)(x\ ,\ y\ ,\ z)=T[S(x\ ,\ y\ ,\ z)]=T(x-3y+z\ ,\ -x+6y+2z\ ,\ x+4z)=$$

$$=(-3y-3z\ ,\ -2x+6y-2z\ ,\ 2x-3y+5z)$$

258.

Seja a transformação linear $T : R^3 \rightarrow R^2$, definida pelas imagens $T(\vec{i}) = (0 , 0)$, $T(\vec{j}) = (1 , 1)$ e $T(\vec{k}) = (1 , -1)$.

a) Obtenha uma representação matricial para *T*.

b) Calcule o valor de $T(4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$, bem como a nulidade e a ordem de *T*.

c) Determine a matriz que representa *T* relativamente às bases $E_3 = \{\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\}$, base canónica de R^3, e $S' = \{S_1' , S_2'\} = \{(1 , 1) , (1 , 2)\}$.

d) Determine uma base *U*, para o domínio, e uma base U', para o conjunto de chegada, em relação às quais a matriz de *T* tenha uma forma diagonal.

Resolução:

a) A matriz que representa a transformação linear em relação às bases canónicas de R^3 e de R^2, $E_2 = \{(1 , 0) , (0 , 1)\}$, é

$$T = m(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Assim,

$$T(x , y , z) = T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+z \\ y-z \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T : \quad & R^3 \rightarrow R^3 \\ & (x , y , z) \rightarrow (y+z , y-z) \end{aligned}$$

Resulta então

$$T(4\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = T(4 , -1 , -1) = (-2 , 0)$$

A característica da matriz *T*, sendo $r(T) \leq 2$, tem o valor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(T) = 2$$

Conclui-se que:

$$\text{Ordem de } T = dim\ T(R^3) = r(T) = 2$$

$$\text{Nulidade de } T = dim\ N(T) = dim\ R^3 - dim\ T(R^3) = 3-2 = 1$$

Além disso:

$$dim\ N(T) \neq 0 \ \Rightarrow\ T \text{ não é injectiva}$$

$$dim\ R^2 = dim\ T(R^3) \ \Rightarrow\ T(R^3) = R^2 \text{ e } T \text{ é sobrejectiva}$$

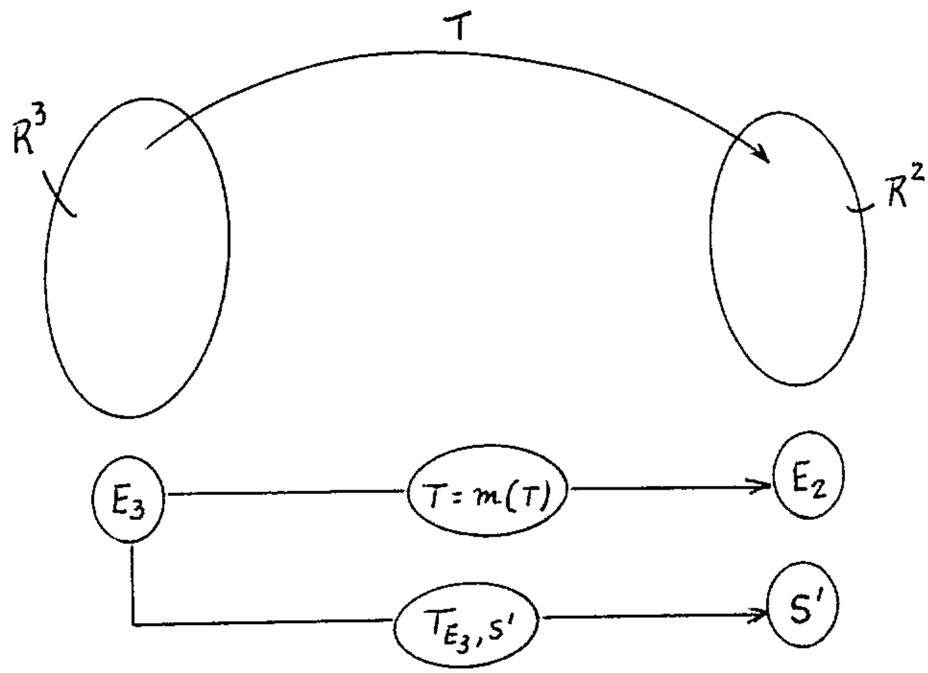

Figura 1: Representações matriciais para a transformação linear T

c) A matriz $T_{E_3,S'}$, que representa a transformação linear T em relação às bases E_3 e S', deverá conter, nas suas colunas, as imagens dos vectores $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$, expressas na base S', figura 1.

Sendo conhecidas as imagens de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ expressas na base E_2, base canónica de R^2, ou seja,

$$T(\vec{i}) = (0\ ,\ 0),\ T(\vec{j}) = (1\ ,\ 1) \text{ e } T(\vec{k}) = (1\ ,\ -1)$$

há que obter as suas coordenadas em relação à desejada, S'.

Para o efeito, encontremos as expressões que determinam a mudança de coordenadas, no espaço R^2, entre as bases E_2 e S', figura 2.

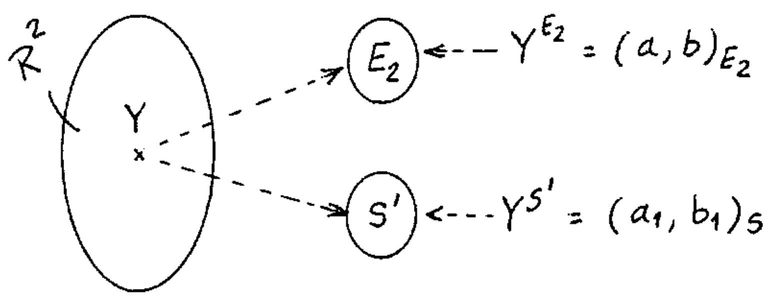

Figura 2: Mudança de coordenadas no espaço R^2

Sabendo que

$$(a\ ,\ b) = a_1\ S_1' \ +\ b_1\ S_2' = a_1\ (1\ ,\ 1) + b_1\ (1\ ,\ 2) = (a_1 + b_1\ ,\ a_1 + 2b_1)$$

as expressões de mudança de coordenadas de S' para E_2 são

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = a \\ a_1 + 2b_1 = b \end{cases} \quad (S' \rightarrow E_2)$$

Resolvendo o sistema de equações anterior em ordem a_1 e b_1, obtém-se

$$\begin{cases} a_1 = 2a - b \\ b_1 = -a + b \end{cases} \quad (E_2 \rightarrow S')$$

que traduz as expressões de mudança de coordenadas de E_2 para S'.

Usando as relações anteriores resulta

$$T(\vec{i}) = (0\ ,\ 0) = (0\ ,\ 0)_{S'}$$

$$T(\vec{j}) = (1\ ,\ 1) = (1\ ,\ 0)_{S'}$$

$$T(\vec{k}) = (1\ ,\ -1) = (3\ ,\ -2)_{S'}$$

A matriz $T_{E_3,S'}$, que representa a transformação linear T em relação às bases E_3 e

S', é

$$T_{E_3,S'} = m(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{E_3,S'}$$

A lei de transformação linear associada à matriz $T_{E_3,S'}$, toma a forma

$$\begin{aligned} T: \quad & R^3 \;\rightarrow\; R^2 \\ & (x\,,\,y\,,\,z) \rightarrow (y+3z\,,\,-2z)_{S'} \end{aligned}$$

já que

$$T(x\,,\,y\,,\,z) = T_{E_3,S'}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{E_3,S'}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+3z \\ -2z \end{bmatrix}_{S'}$$

d) Sejam as bases do domínio e do conjunto de chegada de T

$$U = \{U_1\,,\,U_2\,,\,U_3\} \;:\; \text{Base de } R^3$$

$$U' = \{U_1'\,,\,U_2'\} \;:\; \text{Base de } R^2$$

Uma vez que $dim\ T(R^3) = 2$, a representação matricial em forma diagonal para T tomará a forma

$$T_{U,U'} = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{U,U'}$$

já que se deverá verificar a condição

$$r(T_{U,U'}) = dim\ T(R^3) = 2$$

Atendendo à forma como se encontra definida a matriz $T_{U,U'} = m(T)$, é possível concluir-se, figura 3,

$$T(U_1) = (1\,,\,0)_{U'} = 1\ U_1' + 0\ U_2' \;\Rightarrow\; T(U_1) = U_1'$$

$$T(U_2) = (0\,,\,1)_{U'} = 0\ U_1' + 1\ U_2' \;\Rightarrow\; T(U_2) = U_2'$$

$$T(U_3)=(0\ ,\ 0)_{U'} \qquad\qquad \Rightarrow\ U_3 \in N(T)$$

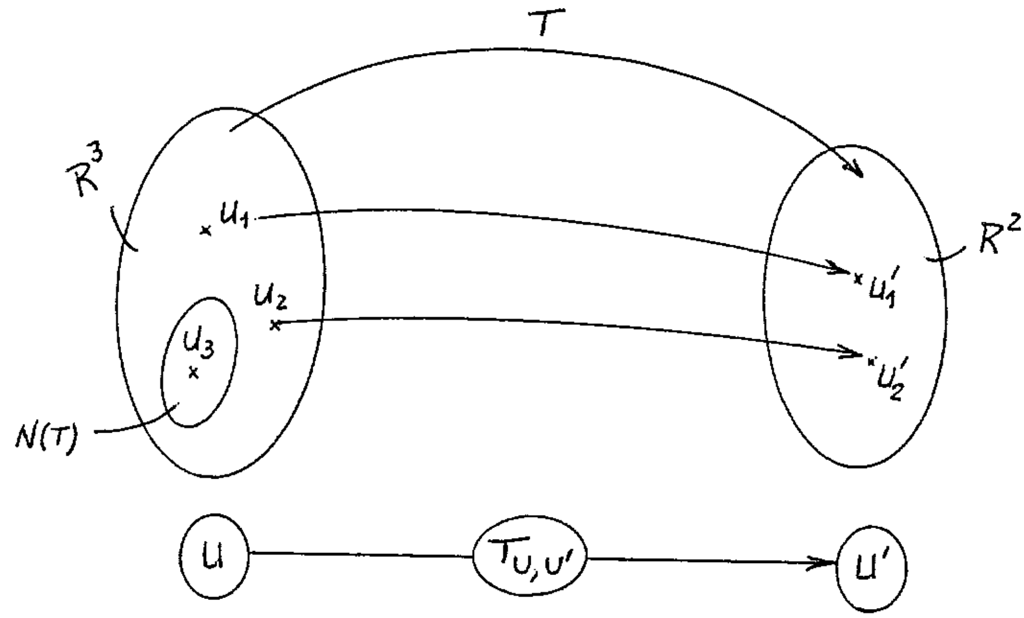

Figura 3: Representação matricial em forma diagonal para T

Para identificarmos o vector U_3, há que determinar o núcleo de T:

$$\begin{cases} y+z=0 \\ y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases},\ \forall x \in R$$

$$N(T)=\left\{X=(w\ ,\ 0\ ,\ 0)\in R^3\right\}$$

$$S_N = \text{Base } N(T)=\{(1\ ,\ 0\ ,\ 0)\}=\{\vec{i}\}$$

Escolhamos, por exemplo, o vector da base do núcleo

$$U_3=\vec{i}\in N(T)$$

Os restantes vectores, U_1 e U_2, deverão ser escolhidos de modo a que o conjunto $U=\{U_1\ ,\ U_2\ ,\ U_3\}$ seja uma base de R^3. Optando por uma solução que seja simples, o recurso aos vectores coordenados unitários permite, por exemplo, escolher

$$U_1=\vec{j}=(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$$

$$U_2 = \vec{k} = (0\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

pelo que a base do domínio de T é

$$U = \{\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\ \vec{k}\}$$

Relativamente à base do conjunto de chegada, obtém-se

$$U_1{}' = T(U_1) = T(\vec{j}) = (1\ ,\ 1)$$

$$U_2{}' = T(U_2) = T(\vec{k}) = (1\ ,\ -1)$$

isto é,

$$U' = \{U_1',\ U_2'\} = \{(1\ ,\ 1)\ ,(1\ ,\ -1)\}$$

é a base do conjunto de chegada de T.

Neste caso, designando

$$X^U = (x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)_U$$

obtém-se

$$T(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)_U = T_{U,U'}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{U,U'}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_U = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}_{U'}$$

ou seja,

$$\begin{array}{llcl} T: & R^3 & \to & R^2 \\ & (x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)_U & \to & (x_1\ ,\ y_1)_{U'} \end{array}$$

representa a lei de transformação linear associada à matriz $T_{U,U'}$.

265.

Considere a curva a transformação linear $S : R^3 \rightarrow R^3$, definida por

$$S(x\ ,\ y\ ,\ z) = (x + 2y - z\ ,\ y\ ,\ x + 3y - z)$$

Determine a reprsentação matricial das transformações lineares S e S^2 em relação à base $B = \{B_1\ ,\ B_2\ ,\ B_3\} = \{(1\ ,\ 0\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ 0\ ,\ 0)\ ,\ (1\ ,\ 1\ ,\ 2)\}$.

Resolução:

Para obter a matriz da transformação linear S em relação à base B, $S_{B,B}$, é necessário calcular as imagens dos vectores que formam a base do domínio, B, expressas na base considerada para o conjunto de chegada, B, figura 1.

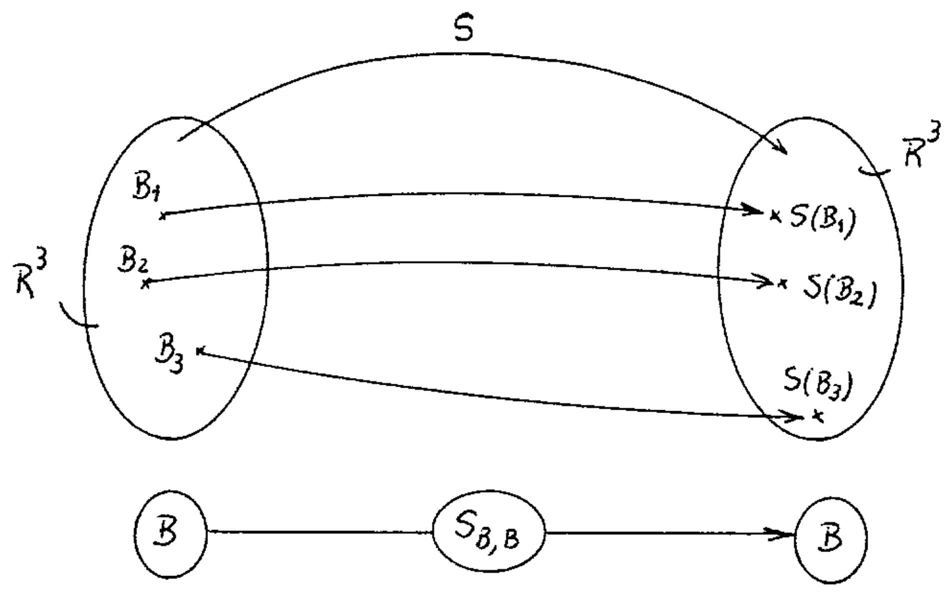

Figura 1: Representação matricial para a transformação linear S

As imagens dos vectores da base B, expressas na base canónica de R^3, $E = \{\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\ \vec{k}\}$, são

$$S(1\ ,0\ ,1) = (0\ ,0\ ,0)$$

$$S(1\ ,0\ ,0) = (1\ ,0\ ,1)$$

$$S(1\ ,1\ ,2) = (1\ ,1\ ,2)$$

Antes de determinarmos as coordenadas dos vectores (imagens) obtidos anteriormente na base B (conjunto de chegada), encontremos as expressões de mudança de coordenadas entre as bases E e B do espaço R^3, figura 2.

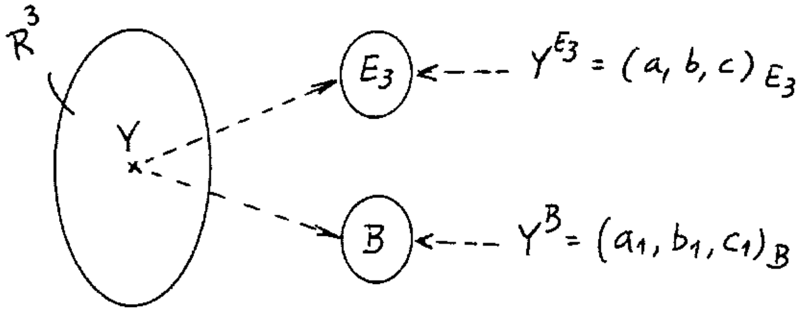

Figura 2: Mudança de coordenadas no espaço R^3

Sabendo que

$$(a\ ,\ b\ ,\ c) = a_1\ B_1 + b_1\ B_2 + c_1\ B_3 = (a_1 + b_1 + c_1\ ,\ c_1\ ,\ a_1 + 2c_1)$$

as expressões de mudança de coordenadas de B para E são

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = a \\ \qquad\qquad c_1 = b \\ a_1 \qquad + 2c_1 = c \end{cases} \quad (B \to E)$$

Resolvendo o sistema de equações anterior em ordem a_1, b_1 e c_1, obtém-se

$$\begin{cases} a_1 = \quad -2b + c \\ b_1 = a + \ b - c \\ c_1 = \qquad b \end{cases} \quad (E \to B)$$

que traduz as expressões de mudança de coordenadas de E para B.

Usando as relações anteriores resulta então

$$S(1\ ,0\ ,1) = (0\ ,0\ ,0) = (0\ ,0\ ,0)_B$$

$$S(1\ ,0\ ,0) = (1\ ,0\ ,1) = (1\ ,0\ ,0)_B$$

$$S(1\,,1\,,2)=(1\,,1\,,2)=(0\,,0\,,1)_B$$

A matriz $S_{B,B}$, que representa a transformação linear S em relação à base B, é

$$S_{B,B}=m(S)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{B,B}$$

A lei de transformação linear associada à matriz $S_{B,B}$, toma a forma

$$\begin{aligned} S:\quad & R^3 \to R^3 \\ & (x_1\,,y_1\,,z_1)_B \to (y_1\,,0\,,z_1)_B \end{aligned}$$

já que

$$S(x_1\,,y_1\,,z_1)_B=S_{B,B}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{B,B}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}_B=\begin{bmatrix}y_1\\ 0\\ z_1\end{bmatrix}_B$$

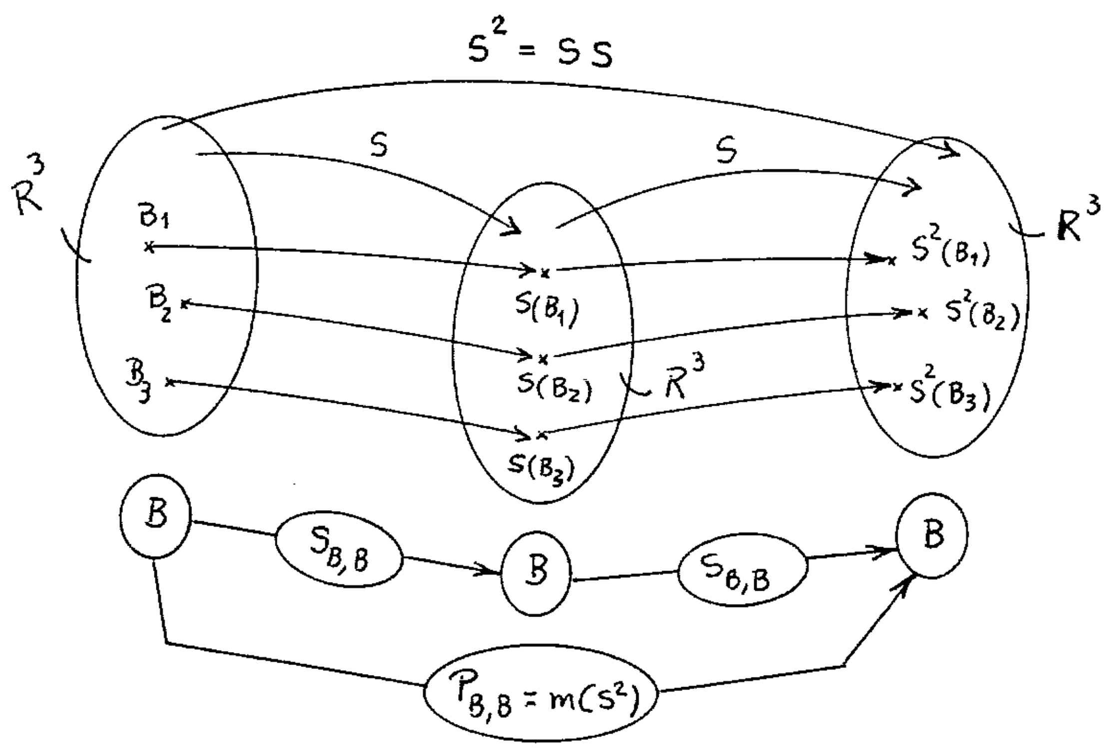

Figura 3: Representação matricial da transformação linear S^2

Relativamente à transformação linear composta $S^2=SS$, verifica-se que, figura 3,

$$S^2=SS \;:\; R^3 \to R^3$$

A matrix $P_{B,B}$ que representa a transformação linear composta $S^2=SS$ em relação à base B (domínio e conjunto de chegada) é obtida a partir do produto matricial

$$P_{B,B} = m(S^2) = m(S)m(S) = S_{B,B}S_{B,B} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{B\,,\,B} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{B\,,\,B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{B\,,\,B}$$

(1)

(3) (2) (2) (3)

Na obtenção da matriz $P_{B,B}$ há a realçar o seguinte:

(1) Para que seja possível a composição, a base do conjunto de chegada da primeira transformação tem de ser igual à base do domínio da segunda transformação;

(2) A base do domínio da primeira transformação será igual à base do domínio da transformação composta;

(3) A base do conjunto de chegada da segunda transformação será igual à base do conjunto de chegada da transformação composta.

A lei de transformação linear associada à matriz $P_{B,B}$ é

$$\begin{aligned} S^2=SS \;:\; & \quad R^3 \to R^3 \\ & (x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)_B \to (0\,,\,0\,,\,z_1)_B \end{aligned}$$

já que

$$S^2(x_1\,,\,y_1\,,\,z_1)_B = P_{B,B}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{B,B}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{bmatrix}_B$$

286.

Considere as transformações lineares $S : R^2 \to R^3$ e $T : R^3 \to R^3$, definidas por

$$S(x\ ,\ y) = (x+y\ ,\ 2x\ ,\ x-y)$$

$$T(1\ ,\ 1\ ,\ 0) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1)\ ,\ T(1\ ,\ -1\ ,\ 0) = (0\ ,\ 0\ ,\ 1) \text{ e } T(0\ ,\ 0\ ,\ 1) = (0\ ,\ 1\ ,\ 1).$$

a) Caracterize o núcleo e o contradomínio de S. Identifique, para cada um dos conjuntos, uma base e conclua em relação às suas dimensões.

b) Mostre que S é injectiva e caracterize devidamente a sua transformação inversa.

c) Obtenha uma base U, para o domínio, e uma base U', para o conjunto de chegada, em relação às quais a matriz de S tenha uma forma diagonal.

d) Defina adequadamente a transformação composta possível de S com T, tendo como referência as bases canónicas. Obtenha a respectiva representação matricial.

e) Mostre que a transformação linear S é definida, em relação à base canónica de R^2, $E_2 = \{(1\ ,0)\ ,\ (0\ ,1)\}$, e à base

$$B = \{B_1\ ,\ B_2\ ,\ B_3\} = \{(1\ ,\ 1\ ,0)\ ,\ (0\ ,\ 0\ ,1)\ ,\ (1\ ,\ -1\ ,\ 0)\}$$

de R^3, através da relação

$$S(x\ ,\ y) = \frac{1}{2}(3x+y\ ,\ 2x-2y\ ,\ -x+y)_B$$

f) Adoptando bases devidamente seleccionadas, defina a lei de transformação para T, de forma a que seja possível obter a transformação composta encontrada em d), se for utilizada, nessa composição, a lei de transformação para S referida na alínea anterior.

Resolução:

a) Calculemos o núcleo de S, $N(S)$:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 2x \quad\ =0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Tem-se, então,

$$N(S)=\left\{X=(0\ ,\ 0)\in R^2\right\}$$

$$S_N=\text{Base } N(S)=\{\ \}$$

$$dim\ N(S)=0$$

concluindo-se, desde já, que S é injectiva.

Calculemos o contradomínio de S, $S(R^2)$:

$$\begin{cases} x+y=a \\ 2x \qquad =b \\ x-y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b}{2} \\ y=a-\dfrac{b}{2} \\ \dfrac{b}{2}-a+\dfrac{b}{2}=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b}{2} \\ y=a-\dfrac{b}{2} \end{cases} \wedge\ c=-a+b$$

Tem-se

$$S(R^2)=\left\{Y=(a\ ,\ b\ ,\ -a+b)\in R^3\right\}$$

$$S_T=\text{Base} S(R^2)=\{(1\ ,\ 0\ ,\ -1)\ ,\ (0\ ,\ 1\ ,\ 1)\}$$

$$dim\ S(R^2)=2$$

Verifica-se que $S(R^2)\subset R^3$, pelo que S não é sobrejectiva.

b) A transformação linear S é injectiva, uma vez que $dim\ N(S)=0$. Recorrendo às expressões que resultaram do cálculo do contradomínio, obtém-se

$$\begin{array}{ccccc} S^{-1} & : & S(R^2) & \rightarrow & R^2 \\ & & (a\ ,\ b\ ,\ -a+b) & \rightarrow & \left(\dfrac{b}{2}\ ,\ a-\dfrac{b}{2}\right) \end{array}$$

c) Sejam as bases do domínio e do conjunto de chegada de S

$$U=\{U_1\ ,\ U_2\}\ :\ \text{Base de } R^2$$

$$U'=\{U_1'\ ,\ U_2'\ ,\ U_3'\}\ :\ \text{Base de } R^3$$

Uma vez que $dim\ S(R^2) = 2$, a representação matricial em forma diagonal para S tomará a forma

$$S_{U,U'} = m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{U,U'}$$

já que se deverá verificar a condição

$$r(S_{U,U'}) = dim\ S(R^2) = 2$$

Atendendo à forma como se encontra definida a matriz $S_{U,U'} = m(S)$, é possível concluir-se, figura 1,

$$S(U_1)=(1\ ,0\ ,0)_{U'}=1\ U_1{'}\ +0\ U_2{'}\ +0\ U_3{'} \ \Rightarrow\ S(U_1) = U_1{'}$$

$$S(U_2)=(0\ ,1\ ,0)_{U'}=0\ U_1{'}\ +1\ U_2{'}\ +0\ U_3{'} \ \Rightarrow\ S(U_2) = U_2{'}$$

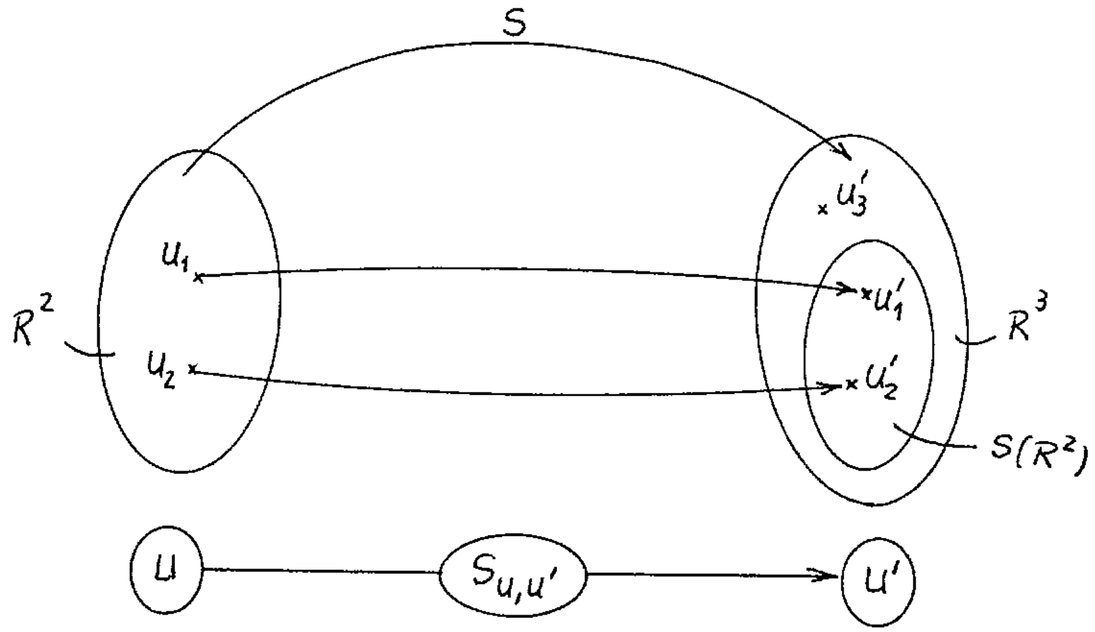

Figura 1: Representação matricial em forma diagonal para S

Neste caso, a base U pode ser qualquer base do domínio de S; optando pela base canónica do espaço R^2 (a mais simples), tem-se

$$U = E_2 = \{(1\ ,0)\ ,\ (0\ ,1)\}$$

Relativamente à base do conjunto de chegada, obtém-se

$$U_1' = S(1\ ,0) = (1\ ,2\ ,1) \in S(R^2)$$

$$U_2' = S(0\ ,1) = (1\ ,0\ ,-1) \in S(R^2)$$

O terceiro elemento, U_3', deverá ser escolhido de forma a que o conjunto $U' = \{U_1'\ ,\ U_2'\ ,\ U_3'\}$ seja uma base de R^3. Neste caso, bastará escolher qualquer vector de R^3 que não esteja situado no contradomínio de S; seja, por exemplo,

$$U_3' = (1\ ,0\ ,0) \notin S(R^2)$$

Tem-se então

$$U' = \{U_1'\ ,\ U_2'\ ,\ U_3'\} = \{(1\ ,2\ ,1)\ ,(1\ ,0\ ,-1)\ ,(1\ ,0\ ,0)\}$$

Uma vez que $U = E_2$, a representação matricial de S tomará a forma alternativa

$$S_{E_2,U'} = m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{E_2,U'}$$

A lei de transformação linear associada à matriz $S_{E_2,U'}$ é

$$\begin{aligned} S:\ & R^2 \rightarrow R^3 \\ & (x\ ,y) \rightarrow (x\ ,y\ ,0)_{U'} \end{aligned}$$

já que

$$S(x\ ,y) = S_{E_2,U'}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{E_2,U'}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}_{U'}$$

d) Comecemos por calcular as imagens dos vectores que constituem a base canónica de R^3, $E_3 = \{\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\vec{k}\}$.

Sabendo que

$$T(1\ ,\ 1\ ,\ 0) = T(\vec{i}) + T(\vec{j}) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1)$$

$$T(1\ ,\ -1\ ,\ 0) = T(\vec{i}) - T(\vec{j}) = (0\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

$$T(0\ ,\ 0\ ,\ 1) = T(\vec{k}) = (0\ ,\ 1\ ,\ 1)$$

resulta, após a resolução do sistema de equações,

$$\begin{cases} T(\vec{i}) + T(\vec{j}) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1) \\ T(\vec{i}) - T(\vec{j}) = (0\ ,\ 0\ ,\ 1) \\ T(\vec{k}) = (0\ ,\ 1\ ,\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ 2\ T(\vec{i}) = (2\ ,\ 0\ ,\ 0) \\ T(\vec{k}) = (0\ ,\ 1\ ,\ 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T(\vec{j}) = (1\ ,\ 0\ ,\ -1) \\ T(\vec{i}) = (1\ ,\ 0\ ,\ 0) \\ T(\vec{k}) = (0\ ,\ 1\ ,\ 1) \end{cases}$$

A matriz da transformação linear T em relação à base canónica de R^3 é

$$T = m(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$T(x\ ,\ y\ ,\ z) = T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ z \\ -y+z \end{bmatrix}$$

Obtém-se, então,

$$\begin{aligned} T\ :\quad & R^3 \rightarrow R^3 \\ & (x\ ,\ y\ ,\ z) \rightarrow (x+y\ ,\ z\ ,\ -y+z) \end{aligned}$$

A composição possível envolvendo as aplicações lineares S e T, figura 2, é

$$TS\ :\ R^2 \rightarrow R^3$$

Sabendo que

$$S(1\ ,0) = (1\ ,2\ ,1)$$

$$S(0\ ,1) = (1\ ,0\ ,\ -1)$$

tem-se

$$S = m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$P = m(TS) = m(T)m(S) = TS = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

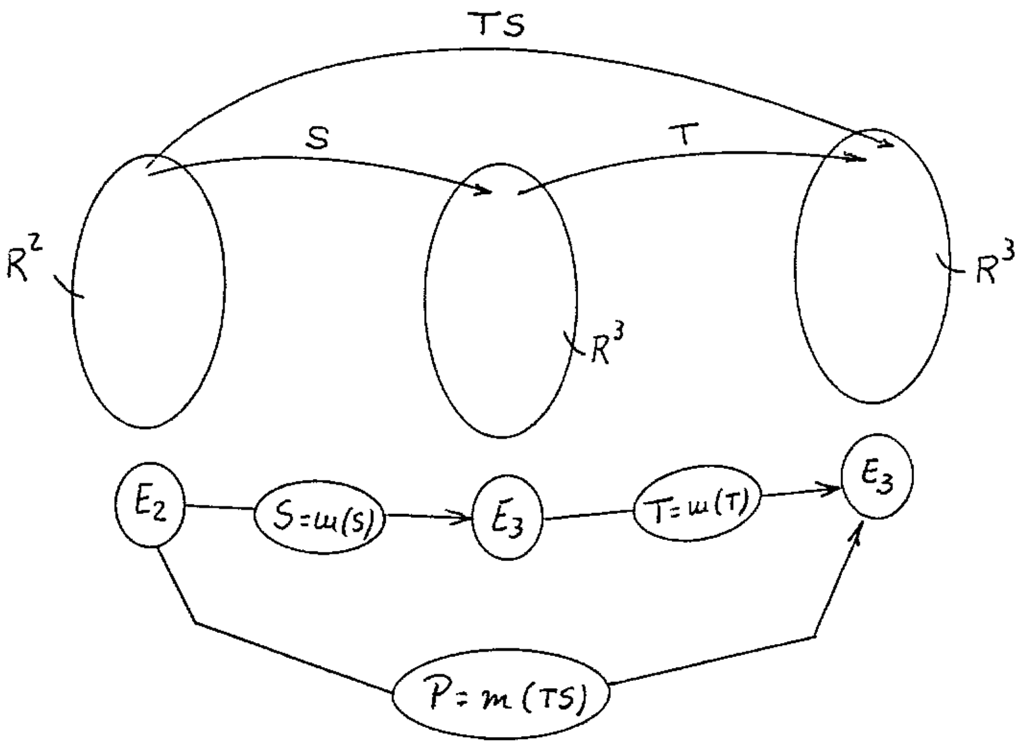

Figura 2: Representação matricial da transformação linear *TS*

A lei de transformação linear associada à matriz $P = m(TS)$ é

$$\begin{aligned} TS :\ & R^2 \ \rightarrow \ R^3 \\ & (x\ ,\ y) \rightarrow (3x + y\ ,\ x - y\ ,\ -x - y) \end{aligned}$$

já que

$$TS(x\ ,\ y) = P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y \\ x-y \\ -x-y \end{bmatrix}$$

e) Para obter a matriz da transformação linear S em relação à base canónica de R^2, $E_2 = \{(1\ ,0)\ ,\ (0\ ,1)\}$, e à base de R^3,

$$B = \{B_1\ ,\ B_2\ ,\ B_3\} = \{(1\ ,\ 1\ ,0)\ ,\ (0\ ,\ 0\ ,1)\ ,\ (1\ ,\ -1\ ,\ 0)\}$$

é necessário calcular as imagens dos vectores que formam a base do domínio, expressas na base considerada para o conjunto de chegada, figura 3.

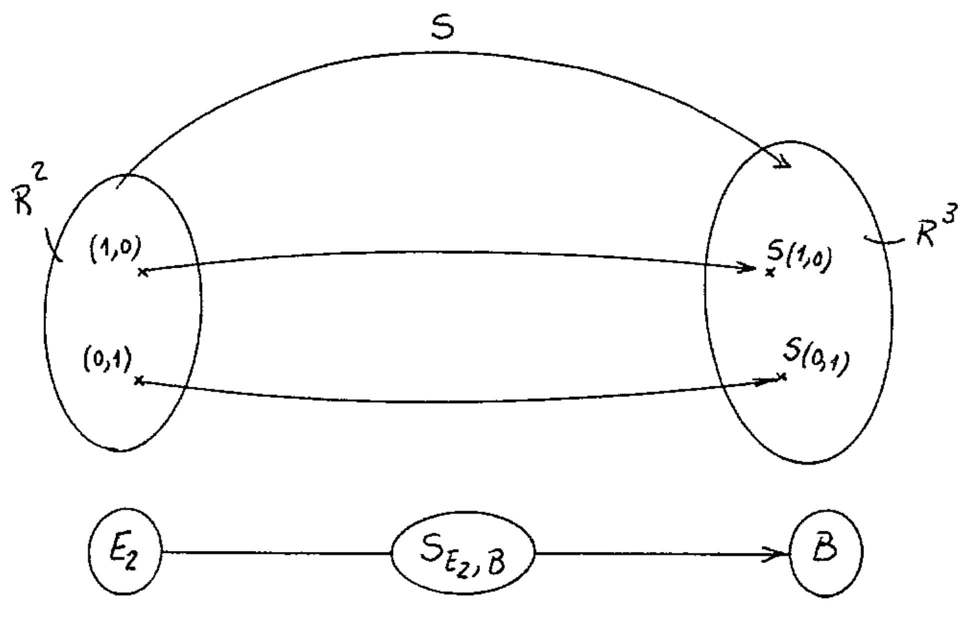

Figura 3: Representação matricial para a transformação linear S

As imagens dos vectores da base do domínio, E_2, são

$$S(1\ ,0) = (1\ ,2\ ,1)$$

$$S(0\ ,1) = (1\ ,0\ ,\ -1)$$

encontrando-se expressas na base canónica de R^3, $E_3 = \{\vec{i}\ ,\vec{j}\ ,\ \vec{k}\}$.

Antes de determinarmos as coordenadas dos vectores (imagens) obtidos anteriormente na base B (conjunto de chegada), encontremos as expressões de mudança de coordenadas entre as bases E_3 e B do espaço R^3, figura 4.

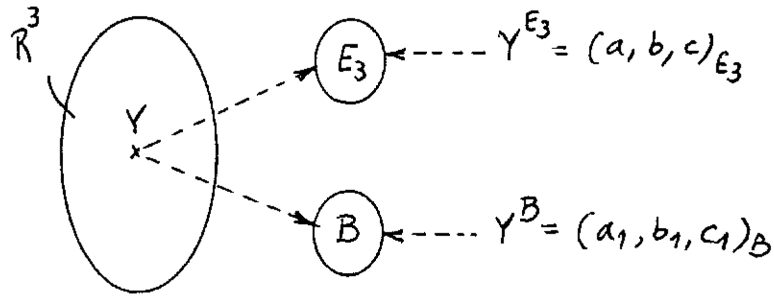

Figura 4: Mudança de coordenadas no espaço R^3

Sabendo que

$$(a\ ,\ b\ ,\ c) = a_1\ B_1 + b_1\ B_2 + c_1\ B_3 = (a_1 + c_1\ ,\ a_1 - c_1\ ,\ b_1)$$

as expressões de mudança de coordenadas de B para E_3 são

$$\begin{cases} a_1 \quad + c_1 = a \\ a_1 \quad - c_1 = b \\ \quad b_1 \qquad = c \end{cases} \quad (B \to E_3)$$

Resolvendo o sistema de equações anterior em ordem a_1, b_1 e c_1, obtém-se

$$\begin{cases} a_1 = (a+b)/2 \\ b_1 = c \\ c_1 = (a-b)/2 \end{cases} \quad (E_3 \to B)$$

que traduz as expressões de mudança de coordenadas de E_3 para B.

Usando as relações anteriores resulta então

$$S(1\ ,\ 0) = (1\ ,\ 2\ ,\ 1) = \frac{1}{2}(3\ ,\ 2\ ,\ -1)_B$$

$$S(0\ ,\ 1) = (1\ ,\ 0\ ,\ -1) = \frac{1}{2}(1\ ,\ -2\ ,\ 1)_B$$

A matriz $S_{E_2,B}$, que representa a transformação linear S em relação às bases E_2 e B, é

$$S_{E_2,B} = m(S) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{E_2,B}$$

A lei de transformação linear associada à matriz $S_{E_2,B}$, toma a forma

$$\begin{array}{llll} S: & R^2 & \rightarrow & R^3 \\ & (x\ ,\ y) & \rightarrow & \frac{1}{2}(3x+y\ ,\ 2x-2y\ ,\ -x+y)_B \end{array}$$

já que

$$S(x\ ,\ y) = S_{E_2,B}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{E_2,B}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3x+y \\ 2x-2y \\ -x+y \end{bmatrix}_B$$

f) Na alínea d) definiu-se a composição *TS* em relação às bases canónicas de R^2 e R^3, tendo sido, para o efeito, calculada a matriz *P=m(TS)*, a partir do produto das matrizes *T=m(T)* e *S=m(S)*.

Neste caso, pretende-se obter a mesma matriz *P=m(TS)*, recorrendo, agora, à matriz $S_{E_2,B}$, que representa a transformação linear S em relação às bases E_2 (domínio) e B (conjunto de chegada).

Convém notar que a base E_2 é comum, como base do domínio R^2, às matrizes $S_{E_2,B}$ =*m(S)* e *P=m(TS)*.

Assim, a matriz $S_{E_2,B}$ só poderá ser composta com uma representação matricial de *T* que se encontre definida em relação às bases, figura 5:

1. Base do domínio de *T*: base *B*

   Esta base deverá ser coincidente com a base do conjunto de chegada da matriz $S_{E_2,B}$.

2. Base do conjunto de chegada de *T*: base E_3

   Esta base deverá coincidir com a base que é considerada como base do conjunto de chegada da matriz *P=m(TS)*.

Pretende-se, então, obter a matriz $T_{B,E_3} = m(T)$, que é a representação matricial da transformação T em relação às bases B (domínio) e E_3 (conjunto de chegada).

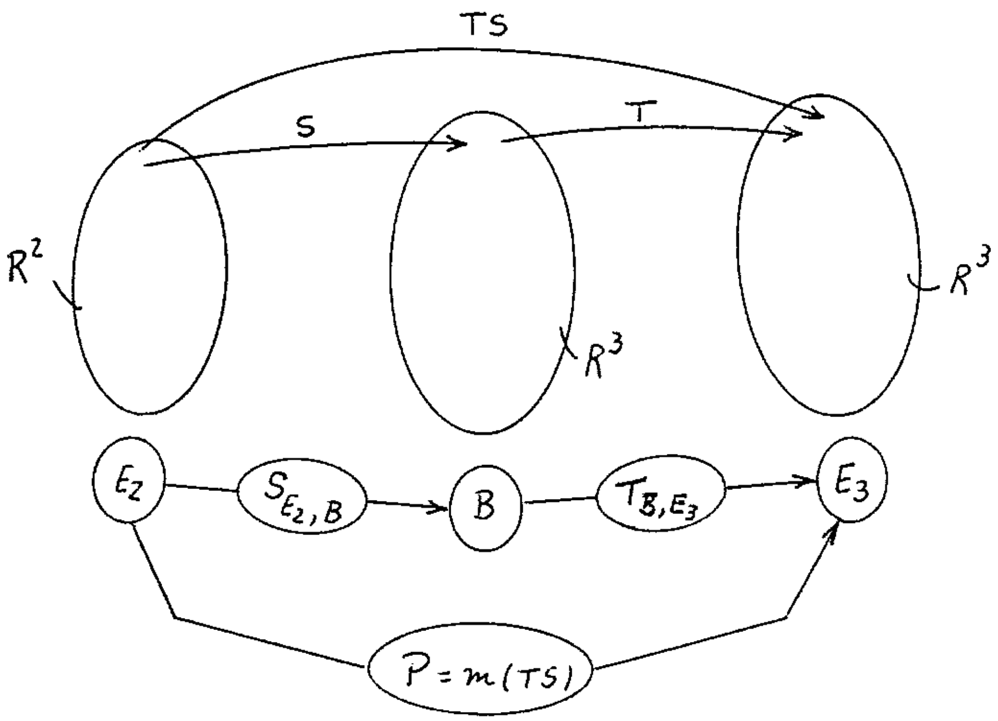

Figura 5: Representação matricial da transformação linear *TS*

Calculando as imagens dos vectores que constituem a base B, obtém-se

$$T(B_1) = T(1\ ,\ 1\ ,\ 0) = (2\ ,\ 0\ ,\ -1)$$

$$T(B_2) = T(0\ ,\ 0\ ,\ 1) = (0\ ,\ 1\ ,\ 1)$$

$$T(B_3) = T(1\ ,\ -1\ ,\ 0) = (0\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

as quais estão expressas na base canónica do conjunto de chegada, isto é, a base E_3 pretendida.

Tem-se então

$$T_{B,E_3} = m(T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{B,E_3}$$

A lei de transformação linear associada à matriz $T_{B,E_3} = m(T)$, é

$$
\begin{array}{lccc}
T: & R^3 & \rightarrow & R^3 \\
 & (x_1 \, , \, y_1 \, , \, z_1)_B & \rightarrow & (2x_1 \, , \, y_1 \, , \, -x_1 + y_1 + z_1)
\end{array}
$$

uma vez que

$$
T(x_1 \, , \, y_1 \, , \, z_1)_B = T_{B,E_3} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{B,E_3} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ y_1 \\ -x_1 + y_1 + z_1 \end{bmatrix}
$$

Para confirmar o resultado obtido na alínea d) para a matriz *P*=*m*(*TS*), basta verificar, neste caso, que

$$
P = m(TS) = m(T)m(S) = T_{B,E_3} \; S_{E_2,B} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{B\,,\,E_3} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{E_2\,,\,B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

(1)

(3) (2)

Na obtenção da matriz *P* há a realçar o seguinte:

(1) Para que seja possível a composição, a base do conjunto de chegada da primeira aplicação (*S*) tem de ser igual à base do domínio da segunda aplicação (*T*);

(2) A base do domínio da primeira aplicação (*S*) será igual à base do domínio da aplicação composta (*TS*);

(3) A base do conjunto de chegada da segunda aplicação (*T*) será igual à base do conjunto de chegada da aplicação composta (*TS*).

288.

Considere a transformação linear $T : R^3 \rightarrow R^2$, com

$$T(x , y , z) = (y + z , y - z)$$

Sejam as bases $U = \{U_1 , U_2 , U_3\} = \{(0 , 1 , 0) , (0 , 0 , 1) , (1 , 0 , 0)\}$ para o espaço R^3, e $U' = \{U_1' , U_2'\} = \{(-1 , 1) , (1 , 1)\}$ para o espaço R^2. Determine:

a) A matriz de T em relação às bases canónicas de R^3, $E_3 = \{\vec{i} , \vec{j} , \vec{k}\}$, e de R^2, $E_2 = \{(1 , 0) , (0 , 1)\}$.

b) A matriz, B, de mudança de base de U para E_3.

c) A matriz, C, de mudança de base de U' para E_2.

d) As coordenadas dos vectores $X_1 = (1 , 1 , 2)$ e $X_2 = (1 , 5)$, em relação às bases U e U', respectivamente.

e) A matriz $T_{E_3,U'}$, que representa a transformação T em relação às bases E_3 e U'.

f) A matriz T_{U,E_2}, que representa a transformação T em relação às bases U e E_2.

g) A matriz $T_{U,U'}$, que representa a transformação T em relação às bases U e U'.

h) A imagem, através de T, do vector $X_1 = (1 , 1 , 2)$, expressa nas bases E_2 e U'.

Resolução:

a) As imagens dos vectores da base canónica de R^3, expressas na base canónica de R^2, são

$$T(\vec{i}) = T(1 , 0 , 0) = (0 , 0)$$

$$T(\vec{j}) = T(0 , 1 , 0) = (1 , 1)$$

$$T(\vec{k}) = T(0 , 0 , 1) = (1 , -1)$$

A matriz da transformação linear T em relação às bases canónicas de R^3 e R^2, é

$$T = m(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Consideremos o problema de mudança de coordenadas no espaço vectorial R^3, ilustrado na figura 1, onde se designaram:

– Coordenadas do vector X na base E_3: $X^{E_3} = (x\ ,\ y\ ,\ z)_{E_3}$;

– Coordenadas do vector X na base U: $X^U = (x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)_U$.

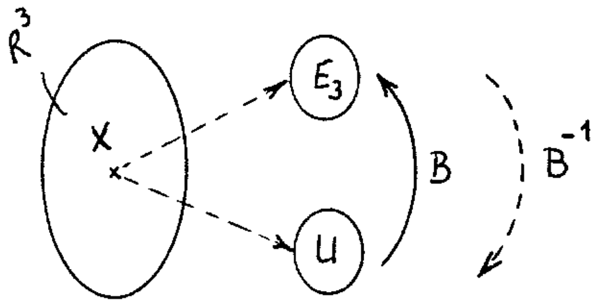

Figura 1: Mudança de coordenadas no espaço R^3

Pretende-se obter a matriz, B, de mudança de base de U para E_3, isto é,

$$X^{E_3} = B\, X^U$$

Recorrendo à relação matricial

$$E_3\, X^{E_3} = U\, X^U$$

onde

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3 \text{ e } U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

são, respectivamente, as matrizes que possuem nas respectivas colunas os vectores das bases E_3 e U, obtém-se

$$E_3^{-1}\, E_3\, X^{E_3} = E_3^{-1}\, U\, X^U \quad \Leftrightarrow \quad X^{E_3} = E_3^{-1}\, U\, X^U$$

de onde resulta

$$B = E_3^{-1}\, U = U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

uma vez que a matriz E_3 é coincidente com a matriz identidade (de ordem 3).

As expressões de mudança de coordenadas de U para E_3 são

$$X^{E_3} = B\, X^{U} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = z_1 \\ y = x_1 \\ z = y_1 \end{cases} \quad (U \rightarrow E_3)$$

Sabendo que

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\, [Adj\ B]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

as expressões de mudança de coordenadas de E_3 para U são

$$X^{U} = B^{-1}\, X^{E_3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = z \\ z_1 = x \end{cases} \quad (E_3 \rightarrow U)$$

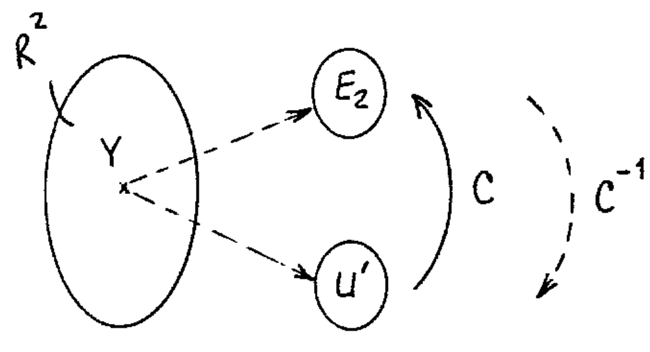

Figura 2: Mudança de coordenadas no espaço R^2

c) Consideremos o problema de mudança de coordenadas no espaço vectorial R^2, ilustrado na figura 2, onde se designaram:

– Coordenadas do vector Y na base E_2: $Y^{E_2} = (a\ ,\ b)_{E_2}$;

– Coordenadas do vector Y na base U': $Y^{U'} = (a_1\ ,\ b_1)_{U'}$.

Pretende-se obter a matriz, C, de mudança de base de U' para E_2, isto é,

$$Y^{E_2} = C\ Y^{U'}$$

Recorrendo à relação matricial

$$E_2\ Y^{E_2} = U'\ Y^{U'}$$

onde

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ e } U' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

são, respectivamente, as matrizes que possuem nas respectivas colunas os vectores das bases E_2 e U', obtém-se

$$E_2^{-1}\ E_2\ Y^{E_2} = E_2^{-1}\ U'\ Y^{U'} \quad \Leftrightarrow \quad Y^{E_2} = E_2^{-1}\ U'\ Y^{U'}$$

de onde resulta

$$C = E_2^{-1}\ U' = U' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

uma vez que a matriz E_2 é coincidente com a matriz identidade (de ordem 2).

As expressões de mudança de coordenadas de U' para E_2 são

$$Y^{E_2} = C\ Y^{U'} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -a_1 + b_1 \\ b = a_1 + b_1 \end{cases} \quad (U' \rightarrow E_2)$$

Sabendo que

$$C^{-1} = \frac{1}{|\,C\,|}\ [Adj\ C]^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

as expressões de mudança de coordenadas de E_2 para U' são

$$Y^{U'} = C^{-1}\ Y^{E_2} \iff \begin{cases} a_1 = (-a+b)/2 \\ b_1 = (a+b)/2 \end{cases} \quad (E_2 \to U')$$

d) As coordenadas do vector $X_1 = (1\ ,\ 1\ ,\ 2)$ em relação à base U são dadas por

$$X_1^U = B^{-1}\ X_1^{E_3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{E_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_U$$

ou seja,

$$X_1 = (1\ ,\ 1\ ,\ 2) = (1\ ,\ 2\ ,\ 1)_U$$

As coordenadas do vector $X_2 = (1\ ,\ 5)$ em relação à base U' são dadas por

$$X_2^{U'} = C^{-1}\ X_2^{E_2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{E_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{U'}.$$

ou seja,

$$X_2 = (1\ ,\ 5) = (2\ ,\ 3)_{U'}.$$

e) Atente-se no esquema ilustrado na figura 3. Pretende-se, neste caso, encontrar a matriz $T_{E_3,U'} = m(T)$, tal que

$$Y^{U'} = T_{E_3,U'}\ X^{E_3}$$

Sendo conhecida a matriz $T = m(T)$, sabe-se que

$$Y^{E_2} = T\ X^{E_3}$$

que poderá ser transformada numa expressão semelhante à anterior, desde que sejam introduzidas mudanças de base adequadas. Tem-se, então,

$$Y^{E_2} = T\ X^{E_3} \iff C\ Y^{U'} = T\ X^{E_3} \iff C^{-1}\ C\ Y^{U'} = C^{-1}\ T\ X^{E_3} \iff$$

$$Y^{U'} = C^{-1}\ T\ X^{E_3}$$

pelo que

$$T_{E_3,U'} = C^{-1}\ T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{E_3,U'}$$

A lei de transformação linear associada à matriz $T_{E_3,U'}$ é

$$\begin{aligned} T: \quad & R^3 \rightarrow R^2 \\ & (x\ ,\ y\ ,\ z) \rightarrow (-z\ ,\ y)_{U'} \end{aligned}$$

já que

$$T(x\ ,\ y\ ,\ z) = T_{E_3,U'}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{E_3,U'}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ y \end{bmatrix}_{U'}$$

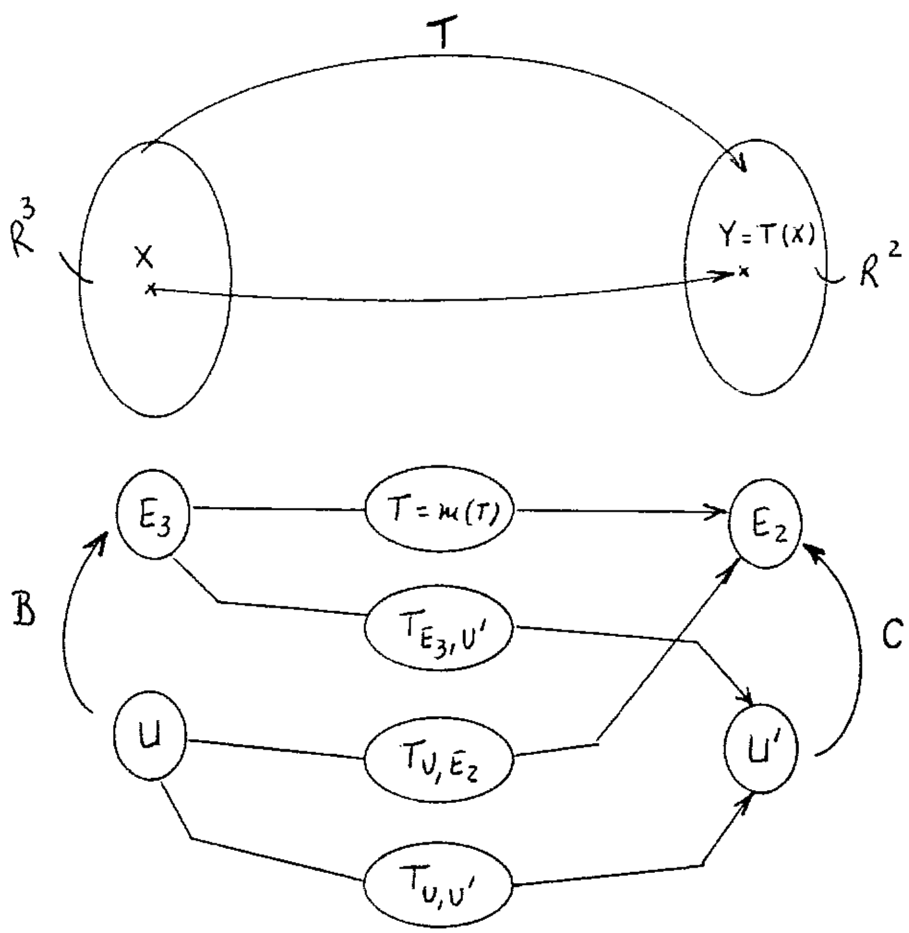

Figura 3: Representações matriciais para a transformação linear T

f) Pretende-se, agora, encontrar a matriz $T_{U,E_2} = m(T)$, tal que

$$Y^{E_2} = T_{U',E_2}\ X^{U'}$$

Recorrendo, uma vez mais, à matriz $T = m(T)$, a transformação da equação matricial

$$Y^{E_2} = T\ X^{E_3}$$

numa expressão semelhante à anterior, permite obter

$$Y^{E_2} = T\ X^{E_3} \iff Y^{E_2} = T\ B\ X^{U'}$$

ou seja,

$$T_{U',E_2} = T\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{U',E_2}$$

A lei de transformação linear associada à matriz T_{U',E_2} é

$$\begin{aligned} T:\quad & R^3 \rightarrow R^2 \\ & (x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)_{U'} \rightarrow (x_1 + y_1\ ,\ x_1 - y_1) \end{aligned}$$

já que

$$T(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)_{U'} = T_{U',E_2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{U',E_2} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \end{bmatrix}$$

g) Pretende-se, agora, encontrar a matriz $T_{U',U''} = m(T)$, tal que

$$Y^{U''} = T_{U',U''}\ X^{U'}$$

Recorrendo, novamente, à matriz $T = m(T)$, a transformação da equação matricial

$$Y^{E_2} = T\ X^{E_3}$$

numa expressão semelhante à anterior, permite obter

$$Y^{E_2} = T\ X^{E_3} \iff C\ Y^{U''} = T\ B\ X^{U'} \iff C^{-1}\ C\ Y^{U''} = C^{-1}\ T\ B\ X^{U'} \iff$$

$$Y^{U''} = C^{-1}\ T\ B\ X^{U'}$$

ou seja,

$$T_{U',U''} = C^{-1}\ T\ B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{U',U''}$$

A lei de transformação linear associada à matriz $T_{U',U''}$ é

$$\begin{aligned} T\ : \qquad & R^3 \ \to \ R^2 \\ & (x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)_{U'} \ \to \ (-y_1\ ,\ x_1)_{U''} \end{aligned}$$

já que

$$T(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)_{U'} = T_{U',U''}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{U',U''}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}_{U''}$$

h) A imagem, através de T, do vector $X_1 = (1\ ,\ 1\ ,\ 2) = (1\ ,\ 2\ ,\ 1)_{U'}$, expressa na base E_2, é dada por

$$T(1\ ,\ 1\ ,\ 1) = T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ou ainda

$$T(1\ ,\ 2\ ,\ 1)_{U'} = T_{U',E_2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{U',E_2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A imagem, através de T, do vector $X_1 = (1\ ,\ 1\ ,\ 2) = (1\ ,\ 2\ ,\ 1)_{U'}$, expressa na base U'', é dada por

$$T(1\ ,\ 1\ ,\ 2) = T_{E_3,U''}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}_{E_3,U''}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}_{U''}$$

ou ainda

$$T(1\ ,\ 2\ ,\ 1)_{U'} = T_{U',U''}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{U',U''}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}_{U'} = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}_{U''}$$

Finalmente, é possível verificar que as imagens anteriormente obtidas, $(3\ ,\ -1)$ e $(-2\ ,\ 1)_{U''}$, correspondem, de facto, ao mesmo elemento do conjunto de chegada de T; com efeito, elas satisfazem, por exemplo, a relação de mudança de coordenadas

$$Y^{E_2} = C\ Y^{U''} \qquad (U'' \to E_2)$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}_{U''}$$

Resumindo,

$$T(1\ ,\ 1\ ,\ 2) = (3\ ,\ -1) = (-2\ ,\ 1)_{U''}$$