EXERCÍCIOS DE VALORES E VETORES PRÓPRIOS

FEUP

MIEIC

ÁLGEBRA

António Ferreira

@ 11 JAN 2021

Problemas de valores e vetores próprios.

Livro Prof Trigo Barbosa
Noções sobre Álgebra Linear

12. Calcule os parâmetros reais α, β e δ, de modo a que

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$ seja vetor próprio

da matriz

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \beta \\ 2 & \delta & 3 \end{bmatrix}$$

e tal que o traço da matriz é igual a 6

Cm $\operatorname{tr} A = 6 \Rightarrow \alpha + 5 = 6$

$$\underline{\alpha = 1}$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & \beta \\ 2 & 8 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 2}$$

$$2 - 3(2-\lambda) + 2\beta = 0$$

c/ $\lambda = 2 \rightarrow \quad 2 - 3(0) + 2\beta = 0$

$$\underline{\beta = -1}$$

$$4 - 3\delta + 6 - 2\lambda = 0$$

$$\cancel{4} - 3\delta + 6 - \cancel{4} = 0$$

$$\underline{\delta = 2}$$

Assim $\alpha = 1$, $\beta = -1$ e $\delta = 2$

31. Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, onde

$$T = \underset{EE}{m(T)} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & b \\ -2 & c & -2 \\ -1 & a & 7 \end{bmatrix}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

a) Calculo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sabendo que $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de T e $Tr(T) = 18$

— com $tr(T) = 18 \Rightarrow \underline{c = 4}$

$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & -2 & b \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ -1 & a & 7-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1ª eq. $\quad 7 - \lambda - 4 + b = 0$

2ª eq. $\quad -2 + 8 - 2\lambda - 2 = 0$

$-2\lambda = -4$, $\underline{\lambda = 2}$

da 1ª Eq. $7-2-4+b=0$

$$\underline{b=-1}$$

3ª Eq. $-1+2a+7-2=0$

$$2a=-4 \quad , \quad \underline{a=-2}$$

Temos então a matriz

$$M(T)_{EE} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

Note-se que a matriz é simétrica, vamos ter valores próprios reais e temos garantia de ter uma base de vetores próprios.

Como $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 18$

e $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = |M(T)|$

e $\lambda_1 = 2 \to \lambda_2 + \lambda_3 = 16$

$$\to \lambda_2 \cdot \lambda_3 = \frac{|m(T)|}{2}$$

$$m(T)_{ee} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \quad (**)$$

o determinante é igual a:

$$7(28-4) - 2(2+14) - (4+4)$$

$$7 \times 24 - 2(16) - 8$$

$$= 7 \times 3 \times 8 - 2 \times 2 \times 8 - 1 \times 8$$

$$= 8(21 - 4 - 1) = 8 \times 16$$

$$= 128$$

logo $\lambda_2 + \lambda_3 = 16$, $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 64$

ou seja $\lambda_2 = \lambda_3 = 8$

e $\lambda_1 = 2$

b) Para $\lambda_1 = 2$

$$(A - 2I)X = 0 \quad , \quad X \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 7-2 & -2 & -1 \\ -2 & 4-2 & -2 \\ -1 & -2 & 7-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & -2 & 0 \\ -10 & 10 & -10 & 0 \\ -10 & -20 & 50 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 10 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -12 & 0 \\ 0 & -24 & -48 & 0 \end{array}\right] \times 4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \underline{b = 2c}$$

$$-5a + 4c + c = 0$$

$$\underline{a = c}$$

Logo $X(2) = \{(c, 2c, c)\}\ c \neq 0$

Espaço próprio $E(2) = \{c(1,2,1)\}\ c \in \mathbb{R}$

Base de $E(2) = \{(1,2,1)\}$

$\dim E(2) = 1 = m.g.(2)$

Para $\lambda_2=\lambda_3=8$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ou $a+2b+c=0$

$$X(8)=\{(-c-2b,\, b,\, c)\}\setminus\{\vec{0}\}$$

$$E(8)=\{c(-1,0,1)+b(-2,1,0)\}$$

$b,c\in\mathbb{R}$

Base $E(8)=\{(-1,0,1),(-2,1,0)\}$

dim $E(8) = 2 =$ m.g. (8)

Note-se que, para cada valor próprio distinto, a multiplicidade algébrica = multiplicidade geométrica, ou seja, $\lambda_1 = 2$ aparece uma vez e dim $E(2) = 1$ e $\lambda = 8$ aparece 2 vezes e a dim $E(8) = 2$. O polinómio característico é igual a

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 8)^2$$

ou seja, em $|A - \lambda I| = 0$

obtemos $(\lambda - 2)(\lambda - 8)^2 = 0$

c) temos então uma base de vetores próprios, selecionando os vetores das bases de cada base dos espaços próprios

$$U = \{\underbrace{(1,2,1)}_{\lambda_1 = 2}, \underbrace{(-1,0,1),(-2,1,0)}_{\lambda_2=\lambda_3=8}\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

com a matriz $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(matriz DIAGONALIZADORA)

obtemos uma MATRIZ DIAGONAL SEMELHANTE a A,

$$\Delta = U^{-1} A U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$m(T)_{UU}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

A diz-se então DIAGONALIZÁVEL.

40. $m(T)_{EE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

a) valores próprios de T

$$|T - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desenv. laplaciano 1ª linha

$$(-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Des. lapl. 2ª a 3ª coluna

$$(-\lambda)(-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 \left[(2-\lambda)^2 - 1 \right] = 0$$

$$\lambda^2\left(4-4\lambda+\lambda^2-1\right)=0$$

$$\lambda^2\left(3-4\lambda+\lambda^2\right)=0$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -4 & 3 \\ 1 & \downarrow & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3)=0$$

Asam $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$, $\lambda_4=3$

b) $\lambda_1=\lambda_2=0$, $(A-\lambda I)X=0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\ \right|\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \\ \to 2a+2b=0 \\ \to c=0 \\ a=-b \end{matrix}$$

$$X(0)=\{(-b,b,0,d)\}\setminus\{\vec{0}\}$$

$$E(0)=\{b(-1,1,0,0)+d(0,0,0,1) \ (b,d\in\mathbb{R})\}$$

$$\text{Base } E(0)=\{(-1,1,0,0),(0,0,0,1)\}$$

$$\dim E(0)=2$$

c/ $\lambda_3=1$

$$\left.\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{matrix}\ \right|\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \to a=0 \\ \to b=c \\ \to b=c \\ \to 2b-b-d=0 \\ d=b=c \end{matrix}$$

$X(1) = \{ (0, c, c, c) \} \quad c \neq 0$

$E(0) = \{ c\,(0, 1, 1, 1) \} \quad c \in \mathbb{R}$

Base $E(0) = \{ (0, 1, 1, 1) \}$

$\dim E(0) = 1$

c/ $\lambda = 3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow a = 0 \\ \rightarrow b = -c \\ \rightarrow b = -c \\ \end{array}$$

$-2c - c - 3d = 0 \quad d = -c$

$X(3) = \{ (0, -c, c, -c) \} \quad c \neq 0$

$E(3) = \{ c\,(0, -1, 1, -1) \} \quad c \in \mathbb{R}$

$\dim E(3) = 1$

e) Base de vetores próprios

$U = \{(-1,1,0,0),(0,0,0,1),(0,1,1,1),(0,-1,1,-1)\}$

matriz $U = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(diagonalizadora)

$\Delta = U^{-1} A U = M(T)_{UU} =$

$= \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 3 \end{bmatrix}$

valores próprios de A na

diagonal
principal

d) $\dim N(T) = 2$ = nº de
valores próprios
nulos

e) $T^3 \rightarrow$ valores próprios
$= (0, 0, 1, 27)$