Exercícios do livro “Noções sobre Álgebra Linear”, de José Augusto Trigo Barbosa

1. Calcule, sem recorrer ao polinómio característico, os valores próprios de cada uma das seguintes matrizes quadradas reais.

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **b)** $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) $C=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. **d)** $D=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

e) $E=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. **f)** $F=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -4 \end{bmatrix}$.

g) $G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 8 & -7 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **h)** $H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

15. Obtenha os valores próprios de cada uma das seguintes matrizes quadradas, num corpo Ω ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

a) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{(3)}(\mathbb{R})$. **b)** $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in M_{(3)}(\mathbb{R})$.

c) $C=\begin{bmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in M_{(3)}(\Omega)$. **d)** $D=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix} \in M_{(3)}(\mathbb{R})$.

e) $E=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix} \in M_{(3)}(\mathbb{R})$. **f)** $F=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in M_{(3)}(\mathbb{R})$.

g) $G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{(4)}(\mathbb{R})$. **h)** $H=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in M_{(4)}(\mathbb{R})$.

i) $J=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \in M_{(5)}(\mathbb{R})$.

16. Em cada uma das alíneas do exercício anterior, obtenha os vetores próprios e os espaços próprios associados a cada valor próprio da matriz; apresente, para cada um dos espaços obtidos, uma base e a dimensão. Conclua se a matriz é diagonalizável, indicando, se tal for possível, a matriz diagonal que lhe é semelhante.

27. Seja a transformação linear $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujos espaços próprios são

$\mathrm{E}(-1) = \left\{ \vec{x} = t(1,-1,1) \in \mathbb{R}^3 \right\}$, $\mathrm{E}(1) = \left\{ \vec{x} = t(1,0,-2) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ e

$\mathrm{E}(2) = \left\{ \vec{x} = t(1,-1,0) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

definidos em relação à base canónica, $\mathrm{E}_3 = \left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$, para $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) A representação matricial de R em relação à base ordenada:

$\mathrm{V} = \left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right\} = \left\{ (1,-1,1), (1,0,-2), (1,-1,0) \right\}$

b) A representação matricial de R em relação à base canónica.