apontamentos

Álgebra Linear | aulas teóricas

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica, 1º semestre 2012/13

Lina Oliveira

Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

Índice

1

Matrizes, sistemas de equações lineares e método de eliminação de Gauss

Matrizes

Uma **matriz de tipo** $k \times n$ é um quadro

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

de números ou escalares reais (respetivamente, complexos) com k **linhas** e n **colunas**. Os números a_{ij}, para todos os índices $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, n$, dizem-se as **entradas** da matriz. O índice i indica o número da linha da matriz onde a **entrada**-(ij) (i.e, o escalar a_{ij}) se encontra, e o índice j indica a coluna.

Exemplo

A entrada-(23) da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

é o número que se encontra na linha 2 e na coluna 3, ou seja, $a_{23} = 7$.

A linha i da matriz é

$$L_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix},$$

e a coluna j é

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ji} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{bmatrix}.$$

A matriz pode ser apresentada abreviadamente como $[a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1,\ldots,n}}$, ou apenas $[a_{ij}]$ sempre que o tipo da matriz for claro a partir do contexto.

A matriz diz-se:

- **Matriz retangular**, se $k \neq n$.
- **Matriz quadrada**, se $k = n$. Neste último caso, a matriz diz-se uma matriz quadrada de **ordem** n (ou k).
- **Matriz coluna** ou **vetor coluna**, se $n = 1$.
- **Matriz linha** ou **vetor linha**, se $k = 1$.

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ diz-se estar **em escada de linhas** ou que é uma **matriz em escada de linhas** se satisfizer as duas condições seguintes.

1. Não existem linhas nulas acima de linhas não nulas.
2. Sendo L_i e L_{i+1} duas quaisquer linhas não nulas consecutivas de A, a primeira entrada não nula da linha L_{i+1} encontra-se (numa coluna) à direita (da coluna) da primeira entrada não nula da linha L_i.

A primeira entrada não nula de cada linha duma matriz em escada de linhas designa-se por **pivô**.

Exemplo

A matriz da alínea (a) é uma matriz em escada de linhas cujos pivôs são 1, 4 e 6. As matrizes das alíneas (b) e (c) não são matrizes em escada de linhas.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Operações elementares

Existem três **operações elementares** sobre as linhas de uma matriz.

- Substituição da linha L_i por $L_i + \alpha L_j$, com α escalar e $i \neq j$.
- Troca da linha L_i com a linha L_j (com $i \neq j$).
- Substituição da linha L_i por αL_i, com $\alpha \neq 0$.

Estas operações aplicar-se-ão seguidamente na resolução de sistemas de equações lineares, altura em que serão descritas.

Sistemas de equações lineares

Uma **equação linear** é uma equação da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, b$ são escalares e $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ são as **incógnitas** ou **variáveis**. Um **sistema de equações lineares** (SEL) é uma conjunção de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k22}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}.$$

O sistema diz-se **homogéneo** se $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$ e, caso contrário, diz-se **não homogéneo**.

Resolver um sistema de equações lineares é determinar o conjunto de todas as sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n números que satisfazem todas as equações do SEL. Este conjunto diz-se a **solução geral** ou o **conjunto das soluções** do SEL.

Dois sistemas de equações lineares dizem-se **equivalentes** se tiverem a mesma solução geral. Os sistemas de equações lineares classificam-se segundo a sua **natureza**. Um sistema de equações lineares diz-se:

- **possível e determinado**, se tem uma única solução
- **possível e indeterminado**, se tem mais que uma solução. [1]
- **impossível**, se o conjunto das soluções é vazio.

Um sistema de equações lineares homogéneo é sempre possível.

Um SEL homogéneo tem sempre a **solução nula**, i.e., a solução em que todas as variáveis são nulas.

Matrizes associadas ao sistema de equações lineares

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k22} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \qquad \longleftarrow \qquad \textbf{Matriz dos coeficientes}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \qquad \longleftarrow \qquad \textbf{Matriz (coluna) dos termos independentes}$$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k22} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right] \qquad \longleftarrow \qquad \textbf{Matriz aumentada}$$

A matriz aumentada também pode ser simplesmente representada sem a linha de separação vertical

$$[A|b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k22} & \dots & a_{kn} & b_k \end{bmatrix}.$$

[1] Neste caso, o SEL tem infinitas soluções como se verá adiante na Secção 2.

Como resolver um sistema de equações lineares

Consideremos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} .$$

A **matriz aumentada** do sistema é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Se se efetuar uma operação elementar sobre as linhas da matriz aumentada $[A|b]$, obtém-se a matriz aumentada dum sistema de equações lineares equivalente.

Este facto será usado para "simplificar" a matriz aumentada de modo a obter um sistema equivalente ao inicial mas cuja solução seja mais fácil de determinar.

Objetivo: Reduzir a matriz aumentada a uma matriz em escada de linhas à custa de operações elementares, usando o **método de eliminação de Gauss**.

O **método de eliminação de Gauss** (MEG) consiste em:

1. Colocar todas as linhas nulas da matriz abaixo das linhas não nulas, fazendo as trocas de linhas necessárias.
2. Escolher uma das entradas não nulas situada numa coluna o mais à esquerda possível e colocá-la na primeira linha da matriz, trocando eventualmente linhas.
3. Usar operações elementares para reduzir a zero as entradas situadas na mesma coluna e nas linhas abaixo.
4. Repetir os passos anteriores "descendo" uma linha, i.e., considerando a *submatriz* formada apenas pelas linhas abaixo da linha 1.
5. Continuar o mesmo processo "descendo" mais uma linha, i.e., considerando apenas as linhas abaixo da linha 2.

6. Esta "descida" na matriz repete-se até se obter uma matriz em escada de linhas.

Aplica-se agora o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada do sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right] \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-2L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

As operações elementares indicadas sob as setas são as seguintes:

- $L_2 - L_1$ indica que se somou à linha 2 a linha 1 multiplicada por -1, e $L_3 - 2L_1$ indica que se somou à linha 3 a linha 1 multiplicada por -2.
- $L_2 \leftrightarrow L_3$ indica que se trocou a linha 2 com a linha 3.
- $L_3 - 2L_2$ indica que se somou à linha 3 a linha 2 multiplicada por -2.

Note que adotamos a seguinte convenção:

A linha modificada é sempre a primeira a ser escrita. $\leftarrow$ ATENÇÃO

A matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

(Quais são os pivôs?)

está em escada de linhas e é a matriz aumentada do SEL

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-3z=-4 \\ 7z=7 \end{cases},$$

tendo-se

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=2 \\ 2x+y-z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=3 \\ -y-3z=-4 \\ 7z=7 \end{cases}.$$

Começando a resolver o SEL pela equação mais simples, ou seja a última, tem-se $z = 1$. Substituindo z na segunda equação, obtém-se

$$-y - 3 = -4,$$

ou seja $y = 1$. Finalmente, usando a última equação e os valores obtidos de y e z, tem-se que

$$x + 1 + 1 = 3$$

e, portanto, $x = 1$. É agora imediato concluir que o conjunto das soluções ou a solução geral é $\{(1, 1, 1)\}$ e que, portanto, o SEL possível e determinado.

Note que, uma vez obtido o sistema correspondente à matriz (aumentada) em escada de linhas, a resolução faz-se "de baixo para cima": começa-se com a última equação e vai-se "subindo" no sistema.

Em resumo, relembre que se resolve um sistema de equações lineares em três passos:

1. Obtém-se a matriz aumentada $[A|b]$ do sistema;
2. Reduz-se $[A|b]$ a uma matriz R em escada de linhas usando o método de eliminação de Gauss ou, em esquema,

$$[A|b] \xrightarrow[\text{MEG}]{} R$$

3. Resolve-se o SEL cuja matriz aumentada é R.

No exemplo anterior:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{MEG}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = R$$

2

Característica, variáveis dependentes e variáveis independentes

Característica duma matriz

Quando se reduz uma matriz a uma matriz em escada de linhas à custa de operações elementares, o número de pivôs não depende das operações elementares realizadas.

Porquê?

A **característica** duma matriz A de tipo $k \times n$ é o número de pivôs de qualquer matriz em escada de linhas que se obtenha a partir de A à custa de operações elementares. Designa-se por $\operatorname{car} A$ a característica da matriz A.

Exemplo

Resolvamos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{cases} .$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada deste SEL, obtém-se:

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \\ L_3+L_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se então que

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -y - 2z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4z - 3 \\ y = -2z - 3 \end{cases} .$$

Este sistema não tem obviamente solução única.

Como escolher as **variáveis independentes** ou **livres** e as **variáveis dependentes**

- As variáveis dependentes são as variáveis que correspondem às colunas com pivôs.
- As variáveis independentes são as restantes, i.e., as variáveis que correspondem às colunas sem pivôs.

De acordo com a regra acima, as variáveis dependentes são x e y, e a variável independente ou livre é z. A solução geral do sistema é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = 4z - 3 \wedge y = 2z + 3\}$$

e, portanto, o SEL tem um número infinito de soluções.

O **grau de indeterminação** dum sistema é

$$\begin{aligned} \textbf{G.I.} &= \text{número de variáveis independentes} \\ &= \text{número de variáveis - número de variáveis dependentes} \\ &= \text{número de colunas da matriz dos coeficientes - característica da matriz dos coeficientes} \\ &= \text{número de colunas de } A - \operatorname{car} A \end{aligned}$$

onde A é a matriz dos coeficientes do sistema.

O SEL que acabámos de resolver é possível e indeterminado e o seu grau de indeterminação é

$$\text{G.I.} = 3 - 2 = 1.$$

Exemplo

Aplicando o MEG ao sistema

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases},$$

obtém-se

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-\frac{1}{2}L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2y-2z=1 \\ 0=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Conclui-se que o sistema é impossível e que, portanto, a sua solução geral é o conjunto $\varnothing$.

Classificação dos sistemas de equações lineares

Usa-se a noção de característica para classificar os sistemas de equações lineares quanto à sua natureza.

		Natureza do SEL
$\operatorname{car} A = \operatorname{car}[A\|b]$	$\rightarrow$	possível
$\operatorname{car} A \neq \operatorname{car}[A\|b]$	$\rightarrow$	impossível

Note que, quando $\operatorname{car} A \neq \operatorname{car}[A|b]$, a única hipótese é ter-se $\operatorname{car} A < \operatorname{car}[A|b]$.

Possível e determinado	$\rightarrow$	$\operatorname{car} A =$ número de colunas de A
Possível e indeterminado	$\rightarrow$	$\operatorname{car} A <$ número de colunas de A

$$\text{G.I.} = \text{nº colunas de } A - \operatorname{car} A$$

Da análise que temos vindo a fazer, podemos concluir que

Um sistema de equações lineares possível e indeterminado tem um número infinito de soluções.

3 Método de eliminação de Gauss–Jordan

Forma canónica ou reduzida de escada de linhas

Uma matriz diz-se estar em **forma canónica de escada de linhas** ou em **forma reduzida de escada de linhas** se satisfizer as três condições seguintes:

- A matriz está em escada de linhas.
- Os pivôs são todos iguais a 1.
- Em cada coluna com pivô, todas as entradas são iguais a 0 à exceção do pivô.

Exemplo

A matriz A é uma matriz em escada de linhas mas não está em forma canónica de escada de linhas. A matriz B é uma matriz em forma canónica de escada de linhas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Método de eliminação de Gauss–Jordan

O método de eliminação de Gauss–Jordan é usado para, dada uma matriz, reduzi-la a uma matriz em forma canónica de escada de linhas à custa de operações elementares. Este método desenvolve-se em várias fases, sendo a primeira delas o método de eliminação de Gauss.

Dada uma matriz, o **método de eliminação de Gauss–Jordan** (MEG–J) consiste em:

1. Reduzir a matriz a uma matriz em escada de linhas usando o método de eliminação de Gauss.
2.
   - Usar o pivô situado numa coluna o mais à direita possível (ou seja na linha mais abaixo possível) e as operações elementares necessárias para reduzir a zero as entradas situadas na mesma coluna e nas linhas acima da linha do pivô.
   - Repetir os passos anteriores "subindo" uma linha, i.e., considerando a *submatriz* formada apenas pelas linhas acima da linha do ponto anterior.
   - Continuar o mesmo processo "subindo" mais uma linha, i.e., considerando apenas as linhas acima da linha do segundo pivô considerado.
   - Esta "subida" na matriz repete-se até se chegar à primeira linha da matriz (ou seja, até se obter uma matriz em que, nas colunas dos pivôs, estes são as únicas entradas não nulas).
3. Usar as operações elementares convenientes para obter uma matriz em que todos os pivôs são iguais a 1.

Exemplo

Objetivo: Dada uma matriz, pretende-se reduzi-la a uma matriz em forma canónica de escada de linhas à custa de operações elementares, usando o método de eliminação de Gauss–Jordan.

Apliquemos o método de eliminação de Gauss–Jordan à matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

para a reduzir a uma matriz em forma canónica de escada de linhas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2+\frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4-3L_2]{L_3-3L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[L_4-L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[L_1-2L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-1)L_3 \\ (-1)L_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Os pontos 2. e 3. da descrição do MEG–J não têm que ser realizados por esta ordem (i.e., primeiro o ponto 2. e depois o ponto 3.). Pode ser conveniente tornar um pivô igual a 1 (ou até todos os pivôs) antes de completar o ponto 2., ou mesmo antes do ponto 2.
- Nos pontos 2. e 3. do MEG–J não se pode trocar linhas.
- O método de eliminação de Gauss–Jordan também pode ser usado na resolução de sistemas de equações lineares.

Proposição 1. *Seja A uma matriz $k \times n$ e sejam R e R' matrizes em forma canónica de escada de linhas obtidas a partir de A à custa de operações elementares. Então $R = R'$.*

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em
Thomas Yuster, "The Reduced Row Echelon Form of a Matrix is Unique: A Simple Proof", Mathematics Magazine, Vol. 57, No. 2 (Mar., 1984), pp. 93-94.

A forma canónica de escada de linhas ou **a forma reduzida de escada de linhas duma matriz** A é a matriz em forma canónica de escada de linhas que se obtém de A à custa de operações elementares.

No exemplo anterior, a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a forma reduzida de escada de linhas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

A partir de uma mesma matriz A, e à custa de operações elementares, podem-se obter diferentes matrizes em escada de linhas mas somente uma **única** matriz em forma canónica de escada de linhas.

Comentários

- **P:** Como resolver um sistema de equações lineares?

  R: Usando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss–Jordan.

- **P:** Como apresentar a solução de um sistema de equações lineares?

  R: Apresenta-se abaixo um exemplo de várias possibilidades de escrever a solução geral de um sistema de equações lineares (supõe-se que neste exemplo as variáveis são x, y, z e w e que o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 2):

  a) $\{(-z, -z-w, z, w) \,:\, z, w \in \mathbb{R}\}$

  b) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = -z \wedge y = -z - w\}$

  c) $\{(x, y, z, w) \,:\, x = -t \wedge y = -t - s \wedge z = t \wedge w = s \quad (t, s \in \mathbb{R})\}$

  d) $\{(-t, -t-s, t, s) \,:\, t, s \in \mathbb{R}\}$

4

Cálculo matricial

Adição e multiplicação por escalares

Definem-se seguidamente duas operações no conjunto $\mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes de tipo $k \times n$. [2]

Adição $(+)$

$$\begin{aligned} + : \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) \times \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) &\to \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\mapsto A + B \end{aligned}$$

Sendo $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, define-se $A + B = [c_{ij}]$ como a matriz $k \times n$ tal que $c_{ij} \overset{\text{def}}{=} a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 11 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & -1 \end{bmatrix} \qquad A+B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 15 & 0 \\ -3 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalares (mpe)

$$\begin{aligned} \text{mpe} : \mathbb{K} \times \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) &\to \mathbb{M}_{k\times n}(\mathbb{K}) \\ (\alpha, A) &\mapsto \alpha A \end{aligned}$$

Sendo $A = [a_{ij}]$, define-se $\alpha A = [c_{ij}]$ como a matriz $k \times n$ tal que $c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \alpha a_{ij}$.

[2] $\mathbb{K}$ designa $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ conforme as matrizes forem, respetivamente, reais ou complexas.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad 2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 8 & -4 \\ -6 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição e da multiplicação por escalares

Quaisquer que sejam as matrizes $A, B, C \in \mathbb{M}_{k\times n}$, tem-se:

i) $A + B = B + A$

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

iii) Existe um **elemento neutro** 0, i.e., qualquer que seja A,

$$A + 0 = A = 0 + A$$

iv) Todo o elemento $A \in \mathbb{M}_{k\times n}$ admite um **elemento simétrico** $-A \in \mathbb{M}_{k\times n}$, i.e.,

$$A + (-A) = 0 = (-A) + A$$

Quaisquer que sejam as matrizes $A, B \in \mathbb{M}_{k\times n}$ e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se:

i) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

ii) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

iii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

iv) $1A = A$

O elemento neutro da adição é único. O elemento neutro da adição é a matriz nula $[0]$ de tipo $k \times n$.
O elemento simétrico duma matriz $A = (a_{ij})$ é único. O simétrico de A é a matriz $-A = (-a_{ij})$.

Multiplicação de matrizes

Multiplicação duma matriz por um vetor coluna

Seja A uma matriz de tipo $k \times n$ e consideremos um vetor coluna

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{k1} \end{bmatrix}$$

de tipo $n \times 1$. Define-se o produto da matriz A e do vetor $\mathbf{b}$

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{k1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{i1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{k1} \end{bmatrix}$$

como a matriz coluna $A\mathbf{b} = [c_{i1}]_{i=1,\dots,k}$ de tipo $k \times 1$ tal que, para todos os valores dos índices $i = 1, \dots, k$, se tem

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1}.$$

Note que, para ser possível multiplicar as matrizes A e $\mathbf{b}$, o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de $\mathbf{b}$.

Exemplo

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

de tipo 2×3 e 3×1, respetivamente. A multiplicação destas duas matrizes é possível porque o número de colunas de A e o número de linhas de $\mathbf{b}$ coincidem.

O produto $A\mathbf{b}$ será então um vetor coluna de tipo 2×1 tal que

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ -37 \end{bmatrix}.$$

A <u>linha 1</u> de $A\mathbf{b}$ foi calculada usando <u>a linha 1 de A</u> e o vetor coluna $\mathbf{b}$ de acordo com

$$2 \times 7 + (-1) \times (-2) + 5 \times 1 = 21.$$

Analogamente, <u>a linha 2</u> de $A\mathbf{b}$ foi calculada usando <u>a linha 2 de A</u> e o vetor coluna $\mathbf{b}$, obtendo-se

$$-4 \times 7 + 6 \times (-2) + 3 \times 1 = -37.$$

Como pode ser facilmente verificado na expressão geral do produto $A\mathbf{b}$, o cálculo duma <u>linha i (genérica) da matriz $A\mathbf{b}$</u> faz-se usando também a <u>linha i da matriz A</u>.

Voltando à definição geral de $A\mathbf{b}$, ainda podemos exprimir o produto de outro modo:

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{ij} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{k1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k1}b_{11} + a_{k2}b_{21} + \cdots + a_{kn}b_{n1} \end{bmatrix}.$$

Temos então que

$$A\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{k1}b_{11} + a_{k2}b_{21} + \cdots + a_{kn}b_{n1} \end{bmatrix} = b_{11}\mathbf{c}_1 + b_{21}\mathbf{c}_2 + \cdots + b_{n1}\mathbf{c}_n,$$

onde $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ são as colunas de A.

Seja $A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$ uma matriz de tipo $k \times n$, designa-se por **combinação linear das colunas de** A qualquer vetor coluna da forma

$$\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{c}_n,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são escalares.

Podemos então concluir que:

$\downarrow$ ATENÇÃO $\downarrow$

O produto $A\mathbf{b}$ duma matriz A e dum vetor coluna $\mathbf{b}$ **é uma combinação linear das colunas da matriz** A.

Multiplicação de duas matrizes

Para ser possível multiplicar duas matrizes A e B, o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de $\mathbf{b}$.

Dadas matrizes A de tipo $k \times p$ e B de tipo $p \times n$, define-se o produto

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{il} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kl} & \dots & a_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{lj} & \dots & b_{ln} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

como a matriz $AB = [c_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$ de tipo $k \times n$ tal que, para todos os índices i, j, se tem

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{l=1}^{p} a_{il}b_{lj} \,.$$

O cálculo da entrada-(ij) da matriz AB faz-se multiplicando a linha i da matriz A pela coluna j da matriz B.

Exemplo

Consideremos as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

de tipo 2×3 e 3×3, respetivamente. A multiplicação destas duas matrizes é possível porque o número de colunas de A e o número de linhas de B coincidem. O produto AB será então a matriz de tipo 2×3

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -1 & -17 \\ -37 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

A <u>entrada-(11)</u> de AB foi calculada usando <u>a linha 1 de A</u> e a <u>coluna 1 de B</u> de acordo com

$$2 \times 7 + (-1) \times (-2) + 5 \times 1 = 21.$$

A <u>entrada-(12)</u> de AB foi calculada usando <u>a linha 1 de A</u> e a <u>coluna 2 de B</u> de acordo com

$$2 \times 0 + (-1) \times 1 + 5 \times 0 = -1.$$

A <u>entrada-(13)</u> de AB foi calculada usando <u>a linha 1 de A</u> e a <u>coluna 3 de B</u> de acordo com

$$2 \times (-1) + (-1) \times 0 + 5 \times (-3) = -17.$$

Analogamente, <u>a linha 2</u> de AB foi calculada usando <u>a linha 2 de A</u> e <u>todas as colunas de B</u>.

O produto AB de matrizes A de tipo $k \times p$ e B de tipo $p \times n$ pode ainda ser descrito por colunas como

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b_1} & | & A\mathbf{b_2} & | & \cdots & | & A\mathbf{b}_n \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n}$ são as colunas de B. Alternativamente, o produto AB pode ainda ser apresentado por linhas

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1}B \\ \mathbf{a_2}B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_kB \end{bmatrix},$$

sendo $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ são as linhas de A.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Quaisquer que sejam as matrizes A, B, C de tipos apropriados e os escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se:

i) $A(BC) = (AB)C$

ii)
$$(A+B)C = AC + BC$$
$$A(B+C) = AB + AC$$

iii) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

A multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa.

Por exemplo, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Sistemas de equações lineares e multiplicação de matrizes

Consideremos um sistema de k equações lineares a n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e designemos por A a matriz dos coeficientes (de tipo $k \times n$), por $\mathbf{b}$ o vetor coluna dos termos independentes e por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

o vetor coluna das variáveis. O SEL pode agora ser apresentado como a **equação matricial**

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

No caso de $\mathbf{b}$ ser o vetor coluna nulo, temos um SEL homogéneo que é representado pela equação

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Exemplo

O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+2z=2 \\ 2x+y-z=2 \end{cases}$$

é apresentado em notação matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Matriz transposta

Sendo A uma matriz de tipo $k \times n$, a **matriz transposta de** A, que se designa por A^T, é a matriz de tipo $n \times k$ definida por

$$A^T = [c_{ij}] \qquad \text{com} \qquad c_{ij} = a_{ji} \ .$$

Exemplo

A matriz transposta A^T da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} .$$

Propriedades da operação $\cdot^T : \mathbb{M}_{k\times n} \to \mathbb{M}_{n\times k}$

Proposição 2. *Quaisquer que sejam as matrizes A, B e o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, tem-se:*

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ *"a transposta da soma é a soma das transpostas"*

iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$

"a transposta do produto é o produto das transpostas por ordem contrária"

Uma matriz quadrada diz-se uma **matriz simétrica** se

$$A = A^T$$

ou, equivalentemente, se

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{para todos os índices } i, j.$$

Uma matriz quadrada A diz-se uma **matriz anti-simétrica** se

$$A = -A^T$$

ou, equivalentemente, se

$$a_{ij} = -a_{ji} \qquad \text{para todos os índices } i, j.$$

Exemplo

Considerem-se as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é simétrica e a matriz B é anti-simétrica.

Dada uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n, a **diagonal** da matriz A é constituída pelas n entradas a_{ii}, com $i = 1, \ldots, n$. Note que:

- A diagonal duma matriz anti-simétrica é nula, i.e., todas as entradas da diagonal são iguais a 0.

- A diagonal duma matriz simétrica "funciona como um espelho".
- Qualquer matriz A se pode escrever como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

5

Matriz inversa

Matriz inversa

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ diz-se uma **matriz diagonal** se todas as suas entradas a_{ij}, com $i \neq j$, são nulas. Por outras palavras, A é uma matriz diagonal se todas as suas entradas "fora" da diagonal são iguais a 0. Por exemplo, as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes diagonais.

A **matriz identidade de ordem** n, designada por I_n, é a matriz diagonal de ordem n em que todas as entradas da diagonal são iguais a 1. A matriz identidade poderá ser designada por I quando a sua ordem for aparente no contexto.

Proposição 3. *Seja A uma matriz de tipo $n \times k$ e seja B uma matriz $k \times n$. Então:*

i) $I_n A = A$.

ii) $B I_n = B$.

No conjunto $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas de ordem n, a multiplicação de quaisquer duas matrizes é sempre possível e o produto é ainda uma matriz quadrada de ordem n.

No conjunto $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas de ordem n, a matriz identidade I_n é o elemento neutro da multiplicação de matrizes: qualquer que seja a matriz A em $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$AI = A = IA\,.$$

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Uma matriz B diz-se **matriz inversa** de A se

$$AB = I = BA\,. \tag{1}$$

Note que, se a matriz B existir, B é uma matriz quadrada de ordem n.

Lema 1. *Se existir uma matriz B nas condições de (1), essa matriz é única.*

Demonstração. Suponhamos que B e C são matrizes inversas de A. Então

$$B(AC) = BI = B \qquad \text{e} \qquad (BA)C = IC = C.$$

Uma vez que a multiplicação de matrizes é associativa, tem-se $B(AC) = (BA)C$ e, consequentemente, $B = C$. □

Podemos assim designar por A^{-1} a (única) matriz inversa de A. A matriz A diz-se **invertível** ou **não singular** se admitir matriz inversa.

Alguns dos exemplos seguintes estão propositadamente incompletos para que o leitor possa fazer uma aplicação direta do conceito de matriz inversa.

Exemplos

- A matriz inversa $\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]^{-1}$ da matriz identidade de ordem 2 é

  ____

- $\left[\begin{smallmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{smallmatrix}\right]^{-1} = \left(2\left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right]\right)^{-1} =$ ________________________________

- Uma matriz com uma linha nula não é invertível porque ...

- Uma matriz com uma coluna nula não é invertível porque ...

- Seja A uma matriz invertível e consideremos um sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Multiplicando à esquerda ambos os membros da equação por A^{-1}, tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} &\Leftrightarrow (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow I\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

  Vemos assim que nestas condições o sistema de equações lineares é possível e determinado.

Cálculo da matriz inversa

Consideremos por exemplo a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, procuraremos determinar se a matriz A é invertível e, em caso afirmativo, calcular a sua inversa. Pretendemos então, se possível, determinar uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}$$

tal que $AB = I$ e $BA = I$.

Começando por analisar a equação $AB = I$, tem-se

$$A \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, teremos que resolver os dois sistemas

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que ambos os sistemas têm a mesma matriz dos coeficientes, resolvê-los-emos em simultâneo, usando o método de eliminação de Gauss–Jordan. Assim,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2+L_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1-2L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow[-1L_2]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Concluimos pois que a única matriz B que satisfaz $AB = I$ é

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para concluir que a matriz A é invertível e que a sua inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

basta verificar também se se tem $BA = I$, o que de facto acontece.

Em resumo, podemos descrever os cálculos que acabámos de fazer esquematicamente como:

1. Resolvemos os sistemas $AB = I$ usando o método de eliminação de Gauss–Jordan:

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & | & 1 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{MEG-J}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 1 & | & -1 & -1 \end{bmatrix} = [I|B]$$

2. Verificámos que $BA = I$.

3. Concluimos que $A^{-1} = B$.

O passo 2. acima pode ser evitado como mostra a proposição seguinte.

Proposição 4. *Sejam A, B matrizes quadradas de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Então $AB = I$ se e só se $BA = I$.*

Esta proposição será demonstrada adiante (cf. Proposição 7).

Finalmente, resumimos o procedimento geral para calcular a matriz inversa (se existir) duma matriz quadrada A de ordem n.

Reduz-se a matriz $[A|I]$ à matriz $[I|A^{-1}]$ usando o método de eliminação de Gauss–Jordan:

$$[A|I] \xrightarrow[\text{MEG-J}]{} [I|A^{-1}]$$

Propriedades da matriz inversa

Sendo A uma matriz quadrada de ordem k, define-se a potência de expoente n de A, com $n \in \mathbb{N}_0$, de acordo com o seguinte:

$$
\begin{aligned}
A^0 &= I_k \\
A^1 &= A \\
A^n &= AA^{n-1} \qquad\qquad (n \geq 2)
\end{aligned}
$$

Ou seja, quando n é um inteiro maior ou igual a 1, A^n é o produto de n fatores iguais a A:

$$A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n}$$

Proposição 5. *Sejam A e B matrizes invertíveis, seja α um escalar não nulo e seja $n \in \mathbb{N}_0$. Então as matrizes A^{-1}, AB, A^n, αA, A^T são invertíveis, e*

i) $(A^{-1})^{-1} = A$

ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iii) $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

iv) $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$

v) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ *("a inversa da transposta é a transposta da inversa")*

Demonstração. Demonstra-se apenas a propriedade ii). As demonstrações das outras afirmações ficam como exercício.

Calculando diretamente $(B^{-1}A^{-1})(AB)$ e atendendo a que a multiplicação é associativa, tem-se

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

A Proposição 4 garante agora que $B^{-1}A^{-1}$ é a matriz inversa de AB. □

6

Matrizes elementares

Matrizes elementares de ordem n

As **matrizes elementares de ordem** n são obtidas da matriz identidade à custa de uma única operação elementar. Seguidamente descrevem-se os três tipos diferentes de matrizes elementares.

Matrizes elementares de ordem n

- P_{ij}: matriz que resulta de I trocando a linha i com a linha j (sendo I a matriz identidade de ordem n e $i \neq j$)
- $E_{ij}(\alpha)$ (com $i \neq j$): matriz que resulta de I somando à linha i a linha j multiplicada por α
- $D_i(\alpha)$ (com $\alpha \neq 0$): matriz que resulta de I multiplicando a linha i por α

Nas figuras seguintes, apresentam-se exemplos dos diferentes tipos de matrizes elementares no caso particular de $i < j$. As linhas e as colunas i estão representadas a amarelo, e as linhas e as colunas j estão representadas a cinzento.

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{ij}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por matrizes elementares

Sendo A uma matriz $n \times p$, descrevem-se em seguida as matrizes que resultam de A após a multiplicação desta pelas matrizes elementares (à esquerda).

- $A' = P_{ij}A$

A' é a matriz que se obtém de A trocando a linha i com a linha j. Utilizando a notação já estabelecida, tem-se:

$$A \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} A' = P_{ij}A$$

- $A' = E_{ij}(\alpha)A$

  A' é a matriz que se obtém de A somando à linha i a linha j multiplicada por α. Ou seja,

$$A \xrightarrow[L_i + \alpha L_j]{} A' = E_{ij}(\alpha)A$$

- $A' = D_i(\alpha)A$

  A' é a matriz que se obtém de A multiplicando a linha i por α,

$$A \xrightarrow[\alpha L_i]{} A' = D_i(\alpha)A$$

Efetuar uma operação elementar sobre uma matriz A corresponde a multiplicar essa matriz à esquerda por uma matriz elementar específica. Na tabela abaixo apresenta-se a correspondência entre as operações elementares e a multiplicação pelas matrizes elementares.

"**Dicionário**"

Operação elementar	Multiplicação pela matriz elementar
$A \xrightarrow[L_i \leftrightarrow L_j]{} A'$	$P_{ij}A = A'$
$A \xrightarrow[L_i + \alpha L_j]{} A'$	$E_{ij}(\alpha)A = A'$
$A \xrightarrow[\alpha L_i]{} A'$	$D_i(\alpha)A = A'$

Exemplo

O cálculo da matriz inversa da matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
que fizémos na Secção 5 pode agora ser descrito usando a multiplicação por matrizes elementares. As operações elementares que efetuámos sobre a matriz $[A|I]$ correspondem a termos efetuado as seguintes multiplicações por matrizes elementares:

Operação elementar	Multiplicação pela matriz elementar
$L_2 + L_1$	$[E_{21}(1)A \mid E_{21}(1)I]$
$L_1 + (-1)L_2$	$[E_{12}(-1)E_{21}(1)A \mid E_{12}(-1)E_{21}(1)I]$
$(-1)L_2$	$[D_2(-1)E_{12}(-1)E_{21}(1)A \mid D_2(-1)E_{12}(-1)E_{21}(1)I]$

Obteve-se deste modo
$$D_2(-1)E_{12}(-1)E_{21}(1)A = I \qquad D_2(-1)E_{12}(-1)E_{21}(1)I = A^{-1}$$
(cf. Secção 5). Assim, a matriz A^{-1} é o produto de matrizes elementares
$$A^{-1} = D_2(-1)E_{12}(-1)E_{21}(1).$$

Matrizes inversas das matrizes elementares

As matrizes elementares são invertíveis e as suas matrizes inversas são matrizes elementares do mesmo género. Não é difícil verificar que:

Matrizes inversas das matrizes elementares

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

$$E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

$$(D_i(\alpha))^{-1} = D_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

Proposição 6. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz A é invertível se e só se* $\operatorname{car} A = n$.

Demonstração. Temos que demonstrar as duas implicações

$$\operatorname{car} A = n \Rightarrow A \text{ é invertível}$$

e

$$A \text{ é invertível} \Rightarrow \operatorname{car} A = n.$$

Comecemos por demonstrar a primeira. Dada uma matriz quadrada A de ordem n, podemos reduzi-la à sua forma canónica de escada de linhas R usando um certo número finito k de operações elementares. Ou seja, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$E_1 E_2 \ldots E_{k-1} E_k A = R.$$

Como a característica de A é n, a matriz R é a matriz identidade I. Então

$$\begin{gathered} E_1^{-1}(E_1 E_2 \ldots E_{k-1} E_k A) = E_1^{-1} I \\ \Longleftrightarrow \\ (E_1^{-1} E_1) E_2 \ldots E_{k-1} E_k A = E_1^{-1} \\ \Longleftrightarrow \\ I E_2 \ldots E_{k-1} E_k A = E_1^{-1} \\ \Longleftrightarrow \\ E_2 \ldots E_{k-1} E_k A = E_1^{-1}. \end{gathered}$$

Multiplicando à direita ambos os membros da equação sucessivamente por $E_2^{-1}, \ldots, E_{k-1}^{-1}, E_k^{-1}$, obtém-se

$$A = E_k^{-1} E_{k-1}^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1}.$$

Verificamos assim que A é um produto de matrizes invertíveis. Usando a Proposição 5 ii), tem-se que A é invertível.

Resta agora provar a implicação:

$$A \text{ é invertível} \Rightarrow \operatorname{car} A = n$$

Provaremos a implicação equivalente:

$$\operatorname{car} A \neq n \Rightarrow A \text{ não é invertível}$$

Se $\operatorname{car} A < n$, a matriz R tem (pelo menos) uma linha nula. Suponhamos que existe uma matriz quadrada B de ordem n tal que $AB = I$ e $BA = I$. A igualdade $AB = I$ implica que

$$\underbrace{E_1E_2\ldots E_{k-1}E_kA}_{R}\,B = E_1E_2\ldots E_{k-1}E_k.$$

Como concluimos acima, a matriz $R = E_1E_2\ldots E_{k-1}E_kA$ tem uma linha nula e, portanto, o mesmo acontece com $E_1E_2\ldots E_{k-1}E_kAB$. Temos então que $E_1E_2\ldots E_{k-1}E_k$ tem uma linha nula. Resulta assim uma contradição já que se trata duma matriz invertível por ser um produto de matrizes invertíveis (cf. Proposição 5 ii)). Note que, como vimos na Secção 5, uma matriz com uma linha nula não é invertível. □

Demonstraremos agora a Proposição 4, cujo enunciado relembramos em seguida.

Proposição 7. *Sejam A, B matrizes quadradas de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Então $AB = I$ se e só se $BA = I$.*

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $AB = I$ e sejam $E_1, E_2, \ldots, E_k$ matrizes elementares tais que $E_1E_2\ldots E_kA$ é a forma canónica de escadas de linhas de A. A forma canónica de escada de linhas de A não pode ter qualquer linha nula. De facto, se essa matriz tivesse linhas nulas, como

$$E_1E_2\ldots E_kAB = E_1E_2\ldots E_kI,$$

a matriz $E_1E_2\ldots E_kI$ também teria, o que é impossível já que esta matriz é invertível por ser o produto de matrizes invertíveis (cf. Proposição 5 ii)). Concluimos assim que

$$\underbrace{E_1E_2\ldots E_kA}_{I}\,B = E_1E_2\ldots E_k.$$

Ou seja, a matriz B é um produto de matrizes invertíveis e, portanto, é invertível. Multiplicando à direita ambos os membros da igualdade $AB = I$ por B^{-1}, tem-se que

$$(AB)B^{-1} = IB^{-1} \quad\Longleftrightarrow\quad A = B^{-1}.$$

Resulta agora diretamente da definição de matriz inversa que $AB = BA = I$.

Trocando os papeis das matrizes A e B no raciocínio acima, analogamente se mostra que, se $BA = I$, então $AB = I$. □

Condições necessárias e suficientes de invertibilidade

Teorema 1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

i) *A é invertível.*

ii) $\operatorname{car} A = n$.

iii) *A é um produto de matrizes elementares.*

iv) *A pode ser transformada na matriz identidade à custa de operações elementares.*

v) *A forma reduzida de escada de linhas de A é a matriz identidade.*

vi) *O sistema de equações lineares homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admite apenas a solução trivial.*

vii) *Dada uma matriz coluna $\mathbf{b}$ de tipo $n \times 1$, o sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível e determinado.*

Demonstração. Mostraremos que

$$i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv) \Rightarrow v) \Rightarrow vi) \Rightarrow vii) \Rightarrow i).$$

A equivalência entre *i)* e *ii)* já foi demonstrada (cf. Proposição 6).

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sendo R a forma canónica de escada de linhas de A, existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que $E_1E_2\ldots E_kA = R$.

Como por definição $\operatorname{car} A = \operatorname{car} R$, tem-se que $\operatorname{car} R = n$. Então $R = I$ e $E_1E_2\ldots E_kA = I$. Multiplicando à esquerda ambos os membros desta igualdade sucessivamente por ${E_1}^{-1}, {E_2}^{-1}, \ldots, {E_k}^{-1}$, tem-se

$$A = {E_k}^{-1} \cdots {E_2}^{-1}{E_1}^{-1},$$

donde se conclui que A é um produto de matrizes elementares.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Se A é um produto de matrizes elementares, então A é um produto de matrizes invertíveis e, portanto, invertível também (cf. Proposição 5). Nestas condições, a Proposição 6 garante que $\operatorname{car} A = n$, donde se conclui que a forma canónica de escada de linhas de A é a matriz identidade, como pretendíamos.

iv) $\Rightarrow$ *v)* Esta implicação é óbvia (trata-se mesmo de uma equivalência).

v) $\Rightarrow$ *vi)* Se a forma reduzida de escada de linhas de A é a matriz identidade, então existem matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que

$$E_1 E_2 \ldots E_k A = I.$$

Multplicando à esquerda ambos os membros da equação $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ por $E_1 E_2 \ldots E_k$, tem-se

$$\underbrace{E_1 E_2 \ldots E_k A}_{I} \mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

vi) $\Rightarrow$ *vii)* Começaremos por ver que, qualquer que seja o vetor coluna $\mathbf{b}$, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível.

Suponhamos contrariamente que existia $\mathbf{b}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é impossível. Então ter-se-ia car $A < n$ e, consequentemente, o sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seria indeterminado, o que contradiria a hipótese.

Vejamos agora que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é determinado. Suponhamos que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ são soluções $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Então

$$A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}.$$

Como por hipótese o sistema homogéneo só admite a solução trivial, concluimos que

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2.$$

vii) $\Rightarrow$ *i)* Queremos agora provar que A é invertível, ou seja, queremos provar que existe uma matriz B tal que $AB = I$ (cf. Proposição 7). Por outras palavras, pretende-se mostrar que os n sistemas abaixo são possíveis [3] :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots \qquad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A afirmação *vii)* garante precisamente que os sistemas da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ são possíveis (e determinados). Como os sistemas anteriores são um caso particular dos sistemas da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, conclui-se que são possíveis e que, portanto, A é invertível. $\square$

[3] Note que, se os n sistemas forem simultaneamente possíveis, então são necessariamente determinados, dada a unicidade da matriz inversa.

7 Determinantes: axiomática e cálculo

A função **determinante**

$$\begin{aligned} \det : \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ A &\mapsto \det A \end{aligned}$$

é a função que satisfaz os axiomas seguintes:

i) $\det I = 1$

ii) $\det(P_{ij}A) = -\det A$ (com $i \neq j$)

iii) Qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\det \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha L \\ \vdots \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} \vdots \\ L \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + L_i' \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i' \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

onde L, L_i, L_i' são linhas das matrizes. (Note que α pode ser 0.)

Prova-se que existe uma única função que satisfaz os axiomas acima.

O determinante duma matriz A também pode ser designado por $|A|$.

Exemplo

Cálculo do determinante duma matriz 1×1 e duma matriz diagonal.

1. $\det[a] = a \det[1] = a1 = a$ (usámos o Axioma iii)).

2. Após uma aplicação repetida do Axioma iii) obtém-se

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando o Axioma i), tem-se

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} \det I \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}1 \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn} \end{aligned}$$

Proposição 8.

i) *Uma matriz com duas linhas iguais tem determinante nulo.*

ii) *O determinante de uma matriz com uma linha nula é igual a 0.*

iii) *O determinante de uma matriz não se altera se somarmos a uma linha outra linha multiplicada por um escalar.*

Demonstração. i) Sendo A uma matriz com a linha i igual à linha j (com $i \neq j$), tem-se que $A = P_{ij}A$ e, consequentemente,

$$\det A = \det(P_{ij}A).$$

Por outro lado, o Axioma ii) garante que $\det(P_{ij}A) = -\det A$. Tem-se então que

$$\det A = \det(P_{ij}A) = -\det A$$

e que, portanto,

$$\det A = -\det A \Leftrightarrow 2\det A = 0 \Leftrightarrow \det A = 0.$$

ii) Seja L_i a linha nula da matriz A e seja A' a matriz que se obtém de A multiplicando a linha L_i por $\alpha = 0$. Usando o Axioma iii), tem-se

$$\det A = \det A' = \alpha \det A = 0 \det A = 0.$$

iii) Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

Usando o Axioma iii), obtém-se

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i + \alpha L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ \alpha L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \alpha \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Atendendo a que a última matriz tem duas linhas iguais, a afirmação i) deste teorema conduz a que

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i+\alpha L_j \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{i-1} \\ L_i \\ L_{i+1} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + 0 = \det A$$

□

Cálculo do determinante duma matriz triangular superior

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n diz-se uma **matriz triangular superior** se, quaisquer que sejam $i, j = 1, \ldots, n$ com $i > j$, se tem $a_{ij} = 0$.

Sendo A uma matriz triangular superior, dois casos podem ocorrer:

1. A matriz A tem todas as entradas da diagonal diferentes de 0.
2. A matriz A tem alguma entrada nula na diagonal.

No primeiro caso, usando apenas operações elementares em que se substitui uma linha L_i por $L_i + \alpha L_j$ (com $i \neq j$ e $\alpha \neq 0$), o método de eliminação de Gauss–Jordan dá origem a uma matriz diagonal (a forma canónica de escadas de linhas de A). Isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{MEG-J}]{} \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando agora a Proposição 8 iii), temos

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

No segundo caso, seja a_{kk} a primeira entrada nula da diagonal, a contar de baixo. Usando o método de eliminação de Gauss–Jordan e as entradas

$a_{nn}, \ldots, a_{k+1,k+1}$, é possível transformar a linha k da matriz numa linha nula. Ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{MEG-J}]{}$$

$$\xrightarrow[\text{MEG-J}]{} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Atendendo a que, mais uma vez, só se utilizaram operações elementares em que se substituiu uma linha L_i por $L_i + \alpha L_j$ (com $i \neq j$ e $\alpha \neq 0$), pela Proposição 8 $\mathrm{iii})$ tem-se

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = 0.$$

Concluimos assim que o determinante duma matriz triangular superior é igual ao produto das entradas da diagonal.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Os axiomas da função determinante conjuntamente com a Proposição 8 esclarecem completamente como as operações elementares alteram o determinante. Além disso,

Qualquer forma de escada de linhas de uma matriz quadrada $n \times n$ é uma matriz triangular superior. (Se a matriz tiver característica n, a sua forma reduzida de escada de linhas é uma matriz diagonal.)

Assim, possuimos agora toda a informação necessária para calcular o determinante de qualquer matriz quadrada. Vamos agora fazer o cálculo do determinante num exemplo concreto.

Exemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{|B|} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) = 6.$$

Note que a matriz A resulta da matriz B após a multiplicação da linha 1 de B por 3 (cf. Axioma iii)).

Cálculo do determinante duma matriz A

1. Reduz-se a matriz A a uma matriz triangular superior A' usando o MEG.
2. Calcula-se o determinante de A à custa do cálculo do determinante A', tendo em conta como as operações elementares efetuadas alteraram o determinante.

Cálculo do determinante duma matriz 2×2

Sendo A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

consideremos separadamente os casos $a \neq 0$ e $a = 0$.

- $a \neq 0$

  Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow[L2 - \frac{c}{a}L_1]{} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{bmatrix},$$

  donde se conclui que

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{c}{a}b \end{vmatrix} = ad - bc.$$

- $a = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix},$$

  donde se conclui que

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & b \end{vmatrix} = cb = ad - bc.$$

Em resumo, o determinante duma matriz quadrada A de ordem 2 é:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

8 Determinantes, invertibilidade e fórmula de Laplace

Determinante e invertibilidade

Determinantes das matrizes elementares

Os determinantes das matrizes elementares calculam-se sem dificuldade usando os resultados da Secção 7.

- $\det P_{ij} = -1$ (P_{ij} resulta da matriz identidade trocando duas linhas; cf. Axioma ii))
- $\det E_{ij}(\alpha) = 1$ (cf. Proposição 8 iii))
- $\det D_i(\alpha) = \alpha$ (cf. ax. 3)

Quando se multiplica uma matriz A à esquerda por uma matriz elementar E obtém-se a matriz EA cujo determinante se calcula imediatamente relembrando como as operações elementares modificam o determinante. Temos assim

$$|P_{ij}A| = -|A| \qquad |E_{ij}(\alpha)A| = |A| \qquad |D(\alpha)A| = \alpha|A|\,.$$

Podemos pois concluir que:

Proposição 9. *Seja A uma matriz de ordem n e seja E uma matriz elementar da mesma ordem. Então*

$$|EA| = |E||A|$$

Teorema 2. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

i) *A é invertível.*

ii) $|A| \neq 0$.

Demonstração. i) $\Rightarrow$ ii) Suponhamos que A é invertível. O Teorema 1 assegura que existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$ tais que

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k.$$

Então, usando a Proposição 9, tem-se

$$|A| = |E_1||E_2| \cdots |E_k|$$

e, sendo o determinante de cada uma das matrizes elementares diferente de zero, resulta que $|A| \neq 0$.

ii) $\Rightarrow$ i) Demonstraremos a afirmação equivalente:

$$A \text{ não é invertível} \Rightarrow |A| = 0$$

Suponhamos então que A não é invertível. O Teorema 1 garante que a forma reduzida de escada de linhas R da matriz A tem uma linha nula. Ou seja, existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_m$ tais que

$$E_1 E_2 \cdots E_m A = R,$$

donde, aplicando a Proposição 9 e a Proposição 8, se conclui que

$$|E_1||E_2| \cdots |E_m||A| = |R| = 0.$$

Como os determinantes das matrizes elementares são diferentes de zero, tem-se finalmente que $|A| = 0$. $\square$

Obtivémos assim uma condição necessária e suficiente de invertibilidade duma matriz expressa em termos do determinante que pode ser agora acrescentada ao teorema da Secção 6.

Teorema 3. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As afirmações seguintes são equivalentes.*

i) *A é invertível.*

ii) $\operatorname{car} A = n$.

iii) *A é um produto de matrizes elementares.*

iv) *A pode ser transformada na matriz identidade à custa de operações elementares.*

v) *A forma reduzida de escada de linhas de A é a matriz identidade.*

vi) *O sistema de equações lineares homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ admite apenas a solução trivial.*

vii) *Dada uma matriz coluna $\mathbf{b}$ de tipo $n \times 1$, o sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível e determinado.*

viii) $|A| \neq 0$.

Proposição 10. *Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Então*

$$|AB| = |A||B|.$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que A é invertível e que, portanto, existem matrizes elementares $E_1, \dots, E_m$ tais que $A = E_1 E_2 \cdots E_m$ (cf. Teorema 3). Então, aplicando a Proposição 9, tem-se

$$\begin{aligned} |AB| &= |E_1 E_2 \cdots E_m B| \\ &= |E_1||E_2 \cdots E_m B| \\ &= |E_1||E_2| \cdots |E_m||B| \\ &= |E_1 E_2 \cdots E_m||B| \\ &= |A||B|. \end{aligned}$$

Se A não for invertível, então a forma reduzida de escada de linhas R da matriz A tem uma linha nula (cf. Teorema 3). Existem assim matrizes elementares $E_1, \dots, E_r$ tais que

$$|E_1 E_2 \cdots E_r AB| = |RB| = 0,$$

uma vez que a matriz RB tem uma linha nula (cf. Proposição 8 ii)). Aplicando agora a Proposição 9,

$$|E_1 E_2 \cdots E_r AB| = \underbrace{|E_1||E_2| \cdots |E_r|}_{\neq 0} |AB| = 0.$$

Atendendo a que $|A| = 0$ (cf. Teorema 3), conclui-se que

$$0 = |AB| = |A||B|.$$

□

Corolário 1. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n invertível. Então*

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}\,.$$

Demonstração. Usando a Proposição 10,

$$|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|,$$

donde se conclui que

$$1 = |I| = |AA^{-1}| = |A||A^{-1}| \iff |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}\,.$$

□

Lema 2. *Seja E uma matriz elementar de ordem n. Então $|E^T| = |E|$.*

Demonstração. Se E for uma matriz elementar P_{ij} oue $D_i(\alpha)$, como estas matrizes são simétricas, o resultado é imediato. Quanto às matrizes $E_{ij}(\alpha)$, tem-se

$$E_{ij}(\alpha)^T = E_{ji}(\alpha)$$

e, portanto,

$$|E_{ij}(\alpha)^T| = |E_{ji}(\alpha)| = 1 = E_{ij}(\alpha).$$

□

Proposição 11. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então*

$$|A^T| = |A|.$$

Demonstração. Se A for invertível, então existem matrizes elementares $E_1, \ldots, E_m$ tais que $A = E_1E_2\cdots E_m$ (cf. Teorema 3). Então, aplicando a Proposição

10 e o Lema 2, tem-se

$$\begin{aligned}
|A^T| &= |(E_1E_2\cdots E_m)^T| \\
&= |E_m^T \cdots E_2^T E_1^T| \\
&= |E_m^T|\cdots|E_2^T||E_1^T| \\
&= |E_m|\cdots|E_2||E_1| \\
&= |E_1||E_2|\cdots|E_m| \\
&= |E_1E_2\cdots E_m| \\
&= |A|.
\end{aligned}$$

No caso em que A não é invertivel, a matriz A^T também não é invertivel (cf. Proposição 2 i) e Proposição 5 v)). Assim, aplicando o Teorema 3 viii), tem-se

$$|A^T| = 0 = |A|.$$

□

Uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n diz-se uma **matriz triangular inferior** se, quaisquer que sejam $i, j = 1, \ldots, n$ com $i < j$, se tem $a_{ij} = 0$.

Atendendo a que uma matriz triangular inferior é a matriz transposta duma matriz triangular superior, obtemos a seguinte consequência da alínea iii) desta proposição:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz triangular inferior A. Então

$$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

A igualdade entre o determinante duma matriz e o determinante da sua matriz transposta permite ainda uma versão "em termos de colunas" das propriedades do determinante (compare com a Proposição 8).

Proposição 12.

i) Uma matriz com duas colunas iguais tem determinante nulo.

ii) O determinante de uma matriz com uma coluna nula é igual a 0.

Fórmula de Laplace

Sendo A uma matriz quadrada de ordem n e $i, k = 1, \ldots, n$, definem-se:

Submatriz A_{ik}: matriz quadrada de ordem $n-1$ que se obtém a partir de A retirando a linha i e a coluna k.

Menor-(ik):

$$M_{ik} = \det A_{ik}$$

Cofator-(ik):

$$C_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

Dada uma matriz quadrada A de ordem n e fixando uma qualquer linha i de A, pode demonstrar-se que o determinante de A se obtém de acordo com a fórmula seguinte:

Fórmula de Laplace com expansão na linha i

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_{ik}$$

Exemplo

Calculemos o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

usando a fórmula de Laplace com expansão na linha 3. De acordo com a fórmula, tem-se:

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} \\ &= 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 + -3(1 \times (-1) - 2 \times 3) + 0 \\ &= 21 \end{aligned}$$

Também existe uma fórmula para o cálculo do determinante duma matriz A de ordem n expressa em termos de colunas. Dada uma qualquer coluna k de A, tem-se:

Fórmula de Laplace com expansão na coluna k

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} C_{ik}$$

Exemplo

Calculemos agora o determinante da matriz do exemplo anterior usando a fórmula de Laplace com expansão na coluna 2.

$$\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} \\
&= 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 0 + 0 - 3 \times (1 \times (-1) - 2 \times 3) \\
&= 21
\end{aligned}$$

Os exemplos anteriores mostram que a escolha da linha ou da coluna é importante quando se calcula o determinante usando a fórmula de Laplace: a escolha justa da expansão pode permitir uma simplificação dos cálculos.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A **matriz dos cofatores** de A é a matriz definida por

$$\operatorname{cof} A = [C_{ik}]_{i,k=1,\dots,n}$$

e a **matriz adjunta** de A é a matriz definida por

$$\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T \ .$$

Lema 3. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então*

$$A \operatorname{adj} A = (\det A) I = (\operatorname{adj} A) A \ .$$

Proposição 13. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se $\det A \neq 0$, então*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \quad .$$