MIEIC
Álgebra
1º Módulo

Matrizes

+
DETERMINANTES
+
CARACTERÍSTICA

Definição: Matriz do tipo $m \times n$, num corpo Ω

A matriz $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ $(i=1,2,\ldots,m\,;\, j=1,2,\ldots,n)$, ou $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$, do tipo $m \times n$ (m por n), num corpo Ω, é um quadro rectangular com m linhas e n colunas em que os seus elementos a_{ij} são escalares de Ω, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{Linha 1} \\ \\ \leftarrow \text{Linha 3} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & \uparrow \text{coluna 2} & & & \end{array} & \end{array}$$

3ª L
1ª C

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

2x3 Retangular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & -20 \end{bmatrix}$$

"3x3"
quadrada

- Se $m = 1$, a matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $1 \times n$ é denominada por *matriz-linha*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Se $n = 1$, a matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times 1$ é designada por *matriz-coluna*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Chama-se *matriz nula* ou *matriz zero*, a matriz $\boldsymbol{O} = (o_{ij})$ cujos elementos são todos iguais a zero; se $\boldsymbol{O}$ for do tipo $m \times n$, verifica-se

$$o_{ij} = 0 \quad (i{=}1,2,\ldots,m\ ;\ j{=}1,2,\ldots,n)$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Chama-se *matriz simétrica* de $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, sendo representada por $-\boldsymbol{A}$, a matriz cujos elementos são simétricos dos elementos de $\boldsymbol{A}$; se $\boldsymbol{A}$ for do tipo $m \times n$, então

$$-\boldsymbol{A} = (-a_{ij}) \quad (i{=}1,2,\ldots,m\ ;\ j{=}1,2,\ldots,n)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

- Se eliminarmos, na matriz $\boldsymbol{A}$, m-k linhas ($k<m$) e n-p colunas ($p<n$), obtém-se uma nova matriz $\boldsymbol{A}'$, do tipo $k\times p$, que é designada por *submatriz de* $\boldsymbol{A}$. Às linhas (colunas) da submatriz $\boldsymbol{A}'$ chamam-se *sublinhas* (*subcolunas*) de $\boldsymbol{A}$.

Exemplo 1: Seja a matriz do tipo 3×5

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

A matriz do tipo 2×3

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

Definição: Matriz transposta

Chama-se *matriz transposta* de $\boldsymbol{A}$, designando-se por $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, à matriz do tipo $n \times m$, no corpo Ω, que resulta da matriz $\boldsymbol{A}$ mudando, ordenadamente, as linhas para colunas e, portanto, as colunas para linhas.

Teorema: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz, num corpo Ω, do tipo $m \times n$. Então

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -20 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -20 \end{bmatrix}$$

Definição: Elementos homólogos

Chamam-se *elementos homólogos* nas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ aos elementos que se encontram situados na mesma linha e na mesma coluna, ou seja, que possuem índices iguais. Por exemplo, os elementos a_{23} e b_{23} das matrizes são elementos homólogos ($m \geq 2$ e $n \geq 3$).

Definição: Igualdade de matrizes

As matrizes $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ e $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ são iguais, ou seja, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, se e só se:

i) São matrizes do mesmo tipo $m \times n$;

ii) Os seus elementos homólogos são iguais entre si, isto é,

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i=1,2,\ldots,m \;;\; j=1,2,\ldots,n)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$a_{22} = b_{22}$

etc

Definição: Adição de matrizes

Sendo $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ e $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ matrizes do tipo $m \times n$, num corpo Ω, define-se a *matriz soma* de $\boldsymbol{A}$ com $\boldsymbol{B}$ como sendo a matriz $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ tal que

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,m \; ; \; j=1,2,\ldots,n)$$

ou seja, é a matriz cujos elementos são iguais à soma dos elementos homólogos das matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

- A adição de duas matrizes só é possível se as matrizes possuirem o mesmo número de linhas e de colunas.

Exemplo 3: Dadas as matrizes

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema: Sendo $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ matrizes do tipo $m \times n$, num corpo Ω, verifica-se:

a) *Propriedade comutativa*: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

b) *Propriedade associativa*: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

c) *Elemento neutro*: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

d) *Elemento simétrico*: $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

Definição: Subtracção de matrizes

Sendo $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ e $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ duas matrizes do tipo $m \times n$, num corpo Ω, define-se a *matriz subtracção* $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ da seguinte forma

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij})-(b_{ij})=(a_{ij}-b_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,m\ ;\ j=1,2,\ldots,n)$$

ou seja, é a matriz cujos elementos são obtidos a partir da subtracção dos elementos homólogos das matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes, num corpo Ω, do tipo $m \times n$. Então

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$$

Definição: Multiplicação de uma matriz por um escalar
Se $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ é uma matriz do tipo $m \times n$, num corpo Ω, e $k \in \Omega$, define-se a *matriz produto* $k\boldsymbol{A}$ como

$$k\boldsymbol{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij}) \quad (i=1,2,\ldots,m\ ;\ j=1,2,\ldots,n)$$

ou seja, é a matriz cujos elementos são iguais ao produto dos elementos de $\boldsymbol{A}$ pelo escalar k.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Teorema: Sendo $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes do tipo $m \times n$, num corpo Ω, e $x, y \in \Omega$, então:

a) *Propriedade associativa*: $x(y\boldsymbol{A}) = (xy)\boldsymbol{A} = y(x\boldsymbol{A})$.

b) *Propriedade distributiva em relação à adição de matrizes*:

$$x(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = x\boldsymbol{A} + x\boldsymbol{B}$$

c) *Propriedade distributiva em relação à adição de escalares*:

$$(x + y)\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{A} + y\boldsymbol{A}$$

d) *Elemento neutro*: $1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

- *Subtracção de matrizes*: $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} + (-1)\boldsymbol{B}$.

Teorema: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz, num corpo Ω, do tipo $m \times n$ e $k \in \Omega$. Então

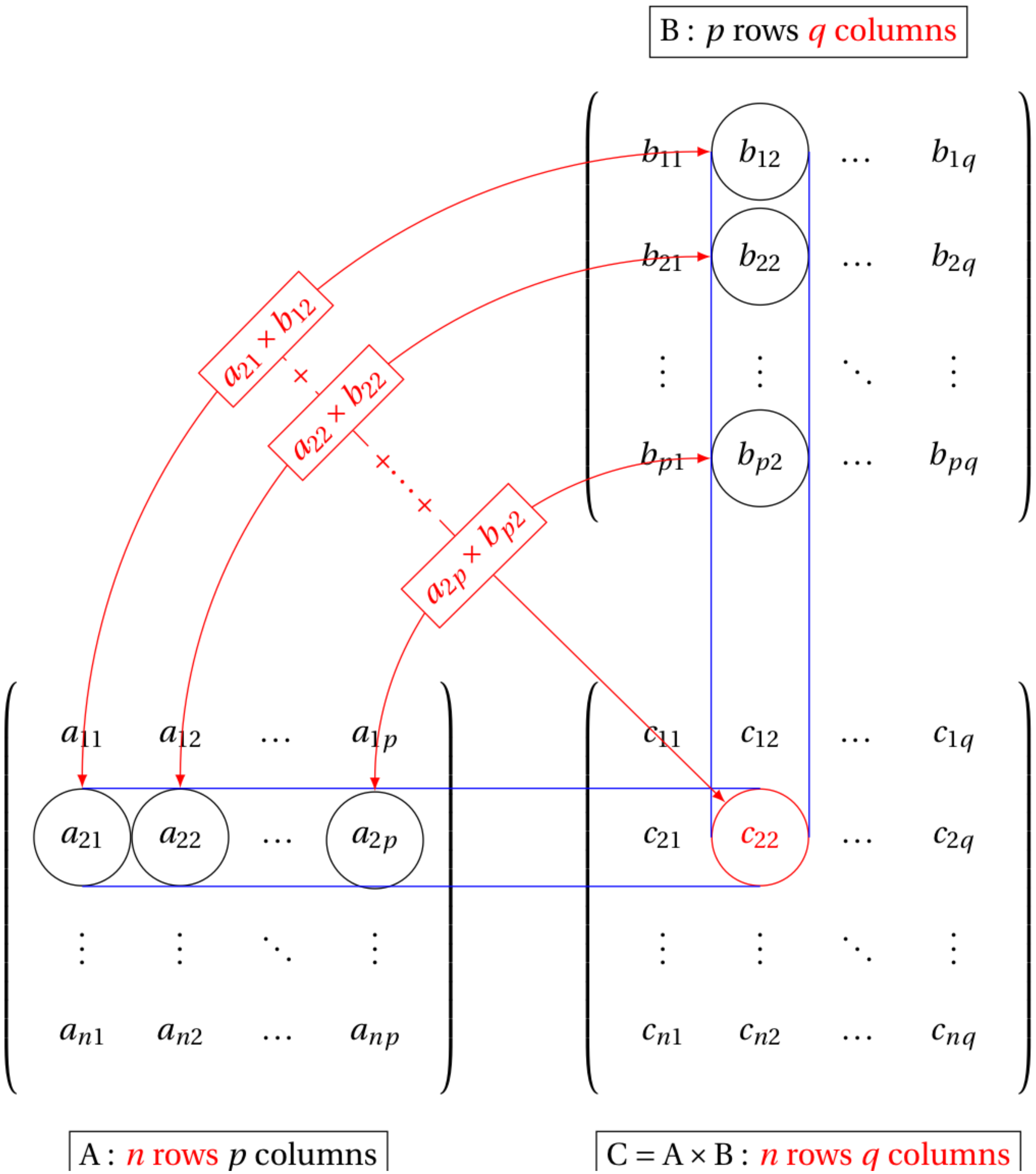
$$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

PRODUTO ESCALAR de 2 vetores

$$\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\-4\end{bmatrix}\boxed{}$$

$$4\times1+0\times2+5\times(-4)$$

$$=4+0-20=\underline{-16}$$


B : p rows q columns
a21 × b12
+
a22 × b22
+ … +
a2p × bp2
A : n rows p columns
C = A × B : n rows q columns

AB

B

4	−1
1	5
3	−4

A

1	0	2
3	4	5
0	−1	6

$4+6=10$	$-1-8=-9$
$12+4+15=31$	$-3+20-20=-3$
$-1+18=17$	$-5-20=-25$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 31 & -3 \\ 17 & -25 \end{bmatrix}$$

Definição: Multiplicação de matrizes

Sejam $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ uma matriz do tipo $m \times p$ e $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ uma matriz do tipo $p \times n$, ambas num mesmo corpo Ω, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,p} \text{ e } \boldsymbol{B} = \left(b_{ij}\right)_{i,j=1}^{p,n}$$

Então, o *produto da matriz* ***A*** *pela matriz* ***B*** é definido pela matriz $\boldsymbol{AB}$ do tipo $m \times n$, no corpo Ω, tal que

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$$

onde

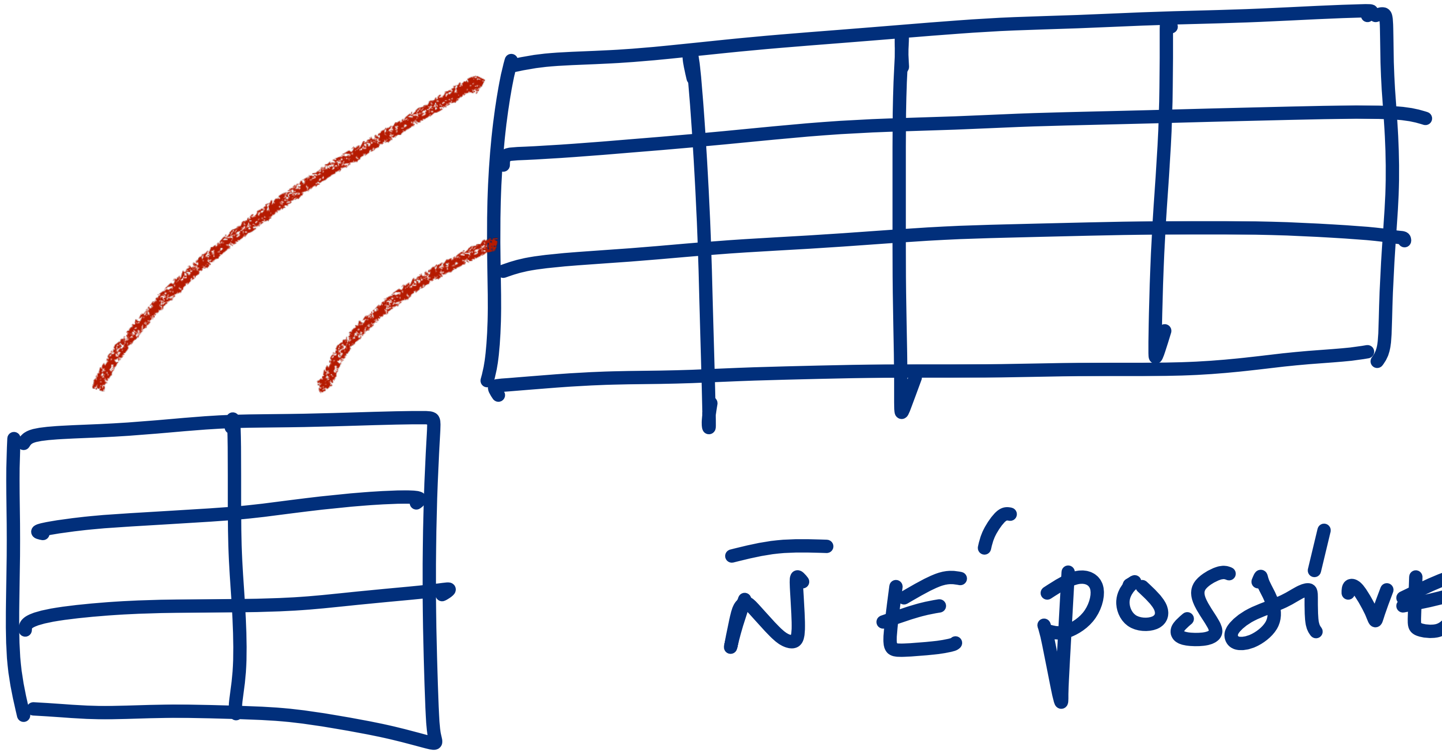
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad (i=1,2,\ldots,m\ ;\ j=1,2,\ldots,n)$$

- O produto de matrizes $\boldsymbol{AB}$ só será possível, se

  nº colunas (p) de $\boldsymbol{A}$ = nº linhas (p) de $\boldsymbol{B}$

- nº linhas (m) de $\boldsymbol{AB}$ = nº linhas (m) de $\boldsymbol{A}$.

- nº colunas (n) de $\boldsymbol{AB}$ = nº colunas (n) de $\boldsymbol{B}$.



N̄ É possível

- As três condições anteriores são traduzidas pela mnemónica

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\boldsymbol{AB} : & (m & \times & p) & (p & \times & n) & \rightarrow & (m & \times & n) \\
 & \downarrow & & \multicolumn{2}{c}{\uparrow \underline{\quad = \quad} \uparrow} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & \text{(ii)} & & \multicolumn{2}{c}{\text{(i)}} & & \text{(iii)} & & \text{(ii)} & & \text{(iii)}
\end{array}$$

- O produto de duas matrizes *não é*, em geral, *comutativo*; a existência do produto $\boldsymbol{AB}$ não implica a existência do produto $\boldsymbol{BA}$.

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ três matrizes, num corpo Ω, e $k \in \Omega$; admitindo que são possíveis todas as operações matriciais abaixo indicadas, então:

a) *Propriedade associativa*: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.

b) *Propriedade distributiva à direita em relação à adição*:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$$

c) *Propriedade distributiva à esquerda em relação à adição*:

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$$

d) *Propriedade homogénea*: $k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$.

- Notar que: $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ é **falso**:

  i) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$ é **verdadeiro**;

  ii) $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \vee \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$ é **falso**.

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{C}$ duas matrizes, num corpo Ω, tais que $\boldsymbol{A}$ é do tipo $m\times n$ e $\boldsymbol{C}$ é do tipo $n\times p$. Então

$$(\boldsymbol{AC})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$, sendo a matriz resultante do tipo $p\times m$

Definição: Matrizes comutativas ou permutáveis

Duas matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, num corpo Ω, dizem-se *comutativas* (comutam entre si) ou *permutáveis*, se for possível definir os produtos matriciais $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{BA}$ e se for verdadeira a relação

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$$

- Para que a igualdade $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ seja possível, as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ deverão ser matrizes quadradas e da mesma ordem.

MÉTODO DE GAUSS (-JORDAN)

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 1 \\
-x - y + z &= 1 \\
y - z &= 0
\end{aligned}
\qquad [A][X] = [B]
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & -1 & 0
\end{array}\right]
$$

Matriz Aumentada

OPERAÇÕES JACOBI

1) $x + y = 1 \Leftrightarrow 2x + 2y = 2$ MULT. POR $K \neq 0$

2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ TROCA DE EQUAÇÕES

3) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ $\times(-2)$ $+$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 - 3y = 2 \end{cases}$ somar a uma equação outra(s) mult. por $K \neq 0$

$y = -\frac{2}{3} \rightarrow x =$

Matriz de Gauss

Pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

elemento a "zerar"

Não serve como "pivot", trocar linhas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

1º $\rightarrow 2z = 2$

$\underline{z = 1}$

2º $y - (1) = 0 \rightarrow \underline{y = 1}$

3º $x + (1) + (1) = 1$

$\underline{x = -1}$

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

GAUSS-JORDAN

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \qquad [\, I \mid X \,]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \uparrow \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \uparrow$$

PIVOT 1°

2° PIVOT

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

X

MATRIZES QUADRADAS

Seja $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ (i=1,2,…,n ; j=1,2,…,n) a *matriz quadrada do tipo* $n \times n$, ou *de ordem n*, num corpo Ω,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Os elementos da matriz $\boldsymbol{A}$ que possuem os dois índices iguais, isto é, os elementos a_{ii} (i=1,2,…,n) são designados por *elementos principais*.

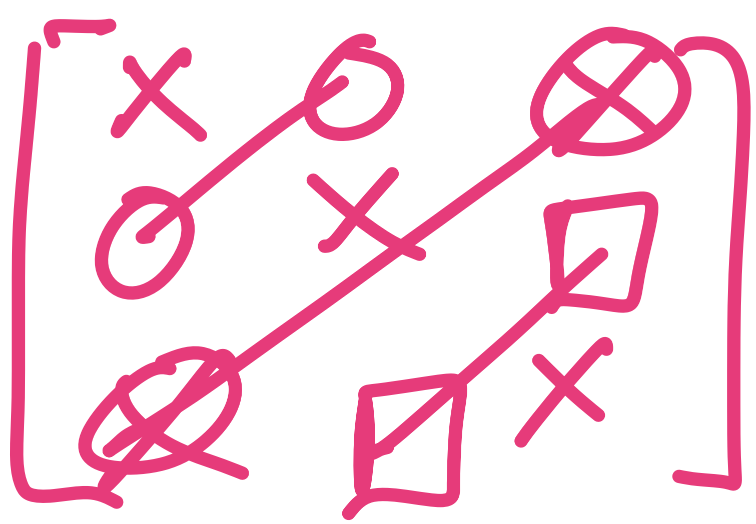
- A diagonal $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$ chama-se *diagonal principal*.

- A diagonal $(a_{12}, a_{23}, a_{34}, \ldots, a_{n-1,n})$, situada acima da diagonal principal, chama-se *diagonal superior*.

- A diagonal $(a_{21}, a_{32}, a_{43}, \ldots, a_{n,n-1})$, situada abaixo da diagonal principal, chama-se *diagonal inferior*.

- A diagonal $(a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n1})$ chama-se *diagonal secundária*.

- Os elementos a_{ij} e a_{ji}, com $i \neq j$, ocupando posições simétricas em relação à diagonal principal, chamam-se *elementos opostos*.



Definição: Traço de uma matriz quadrada

Chama-se *traço* de uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, designando-se por $tr(\boldsymbol{A})$, à soma dos seus elementos principais, isto é,

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes quadradas, num corpo Ω, de ordem n e $k \in \Omega$. Então:

a) $tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B})$.

b) $tr(k\boldsymbol{A}) = k\ tr(\boldsymbol{A})$.

c) $tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$.

d) $tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 2 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 3 \end{bmatrix}$$

$$tr\, A = 6$$

Definição: Matriz identidade
Designa-se por *matriz identidade* de ordem n, representando-se por $\boldsymbol{I}_n$, ou simplesmente por $\boldsymbol{I}$, a matriz quadrada em que os elementos principais tomam o valor 1, sendo nulos todos os seus restantes elementos, isto é,

$$\boldsymbol{I} = (i_{ij}) \;:\; i_{ij} = 1 \;,\; i = j \;\wedge\; i_{ij} = 0 \;,\; i \neq j$$

Exemplo 2: A matriz identidade de ordem 3 é

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A matriz $\boldsymbol{I}$ pode ser considerada o *elemento neutro* do produto de matrizes quadradas da mesma ordem; se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, obtém-se

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A}$$

Definição: Matriz escalar

A matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, chama-se *matriz escalar*, se todos os elementos principais forem iguais, sendo nulos todos os seus restantes elementos. Se $k \in \Omega$, então

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = k \ , \ i = j \ \wedge \ a_{ij} = 0 \ , \ i \neq j \ \Leftrightarrow \ \boldsymbol{A} = k\boldsymbol{I}$$

Exemplo 3:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\boldsymbol{I} \quad (k = -2)$$

- A matriz identidade, $\boldsymbol{I}$, é uma matriz escalar $(k = 1)$.

Definição: Matriz diagonal
A matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, chama-se *matriz diagonal*, se forem nulos todos os elementos situados fora da diagonal principal, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = 0 \ , \ i \neq j$$

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn})$$

Exemplo 4:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(-2, 0, 5)$$

- Qualquer matriz escalar é um caso particular de uma matriz diagonal, onde os elementos principais são todos idênticos entre si

Definição: Matriz triangular superior

Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, chama-se *matriz triangular superior*, se forem nulos todos os elementos situados abaixo da diagonal principal, isto é,

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = 0 \ , \ i > j$$

Exemplo 6:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Definição: Matriz triangular inferior

Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, chama-se *matriz triangular inferior*, se forem nulos todos os elementos situados acima da diagonal principal, isto é,

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \ : \ a_{ij} = 0 \ , \ i < j$$

Exemplo 8:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Definição: Matriz simétrica

Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, num corpo Ω, é uma *matriz simétrica*, se for igual à sua matriz transposta, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

Exemplo 11: A matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}$$

Teorema: Seja ***A*** uma matriz quadrada de ordem *n*, num corpo Ω. A matriz ***A*** é uma matriz simétrica, se e só se os seus elementos opostos são iguais, isto é,

$$a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad i \neq j$$

Teorema: Sejam as matrizes $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, num corpo Ω, tais que $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n e $\boldsymbol{B}$ é uma matriz do tipo $m \times n$. Então:

a) A matriz soma $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ é uma matriz simétrica de ordem n.

b) As matrizes produto $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ e $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ são matrizes simétricas de ordem n.

c) As matrizes produto $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ e $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ são matrizes simétricas; a matriz $\boldsymbol{F}$ é de ordem m, enquanto que a matriz $\boldsymbol{G}$ é de ordem n.

Definição: Inversa de uma matriz quadrada

Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem *n*, num corpo Ω, chama-se *matriz inversa* de $\boldsymbol{A}$, à matriz quadrada, de ordem *n*, $\boldsymbol{A}^{-1}$, tal que

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{I}$$

- É condição necessária, mas não suficiente, para que a matriz $\boldsymbol{A}$ seja *invertível*, ou tenha inversa, que seja uma *matriz quadrada*.

- Se existir matriz inversa, $\boldsymbol{A}^{-1}$, ela deverá ser única.

- À matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ que possui inversa chama-se *matriz não singular* ou *regular*; caso contrário, a matriz $\boldsymbol{A}$ designa-se por *matriz singular* ou *não regular*.

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ duas matrizes quadradas de ordem n, num corpo Ω, e não singulares. Então:

- **a**) $\boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I}$.
- **b**) $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.
- **c**) $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.
- **d**) $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$.

Cálculo da matriz inversa de uma matriz quadrada

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada, de ordem n e não singular.

- A determinação da matriz inversa de $\boldsymbol{A}$ é equivalente a resolver n sistemas, não homogéneos, de n equações lineares a n incógnitas cada um; o número total de incógnitas envolvido será igual a n^2, tantas quanto o número de elementos que constituem a matriz $\boldsymbol{A}^{-1}$.

- Será usado o *método de eliminação de Gauss-Jordan*.

Consideremos o caso particular $n = 3$; admitamos que $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem 3 e não singular

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Pretende-se obter uma matriz quadrada de ordem 3, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$, tal que

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A equação matricial anterior conduz a um conjunto de 3 sistemas de equações lineares não homogéneos, sendo cada um deles constituído por 3 equações a 3 incógnitas.

- Determinação da 1ª coluna da matriz ***B***:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=1 \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=0 \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} \end{array}\right]$$

- Determinação da 2ª coluna da matriz ***B***:

$$\begin{cases} a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=0 \\ a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}=1 \\ a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{32} \end{array}\right]$$

- Determinação da 3ª coluna da matriz ***B***:

$$\begin{cases} a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = 0 \\ a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 0 \\ a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{33} \end{array}\right]$$

- Os 3 sistemas de equações lineares possuem a mesma matriz de coeficientes das incógnitas (a matriz ***A***).

- A sua resolução pode ser feita, em simultâneo, utilizando três colunas distintas de termos independentes, que constituem os segundos membros de cada um dos 3 sistemas.

- Considerando a matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

aplicando o *método de eliminação de Gauss-Jordan* aos três sistemas de equações lineares

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

resulta

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]$$

em que

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}}$$

Exemplo 21: Pretende-se obter, se tal for possível, a matriz inversa de

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 & 0 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right]$$

check

$A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -4 & 2\\ -3 & 0 & 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{matrix}}\end{array}$$

$(\times 1/4)$

$= I$ ✓

Lei das potências inteiras

Definição: Potências inteiras positivas
Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, define-se as *potências inteiras positivas de* $\boldsymbol{A}$ do seguinte modo

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{k-1} = \boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{A} \quad \text{com} \quad k \geq 1$$

Por convenção, considera-se

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$$

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, então

$$\left(\boldsymbol{A}^k\right)^{\mathrm{T}} = \left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^k \quad \text{com} \quad k \geq 1$$

$A^2 = AA, \quad A^3 = AA^2 \quad \ldots$

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, e não singular, então:

a) $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{0} = \boldsymbol{I}$.

b) $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{k} = \left(\boldsymbol{A}^{k}\right)^{-1}$ com $k \geq 1$.

Definição: Potências inteiras negativas

Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, e não singular, define-se as *potências inteiras negativas de* $\boldsymbol{A}$ do seguinte modo

$$\boldsymbol{A}^{-k} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{k} \text{ com } k \geq 1$$

Matriz ortogonal

Definição: Matriz ortogonal
Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n, no corpo $\Omega = \mathbb{R}$ e não singular é uma *matriz ortogonal*, se a sua matriz inversa for igual à sua matriz transposta, isto é, se

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

Teorema: O produto de duas matrizes ortogonais de ordem n é ainda uma matriz ortogonal de ordem n.

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz ortogonal de ordem n, então:

i) O produto de qualquer matriz-linha (coluna) de $\boldsymbol{A}$ pela respectiva matriz transposta é igual a 1;

ii) O produto de qualquer matriz-linha (coluna) de $\boldsymbol{A}$ pela transposta de qualquer outra matriz-linha (coluna) é igual a 0.

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Matriz em Escada de Linhas

Consideremos uma matriz ***A*** do tipo $m \times n$, num corpo Ω; diz-se que a matriz ***A*** se encontra sob a forma de ***escada de linhas***, se verificar as seguintes condições:

1. Todas as linhas não nulas da matriz ***A*** deverão situar-se acima (com um índice de linha inferior) de qualquer linha nula que eventualmente possa existir na matriz.

2. Se o primeiro elemento (com o índice de coluna mais baixo) não nulo de uma linha não nula da matriz ***A*** se situar na coluna de índice k, então deverão ser nulos todos os elementos dessa mesma coluna k situados nas linhas da matriz colocadas abaixo daquela.

3. O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula da matriz ***A*** encontra-se sempre numa coluna à direita (com um índice de coluna superior) da coluna onde está posicionado o primeiro elemento não nulo de qualquer linha não nula situada acima daquela.

- A *matriz identidade* é uma matriz em escada de linhas.

- Qualquer *matriz escalar* que não seja nula é uma matriz em escada de linhas.

- As *matrizes diagonais* e as *matrizes triangulares superiores* poderão, ou não, ser matrizes em escada de linhas.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ é uma matriz em escada de linhas.

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ é uma matriz em escada de linhas.

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ não é uma matriz em escada de linhas.

Nota: A matriz não verifica as condições 2 e 3.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$ não é uma matriz em escada de linhas.

Nota: A matriz não verifica as condições 2 e 3.

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ não é uma matriz em escada de linhas:

Nota: A matriz não verifica a condição 1.

- ***Método da condensação da matriz***: consiste na transformação de uma qualquer matriz do tipo $m \times n$ numa matriz em escada de linhas, aplicando um conjunto de operações elementares às linhas e colunas da matriz.

- ***Operações de Jacobi***: as três operações elementares que servem de base a essa transformação são as seguintes:

  1. Troca de duas quaisquer filas paralelas (linhas/colunas) da matriz.

  2. Multiplicação de uma qualquer fila da matriz por um escalar não nulo.

  3. Adição a uma dada fila de uma outra fila paralela multiplicada por um escalar ou, de um modo mais geral, de uma combinação linear de filas paralelas.

Método da condensação da matriz: seja a matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & a_{3m} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & \boldsymbol{a_{mm}} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Usando as ***operações de Jacobi***, procede-se ao anulamento de todos os elementos da matriz $\boldsymbol{A}$ situados abaixo da diagonal formada pelos elementos $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{mm})$, ***operação de condensação da parte inferior da matriz***, transformando-a numa nova matriz $\boldsymbol{A}'$ do tipo $m \times n$ que, genericamente, tomará a forma

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & a'_{1,k+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & a'_{2,k+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} & a'_{k,k+1} & \cdots & a'_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \wedge \ a'_{ii} \neq 0 \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 6 & -11\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{r} \\ -2L_1+L_2\to \\ -L_1+L_3\to \end{array}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & -4 & 10\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{r} \\ \\ 2L_2+L_3\to \end{array}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{r} \\ -L_1+L_2\to \\ -2L_1+L_3\to \end{array}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & -3 & 5 & -8\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{r} \\ \\ 3L_2-2L_3\to \end{array}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -4 & 10\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{r}\\ 2\,L_1+L_2\rightarrow\\ 3\,L_1+L_3\rightarrow\end{array}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 3 & -2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{r}L_4\rightarrow\\ \\ \\ L_1\rightarrow\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2\\ 3 & -2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 4 & 3\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{r}\\ -2L_1+L_2\rightarrow\\ -3L_1+L_3\rightarrow\\ -3L_1+L_4\rightarrow\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & -5 & -5 & -3\\ 0 & -1 & -2 & -3\end{bmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \begin{array}{r}\\ \\ -5L_2+L_3\rightarrow\\ -L_2+L_4\rightarrow\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{r}\\ \\ L_4\rightarrow\\ L_3\rightarrow\end{array}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

Característica de uma Matriz

Definição: Característica de uma matriz do tipo *m*×*n*

Designa-se por *característica de uma matriz* $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$, representando-se por $r(\boldsymbol{A})$, o número máximo de linhas (ou colunas) linearmente independentes que existem nessa matriz.

Teorema: Dada uma matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$, verifica-se que

$$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = r(\boldsymbol{A})$$

- O processo de cálculo que será usado na obtenção da característica de uma matriz tem por base o ***método da condensação da matriz***, que permite, recorrendo às ***operações de Jacobi***, transformar uma qualquer matriz do tipo $m \times n$ numa *matriz em escada de linhas*.

- ***Operações de Jacobi***: são as três operações elementares seguintes:

  1. Troca de duas quaisquer filas paralelas (linhas/colunas) da matriz.

  2. Multiplicação de uma qualquer fila da matriz por um escalar não nulo.

  3. Adição a uma dada fila de uma outra fila paralela multiplicada por um escalar ou, de um modo mais geral, de uma combinação linear de filas paralelas.

Teorema: A característica de uma matriz $\boldsymbol{A}$ do tipo $m \times n$ não se altera, executando sobre as linhas da matriz qualquer uma das operações de Jacobi.

Teorema: As operações de Jacobi quando executadas sobre as linhas de uma matriz não alteram a característica das suas colunas. Da mesma forma, as operações de Jacobi quando executadas sobre as colunas de uma matriz não alteram a característica das suas linhas.

- O ***método da condensação da matriz*** não altera o valor da característica da matriz inicial; então

$$r(\boldsymbol{A}') = r(\boldsymbol{A})$$

Teorema: A característica de uma matriz em escada de linhas é igual ao número de linhas não nulas existentes na matriz.

Teorema: Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem n é uma matriz não singular ou regular, se e só se $r(\boldsymbol{A}) = n$.

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz triangular (superior ou inferior) de ordem n com todos os seus elementos principais não nulos, então $r(\boldsymbol{A}) = n$.

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz triangular (superior ou inferior) de ordem n em que, pelo menos, um dos elementos principais é nulo, então $r(\boldsymbol{A}) < n$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(\boldsymbol{A}) = 2$$

A matriz $\boldsymbol{A}$ é singular ($r(\boldsymbol{A}) < 3$).

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(\boldsymbol{B}) = 1$$

A matriz $\boldsymbol{B}$ é singular ($r(\boldsymbol{B}) < 3$).

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(\boldsymbol{D}) = 4$$

A matriz $\boldsymbol{D}$ é não singular ou regular.

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad r(\boldsymbol{C}) = 3$$

DETERMINANTES

Introdução

- A qualquer matriz quadrada é possível associar um escalar, que é designado por *determinante* da matriz.

- A noção de determinante pode ser utilizada na obtenção da *matriz inversa* de uma matriz quadrada não singular.

- A noção de determinante pode ainda ser aplicada na resolução de *sistemas de equações lineares*.

Definição

Seja a matriz quadrada ***A*** do tipo $n \times n$.

Definição: Determinante da matriz *A*

Designa-se por *determinante da matriz* ***A***, representando-se por $|\mathbf{A}|$ ou $\det\mathbf{A}$, o escalar cujo valor é dado pela soma dos *termos* distintos existentes na matriz, afectados dos respectivos sinais.

Definição: Termo da matriz *A*

Designa-se por *termo da matriz* ***A*** qualquer produto de n elementos da matriz, com um e um só elemento em cada linha e, da mesma forma, com um e um só elemento em cada coluna.

- Relativamente à matriz ***A*** do tipo $n \times n$ tem-se:

  i) O número total de termos distintos é igual a $n!$;

  ii) *Termo principal*: $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ (produto dos elementos principais);

  iii) *Termo secundário*: $a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\ldots a_{n1}$ (produto dos elementos da diagonal secundária);

  iv) É irrelevante a ordem pela qual os elementos se dispõem no termo;

  v) Dois termos só serão considerados distintos se não possuirem, na sua totalidade, elementos da matriz coincidentes.

Definição: Sinal de um termo da matriz *A*

Designa-se por *sinal de um termo* da matriz ***A***, o sinal de $(-1)^{\alpha}$, onde $\alpha = \alpha_l + \alpha_c$ e em que:

i) α_l é número de **inversões** dos índices das **linhas** no termo;

ii) α_c é número de **inversões** dos índices das **colunas** no termo.

Exemplo 1: A matriz de ordem 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

tem $2! = 2$ termos distintos:

$a_{11}a_{22}$ ou $a_{22}a_{11}$ (termo principal)

$a_{12}a_{21}$ ou $a_{21}a_{12}$ (termo secundário)

Termo	α_l	α_c	α	Sinal
$a_{11}a_{22}$	0	0	0	$+1$
$a_{12}a_{21}$	0	1	1	-1

Então

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Regra dos produtos cruzados:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Termo } (+) & & \text{Termo } (-) \\ |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & = & \begin{vmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{array}$$

Exemplo 2: A matriz de ordem 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

possui $3! = 6$ termos distintos:

$a_{11}a_{22}a_{33}$ (termo principal) ; $a_{21}a_{33}a_{12}$; $a_{31}a_{12}a_{23}$

$a_{11}a_{23}a_{32}$; $a_{21}a_{13}a_{32}$; $a_{31}a_{13}a_{22}$ (termo secundário)

O termo $a_{21}a_{33}a_{12}$ é equivalente a qualquer uma das formas seguintes:

$$a_{21}a_{12}a_{33} \quad , \quad a_{12}a_{21}a_{33} \quad , \quad a_{12}a_{33}a_{21} \quad , \quad a_{33}a_{12}a_{21} \quad , \quad a_{33}a_{21}a_{12}$$

Termo	α_l	α_c	α	Sinal
$a_{11}a_{22}a_{33}$	0	0	0	$+1$
$a_{21}a_{33}a_{12}$	2	1	3	-1
$a_{31}a_{12}a_{23}$	2	0	2	$+1$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	0	1	1	-1
$a_{21}a_{13}a_{32}$	1	1	2	$+1$
$a_{31}a_{13}a_{22}$	2	1	3	-1

Artigo 3º
Entidades elegíveis e participantes

Os Laboratórios Associados só podem ser constituídos por Unidade(s) de I&D que, no exercício de avaliação externa promovida pela FCT, IP. imediatamente anterior à apresentação da candidatura, tenham obtido a classificação de Muito Bom ou Excelente.

No caso de Unidades de I&D sem personalidade jurídica, a entidade participante é a instituição dotada de personalidade jurídica em que as mesmas se integrem.

–Manuel Macieira

Então

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23}) -$$

$$-(a_{31}a_{13}a_{22} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}\ a_{33}\ a_{12})$$

Regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

+

(−)

Exemplo 3: Recorrendo à **regra dos produtos cruzados**, o determinante da matriz quadrada de ordem 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

é

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 2 \times 4 = 15 - 8 = 7$$

Exemplo 4: Considerando a **regra de Sarrus**, o determinante da matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

é

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times 3\times 2 + 2\times 1\times 2 + 4\times 1\times 1 -$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$-(2\times 3\times 4 + 1\times 1\times 1 + 2\times 1\times 2) = 14 - 29 = -15$$

- O recurso à definição não é viável para calcular um determinante de ordem elevada; se $n = 4$ o número de termos a considerar é $4! = 24$ e para $n = 5$ esse número eleva-se a $5! = 120$.

- Não são conhecidas quaisquer regras práticas para determinar, de um modo simples e eficaz, o valor de um determinante de ordem $n > 3$.

- São analisados três *processos de cálculo* para obter o determinante de uma matriz quadrada:

1. **Método da condensação da matriz** – é um método semelhante ao que é utilizado na determinação da característica de uma matriz.

2. **Desenvolvimentos Laplaceanos**

   i) *Formulação geral*: transforma um determinante de ordem n numa soma de determinantes de ordem $p < n$;

   ii) *Formulação particular*: transforma um determinante de ordem n numa soma de n determinantes de ordem $n-1$.

3. **Método misto** – trata-se da aplicação combinada dos dois métodos anteriores, o que permite transformar, em cada fase do processo de cálculo, um determinante de uma dada ordem p num único determinante de ordem $p-1$.

Propriedades

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω.

Propriedade 1: Se a matriz $\boldsymbol{A}$ possuir uma fila (linha/coluna) nula, então

$$|\boldsymbol{A}| = 0$$

Exemplo 5: Relativamente à matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedade 2: Multiplicando os elementos de uma fila da matriz ***A*** por um escalar $\lambda \in \Omega$, obtém-se uma nova matriz ***B***, tal que

$$|\boldsymbol{B}| = \lambda |\boldsymbol{A}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad |A| = -2$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad |B| = 20 - 30 = -10$$

$$= 5|A|$$

Propriedade 3 – Multiplicando os elementos de m filas paralelas de $\boldsymbol{A}$, respectivamente, pelos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Omega$, obtém-se uma nova matriz $\boldsymbol{B}$, tal que

$$|\boldsymbol{B}| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m |\boldsymbol{A}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad |A| = -2$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad |2A| = 16 - 24 = -8$$

$$= 2 \times 2 \times |A|$$

Propriedade 4: O determinante da matriz $\boldsymbol{A}$ é igual ao determinante da sua matriz transposta, isto é,

$$|\boldsymbol{A}| = \left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriedade 5: Trocando, na matriz $\boldsymbol{A}$, duas filas paralelas, obtém-se uma nova matriz $\boldsymbol{B}$, tal que

$$|\boldsymbol{B}| = -|\boldsymbol{A}|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|B| = -|A| = 2$$

Propriedade 6: Se a matriz $\boldsymbol{A}$ tem filas paralelas iguais, então

$$|\boldsymbol{A}| = 0$$

Exemplo 10: Seja a matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedade 7: Se a matriz $\boldsymbol{A}$ tem duas filas paralelas proporcionais, então

$$|\boldsymbol{A}| = 0$$

Exemplo 11: Seja a matriz quadrada de ordem 3

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Propriedade 8: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz triangular (superior ou inferior), então o seu determinante é igual ao produto dos elementos principais da matriz (termo principal), isto é,

$$|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemplo 12:

$$|\boldsymbol{T}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2\times3\times6 + 0\times0\times3 + 0\times1\times4 -$$

$$-(3\times3\times0 + 4\times0\times2 + 6\times1\times0)$$

$$|\boldsymbol{T}| = 2\times3\times6 = 36$$

Propriedade 9: Substituindo, na matriz ***A***, os elementos da coluna de índice $g \leq n$ por somas de m parcelas, ou seja, considerando na matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a coluna de índice g como o resultado da soma das m parcelas

$$\begin{bmatrix} a_{1g} \\ a_{2g} \\ \vdots \\ a_{ng} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1g}^{(1)} \\ a_{2g}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{ng}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1g}^{(2)} \\ a_{2g}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{ng}^{(2)} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1g}^{(m)} \\ a_{2g}^{(m)} \\ \vdots \\ a_{ng}^{(m)} \end{bmatrix}$$

é possível reescrever a matriz ***A*** sob a forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g}^{(1)} + a_{1g}^{(2)} + \cdots + a_{1g}^{(m)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g}^{(1)} + a_{2g}^{(2)} + \cdots + a_{2g}^{(m)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng}^{(1)} + a_{ng}^{(2)} + \cdots + a_{ng}^{(m)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g}^{(1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g}^{(1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng}^{(1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g}^{(2)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g}^{(2)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng}^{(2)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots +
$$

$$
+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1g}^{(m)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2g}^{(m)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ng}^{(m)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

- Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes quadradas de ordem n, podemos ainda concluir que, em geral, se verifica

$$\left|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right| \neq \left|\boldsymbol{A}\right|+\left|\boldsymbol{B}\right|$$

ou seja, o determinante da matriz soma de duas matrizes não é necessariamente igual à soma dos determinantes de cada uma delas.

Propriedade 10: Adicionando a uma dada fila da matriz ***A***, uma combinação linear de filas paralelas, obtém-se uma nova matriz ***B***, tal que

$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|$$

Exemplo 14:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times3\times2+2\times1\times2+4\times1\times1-$$

$$-(2\times3\times4+1\times1\times1+2\times1\times2) = 14-29 = -15$$

Adicionemos à 1ª coluna da matriz, a 2ª coluna multiplicada por 2 e a 3ª coluna multiplicada por (-4). Obtém-se a matriz

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5)\times3\times2+4\times1\times2+(-2)\times1\times1-$$

$$-\left[2\times3\times(-2)+1\times1\times(-5)+2\times1\times4\right] = -24+9 = -15$$

Propriedade 11: As filas paralelas da matriz ***A*** são linearmente dependentes, se e só se

$$|\boldsymbol{A}| = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 3 & 12 & 0 \end{bmatrix}, \quad |A| = 0$$

Método da Condensação da Matriz

- O **método da condensação da matriz** permite transformar qualquer matriz quadrada ***A***, de ordem *n*, numa *matriz triangular superior*, ***T***, cujo determinante (ver Propriedade 8 dos determinantes) é

$$|\boldsymbol{T}| = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

- O valor de $|\boldsymbol{T}|$ pode ser relacionado com o determinante da matriz inicial $\boldsymbol{A}$, $|\boldsymbol{A}|$, desde que as **operações de Jacobi** sejam aplicadas tendo em atenção as propriedades dos determinantes. Assim:

1. Troca de duas quaisquer filas paralelas do determinante

   $\Rightarrow$ mudança de sinal no determinante (Propriedade 5)

2. Multiplicação de uma qualquer fila do determinante por um escalar λ não nulo

   $\Rightarrow$ o determinante resultante será igual ao produto de λ pelo determinante precedente (Propriedade 2)

3. Adição a uma dada fila do determinante de uma outra fila paralela multiplicada por um escalar ou, de um modo mais geral, de uma combinação linear de filas paralelas

   $\Rightarrow$ o valor do determinante não se altera (Propriedade 10)

Exemplo 16: Pretende-se calcular determinante

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

usando o *método da condensação da matriz*.

Solução:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow 3L_2 + L_3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{A}| = -15$$

Exemplo 17: Pretende-se obter o valor do determinante

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

usando o *método de condensação da matriz*.

Desenvolvimentos de Laplace ou Laplaceanos

- Neste caso o processo de cálculo de determinantes tem por base o **teorema de Laplace**; daí a designação de *desenvolvimentos de Laplace ou laplaceanos*.

Teorema: O determinante da matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, de ordem n, é igual à soma dos produtos que se obtêm multiplicando cada um dos elementos de uma dada fila da matriz pelos respectivos **cofactores**, isto é,

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} = a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + \ldots + a_{in}\boldsymbol{A}_{in}$$

se for adoptado um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da linha de índice i da matriz, e ainda

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} = a_{1j}\boldsymbol{A}_{1j} + a_{2j}\boldsymbol{A}_{2j} + \ldots + a_{nj}\boldsymbol{A}_{nj}$$

se for considerado um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da coluna de índice j (**teorema de Laplace**).

Definição: Cofactor do elemento a_{ij} da matriz *A*

Chama-se **cofactor** (ou **complemento algébrico**) do elemento a_{ij} da matriz ***A***, ao seu menor complementar afectado do respectivo sinal.

Definição: Menor complementar do elemento a_{ij} da matriz *A*

Seleccione-se, na matriz ***A***, a linha de índice *i* e a coluna de índice *j* e suprimam-se os elementos da matriz situados nessa linha e nessa coluna. Obtém-se uma submatriz quadrada de ***A***, de ordem *n*-1, cujo determinante, que se representa por

$$\left|\boldsymbol{A}(i;j)\right|$$

é designado por *menor complementar* do elemento a_{ij} da matriz ***A***.

Definição: Sinal do menor complementar do elemento a_{ij} da matriz *A*

Designa-se por *sinal do menor complementar* do elemento a_{ij} da matriz ***A***, o sinal de $(-1)^{\alpha}$, onde $\alpha = i + j$ é a soma dos índices da linha e da coluna que foi necessário suprimir na matriz ***A*** para que $\left|\boldsymbol{A}(i;j)\right|$ fosse obtido.

- Assim, o **cofactor** do elemento a_{ij} da matriz ***A*** tem o valor

$$\boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\left|\boldsymbol{A}(i;j)\right|$$

Exemplo 18: Determine-se o determinante

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

adoptando um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 2ª coluna.

Solução:

$$|\boldsymbol{A}| = a_{12}\boldsymbol{A}_{12} + a_{22}\boldsymbol{A}_{22} + a_{32}\boldsymbol{A}_{32} = (1)\boldsymbol{A}_{12} + (3)\boldsymbol{A}_{22} + (1)\boldsymbol{A}_{32}$$

Os cofactores são

$$\boldsymbol{A}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{A}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$\boldsymbol{A}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Então

$$|\boldsymbol{A}| = 1 \times 0 + 3 \times (-6) + 1 \times 3 = -18 + 3 = -15$$

Exemplo 19: Determine-se o determinante

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

considerando um *desenvolvimento laplaceano* ao longo da 1ª linha.

Solução:

$$|\boldsymbol{D}| = d_{11}\boldsymbol{D}_{11} + d_{12}\boldsymbol{D}_{12} + d_{13}\boldsymbol{D}_{13} + d_{14}\boldsymbol{D}_{14} = (3)\boldsymbol{D}_{11} + (2)\boldsymbol{D}_{12} + (4)\boldsymbol{D}_{13} + (3)\boldsymbol{D}_{14}$$

Os cofactores são

$$\boldsymbol{D}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 9 - (2 + 6 - 12) = 3 + 4 = 7$$

$$\boldsymbol{D}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -[4 + 12 + 9 - (2 + 12 + 18)] = -(25 - 32) = 7$$

$$\boldsymbol{D}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 6 + 3 - (-4 + 6 + 6) = 1 - 8 = -7$$

Cálculo do Determinante – Método Misto

- É um processo alternativo onde se procura optimizar a aplicação dos dois métodos atrás apresentados no cálculo de determinantes, combinando-os de um modo adequado.

- O **método da condensação da matriz** pode, em algumas situações, apresentar algumas dificuldades no cálculo de determinantes, particularmente quando o número de operações algébricas envolvidas for muito elevado.

- O **teorema de Laplace** é pouco eficiente se a ordem do determinante for elevada. Se considerarmos um determinante de ordem 5:

  i) A aplicação do teorema de Laplace permite, no caso mais geral, transformar o determinante dado numa soma de 5 determinantes de ordem 4;

  ii) Recorrendo ainda ao teorema de Laplace é possível desdobrar cada um dos determinantes de ordem 4 numa soma de 4 determinantes de ordem 3;

  iii) Os 20 determinantes de ordem 3 encontrados são resolvidos através da **regra de Sarrus**.

- O **método misto** é um processo de cálculo de um determinante que assenta nas seguintes operações:

  1) Selecciona-se uma dada fila (linha/coluna) no determinante;

  2) Aplica-se o **método da condensação da matriz** à fila escolhida, anulando-se todos os elementos situados nessa fila à excepção, como é óbvio, de um deles;

  3) Adopta-se um desenvolvimento laplaceano ao longo dessa fila (**teorema de Laplace**), resultando um único determinante de ordem imediatamente inferior à do determinante anterior.

- O **método misto** permite obter, após sucessivos **abaixamentos de ordem**, um único determinante de ordem 3, cuja solução pode ser determinada através da **regra de Sarrus**.

Exemplo 22: Usando o *método misto* calcule-se o determinante

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= -6 - 9 = -15$$

Exemplo 23: Utilizando o *método misto* calcule-se o determinante

$$|\boldsymbol{D}| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 7 & 7 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 7 & 7 & 7 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7$$

Determinante de uma Matriz Diagonal por Blocos

Definição: Matriz diagonal por blocos

A matriz quadrada $\boldsymbol{A}$, de ordem n, diz-se uma *matriz diagonal por blocos*, se apresentar a forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O}_{12} & \cdots & \boldsymbol{O}_{1p} \\ \boldsymbol{O}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O}_{p1} & \boldsymbol{O}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pp} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}, \ldots, \boldsymbol{A}_{pp})$$

onde as submatrizes:

i) $\boldsymbol{A}_{ii}$ $(i=1,2,\ldots,p)$ são *matrizes quadradas*;

ii) $\boldsymbol{O}_{kl}$, $k \neq l$ $(k,l=1,2,\ldots,p)$ são *matrizes nulas*.

Teorema: O *determinante* da *matriz diagonal por blocos*

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O}_{12} & \cdots & \boldsymbol{O}_{1p} \\ \boldsymbol{O}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{O}_{p1} & \boldsymbol{O}_{p2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{pp} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}, \ldots, \boldsymbol{A}_{pp})$$

é dado por

$$|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{p} |\boldsymbol{A}_{ii}|$$

Exemplo 25: O determinante da *matriz diagonal por blocos*

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pode ser escrito sob a forma

$$|\boldsymbol{T}| = \prod_{i=1}^{3} |\boldsymbol{T}_{ii}| = |\boldsymbol{T}_{11}||\boldsymbol{T}_{22}||\boldsymbol{T}_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Propriedades

Teorema: Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, num corpo Ω, e $k \in \Omega$. Então

$$|k\boldsymbol{A}| = k^n |\boldsymbol{A}|$$

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes quadradas de ordem n, ambas num mesmo corpo Ω. Então

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

Teorema: Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ matrizes quadradas de ordem n, ambas num mesmo corpo Ω. Então

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

- Recorrendo à Propriedade 4 dos determinantes, a igualdade anterior pode ser reescrita sob qualquer uma das seguintes formas:

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = \left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\left|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right| = \left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|\left|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right|$$

$$|\boldsymbol{AB}| = \left|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right|\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = |\boldsymbol{B}|\left|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right| = \left|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right||\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}|$$

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}|$$

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem *n*, então:

a) O determinante de $\boldsymbol{A}$ é nulo, se e só se $r(\boldsymbol{A}) < n$.

b) O determinante de $\boldsymbol{A}$ é não nulo, se e só se $r(\boldsymbol{A}) = n$.

Teorema: Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ de ordem *n* é *não singular* (ou *regular*), isto é, possui matriz inversa, se e só se $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem *n* e não singular, então

$$\left|\boldsymbol{A}^{-1}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$$

Inversão de Matrizes com Determinantes

- Pretende-se apresentar um novo processo de inversão de matrizes, que será derivado a partir da noção de determinante.

Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz quadrada de ordem n, tal que $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, isto é, a matriz é não singular.

Definição: **Matriz adjunta da matriz *A***

Chama-se **matriz adjunta** da matriz $\boldsymbol{A}$, representando-se por $\boldsymbol{AdjA}$, a matriz quadrada de ordem n que se obtém a partir de $\boldsymbol{A}$, substituindo cada um dos seus elementos a_{ij} pelos respectivos cofactores (complementos algébricos), isto é,

$$\boldsymbol{Adj\ A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n} \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33} & \cdots & \boldsymbol{A}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n1} & \boldsymbol{A}_{n2} & \boldsymbol{A}_{n3} & \cdots & \boldsymbol{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

- Esta matriz é ainda chamada **matriz dos cofactores**, designando-se por $\boldsymbol{Cof\ A}$, ou **matriz dos complementos algébricos**.

- Em diversa literatura científica a **matriz adjunta** da matriz $\boldsymbol{A}$, surge, em alternativa, definida como sendo a matriz transposta da matriz dos cofactores de $\boldsymbol{A}$, ou seja, $\boldsymbol{Adj\ A} = (\boldsymbol{Cof\ A})^{\mathrm{T}}$.

Teorema: Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz quadrada de ordem *n* e não singular, então a sua matriz inversa é dada por

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{Adj\ A})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{Cof\ A})^{\mathrm{T}}$$

Exemplo 29: Mostre que a matriz

$$F = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

é não singular e determine a sua *matriz inversa*.

1) $|f| \neq 0 \Rightarrow f^{-1}$ ✓

2) $\begin{vmatrix} 21 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-18-42) = 60$

3) $f^{-1} = \dfrac{1}{60} \begin{bmatrix} 2 & 16 & 6 \\ -3 & -24 & -11 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}^T$