Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia
FEUP

2.º teste – 1Fev2021
Duração: 1h30min sem tolerância

NÃO É PERMITIDO O USO DE TELEMÓVEIS NEM DE MÁQUINAS DE CALCULAR

1. [6 valores] Considere a reta r, que passa no ponto $P = (2,0,2)$ e é gerada pelo vetor $A = (2,2,4)$. Considere ainda a reta r' dada por $r'\colon (x, y, z) = (2,1,0) + t(2,0,1), t \in \mathbb{R}$. Determine a reta s, que passa no ponto $Q = (6,4,2)$ e interseta as retas r e r'.

2. Considere as transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definidas por $m(T)_{E_3E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde E_3 designa a base canónica de $\mathbb{R}^3$, e

$S(1,0,0) = (1,1)$
$S(1,1,0) = (2,1)$
$S(1,0,1) = (1,2)$.

a) [3 valores] Calcule o núcleo e o contradomínio de S. Para cada um destes subespaços, encontre uma base e a sua dimensão.

b) [4 valores] Considere as bases $U = \{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1)\}$ e $V = \{(1,1), (-1,1)\}$, dos espaços lineares $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respetivamente. Calcule, se possível, a representação matricial de ST^{-1} nas bases U e V.

3. Considere a transformação linear $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, representada pela matriz real $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ relativamente à base canónica do espaço linear $\mathbb{R}^3$.

a) [3 valores] Sabendo que $\lambda = 1$ é valor próprio de A, determine os espaços próprios e indique, para cada um desses subespaços, uma base e a dimensão.

b) [4 valores] A transformação linear A admite uma base, V, de vetores próprios? Justifique e, em caso afirmativo, indique a matriz A_{VV}, que representa A em relação à base V, e apresente as expressões matriciais que permitem relacionar as matrizes A e A_{VV}.

Os docentes: Antonio Ferreira, Ana Neves, Ana Francisca Alves

1) $r: (x, y, z) = \underbrace{(2, 0, 2)}_{P} + K\underbrace{(2, 2, 4)}_{A}, K \in \mathbb{R}$

$r': (x, y, z) = \underbrace{(2, 1, 0)}_{R'} + t\underbrace{(2, 0, 1)}_{B}, t \in \mathbb{R}$

$A = (2, 2, 4)$ vetor diretor de r

$B = (2, 0, 1)$ vetor diretor de r'

$\overrightarrow{PR'} = R' - P = (0, 1, -2)$

As retas r e r' não são complanares pois

$$\overrightarrow{PR'} \cdot A \times B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

Vamos determinar

α: plano que contém r e Q

β: plano definido por r' e Q

e $s = \alpha \cap \beta$

Determinar α:

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (6, 4, 2) - (2, 0, 2) = (4, 4, 0)$

$$A \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-16, +16, 0)$$

Consideremos $\vec{n}_\alpha = (1, -1, 0)$, vetor $\perp$ ao plano α

$\alpha: \; x - y = d$

Como $Q = (6, 4, 2) \in \alpha$

$6 - 4 = d$

$\alpha: \; x - y = 2$

<u>Determinar β:</u>

$\overrightarrow{R'Q} = Q - R' = (6, 4, 2) - (2, 1, 0) = (4, 3, 2)$

$$\mathcal{B} \times \overrightarrow{R'Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-3, 0, 6)$$

Podemos considerar $\vec{n}_\beta = (-1, 0, 2)$, vetor $\perp$ ao plano β

$\beta: \; -x + 2z = d$

$Q \in \alpha$

$-6 + 2 * 2 = d$

$\beta: \; -x + 2z = -2$

<u>$s = \alpha \cap \beta$</u>

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ -x + 2z = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x - 2 \\ z = \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

$s: \; (x, y, z) = \left(x, \; x - 2, \; \frac{x}{2} - 1\right)$

$= (0, -2, -1) + x\left(1, 1, \frac{1}{2}\right), \; x \in \mathbb{R}$

$\underline{\text{ou}}$ $\; s: \; (x, y, z) = (6, 4, 2) + k\left(1, 1, \frac{1}{2}\right), \; k \in \mathbb{R}$

2. a) • $S(1,0,0) = (1,1)$

• $S(1,1,0) = S(1,0,0) + S(0,1,0)$

$\Leftrightarrow (2,1) = (1,1) + S(0,1,0)$

$\Leftrightarrow (1,0) = S(0,1,0)$

• $S(1,0,1) = S(1,0,0) + S(0,0,1)$

$\Leftrightarrow (1,2) = (1,1) + S(0,0,1)$

$\Leftrightarrow (0,1) = S(0,0,1)$

$$m(S) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S(x,y,z) = (x+y,\ x+z)$

<u>Núcleo de S, N(S)</u>:

$N(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y,\ x+z) = (0,0)\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = -x \wedge z = -x\}$

$= \{(x,-x,-x) \in \mathbb{R}^3\}$

Base de $N(S) = \{(1,-1,-1)\}$ $\quad \dim N(S) = 1$

<u>Contradomínio de S, $S(\mathbb{R}^3)$</u>:

Pelo Teorema da dimensão

$\dim \mathbb{R}^3 = \dim N(S) + \dim S(\mathbb{R}^3)$

Logo, $\dim S(\mathbb{R}^3) = 2$, ou seja,

$S(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2 =$ conjunto de chegada

Base de $S(\mathbb{R}^3) = \{(1,0), (0,1)\}$

2. b) $T = m(T)_{E_3 E_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$|T| = -1$

$T^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \underset{U}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "T^{-1}"] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "S"] & \underset{V}{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

$m(ST^{-1})_{UV} = m(S)_{E_3 V} \cdot m(T^{-1})_{U E_3}$

$= V^{-1} \cdot m(S)_{E_3 E_2} \cdot m(T^{-1})_{E_3 E_3} \cdot U$

$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $|V| = 2$

$V^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc}
 & & & & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & \multicolumn{3}{c|}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
\multirow{2}{*}{$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & +1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$} & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\
 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2
\end{array}$$

$$m(ST^{-1})_{UV} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

3. a) $\begin{cases} |A| = -1 = \lambda_1 * \lambda_2 * \lambda_3 \\ tr(A) = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda_2 * \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$

Valores próprios $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$

- $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$X(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} : x + y + z = 0\}$

$E(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$
$= \{(x, y, -x-y) \in \mathbb{R}^3\}$

Base de $E(1) = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$

$\dim E(1) = 2$

- $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -z \\ x = 2z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$X(-1) = \{(2z, -z, z) \in \mathbb{R}^3, z \neq 0\}$

$E(-1) = \{(2z, -z, z) \in \mathbb{R}^3\}$

Base de $E(-1) = \{(2, -1, 1)\}$

$\dim E(-1) = 1$

3. b) $V = \{(1,0,-1), (0,1,-1), (2,-1,1)\}$

é uma base de vetores próprios

$$A_{VV} = V^{-1} . A . V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$