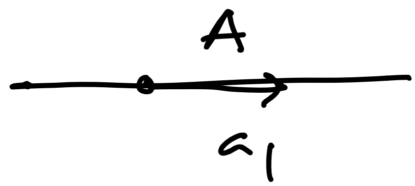
PRODUTO ESCALAR

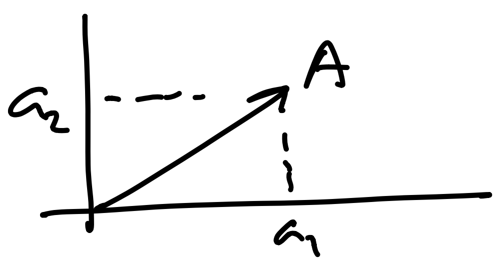
Vetor $A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

$\mathbb{R}^1$



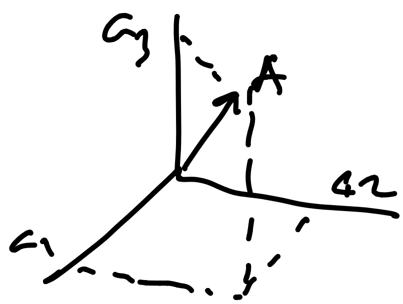
$A = (a_1)$

$\mathbb{R}^2$



$A = (a_1, a_2)$

$\mathbb{R}^3$



$A = (a_1, a_2, a_3)$

IGUALDADE VETORES

$A = B$

se $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ...

ADIÇÃO

$A + B = (a_1 + b_1 , a_2 + b_2, \ldots)$

PRODUTO VETOR POR ESCALAR

$cA = (ca_1 , ca_2, \ldots)$

Adição vetores – propriedades

$A+B=B+A$ COMUTATIVA

$(A+B)+C=A+(B+C)$ ASSOCIATIVA

$A+0=A$ ELEMENTO NEUTRO

$\underline{0}$ vetor nulo de $\mathbb{R}^n$

$A+(-1)A=0$ Elemento simétrico

PRODUTO VETOR POR ESCALAR

$$c(dA) = (cd)A = d(cA)$$

Prop. ASSOCIATIVA

$$c(B+A) = cB + cA$$

Distributiva em relação à adição vetores

$$(c+d)A = cA + dA$$

Distributiva em relação à adição de escalares

$$1A = A$$

Elemento neutro

PRODUTO ESCALAR

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$A \cdot B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

$A = (1, 2, 3)$ $\quad$ $B = (-1, 0, 4)$

$$\boxed{\begin{aligned} A \cdot B &= (1)(-1) + (2)(0) \\ &\quad + (3)(4) \\ &= -1 + 12 = 11 \end{aligned}}$$

PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

1. Comutativa

$$A \cdot B = B \cdot A$$

2. Distributiva

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

3. Homogénea

$$d(A \cdot B) = (dA) \cdot B = A \cdot (dB)$$

4. Positiva $A \cdot A > 0$, se $A \neq 0$

5. $A \cdot A = 0$, se $A = 0$

DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

$A, B \in \mathbb{R}^n$,

$$(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B)$$

O sinal = só se verifica quando 1 vetor é múltiplo escalar do outro

a) $A = 0 \vee B = 0 \quad \therefore \quad 0 = 0$

b) $A \neq 0 \wedge B \neq 0$

Seja $\quad C = xA - yB$

$$x = B \cdot B \text{ e } y = A \cdot B$$

$$C \cdot C \geqslant 0$$

$$C \cdot C = (xA - yB)(xA - yB)$$

$$= x^2 (A \cdot A) - xy (A \cdot B)$$

$$- xy (B \cdot A) + y^2 (B \cdot B)$$

$$C \cdot C = x^2 (A \cdot A) - 2xy (A \cdot B) + y^2 (B \cdot B)$$

$$(B \cdot B)^2 (A \cdot A) - 2 (A \cdot B)^2 (B \cdot B)$$

$$+ (A \cdot B)^2 (B \cdot B) \geq 0$$

Gmo $B \cdot B > 0$ $(B \neq 0)$

$$(B \cdot B)(A \cdot A) - 2 (A \cdot B)^2 + (A \cdot B)^2 \geq 0$$

or jeyz

$$(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B)$$

Podemos verificar (atrás)

que

$(A \cdot B)^2 = (A \cdot A)(B \cdot B)$

se e só se $C = 0$

mas

$C = 0 \iff xA - yB = 0$

$\iff xA = yB \wedge x = B \cdot B \neq 0$

$\iff A = \frac{y}{x} B$

Logo A e B

múltiplos escalares

NORMA (comprimento)

de vetor

$\mathbb{R}^2$

$A = (a_1, a_2)$

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} =$$

$$= \sqrt{(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2)}$$

$$= \sqrt{A \cdot A}$$

$\mathbb{R}^3$

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= \sqrt{A \cdot A}$$

$$A \in \mathbb{R}^n; \quad \|A\| = \sqrt{A \cdot A}$$

$$A = (1, 2, 3) \qquad \|A\| = \sqrt{1 + 4 + 9}$$

$$= \sqrt{14}$$

$$A \cdot A = 14 \rightarrow \|A\| = \sqrt{A \cdot A}$$

Propriedades da norma

$A \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$

1. Positiva

$\|A\| > 0$, se $A \neq 0$

2. $\|A\| = 0$ se $A = 0$

3. Homogénea

$\|cA\| = |c| \, \|A\|$

$$\|cA\| = \sqrt{(cA)\cdot(cA)} = \sqrt{c^2 A\cdot A}$$

$$= \sqrt{c^2}\,\sqrt{A\cdot A}$$

$$= |c|\,\sqrt{A\cdot A}$$

Desig. Cauchy - Schwarz

$(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B)$

$|A \cdot B| \leq \|A\| \, \|B\|$

Desigualdade Triangular

$A, B \in \mathbb{R}^2 \quad \therefore \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

o sinal de igualdade só se verifica para $A = 0 \vee B = 0$

$\vee \; B = cA$ com $c > 0$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|A+B\|^2 \leq (\|A\| + \|B\|)^2$$

$$(A+B)\cdot(A+B) \leq \|A\|^2 + 2\|A\|\,\|B\| + \|B\|^2$$

$$A\cdot A + 2A\cdot B + \cancel{B\cdot B} \leq \|A\|^2 + 2\|A\|\,\|B\| + \cancel{\|B\|^2}$$

$$A\cdot B \leq \|A\|\,\|B\|$$

é verdadeiro já que

$A\cdot B \leq |A\cdot B|$ e da

desigualdade de CS

$$A\cdot B \leq |A\cdot B| \leq \|A\|\,\|B\|$$

ou $A = 0 \therefore \|B\| = \|B\|$

$B = 0 \therefore \|A\| = \|A\|$

$A = B = 0 \therefore 0 = 0$

se $B = cA \therefore$
$(c \neq 0)$

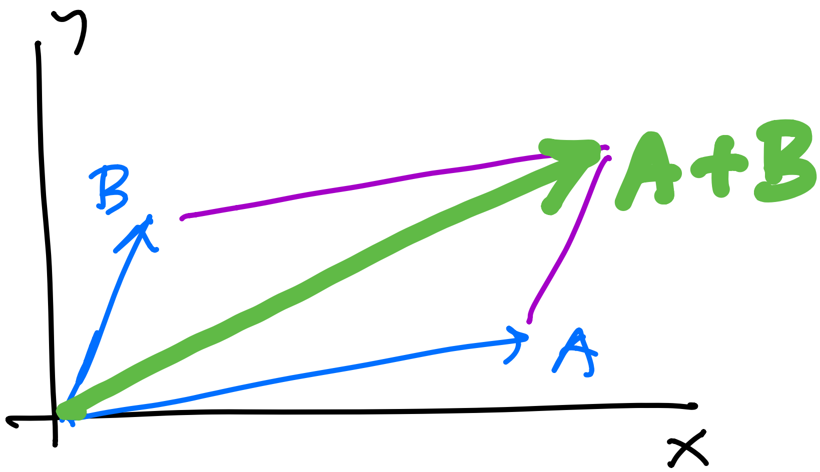
$$A \cdot B = c\, A \cdot A = c \|A\|^2$$

$$\|A\|\,\|B\| = \|A\|\,\|cA\| = |c|\,\|A\|^2$$

$$c\|A\|^2 \leq |c|\,\|A\|^2$$

$\Leftrightarrow c\|A\|^2 = |c|\,\|A\|^2$ se $c > 0$

Interpretação geométrica



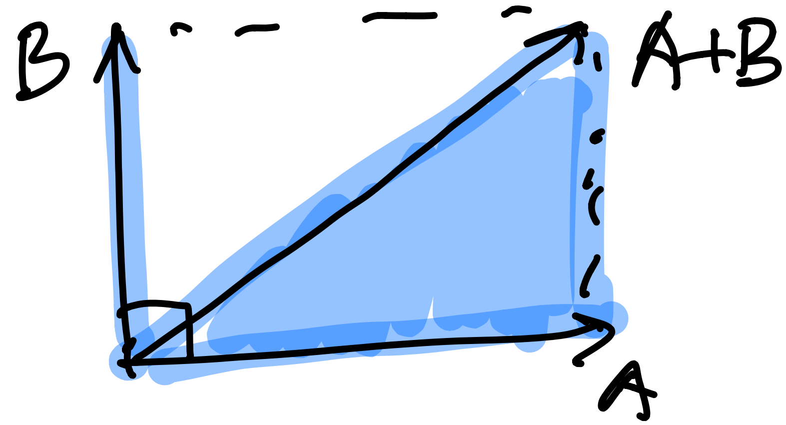
$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Num triângulo o comp. de um dos seus lados é inferior à soma dos comprimentos dos outros 2 lados

$=$ só se $B = cA$ e $c \in \mathbb{R}^+$

$$\|A+B\| = \|A\| + \|B\|$$

vetores ortogonais



Pitágoras $\|A+B\|^2$

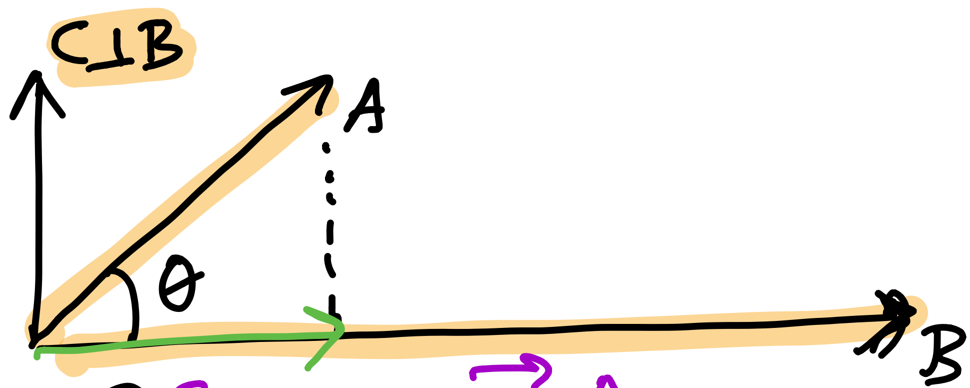
$$= \|A\|^2 + \|B\|^2$$

$$\|A+B\|^2 = (A+B)(A+B)$$

$$= \|A\|^2 + \|B\|^2 + 2A\cdot B$$

comparando $A\cdot B = 0$ se $\perp$

Projeção dum vetor sobre outro



$$t\underline{B} = \overrightarrow{\text{proj}}_{B}\, A$$

$$C + tB = A$$

$$\cancel{C \cdot B} + t\, B \cdot B = A \cdot B$$

$$t = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}$$

$$tB = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2}\, B$$

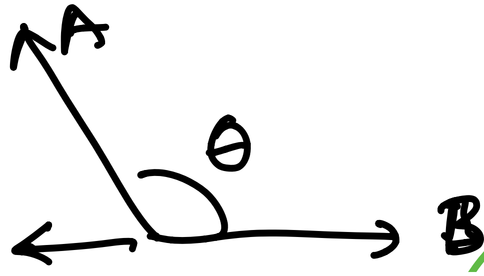
$n \leq 3$ ÂNGULO ENTRE 2 vetores

$$\cos\theta = \frac{\|tB\|}{\|A\|} = \frac{|t|\,\|B\|}{\|A\|}$$

$$= \frac{A\cdot B}{\|B\|^2}\,\frac{\|B\|}{\|A\|} = \frac{A\cdot B}{\|A\|\,\|B\|}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{A\cdot B}{\|A\|\,\|B\|}}$$

$\theta \in \left]\pi/2, \pi\right]$ $\quad t<0$



$A=(1,2,3)$

$B=(1,0,1)$

4

tB

$$\cos\theta = \frac{\cdot}{\sqrt{14}\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{A \cdot B}{\|B\|^2} < 0$$

$$\cos\theta = -\frac{\|tB\|}{\|A\|} = -\frac{|t|\,\|B\|}{\|A\|}$$

$$= \frac{A \cdot B}{\|A\|\,\|B\|}$$

Combinação linear de vetores

conjunto $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \subset \mathbb{R}^n$

vetor $B \in \mathbb{R}^n$

$$B = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_k A_k$$

$$= \sum_{j=1}^{k} c_j A_j \quad (c_j \in \mathbb{R})$$

B é uma combinação linear do conjunto S;

os vetores de S geram B

SUBESPAÇO GERADO POR UM CONJUNTO DE VETORES

$S = \{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset \mathbb{R}^n$

$$L(S) = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : X = \sum_{j=1}^{k} c_j A_j \right\}$$

$c_j \in \mathbb{R}$

conjunto de todos os vetores X gerados por S, é o subespaço de $S = L(S)$

quando $L(S) = \mathbb{R}^n$,

S gera todo o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

o vetor nulo $0 \in L(S)$

Exemplo

$S = \{A_1, A_2\} \subset \mathbb{R}^3$

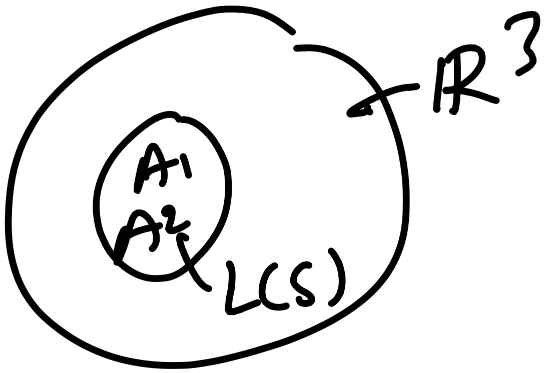
$A_1 = (1,0,1)$

$A_2 = (1,1,0)$

a) $L(S) = \{(x,y,z) = a_1 A_1 + a_2 A_2\}$

$$(x,y,z) = a_1(1,0,1) + a_2(1,1,0)$$

Sistema $\begin{cases} \text{Possível } X \in L(S) \\ \text{Impossível } X \notin L(S) \end{cases}$



$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-x \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+y-x \end{array}\right]$$

$$z+y-x=0$$

sistema é possível
quando $x = y + z$

logo
$L(S) = \{ (y+z, y, z) \}$
$= \{ (y, y, 0) + (z, 0, z) \}$
$= \{ y(1,1,0) + z(1,0,1) \}$
$\dim L(S) = 2$
Base $L(S) = \{ (1,1,0), (1,0,1) \}$

A_1 e A_2 linearmente independentes

A_1 e A_2 são uma base de $L(S)$

(mas não são 1 base de $\mathbb{R}^3$)

vetor $A_3 = (2, 1, 1) \in L(S)$?

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$(2,1,1)$ é gerado de forma única por A_1 e A_2

1

$b = 1$, $a + b = 2$

$a = 1$

logo $(2,1,1) = (1)A_1 + (1)A_2$

$(2,1,1) \in L(S) \leftarrow$

$(2,1,0) \notin L(S)$

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & \notin L(S) \end{array} \end{array}$$

$S_1 = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

$\dim S_1 = 3$

$L(S_1) = \mathbb{R}^3$

TEOREMA: um conjunto de vetores $S = \{A_1, A_2, \dots, A_K\}$ de $\mathbb{R}^n$ gera de forma única qualquer vetor X do seu subespaço, $L(S)$, se e só se S gerar de forma única o vetor nulo

i) S gera de forma única $L(S) \Rightarrow$ gera de forma única o vetor 0

$$0 = 0A_1 + 0A_2 + \cdots + 0A_K$$

$\rightarrow 0 \in L(S) \Rightarrow S$ gera de forma única o vetor nulo

ii) S gera de forma única o vetor nulo $\Rightarrow S$ gera de forma única qualquer vetor $X \in L(S)$

Admitindo que S gera $X \in L(S)$ de 2 formas distintas

$$X = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_k A_k$$

e

$$X = d_1 A_1 + d_2 A_2 + \cdots + d_k A_k$$

$$X - X = 0$$

$$0 = (c_1 - d_1) A_1 + \cdots$$

como S gera de forma
único vetor 0

$$c_j - d_j = 0 \qquad c_j = d_j$$

logo S gera de
forma única qualquer
vetor $X \in L(S)$

Independência linear de vetores

$S = \{A_1, A_2, \dots, A_k\} \subset \mathbb{R}^n$

gera o vetor nulo de forma única

$\Rightarrow$ S é um conjunto de vetores linearmente independente

---

$A = (1,0,1) \quad B = (1,1,0)$

$a(1,0,1) + b(1,1,0) = (0,0,0)$

$a + b = 0$

$b = 0$

$a = 0$

solução única $a = b = 0$

logo S gera de forma única o vetor nulo,

logo S é linearmente independente

$$X = \sum_{j=1}^{k} c_j A_j$$ Sistema de equações

Sistema impossível $X \notin L(S)$

Sistema possível:

- determinado: S é lin. indep.

- indeterminado: S é lin. dependente.

Definição [1.11]: Independência linear

O conjunto de vectores $\mathrm{S} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ diz-se *linearmente independente*, se *gerar de forma única o vector nulo*, ou seja, se

$$\lambda_1 \vec{s}_1 + \lambda_2 \vec{s}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{s}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{s}_i = \vec{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$$

(*combinação linear trivialmente nula*). Neste caso diz-se, ainda, que os *vectores* do conjunto S são *linearmente independentes*.

Definição [1.12]: Dependência linear

O conjunto de vectores $\mathrm{S} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ diz-se *linearmente dependente*, se *gerar de forma não única o vector nulo*, ou seja, se existir um conjunto de escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ não todos nulos, tal que

$$\lambda_1 \vec{s}_1 + \lambda_2 \vec{s}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{s}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{s}_i = \vec{0}$$

Neste caso diz-se, ainda, que os *vectores* do conjunto S são *linearmente dependentes*.

- Convenciona-se que conjunto vazio é *linearmente independente*.

Teorema [1.12]: O conjunto de vectores $\mathrm{S} = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ gera de forma única qualquer vector $\vec{x} \in L(\mathrm{S})$, se e só se gerar de forma única o vector nulo.

Teorema **[1.13]**: O conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ é *linearmente dependente*, se um dos seus elementos for o vector nulo.

Teorema **[1.14]**: No espaço $\mathbb{R}^n$, qualquer conjunto constituído por um único vector não nulo é *linearmente independente*.

Teorema **[1.16]**: O conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ é *linearmente dependente*, se um dos seus elementos for combinação linear dos restantes.

$\{A, B, A+B\}$ Dep.

Teorema **[1.17]**: O conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ do espaço $\mathbb{R}^n$ é *linearmente dependente*, se dois dos seus elementos forem múltiplos.

$\{A, 2A\}$ Dep.

Teorema **[1.18]**: No espaço $\mathbb{R}^n$, qualquer conjunto constituído por dois vectores não nulos e não paralelos é *linearmente independente*.

Teorema **[1.18]**: No espaço $\mathbb{R}^n$, qualquer conjunto constituído por dois vectores não nulos e não paralelos é *linearmente independente*.

Teorema **[1.15]**: Sejam S e T dois conjuntos não vazios de vectores do espaço $\mathbb{R}^n$, tais que $T \subseteq S$. Verifica-se:

i) Se T é *linearmente dependente*, então S é também *linearmente dependente*.

ii) Se S é *linearmente independente*, então T é também *linearmente independente*.

Teorema **[1.19]**: Seja $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ um conjunto *linearmente independente*, formado por k vectores do espaço $\mathbb{R}^n$ e seja $L(S)$ o subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado (*de forma única*) por S. Então qualquer conjunto de $k+1$ vectores de $L(S)$ é *linearmente dependente*.

Exemplo 8 **[1.52]**: Relativamente ao conjunto *linearmente independente* do **exemplo 5**, $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1),(1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$, conclua que qualquer um dos seguintes conjuntos é *linearmente dependente*:

$$S_3 = \{(1,1,1),(1,-3,-1),(1,-1,0)\}\,,\ S_4 = \{(1,1,1),(2,0,1),(0,4,2)\}$$

$$S_5 = \{(2,4,3),(1,-5,-2),(-2,6,2)\}\,,\ S_6 = \{(1,1,1),(2,0,1),(1,-1,0),(0,4,2)\}$$

$$S_7 = \{(1,1,1),(2,0,1),(0,4,2),(2,4,3),(-2,6,2)\}$$

Solução: Os conjuntos S_3, S_4 e S_5 são constituídos por 3 vectores do subespaço gerado pelo conjunto S_1,

$$L(S_1) = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Os conjuntos S_6 e S_7 são formados por 4 vectores do subespaço $L(S_1)$.

Teorema [1.20]: Seja $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ um conjunto *linearmente independente* do espaço $\mathbb{R}^n$, que gera (*de forma única*) o subespaço $L(S)$. Se $\vec{s}_{k+1}$ é um vector do espaço $\mathbb{R}^n$ tal que $\vec{s}_{k+1} \notin L(S)$, então o conjunto $S_1 = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k, \vec{s}_{k+1}\}$ é *linearmente independente*.

Exemplo 9 [1.53]: Seja o conjunto $S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1),(1,-3,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$ que gera *de forma única* (S_1 é *linearmente independente*) o subespaço

$$L(S_1) = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Mostre que o conjunto de vectores

$$S_8 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\} = \{(1,1,1),(1,-3,-1),(2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é *linearmente independente* e determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto S_8, $L(S_8) \subseteq \mathbb{R}^3$.

$(1,1,1) \in L(S_1)$

$(1,-3,-1) \in L(S_1)$

$\dim L(S_1) = 2$

$(2,-1,1) \notin L(S_1) \Rightarrow S_8$ é linearmente independente, logo $L(S_8) = \mathbb{R}^3$

Base e dimensão de um espaço de vectores

Definição [1.13]: Base de um espaço de vectores
Seja $\mathrm{S}=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k\}\subset\mathbb{R}^n$. O conjunto S diz-se uma *base* para um espaço linear $\mathrm{V}\subseteq\mathbb{R}^n$, se S gerar *de forma única* todo e qualquer vector de V, ou seja, se:

i) S é um conjunto *linearmente independente*;

ii) $L(\mathrm{S})=\mathrm{V}$.

- A ordenação dos elementos que constituem o conjunto S é determinante na definição de uma base (*conjunto ordenado* de vectores); são bases distintas os conjuntos $\mathrm{S}=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k\}$ e $\mathrm{S}_1=\{\vec{s}_k,\ldots,\vec{s}_2,\vec{s}_1\}$, por exemplo.

Definição [1.14]: Dimensão de um espaço de vectores
Se o conjunto $\mathrm{S}=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k\}$, constituído por *k* vectores de $\mathbb{R}^n$, é uma *base* para o subespaço $L(\mathrm{S})\subseteq\mathbb{R}^n$, então diz-se que $L(\mathrm{S})$ tem *dimensão finita* igual a k e denota-se por $\dim L(\mathrm{S})=k$. Nestas condições, diz-se também que $L(\mathrm{S})$ é um espaço *k-dimensional*. Por outro lado, se $L(\mathrm{S})$ não é de dimensão finita, então diz-se de *dimensão infinta*.

- O subespaço $L(\mathrm{S})\subseteq\mathbb{R}^n$ diz-se *unidimensional*, se $\dim L(\mathrm{S})=1$, *bidimensional*, se $\dim L(\mathrm{S})=2$, *tridimensional*, se $\dim L(\mathrm{S})=3$, e assim sucessivamente.

- Se S é um conjunto linearmente dependente, então $\dim L(\mathrm{S}) < k$.

- Uma vez que, por convenção, $L(\varnothing) = \{\vec{0}\}$ e que $\varnothing$ é *linearmente independente*, então $\varnothing$ é uma base para $L(\varnothing)$ e $\dim L(\varnothing) = 0$.

- Existe uma infinidade de bases para um dado espaço de vectores, possuindo, todas elas, um conjunto de propriedades comuns.

Teorema **[1.22]**: Seja $\mathrm{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ um espaço de vectores de dimensão finita igual a *n*, ou seja, $\dim\ \mathrm{V} = n$. Verifica-se:

i) Qualquer conjunto formado por mais de *n* elementos de V é um conjunto *linearmente dependente*;

ii) Todo o conjunto *linearmente independente* formado por $k < n$ elementos de V é um *subconjunto de uma base* para V;

iii) Qualquer conjunto *linearmente independente* formado por *n* elementos de V é uma *base* para V.

- Em relação ao teorema anterior, convém realçar o seguinte:

  i) Não é possível encontrar em V mais do que *n* elementos *linearmente independentes*, isto é, qualquer *base* para V possui *exactamente n* elementos;

  ii) Qualquer conjunto formado por menos de *n* elementos de V nunca poderá gerar V.

Exemplo 13: No espaço $\mathbb{R}^2$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E = \{\vec{i}, \vec{j}\} = \{(1,0),(0,1)\}$$

é designada por *base canónica*, ou *base natural*, para $\mathbb{R}^2$.
O espaço $\mathbb{R}^2$ admite, no máximo, **2** vectores *linearmente independentes*.

Exemplo 14: No espaço $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é designada por *base canónica*, ou *base natural*, para $\mathbb{R}^3$.
O espaço $\mathbb{R}^3$ admite, no máximo, **3** vectores *linearmente independentes*.

Exemplo 15 **[1.66]**: No espaço $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\} = \{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)\}$$

é designada por *base canónica*, ou *base natural*, para $\mathbb{R}^n$.
O espaço $\mathbb{R}^n$ admite, no máximo, ***n*** vectores *linearmente independentes*.

Teorema: Admita-se que U é um subespaço de um espaço V de dimensão finita; seja $\dim\ V = n$. Então:

i) O subespaço U é de dimensão finita e $\dim\ U \leq n$;

ii) O subespaço U possui uma base com um número finito de elementos de V e qualquer base para U é um subconjunto de uma base para V;

iii) $U = V$, se e só se $\dim\ U = n$.

Exemplo 16 **[1.74]**: Os conjuntos de vectores dos **exemplos 5** e **6**

$$S_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1)\} \text{ e } S_2 = \{\vec{a}_5, \vec{a}_6\} = \{(2,0,1), (0,2,1)\}$$

são *linearmente independentes* e geram (*de forma única*) o subespaço

$$L(S_1) = L(S_2) = \left\{(x_1, -x_1 + 2x_3, x_3) \in \mathbb{R}^3\right\} \subset \mathbb{R}^3$$

Os conjuntos S_1 e S_2 são duas *bases* (ordenadas) distintas para o subespaço $L(S_1) \subseteq \mathbb{R}^3$; além disso, verifica-se

$$\dim L(S_1) = 2$$

Exemplo 17 **[1.74]**: O conjunto de vectores do **exemplo 9**

$$S_8 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\} = \{(1,1,1), (1,-3,-1), (2,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é *linearmente independente* e gera (*de forma única*) o espaço

$$L(S_8) = \mathbb{R}^3$$

O conjunto S_8 é uma *base* (ordenada) para o espaço $\mathbb{R}^3$ e, além disso,

$$\dim L(S_8) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

$U = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$

$(1,2,3)_E = (-1,-1,3)_U$

$a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(1,1,1) = (1,2,3)$

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c = 1 \\ b+c = 2 \end{array}\right\} \quad a = -1$$

$c = 3$

Componentes e coordenadas de um vector

- As *componentes* e *coordenadas* de um vector variarão em função da *base* (ordenada) que for escolhida dentro do espaço de vectores.

Definição [1.15]: **Componentes e coordenadas de um vector**

Seja o espaço $\mathbb{R}^n$, tal que $\dim \mathbb{R}^n = n$. Se o conjunto de vectores $S = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \ldots, \vec{s}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ é uma *base* (*ordenada*) para $\mathbb{R}^n$, qualquer vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pode ser expresso através de uma *combinação linear* dos vectores de S, isto é,

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \alpha_3 \vec{s}_3 + \ldots + \alpha_n \vec{s}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{s}_i$$

que é única. Cada uma das parcelas da *combinação linear*

$$\alpha_i \vec{s}_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

designa a *componente* do vector $\vec{x}$ na direcção do vector $\vec{s}_i$, enquanto que os escalares reais α_i , $i = 1, 2, \ldots, n$ dizem-se as *coordenadas* do vector $\vec{x}$ *em relação à base* (*ordenada*) S, podendo escrever-se

$$\vec{x}_S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)_S$$

- A ordenação dos vectores na *base* S é determinante na definição das *componentes* e *coordenadas* do vector; daí, muitas vezes, o recurso ao conceito de *base ordenada*.

- Sempre que se omitir a base em relação à qual o vector $\vec{x}$ está definido, admite-se que a base considerada é a *base canónica*, ou *base natural*, para o espaço $\mathbb{R}^n$; neste caso, diz-se que o vector está definido através das suas *coordenadas naturais*.

Conjuntos ortogonais de vectores

Definição **[2.9]**: **Conjunto ortogonal / ortonormal**

Um conjunto $S=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k\}\subset\mathbb{R}^n$ é um *conjunto ortogonal*, se os seus elementos forem ortogonais entre si, isto é, se

$$\vec{s}_i\cdot\vec{s}_j=0\ ,\ i,j=1,2,\ldots,k\ \wedge\ i\neq j$$

Por outro lado, S é um *conjunto ortonormal*, se for ortogonal e se todos os seus elementos forem unitários, ou seja, se

$$\vec{s}_i\cdot\vec{s}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}0\ ,\ \text{se } i\neq j\\ 1\ ,\ \text{se } i=j\end{cases}\ ,\ i,j=1,2,\ldots,k$$

- O *vector nulo* poderá pertencer a qualquer *conjunto ortogonal*.

Teorema **[2.23]**: Seja $S=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k\}\subset\mathbb{R}^n$ um *conjunto ortogonal*, tal que

$$\vec{s}_i\neq\vec{0}\ ,\ i=1,2,\ldots,k$$

Considere o vector $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ gerado pelo conjunto S, ou seja,

$$\vec{x}\in L(S)\ \Leftrightarrow\ \vec{x}=\alpha_1\vec{s}_1+\alpha_2\vec{s}_2+\ldots+\alpha_k\vec{s}_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{s}_i$$

Então:

i) O conjunto S é *linearmente independente*;

ii) Verifica-se

$$\alpha_i=\frac{\vec{x}\cdot\vec{s}_i}{\vec{s}_i\cdot\vec{s}_i}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{s}_i}{\|\vec{s}_i\|^2}\ ,\ i=1,2,\ldots,k$$

$$\vec{x}=\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_1}\vec{x}+\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_2}\vec{x}+\ldots+\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_k}\vec{x}=\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_i}\vec{x}$$

Teorema **[2.24]**: Sejam $S=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k\}\subset\mathbb{R}^n$ um *conjunto ortonormal* e $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ um vector gerado pelo conjunto S, ou seja,

$$\vec{x}\in L(S) \iff \vec{x}=\alpha_1\vec{s}_1+\alpha_2\vec{s}_2+\ldots+\alpha_k\vec{s}_k=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\vec{s}_i$$

Então:

i) O conjunto S é *linearmente independente*;

ii) Verifica-se

$$\alpha_i=\vec{x}\cdot\vec{s}_i\ ,\ i=1,2,\ldots,k$$

$$\vec{x}=\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_1}\vec{x}+\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_2}\vec{x}+\ldots+\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_k}\vec{x}=\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{s}_i}\vec{x}$$

Definição **[2.10]**: **Base ortogonal e base ortonormal**
Seja $S=\{\vec{s}_1,\vec{s}_2,\ldots,\vec{s}_k\}\subset\mathbb{R}^n$ uma *base* para o subespaço $L(S)$. O conjunto S é uma *base ortogonal* para $L(S)$, se for um conjunto ortogonal. Por outro lado, S é uma *base ortonormal* para $L(S)$, se for um conjunto ortonormal.

Exemplo 18 **[2.30]**: Em $\mathbb{R}^2$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E=\{\vec{i},\vec{j}\}=\{(1,0),(0,1)\}$$

é uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}^2$ (*base canónica*, ou *base natural*).

Exemplo 19 **[2.30]**: Em $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

é uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}^3$ (*base canónica*, ou *base natural*).

Exemplo 20 **[2.30]**: Em $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos *vectores coordenados unitários*

$$E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n\} = \{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(0,0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)\}$$

é uma *base ortonormal* para $\mathbb{R}^n$ (*base canónica*, ou *base natural*).

Exemplo 21 **[2.32]**: O conjunto de vectores

$$B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\} = \{(3,4),(-4,3)\} \subset \mathbb{R}^2$$

é uma *base ortogonal* para o espaço $\mathbb{R}^2$.
Da *normalização* dos elementos do conjunto B resulta a *base ortonormal* para o espaço $\mathbb{R}^2$

$$\overline{B} = \left\{\frac{\vec{b}_1}{\left\|\vec{b}_1\right\|}, \frac{\vec{b}_2}{\left\|\vec{b}_2\right\|}\right\} = \left\{\frac{1}{5}(3,4), \frac{1}{5}(-4,3)\right\}$$

Exemplo 22 **[2.31]**: O conjunto de vectores

$$A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \{(1,1,0),(1,-1,-2),(1,-1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

é uma *base ortogonal* para o espaço $\mathbb{R}^3$.
Normalizando os vectores do conjunto A obtém-se a *base ortonormal* para o espaço $\mathbb{R}^3$

$$\overline{A} = \left\{\frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}, \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|}, \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$$

(a, b, c, d)

Exemplo 23 [2.34]: Considere o subespaço

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x_1 = x_2 - x_3 + x_4 \right\} \subset \mathbb{R}^4$$

a) Encontre uma *base*, C, para M e indique a dimensão do subespaço.

b) Determine uma *base ortogonal*, U, para o subespaço M que inclua o vector $\vec{u}_1 = (1,0,0,1) \in M$.

c) Obtenha uma *base ortonormal* para o subespaço M.

d) Construa, a partir da base U, uma *base ortogonal*, V, e uma *base ortonormal*, W, para o espaço $\mathbb{R}^4$.

e) Calcule as *coordenadas* do vector $\vec{a} = (1,1,-2,2)$ em relação às bases ordenadas V e W.

f) Construa, a partir da base C, uma *base*, Z, para o espaço $\mathbb{R}^4$.

g) Calcule as *coordenadas* do vector $\vec{a} = (1,1,-2,2)$ em relação à base Z.

a) $M = \{ (b-c+d, b, c, d) \}$

Produto Vectorial

$A \times B$

- A operação *produto vectorial* encontra-se apenas definida entre vectores do espaço $\mathbb{R}^3$.

Definição: Sejam os vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ do espaço $\mathbb{R}^3$. Define-se o *produto vectorial* de $\vec{a}$ por $\vec{b}$, o vector de $\mathbb{R}^3$, representado por $\vec{a} \times \vec{b}$, definido da forma seguinte:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Propriedades: Sejam os vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ de $\mathbb{R}^3$ e o escalar $k \in \mathbb{R}$:

a) Propriedade *antisimétrica*: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$A \times B = -B \times A$

b) Propriedade *distributiva*: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

c) Propriedade *homogénea*: $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$

d) *Ortogonalidade em relação ao vector* $\vec{a}$: $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$

e) *Ortogonalidade em relação ao vector* $\vec{b}$: $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 0$

f) *Identidade de Lagrange*: $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - (A \cdot B)^2$

- Convém notar que a operação *produto vectorial não satisfaz* as *propriedades comutativa e associativa*, ou seja,

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a} \quad \text{e} \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

$(A \cdot B)^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 \cos^2\theta$

$\|A \times B\| = \|A\| \, \|B\| \operatorname{sen} \theta$

Propriedade: Sejam os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\theta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$. Então:

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\theta$$

- Interpretação *geométrica* para o vector não nulo $\vec{a}\times\vec{b}$:

  a) O vector $\vec{a}\times\vec{b}$ tem a *direcção ortogonal* às direcções definidas pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$;

  b) A *norma* do vector $\vec{a}\times\vec{b}$ é função das normas dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e do ângulo $\theta = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ por estes formado;

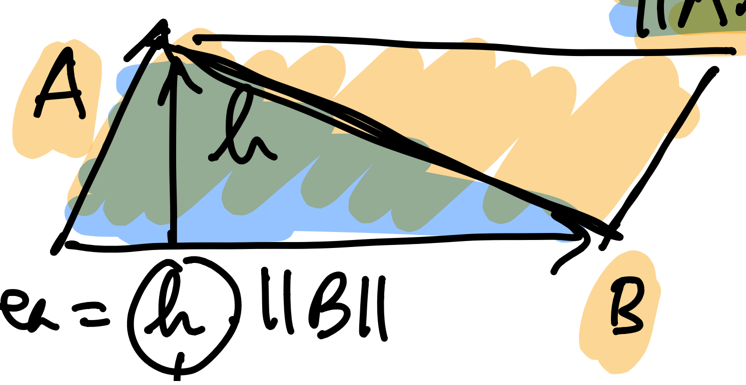
  c) O *sentido* do vector $\vec{a}\times\vec{b}$ está dependente do tipo de *referencial* $Oxyz$ que for considerado:

     i) *Referencial directo*, *positivo* ou '*dextrorsum*': o sentido de $\vec{a}\times\vec{b}$ é definido pela *regra da mão direita*;

     ii) *Referencial inverso*, *negativo* ou '*sinistrorsum*': o sentido de $\vec{a}\times\vec{b}$ é definido pela *regra da mão esquerda*;

  d) A *norma do vector* $\vec{a}\times\vec{b}$ tem exactamente o mesmo valor da *área do paralelogramo* determinado pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

- A operação *produto vectorial* é frequentemente utilizada na determinação da *área de polígonos*.



$$\|A\times B\| = \underbrace{\|A\|\,\|B\|\operatorname{sen}\theta}_{\text{Área}}$$

Área $= h\,\|B\|$

$\hookrightarrow \|A\| \operatorname{sen}\theta$

Exemplo 1: Relativamente aos vectores coordenados unitários verifica-se:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\;\;;\;\;\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\;\;;\;\;\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

Exemplo 2: Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, tais que $\|\vec{b}\|=1$, $\|\vec{a}+\vec{b}-2\vec{a}\times\vec{b}\|=\sqrt{6}/2$ e $\theta=\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\pi/4$. Determine $\|\vec{a}\|$.

Solução: $\|\vec{a}\|=\sqrt{2}/6$.

$$\|A\|^2 = A\cdot A$$

$$A\cdot B = \frac{\sqrt{2}}{2}\|A\|$$

$$(A\cdot B)^2 = \frac{2}{4}\|A\|^2 = \frac{1}{2}\|A\|^2$$

$$\|A\|^2 + 2A\cdot B + 1 + 4\left(\|A\|^2 - (A\cdot B)^2\right) = \frac{3}{2}$$

$$\|A\|^2 + \sqrt{2}\|A\| + 1 + 4\|A\|^2 - 2\|A\|^2 = 3/2$$

$$3\|A\|^2 + \sqrt{2}\|A\| - 1/2 = 0$$

>0

$\cancel{<0}$

Teorema: Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Então o conjunto $S_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ é *linearmente dependente*, se e só se $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Teorema: Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Se o conjunto $S_1 = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ é *linearmente independente*, então:

i) $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto *linearmente independente*;

ii) Qualquer vector $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$, tal que $\vec{n} \perp \vec{a}$ e $\vec{n} \perp \vec{b}$ é um *vector múltiplo* de $\vec{a} \times \vec{b}$, isto é,

$$\vec{n} = k\vec{a} \times \vec{b}\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

$\{(1,0,0), (1,1,0), (\quad)\}$

$(1,0,0) \times (1,1,0)$

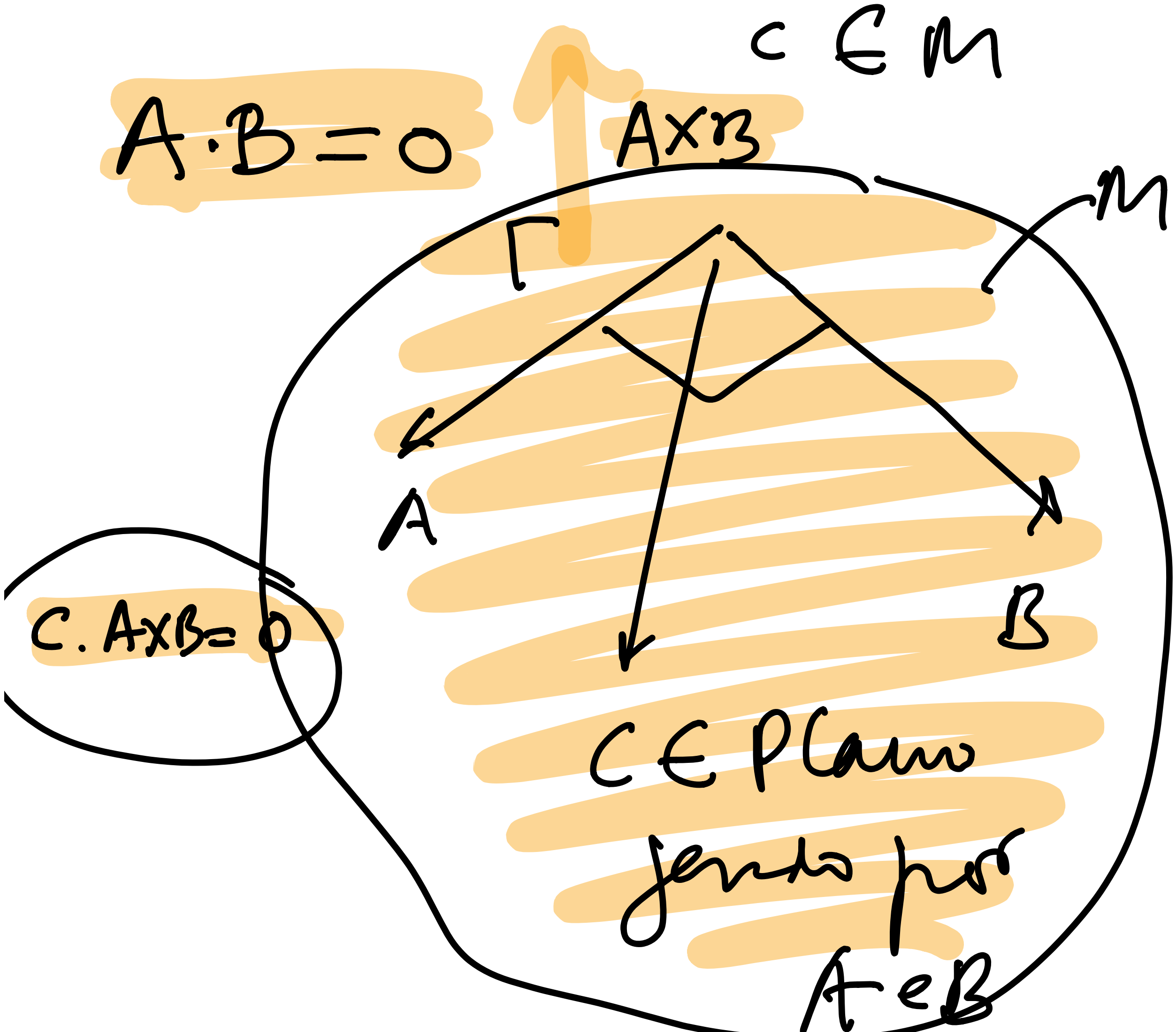
$A \times B \perp$ Plano gerado por A e B

Exemplo 3: Considere o conjunto ortogonal $S = \{\vec{a}, \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^3$, com $\|\vec{b}\| = 1$; seja o vector $\vec{d} = \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b}$, em que $\vec{c} \in L(S)$. Admitindo que $\|\vec{d}\| = \sqrt{6}$ e que $\theta = \measuredangle(\vec{c}, \vec{d}) = \pi / 3$, calcule $\|\vec{a}\|$.

$c = aA + bB$

Solução: $\|\vec{a}\| = 3\sqrt{2} / 2$.

$c \in M$



$$\|d\|^2 = \|c + a \times b\|^2$$
$$= (c + a \times b) \cdot (c + a \times b)$$
$$= \|c\|^2 + 2\, c \cdot a \times b + \|a \times b\|^2$$

- Existe uma *regra prática* para o cálculo do vector $\vec{a}\times\vec{b}$, que envolve os conceitos de *determinante de 2ª ordem* e de *determinante de 3ª ordem* (assuntos abordados no capítulo *Determinantes*).

- *Regra prática* para o cálculo do vector $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$(4,0,-1) = C$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$(1,2,3) = A$

$(1,0,-1) = B$

$C.A\times B$

$$C.A\times B = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{c} C \\ A \\ B \end{array}$$

$C.A\times B = (4)(-2) + (0)(4) + (-1)(-2)$

$= (4,0,-1) . (-2,4,-2)$

Produto Misto

$C.(A \times B)$

- A operação *produto misto* aglutina, numa única operação, as operações *produto escalar* e *produto vectorial*, encontrando-se apenas definida entre vectores do espaço $\mathbb{R}^3$.

- Sendo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$, então

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = (c_1, c_2, c_3) \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2 + c_2 a_3 b_1 - c_2 a_1 b_3 + c_3 a_1 b_2 - c_3 a_2 b_1$$

- Interpretação *geométrica* para o produto misto $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$:

  i) O *módulo* do *produto misto*, $|\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}|$, tem exactamente o mesmo valor do *volume do prisma* determinado pelos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$;

  ii) A operação *produto misto* é frequentemente usada na determinação do *volume de poliedros*.

- Existe uma *regra prática* para o cálculo do *produto misto* $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$, que envolve os conceitos de *determinante de 2ª ordem* e de *determinante de 3ª ordem* (assuntos abordados no capítulo *Determinantes*).

volume = $|C.A \times B|$

- *Regra prática* para o cálculo do *produto misto* $\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = (c_1, c_2, c_3) \cdot (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) - c_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

- Da aplicação da *Regra de Sarrus* para o cálculo de *determinantes de 3ª ordem* resulta:

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2 + c_2 a_3 b_1 - c_2 a_1 b_3 + c_3 a_1 b_2 - c_3 a_2 b_1$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} c_1 & & \\ a_1 & a_2 & \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} & c_2 & c_3 \\ & & a_3 \end{matrix} \end{array} - \begin{array}{c} \begin{vmatrix} & & c_3 \\ & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} c_1 & c_2 & \\ a_1 & & \end{matrix} \end{array}$$

Teorema: Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Então:

i) $\vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}$;

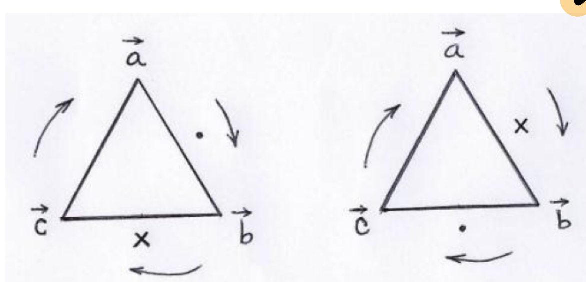
ii) $\vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$.

- As *propriedades* expostas no teorema anterior para o *produto misto* e a *propriedade comutativa* para o *produto escalar*, permitem escrever:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} & = & \vec{b}\cdot\vec{c}\times\vec{a} & = & \vec{c}\cdot\vec{a}\times\vec{b} \\ = & & & & = \\ \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c} & = & \vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a} & = & \vec{c}\times\vec{a}\cdot\vec{b} \end{array}$$

Em resumo

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\left[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\right]$$



Teorema: Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vectores do espaço $\mathbb{R}^3$. Então o conjunto $S=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}\subset\mathbb{R}^3$ é *linearmente dependente*, se e só se $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}=0$.

$$A \cdot B \times C$$
$$= B \cdot C \times A$$
$$= C \cdot A \times B$$

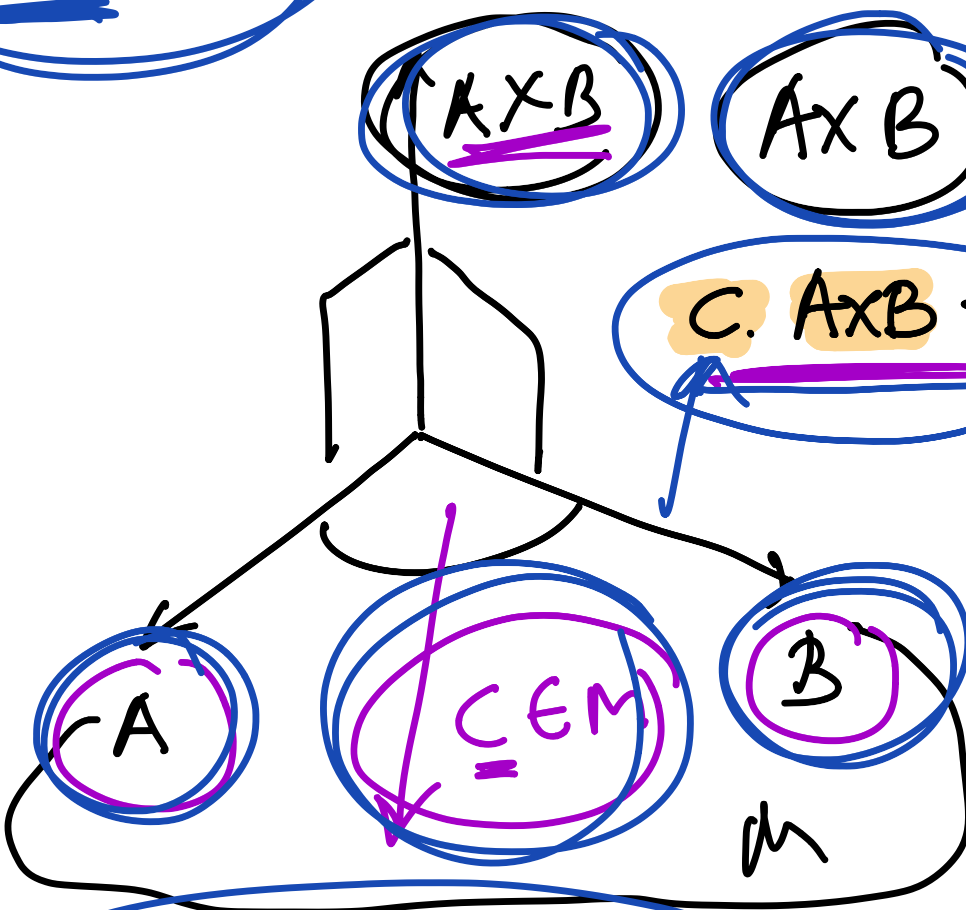
[redacted]

$$= -A \cdot C \times B$$

$$= -B \cdot A \times C$$

$$= -C \cdot B \times A$$

A, B, C



$$C \cdot A \times B = 0$$

$$C = \alpha A + \beta B$$

$\{A, B, C\}$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} &
\begin{array}{c} C \\ A \\ B \end{array}
\end{array}
$$

$$= \cancel{(0)(-2)} + (1)(4) + \cancel{(0)(-2)}$$

$$= 4 \neq 0$$

A, B, C lin. ind.