U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação
Análise Matemática | 1º Semestre | 2020/2021
1º Mini Teste | 2020.12.09 | Duração: 1h30m

Proposta de resolução

1. Qual o valor do integral definido $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$?

(a) $\cancel{-\frac{4}{7}}$ (b) $\cancel{0}$ (c) $\frac{4}{7}$ (d) $\cancel{\frac{7}{4}}$

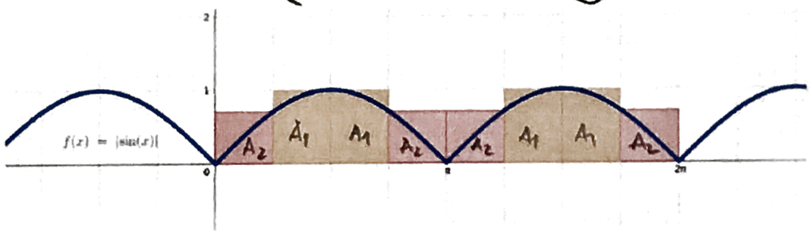
$\underbrace{\text{(a), (b)}}_{\text{não pode ser negativo}}$

$$\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \left(x\,x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{4}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{4}+\frac{4}{4}}}{7/4} + c\right]_0^1 = \frac{4}{7}$$

2. Considere a função $f(x) = |\sin(x)|$ no intervalo $x \in [0, 2\pi]$. Qual o valor da aproximação do integral definido de $f(x)$ obtido pela soma de Riemann superior para 8 partições de $\Delta x_i = \pi/4$.

(a) $\cancel{\pi(1 - \sin(\frac{\pi}{4}))}$ (b) $\cancel{4}$ (c) $\cancel{\pi(2 + \sin(\frac{\pi}{4}))}$ (d) $\pi(1 + \sin(\frac{\pi}{4}))$

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx \simeq \sum_{n=1}^{8} f(x_n)\Delta x_n$$



$$\sum_{n=1}^{8} f_{max}(x_n)\cdot\Delta x_n = 4\,(A_1 + A_2) = \cancel{4}\left(\frac{\pi}{\cancel{4}}\cdot 1 + \frac{\pi}{\cancel{4}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \pi\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

3. Calcule, se existir, o valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x te^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x}$.

(a) $\cancel{\frac{1}{2}}$ (b) $\cancel{+\infty}$ (c) 0 (d) $\cancel{1}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x te^{-t^2}dt}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{(usar L'Hospital)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left[\int_0^x te^{-t^2}dt\right]}{\frac{d}{dx}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x e^{-x^2}}{1} = 0\, e^0 = 0$$

Notas:

1) $\int_0^0 f(x)dx = 0$

2) Teorema Fundamental do Cálculo:
$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$

4. Seja $u(x) = (\ln(x^2))^{3/x}$. Qual a expressão para $\frac{u'(x)}{u(x)}$?

(a) $\left[\frac{3}{x^2 \ln x} - \frac{3\ln(\ln(x^2))}{x^2}\right]$ ~~(b)~~ $\cancel{\frac{3}{x}\left[-\frac{\ln\ln(x^2)}{x} + \frac{3}{x}\right]}$ ~~(c)~~ $\cancel{-\frac{3}{x}\left[\frac{1}{\ln x} + \frac{3}{x}\right]}$ ~~(d)~~ $\cancel{\left[\frac{3\ln(\ln(x^2))}{x^2} - \frac{3}{x^2\ln x}\right]}$

- $\mu(x) = \left(\ln(x^2)\right)^{\frac{3}{x}} = e^{\ln\left[\left(\ln(x^2)\right)^{\frac{3}{x}}\right]} = e^{\frac{3}{x}\ln\left(\ln(x^2)\right)}$
- $\mu'(x) = \left(\frac{3}{x}\ln\left[\ln(x^2)\right]\right)' e^{\frac{3}{x}\ln\left[\ln(x^2)\right]} = \left(\frac{3}{x}\ln\left[\ln[x^2]\right]\right)'\mu(x)$
- $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \left(\frac{3}{x}\ln\left[\ln(x^2)\right]\right)'$

$$= -\frac{3}{x^2}\ln\left[\ln(x^2)\right] + \frac{3}{\cancel{x}}\,\frac{\frac{\cancel{2x}}{x^2}}{\cancel{2}\ln x}$$

então $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{3}{x^2\ln(x)} - \frac{3}{x^2}\ln\left[\ln(x^2)\right]$

5. Calcule, se existir, o valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2ax)}{\cos(ax)\sin(bx)}$.

~~(a)~~ $\cancel{\frac{b}{a}}$ (b) $2\frac{a}{b}$ ~~(c) 0~~ ~~(d) 1~~

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2ax)}{\cos(ax)\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(ax)\sin(ax)}{\cos(ax)\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$$

1) Aproximações lineares:

como $x \to 0 \Rightarrow \sin(ax) \simeq ax$ e $\sin(bx) \simeq bx$

então

$$\lim_{x\to 0} 2\,\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = 2\,\frac{ax}{bx} = 2\,\frac{a}{b}$$

2) Regra de L'Hôspital (com indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0} 2\,\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{a\cos(ax)}{b\cos(bx)} = 2\,\frac{a}{b}$$

GRUPO II

6. **[3]** Uma partícula move-se ao longo de uma trajectória dada pela seguinte curva $y = x^2 - 2x + 3$. Encontre as coordenadas do ponto da curva onde a taxa de variação de y, $\frac{dy}{dt}$, é igual a 4 vezes a taxa de variação de x, $\frac{dx}{dt}$.

1) $\frac{dy}{dt} = 4\frac{dx}{dt}$ (enunciado)

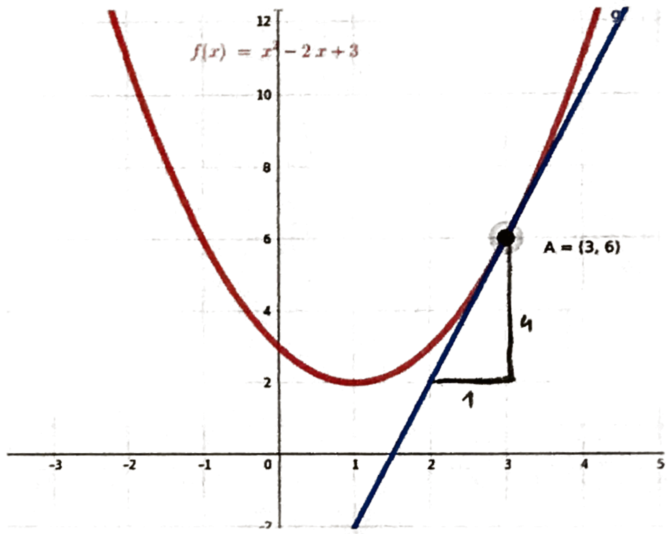
2) $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ (Regra de cadeia)

Assim

$4 = \frac{dy}{dx} = 2x - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3$ e $y = 6$

As coordenadas são $(3, 6)$.



7. **[2]** Esboce a região Q do plano limitada pelos gráficos das seguintes funções:

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = x, \quad x = 2 \quad e \quad x = e.$$

Determine a área da região Q.

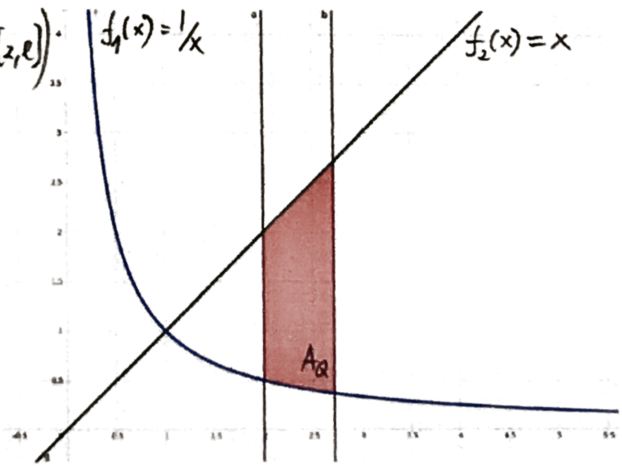
$\text{Área } Q = A_Q = \int_2^e f_2(x) - f_1(x)\, dx, \quad (f_2 > f_1\ x \in [2, e])$.

$$A_Q = \int_2^e x - \frac{1}{x}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C\right]_2^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - 1 + \cancel{C}\right) - \left(\frac{2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} - \ln(2) + \cancel{C}\right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - 3 + \ln(2) \text{ u.a.}$$

$(= 1{,}3877 \text{ u.a})$



GRUPO III

8. **[8]** Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sin(\ln x))\cos(\ln x)}{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

a) $\displaystyle\int \frac{\sin(\sin(\ln x))\cos(\ln x)\,dx}{x} \overset{①}{=} \int \sin(\sin(u))\cos(u)\,du$

① substituição simples
$u = \ln x$
$du = \frac{dx}{x}$

② Subs. simples
$a = \sin u$
$da = \cos(u)\,du$

$\overset{②}{=} \displaystyle\int \sin(a)\,da = -\cos(a) + C$

$= -\cos(\sin(u)) + C = -\cos(\sin(\ln x)) + C$

ou ③ substituição simples
$V = \sin(\ln(x))$
$dV = \frac{1}{x}\cos(\ln(x))$

$\displaystyle\int \frac{\sin(\sin(\ln x))\cos(\ln x)}{x}\,dx \overset{③}{=} \int \sin(V)\,dV$

$= -\cos(V) + C = -\cos(\sin(\ln x)) + C$

b) $\displaystyle\int x\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int x\sec^2 x\,dx$ (por partes):

$\displaystyle\int x\sec^2 x\,dx = \int u\,dV = uV - \int V\,du$

$u = x$	$V = \operatorname{tg} x\ (+C)$
$du = dx$	$dV = \sec^2 x\,dx$

$= x\operatorname{tg} x - \displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$

$= x\operatorname{tg} x - \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

④ Subst. simples
$a = \cos x$
$da = -\sin x\,dx$

$\overset{④}{=} x\operatorname{tg} x + \displaystyle\int \frac{1}{a}\,da = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$

8. **[8]** Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx = \int 1 + \frac{3}{x^2-5x+6}\,dx = \int 1 + \frac{3}{(x-3)(x-2)}\,dx$$

$$= \int 1 + \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}\,dx = x + A\ln|x-3| + B\ln|x-2| + C$$

$$= x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

Nota: $\dfrac{3}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-2} \iff 3 = A(x-2) + B(x-3)$

1) $x = 2 \Rightarrow 3 = -B \iff \boxed{B=-3}$
$x = 3 \Rightarrow 3 = A \iff \boxed{A=3}$

2) $\begin{array}{l} [x]^1 \\ [x]^0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 0 = A + B \\ 3 = -2A - 3B \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \boxed{A=3} \\ \boxed{B=-3} \end{array} \right.$

d) $$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \overset{①}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{x^2(-2x)\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(4-u)}{\sqrt{u}}\,du = -\frac{1}{2}\int 4u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\,du$$

① Subst. simples
$u = 4-x^2$
$x^2 = 4-u$
$du = -2x\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\left(4\frac{u^{\frac{1}{2}}}{1/2} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C\right) = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} - 4u^{\frac{1}{2}} + C$$

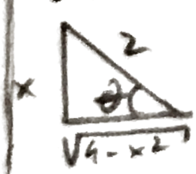
$$= \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{4-x^2} + C$$

ou ② Substituição simples
$u = \sqrt{4-x^2}$
$x^2 = 4-u^2$
$du = +\frac{1}{\cancel{2}}\frac{-\cancel{2}x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$$= -\int \frac{x^2(-x)\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\int 4-u^2\,du = \frac{u^3}{3} - 4u + C$$

$$= \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{4-x^2} + C$$

ou ③ Subst. trigonométrica
$x = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$
$dx = 2\cos\theta\,d\theta$



$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

$$\overset{③}{=} \int \frac{8\,\mathrm{sen}^3\theta\,\cancel{2\cos\theta}\,d\theta}{\cancel{2\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}}} = 8\int \mathrm{sen}^3\theta\,d\theta = 8\int \mathrm{sen}\,\theta(1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 8\int \mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta\,d\theta = 8\left[-\cos\theta - \int \mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta\,d\theta\right]$$

$$= 8\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} + C\right] = \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{4-x^2} + C$$

9. **[2]** Considere $g(x)$, uma função real de variável real tal que $g'(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$. Considere ainda a função $f(x)$ definida por

$$f(x) = \int_{\ln(x+1)}^{\sin x} g(t)\, dt,$$

uma função real de variável real tal que $f'(x)$ e $f''(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$.
Mostre, justificando todos os cálculos efectuados, que $f''(0) = g(0)$.

A função $f(x)$ pode ser escrita da seguinte forma, usando a propriedade da soma dos limites dos integrais definidos:

$$f(x) = \int_{\ln(x+1)}^{a} g(t)dx + \int_a^{\sin(x)} g(t)dt = \int_a^{\sin(x)} g(t)dt - \int_a^{\ln(x+1)} g(t)\,dt$$

com $a \in \mathbb{R}$. A função $f(x)$ pode ser derivada,

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^{\sin(x)} g(t)dt - \int_a^{\ln(x+1)} g(t)\,dt\right]$$

e usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a derivada da função composta para as seguintes relações: $u(x) = \sin(x)$ e $v(x) = \ln(x+1)$ obtém-se:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{du}\left[\int_a^{u(x)} g(t)\,dt\right]\frac{du}{dx} - \frac{d}{dv}\left[\int_a^{v(x)} g(t)\,dt\right]\frac{dv}{dx}$$

$$= g(u)\cos(x) - g(v)\frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = g[\sin(x)]\cos(x) - g[\ln(x+1)]\frac{1}{x+1}$$

A função $f'(x)$ pode ser novamente derivada para obter a segunda derivada, usando a derivada do produto de funções,

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(g[\sin(x)]\cos(x)\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{g[\ln(x+1)]}{x+1}\right)$$

$$f''(x) = \frac{d\,g[u(x)]}{dx}\cdot\cos x + g[\sin(x)](-\sin(x))$$

$$- \left(\frac{d\,g[v(x)]}{dx}\cdot\frac{1}{x+1} + g[\ln(x+1)]\cdot\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\right)$$

e usando a derivada da funções compostas obtém-se

$$f''(x) = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \cos(x) - g[\operatorname{sen}(x)] \operatorname{sen}(x)$$
$$- \frac{dg}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{g[\ln(x+1)]}{(x+1)^2}$$

onde $u(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $v(x) = \ln(x+1)$. Assim,

$$f''(x) = g'[u(x)] \cos^2(x) - g[\operatorname{sen}(x)] \operatorname{sen}(x)$$
$$- g'[v(x)] \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{g[\ln(x+1)]}{(x+1)^2}$$

e

$$f''(x) = g'[\operatorname{sen}(x)] \cos^2(x) - g[\operatorname{sen}(x)] \operatorname{sen}(x)$$
$$- \frac{g'[\ln(x+1)]}{(x+1)^2} + \frac{g[\ln(x+1)]}{(x+1)^2}$$

Avaliando a segunda derivada de $f(x)$ para $x = 0$, obtém-se

$$f''(0) = \cancel{g'[0]} - 0 - \cancel{g'[0]} + g[0]$$

Assim,

$$f''(0) = g[0]$$

$\square$

c.q.d.

b.l.z.