Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala.

Nome COMPLETO: ____

GRUPO I – Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista**: **1.0** valores por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta 1/3 valor na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4	5

1. Qual a função $f(t)$, com domínio $t > 0$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{16}{(s^2+4s+20)}$?

   (a) $f(t) = 4e^{-2t}\sin 4t$ (b) $f(t) = 4e^{-2t}\cos 4t$ (c) $f(t) = 4e^{-4t}\sin 2t$ (d) $f(t) = 4e^{2t}\sin 4t$

2. Qual o valor do integral definido $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

   (a) *diverge* (b) -2 (c) 2 (d) $-\frac{1}{2}$

3. Qual das seguintes expressões é solução da equação diferencial ordinária $y'' + \dfrac{2x^2-1}{x}y' = 0$?

   (a) $y(x) = Ae^{-x^3} + B$ (b) $y(x) = Ae^{-x^2} + B$ (c) $y(x) = Ae^{x} + B$ (d) $y(x) = Ae^{x^2} + B$

4. Qual a função $f(t)$, com domínio $t > 0$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)^2}$?

   (a) $f(t) = t\,\cos(\omega_0 t)$ (b) $f(t) = t\,\sin(\omega_0 t)$ (c) $f(t) = \cos(\omega_0 t)e^t$ (d) $f(t) = \sin(\omega_0 t)e^t$

5. Indique uma equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem de coeficientes constantes homogénea que tenha soluções $y_1(x) = 3e^{2x}$ e $y_2(x) = \pi x e^{2x}$

   (a) $y'' - 4y = 0$ (b) $y'' - 4y' + 4y = 0$ (c) $y'' + 4y = 0$ (d) $y'' + 4y' + 4y = 0$

GRUPO II

6. **[2.5]** Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1 + 2y^2}$$

para $y(0) = 1$.

7. **[3]** Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$xy' - y = -(\ln x)\, y^2$$

GRUPO III

8. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' + 9y = f(t)$$

(a) **[1.5]** Calcule a solução homogénea da equação diferencial ordinária.

(b) **[3]** Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária quando $f(t) = \cos(3t)$. Comente o resultado obtido.

(c) **[3]** Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, sabendo que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, com o termo não homogéneo $f(t) = \cos(\omega_0 t)$. Escolha o valor de $\omega_0 \neq 0$ que lhe seja mais conveniente e comente essa escolha. *Dica:* observe as perguntas de escolha múltipla.

9. **[2]** Classifique quanto à sua espécie o integral impróprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

Determine se o integral impróprio converge ou diverge e no caso de convergência calcule o seu valor. Justifique todos os cálculos efectuados.

$\mathcal{L}\{a\} = \dfrac{a}{s}$

$\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}},\ (n \in \mathbb{N})$

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

$\mathcal{L}\{e^{at}\sin kt\} = \dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at}\cos kt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$

$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$

$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$