U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação
Análise Matemática | 1^o Semestre | 2020/2021
Reavaliação do 2^o Mini Teste | 2021.02.17 | Duração: 1h30m

Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala.

Nome COMPLETO: ______________________________

GRUPO I – Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista**: **1.0** valores por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta 1/3 valor na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4	5

1. Considere a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem de coeficientes constantes homogénea $y'' + \omega^2 y = 0$, para $\omega > 0$. Qual das seguintes expressões é solução geral dessa EDO.

   (a) $y(x) = C_1 e^x \cos(\omega x) + C_2 e^x \sin(-\omega x)$
   (b) $y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{\omega x}$
   (c) $y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$
   (d) $y(x) = C_1 e^x e^{\omega i x} + C_2 e^x e^{-\omega i x}$

2. Qual é a transformada de Laplace de $F(s) = \mathcal{L}\{\cos^2(at)\} + \mathcal{L}\{\sin^2(at)\}$, com $s > 0$?

   (a) 1
   (b) $(s^2 + a^2)/s$
   (c) a/s
   (d) $1/s$

3. Qual o valor do integral definido $\displaystyle\int_{-2\pi}^{+\infty} \sin x \, \mathrm{d}x$?

   (a) *diverge*
   (b) -1
   (c) 1
   (d) 0

4. Supondo que $y_1(t) = \cos(t)e^t$ e $y_2(t) = \sin(t)e^t$ são soluções da equação diferencial ordinária $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, o valor do determinante do Wronskiano, $||W||$ é

   (a) $e^{2t} - 2e^{2t}\cos t \sin t$
   (b) e^{2t}
   (c) $e^{2t} + 2e^{2t}\cos t \sin t$
   (d) e^t

5. Qual a função $f(t)$, com domínio $t > 0$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \ln(s + a)$?

   (a) $f(t) = -\frac{1}{a}e^{-at}$
   (b) $f(t) = \frac{1}{ast}e^{-t}$
   (c) $f(t) = -\frac{1}{a}e^{at}$
   (d) $f(t) = -\frac{1}{t}e^{-at}$

GRUPO II

6. **[3]** Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$xy' + y = y^2 \ln x, \qquad x \in (0, +\infty)$$

Calcule ainda a solução para $y(1) = \frac{1}{2}$.

7. **[2.5]** Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{(x-1)y'}{y} - \frac{(y-1)}{x} = 0$$

GRUPO III

8. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

(a) **[1.5]** Calcule a solução homogénea da equação diferencial ordinária.

(b) **[3]** Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária. Calcule ainda a solução para $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

(c) **[3]** Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, usando os mesmos valores iniciais da alínea anterior, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

9. **[2]** Considerando o integral Gaussiano, também conhecido como o integral de Euler-Poisson, dado por

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

mostre, usando a definição de transformada de Laplace e justificando todos os cálculos efectuados, que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \ (s > 0).$$

$\mathcal{L}\{a\} = \dfrac{a}{s}$

$\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \ (n \in \mathbb{N})$

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2 + k^2}$

$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2 + k^2}$

$\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \dfrac{k}{s^2 - k^2}$

$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

$\mathcal{L}\{e^{at} \sin kt\} = \dfrac{k}{(s-a)^2 + k^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at} \cos kt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 + k^2}$

$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$

$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$

$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} F(s)$

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$