

**Importante:** Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala. A desistência só é possível 30 minutos após o início do teste.

Nome COMPLETO: \_\_\_\_\_

## GRUPO I – Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista:** 1.0 valores por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta 1/3 valor na cotação deste Grupo.)

### RESPOSTAS

1	2	3	4	5

1. Qual o valor do integral definido  $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x}} \, dx$  ?

(a)  $-\frac{4}{7}$

(b) 0

(c)  $\frac{4}{7}$

(d)  $\frac{7}{4}$

2. Considere a função  $f(x) = |\sin(x)|$  no intervalo  $x \in [0, 2\pi]$ . Qual o valor da aproximação do integral definido de  $f(x)$  obtido pela soma de Riemann superior para 8 partições de  $\Delta x_i = \pi/4$ .

(a)  $\pi(1 - \sin(\frac{\pi}{4}))$

(b) 4

(c)  $\pi(2 + \sin(\frac{\pi}{4}))$

(d)  $\pi(1 + \sin(\frac{\pi}{4}))$

3. Calcule, se existir, o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t e^{-t^2} \, dt}{x}$ .

(a)  $\frac{1}{2}$

(b)  $+\infty$

(c) 0

(d) 1

4. Seja  $u(x) = (\ln(x^2))^{3/x}$ . Qual a expressão para  $\frac{u'(x)}{u(x)}$ ?

(a)  $\left[ \frac{3}{x^2 \ln x} - \frac{3 \ln(\ln(x^2))}{x^2} \right]$

(b)  $\frac{3}{x} \left[ -\frac{\ln \ln(x^2)}{x} + \frac{3}{x} \right]$

(c)  $-\frac{3}{x} \left[ \frac{1}{\ln x} + \frac{3}{x} \right]$

(d)  $\left[ \frac{3 \ln(\ln(x^2))}{x^2} - \frac{3}{x^2 \ln x} \right]$

5. Calcule, se existir, o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2ax)}{\cos(ax) \sin(bx)}$ .

(a)  $\frac{b}{a}$

(b)  $2\frac{a}{b}$

(c) 0

(d) 1

## GRUPO II

6. **[3]** Uma partícula move-se ao longo de uma trajectória dada pela seguinte curva  $y = x^2 - 2x + 3$ . Encontre as coordenadas do ponto da curva onde a taxa de variação de  $y$ ,  $\frac{dy}{dt}$ , é igual a 4 vezes a taxa de variação de  $x$ ,  $\frac{dx}{dt}$ .

7. **[2]** Esboce a região  $Q$  do plano limitada pelos gráficos das seguintes funções:

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = x, \quad x = 2 \quad e \quad x = e.$$

Determine a área da região  $Q$ .

## GRUPO III

8. **[8]** Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:

(a)  $\int \frac{\sin(\sin(\ln x)) \cos(\ln x)}{x} dx$

(b)  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

(c)  $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$

(d)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

9. **[2]** Considere  $g(x)$ , uma função real de variável real tal que  $g'(x)$  é contínua em  $\mathbb{R}$ . Considere ainda a função  $f(x)$  definida por

$$f(x) = \int_{\ln(x+1)}^{\sin x} g(t) dt,$$

uma função real de variável real tal que  $f'(x)$  e  $f''(x)$  são contínuas em  $\mathbb{R}$ .

Mostre, justificando todos os cálculos efectuados, que  $f''(0) = g(0)$ .

---

Caso entenda necessário, considere a seguinte informação:

$$\frac{d}{dx} (\arctan(u)) = \frac{du}{dx} \frac{1}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx} (\arcsin(u)) = \frac{du}{dx} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$