Integrais Impróprios

Extendem a noção de integral a intervalos não limitados e/ou funções não limitadas.

Os integrais impróprios podem ser dos seguintes tipos:

- **integrais impróprios de 1ª espécie** → quando o intervalo de integração não é limitado (isto é, pelo menos um dos extremos de integração é infinito) mas a função é limitada em qualquer seu subintervalo limitado;

- **integrais impróprios de 2ª espécie** → quando o intervalo de integração é limitado, mas a função integranda não é limitada no intervalo de integração;

Dizem-se **integrais impróprios mistos** os integrais que têm situações dos dois tipos anteriores (ou seja, o intervalo de integração é ilimitado e existe um seu subintervalo limitado no qual a função é ilimitada).

Integrais Impróprios de 1ª espécie

Definição

Seja f uma função integrável em todo o subintervalo fechado e limitado de $[a,+\infty[$ (isto é, todo $[a,\beta]$, com $\beta \geq a$).

Chama-se **integral impróprio da função** f **em** $[a,+\infty[$ a

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_a^{\beta} f(x)dx.$$

Caso o limite exista e seja finito, diz-se que o **integral impróprio** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **é convergente**, sendo esse o seu valor. Caso contrário, se o limite não existir ou não for finito, diz-se que o **integral impróprio é divergente**.

Observação: Nas condições da definição anterior, sendo F o integral indefinido de f, com extremo inferior a,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta \to +\infty} F(\beta).$$

Exemplo importante:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx$$ → **Integral de Dirichlet de 1ª espécie**

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k} dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{divergente}, & \text{se } k \leq 1 \\ \text{convergente}, & \text{se } k > 1 \end{cases}}$$

Definição

Seja f uma função integrável em todo o subintervalo fechado e limitado de $]-\infty, b]$ (isto é, todo $[\alpha, b]$, com $\alpha \leq b$).

Chama-se **integral impróprio da função f em** $]-\infty, b]$ a

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)dx.$$

Caso o limite exista e seja finito, diz-se que o **integral impróprio** $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ **é convergente**. Caso contrário, se o limite não existir ou não for finito, diz-se que o **integral impróprio é divergente**.

Definição

Seja f uma função integrável em todo o intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$. Diz-se que o **integral impróprio**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

é convergente se, para algum $c \in \mathbb{R}$, forem convergentes ambos os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

e nesse caso vem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Se algum dos integrais impróprios $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ ou $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ for divergente, então $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **é divergente**.

Observações:

1- Nunca se trabalha com dois problemas num integral impróprio

Parte-se de modo a termos um problema por integral.

2- Se ambos os integrais

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx \quad \text{e} \quad \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{forem divergentes,}$$

por definição,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{é divergente.}$$

3- A convergência ou divergência de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$ bem como o seu valor, é independente do valor c considerado.

4- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **não pode ser estudado** por $\lim\limits_{\varepsilon \to +\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx.$

De facto,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{c} f(x)dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{c}^{\beta} f(x)dx.}$$

Integrais Impróprios de 2ª espécie

Definição

Seja *f* uma função integrável em todo o subintervalo fechado e limitado de $[a,b[$ (isto é, em todo $[a,\beta] \subset [a,b[$) e não limitada em $[a,b[$.

Chama-se **integral impróprio da função *f* em** $[a,b[$ a

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)dx.$$

Caso o limite exista e seja finito, diz-se que o **integral impróprio** $\int_a^b f(x)dx$ **é convergente**. Caso contrário, se o limite não existir ou não for finito, diz-se que o **integral impróprio é divergente**.

Define-se de maneira análoga $\int_a^b f(x)dx$ quando o problema se verifica em *a*, limite inferior de integração:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(x)dx.$$

Exemplo importante:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx$$ → **Integral de Dirichlet de 2ª espécie**

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^k}dx \quad \text{é} \quad \begin{cases} \text{divergente}, & \text{se } k \geq 1 \\ \text{convergente}, & \text{se } k < 1 \end{cases}}$$

Mantém-se a regra de termos apenas <u>um problema por integral</u> e <u>sempre num extremo</u>:

- **Se o problema é em** c **pertencente ao interior do intervalo** $[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

sendo convergente sse ambos o forem (sendo o seu valor a soma) e divergente se pelo menos um deles for divergente.

- **Se o problema é em ambos os extremos**,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx,$$

com $d \in \,]a,b[$, sendo convergente sse ambos o forem (sendo o seu valor a soma) e divergente se pelo menos um deles for divergente.

Integrais Impróprios Mistos

Se o **integral impróprio for misto**, ou seja, se o intervalo for ilimitado e a função for ilimitada nesse intervalo, aplica-se o raciocínio anterior de modo a termos sempre um problema por integral e sempre num extremo.

O **integral impróprio misto é convergente** sse todos os integrais impróprios em que foi decomposto o forem (e o seu valor será a soma do valor desses integrais).

Se algum dos integrais impróprios em que foi decomposto for divergente, o **integral impróprio misto é divergente**.