U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação
Análise Matemática | 1º Semestre | 2020/2021
Prova Global | 2021.02.17 | Duração: 1h30m

Proposta de resolução

---

1. Qual o valor do integral definido $\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$?

(a) $\frac{15}{8}$ (b) 0 (c) $\frac{8}{15}$ (d) $-\frac{8}{15}$

$$\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x^{3/2}}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x\,x^{3/4}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x^{7/4}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{7/8}\,dx = \left[\frac{x^{15/8}}{15/8} + c\right]_0^1 = \frac{8}{15}$$

2. Considere a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem de coeficientes constantes homogénea $y'' + \omega^2 y = 0$, para $\omega > 0$. Qual das seguintes expressões é solução geral dessa EDO.

(a) $y(x) = C_1 e^x \cos(\omega x) + C_2 e^x \sin(-\omega x)$
(b) $y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{\omega x}$
(c) $y(x) = C_1 e^x e^{\omega i x} + C_2 e^x e^{-\omega i x}$
(d) $y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$

$y'' + w^2 y = 0 \rightsquigarrow$ Equação característica: $\lambda^2 + w^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm wi$

A solução homogénea é:

$$y_h(x) = K_1 e^{-wix} + K_2 e^{+wix} \quad \text{ou} \quad \boxed{y_h(x) = C_1 \cos(wx) + C_2 \sin(wx)}$$

3. Calcule, se existir, o valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos(2t)\,\mathrm{d}t}{\sin(4x)}$.

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $+\infty$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{4}$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos(2t)dt}{\sin(4x)} = \dfrac{0}{0}$ (usar Regra de L'Hôpital) $\rightsquigarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)}{4\cos(4x)} = \dfrac{1}{4}$ (Nota, pelo T.F.C. $\dfrac{d}{dx}\int_0^x \cos(2t)dt = \cos(2x)$)

ou

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x \cos(2t)\,dt}{\sin(4x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left[\frac{1}{2}\sin(2t) + c\right]_0^x}{\sin(4x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(2x)}{\sin(4x)} = \dfrac{0}{0}$ (usar Regra de L'Hôpital)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\cos(2x)}{4\cos(4x)} = \frac{1}{4}$$

4. Considere a função $f(x) = \dfrac{-e^x}{1+e^{2x}}$. Sabemos que $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Qual o valor de C, que permite obter $\int f(x)\,dx = 0$, quando $x = 0$?

(a) $\frac{\ln(2)}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\ln(1)}{2}$ (d) 0

$$\int f(x)\,dx = \emptyset \Leftrightarrow -\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \quad \begin{pmatrix} \text{usar} \\ u = e^x \\ du = e^x dx \end{pmatrix} = \emptyset \Leftrightarrow -\int \frac{du}{1+u^2} = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{arctg}(u) + C = \emptyset \Leftrightarrow C = \operatorname{arctg}(e^x)$$

Se $x = \emptyset \Rightarrow C = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

5. Qual a função $f(t)$, com domínio $t > 0$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \ln(s+a)$?

(a) $f(t) = -\frac{1}{a}e^{-at}$ (b) $f(t) = \frac{1}{ast}e^{-t}$ (c) $f(t) = -\frac{1}{a}e^{at}$ (d) $f(t) = -\frac{1}{t}e^{-at}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\ln(s+a)\} = ?$$

Usar a seguinte transformada:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad \text{com } n=1$$

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -1 \frac{dF(s)}{ds}$$. Aplicar transformada inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{t f(t)\}\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{dF(s)}{ds}\right\} \Leftrightarrow t f(t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{dF}{ds}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{dF}{ds}\right\}$$. Sendo $F(s) = \ln(s+a)$, fica:

$$\Leftrightarrow f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}(\ln(s+a))\right\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = -\frac{1}{t}e^{-at}$$

GRUPO II

6. **[2.5]** Esboce a região Q do plano limitada pelos gráficos das seguintes funções:

$$f_1(x) = \frac{2}{3\pi}x, \quad f_2(x) = \sin(x) + 2, \quad x = 0 \quad e \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

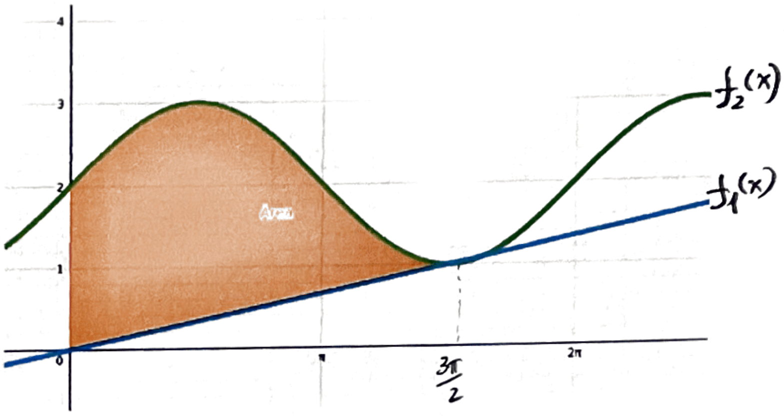
Determine a área da região Q.

$$A_Q = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f_2(x) - f_1(x)\, dx \Leftarrow$$

$$A_Q = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(x) + 2 - \frac{2}{3\pi}x\, dx$$

$$A_Q = \left[-\cos(x) + 2x - \frac{x^2}{3\pi} + C\right]_0^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$A_Q = \left(\emptyset + 3\pi - \frac{3\pi}{4} + \cancel{C}\right) - \left(-1 + \cancel{C}\right) = \frac{9\pi + 4}{4}$$



7. **[3.5]** Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x) + 1}{x^x - 1}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^3}\, dx$

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x + 1}{x^x - 1}\, dx$ $\left(\text{seja, } u = x^x - 1 \Leftrightarrow x^x = u + 1;\ du = (e^{x\ln x})'dx = (x\ln x)' e^{x\ln x} dx = (\ln x + 1)x^x dx\right)$

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{1 + u - u}{(u+1)u}\, du = \int \frac{1+u}{(u+1)u} - \frac{u}{u(u+1)}\, du = \int \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\, du$$

$$= \ln|u| - \ln|u+1| + C = \ln\left|\frac{x^x - 1}{x^x}\right| + C$$

b) $\displaystyle\int \frac{\text{arctg}(x)}{x^3}\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du$, com $\left(\begin{array}{l|l} u = \text{arctg}\, x & v = \frac{x^{-2}}{-2} (+C) \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx & dv = x^{-3}dx \end{array}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\text{arctg}(x)}{x^2} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}}_{A} = -\frac{1}{2}\frac{\text{arctg}(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\text{arctg}(x) - \frac{1}{2}x + K$$

Nota:

$$A = \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{x^2(x^2+1)}\, dx = \int \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\, dx = -\frac{1}{x} - \text{arctg}(x) + C_1$$

ou

$$A = \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{1 + x^2}\, dx$$

$$= A\ln|x| - \frac{B}{x} + \frac{C}{2}\ln|1 + x^2| + D\,\text{arctg}(x)$$

com $1 = A(x^3 + x) + B(x^2 + 1) + Cx^3 + Dx^2$

$$\begin{array}{l} [x^3] \\ [x^2] \\ [x^1] \\ [x^0] \end{array} \left\{\begin{array}{l} \emptyset = C + A \\ \emptyset = B + D \\ A = \emptyset \\ B = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = \emptyset \\ B = 1 \\ C = \emptyset \\ D = -1 \end{array}\right.$$

GRUPO III

8. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

(a) **[4]** Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária.

$y'' - 2y' + y = e^x$ (E.D.O. 2ª Ordem, coeficientes constantes, linear, não homogénea)

Resolver pelo método da variação da constante:

1) Solução Homogénea: $y'' - 2y' + y = 0$

Equação Característica: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

2) Solução Geral:

$$y_G(x) = C_1(x) e^x + C_2(x)\, x e^x \quad \text{com} \quad \begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0 \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x)(x+1) e^x = e^x \end{cases}$$

obter $C_1(x)$ e $C_2(x)$ por Método de Cramer:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (1+x) e^x \end{bmatrix}}_{\text{Wronskiano}} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \end{bmatrix} \overset{:e^x}{\Leftrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{bmatrix}}_{\text{Wronskiano}} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $\|W\| = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & x+1 \end{vmatrix} = x + 1 - x = 1$
- $C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = -1 \cdot x = -x \Rightarrow C_1(x) = \int -x\, dx = -\dfrac{x^2}{2} + \bar{C}_1$
- $C_2'(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow C_2(x) = \int 1\, dx = x + \bar{C}_2$

A solução geral fica:

$$y_G(x) = \left(\bar{C}_1 - \frac{x^2}{2}\right) e^x + (x + \bar{C}_2)\, x e^x \Leftrightarrow \boxed{y_G(x) = \underbrace{\overbrace{\bar{C}_1 e^x + \bar{C}_2 x e^x}^{\text{solução homogénea}}}_{y_h(x)} + \underbrace{\overbrace{\frac{x^2}{2} e^x}^{\text{solução particular}}}_{y_p(x)}}$$

8. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

b) **[3]** Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, usando os mesmos valores iniciais da alínea anterior, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

$y'' - 2y' + y = e^x$ usando transformada de Laplace:

Nota:

$\mathcal{L}\{y\} = Y(s)$

$\mathcal{L}\{e^x\} = \frac{1}{s-1}$

$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(\emptyset)$

$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - s y(\emptyset) - y'(\emptyset)$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^x\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow s^2 Y - s - \emptyset - 2(sY - 1) + Y = \frac{1}{s-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s^2 - 2s + 1) Y = \frac{1}{s-1} + s - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (s-1)^2 Y = \frac{1}{s-1} + s - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{s-2}{(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{s-1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)} + \frac{-1}{(s-1)^2}$$

o valor da solução geral obtê-se usando transformada inversa!

$$y(t) = y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{(s-1)^2}\right\}, \text{ com } \underline{x = t}$$

Logo:

$$\boxed{y(t) = \frac{t^2}{2}e^t + e^t - te^t}$$

ou $x = t$

$$\boxed{y(x) = e^x - xe^x + \frac{x^2}{2}e^x}$$

9. **[2]** Considerando o integral Gaussiano, também conhecido como o integral de Euler-Poisson, dado por

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

mostre, usando a definição de transformada de Laplace e justificando todos os cálculos efectuados, que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}},\ (s > 0).$$

Comparando a definição de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

com o integral Gaussiano:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

Sugere a substituição $\underline{\underline{u^2 = st}}$, sendo $t = \frac{u^2}{s}$

Assim, usando essa substituição (e notando que $dt = \frac{2u}{s} du$), obtê-se, para a transformada de $\mathcal{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\}$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{2u}{s}\, du =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{\sqrt{s}}{\cancel{u}} \frac{2\cancel{u}}{s}\, du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\sqrt{s}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \quad (s > 0)$$

blz.