Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica.

Nome COMPLETO: ______________________________

GRUPO I – Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista**: **1.0** valores por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta 1/3 valor na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4	5

1. Qual o valor do integral definido $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$?

   (a) $\frac{15}{8}$ (b) 0 (c) $\frac{8}{15}$ (d) $-\frac{8}{15}$

2. Considere a seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem de coeficientes constantes homogénea $y'' + \omega^2 y = 0$, para $\omega > 0$. Qual das seguintes expressões é solução geral dessa EDO.

   (a) $y(x) = C_1 e^x \cos(\omega x) + C_2 e^x \sin(-\omega x)$ (b) $y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{\omega x}$

   (c) $y(x) = C_1 e^x e^{\omega i x} + C_2 e^x e^{-\omega i x}$ (d) $y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x)$

3. Calcule, se existir, o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos(2t)\,\mathrm{d}t}{\sin(4x)}$.

   (a) $\frac{1}{4}$ (b) $+\infty$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{4}$

4. Considere a função $f(x) = \dfrac{-e^x}{1+e^{2x}}$. Sabemos que $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Qual o valor de C, que permite obter $\int f(x)\,dx = 0$, quando $x = 0$?

   (a) $\frac{\ln(2)}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\ln(1)}{2}$ (d) 0

5. Qual a função $f(t)$, com domínio $t > 0$, cuja transformada de Laplace é $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \ln(s+a)$?

   (a) $f(t) = -\frac{1}{a}e^{-at}$ (b) $f(t) = \frac{1}{ast}e^{-t}$ (c) $f(t) = -\frac{1}{a}e^{at}$ (d) $f(t) = -\frac{1}{t}e^{-at}$

GRUPO II

6. **[2.5]** Esboce a região Q do plano limitada pelos gráficos das seguintes funções:

$$f_1(x) = \frac{2}{3\pi}x, \quad f_2(x) = \sin(x) + 2, \quad x = 0 \quad e \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Determine a área da região Q.

7. **[3.5]** Calcule os seguintes integrais usando técnicas apropriadas:

(a) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)+1}{x^x - 1}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

GRUPO III

8. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

(a) **[4]** Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária.

(b) **[3]** Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, usando os mesmos valores iniciais da alínea anterior, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

9. **[2]** Considerando o integral Gaussiano, também conhecido como o integral de Euler-Poisson, dado por

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

mostre, usando a definição de transformada de Laplace e justificando todos os cálculos efectuados, que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \ (s > 0).$$

$\mathcal{L}\{a\} = \dfrac{a}{s}$

$\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \ (n \in \mathbb{N})$

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

$\mathcal{L}\{e^{at}\sin kt\} = \dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at}\cos kt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$

$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$

$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$