U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação
Análise Matemática | 1^o Semestre | 2020/2021
2^o Mini Teste | 2021.01.27 | Duração: 1h30m

Importante: Teste sem consulta. Resolva cada GRUPO em folhas separadas: GRUPO I responda na grelha do enunciado; GRUPO II e GRUPO III em folhas de capa separadas. Apresente e justifique convenientemente todos os cálculos que efetuar. Não são consideradas folhas sem identificação. Não é permitida a utilização de tabelas, formulários, telemóveis ou máquina de calcular com capacidade gráfica. Durante a realização da prova não é permitida a saída da sala.

Nome COMPLETO: ______________________________

GRUPO I – Versão A

(Preencha a tabela de RESPOSTAS na folha de enunciado. Não são consideradas respostas múltiplas. **COTAÇÃO prevista**: **1.0** valores por cada resposta CORRETA. Cada resposta ERRADA desconta 1/3 valor na cotação deste Grupo.)

RESPOSTAS

1	2	3	4	5

1. Qual das seguintes expressões é solução da equação diferencial ordinária $x^2y'' - 6xy' + 10y = 0$

   (a) $y(x) = x^2 + C$ (b) $y(x) = Cx^2$ (c) $y(x) = x^{2C}$ (d) $y(x) = Cx^{-2}$

2. Qual o valor do integral definido $\displaystyle\int_0^{\pi} \sec^2 x \, \mathrm{d}x$?

   (a) -2 (b) *diverge* (c) 1 (d) 0

3. Supondo que $y_1(t) = t+4$ e $y_2(t) = te^t$ são soluções da equação diferencial ordinária $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, o valor absoluto do determinante do Wronskiano, $||W||$ é

   (a) $e^t(t+2)^2$ (b) $e^t(t-2)^2$ (c) $te^t(t+2)^2$ (d) $te^t(t+2)$

4. Seja $y(t)$ a solução para a seguinte equação diferencial ordinária, $y'' + ty = 0$, com $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, conhecida como a equação de Airy. Qual das seguintes expressões é solução para a transformada de Laplace de $y(t)$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$?

   (a) $Y(s) = ce^{-\frac{s^3}{3}}$ (b) $Y(s) = \frac{c}{3}e^{s}$ (c) $Y(s) = \frac{c}{3}e^{-s}$ (d) $Y(s) = ce^{\frac{s^3}{3}}$

5. Qual a função $f(t)$, com domínio $t > 0$, cuja transformada de Laplace é $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{5}{(s^2 - 4s + 9)}$?

   (a) $\sqrt{5}e^{2t}\sin(\sqrt{5}t)$ (b) $\sqrt{2}e^{5t}\sin(\sqrt{2}t)$ (c) $\sqrt{2}e^{5t}\cos(\sqrt{2}t)$ (d) $\sqrt{5}e^{2t}\cos(\sqrt{5}t)$

GRUPO II

6. **[2.5]** Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$2(x^2+1)y' + 4xy = x$$

Calcule ainda a solução para $y(2) = 1$.

7. **[3]** Classifique e calcule a solução geral da seguinte equação diferencial ordinária:

$$xy' = x^5 y^{\frac{1}{3}} + 3y$$

GRUPO III

8. Considere a seguinte equação diferencial ordinária:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$

(a) **[1.5]** Calcule a solução homogénea da equação diferencial ordinária.

(b) **[3]** Utilizando o método da variação das constantes, determine a solução geral da equação diferencial ordinária. Calcule ainda a solução para $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

(c) **[3]** Usando transformada de Laplace determine a solução da equação diferencial ordinária, usando os mesmos valores iniciais da alínea anterior, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

9. **[2]** Sabendo a seguinte transformada de Laplace, para $s > 0$,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

mostre, usando a definição de transformada de Laplace, que

$$\mathcal{L}\left\{\sqrt{t}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}, \ (s > 0)$$

Justifique todos os cálculos efectuados.

$\mathcal{L}\{a\} = \dfrac{a}{s}$

$\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \ (n \in \mathbb{N})$

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \dfrac{1}{(s-a)^2}$

$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

$\mathcal{L}\{e^{at}\sin kt\} = \dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{e^{at}\cos kt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$

$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n}$

$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$

$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$

$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$