

FUNÇÕES VECTORIAIS

Introdução

- Chamam-se *funções reais a uma variável real*, ou simplesmente *funções escalares*, às funções que associam um número real a um dado número real. Por exemplo:

$$f(t) = 1 - 3t, \quad g(t) = 1 + 2t + 3t^3, \quad h(t) = \cos(4t) + e^t$$

- Chamam-se *funções vectoriais a uma variável real*, ou simplesmente *funções vectoriais*, às funções que associam um vector a um dado número real. Por exemplo:

$$\vec{f}(t) = \vec{r} + t\vec{d}, \quad \vec{g}(t) = \vec{a} + t\vec{b} + t^2\vec{c}, \quad \vec{h}(t) = \cos(4t)\vec{a} + \sin(2t)\vec{b}$$

- As funções vectoriais podem ser encontradas em diversas áreas da ciência. Por exemplo:
 - i) **Geometria**: representação das linhas (rectas e curvas) no espaço e estudo das suas propriedades;
 - ii) **Física/Mecânica**: trabalho realizado por uma força ao longo de uma dada trajectória, estudo do comportamento cinemático (espaço, velocidade e aceleração) de um corpo em movimento.

Definições

- Sendo $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ funções escalares definidas num intervalo I , então, para cada $t \in I$, é possível definir a função vectorial

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}, \quad t \in I \quad (1)$$

em que I representa o *domínio* de $\vec{f}(t)$ e as funções $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são designadas por *componentes* de $\vec{f}(t)$.

Um valor t pertence ao domínio de $\vec{f}(t)$, se e só se pertencer ao domínio de cada uma das suas componentes. Se o domínio de $\vec{f}(t)$ não for especificado, admite-se que ele corresponderá ao domínio comum das suas componentes.

- Se a função $\vec{f}(t)$ definida em (1) for entendida como um *vector de posição* (*vector radial*) aplicado na origem do referencial, à medida que t toma valores no intervalo I a extremidade do vector de posição traça um determinado *caminho* (*curva*), C , no espaço. Diz-se, então, que $\vec{f}(t)$ *parametriza* C , sendo

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t) \quad \text{e} \quad z = f_3(t)$$

as *equações paramétricas* de C . Se uma das suas componentes for nula em I , por exemplo, se $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j}$, $t \in I$, então C é uma *curva plana*; caso contrário, trata-se de uma *curva espacial*.

- Se se considerar o *referencial cartesiano ortonormado directo Oxyz* para se representar os vectores no espaço, a que está associada a *base canónica*, ou *base natural*, $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \subset \mathbb{R}^3$, a função vectorial definida em (1) pode ser simplesmente escrita sob a forma:

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) , t \in I$$

Exemplo 1: Considerando as funções escalares

$$f_1(t) = p_1 + a_1 t, \quad f_2(t) = p_2 + a_2 t, \quad f_3(t) = p_3 + a_3 t, \quad t \in \mathbb{R}$$

obtém-se a função vectorial

$$\vec{f}(t) = (p_1 + a_1 t)\vec{i} + (p_2 + a_2 t)\vec{j} + (p_3 + a_3 t)\vec{k} , t \in \mathbb{R}$$

que parametriza a *linha recta* que passa no ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e tem o *vector direcção* (*vector director*) $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$.

Se $\vec{a} = (0, 0, 0)$, então $\vec{f}(t)$ reduz-se à função constante:

$$\vec{f}(t) = p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k} = (p_1, p_2, p_3) , t \in \mathbb{R}$$

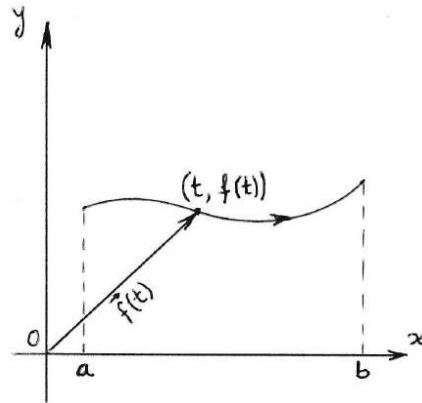
Neste caso, o caminho traçado por $\vec{f}(t)$ reduz-se ao ponto P .

Exemplo 2: A função vectorial

$$\vec{f}(t) = (1 - 3t)\vec{i} + (2 + t)\vec{j} + (-3 + 2t)\vec{k} , t \in [-1, 1]$$

parametriza o *segmento de recta* que liga o ponto $P = (4, 1, -5)$ ao ponto $Q = (-2, 3, -1)$.

Exemplo 3: É possível associar a qualquer função real de variável real, f , definida no intervalo $[a, b]$, uma função vectorial.



Considerando

$$f_1(t) = t, \quad f_2(t) = f(t), \quad f_3(t) = 0, \quad t \in [a, b]$$

obtém-se

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j} + 0\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

À medida que t varia entre a e b , a extremidade do vector de posição $\vec{f}(t)$ traça o *gráfico de f* no sentido definido pelos valores crescentes de t .

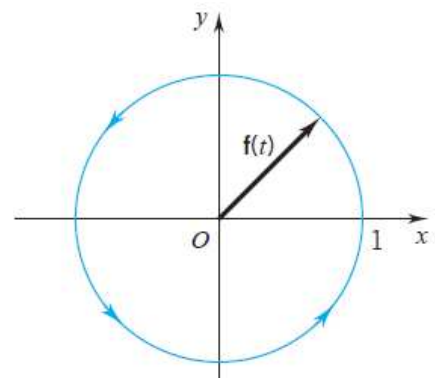
Exemplo 4: Seja a função vectorial

$$\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (2)$$

Notando que

$$\|\vec{f}(t)\| = 1, \quad t \in [0, 2\pi]$$

conclui-se que a função (2) parametriza uma *circunferência* de raio unitário, centrada na origem do referencial Oxy e percorrida no *sentido directo*.



Exemplo 5: A função vectorial

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

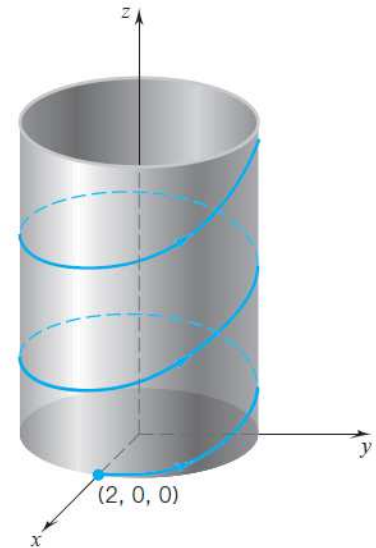
parametriza uma *hélice circular*. Se $t=0$, a extremidade do vector de posição $\vec{f}(0)$ situa-se no ponto $(2,0,0)$.

À medida que t aumenta, a extremidade de $\vec{f}(t)$ descreve uma *espiral* situada sobre a *superfície cilíndrica circular*

$$x^2 + y^2 = 4, \quad z \in \mathbb{R}$$

efectuando uma volta completa em cada intervalo de t de amplitude 2π .

Em cada um desses intervalos a cota da extremidade de $\vec{f}(t)$ sofre uma variação de valor 2π , que é designado por *passo da hélice*.

**Operações envolvendo funções vectoriais**

Teorema 1: Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais e $u(t)$ uma função escalar, funções com um domínio comum I . Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então é possível obter as seguintes funções vectoriais, definidas em I ,

$$(\vec{f} + \vec{g})(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t), \quad (\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})(t) = \alpha\vec{f}(t) + \beta\vec{g}(t),$$

$$(u\vec{f})(t) = u(t)\vec{f}(t), \quad (\vec{f} \times \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$$

assim como a função escalar, definida em I :

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$$

Teorema 2: Seja $u(t)$ uma função escalar com domínio I e tal que o seu contradomínio está contido no domínio da função vectorial $\vec{f}(t)$. Então é possível obter a seguinte função vectorial (*composta*) definida em I :

$$(\vec{f} \circ u)(t) = \vec{f}[u(t)]$$

Limite de uma função vectorial

Teorema 3: Seja a função vectorial $\vec{f}(t)$ definida no intervalo I que contém o ponto t_0 , podendo não estar definida em t_0 , e seja o vector \vec{a} . Então:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}, \text{ se e só se } \lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{f}(t) - \vec{a}\| = 0. \quad (4)$$

- A expressão $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$ pode ser substituída por:

$$\text{quando } t \rightarrow t_0, \vec{f}(t) \rightarrow \vec{a}.$$

Teorema 4: Seja a função vectorial $\vec{f}(t)$ definida no intervalo I que contém o ponto t_0 , podendo não estar definida em t_0 , e seja o vector \vec{a} . Então:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{f}(t)\| = \|\vec{a}\|, \text{ se } \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}. \quad (5)$$

- Note-se que a proposição inversa de (5) é falsa; por exemplo, seja $\vec{f}(t) = \vec{i}$ e $\vec{a} = -\vec{i}$.

Regras para o cálculo de limites

Teorema 5: Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais, $u(t)$ uma função escalar e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supondo que, quando $t \rightarrow t_0$,

$$\vec{f}(t) \rightarrow \vec{a}, \quad \vec{g}(t) \rightarrow \vec{b}, \quad u(t) \rightarrow \varphi$$

então:

$$\begin{aligned} \vec{f}(t) + \vec{g}(t) &\rightarrow \vec{a} + \vec{b}, & \alpha \vec{f}(t) + \beta \vec{g}(t) &\rightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \\ u(t) \vec{f}(t) &\rightarrow \varphi \vec{a}, & \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t) &\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}, & \vec{f}(t) \times \vec{g}(t) &\rightarrow \vec{a} \times \vec{b} \end{aligned}$$

- O cálculo do limite apresentado em (4) pode ser feito componente a componente.

Teorema 6: Admitindo que $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ e $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$, se e só se:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = a_1, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = a_2, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = a_3 \quad (6)$$

Exemplo 6: Seja a função vectorial:

$$\vec{f}(t) = \cos(t - \pi) \vec{i} + 2 \ln(e + t) \vec{j} + e^{2t^3} \vec{k}, \quad t \in (-e, +\infty)$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \vec{f}(t) &= \left[\lim_{t \rightarrow 0} \cos(t - \pi) \right] \vec{i} + \left[2 \lim_{t \rightarrow 0} \ln(e + t) \right] \vec{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} e^{2t^3} \right] \vec{k} = \\ &= (-1) \vec{i} + (2) \vec{j} + (1) \vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (-1, 2, 1) \end{aligned}$$

Continuidade de uma função vectorial

- A função vectorial $\vec{f}(t)$ é *contínua* em t_0 , se e só se:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$$

- Tendo em atenção (6) é evidente que $\vec{f}(t)$ é contínua em t_0 , se e só se cada uma das suas componentes for contínua em t_0 .
- Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais e $u(t)$ uma função escalar contínuas em t_0 . Então as funções

$$\begin{aligned} &(\vec{f} + \vec{g})(t), & (\alpha \vec{f} + \beta \vec{g})(t), & \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ &(u\vec{f})(t), & (\vec{f} \cdot \vec{g})(t), & (\vec{f} \times \vec{g})(t) \end{aligned}$$

são contínuas em t_0 .

- Sejam $u(t)$ uma função escalar contínua em t_0 e $\vec{f}(t)$ uma função vectorial contínua em $u(t_0)$. Então a função vectorial (*composta*) $(\vec{f} \circ u)(t)$ é contínua em t_0 .

Derivabilidade de uma função vectorial

- A função vectorial $\vec{f}(t)$ é *diferenciável (derivável)* em t , se e só se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \text{ existe.}$$

Se este limite existir, então ele é designado por *derivada de $\vec{f}(t)$ em t* e é indicado por $\vec{f}'(t)$.

- Também o cálculo da derivada da função vectorial $\vec{f}(t)$ pode ser feito componente a componente.

Teorema 7: Se $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ é diferenciável em t , então:

$$\vec{f}'(t) = f_1'(t)\vec{i} + f_2'(t)\vec{j} + f_3'(t)\vec{k} = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$$

- Tal como nas funções escalares, se $\vec{f}(t)$ é diferenciável em t , então $\vec{f}(t)$ é contínua em t . Além disso, se $\vec{f}'(t)$ é diferenciável em t , então é possível obter $\vec{f}''(t)$ (*segunda derivada*), e assim sucessivamente.
- Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais e $u(t)$ uma função escalar diferenciáveis em t_0 . Então as funções

$$\begin{aligned} &(\vec{f} + \vec{g})(t), & (\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})(t), & \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ &(u\vec{f})(t), & (\vec{f} \cdot \vec{g})(t), & (\vec{f} \times \vec{g})(t) \end{aligned}$$

são diferenciáveis em t_0 .

- Sejam $u(t)$ uma função escalar diferenciável em t_0 e $\vec{f}(t)$ uma função vectorial diferenciável em $u(t_0)$. Então a função vectorial (*composta*) $(\vec{f} \circ u)(t)$ é diferenciável em t_0 .

Exemplo 7: Seja a função vectorial:

$$\vec{f}(t) = \cos(t - \pi)\vec{i} + 2\ln(e + t)\vec{j} + e^{2t^3}\vec{k}, \quad t \in (-e, +\infty)$$

Então:

$$\vec{f}'(t) = -\sin(t - \pi)\vec{i} + \frac{2}{e + t}\vec{j} + 6t^2e^{2t^3}\vec{k}$$

$$\vec{f}''(t) = -\cos(t - \pi)\vec{i} - \frac{2}{(e + t)^2}\vec{j} + 3t(4 + 12t^3)e^{2t^3}\vec{k}$$

Regras para a derivação

- É possível estabelecer as seguintes regras para a derivação de funções vectoriais:

$$(\vec{f} + \vec{g})'(t) = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)$$

$$(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(t) = \alpha\vec{f}'(t) + \beta\vec{g}'(t), \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(u\vec{f})'(t) = u(t)\vec{f}'(t) + u'(t)\vec{f}(t)$$

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})'(t) = [\vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)] + [\vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t)]$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})'(t) = [\vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)] + [\vec{f}'(t) \times \vec{g}(t)]$$

$$(\vec{f} \circ u)'(t) = \vec{f}'[u(t)]u'(t) = u'(t)\vec{f}'[u(t)] \text{ (regra da cadeia)}$$

Exemplo 8: Sejam as funções

$$\vec{f}(t) = (t^2, -1, t), \quad \vec{g}(t) = (1, 2t, t^3), \quad u(t) = -2t^2$$

tais que:

$$\vec{f}'(t) = (2t, 0, 1), \quad \vec{g}'(t) = (0, 2, 3t^2), \quad u'(t) = -4t$$

Então:

$$(\vec{f} + \vec{g})(t) = (t^2 + 1, -1 + 2t, t + t^3) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t)$$

$$(\vec{f} + \vec{g})'(t) = (2t, 2, 1 + 3t^2) = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)$$

$$(-2\vec{f})(t) = (-2t^2, 2, -2t) = -2\vec{f}(t)$$

$$(-2\vec{f})'(t) = (-4t, 0, -2) = -2\vec{f}'(t)$$

$$(u\vec{f})(t) = (-2t^4, 2t^2, -2t^3) = u(t)\vec{f}(t)$$

$$(u\vec{f})'(t) = (-8t^3, 4t, -6t^2) = u'(t)\vec{f}(t) + u(t)\vec{f}'(t)$$

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = t^2 - 2t + t^4 = \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$$

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})'(t) = 2t - 2 + 4t^3 = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^2 & -1 & t \\ 1 & 2t & t^3 \end{vmatrix} = (-t^3 - 2t^2, t - t^5, 2t^3 + 1) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})'(t) = (-3t^2 - 4t, 1 - 5t^4, 6t^2) = \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)$$

$$(\vec{f} \circ u)(t) = (4t^4, -1, -2t^2) = \vec{f}[u(t)]$$

$$(\vec{f} \circ u)'(t) = (16t^3, 0, -4t) = u'(t)\vec{f}'[u(t)]$$

- Usando a notação de Leibniz, as regras para a derivação atrás apresentadas podem ser reescritas sob a forma:

$$\frac{d}{dt}(\vec{f} + \vec{g}) = \frac{d\vec{f}}{dt} + \frac{d\vec{g}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}) = \alpha\frac{d\vec{f}}{dt} + \beta\frac{d\vec{g}}{dt}, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}(u\vec{f}) = u\frac{d\vec{f}}{dt} + \frac{du}{dt}\vec{f}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \left(\vec{f} \cdot \frac{d\vec{g}}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \cdot \vec{g}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f} \times \vec{g}) = \left(\vec{f} \times \frac{d\vec{g}}{dt}\right) + \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \times \vec{g}\right)$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{d\vec{f}}{du} \frac{du}{dt} \text{ (regra da cadeia)}$$

Teorema 8: Seja $\vec{f}(t)$ uma função vectorial diferenciável, tal que $\|\vec{f}(t)\|$ é constante num intervalo aberto I . Tem-se, então,

$$\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t) = 0, \forall t \in I$$

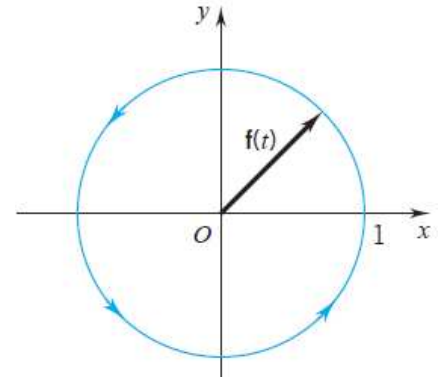
ou seja, os vectores $\vec{f}'(t)$ e $\vec{f}(t)$ são ortogonais em I .

Exemplo 9: Seja a função vectorial do exemplo 4

$$\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

que parametriza uma *circunferência* de raio unitário, centrada na origem do referencial Oxy e percorrida no *sentido directo*, tal que:

$$\|\vec{f}(t)\| = 1, \quad t \in [0, 2\pi]$$



Considerando o vector

$$\vec{f}'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (7)$$

verifica-se, então, que

$$\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

isto é, os vectores $\vec{f}'(t)$ e $\vec{f}(t)$ são ortogonais em cada ponto da circunferência. Assim, pode-se concluir que o vector (7) define uma linha que é tangente à circunferência em cada um dos seus pontos.

Teorema 9: Se $\vec{f}(t)$ é uma função vectorial diferenciável em t , então a função escalar $f(t) = \|\vec{f}(t)\|$ é diferenciável onde não é zero e:

$$\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = f \frac{df}{dt}$$

Além disso, onde $f(t) = \|\vec{f}(t)\| \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{f}}{f} \right) = \frac{1}{f^3} \left[\left(\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt} \right) \times \vec{f} \right]$$

Integrabilidade de uma função vectorial

- Tal como se verifica na derivação, também é possível definir a integração de funções vectoriais componente a componente.

Teorema 10: Sendo $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ uma função vectorial contínua em $[a, b]$, obtém-se:

$$\int_a^b \vec{f}(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_a^b f_2(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_a^b f_3(t) dt \right) \vec{k}$$

Exemplo 10: Considerando

$$\vec{f}(t) = \sin(\pi t)\vec{i} + 3\sqrt{1+t}\vec{j} + 4e^{-2t}\vec{k}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \vec{f}(t) dt &= \left(\int_0^1 \sin(\pi t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_0^1 3\sqrt{1+t} dt \right) \vec{j} + \left(\int_0^1 4e^{-2t} dt \right) \vec{k} = \\ &= -\frac{1}{\pi} [\cos(\pi t)]_0^1 \vec{i} + 2 \left[(1+t)^{3/2} \right]_0^1 \vec{j} - 2 \left[e^{-2t} \right]_0^1 \vec{k} = \\ &= \frac{2}{\pi} \vec{i} + 2(2\sqrt{2} - 1)\vec{j} - 2(e^{-2} - 1)\vec{k} \end{aligned}$$

- Da mesma forma é ainda possível definir integrais indefinidos com funções vectoriais.

Exemplo 11: Considerando

$$\vec{f}'(t) = (\cos(t) + 1)\vec{i} + t^2\text{sen}(t^3)\vec{j} + 2(t - e^t)\vec{k} \text{ e } \vec{f}(0) = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

resulta

$$\begin{aligned}\vec{f}(t) &= \int \vec{f}'(t) dt = \left(\int (\cos(t) + 1) dt \right) \vec{i} + \left(\int t^2 \text{sen}(t^3) dt \right) \vec{j} + \left(\int 2(t - e^t) dt \right) \vec{k} = \\ &= (\text{sen}(t) + t + C_1) \vec{i} + \left(-\frac{1}{3} \cos(t^3) + C_2 \right) \vec{j} + (t^2 - 2e^t + C_3) \vec{k}\end{aligned}$$

onde C_1 , C_2 e C_3 são constantes a serem determinadas.

Uma vez que

$$2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = \vec{f}(0) = C_1\vec{i} + \left(-\frac{1}{3} + C_2 \right) \vec{j} + (-2 + C_3) \vec{k}$$

conclui-se que:

$$C_1 = 2, \quad C_2 = \frac{4}{3} \text{ e } C_3 = 1$$

Obtém-se, então:

$$\vec{f}(t) = (\text{sen}(t) + t + 2) \vec{i} + \left(-\frac{1}{3} \cos(t^3) + \frac{4}{3} \right) \vec{j} + (t^2 - 2e^t + 1) \vec{k}$$

Propriedades do integral

Teorema 11: Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais contínuas em $[a, b]$, o vector \vec{a} e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\int_a^b [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)] dt = \int_a^b \vec{f}(t) dt + \int_a^b \vec{g}(t) dt$$

$$\int_a^b [\alpha \vec{f}(t)] dt = \alpha \int_a^b \vec{f}(t) dt$$

$$\int_a^b [\vec{a} \cdot \vec{f}(t)] dt = \vec{a} \cdot \left(\int_a^b \vec{f}(t) dt \right)$$

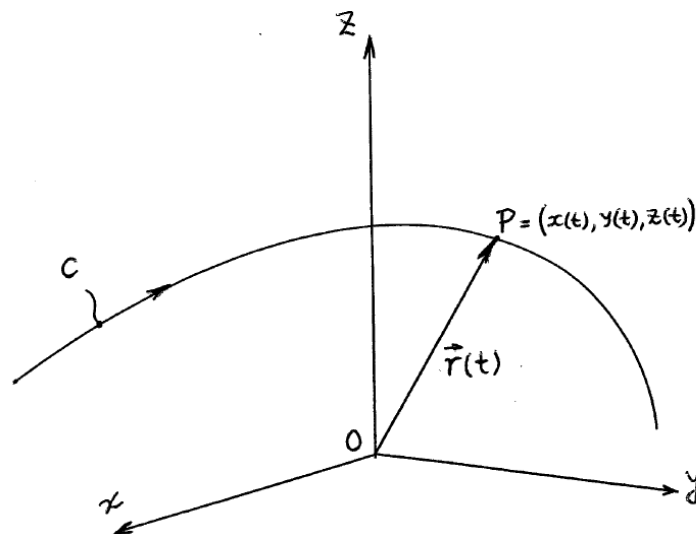
$$\left\| \int_a^b \vec{f}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|\vec{f}(t)\| dt \quad (8)$$

Curvas no espaço

- Admita-se que a função vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

é diferenciável no intervalo I ; nos extremos, caso existam, apenas se exige a continuidade da função. A extremidade do vector de posição (vector radial) $\vec{r}(t)$ é o ponto de coordenadas $P = (x(t), y(t), z(t))$, verificando-se que P traça um caminho, C , quando t toma valores no intervalo I . Diz-se, neste caso, que C é uma *curva diferenciável* e que é *parametrizada* por $\vec{r}(t)$ com o parâmetro t . É uma *curva orientada*, dado que quando t cresce no intervalo I , o vector de posição traça C segundo uma determinada orientação no espaço.



Exemplo 12: Tal como foi assinalado no exemplo 4, a curva parametrizada por

$$\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

é uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do referencial Oxy e percorrida no *sentido directo*.

Exemplo 13: Em contrapartida, a curva parametrizada por

$$\vec{r}(u) = \cos(2\pi - u)\vec{i} + \sin(2\pi - u)\vec{j}, \quad u \in [0, 2\pi]$$

é uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do referencial Oxy e percorrida no *sentido retrógrado*.

Tangente a uma curva

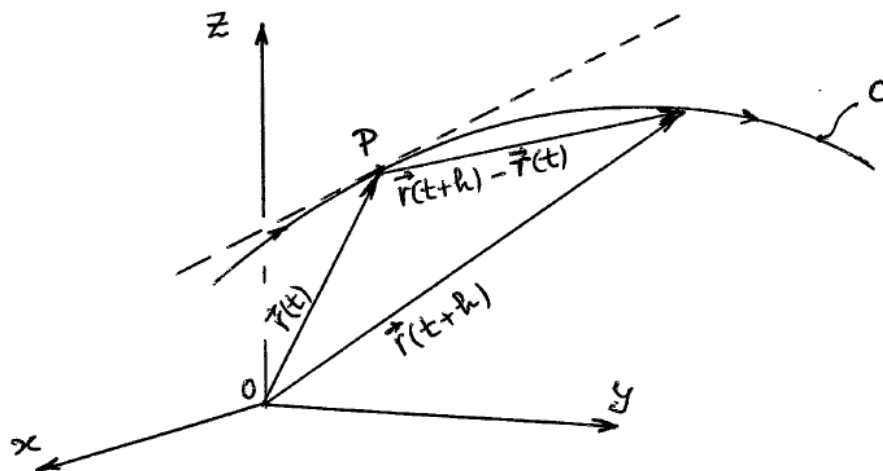
- Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

Notando que

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \quad (9)$$

então, se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, é óbvio que, para um valor de h suficientemente pequeno, o vector $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t) \neq \vec{0}$.



Assim, para cada valor real $h \neq 0$, o vector

$$\frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

é paralelo a $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$ e, portanto, o seu limite (9), que se assume diferente de zero, pode ser tomado como o vector direcção da *linha tangente* à curva C no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$.

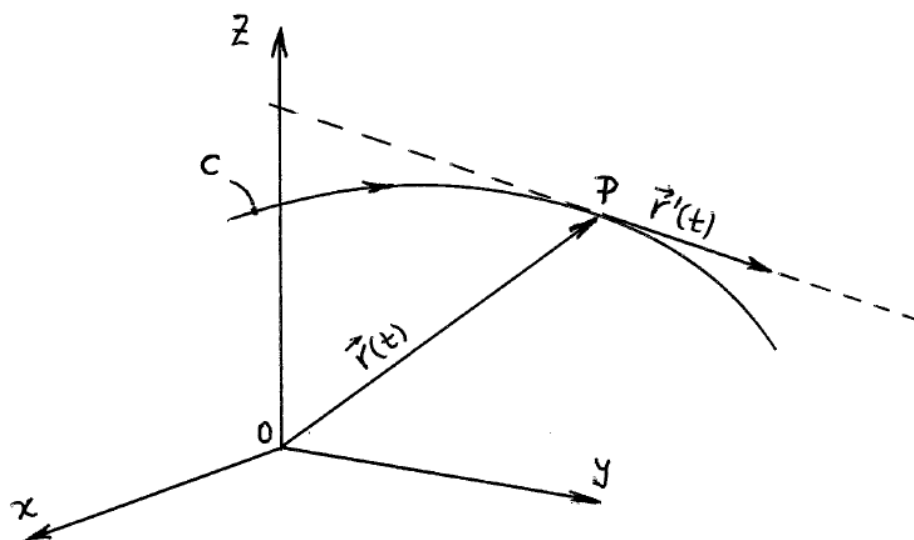
- Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I \quad (10)$$

O vector $\vec{r}'(t)$, se não for nulo, é designado por *vector tangente* à curva C no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ e aponta no sentido definido pelos valores crescentes de t . A linha recta parametrizada por

$$X(u) = P + u\vec{r}'(t), \quad u \in \mathbb{R}$$

chama-se *linha tangente* a C em P .



- Uma curva diferenciável e parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$ diz-se *regular*, se e só se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$.

Exemplo 14: Seja a circunferência de raio a , centrada na origem do referencial Oxy e percorrida no sentido directo:

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j} + 0\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (11)$$

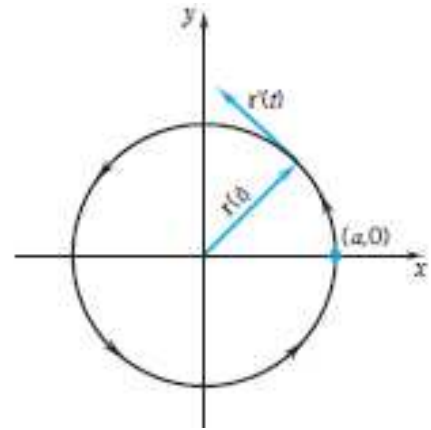
Neste caso, o vector tangente

$$\vec{r}'(t) = -a\sin(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + 0\vec{k}$$

é ortogonal, em cada ponto da curva, ao vector de posição, já que

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

(teorema 8) e aponta no sentido directo, o sentido de percurso da curva.



Exemplo 15: Seja a curva

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

que passa no ponto $P = (-2, 4, -8)$. Dado que $P = \vec{r}(-2)$ e

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

o vector tangente à curva em P é $\vec{a} = \vec{r}'(-2) = \vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$.

Além disso, a função vectorial

$$\vec{r}_1(u) = P + u\vec{a} = (-2 + u)\vec{i} + (4 - 4u)\vec{j} + (-8 + 12u)\vec{k}, \quad u \in \mathbb{R}$$

parametriza a linha tangente à curva no ponto P .

- A linha tangente a uma curva, C , é *invariante* face a uma alteração de parâmetro utilizado na sua parametrização.
Admitindo $t = t(v)$ em (10), a curva passa a ser parametrizada pela função vectorial $\vec{r}_1(v) = \vec{r}[t(v)]$.

Se a derivada $\vec{r}'[t(v)]$ existir, então $\vec{r}'_1(v)$ também existe, sendo dada por (*regra da cadeia*)

$$\frac{d\vec{r}_1}{dv} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{dv} \Leftrightarrow \vec{r}'_1(v) = \vec{r}'[t(v)]t'(v)$$

onde $t'(v) \neq 0$; portanto, se $\vec{r}'[t(v)] \neq \vec{0}$, então $\vec{r}'_1(v) \neq \vec{0}$.

Assim, $\vec{r}'_1(v)$ e $\vec{r}'[t(v)]$ são *vectorios paralelos*; com o mesmo sentido se $t'(v) > 0$ e com sentidos opostos se $t'(v) < 0$.

Conclui-se que as funções vectoriais $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}_1(v)$ mantêm a mesma linha tangente em cada um dos pontos da curva, sendo designadas por *funções equivalentes*.

- As duas curvas

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I_1$$

$$C_2 : \vec{r}_2(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}, \quad u \in I_2$$

intersectam-se, se e só se existirem valores para t e u para os quais $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(u)$. O ângulo, θ , formado pelas curvas C_1 e C_2 num ponto onde $\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(u_0)$ é, por definição

$$\theta = \arccos \frac{|\vec{r}'_1(t_0) \cdot \vec{r}'_2(u_0)|}{\|\vec{r}'_1(t_0)\| \|\vec{r}'_2(u_0)\|}$$

ou seja, é o menor dos ângulos formados pelas respectivas linhas tangentes nesse ponto.

Versor da tangente

- Seja a curva duas vezes diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então, em qualquer ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva é possível obter o vector

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \quad (12)$$

que é designado por *versor da tangente*. Uma vez que $\|\vec{r}'(t)\| > 0$, $\vec{T}(t)$ é um vector unitário com a mesma direcção (paralelo) e o mesmo sentido do vector tangente, $\vec{r}'(t)$.

Exemplo 16: No caso da hélice circular do exemplo 5, parametrizada em (3), o vector tangente à curva é:

$$\vec{f}'(t) = -2\sin(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + \vec{k} = (-2\sin(t), 2\cos(t), 1) \quad (13)$$

Notando que

$$\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{5} \quad (14)$$

o versor da tangente à curva é:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\sin(t), 2\cos(t), 1) \quad (15)$$

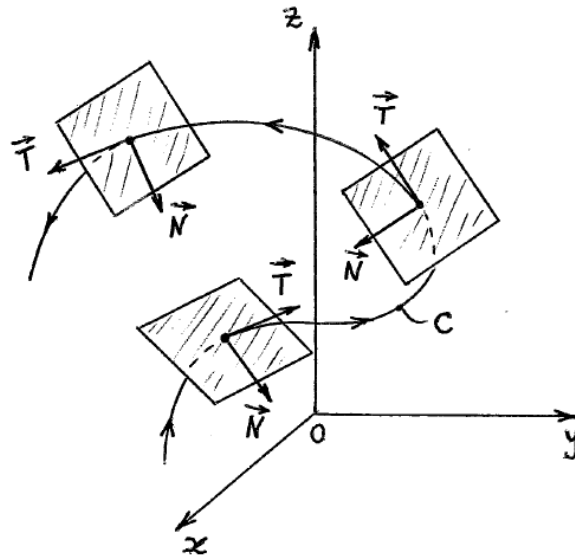
- De um modo geral, o versor $\vec{T}(t)$ vai-se alterando (tal como a linha tangente) ao longo da curva C . Dado que $\|\vec{T}(t)\| = 1$ (constante), essa variação reflecte-se unicamente na mudança da sua direcção.
- A taxa de variação de $\vec{T}(t)$ em relação a t é medida através da sua derivada, $\vec{T}'(t)$.
- O vector $\vec{T}'(t)$ é ortogonal a $\vec{T}(t)$ em cada ponto de C (teorema 8) e aponta no sentido definido pelo lado côncavo da curva.
- No caso de C ser uma linha recta o versor $\vec{T}(t)$ mantém a sua direcção no espaço, pelo que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$.

Versor normal principal

- Se o vector $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então é possível definir, em cada ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C , o *versor normal principal*

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \quad (16)$$

- Dado que $\|\vec{T}'(t)\| > 0$, $\vec{N}(t)$ é um vector unitário com a mesma direcção (paralelo) e o mesmo sentido do vector $\vec{T}'(t)$.



- A linha recta que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva e parametrizada por

$$X(v) = P + v\vec{N}(t), \quad v \in \mathbb{R}$$

chama-se *linha normal* à curva C em P .

Exemplo 17: Em relação à hélice circular dos exemplos 5 e 16, obtém-se:

$$\vec{T}'(t) = \frac{2}{\sqrt{5}}(-\cos(t), -\sin(t), 0) \quad (17)$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = (-\cos(t), -\sin(t), 0) \quad (18)$$

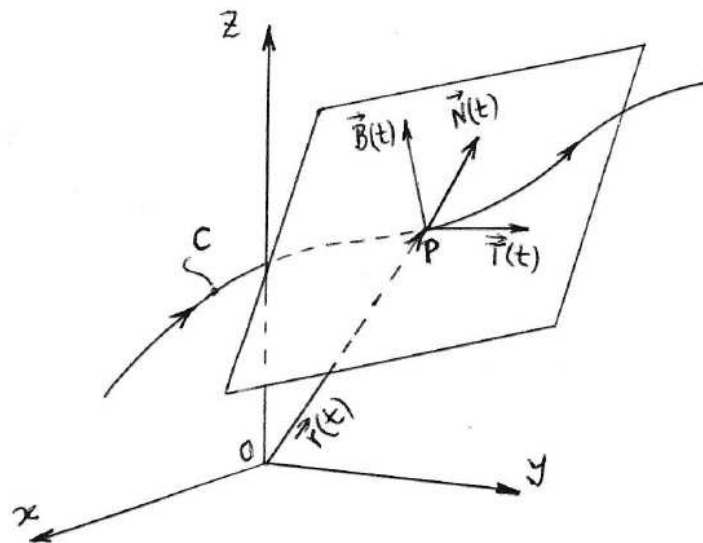
Atente-se que, neste caso (teorema 8):

$$\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$$

Versor binormal

- Se o vector $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então é possível definir, em cada ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C , o *versor binormal*

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$



- Relembrando as propriedades do produto vectorial, pode-se afirmar que $\vec{B}(t)$ é um vector unitário que tem a direcção ortogonal às direcções definidas pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$, sendo o seu sentido determinado pela *regra da mão direita*.
- A linha recta que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva e parametrizada por

$$X(w) = P + w\vec{B}(t), \quad w \in \mathbb{R}$$

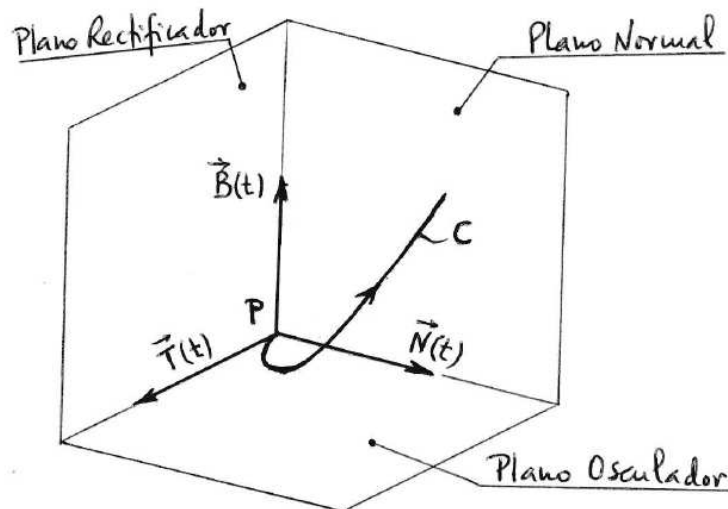
chama-se *linha binormal* à curva C em P .

Exemplo 18: Relativamente à hélice circular dos exemplos 5, 16 e 17, resulta:

$$\begin{aligned}\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin(t) & 2\cos(t) & 1 \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\sin(t), -\cos(t), 2) \end{aligned} \quad (19)$$

Triedro de Frenet

- A cada ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ de uma curva diferenciável C é possível associar o conjunto de versores $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$, que formam uma *base ortonormal* para o espaço vectorial \mathbb{R}^3 e que é designada por *triedro de Frenet*. Estes versores definem, para além das *linhas tangente*, *normal* e *binormal*, três planos ortogonais entre si que constituem os chamados *planos fundamentais* da curva C no ponto P , nomeadamente, os planos *osculador*, *normal* e *rectificador*.



Plano osculador

- O plano que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$ chama-se *plano osculador*. É o plano que mais se aproxima da curva no ponto P e tem a equação vectorial:

$$X(u, v) = P + u\vec{T}(t) + v\vec{N}(t), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor binormal, $\vec{B}(t)$, é um vector normal ao plano osculador no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$(X - P) \cdot \vec{B}(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{B}(t) = P \cdot \vec{B}(t)$$

- Se a curva é plana, e não é uma linha recta, o plano osculador coincide com o plano que contém a curva.

Exemplo 19: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I = \vec{f}(0) = (2, 0, 0)$$

onde o versor da binormal, definido em (19), toma o valor:

$$\vec{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -1, 2)$$

Designando $X = (x, y, z)$, a equação cartesiana do plano osculador da curva no ponto I é:

$$X \cdot \vec{B}(0) = I \cdot \vec{B}(0) \Leftrightarrow -y + 2z = 0$$

Trata-se do plano que contém o eixo dos xx e intersecta o plano coordenado yOz segundo a recta $y = 2z$.

Plano normal

- O plano que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{N}(t)$ e $\vec{B}(t)$ chama-se *plano normal*; a sua equação vectorial é:

$$X(u, v) = P + u\vec{N}(t) + v\vec{B}(t), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor tangente, $\vec{T}(t)$, é um vector normal ao plano normal no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$(X - P) \cdot \vec{T}(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{T}(t) = P \cdot \vec{T}(t)$$

Exemplo 20: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I = \vec{f}(0) = (2, 0, 0)$$

onde o versor da tangente, definido em (15), toma o valor:

$$\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$$

Designando $X = (x, y, z)$, a equação cartesiana do plano normal da curva no ponto I é:

$$X \cdot \vec{T}(0) = I \cdot \vec{T}(0) \Leftrightarrow 2y + z = 0$$

Trata-se do plano que contém o eixo dos xx e intersecta o plano coordenado yOz segundo a recta $z = -2y$.

Plano rectificador

- O plano que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{B}(t)$ chama-se *plano rectificador*, a sua equação vectorial é:

$$X(u, v) = P + u\vec{T}(t) + v\vec{B}(t), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor normal, $\vec{N}(t)$, é um vector normal ao plano rectificador no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$(X - P) \cdot \vec{N}(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{N}(t) = P \cdot \vec{N}(t)$$

Exemplo 21: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I = \vec{f}(0) = (2, 0, 0)$$

onde o versor da normal, definido em (18), toma o valor:

$$\vec{N}(0) = (-1, 0, 0) = -\vec{i}$$

Designando $X = (x, y, z)$, a equação cartesiana do plano rectificador da curva no ponto I é:

$$X \cdot \vec{N}(0) = I \cdot \vec{N}(0) \Leftrightarrow x = 2$$

Trata-se do plano paralelo ao plano coordenado yOz e que é tangente à curva no ponto I .

Segunda derivada do vector de posição

- A expressão (12) permite apresentar o vector tangente sob a forma:

$$\vec{r}'(t) = \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}(t), \text{ se } \|\vec{r}'(t)\| \neq 0$$

Assim, pode-se concluir que o vector tangente pode variar, ao longo da curva C , de duas maneiras distintas:

- i) Em direcção – relativa à variação do versor $\vec{T}(t)$;
 - ii) Na sua norma – relativa à variação da função escalar $\|\vec{r}'(t)\|$.
- A taxa de variação do vector tangente, $\vec{r}'(t)$, é medida, em termos globais, através da sua derivada, ou seja, através da função vectorial $\vec{r}''(t)$.

Teorema 12: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$. Se $\|\vec{r}'(t)\| \neq 0$, então:

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}'(t)$$

ou ainda, recorrendo a (11),

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \|\vec{T}'(t)\| \vec{N}(t) \quad (20)$$

- A equação (20) mostra que o vector $\vec{r}''(t)$ pode ser expresso, em cada ponto da curva C , através da soma de duas componentes que são ortogonais entre si, isto é, uma *componente tangencial* e uma *componente normal*.

- A *componente tangencial*, definida por

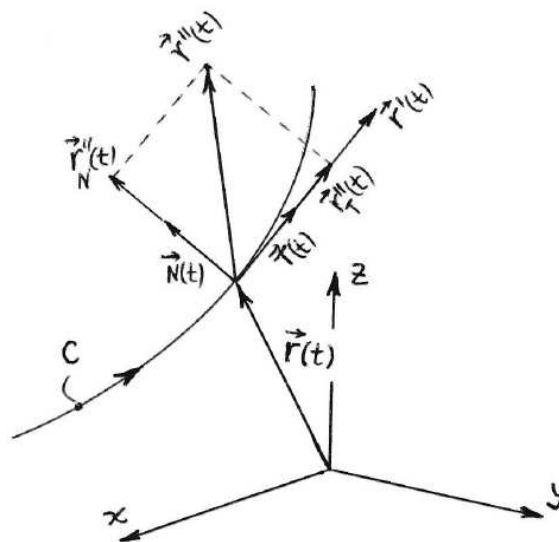
$$\vec{r}_T''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t)$$

é paralela ao versor $\vec{T}(t)$ e mede a variação da norma do vector tangente; não sendo nula, terá o mesmo sentido de $\vec{T}(t)$ se $\|\vec{r}'(t)\|' > 0$ e o sentido oposto se $\|\vec{r}'(t)\|' < 0$.

- A *componente normal*, definida por

$$\vec{r}_N''(t) = \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}'(t) = \|\vec{r}'(t)\| \|\vec{T}'(t)\| \vec{N}(t)$$

é paralela ao versor $\vec{N}(t)$ e mede a variação de direcção do vector tangente; não sendo nula, terá sempre o mesmo sentido de $\vec{N}(t)$, já que $\|\vec{r}'(t)\| \|\vec{T}'(t)\| > 0$.



- Se a curva não é uma linha recta, então $\vec{r}_N''(t) \neq \vec{0}$; caso contrário, obtém-se $\vec{r}''(t) = \vec{r}_T''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t)$, já que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$.

Exemplo 22: Seja a hélice circular do exemplo 5 e parametrizada em (3). Tendo em atenção (13) conclui-se que:

$$\vec{f}_T''(t) = \|\vec{f}'(t)\|' \vec{T}(t) = 0 \vec{T}(t) = (0,0,0)$$

Além disso, recorrendo a (14) e (17), resulta:

$$\vec{f}_N''(t) = \|\vec{f}'(t)\| \vec{T}'(t) = 2(-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

Derivando (13)

$$\vec{f}''(t) = (-2\cos(t), -2\sin(t), 0) \quad (21)$$

obtém-se, tal como era de prever:

$$\vec{f}''(t) = \vec{f}_N''(t)$$

Neste caso o vector $\vec{f}''(t)$ tem, em cada ponto da curva, a direcção e o sentido do versor $\vec{N}(t)$ e mede apenas a variação de direcção do vector tangente.

Teorema 13: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$.

i) Se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ e $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então:

$$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{T}'(t)\|}$$

ii) Se $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}''(t)$ são vectores não nulos e não paralelos, então:

$$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|} \quad (22)$$

- Sendo $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ um vector normal ao plano osculador no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva, a equação cartesiana deste plano pode ainda ser dada por:

$$(X - P) \cdot \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = P \cdot \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$$

Exemplo 23: Seja a hélice circular do exemplo 5. Atendendo a (13), (21) e (22) resulta

$$\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t) = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin(t) & 2\cos(t) & 1 \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = 2(\sin(t), -\cos(t), 2)$$

$$\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\| = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)}{\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sin(t), -\cos(t), 2)$$

confirmando-se o resultado encontrado em (19).

Exemplo 24: Em relação à circunferência do exemplo 14 e parametrizada em (11) obtém-se

$$\vec{r}'(t) = -a\sin(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + 0\vec{k} = a(-\sin(t), \cos(t), 0), \quad \|\vec{r}'(t)\| = a,$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = (-\sin(t), \cos(t), 0),$$

$$\vec{T}'(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0), \quad \|\vec{T}'(t)\| = 1,$$

$$\vec{N}(t) = \vec{T}'(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0),$$

$$\vec{r}''(t) = a(-\cos(t), -\sin(t), 0),$$

$$\vec{r}_T''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t) = 0 \vec{T}(t) = (0, 0, 0),$$

$$\vec{r}_N''(t) = \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}'(t) = \vec{r}''(t) = a(-\cos(t), -\sin(t), 0),$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = a^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = a^2 (0, 0, 1),$$

$$\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = a^2,$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|} = (0, 0, 1) = \vec{k} \end{aligned}$$

Neste caso o plano osculador é constante em todos os pontos da circunferência e tem a equação $z=0$, sendo coincidente com o plano coordenado xOy , plano onde está situada toda a curva.

Por exemplo, no ponto inicial da curva $I = \vec{r}(0) = (a, 0, 0)$ tem-se

$$\vec{T}(0) = (0, 1, 0),$$

$$\vec{N}(0) = (-1, 0, 0)$$

pelo que, neste ponto, o plano normal tem a equação $y=0$ (plano coordenado xOz) e o plano rectificador tem a equação $x=a$, sendo um plano estritamente paralelo ao plano coordenado yOz .

Comprimento de arco

- Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

Pretende-se obter uma função que determine o comprimento da curva, $L(C)$, medido a partir do seu ponto inicial, $\vec{r}(a)$.

- A função pretendida é uma função escalar, $s(t)$, $t \in [a, b]$, designada por *comprimento de arco*, que tem as seguintes propriedades:
 - É uma função monótona crescente;
 - $s(a) = 0$ e $s(b) = L(C)$;
 - É aditiva.

- Comecemos por mostrar que:

$$L(C) \leq \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Consideremos o seguinte conjunto de pontos em $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

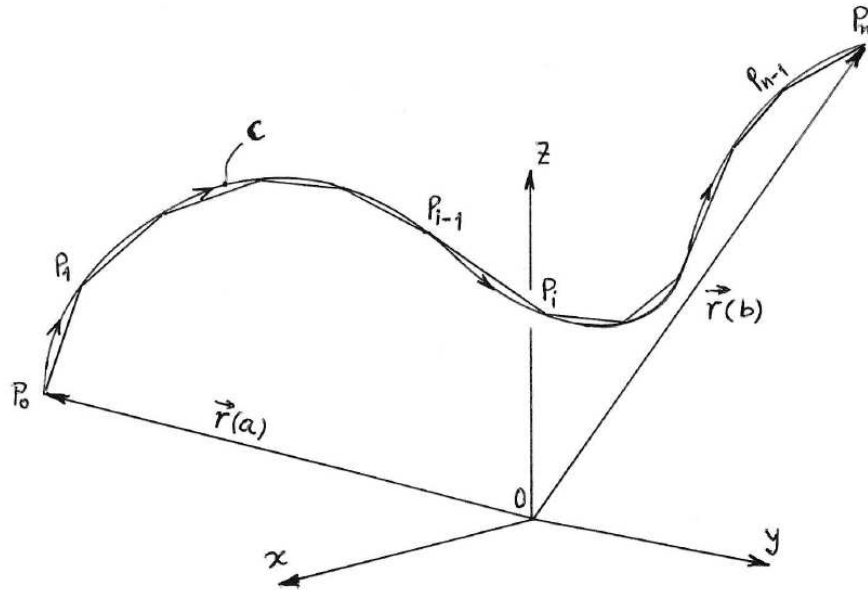
a que correspondem, respectivamente, os seguintes pontos sobre a curva C :

$$P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_{n-1}, P_n$$

Unindo estes pontos, consecutivamente, através de segmentos de recta, obtém-se uma *linha poligonal* γ , ou seja,

$$\gamma = \overline{P_0P_1} \cup \dots \cup \overline{P_{i-1}P_i} \cup \dots \cup \overline{P_{n-1}P_n}$$

que constitui uma aproximação para a curva C .



É intuitivo que, por mais pontos que se considere na construção de γ , o comprimento de γ nunca excederá o comprimento de C , isto é:

$$L(\gamma) \leq L(C)$$

Seja, então, a seguinte partição arbitrária, Π , para o intervalo $[a, b]$

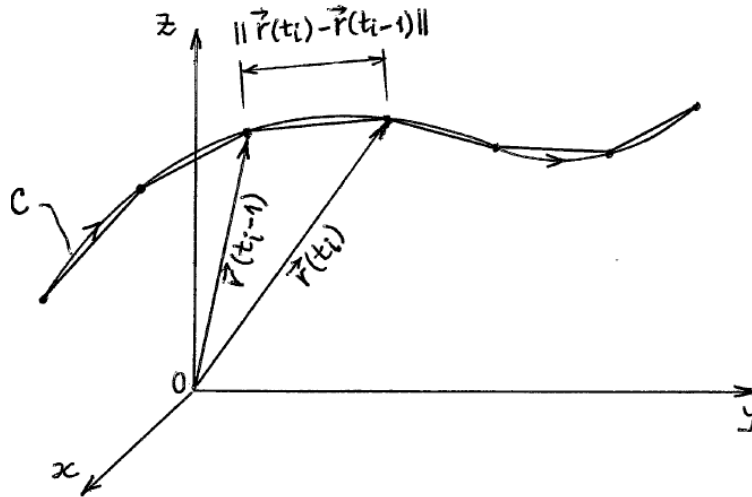
$$\Pi = \{a = t_0, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_n = b\}$$

à qual estão associados os seguintes pontos em C :

$$\vec{r}(a) = \vec{r}(t_0), \dots, \vec{r}(t_{i-1}), \vec{r}(t_i), \dots, \vec{r}(t_n) = \vec{r}(b)$$

O comprimento da linha poligonal inscrita em C é dado por:

$$L_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\|$$



Notando que

$$\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}'(t) dt$$

resulta, tendo em atenção (8),

$$\|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\vec{r}'(t)\| dt$$

e, portanto,

$$L_{\Pi} = \sum_{i=1}^n \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Como a partição Π considerada é arbitrária, então a desigualdade

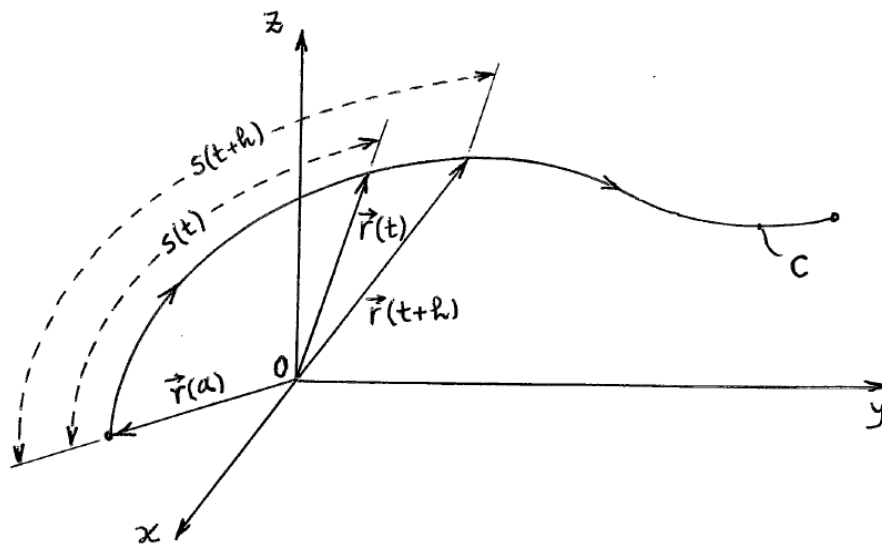
$$L_{\Pi} \leq \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt \quad (23)$$

deverá verificar-se para qualquer L_{Π} , pelo que é possível afirmar que o integral em (23) será um *majorante* para qualquer L_{Π} .

Como $L(C)$ é o *supremo* de todos os valores que se podem obter para L_{Π} , então pode-se concluir que:

$$L_{\Pi} \leq L(C) \leq \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt \quad (24)$$

- O objectivo seguinte passa por mostrar que a desigualdade (24) é, na realidade, uma igualdade.
- Sejam os pontos $\vec{r}(a)$, $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$, em que $h > 0$, sobre a curva C , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, tais que:
 - i) $s(a) = 0$;
 - ii) $s(t)$ é o comprimento de C entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$;
 - iii) $s(t+h)$ é o comprimento de C entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t+h)$;
 - iv) $s(t+h) - s(t)$ é o comprimento de C entre $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$.



Atendendo a (24), tem-se

$$\|\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)\| \leq s(t+h) - s(t) \leq \int_t^{t+h} \|\vec{r}'(u)\| du$$

ou seja, dividindo por $h > 0$,

$$\left\| \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \right\| \leq \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\vec{r}'(u)\| du$$

O primeiro teorema do valor médio permite escrever:

$$\exists c \in (t, t+h) : \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\vec{r}'(u)\| du = \frac{1}{h} \|\vec{r}'(c)\| (t+h-t) = \|\vec{r}'(c)\|$$

Verifica-se, então,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \right\| \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\vec{r}'(u)\| du$$

isto é:

$$\|\vec{r}'(t)\| \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \|\vec{r}'(t)\| \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \|\vec{r}'(t)\|$$

De modo semelhante, é possível mostrar que se $h < 0$:

$$\|\vec{r}'(t)\| \leq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \leq \|\vec{r}'(t)\| \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \|\vec{r}'(t)\|$$

Assim, conclui-se que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \|\vec{r}'(t)\| \Leftrightarrow s'(t) = \|\vec{r}'(t)\|$$

Integrando entre a e t , obtém-se

$$s(t) - s(a) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du$$

e, ainda,

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du$$

já que, por hipótese, se considerou $s(a) = 0$.

O comprimento total da curva C é, então, dado por:

$$L(C) = s(b) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Exemplo 25: Seja a circunferência do exemplo 14, parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j} + 0\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Sabendo que

$$\vec{r}'(t) = -a\sin(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + 0\vec{k} \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = a$$

o comprimento de arco é:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}'(u)\| du = a \int_0^t du = at, \quad t \in [0, 2\pi]$$

O perímetro da circunferência corresponde ao comprimento da curva entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(2\pi)$, isto é:

$$s(2\pi) = a \int_0^{2\pi} du = 2\pi a$$

Exemplo 26: Seja a hélice circular do exemplo 5, parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad t \geq 0$$

Notando que

$$\vec{f}'(t) = -2\sin(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow \|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{5}$$

o comprimento de arco é:

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{f}'(u)\| du = \sqrt{5} \int_0^t du = \sqrt{5}t, \quad t \geq 0$$

O comprimento da curva entre os pontos $\vec{f}(0)$ e $\vec{f}(2\pi)$ é:

$$s(2\pi) = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} du = 2\sqrt{5}\pi$$

Exemplo 27: A função vectorial

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t \in [0, \pi/2]$$

parametriza a curva, C , que tem o seu ponto inicial em $\vec{r}(0) = (2, 0, 0)$ e tem o seu ponto final em $\vec{r}(\pi/2) = (0, 2, \pi^2/4)$.

A curva C é um arco de uma *hélice circular* que, contrariamente ao que sucede com a hélice do exemplo 5, tem *passo* variável; entre as rotações de ordem $n-1$ e de ordem n o passo tem o valor:

$$(2n-1)(2\pi)^2$$

Pretende-se calcular o comprimento de C e compara-lo com a distância entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(\pi/2)$.

Dado que

$$\vec{r}'(t) = -2\sin(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + 2t\vec{k} \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = 2\sqrt{1+t^2}$$

o comprimento da curva C é dado por:

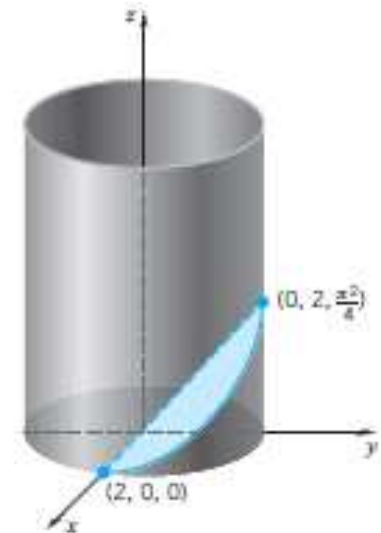
$$L(C) = \int_0^{\pi/2} \|\vec{r}'(t)\| dt = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+t^2} dt \quad (25)$$

Considerando no integral indefinido

$$\int \sqrt{1+t^2} dt$$

a mudança de variável

$$t = \operatorname{tg}(u) \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2(u)} du = \sec^2(u) du$$



e notando que

$$\sec^2(u) = 1 + \operatorname{tg}^2(u)$$

resulta:

$$\int \sqrt{1+t^2} dt = \int \sec^2(u) \sqrt{1+\operatorname{tg}^2(u)} du = \int \sec^2(u) \sec(u) du \quad (26)$$

Aplicando o processo de integração por partes

$$v = \sec(u) \Rightarrow dv = \sec(u) \operatorname{tg}(u) du$$

$$dw = \sec^2(u) du \Rightarrow w = \operatorname{tg}(u)$$

obtem-se para (26):

$$\begin{aligned} \int \sec^2(u) \sec(u) du &= \int v dw = vw - \int w dv \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int \sec^3(u) du &= \sec(u) \operatorname{tg}(u) - \int \sec(u) (\sec^2(u) - 1) du \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \int \sec^3(u) du &= \sec(u) \operatorname{tg}(u) + \int \sec(u) du \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int \sec^3(u) du &= \frac{1}{2} \sec(u) \operatorname{tg}(u) + \frac{1}{2} \int \sec(u) du \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int \sec^3(u) du &= \frac{1}{2} t \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \int \sec(u) du \quad (27) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int \sec(u) du = \int \sec(u) \frac{\sec(u) + \operatorname{tg}(u)}{\sec(u) + \operatorname{tg}(u)} du = \int \frac{\sec^2(u) + \sec(u) \operatorname{tg}(u)}{\sec(u) + \operatorname{tg}(u)} du$$

e tendo em conta que

$$v = \sec(u) + \operatorname{tg}(u) \Rightarrow dv = (\sec(u) \operatorname{tg}(u) + \sec^2(u)) du$$

resulta:

$$\begin{aligned}\int \sec(u) du &= \int \frac{1}{v} dv = \ln(v) + K_1 = \ln(\sec(u) + \operatorname{tg}(u)) + K_1 = \\ &= \ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right) + K_1\end{aligned}\quad (28)$$

Recorrendo a (27) e (28), o integral indefinido (26) toma o valor

$$\int \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right) + K$$

pelo que o comprimento da curva C , definido em (25), é:

$$\begin{aligned}L(C) &= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+t^2} dt = \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right) \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{\pi}{2} \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} + \ln\left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right]\end{aligned}\quad (29)$$

A distância entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(\pi/2)$ é:

$$\|\vec{r}(\pi/2) - \vec{r}(0)\| = \left\| -2\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{\pi^2}{4}\vec{k} \right\| = \sqrt{8 + \frac{\pi^4}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{128 + \pi^4} \quad (30)$$

Comparando os valores das distâncias (29) e (30)

$$\frac{L(C)}{\|\vec{r}(\pi/2) - \vec{r}(0)\|} \cong 1,108$$

pode-se concluir que o comprimento da curva C é cerca de 11% maior que a distância entre os pontos que são as suas extremidades.

Exemplo 28 Seja a curva, C , correspondente ao gráfico da função real de variável real do exemplo 3, parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j} + 0\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

Sabendo que

$$\vec{f}'(t) = \vec{i} + f'(t)\vec{j} + 0\vec{k} \Rightarrow \|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{1 + [f'(t)]^2}$$

o seu comprimento é:

$$L(C) = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

- Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

Sendo $s(t)$ o comprimento de C entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$, então

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

e, portanto,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

- Seja a função contínua e diferenciável $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Sendo $s(x)$ o comprimento do gráfico da função entre $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$, então:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

O comprimento de arco como parâmetro

- Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

com comprimento igual a $L(C) = L$.

O comprimento de C entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$ é:

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du$$

Dado que $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\| > 0$, a função $s = s(t)$ é estritamente crescente e injectiva. É, então, possível definir a sua função inversa:

$$t = t(s), \quad s \in [0, L]$$

A função vectorial

$$\vec{R} = \vec{R}(s) = \vec{r}[t(s)], \quad s \in [0, L]$$

parametriza a curva C em relação ao comprimento de arco.

Teorema 14: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada em relação ao comprimento de arco, s , pela função $\vec{R} = \vec{R}(s)$, $s \in [0, L]$. Então $\|\vec{R}'(s)\| = 1$ e, portanto:

$$\vec{R}'(s) = \vec{T}(s)$$

Neste caso o vector tangente à curva, $\vec{R}'(s)$, coincide com o versor da tangente, $\vec{T}(s)$, em cada ponto de C .

Exemplo 29: Em relação à circunferência dos exemplos 14 e 25, tem-se

$$s = s(t) = at \Leftrightarrow t = t(s) = s/a$$

pelo que:

$$\vec{R}(s) = \vec{r}\left(\frac{s}{a}\right) = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + a\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} + 0\vec{k}, \quad s \in [0, 2\pi a]$$

Assim,

$$\vec{R}'(s) = -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} + 0\vec{k}$$

e, portanto, $\|\vec{R}'(s)\| = 1$.

Exemplo 30: No caso da hélice circular dos exemplos 5 e 26, tem-se

$$s = s(t) = \sqrt{5}t \Leftrightarrow t = t(s) = s/\sqrt{5}$$

pelo que:

$$\vec{R}(s) = \vec{f}\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) = 2\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{i} + 2\sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\vec{k}, \quad s \geq 0$$

Assim,

$$\vec{R}'(s) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

e, portanto, $\|\vec{R}'(s)\| = 1$.

Aplicação ao movimento curvilíneo

- Admita-se que a curva C representa a *trajectória* percorrida por um objecto que se movimenta no espaço, situando-se, em cada instante de tempo t , no ponto que é a extremidade do vector de posição:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

Neste caso, a função vectorial $\vec{r}(t)$ é usualmente designada por *função de posição do movimento*.

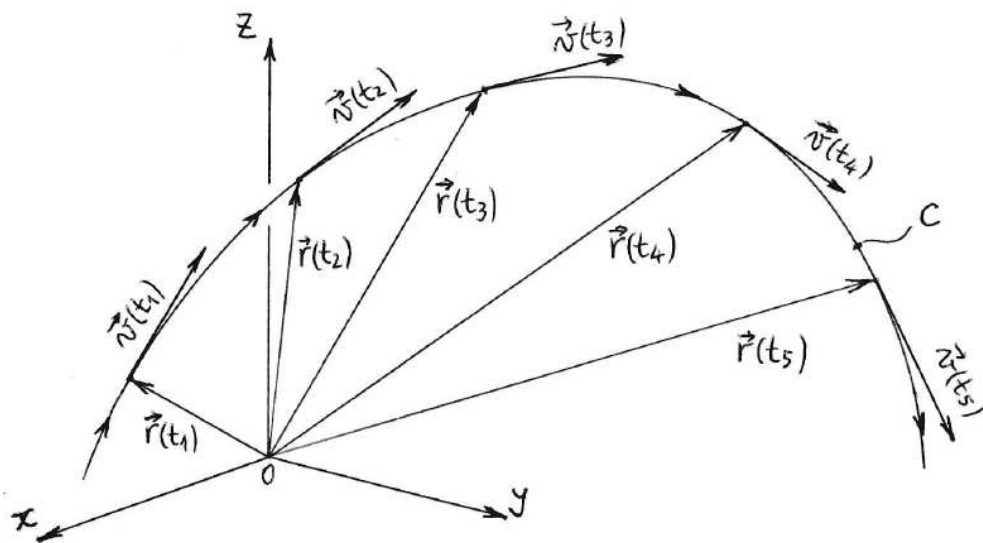
- O movimento do objecto ao longo da trajectória, C , é caracterizado, em termos cinemáticos, através das propriedades seguintes:

a) *Vector velocidade* no instante t : $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$.

É tangente à trajectória em cada ponto e aponta no sentido do movimento, sendo dado por

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$$

em que $\vec{T}(t)$ é o versor da tangente à trajectória e $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ é o *módulo do vector velocidade* (grandeza medida pelo velocímetro).



- b) Durante o intervalo de tempo $[t_0, t]$ o objecto desloca-se, ao longo de C , entre os pontos $\vec{r}(t_0)$ e $\vec{r}(t)$, percorrendo o espaço dado por:

$$s'(t) = v(t) \Rightarrow s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^t v(u) du, \quad t_0, t \in I$$

- c) *Vector aceleração* no instante t : $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$.

Mede a variação do *vector velocidade*, $\vec{v}(t)$, podendo, de um modo geral, ser decomposto em duas componentes ortogonais:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t)$$

- d) *Vector aceleração tangencial* no instante t : $\vec{a}_T(t)$.

Mede a variação do *módulo do vector velocidade*, $v(t)$, sendo definido por:

$$\vec{a}_T(t) = v'(t) \vec{T}(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{T}(t)$$

Se $v'(t) = 0$ o movimento é *uniforme* ($v(t)$ é constante) e, portanto, $\vec{a}_T(t) = \vec{0}$. O movimento é *acelerado* se $v'(t) > 0$ ($\vec{v}(t)$ e $\vec{a}_T(t)$ são vectores paralelos e com o mesmo sentido), sendo *retardado* se $v'(t) < 0$ ($\vec{v}(t)$ e $\vec{a}_T(t)$ são vectores paralelos e com sentidos opostos).

- e) *Vector aceleração normal* no instante t : $\vec{a}_N(t)$.

Mede a variação de direcção do *vector velocidade*, $\vec{v}(t)$, sendo dado por

$$\vec{a}_N(t) = v(t) \vec{T}'(t) = v(t) \|\vec{T}'(t)\| \vec{N}(t) = \frac{ds}{dt} \|\vec{T}'(t)\| \vec{N}(t) \quad (31)$$

em que $\vec{N}(t)$ é o versor normal principal. Esta componente só será nula se a trajectória for rectilínea, já que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$; caso contrário, apontará, tal com o versor $\vec{N}(t)$, no sentido definido pelo lado côncavo da trajectória, sendo, também, designada por *componente centrípeta* do *vector aceleração*.

f) O *módulo do vector aceleração* $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$ no instante t pode ser reescrito sob a forma

$$a(t) = \sqrt{a_T^2(t) + a_N^2(t)}$$

em que

$$a_T(t) = \|\vec{a}_T(t)\| = |v'(t)|$$

é o *módulo do vector aceleração tangencial* e

$$a_N(t) = \|\vec{a}_N(t)\| = v(t) \|\vec{T}'(t)\| \quad (32)$$

é o *módulo do vector aceleração normal*.

Notando que

$$v'(t) = \vec{a}(t) \cdot \vec{T}(t)$$

tem-se:

$$a_T(t) = \left| \vec{a}(t) \cdot \vec{T}(t) \right| = \frac{|\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t)|}{v(t)}$$

Por outro lado, tendo em conta que

$$\vec{T}(t) \times \vec{a}(t) = v(t) \vec{T}(t) \times \vec{T}'(t) = v(t) \|\vec{T}'(t)\| \vec{B}(t)$$

obtém-se:

$$a_N(t) = \|\vec{T}(t) \times \vec{a}(t)\| = \frac{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|}{v(t)} \quad (33)$$

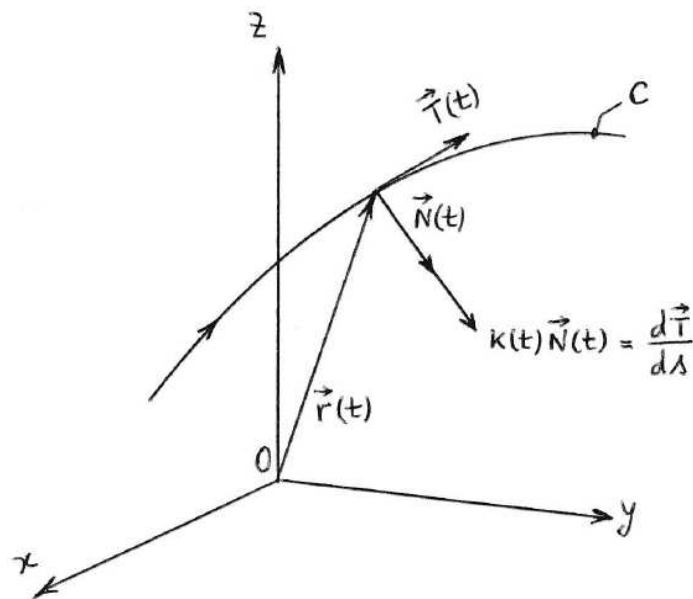
Curvatura de uma curva no espaço

- Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. De um modo geral, o versor da tangente, $\vec{T}(t)$, varia ao longo da curva, que se reflecte, unicamente, na mudança da sua direcção (sendo versor, a norma é constante e igual a um).

- Designa-se por *vector curvatura* da curva C à variação de direcção do versor da tangente por unidade do comprimento de arco, ou seja, $d\vec{T}/ds$.



- Chama-se *curvatura* da curva C , designando-se por k , à norma do vector curvatura, isto é,

$$k = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| \geq 0$$

Teorema 15: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} \vec{N}(t) \quad (34)$$

$$k(t) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

Teorema 16: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \quad (35)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k(t) \vec{N}(t) = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \times \vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|^4}$$

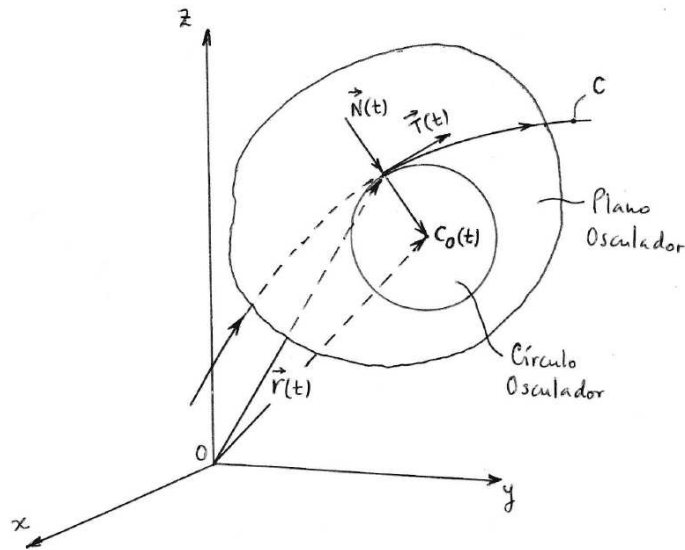
- Chama-se *raio de curvatura*, designando-se por ρ , da curva C ao inverso da curvatura, isto é:

$$\rho = \frac{1}{k}, \quad k > 0$$

- Em face do que foi exposto, é de realçar o seguinte:
 - i) Se $k \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow \infty$: a curva C tende para uma linha recta;
 - ii) Se $k \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$: a curva C tende para um ponto.

- Chama-se *círculo osculador* num ponto da curva C ao círculo situado no plano osculador, tangente à curva e com raio igual ao raio de curvatura de C nesse ponto. Trata-se do círculo que mais se ajusta à curva em cada um dos seus pontos. O centro do círculo osculador em cada ponto da curva, C_O , é o ponto definido por:

$$C_O(t) = \vec{r}(t) + \rho(t)\vec{N}(t)$$



- No caso do movimento curvilíneo, o vector aceleração normal no instante t , expresso em (31), pode ser reescrito sob a forma

$$\vec{a}_N(t) = k(t)v^2(t)\vec{N}(t) = k(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N}(t)$$

enquanto o seu módulo, definido em (32), é dado por:

$$a_N(t) = k(t)v^2(t) = k(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Finalmente, atendendo a (33), conclui-se que:

$$k(t) = \frac{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|}{v^3(t)}$$

Exemplo 31: Relativamente à circunferência dos exemplos 14 e 24 e parametrizada por

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j} + 0\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

obtém-se:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}(-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$k(t) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}$$

Tal como previsto, o raio de curvatura é constante em qualquer ponto da curva

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)} = a$$

e o centro do círculo osculador é coincidente com o próprio centro da circunferência:

$$C_O(t) = \vec{r}(t) + a(-\cos(t), -\sin(t), 0) = (0, 0, 0)$$

Exemplo 32: Seja a hélice circular do exemplo 5 e parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad t \geq 0$$

Atendendo a (14), (17) e (18), obtém-se:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|} = \frac{2}{5}(-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$k(t) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{f}'(t)\|} = \frac{2}{5} \Rightarrow \rho(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{5}{2}$$

$$C_O(t) = \vec{f}(t) + \frac{5}{2}(-\cos(t), -\sin(t), 0) = \frac{1}{2}(-\cos(t), -\sin(t), 2t)$$

Exemplo 33: Seja a hélice circular (passo variável) parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j} + t^2\vec{k}, \quad t \geq 0$$

Recorrendo a (35), obtém-se para a curvatura e para o raio de curvatura:

$$\vec{r}'(t) = 2(-\sin(t), \cos(t), t) \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = 2\sqrt{1+t^2}$$

$$\vec{r}''(t) = 2(-\cos(t), -\sin(t), 1)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = 4(\cos(t) + t\sin(t), -t\cos(t) + \sin(t), 1)$$

$$\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = 4\sqrt{(\cos(t) + t\sin(t))^2 + (-t\cos(t) + \sin(t))^2 + 1} =$$

$$= 4\sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 1} = 4\sqrt{2+t^2}$$

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} = \frac{4\sqrt{2+t^2}}{[2\sqrt{1+t^2}]^3} = \frac{\sqrt{2+t^2}}{2(1+t^2)^{3/2}}$$

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{2(1+t^2)^{3/2}}{\sqrt{2+t^2}}$$

Notando que

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(-\sin(t), \cos(t), t) \quad (36)$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}(\cos(t) + t\sin(t), -t\cos(t) + \sin(t), 1)$$

o versor normal principal é:

$$\begin{aligned} \vec{N}(t) &= \vec{B}(t) \times \vec{T}(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(2+t^2)}}(t\sin(t) - (1+t^2)\cos(t), -t\cos(t) - (1+t^2)\sin(t), 1) \end{aligned}$$

Finalmente, obtém-se para o vector curvatura

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k(t)\vec{N}(t) = \frac{1}{2(1+t^2)^2}(t\sin(t) - (1+t^2)\cos(t), -t\cos(t) - (1+t^2)\sin(t), 1)$$

Convém realçar que, neste caso, não foi utilizada a expressão (34) para o cálculo do vector curvatura em virtude da dificuldade inerente à derivação do versor da tangente definido em (36).

Por exemplo, no ponto inicial da curva $\vec{r}(0) = (2, 0, 0)$ obtém-se:

$$k(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \rho(0) = \frac{1}{k(0)} = \sqrt{2}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k(0)\vec{N}(0) = \frac{1}{2}(-1, 0, 1)$$

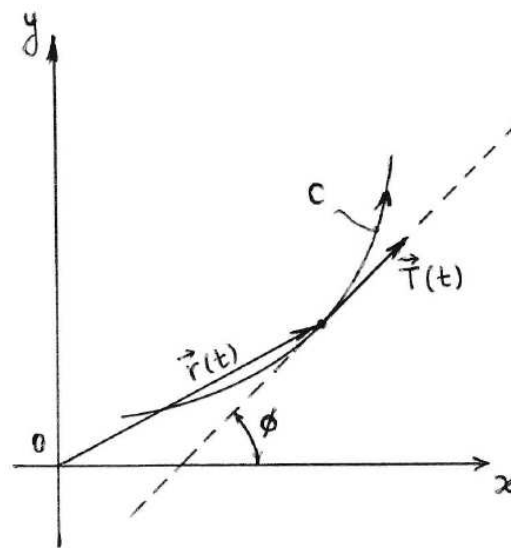
Neste ponto o centro do círculo osculador é:

$$C_O(0) = \vec{r}(0) + \rho(0)\vec{N}(0) = (2, 0, 0) + (-1, 0, 1) = (1, 0, 1)$$

Curvatura de uma curva plana

- No caso da curva C ser plana, o versor da tangente em qualquer ponto da curva pode ser expresso em função do ângulo, ϕ , medido em radianos, que exprime a inclinação da linha tangente à curva, ou seja:

$$\vec{T}(\phi) = \cos(\phi)\vec{i} + \sin(\phi)\vec{j}$$



Neste caso, obtém-se para o vector curvatura

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\phi} \frac{d\phi}{ds} = -\frac{d\phi}{ds} \sin(\phi)\vec{i} + \frac{d\phi}{ds} \cos(\phi)\vec{j}$$

sendo a curvatura dada por:

$$k = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|$$

Assim, conclui-se que a curvatura da curva pode ser interpretada como sendo a magnitude da variação do ângulo ϕ por unidade do comprimento de arco.

Teorema 17: Seja a curva plana diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in I$$

tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $t \in I$. Então:

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{3/2}}$$

Teorema 18: Seja a função diferenciável $y = f(x)$, $x \in I$. A curvatura do gráfico da função é dada por:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\left(1 + [f'(x)]^2\right)^{3/2}}$$

Torção de uma curva no espaço

- Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

em que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Tal como o versor da tangente, também o versor binormal, $\vec{B}(t)$, pode variar ao longo da curva, variação que se reflecte, unicamente, na mudança da sua direcção (sendo versor, a norma é constante e igual a um).

- Chama-se *vector torção* da curva C à variação de direcção do versor binormal por unidade do comprimento de arco, ou seja, $d\vec{B}/ds$.

Teorema 19: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{B}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

Teorema 20: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. O vector torção, $d\vec{B}/ds$, é ortogonal ao versor da tangente, $\vec{T}(t)$, e ao versor binormal, $\vec{B}(t)$, isto é, é um vector paralelo ao versor normal principal, $\vec{N}(t)$.

- Em face da propriedade anterior, é comum escrever-se o vector torção sob a forma

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau(t)\vec{N}(t) \quad (37)$$

onde a função escalar, $\tau(t)$, definida em \mathbb{R} , é designada por *torção* da curva. Nestas condições: $d\vec{B}/ds$ e $\vec{N}(t)$ são vectores paralelos e com o mesmo sentido, se $\tau < 0$; são vectores paralelos e com sentidos opostos, se $\tau > 0$.

- A expressão (37) permite exprimir a torção de uma curva através do seguinte produto escalar:

$$\tau(t) = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N}(t)$$

- É óbvio que se uma curva é plana, o vector binormal é constante, pelo que o vector torção é o vector nulo, $d\vec{B}/ds = \vec{0}$, e a torção é nula, $\tau = 0$.

Exemplo 34: Seja a hélice circular do exemplo 5 e parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\sin(t)\vec{j} + t\vec{k}, \quad t \geq 0$$

Atendendo a (14), (18) e (19), obtém-se:

$$\vec{B}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{B}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{5}(\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$\begin{aligned} \tau(t) &= -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N}(t) = -\frac{1}{5}(\cos(t), \sin(t), 0) \cdot (-\cos(t), -\sin(t), 0) = \\ &= -\frac{1}{5}(-\cos^2(t) - \sin^2(t)) = -\frac{1}{5}(-1) = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Teorema 21: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{T}(t) \times \vec{N}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

$$\tau(t) = -\frac{\vec{B}'(t) \cdot \vec{N}(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{B}(t) \cdot \vec{N}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

Fórmulas de Frenet-Serret

- Os versores \vec{T} , \vec{N} e \vec{B} , sendo ortogonais entre si, são linearmente independentes. Assim, o conjunto $S = \{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ constitui uma base ortonormal para o espaço \mathbb{R}^3 e define, em cada ponto de uma curva diferenciável, um *referencial ortonormal directo*, designado por *referencial de Frenet*.
- As *fórmulas de Frenet-Serret* apresentam os vectores $d\vec{T}/ds$, $d\vec{N}/ds$ e $d\vec{B}/ds$ como combinação linear dos elementos que formam a base ortonormal $S = \{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$.

Teorema 22: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \tau\vec{B} - k\vec{T}$$

em que k e τ representam a *curvatura* e a *torção*, respectivamente.