COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 2

FUNÇÕES A VÁRIAS VARIÁVEIS; GRADIENTES

1) Determine a função de campo escalar $f(x,y,z)$, tal que o seu valor no ponto (x,y,z) é:

a) A área da superfície da caixa, sem a sua tampa superior, cujos lados são definidos pelos vectores $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ e $z\vec{k}$.

b) O valor do ângulo formado pelos vectores $\vec{i}+\vec{j}$ e $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

c) O volume do prisma definido pelos vectores $\vec{i}$, $\vec{i}+\vec{j}$ e $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

2) Considere a equação $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=z$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Que superfície é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem a equação dada.

b) O que acontece a esta superfície quando $b\to\infty$.

c) Qual a secção resultante da intersecção da superfície dada com a superfície $z=1$.

d) O que acontece a esta secção quando $b\to\infty$.

3) Identifique as superfícies definidas pelas equações:

a) $g(x,y)=\sqrt{x^2+4y^2}$.

b) $\rho(\theta,\varphi)=\sin\varphi\cos\theta$.

4) Obtenha o limite da função $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo de:

a) Eixo dos *xx*.

b) Eixo dos *yy*.

c) Recta $y=mx$, $m\neq 0$.

d) Espiral $r=\theta$, $\theta>0$.

e) Arco $r=\sin(3\theta)$, $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$.

f) Curva descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{\operatorname{sen} t}{t}\vec{j}$, $t > 0$.

5) Calcule as derivadas parciais das seguintes funções de campo escalares:

a) $\rho(\theta,\varphi) = \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta)$.

b) $g(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

c) $h(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(2x + y)$.

d) $u(x,y,z) = \dfrac{e^z}{xy^2}$.

e) $\omega(x,y,z) = \ln(zx + 3y)$.

f) $v(x,y,z) = x^{y^z}$.

g) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + \sqrt{x^3 + y^2}\right)$.

6) Calcule o gradiente das seguintes funções de campo escalar:

a) $f(x,y,z) = xe^y \operatorname{sen}(z + x)$.

b) $g(x,y,z) = (-x + 2y)^5 + \dfrac{2}{z}$.

7) Seja a função de campo escalar $f(x,y) = x(4 - y^2)$ e a função vectorial $\vec{\alpha}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\operatorname{sen}(t)\vec{j}$. Obtenha a derivada da função composta das funções dadas:

a) Sem efectuar a composição das funções.

b) Determinando a função composta.

8) Determine a derivada direccional da função de campo escalar $f(x,y,z) = z\ln\dfrac{x}{y}$ no ponto $P = (1,2,-2)$, na direcção do ponto $Q = (2,2,1)$.

9) Calcule a derivada direccional da função de campo escalar $f(x,y,z) = xe^{y^2 - z^2}$ em $P = (1,2,-2)$, na direcção do percurso descrito pela função vetorial $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 2\cos(t-1)\vec{j} - 2e^{t-1}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

10) Obtenha a derivada direccional da função de campo escalar $f(x,y,z) = \left(x + y^2 + z^3\right)^2$ no ponto $P = (1,-1,1)$, na direcção definida pelo vetor $\vec{i} + \vec{j}$.

11) Determine a direcção e o sentido segundo os quais a função de campo escalar $f(x,y) = y^2 e^{2x}$ tem a sua taxa de variação máxima no ponto $P = (0,1)$.

12) Obtenha a direcção e o sentido segundo os quais a função de campo escalar $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tem a sua taxa de variação máxima no ponto $P = (1,-2,1)$.

13) Calcule a derivada direccional da função de campo escalar $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $(x,y) \neq (0,0)$, na direcção da origem.

14) Calcule a derivada direccional de:

a) $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz$ em $P = (1,0,2)$, segundo a normal à superfície $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$.

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ em $Q = (3,4,5)$, segundo o vector tangente à curva de intersecção das superfícies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ e $z^2 = x^2 + y^2$ nesse ponto.

15) Seja f uma função de campo escalar contínua e diferenciável em todos os pontos do segmento de recta $[AB]$, com $f(A) = f(B)$. Mostre que existe um ponto, C, situado entre A e B, tal que $\nabla f(C)\cdot(B-A) = 0$.

16) Considere a função de campo escalar $f(x,y,z) = 4xz - y^2 + z^2$, diferenciável em $\mathbb{R}$, e os pontos $A = (0,1,1)$ e $B = (1,3,2)$. Determine o ponto C situado no segmento de reta $[AB]$, tal que $f(B) - f(A) = \nabla f(C)\cdot(B-A)$.

17) Obtenha um vector que seja normal e um vector que seja tangente à curva de equação cartesiana $x^3 + y^2 + 2x = 6$ no ponto $P = (-1,3)$.

18) A temperatura, T, na vizinhança do ponto $P = (\pi/4, 0)$ é dada pela função de campo escalar $T(x,y) = \sqrt{2}e^{-y}\cos x$. Uma partícula desloca-se nessa vizinhança seguindo uma trajectória que passa em P e que, em cada ponto, segue uma direcção que corresponde à máxima taxa de variação de temperatura. Determine essa trajetória.

19) Determine os pontos das superfícies $z-xy=0$ e $4x+2y-x^2+xy-y^2-z=0$, onde o plano tangente é horizontal.

20) Calcule o vector normal e o plano tangente à superfície $x^2+y^2+z^2=3$ no ponto $P=(1,1,1)$.

21) Obtenha o plano tangente e a recta normal à superfície $xy+yz+xz=11$ no ponto $P=(1,2,3)$.

22) Mostre que a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2-8x-8y-6z+24=0$ é tangente ao elipsoide de equação $x^2+3y^2+2z^2=9$ no ponto $P=(2,1,1)$.

23) A curva do espaço descrita pela função vectorial $\vec{r}(t)=2t\vec{i}+3t^{-1}\vec{j}-2t^2\vec{k}$, $t>0$, e o elipsoide de equação $x^2+y^2+3z^2=25$ intersectam-se no ponto $P=(2,3,-2)$. Determine o valor do ângulo, α, de intersecção.

24) Sejam as superfícies de equações $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{\omega}$, $\omega>0$. Mostre que a soma das coordenadas dos pontos de intersecção de todos os planos tangentes às superfícies com os eixos coordenados é igual a ω.

25) Supondo que a equação $x\cos(xy)+y\cos(x)=2$ define y implicitamente em função de x, $y=f(x)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

26) Admitindo que a equação $x^2+z^4+z^3+y^2+xy=2$ define z implicitamente em função de x e y, $z=f(x,y)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

27) Seja a função de campo escalar $\omega=\omega(x,y,z)$, em que $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ e $u=u(s,t)$, $v=v(s,t)$. Desenhe a árvore diagrama para o cálculo das derivadas parciais $\dfrac{\partial\omega}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial\omega}{\partial t}$, e calcule-as.

28) A equação $x+z+(y+z)^2=6$ define z implicitamente em função de x e y, $z=f(x,y)$. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, em função de x, y e z.

29) Considere a função de campo escalar $z=f(x,y)$, definida implicitamente pela equação $e^{\cos(z)}\ln(z+1)=\operatorname{arctg}(2x+y)$. Determine o valor das derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ no ponto $P=\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right)$.

30) A equação $x\ln(y)+y^2z+z^2=6$ define z implicitamente em função de x e y, $z=f(x,y)$, na vizinhança de $P=(1,1,2)$. Obtenha as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ em P.

31) Considerando $z(r,s,v)=\dfrac{r+s}{v}$, $r(x,y)=x\cos(y)$, $s(x,y)=y\operatorname{sen}(x)$ e $v(x,y)=2x-y$, calcule as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

32) Seja a superfície definida implicitamente pela equação $\sqrt{x}\cos(-2y+z)=1$. Calcule as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ nos pontos com coordenadas $x=2$ e $y=0$.

33) Considere a superfície definida implicitamente pela equação $xz^2-yz^2+xy^2z-5=0$. Determine as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ nos pontos com coordenadas $x=3$ e $y=1$.

34) Considere a função de campo escalar $z=f(y,x,v,u)=x+\ln(u)+(y+v)^2$, em que $x(u,v)=2u+3v$ e $y(u,v)=\cos(u)+\operatorname{sen}(v)$. Utilize a regra de derivação em cadeia para obter as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

35) Seja a função de campo escalar $w = f(x,y,z) = \dfrac{xy}{z}$, em que $x = \text{tg}(u-1) - e^v$, $y = u^2 - v^2$ e $z = \cos(u^2 v)$. Usando a regra de derivação em cadeia, obtenha as derivadas parciais $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

36) Seja a função diferenciável $u = f(x,y)$. Considerando $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\text{sen}(\theta)$, obtenha:

a) As derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ em função das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ em função das derivadas parciais, de 1ª e 2ª ordens, de *f* em relação a *x* e *y*.

37) Verifique que as derivadas, de 2ª ordem, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ são iguais, se $z = e^x\left(\cos(y) + x\text{sen}(y)\right)$.

38) Classifique os pontos críticos das seguintes funções e, se possível, determine os seus máximos/mínimos locais:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$.

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$.

d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

e) $f(x,y) = 1 - (x-1)^2 - y^2$.

f) $f(x,y) = (x - y + 1)^2$.

g) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x + 2$.

h) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 4x + 2y$.

i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

j) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 2$.

k) $f(x,y) = e^x \cos(y)$.

l) $f(x,y) = x\text{sen}(y)$.

m) $f(x,y) = (x+y)(xy+1)$.

n) $f(x,y) = xy + x^{-1} + 8y^{-1}$.

o) $f(x,y) = xy + x^{-1} + y^{-1}$.

p) $f(x,y) = x^2 y + x^2 - 4y$.

39) Seja um paralelepípedo situado no 1º octante, com um dos seus vértices na origem do referencial e duas das suas arestas situadas nos eixos dos *xx* e dos *yy*. Determine o valor máximo para o seu volume, se o vértice oposto à origem estiver situado no plano $x + y + z = 1$.

40) Calcule a distância entre as rectas com equações cartesianas $6x = 3y = 2z$ e $x = y - 2 = z$.

41) Pretende-se construir uma embalagem com a forma de um paralelepípedo, aberta no seu topo e com volume 96 m^3. Sabendo que o custo da produção da sua base é de 0,30€ / m^2, enquanto o das suas faces é de 0,10€ / m^2, calcule as dimensões da embalagem de modo a minimizar o custo da sua produção.

Soluções:

1) **a)** $f(x,y,z)=|xy|+2|xz|+2|zy|$, $D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\neq 0 \wedge y\neq 0 \wedge z\neq 0\}$.

b) $f(x,y,z)=\arccos\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}}\right)$, $D_f=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

c) $f(x,y,z)=|z|$, $D_f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 , z\neq 0\}$.

2) **a)** É um paraboloide elíptico.

b) A superfície inicial transforma-se num cilindro parabólico.

c) Trata-se de uma elipse situada no plano $z=1$.

d) A secção anterior transforma-se nas duas rectas paralelas $x=\pm 1$, situadas no plano $z=1$.

3) **a)** É um cone elíptico de uma folha.

b) Superfície esférica de raio $\dfrac{1}{2}$ e com centro em $C=\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$.

4) **a)** 0. **b)** 0. **c)** $\dfrac{m}{1+m^2}$.

d) 0. **e)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **f)** Não existe.

5) **a)** $\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}=-\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)$ e $\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}=\cos(\varphi)\cos(\theta)$. **b)** $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$.

c) $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{2}{1+(2x+y)^2}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial y}=\dfrac{1}{1+(2x+y)^2}$. **d)** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{e^z}{x^2y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2e^z}{xy^3}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial z}=u$.

e) $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=\dfrac{z}{xz+3y}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=\dfrac{3}{xz+3y}$ e $\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=\dfrac{x}{xz+3y}$.

f) $\dfrac{\partial v}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=z\ln(x)y^{z-1}x^{y^z}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial z}=\ln(x)\ln(y)y^z x^{y^z}$.

g) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{4x\sqrt{x^3+y^2}+3x^2}{2\left(x^3+y^2+x^2\sqrt{x^3+y^2}\right)}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\left(x^3+y^2+x^2\sqrt{x^3+y^2}\right)}$.

6) a) $\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=e^y\left(\mathrm{sen}(x+z)+x\cos(x+z)\right)\vec{i}+e^y x\,\mathrm{sen}(x+z)\vec{j}+e^y x\cos(x+z)\vec{k}$.

b) $\nabla g=\dfrac{\partial g}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial g}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\vec{k}=-5(-x+2y)^4\vec{i}+10(-x+2y)^4\vec{j}-\dfrac{2}{z^2}\vec{k}$.

7) $\dfrac{df}{dt}=f'(t)=-24\,\mathrm{sen}(t)\cos^2(t)$.

8) Designando $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}$, tem-se $f'(P,\vec{u})=\nabla f(P)\cdot\vec{u}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}-3\dfrac{\sqrt{10}}{10}\ln(2)$.

9) Designando $\vec{u}=\vec{T}(1)=\dfrac{\vec{r}'(1)}{\left\|\vec{r}'(1)\right\|}$, tem-se $f'(P,\vec{u})=\nabla f(P)\cdot\vec{u}=-\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

10) $-3\sqrt{2}$.

11) Segundo a direcção e o sentido definidos pelo versor $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$.

12) Segundo a direcção e o sentido definidos pelo versor $\vec{u}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$.

13) $\dfrac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

14) a) $\pm\dfrac{14}{\sqrt{41}}$. **b)** 0.

15) ----

16) $C=\left(\dfrac{1}{2},2,\dfrac{3}{2}\right)$.

17) Vector normal: $5\vec{i}+6\vec{j}$; vector tangente: $6\vec{i}-5\vec{j}$.

18) $y=\ln\left(\sqrt{2}\left|\mathrm{sen}(x)\right|\right)$.

19) No caso da superfície $z-xy=0$ é o ponto $O=(0,0,0)$; para a restante é o ponto $P=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{8}{3},\dfrac{28}{3}\right)$.

20) Vector normal: $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$; plano tangente: $x+y+z=3$.

21) Plano tangente: $5x+4y+3z=22$; recta normal: $X(t)=(1,2,3)+t(5,4,3)$, $t\in\mathbb{R}$.

22) ----

23) $\alpha=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{19\sqrt{29}}{203}$.

24) ----

25) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy\operatorname{sen}(xy)+y\operatorname{sen}(x)-\cos(xy)}{\cos(x)-x^2\operatorname{sen}(xy)}$.

26) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+y}{(4z+3)z^2}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+2y}{(4z+3)z^2}$.

27) $\frac{\partial \omega}{\partial s}=\frac{\partial \omega}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)+\frac{\partial \omega}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)+\frac{\partial \omega}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)$;

$\frac{\partial \omega}{\partial t}=\frac{\partial \omega}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\partial \omega}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\partial \omega}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)$.

28) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{1+2y+2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{y+z}{1+2y+2z}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2}{(1+2y+2z)^3}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{2}{(1+2y+2z)^3}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

29) $\frac{\partial z}{\partial x}\left(-\frac{1}{2},1,0\right)=\frac{2}{e}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}\left(-\frac{1}{2},1,0\right)=\frac{1}{e}$.

30) $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1,2)=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1,2)=-1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1,2)=-\frac{1}{5}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1,2)=-\frac{1}{5}$.

31) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\cos(y)+y\cos(x)}{2x-y}-2\frac{x\cos(y)+y\operatorname{sen}(x)}{(2x-y)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x\operatorname{sen}(y)+\operatorname{sen}(x)}{2x-y}+\frac{x\cos(y)+y\operatorname{sen}(x)}{(2x-y)^2}$.

32) $\frac{\partial z}{\partial x}\left(2,0,\arccos(1/\sqrt{2})\right)=\pm\frac{1}{4}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}\left(2,0,\arccos(1/\sqrt{2})\right)=2$.

33) $\frac{\partial z}{\partial x}(3,1,1)=-\frac{2}{7}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(3,1,1)=-\frac{5}{7}$ ou $\frac{\partial z}{\partial x}\left(3,1,-\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{28}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}\left(3,1,-\frac{5}{2}\right)=-\frac{85}{28}$.

34) $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial u}=-2\operatorname{sen}(u)\big(\cos(u)+\operatorname{sen}(v)+v\big)+2+\frac{1}{u}$;

$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}=2\big(1+\cos(v)\big)\big(\cos(u)+\operatorname{sen}(v)+v\big)+3$.

35) $\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\partial w}{\partial u}=\frac{u^2-v^2}{\cos(u^2v)\cos^2(u-1)}+\frac{2u\left(\operatorname{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos(u^2v)}+\frac{2uv\operatorname{sen}(u^2v)(u^2-v^2)\left(\operatorname{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos^2(u^2v)};$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\partial w}{\partial v}=-\frac{(u^2-v^2)e^v}{\cos(u^2v)}-\frac{2v\left(\operatorname{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos(u^2v)}+\frac{u^2\operatorname{sen}(u^2v)(u^2-v^2)\left(\operatorname{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos^2(u^2v)}.$$

36) a) $\frac{\partial u}{\partial r}=\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=r^2\left(\operatorname{sen}^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\frac{r^2\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)-r\left(\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}+\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\right).$

37) - - - -

38) a) Ponto estacionário em $(0,0)$, com um mínimo local de valor igual a 0.

b) Ponto de sela em $(0,0)$.

c) Ponto estacionário em $(2,1)$, com um mínimo local de valor igual a -3.

d) Pontos estacionários em $(-1,-1)$ e $(1,1)$, com mínimos locais de valor igual a -2; ponto de sela em $(0,0)$.

e) Ponto estacionário em $(1,0)$, com um máximo local de valor igual a 1.

f) Ponto estacionário ao longo da recta $y=x+1$, com um mínimo local de valor igual a 0.

g) Ponto estacionário em $(4,-2)$, com um mínimo local de valor igual a -10.

h) Ponto estacionário em $\left(\frac{10}{3},\frac{8}{3}\right)$, com um máximo local de valor igual a $\frac{28}{3}$.

i) Ponto estacionário em $(2,2)$, com um mínimo local de valor igual a -8; ponto de sela em $(0,0)$.

j) Ponto estacionário em $\left(5,\frac{27}{2}\right)$, com um mínimo local de valor igual a $-\frac{117}{4}$; ponto de sela em $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

k) Sem pontos estacionários nem mínimos ou máximos locais.

l) Pontos de sela em $(0,k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

m) Pontos de sela em $(1,-1)$ e $(-1,1)$.

n) Ponto estacionário em $\left(\frac{1}{2},4\right)$, com um mínimo local de valor igual a 6.

o) Ponto estacionário em $(1,1)$, com um mínimo local de valor igual a 3.

p) Pontos de sela em $(2,-1)$ e $(-2,-1)$.

39) $\frac{1}{27}$.

40) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

41) O cesto tem uma base quadrada de dimensões $4\times 4\ \text{m}^2$ e a sua altura é $6\ \text{m}$.