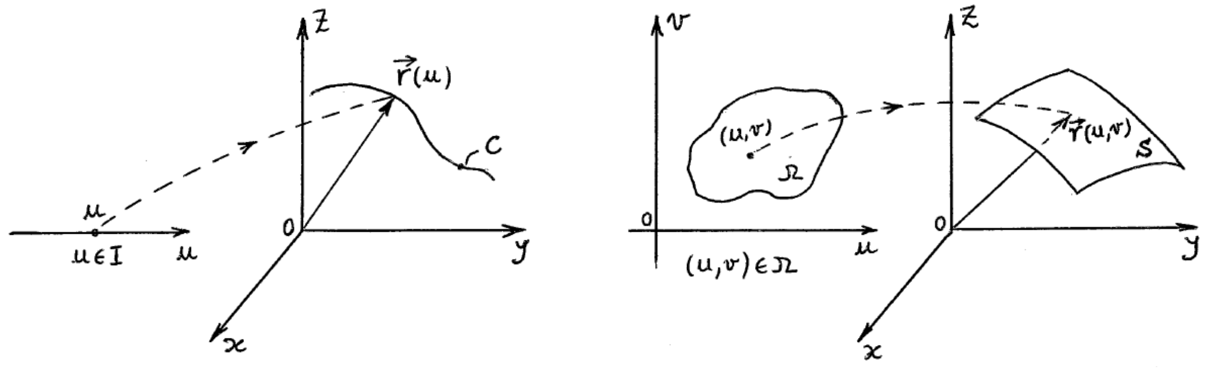
SUPERFÍCIES E OPERADORES

Parametrização da superfície

- Como se viu no capítulo 1, uma curva, *C*, no espaço pode ser parametrizada através de uma função vectorial $\vec{r}(u)$, em que *u* toma valores num dado intervalo *I* do eixo dos *uu*. Da mesma forma, é possível parametrizar uma superfície, *S*, no espaço através de uma função vectorial $\vec{r}(u,v)$, onde (u,v) toma valores numa dada região, Ω, do plano *uOv*.



Exemplo 1: O *gráfico da função*

$$z = f(x,y) \ , \ (x,y) \in \Omega$$

pode ser parametrizado considerando:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + f(u,v)\vec{j} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

À medida que (u,v) toma valores em Ω, a extremidade do vector de posição $\vec{r}(u,v)$ traça a superfície $z = f(x,y)$, que é o *gráfico de* $f(x,y)$.

Exemplo 2: O *plano* que passa no ponto *P* e é gerado pelos vectores (*linearmente independentes*) $\vec{a}$ e $\vec{b}$, pode ser parametrizado como:

$$\vec{r}(u,v) = P + u\vec{a} + v\vec{b} \ , \ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

Este plano contém as linhas (rectas) ℓ_1 e ℓ_2:

$$\ell_1 : \vec{r}(u,0) = P + u\vec{a} \ , \ u \in \mathbb{R}$$

$$\ell_2 : \vec{r}(0,v) = P + v\vec{b} \ , \ v \in \mathbb{R}$$

Se o plano passa na origem, então a parametrização (1) reduz-se a:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + v\vec{b} \ , \ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

Exemplo 3: Seja a superfície *S* (*cilindro de revolução*)

$$x^2 + y^2 = a^2 \ , \ 0 \le z \le h \quad (a > 0) \tag{2}$$

cuja projecção, no plano *xOy*, é a *circunferência* de equação:

$$x^2 + y^2 = a^2 \ , \ z = 0$$

Considerando (*coordenadas cilíndricas*)

$$x = a\cos(\theta) \quad , \quad y = a\mathrm{sen}(\theta) \quad , \quad z = v$$

a parametrização de *S* pode ser escrita sob a forma

$$\vec{r}(\theta,v) = a\cos(\theta)\vec{i} + a\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + v\vec{k} \ , \ (\theta,v) \in \Omega \tag{3}$$

em que Ω é a *região rectangular* do plano θOv:

$$\Omega : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le v \le h \tag{4}$$

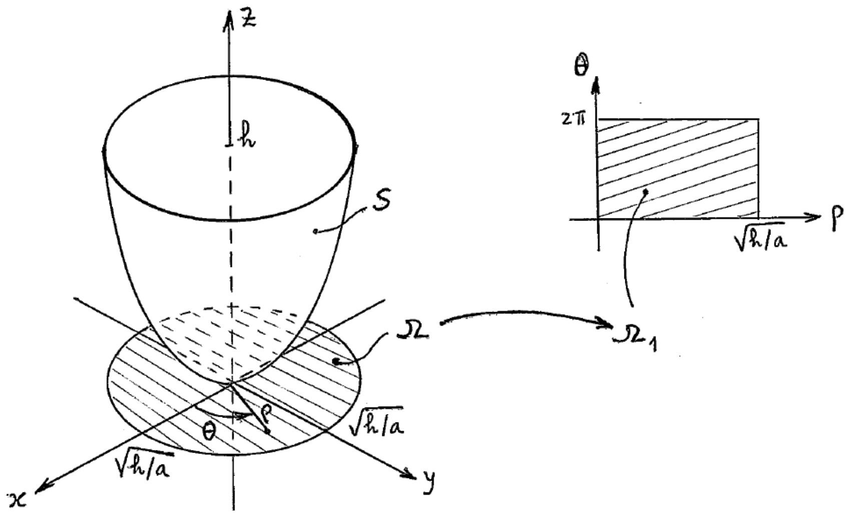
- O exemplo seguinte mostra que a parametrização de uma superfície não é única.

Exemplo 4: Seja a superfície *S* (*paraboloide de revolução*)

$$z = a(x^2 + y^2) \ , \ 0 \le z \le h \quad (a > 0) \tag{5}$$

cuja projecção, no plano *xOy*, é a *região circular*:

$$\Omega : 0 \le x^2 + y^2 \le h / a \tag{6}$$



Dado que $z = f(x,y)$, a parametrização de *S* pode ser feita considerando $x = u$ e $y = v$ (*coordenadas cartesianas*), isto é:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + a(u^2 + v^2)\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega \tag{7}$$

Por outro lado, notando que a região Ω pode ser reescrita, no referencial $rO\theta$ (*coordenadas polares*), sob a forma (*região rectangular*)

$$\Omega_1 : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le \sqrt{h / a} \tag{8}$$

é, ainda, possível definir a superfície *S* usando a seguinte parametrização:

$$\vec{r}(r,\theta) = r\cos(\theta)\vec{i} + r\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + ar^2\vec{k} \ , \ (r,\theta) \in \Omega_1 \tag{9}$$

Se $a = 1$ obtém-se para a parametrização definida em (6) e (7)

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + v^2)\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega \quad , \quad \Omega : 0 \le x^2 + y^2 \le h$$

e para a parametrização definida em (8) e (9):

$$\vec{r}(r,\theta) = r\cos(\theta)\vec{i} + r\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + r^2\vec{k} \ , \ (r,\theta) \in \Omega_1$$

$$\Omega_1 : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le \sqrt{h}$$

Exemplo 5: A *superfície esférica* de raio *a* e centrada na origem pode ser parametrizada considerando

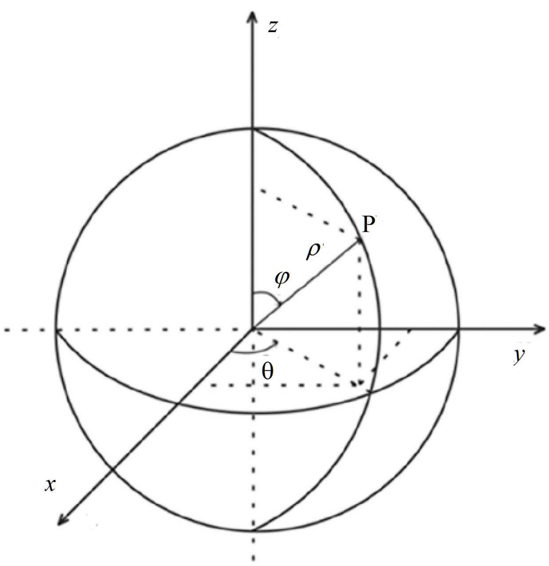
$$\vec{r}(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k} \ , \ (\theta,\phi) \in R \quad (10)$$

em que *R* é a *região rectangular* do plano $\theta O\phi$ definida por:

$$R : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le \phi \le \pi \quad (11)$$

Neste caso, recorreu-se ao *sistema de coordenadas esféricas* (ρ,θ,ϕ), considerando $\rho = a$:

$$x = a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi) \quad , \quad y = a\ \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi) \quad , \quad z = a\cos(\phi)$$

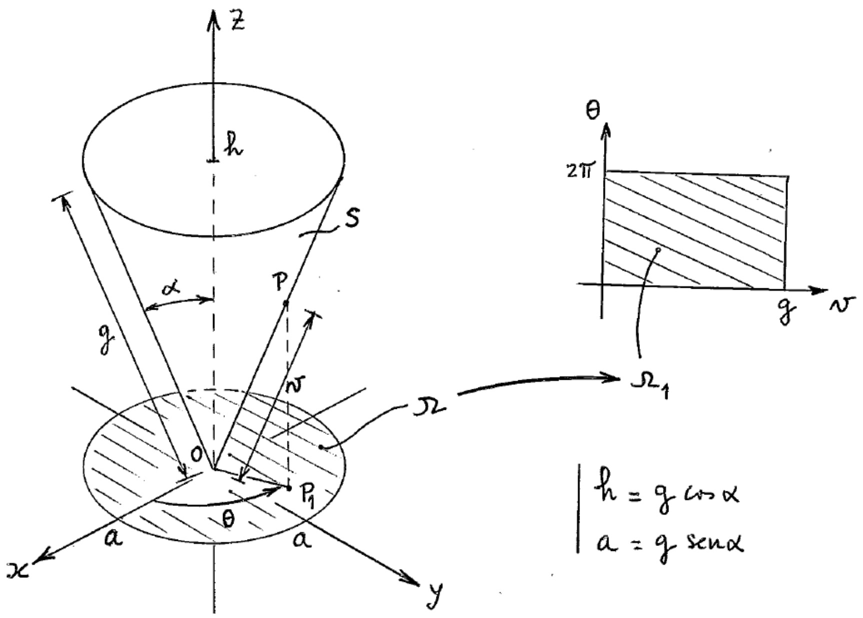


Convém notar que a equação vectorial (10) satisfaz a equação cartesiana da superfície esférica:

$$x^2+y^2+z^2 = a^2\cos^2(\theta)\mathrm{sen}^2(\phi)+a^2\mathrm{sen}^2(\theta)\mathrm{sen}^2(\phi)+a^2\cos^2(\phi) =$$

$$= a^2\left[\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta)\right]\mathrm{sen}^2(\phi)+a^2\cos^2(\phi) = a^2$$

Exemplo 6: A superfície S da figura seguinte corresponde a um *cone de revolução*, em que g é o comprimento da sua geratriz e α é o ângulo que esta faz com o eixo do cone (eixo dos *zz*).



A sua projecção, no plano *xOy*, é a *região circular*

$$\Omega : 0 \le x^2+y^2 \le a^2$$

em que $a = g(\mathrm{sen}\alpha)$ é o raio do círculo (base do cone) situado à cota $z = h = g(\cos\alpha)$ (altura do cone).
Seja o ponto $P = (x,y,z)$ de S à distância v da origem (vértice do cone), distância medida sobre a geratriz que passa em P, e $P_1 = (x,y,0)$ o ponto que corresponde à projecção ortogonal de P sobre o plano *xOy*.

Nestas condições sabe-se que:

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = v \quad \text{e} \quad \left\|\overrightarrow{OP_1}\right\| = v\,\text{sen}(\alpha)$$

Designando por θ o ângulo que $\overrightarrow{OP_1}$ faz com o semieixo positivo dos *xx*, as coordenadas de *P* são:

$$x = v\cos(\theta)\text{sen}(\alpha) \quad , \quad y = v\ \text{sen}(\theta)\text{sen}(\alpha) \quad , \quad z = v\cos(\alpha) \tag{12}$$

Assim, a superfície *S* pode ser parametrizada sob a forma:

$$\vec{r}(\theta,v) = v\,\text{sen}(\alpha)\cos(\theta)\vec{i} + v\,\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\theta)\vec{j} + v\cos(\alpha)\vec{k}\ ,\ (\theta,v) \in \Omega_1 \tag{13}$$

$$\Omega_1 : 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le v \le g\ \ (\textit{região rectangular}) \tag{14}$$

Se $\alpha = \pi/4$, as expressões (12) podem ser reescritas como

$$x = \frac{\sqrt{2}v}{2}\cos(\theta) \quad , \quad y = \frac{\sqrt{2}v}{2}\text{sen}(\theta) \quad , \quad z = \frac{\sqrt{2}v}{2}$$

pelo que a superfície *S* pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(\theta,u) = u\cos(\theta)\vec{i} + u\,\text{sen}(\theta)\vec{j} + u\vec{k}\ ,\ (\theta,u) \in \Omega_2 \tag{15}$$

$$\Omega_2 : 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le u \le h\ \ (\textit{região rectangular}) \tag{16}$$

e $h = \sqrt{2}g/2$ é a altura do cone. Neste caso, a superfície do cone é o gráfico da função

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ (x,y) \in \Omega_3$$

$$\Omega_3 : 0 \le x^2 + y^2 \le h^2\ \ (\textit{região circular}) \tag{17}$$

sendo ainda possível adoptar a seguinte parametrização para *S*:

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\,\vec{k}\ ,\ (x,y) \in \Omega_3 \tag{18}$$

Produto vectorial fundamental

- Seja a superfície, S, parametrizada através de uma função vectorial diferenciável

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \tag{19}$$

onde (u,v) toma valores numa dada região, Ω, do plano uOv; para simplificar a análise admita-se que Ω é a região rectangular:

$$\Omega \ : \ a < u < b \ , \ c < v < d$$

Se a função (19) é injectiva, então S é designada por *superfície simples*.
Considerem-se os vectores:

$$\vec{r}'_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k} \tag{20}$$

$$\vec{r}'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k} \tag{21}$$

O vector resultante do produto vectorial

$$\vec{N}(u,v) = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

que se admite como sendo diferente do vector nulo, chama-se *produto vectorial fundamental* da superfície S correspondente à parametrização $\vec{r}(u,v)$.

- Se $(u_0,v_0) \in \Omega$, tal que (20) e (21) são funções contínuas e $\vec{N}(u_0,v_0) \neq \vec{0}$, então $\vec{r}(u_0,v_0)$ é um *ponto regular* da superfície S; além disso, diz-se que S é uma *superfície regular*, se todos os seus pontos são regulares.

- Seja $(u_0,v_0)\in\Omega$, tal que:

$$\vec{N}(u_0,v_0)=\vec{r}_u'(u_0,v_0)\times\vec{r}_v'(u_0,v_0)\neq\vec{0} \tag{22}$$

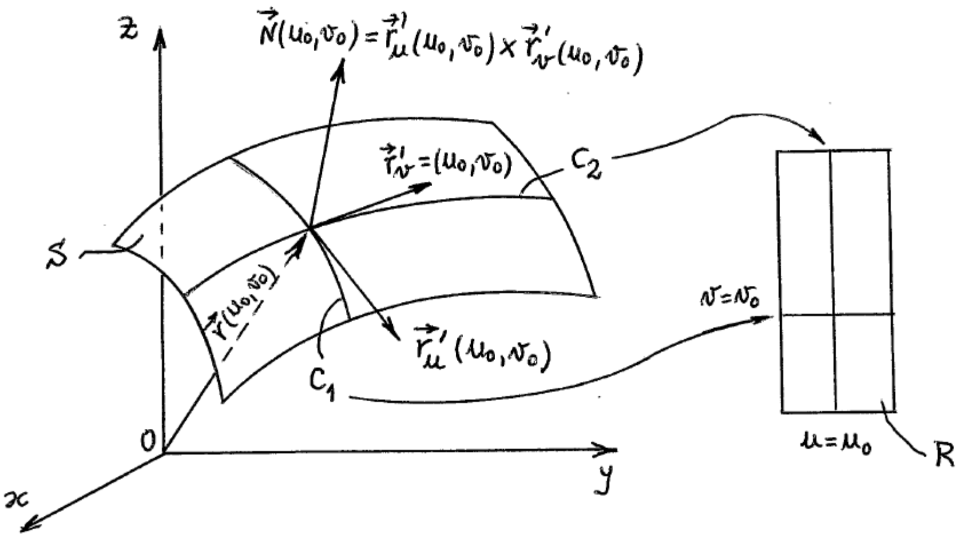
A função vectorial

$$\vec{r}_1(u)=\vec{r}(u,v_0)\ ,\ u\in(a,b)$$

define uma curva diferenciável, C_1, que está na superfície S. Por outro lado, a função vectorial

$$\vec{r}_2(v)=\vec{r}(u_0,v)\ ,\ v\in(c,d)$$

define uma curva diferenciável, C_2, que também está na superfície S.



As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$ da superfície, sendo

$$\vec{r}_1'(u_0)=\vec{r}_u{}'(u_0,v_0)$$

o *vector tangente* à curva C_1 no ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$ e

$$\vec{r}_2{}'(v_0)=\vec{r}_v{}'(u_0,v_0)$$

o *vector tangente* à curva C_2 no ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$.

Assim, o produto vectorial fundamental (22) é perpendicular a ambas as curvas no ponto $\vec{r}(u_0,v_0)$, pelo que, não sendo nulo, pode ser considerado como um vector normal à superfície *S* (bem como ao *plano tangente* a *S*) neste ponto.

- O produto vectorial fundamental pode ainda ser apresentado sob a forma:

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right)$$

Exemplo 7: O produto vectorial fundamental do *plano* do exemplo 2 parametrizado em (1) é:

$$\vec{r}_u'(u,v) = \vec{a} \quad , \quad \vec{r}_v'(u,v) = \vec{b}$$

$$\vec{N}(u,v) = \vec{a} \times \vec{b}$$

Trata-se, como é óbvio, de um vector normal ao plano.

Exemplo 8: O produto vectorial fundamental do *cilindro de revolução* do exemplo 3 parametrizado em (3) e (4) é:

$$\vec{r}_\theta'(\theta,v) = -a\mathrm{sen}(\theta)\vec{i} + a\cos(\theta)\vec{j} \quad , \quad \vec{r}_v'(\theta,v) = \vec{k}$$

$$\vec{N}(\theta,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\mathrm{sen}(\theta) & a\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a\cos(\theta)\vec{i} + a\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} \tag{23}$$

Exemplo 9: O produto vectorial fundamental do *paraboloide de revolução* do exemplo 4 parametrizado em (6) e (7) é:

$$\vec{r}\,'_u(u,v) = \vec{i} + 2au\vec{k} \quad , \quad \vec{r}\,'_v(u,v) = \vec{j} + 2av\vec{k}$$

$$\vec{N}(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2au \\ 0 & 1 & 2av \end{vmatrix} = -2au\vec{i} - 2av\vec{j} + \vec{k} \tag{24}$$

Exemplo 10: O produto vectorial fundamental da *superfície esférica* do exemplo 5 parametrizada em (10) e (11) é:

$$\vec{r}\,'_\theta(\theta,\phi) = -a\ \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j}$$

$$\vec{r}\,'_\phi(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\cos(\phi)\vec{i} + a\ \mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi)\vec{j} - a\ \mathrm{sen}(\phi)\vec{k}$$

$$\vec{N}(\theta,\phi) = -a\ \mathrm{sen}(\phi)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathrm{sen}(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ a\cos(\theta)\cos(\phi) & a\ \mathrm{sen}(\theta)\cos(\phi) & -a\ \mathrm{sen}(\phi) \end{vmatrix} =$$

$$= -a\ \mathrm{sen}(\phi)\left(a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + a\ \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k}\right) =$$

$$= -a\ \mathrm{sen}(\phi)\vec{r}(\theta,\phi) \tag{25}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental é paralelo ao vector $\vec{r}(\theta,\phi)$, ou seja, tem a direcção radial.

Exemplo 11: O produto vectorial fundamental do *cone de revolução* do exemplo 6 parametrizado em (13) e (14) é:

$$\vec{r}'_\theta(\theta,v) = -v\,\mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)\vec{i} + v\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{r}'_v(\theta,v) = \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta)\vec{i} + \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + \cos(\alpha)\vec{k}$$

$$\vec{N}(\theta,v) = v\,\mathrm{sen}(\alpha)\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\theta) & \mathrm{sen}(\alpha)\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\alpha) \end{vmatrix} =$$

$$= v\,\mathrm{sen}(\alpha)\left(\cos(\alpha)\cos(\theta)\vec{i} + \cos(\alpha)\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} - \mathrm{sen}(\alpha)\vec{k}\right)$$

Se $\alpha = \pi/4$ e for considerada a parametrização (15) e (16) para a superficie o produto vectorial fundamental é dado por:

$$\vec{r}'_\theta(\theta,u) = -u\,\mathrm{sen}(\theta)\vec{i} + u\cos(\theta)\vec{j} \quad , \quad \vec{r}'_u(\theta,u) = \cos(\theta)\vec{i} + \mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{N}(\theta,u) = u\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) & 1 \end{vmatrix} = u\left(\cos(\theta)\vec{i} + \mathrm{sen}(\theta)\vec{j} - \vec{k}\right)$$

Por outro lado, se $\alpha = \pi/4$ e for considerada a parametrização (17) e (18) obtém-se:

$$\vec{r}'_x(x,y) = \vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k} \quad , \quad \vec{r}'_y(x,y) = \vec{j} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}$$

$$\vec{N}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & x(x^2+y^2)^{-1/2} \\ 0 & 1 & y(x^2+y^2)^{-1/2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k} \qquad (26)$$

Área de uma superfície parametrizada

- Vimos no exemplo 2 que a função vectorial linear

$$\vec{r}(u,v) = P + u\vec{a} + v\vec{b}\ ,\ (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vectores linearmente independentes, parametriza um plano, *p*.
Linhas horizontais no plano *uOv*, com equações do tipo $v = v_0$, são transformadas em linhas paralelas ao vector $\vec{a}$:

$$\vec{r}(u,v_0) = (P + v_0\vec{b}) + u\vec{a}\ ,\ u \in \mathbb{R}$$

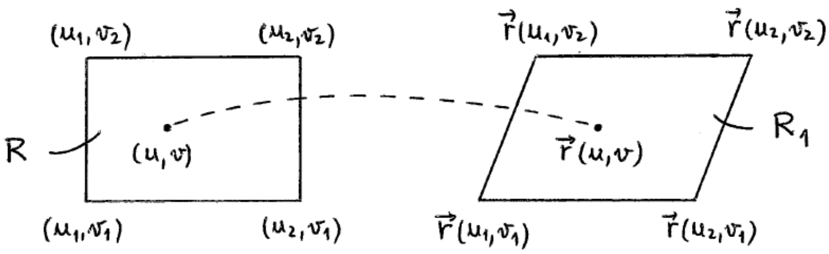
Linhas verticais no plano *uOv*, com equações do tipo $u = u_0$, são transformadas em linhas paralelas ao vector $\vec{b}$:

$$\vec{r}(u_0,v) = (P + u_0\vec{a}) + v\vec{b}\ ,\ v \in \mathbb{R}$$

Assim, um rectângulo *R* no plano *uOv* com lados paralelos ao eixo dos *uu* e ao eixo dos *vv*,

$$R\ :\ u_1 \le u \le u_2\ ,\ v_1 \le v \le v_2$$

é transformado num paralelogramo, R_1, sobre o plano *p*, cujos lados são paralelos às direcções definidas pelos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



Os lados do paralelogramo são definidos pelos vectores:

$$\vec{r}(u_2,v_1) - \vec{r}(u_1,v_1) = (u_2 - u_1)\vec{a}$$

$$\vec{r}(u_1,v_2) - \vec{r}(u_1,v_1) = (v_2 - v_1)\vec{b}$$

A área do paralelogramo, $A(R_1)$ é dada por

$$A(R_1) = \left\| (u_2 - u_1)\vec{a} \times (v_2 - v_1)\vec{b} \right\| = \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| A(R)$$

onde

$$A(R) = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)$$

é a área do rectângulo R.

- Generalizando, considere-se uma superfície, S, parametrizada por uma função vectorial contínua e diferenciável

$$\vec{r}(u,v)\ ,\ (u,v) \in \Omega$$

admitindo-se que Ω é uma região do plano uOv e que a função $\vec{r}(u,v)$ é injectiva no interior de Ω.
Admita-se, ainda, que o produto vectorial fundamental

$$\vec{N}(u,v) = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

é diferente do vector nulo no interior de Ω.
Assim, um rectângulo R em Ω de área $A(R) = \Delta u \Delta v$ é transformado, sobre a superfície S, num paralelogramo curvilíneo, R_1, de área aproximada:

$$A(R_1) \simeq \left\| \Delta u \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \Delta v \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

Então:

$$dS = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv = \left\| \vec{N}(u,v) \right\| du dv$$

Portanto, a área da superfície S, $A(S)$, toma o valor do integral duplo:

$$A(S) = \iint_{\Omega} \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv$$

Exemplo 12: Seja o *cilindro de revolução* definido em (2), com $a = 2$ e $h = 1$. Atendendo a (3), (4) e (23), resulta:

$$\vec{r}(\theta,v) = 2\cos(\theta)\vec{i} + 2\text{sen}(\theta)\vec{j} + v\vec{k} \ , \ (\theta,v) \in \Omega$$

$$\Omega : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq v \leq 1$$

$$\vec{N}(\theta,v) = 2\cos(\theta)\vec{i} + 2\text{sen}(\theta)\vec{j} \ \Rightarrow \ \left\| \vec{N}(\theta,v) \right\| = 2$$

Assim, a área da superfície S é:

$$A(S) = \iint_{\Omega} \left\| \vec{N}(\theta,v) \right\| d\theta dv = 2\int_0^{2\pi} \int_0^1 d\theta dv = 4\pi$$

Exemplo 13: Seja o *paraboloide de revolução* definido em (5), com $a = 2$ e $h = 2$. Atendendo a (6), (7) e (24), resulta:

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + 2(u^2 + v^2)\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

$$\Omega : 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$$

$$\vec{N}(u,v) = -4u\vec{i} - 4v\vec{j} + \vec{k} \ \Rightarrow \ \left\| \vec{N}(u,v) \right\| = \sqrt{1 + 16(u^2 + v^2)}$$

Assim, a área da superfície S é:

$$A(S) = \iint_{\Omega} \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + 16(u^2 + v^2)} dudv$$

Considerando (*coordenadas polares*)

$$u = r\cos(\theta) \quad , \quad v = r\ \text{sen}(\theta) \quad , \quad dudv = r\ drd\theta$$

então

$$\left\|\vec{N}(r,\theta)\right\| = \sqrt{1+16r^2}\ ,\ (r,\theta) \in \Omega_1$$

$$\Omega_1 : 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le r \le 1$$

e, portanto:

$$A(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1+16(u^2+v^2)}dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{1+16r^2}drd\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+16r^2}dr = \frac{\pi}{16}\int_0^1 32r\sqrt{1+16r^2}dr =$$

$$= \frac{\pi}{16}\frac{2}{3}\left[\left(1+16r^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{24}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

Exemplo 14: Seja a *superfície esférica* de raio *a* parametrizada em (10) e (11). Notando que

$$\left\|\vec{r}(\theta,\phi)\right\| = \left\|a\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{i} + a\ \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k}\right\| = a$$

atendendo a (25), resulta:

$$\vec{N}(\theta,\phi) = -a\ \text{sen}(\phi)\vec{r}(\theta,\phi) \ \Rightarrow\ \left\|\vec{N}(\theta,\phi)\right\| = a\left|\text{sen}(\phi)\right|\left\|\vec{r}(\theta,\phi)\right\| = a^2\text{sen}(\phi)$$

Assim, a área da superfície *S* é:

$$A(S) = \iint_R \left\|\vec{N}(\theta,\phi)\right\| d\theta d\phi = a^2\int_0^{\pi} sen(\phi)\int_0^{2\pi} d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi a^2\int_0^{\pi} sen(\phi)\ d\phi = 2\pi a^2\left[-\cos(\phi)\right]_0^{\pi} = 4\pi a^2$$

Exemplo 15: Seja o *cone de revolução* parametrizado em (17) e (18), com $h=2$:

$$\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{k}\ ,\ (x,y)\in\Omega_3$$

$$\Omega_3\ :\ 0\le x^2+y^2\le 4$$

Atendendo a (26), resulta:

$$\left\|\vec{N}(x,y)\right\|=\left\|-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}+\vec{k}\right\|=\left[\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1\right]^{1/2}=\sqrt{2}$$

Assim, a área da superfície S é:

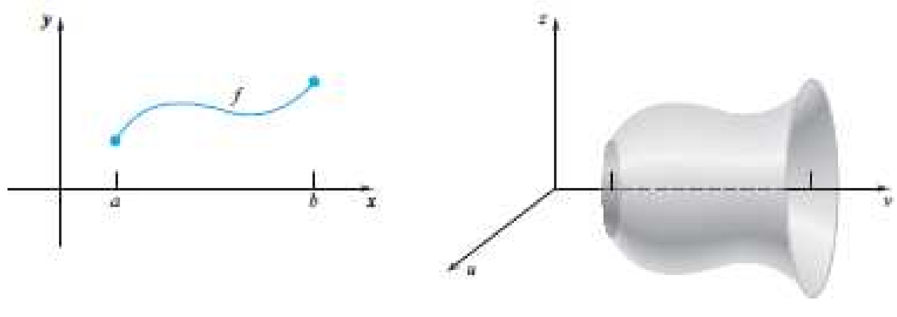
$$A(S)=\iint_{\Omega_3}\left\|\vec{N}(x,y)\right\|dxdy=\sqrt{2}\iint_{\Omega_3}dxdy=\sqrt{2}A(\Omega_3)=4\sqrt{2}\pi$$

Área de uma superfície: casos particulares

- O cálculo da *área de uma superfície de revolução* pode ser feito recorrendo a um processo alternativo. Seja S uma superfície gerada pela rotação, em torno do eixo dos *xx*, do gráfico da função:

  $$y=f(x)\ ,\ x\in[a,b]$$

  Admite-se que $f(x)>0$ e continuamente diferenciável.



A superfície S pode ser parametrizada sob a forma:

$$\vec{r}(u,v) = v\vec{i} + f(v)\cos(u)\vec{j} + f(v)\mathrm{sen}(u)\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

em que Ω é a *região rectangular* do plano *uOv*:

$$\Omega : 0 \le u \le 2\pi \ , \ a \le v \le b$$

Daqui resulta

$$\vec{r}'_u(u,v) = -f(v)\mathrm{sen}(u)\vec{j} + f(v)\cos(u)\vec{k}$$

$$\vec{r}'_v(u,v) = \vec{i} + f'(v)\cos(u)\vec{j} + f'(v)\mathrm{sen}(u)\vec{k}$$

pelo que o produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(u,v) = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -f(v)\mathrm{sen}(u) & f(v)\cos(u) \\ 1 & f'(v)\cos(u) & f'(v)\mathrm{sen}(u) \end{vmatrix} =$$

$$= -f(v)f'(v)\vec{i} + f(v)\cos(u)\vec{j} + f(v)\mathrm{sen}(u)\vec{k}$$

Notando que

$$\left\| \vec{N}(u,v) \right\| = f(v)\sqrt{1 + [f'(v)]^2}$$

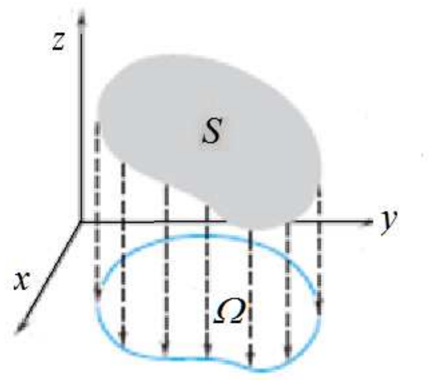
a área da superfície *S* é dada por:

$$A(S) = \iint_\Omega \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv = \iint_\Omega f(v)\sqrt{1+[f'(v)]^2}\, dudv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_a^b f(v)\sqrt{1+[f'(v)]^2}\, dvdu = 2\pi \int_a^b f(v)\sqrt{1+[f'(v)]^2}\, dv$$

- Seja a superfície S que é o gráfico da função:

$$z = f(x,y)\ ,\ (x,y) \in \Omega$$



Neste caso, a superfície pode ser parametrizada através da função:

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}\ ,\ (x,y) \in \Omega$$

Então

$$\vec{r}'_x(x,y) = \vec{i} + f_x(x,y)\vec{k} \quad , \quad \vec{r}'_y(x,y) = \vec{j} + f_y(x,y)\vec{k}$$

pelo que o produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(x,y) = \vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x(x,y) \\ 0 & 1 & f_y(x,y) \end{vmatrix} = -f_x(x,y)\vec{i} - f_y(x,y)\vec{j} + \vec{k}$$

Sabendo que

$$\left\|\vec{N}(x,y)\right\| = \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}$$

a área da superfície S é dada por:

$$A(S) = \iint_\Omega \left\|\vec{N}(x,y)\right\| dxdy = \iint_\Omega \sqrt{1 + [f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2}\, dxdy \quad (27)$$

Exemplo 16: Calcule a área da superfície, *S*, do *cilindro parabólico* $z = y^2$, cuja projecção no plano *xOy* é o triângulo com vértices nos pontos $O = (0,0)$, $P = (0,1)$ e $Q = (1,1)$.

Solução:

A superfície *S* é o gráfico da função

$$z = f(x,y) = y^2 \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que Ω é a *região triangular* do plano *xOy* definida por:

$$\Omega : 0 \le y \le 1 \ , \ 0 \le x \le y$$

Atendendo a (27) e notando que

$$f_x(x,y) = 0 \quad , \quad f_y(x,y) = 2y$$

a área da superfície *S* é:

$$A(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1+4y^2}\,dxdy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1+4y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 y\sqrt{1+4y^2}\,dy = \frac{1}{8}\int_0^1 8y\sqrt{1+4y^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{2}{3}\left[\left(1+4y^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

O operador vectorial diferencial ∇ (nabla)

- O *operador vectorial diferencial* ∇ é definido por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Trata-se de um operador que tanto pode ser aplicado a *campos escalares* como a *campos vectoriais*.

Gradiente de um campo escalar, ∇f

- Se $f(x,y,z)$ é um *campo escalar*, então

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

designa *o gradiente de f em* (x,y,z). A função resultante, $\nabla f(x,y,z)$, é um campo vectorial e pode ser usada, por exemplo, para calcular a derivada direccional de *f* num ponto, tal como vimos no capítulo 2.

Exemplo 17: O gradiente do campo escalar

$$f(x,y,z) = x^2 z + xyz^2 - 2yz + 1$$

é o campo vectorial:

$$\nabla f(x,y,z) = (2xz + yz^2)\vec{i} + (xz^2 - 2z)\vec{j} + (x^2 + 2xyz - 2y)\vec{k}$$

Divergência de um campo vectorial, $\nabla \cdot \vec{f}$

- Seja o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$$

O campo escalar dado por

$$\nabla \cdot \vec{v} = div\ \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

chama-se *divergência de* $\vec{v}(x,y,z)$.

Exemplo 18: A divergência do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = \alpha\vec{r}(x,y,z) = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j} + \alpha z\vec{k} \tag{28}$$

é o campo escalar:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \alpha\frac{\partial x}{\partial x} + \alpha\frac{\partial y}{\partial y} + \alpha\frac{\partial z}{\partial z} = 3\alpha$$

Exemplo 19: Seja o campo vectorial:

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k} =$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + 0\vec{k} \tag{29}$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} \tag{30}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} \tag{31}$$

obtém-se para a divergência:

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 \tag{32}$$

Rotacional de um campo vectorial, $\nabla \times \vec{\boldsymbol{f}}$

- Seja o campo vectorial:

$$\vec{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$$

O campo vectorial dado por

$$\nabla \times \vec{v} = rot\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

chama-se *rotacional de* $\vec{v}(x,y,z)$.

Exemplo 20: Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ definido em (29). Sabendo que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} + \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{33}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} - \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{34}$$

o rotacional de $\vec{f}(x,y,z)$ é:

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k} \tag{35}$$

- A propriedade apresentada no teorema seguinte estabelece uma condição, alternativa à enunciada no teorema 14 do capítulo 2, para que um campo vectorial, $\vec{v}$, seja gradiente, $\vec{v} = \nabla f$.

Teorema 1: O rotacional de um gradiente é o vector nulo, isto é, se $f(x,y,z)$ é um campo escalar com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então:

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

Exemplo 21: O rotacional do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (28) é:

$$\nabla\times\vec{v}=\alpha\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\vec{0}$$

Pode-se, então, concluir que o campo vectorial é gradiente.

Teorema 2: A divergência de um rotacional é nula, isto é, se as componentes do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então:

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v})=0$$

Teorema 3: Sendo $f(x,y,z)$ um campo escalar e $\vec{v}(x,y,z)$ um campo vectorial, então:

$$\nabla\cdot(f\ \vec{v})=(\nabla f)\cdot\vec{v}+f(\nabla\cdot\vec{v})$$

$$\nabla\times(f\ \vec{v})=(\nabla f)\times\vec{v}+f(\nabla\times\vec{v})$$

Teorema 4: Seja o campo vectorial $\vec{r}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ e $r=\|\vec{r}\|$. Se $n\in\mathbb{N}$, então para todo o $\vec{r}\neq\vec{0}$ verifica-se:

$$\nabla\cdot(r^n\ \vec{r})=(n+3)r^n$$

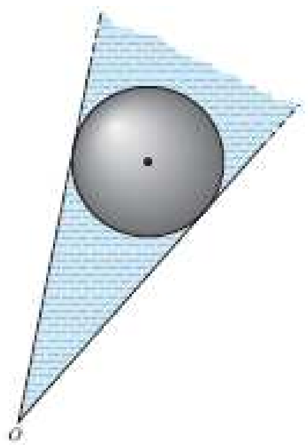
$$\nabla\times(r^n\ \vec{r})=\vec{0}$$

- No capítulo 7 os operadores $\nabla\cdot\vec{v}$ e $\nabla\times\vec{v}$ são aplicados no cálculo do *fluxo* (*teorema da divergência*, ou *de Gauss*, e *teorema de Stokes*).

Interpretação da divergência e do rotacional

- Para que se possa facilmente entender o signicado da divergência e do rotacional, admita-se que $\vec{v}(x,y,z)$ traduz o campo de velocidades de um fluido em movimento na vizinhança de um ponto *P*.
  A divergência de $\vec{v}$ em *P* dá-nos uma indicação da tendência que o fluido tem em acumular-se junto a *P* (*divergência negativa*) ou de afastar-se de *P* (*divergência positiva*). No primeiro caso diz-se que *P* comporta-se como um "*sorvedouro*", enquanto, no segundo caso, *P* designa-se por "*fonte*".
  Por outro lado, o rotacional de $\vec{v}$ em *P* mede a tendência do fuido em rodar em torno de *P*.

Exemplo 22: O campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (28) pode ser visto como o campo de velocidades de um fluido com um movimento radial: na direcção da origem se $\alpha < 0$ e afastando-se da origem se $\alpha > 0$. Sabe-se que $\nabla \cdot \vec{v} = 3\alpha$ (exemplo 18) e $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ (exemplo 21).



Na figura anterior mostra-se uma vizinhança esférica de um ponto (x,y,z) e um cone com vértice na origem e tangente à fronteira da vizinhança referida.

Nestas condições, todo o fluido que está no interior do cone mantém-se dentro do cone (o movimento é radial) e a sua velocidade escalar

$$v(x,y,z) = \|\vec{v}(x,y,z)\| = |\alpha|\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

é proporcional à distância à origem.
Se a divergência $\nabla \cdot \vec{v} = 3\alpha < 0$, então $\alpha < 0$ e o fluido move-se na direcção da origem; a vizinhança do ponto (x,y,z) "*ganha fluido*", já que a quantidade de fluido que entra é maior do que a que sai (a área da secção de entrada é maior do que a de saída e a velocidade à entrada é maior do que à saída).
Contudo, se a divergência $\nabla \cdot \vec{v} = 3\alpha > 0$, então $\alpha > 0$ e o fuido move-se a partir da origem; a vizinhança do ponto (x,y,z) "*perde fluido*", já que a quantidade de fluido que entra é menor do que a que sai (a área da secção de entrada é menor do que a de saída e a velocidade à entrada é menor do que à saída).
Por outro lado, sendo o movimento radial, o fluido não estará sujeito a qualquer movimento de rotação (rotacional nulo).

Exemplo 23: Admita-se que o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ \omega > 0$$

define o campo de velocidades de um fluido, tal que

$$\nabla \cdot \vec{v} = -\omega\frac{\partial y}{\partial x} + \omega\frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \vec{v} = \omega\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k}$$

O campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ exprime o campo de velocidades de um movimento de rotação uniforme, em torno do eixo dos zz e no sentido directo.

Pode-se verificar que, em cada ponto, o vector velocidade é perpendicular ao vector de posição

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = (-\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j})\cdot(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 0$$

e que a velocidade escalar é proporcional ao raio de rotação, *R*:

$$v = \|\vec{v}\| = \omega\sqrt{y^2 + x^2} = \omega R$$

Além disso, o rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é duas vezes o vector velocidade angular, $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$.
Neste caso, nenhuma vizinhança de um ponto "*ganha*" ou "*perde*" fluido, já que a divergência de $\vec{v}(x,y,z)$ é nula.

Laplaciano de um campo escalar, $\nabla^2 f$

- Seja $f(x,y,z)$ um *campo escalar*. O campo escalar dado por

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

  designa *o laplaciano de f em* (x,y,z).

Exemplo 24: O laplaciano do campo escalar

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

é o campo escalar:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2 + y^2 + z^2) = 6$$

Exemplo 25: O laplaciano do campo escalar

$$g(x,y,z) = e^{xyz}$$

é o campo escalar:

$$\nabla^2 g = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{xyz}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{xyz}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{xyz}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(yze^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial y}(xze^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial z}(xye^{xyz}) =$$

$$= y^2z^2e^{xyz} + x^2z^2e^{xyz} + x^2y^2e^{xyz} =$$

$$= (y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2)e^{xyz}$$

Laplaciano de um campo vectorial, $\nabla^2\vec{v}$

- Seja o campo vectorial

  $$\vec{v}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$$

  O campo vectorial dado por

  $$\nabla^2\vec{v} = (\nabla^2 v_1)\vec{i} + (\nabla^2 v_2)\vec{j} + (\nabla^2 v_3)\vec{k}$$

  designa *o laplaciano de* $\vec{v}$ *em* (x,y,z).

Exemplo 26: Seja o campo vectorial definido em (29). Recorrendo a (30) e (33), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} - \frac{3x^2 y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{3y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} - \frac{3y^3}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

Por outro lado, tendo em atenção (31) e (34), tem-se:

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = -\frac{3x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} + \frac{3x^3}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} + \frac{3xy^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^5}}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}$$

Então o laplaciano de $\vec{f}(x,y,z)$ é:

$$\nabla^2 \vec{f} = \frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\,\vec{i} - \frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\,\vec{j} \tag{36}$$

- A propriedade derivada no teorema seguinte relaciona os operadores rotacional, divergência e laplaciano de um campo vectorial.

Teorema 5: Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial, então:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \nabla^2\vec{v} \tag{37}$$

Exemplo 27: Relativamente ao campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ definido em (29), os resultados encontrados em (32), para a divergência, em (35), para o rotacional, e em (36), para o laplaciano, satisfazem a equação (37).
Com efeito, uma vez que a divergência de $\vec{f}(x,y,z)$ é nula, então:

$$\nabla^2\vec{f} = -\nabla\times(\nabla\times\vec{f}) = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{j} =$$

$$= \frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\vec{i} - \frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}}\vec{j}$$