FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEIC Data ../../..

Disciplina CMAT Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

Descritores de desempenho considerados como critério de correcção do Exame realizado em 18/06/2020.

PERGUNTA 1:

Alínea a):

1. Parametrização da curva C:

$$\vec{r}(t) = (t^2, t, t+2), \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Identificação de P sobre a curva:

$$P = (1,-1,1) = \vec{r}(-1)$$

3. Cálculo do vector tangente a C:

$$\vec{r}\,'(t) = (2t, 1, 1)$$

4. Cálculo do vector tangente em P:

$$\vec{r}\,'(-1) = (-2, 1, 1)$$

5. Cálculo do versor da tangente em P:

$$\vec{T}(-1) = \frac{1}{\|\vec{r}\,'(-1)\|}\,\vec{r}\,'(-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$$

Alínea b):

OPÇÃO I:

1. Identificação de Q sobre a curva:

$$Q = (4,2,4) = \vec{r}(2)$$

2. Cálculo da função composta:

$$\vec{f}\,[\vec{r}(t)] = (2, t, t)$$

3. Cálculo do produto escalar:

$$\vec{f}\,[\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}\,'(t) = 6t$$

4. Cálculo do integral de linha:

$$\int_L \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{2} (6t)\, dt = 9$$

OPÇÃO II:

1. Verificar que o campo vectorial é gradiente:

Se $\vec{f}(x,y,z) = (P,Q,R) = (2, z-2, y)$ então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 1$$

2. Cálculo da função potencial:

Se $\nabla\varphi(x,y,z) = \vec{f}(x,y,z)$ então $\varphi(x,y,z) = 2x + yz - 2y + K$

3. Cálculo do integral de linha:

$$\int_L \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_L \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(Q) - \varphi(P) = 9$$

PERGUNTA 2:

Alínea a):

1. Identificação da superfície de nível:

$S : g(x,y,z) = 0$, com $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

2. Cálculo do gradiente de $g(x,y,z)$:

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)$$

3. Cálculo do gradiente de $g(x,y,z)$ em P:

$$\nabla g(0,1,1) = \vec{n} = (0, 2, -2)$$

4. Cálculo da equação cartesiana do plano tangente:

$$[X - P] \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$$

Alínea b):

1. Cálculo do versor normal a S em P:

$$\vec{u} = \pm \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{8}}(0,2,-2) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

2. Cálculo do gradiente de $f(x,y,z)$:

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, -1, 1)$$

3. Cálculo do gradiente de $f(x,y,z)$ em P:

$$\nabla f(0,1,1) = (0,-1,1)$$

4. Cálculo da derivada direccional:

$$f'(P;\vec{u}) = \nabla f(0,1,1) \cdot \vec{u} = \pm\sqrt{2}$$

Alínea c):

1. Definição da superfície S_1 na forma cartesiana:

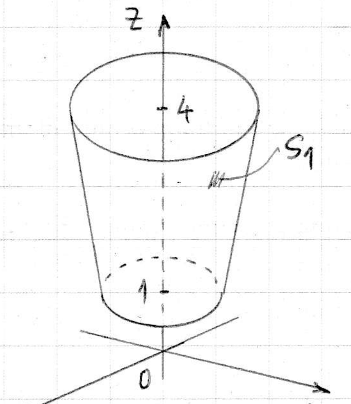
$$S_1: \quad z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z \in [1,4]$$

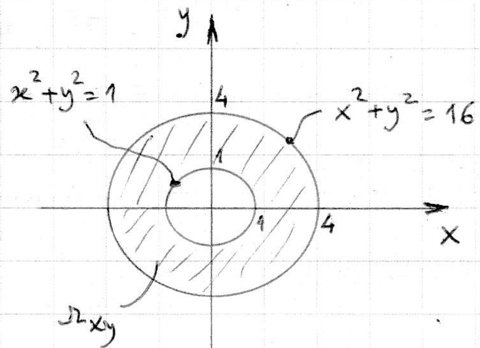
2 Parametrização da superfície S_1:

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y) \in \Omega_{xy}$$

$$\Omega_{xy} = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 16\}$$

3. Esboço da superfície S_1:





Wng

4. Cálculo do produto vectorial fundamental:

$$\vec{r}'_x = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad ; \quad \vec{r}'_y = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\vec{N}(x,y) = \vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

$$\|\vec{N}(x,y)\| = \sqrt{2}$$

5. Cálculo de área de superfície S_1:

$$A(S_1) = \iint_{\Omega_{xy}} \|\vec{N}(x,y)\| \, dx\,dy = \sqrt{2} \iint_{\Omega_{xy}} dx\,dy =$$

$$= \sqrt{2}\, A(\Omega_{xy}) = \sqrt{2}\,\pi\,(16-1) = 15\sqrt{2}\,\pi$$

PERGUNTA 3:

1. Cálculo do gradiente de $f(x,y)$:

$$\nabla f(x,y) = (-3y + 2x + 1,\ 6y - 3x)$$

2. Cálculo dos pontos críticos:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (-2,-1)$$

Ponto crítico: $P = (-2,-1)$

3. Classificação do ponto crítico:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6 \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3$$

$$\Delta f(-2,-1) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 3$$

Como $\Delta(-2,-1) = 3 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-1) = 2 > 0$ então

$P = (-2,-1)$ é um mínimo (absoluto) em que $f(-2,-1) = -1$.

PERGUNTA 4:

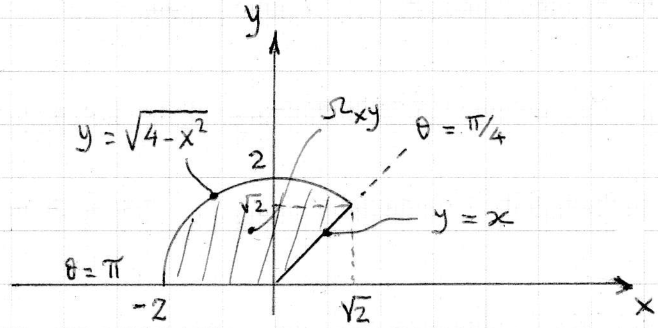
Alínea a):

1. Definição do domínio de integração em coordenadas cilíndricas:

$$V_1 = \{(r,\theta,z) : (r,\theta) \in \Omega_{r\theta},\ 1 \leq z \leq 4\}$$ em que

$$\Omega_{r\theta} = \{(r,\theta) : \pi/4 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 2\}$$

2. Projecção do domínio de integração no plano $0xy$ (esboço):

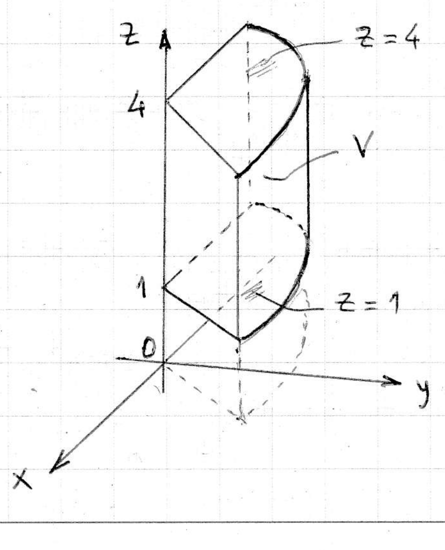


$$\theta = \pi/4 \Rightarrow y = mx,\quad m = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$0 \leq r \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = \sqrt{4-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x^2 = 4 \end{cases} (y \geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

3. Esboço do domínio de integração V:



Wíg

Alínea b) :

1. Projectando Ω_{xy} sobre o eixo dos xx (coordenadas cartesianas):

$$\Omega_{xy} = \Omega^1_{xy} \cup \Omega^2_{xy} \quad \text{em que}$$

$$\Omega^1_{xy} = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 0 \, , \, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$$\Omega^2_{xy} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \sqrt{2} \, , \, x \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$$

2. Definição do domínio V em coordenadas cartesianas:

$$V = V^1 \cup V^2 \quad \text{em que}$$

$$V^1 = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega^1_{xy} \, , \quad 1 \leq z \leq 4\}$$

$$V^2 = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega^2_{xy} \, , \, 1 \leq z \leq 4\}$$

3. Definição do integrando em coordenadas cartesianas:

$$r^2 \operatorname{sen}(\theta) \, dz \, dr \, d\theta \Rightarrow [r \operatorname{sen}(\theta)] \, r \, dz \, dr \, d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \, dz \, dy \, dx$$

4. Escrita do integral triplo em coordenadas cartesianas:

$$\int_{\pi/4}^{\pi} \int_0^2 \int_1^4 r^2 \operatorname{sen}(\theta) \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= \iiint_{V^1} y \, dz \, dy \, dx + \iiint_{V^2} y \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \iint_{\Omega^1_{xy}} \int_1^4 y \, dz \, dy \, dx + \iint_{\Omega^2_{xy}} \int_1^4 y \, dz \, dy \, dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_1^4 y \, dz \, dy \, dx + \int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} \int_1^4 y \, dz \, dy \, dx$$

PERGUNTA 5:

1. Aplicação do Teorema de Green:
Sendo D uma região de Jordan limitada pela curva de Jordan, C (curva simples e fechada), e se $\vec{f}(x,y) = (P,Q)$ é um campo vectorial em que P e Q são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém D, então:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx\,dy$$

2. Considerando o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = (P,Q) = (-y,x)$, em que $P=-y$ e $Q=x$ são campos escalares continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, então:

3. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1-(-1) = 2$ e, portanto,

$$\oint_C -y\,dx + x\,dy = \iint_D 2\,dx\,dy = 2\iint_D dx\,dy =$$

$$= 2\,A(D)$$

em que $A(D) = \iint_D dx\,dy$ é a área da região D.

4. Conclusão:

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy$$