

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE; FLUXO

Massa de uma superfície

- Considere-se uma distribuição de matéria sobre uma superfície S (*superfície material*). Se o campo escalar que exprime a densidade do material (massa por unidade de área) for constante, λ , então a massa da *superfície material* é dada pelo produto da densidade pela área de S , $A(S)$.

Assim, se S é uma superfície *simples* e *regular* parametrizada através de uma função vectorial diferenciável

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}, \quad (u,v) \in \Omega$$

então a massa de S , $M(S)$, é dada por

$$M(S) = \lambda A(S) = \lambda \iint_{\Omega} \|\vec{N}(u,v)\| du dv$$

onde $\vec{N}(u,v)$ é o *produto vectorial fundamental* de S .

No entanto, se a densidade variar de ponto para ponto, $\lambda(x,y,z)$, então a massa só pode ser obtida através de um processo de integração.

Com efeito, é possível provar que:

$$\begin{aligned} M(S) &= \iint_{\Omega} \lambda[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \|\vec{N}(u,v)\| du dv \\ &= \iint_{\Omega} \lambda[\vec{r}(u,v)] \|\vec{N}(u,v)\| du dv \end{aligned} \quad (1)$$

Integral de superfície

- O integral duplo expresso em (1) pode ser generalizado para um qualquer campo escalar, $h(x, y, z)$, que seja contínuo na superfície S . Este integral é, genericamente, designado por *integral de superfície de $h(x, y, z)$ sobre S* e escreve-se:

$$\iint_S h(x, y, z) \, dS = \iint_{\Omega} h[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \, \|\vec{N}(u, v)\| \, du \, dv$$

Se $h(x, y, z) = 1$, então:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_{\Omega} \|\vec{N}(u, v)\| \, du \, dv$$

Exemplo 1: Determine o integral de superfície do campo escalar $h(x, y, z) = xy$ sobre a superfície S parametrizada através de

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{a} + v\vec{b}, \quad (u, v) \in \Omega$$

em que $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\Omega : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$.

Solução:

Notando que

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\vec{j} + 3\vec{k} \Rightarrow \|\vec{N}(u, v)\| = 3\sqrt{2}$$

$$\vec{r}(u, v) = (2u + v)\vec{i} + (-u + v)\vec{j} + (u - v)\vec{k}$$

$$h[\vec{r}(u, v)] = x(u, v)y(u, v) = (2u + v)(-u + v) = -2u^2 + v^2 + uv$$

obtem-se para o integral de superfície:

$$\begin{aligned}
 \iint_S xy \, dS &= 3\sqrt{2} \int_0^1 \int_0^1 (-2u^2 + v^2 + uv) \, du \, dv = \\
 &= 3\sqrt{2} \int_0^1 \left[-\frac{2}{3}u^3 + v^2u + \frac{1}{2}vu^2 \right]_0^1 dv = 3\sqrt{2} \int_0^1 \left(v^2 + \frac{1}{2}v - \frac{2}{3} \right) dv = \\
 &= 3\sqrt{2} \left[\frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^2 - \frac{2}{3}v \right]_0^1 = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

Exemplo 2: Calcule o integral de superfície do campo escalar $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre a superfície S parametrizada através de

$$\vec{r}(u, v) = u \cos(2v) \vec{i} + u \sin(2v) \vec{j} + 2v \vec{k}, \quad (u, v) \in \Omega$$

em que $\Omega : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$.

Solução:

Notando que

$$\begin{aligned}
 \vec{N}(u, v) &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(2v) & \sin(2v) & 0 \\ -u \sin(2v) & u \cos(2v) & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= 2 \sin(2v) \vec{i} - 2 \cos(2v) \vec{j} + 2u \vec{k} \\
 \|\vec{N}(u, v)\| &= 2\sqrt{1 + u^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h[\vec{r}(u,v)] &= \sqrt{x^2(u,v) + y^2(u,v)} = \\
 &= \sqrt{u^2 \cos^2(2v) + u^2 \sin^2(2v)} = |u| = u \quad (0 \leq u \leq 1)
 \end{aligned}$$

obtém-se para o integral de superfície:

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = 2 \int_0^\pi \int_0^1 u \sqrt{1 + u^2} du dv = \frac{2}{3} \pi \left[(1 + u^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

- As coordenadas do centroide, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, de uma superfície S têm os seguintes valores

$$\bar{x} = \frac{1}{A(S)} \iint_S x dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{A(S)} \iint_S y dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{A(S)} \iint_S z dS$$

onde $A(S)$ é a área da superfície:

$$A(S) = \iint_S dS$$

- As coordenadas do centro de massa, (x_M, y_M, z_M) , de uma superfície S com densidade $\lambda(x, y, z)$ têm os seguintes valores

$$x_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S x \lambda(x, y, z) dS, \quad y_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S y \lambda(x, y, z) dS$$

$$z_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S z \lambda(x, y, z) dS$$

onde $M(S)$ é a massa da superfície:

$$M(S) = \iint_S \lambda(x, y, z) dS$$

Exemplo 3: Determine a posição do centro de massa da superfície S

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

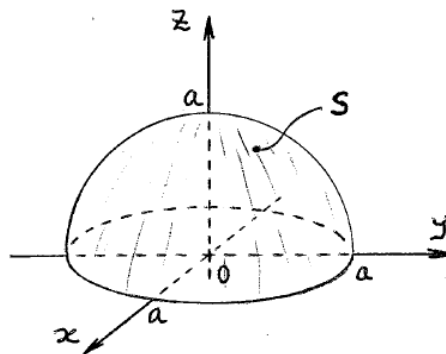
sabendo que a densidade, em cada um dos seus pontos, é directamente proporcional à distância ao plano xOy .

Solução:

A superfície S é uma casca semi-esférica que pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(\theta, \phi) = a \cos(\theta) \sin(\phi) \vec{i} + a \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} + a \cos(\phi) \vec{k}, \quad (\theta, \phi) \in R$$

em que $R : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/2$ (exemplo 5, capítulo 6).



A norma do seu produto vectorial fundamental é (exemplo 14, capítulo 6):

$$\|\vec{N}(\theta, \phi)\| = a^2 \sin(\phi)$$

Por razões de simetria (geométrica e mássica), $x_M = y_M = 0$; resta o cálculo da cota do centro de massa.

O campo escalar que define a densidade pode ser escrito sob a forma

$$\lambda(x, y, z) = kz, \quad k > 0$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Notando que

$$h[\vec{r}(\theta, \phi)] = kz(\theta, \phi) = ka \cos(\phi)$$

a massa da superfície é:

$$\begin{aligned} M(S) &= \iint_S \lambda(x, y, z) \, dS = ka^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos(\phi) \sin(\phi) \, d\theta d\phi = \\ &= 2\pi ka^3 \int_0^{\pi/2} \cos(\phi) \sin(\phi) \, d\phi = \pi ka^3 \left[\sin^2(\phi) \right]_0^{\pi/2} = \pi ka^3 \end{aligned}$$

Por outro lado, dado que

$$(zh)[\vec{r}(\theta, \phi)] = kz^2(\theta, \phi) = ka^2 \cos^2(\phi)$$

então:

$$\begin{aligned} \iint_S z\lambda(x, y, z) \, dS &= ka^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin(\phi) \cos^2(\phi) \, d\theta d\phi = \\ &= 2\pi ka^4 \int_0^{\pi/2} \sin(\phi) \cos^2(\phi) \, d\phi = \\ &= \frac{2}{3} \pi ka^4 \left[-\cos^3(\phi) \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} \pi ka^4 \end{aligned}$$

Obtém-se, então:

$$z_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S z\lambda(x, y, z) \, dS = \frac{2}{3} a$$

Concluindo, o centro de massa da superfície é o ponto de coordenadas:

$$(x_M, y_M, z_M) = \left(0, 0, \frac{2}{3} a \right)$$

Fluxo de um campo vectorial

- Admita-se que

$$S : \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \quad (2)$$

é uma superfície *simples* e *regular*, tendo como vector normal o vector unitário $\vec{n}(x, y, z)$ que é contínuo em S ; nestas condições, a superfície S chama-se *superfície orientada*. Convém notar que uma superfície deste tipo possui dois lados: o lado com vector normal \vec{n} e o lado com vector normal $-\vec{n}$.

- Se $\vec{v}(x, y, z)$ é um campo vectorial contínuo em S , então o integral de superfície dado por

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \iint_S [\vec{v}(x, y, z) \cdot \vec{n}(x, y, z)] \, dS \quad (3)$$

é designado por *fluxo de $\vec{v}(x, y, z)$ através de S na direcção de \vec{n}* .

- O fluxo de um campo vectorial através de uma superfície depende da escolha do vector normal unitário. Se, em vez de \vec{n} , for considerado o vector $-\vec{n}$, o fluxo altera o seu sinal, isto é:

$$\iint_S [\vec{v} \cdot (-\vec{n})] \, dS = \iint_S -(\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = -\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS$$

- Tendo em conta (2), o integral de fluxo (3) pode ser escrito sob a forma

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \iint_{\Omega} \vec{v}[\vec{r}(u, v)] \cdot \vec{n}[\vec{r}(u, v)] \, \|\vec{N}(u, v)\| \, du \, dv \quad (4)$$

- O integral de fluxo (4) pode ser reescrito apenas em função do produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u, v)$. Assim,

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \iint_{\Omega} \vec{v}[\vec{r}(u, v)] \cdot \vec{N}[\vec{r}(u, v)] \, du dv \quad (5)$$

se os vectores $\vec{n}(u, v)$ e $\vec{N}(u, v)$ possuem o mesmo sentido:

$$\vec{n}(u, v) = + \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$$

Por outro lado,

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = - \iint_{\Omega} \vec{v}[\vec{r}(u, v)] \cdot \vec{N}[\vec{r}(u, v)] \, du dv \quad (6)$$

se os vectores $\vec{n}(u, v)$ e $\vec{N}(u, v)$ possuem sentidos opostos:

$$\vec{n}(u, v) = - \frac{\vec{N}(u, v)}{\|\vec{N}(u, v)\|}$$

Exemplo 4: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

através da superfície esférica

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

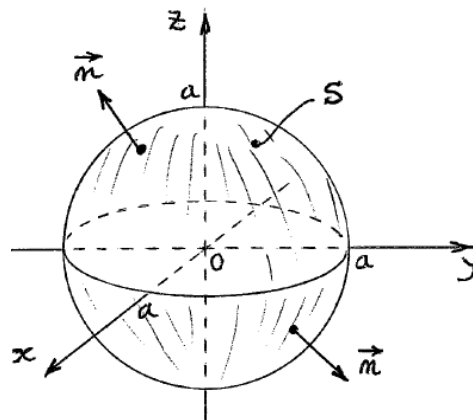
no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:

A superfície S pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(\theta, \phi) = a \cos(\theta) \sin(\phi) \vec{i} + a \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} + a \cos(\phi) \vec{k}, \quad (\theta, \phi) \in R$$

em que $R : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ (exemplo 5, capítulo 6).



O produto vectorial fundamental é (exemplo 10, capítulo 6):

$$\vec{N}(\theta, \phi) = -a^2 \sin(\phi) (\cos(\theta) \sin(\phi) \vec{i} + \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j} + \cos(\phi) \vec{k})$$

Dado que $-a^2 \sin(\phi) \cos(\phi) < 0$ se $\phi < \pi/2$, então o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(\theta, \phi)$, está orientado no sentido *de fora para dentro* de S , ou seja, tem o sentido oposto ao do vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(\theta, \phi)$. Nestas condições, atendendo a (6) e sabendo que

$$\vec{v}[\vec{r}(\theta, \phi)] = x(\theta, \phi) \vec{i} + y(\theta, \phi) \vec{j} = a \cos(\theta) \sin(\phi) \vec{i} + a \sin(\theta) \sin(\phi) \vec{j}$$

$$\vec{v}[\vec{r}(\theta, \phi)] \cdot \vec{N}(\theta, \phi) = -a^3 \sin^3(\phi) (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = -a^3 \sin^3(\phi)$$

obtém-se para o fluxo:

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS &= -\int_0^\pi \int_0^{2\pi} -a^3 \sin^3(\phi) d\theta d\phi = 2\pi a^3 \int_0^\pi \sin^3(\phi) d\phi = \\ &= 2\pi a^3 \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi - 2\pi a^3 \int_0^\pi \sin(\phi) \cos^2(\phi) d\phi = \\ &= -2\pi a^3 [\cos(\phi)]_0^\pi + \frac{2}{3} \pi a^3 [\cos^3(\phi)]_0^\pi = \\ &= 4\pi a^3 - \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{8}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

Exemplo 5: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

através da superfície do parabolóide

$$S : z = 1 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 0$$

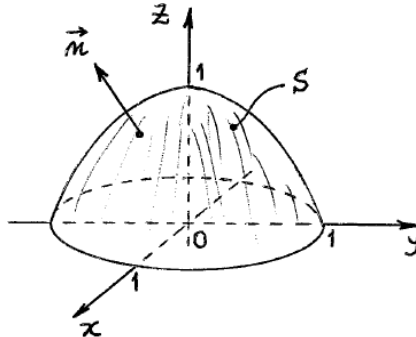
no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:

A superfície S pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1 - u^2 - v^2)\vec{k}, \quad (u, v) \in \Omega$$

em que $\Omega : 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$.



O produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = 2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u, v)$, e o vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(u, v)$, estão orientados no mesmo sentido, isto é, no sentido *de dentro para fora* de S . Assim, atendendo a (5) e sabendo que

$$\vec{v}[\vec{r}(u,v)] = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} = u\vec{i} + v\vec{j} + (1-u^2-v^2)\vec{k}$$

$$\vec{v}[\vec{r}(u,v)] \cdot \vec{N}(u,v) = 2u^2 + 2v^2 + 1 - u^2 - v^2 = 1 + u^2 + v^2$$

obtem-se para o fluxo:

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \iint_{\Omega} (1 + u^2 + v^2) \, dudv$$

Considerando (*coordenadas polares*)

$$u = r \cos(\theta) \quad , \quad v = r \sin(\theta) \quad , \quad dudv = r \, drd\theta$$

então

$$1 + u^2 + v^2 = 1 + r^2 \quad , \quad (r, \theta) \in \Omega_1$$

$$\Omega_1 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq r \leq 1$$

e, portanto:

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS &= \iint_{\Omega} (1 + u^2 + v^2) \, dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1 + r^2) \, drd\theta = \\ &= 2\pi \int_0^1 r \, drd\theta + 2\pi \int_0^1 r^3 \, drd\theta = \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

- O fluxo através de uma *superfície orientada e fechada por secções* (a superfície lateral de um cubo, de um cilindro fechado nas suas bases, de um parabolóide fechado na sua base, etc.) pode ser determinado calculando-o em cada uma das secções e somando as contribuições de cada uma destas secções.

Exemplo 6: Calcule o fluxo do campo vectorial

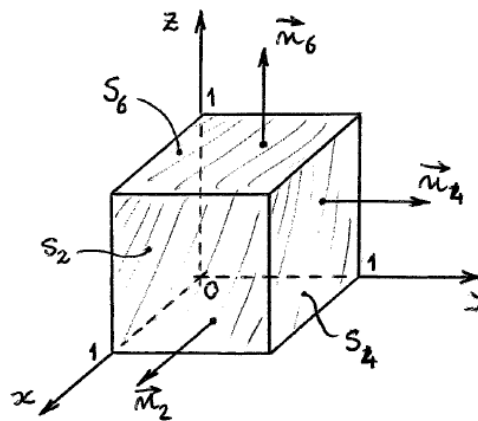
$$\vec{v}(x, y, z) = xy\vec{i} + 4yz^2\vec{j} + yz\vec{k}$$

através da superfície lateral, S , do cubo unitário

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:



A superfície lateral do cubo, S , pode ser decomposta em seis secções quadradas, cujos vectores normais unitários, orientados de acordo com o que é exigido no problema, são:

$$S_1 : x=0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow \vec{n}_1 = -\vec{i}$$

$$S_2 : x=1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow \vec{n}_2 = \vec{i}$$

$$S_3 : y=0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow \vec{n}_3 = -\vec{j}$$

$$S_4 : y=1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \Rightarrow \vec{n}_4 = \vec{j}$$

$$S_5 : z=0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \vec{n}_5 = -\vec{k}$$

$$S_6 : z=1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \vec{n}_6 = \vec{k}$$

Em relação à secção S_1 obtém-se:

$$\vec{v}(0, y, z) = 4yz^2\vec{j} + yz\vec{k} \quad , \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\iint_{S_1} (\vec{v} \cdot \vec{n}_1) \, dS = 0$$

Em relação à secção S_2 obtém-se:

$$\vec{v}(1, y, z) = y\vec{i} + 4yz^2\vec{j} + yz\vec{k} \quad , \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_2 = y$$

$$\iint_{S_2} (\vec{v} \cdot \vec{n}_2) \, dS = \int_0^1 \int_0^1 y \, dydz = \frac{1}{2}$$

Em relação à secção S_3 obtém-se:

$$\vec{v}(x, 0, z) = \vec{0} \quad , \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_3 = 0$$

$$\iint_{S_3} (\vec{v} \cdot \vec{n}_3) \, dS = 0$$

Em relação à secção S_4 obtém-se:

$$\vec{v}(x, 1, z) = x\vec{i} + 4z^2\vec{j} + z\vec{k} \quad , \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_4 = 4z^2$$

$$\iint_{S_4} (\vec{v} \cdot \vec{n}_4) \, dS = \int_0^1 \int_0^1 4z^2 \, dx dz = \frac{4}{3}$$

Em relação à secção S_5 obtém-se:

$$\vec{v}(x, y, 0) = xy\vec{i} \quad , \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_5 = 0$$

$$\iint_{S_5} (\vec{v} \cdot \vec{n}_5) \, dS = 0$$

Em relação à secção S_6 obtém-se:

$$\vec{v}(x, y, 1) = xy\vec{i} + 4y\vec{j} + y\vec{k} \quad , \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_6 = y$$

$$\iint_{S_6} (\vec{v} \cdot \vec{n}_6) \, dS = \int_0^1 \int_0^1 y \, dx dy = \frac{1}{2}$$

O fluxo total através da superfície lateral do cubo, S , no sentido *de dentro para fora* da superfície, é:

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \sum_{i=1}^6 \iint_{S_i} (\vec{v} \cdot \vec{n}_i) \, dS = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{3}$$

- A noção de fluxo é muito importante quando se estuda um fluido em movimento. Admita-se que a superfície S está mergulhada num fluido e defina-se o *sentido do vector normal unitário*, \vec{n} , em cada um dos seus pontos.

Seja \vec{v} o campo vectorial que define, em cada ponto, o vector velocidade do fluido que atravessa S . Para simplificar a análise, considere-se que \vec{v} não varia com o tempo (escoamento em *regime estacionário*).

O fluxo de \vec{v} através da superfície S é igual ao produto da área de S pelo valor médio da norma da componente de \vec{v} na direcção de \vec{n} ; do ponto de vista físico, trata-se do volume de fluido que atravessa S por unidade de tempo (*caudal*), a partir do lado da superfície com *vector normal* $-\vec{n}$ para o lado com *vector normal* \vec{n} .

Integrais de fluxo: outras notações

- A expressão do integral de fluxo apresentada em (5) pode ser reescrita, tal como aconteceu com o integral de linha, usando uma *notação diferencial*.

Assim, considere-se o campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

e a superfície S parametrizada através de:

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \quad , \quad (u, v) \in \Omega$$

Seja o produto vectorial fundamental dado por:

$$\begin{aligned} \vec{N}(u, v) &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x / \partial u & \partial y / \partial u & \partial z / \partial u \\ \partial x / \partial v & \partial y / \partial v & \partial z / \partial v \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \partial y / \partial u & \partial z / \partial u \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial z / \partial u \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \partial x / \partial u & \partial y / \partial u \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \vec{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \vec{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \vec{k} \end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} \vec{v}[\vec{r}(u, v)] \cdot \vec{N}[\vec{r}(u, v)] &= \\ &= P[\vec{r}(u, v)] \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q[\vec{r}(u, v)] \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R[\vec{r}(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \end{aligned}$$

resulta:

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS &= \iint_{\Omega} P[\vec{r}(u,v)] \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \, dudv + \\ &+ \iint_{\Omega} Q[\vec{r}(u,v)] \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \, dudv + \iint_{\Omega} R[\vec{r}(u,v)] \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \, dudv \end{aligned}$$

Designando na expressão anterior

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \, dudv = dy \wedge dz$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \, dudv = dz \wedge dx$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \, dudv = dx \wedge dy$$

obtém-se, em alternativa,

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS &= \iint_S P(x,y,z) \, dy \wedge dz + \iint_S Q(x,y,z) \, dz \wedge dx + \\ &+ \iint_S R(x,y,z) \, dx \wedge dy \end{aligned}$$

ou ainda, sob uma forma mais compacta:

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

Teorema de Gauss (da divergência)

- Seja Ω uma região de Jordan limitada por uma curva de Jordan suave por secções, C , e sejam P e Q campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém Ω .
Como se viu anteriormente, o teorema de Green permite exprimir o integral de linha de um campo vectorial ao longo de C através de um integral duplo sobre a região Ω

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

onde o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva C , percorrida no sentido directo.

- É possível mostrar que o teorema de Green pode ser reescrito, em termos vectoriais, sob a forma

$$\iint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v}) dx dy = \oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds \quad (7)$$

onde o integral à direita está definido em relação ao comprimento de arco, sendo \vec{n} o vector unitário normal à tangente à curva C , dirigido para o exterior da região Ω .

Assim, considerando

$$\vec{v}(x, y) = Q(x, y)\vec{i} - P(x, y)\vec{j}$$

então:

$$\iint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v}) dx dy = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy$$

Resta mostrar que:

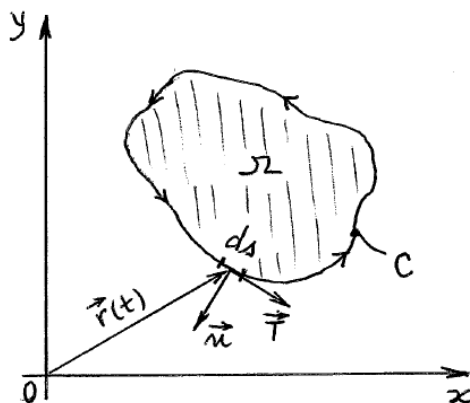
$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = \oint_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy$$

Dado que C é percorrida no sentido directo, então

$$\vec{n} = \vec{T} \times \vec{k}$$

em que \vec{T} é o versor da tangente à curva C em cada um dos seus pontos, e, portanto:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot (\vec{T} \times \vec{k}) = \vec{k} \cdot (\vec{v} \times \vec{T}) = \vec{T} \cdot (\vec{k} \times \vec{v}) = -\vec{T} \cdot (\vec{v} \times \vec{k}) = (-\vec{v} \times \vec{k}) \cdot \vec{T}$$



$$d\vec{r} = \vec{T} \, ds = (dx, dy)$$

$$d\vec{s} = \vec{n} \, ds = (dy, -dx)$$

Assim, notando que

$$-\vec{v} \times \vec{k} = (-Q\vec{i} + P\vec{j}) \times \vec{k} = (-Q\vec{i} \times \vec{k}) + (P\vec{j} \times \vec{k}) = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

resulta:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot \vec{T}$$

Finalmente, tendo em conta que

$$d\vec{r} = \vec{T} \, ds = (dx, dy)$$

obtém-se:

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot \vec{T} \, ds = \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot d\vec{r} = \oint_C P dx + Q dy$$

- Por outro lado, se se considerar

$$\vec{v}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

então

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$$

obtendo-se

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v}) \, dx dy &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \\ &= \oint_C -Q(x, y) dx + P(x, y) dy = \oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, ds = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (8)$$

em que:

$$d\vec{S} = \vec{n} ds = (dy, -dx)$$

A equação (8) representa o *fluxo do campo vectorial* $\vec{v}(x, y)$ *através da curva* C *na direcção de* \vec{n} .

- O teorema de Green apresentado em (7) pode ser transposto para o espaço tridimensional, sendo, neste caso, designado por *teorema da divergência* ou *teorema de Gauss*.

Teorema 1: Seja T um sólido limitado por uma superfície, S , *fechada e orientada* e seja \vec{n} o versor normal a S em cada um dos seus pontos, dirigido para o exterior de S . Se $\vec{v}(x, y, z)$ é um campo vectorial com derivadas parciais contínuas em S , então:

$$\iiint_T (\nabla \cdot \vec{v}) \, dx dy dz = \oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Exemplo 7: Resolva o problema do exemplo 4 recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

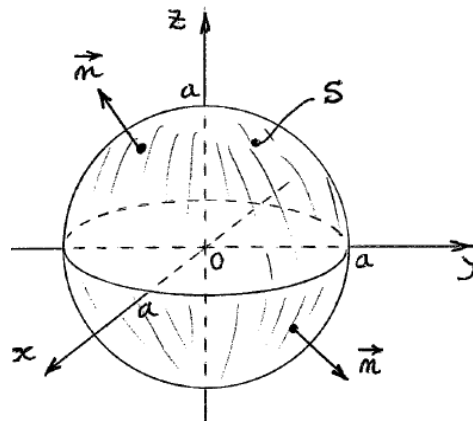
Solução:

Neste caso a superfície esférica

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

é uma superfície fechada e orientada que limita o sólido T (esfera):

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$



Dado que se pretende calcular o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície S , o teorema de Gauss permite escrever

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \iiint_T (\nabla \cdot \vec{v}) \, dx dy dz$$

em que:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} = 2$$

Obtém-se, então,

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = 2 \iiint_T dx dy dz = 2 V(T) = \frac{8}{3} \pi a^3$$

onde

$$V(T) = \frac{4}{3} \pi a^3$$

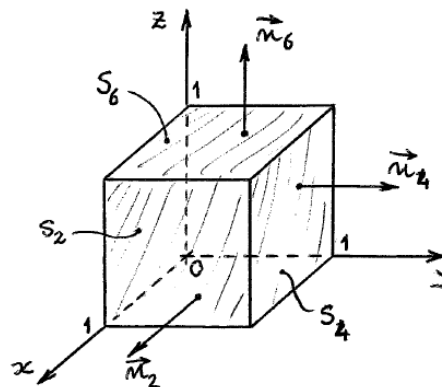
é o volume da esfera T .

Exemplo 8: Resolva o problema do exemplo 6 recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

Solução:

Neste caso, S é a superfície lateral do sólido T (cubo):

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$



Dado que se pretende calcular o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z) = xy\vec{i} + 4yz^2\vec{j} + yz\vec{k}$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície S , o teorema de Gauss permite escrever

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = \iiint_T (\nabla \cdot \vec{v}) \, dx dy dz$$

em que:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + 4 \frac{\partial(yz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = 2y + 4z^2$$

Obtém-se, então:

$$\begin{aligned} \oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS &= 2 \iiint_T (y + 2z^2) \, dx dy dz = 2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (y + 2z^2) \, dx dy dz = \\ &= 2 \int_0^1 \int_0^1 (y + 2z^2) \, dy dz = 2 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 + 2z^2 y \right]_0^1 dz = \\ &= \int_0^1 (1 + 4z^2) \, dz = \left[z + \frac{4}{3} z^3 \right]_0^1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 9: Determine o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z) = xy^2 \vec{i} + x^2 y \vec{j} + z \vec{k}$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície cilíndrica fechada, S , limitada pelas superfícies $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $z=0$ e $z=2$:

- Recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).
- Considerando a definição de integral de fluxo.

Solução:

- A superfície S constitui a superfície lateral do sólido T (cilindro):

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq (x+1)^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 \right\}$$

Tendo em atenção que

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 + x^2 + y^2$$

e dado que o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ é no sentido *de fora para dentro* da superfície S , o teorema de Gauss permite escrever:

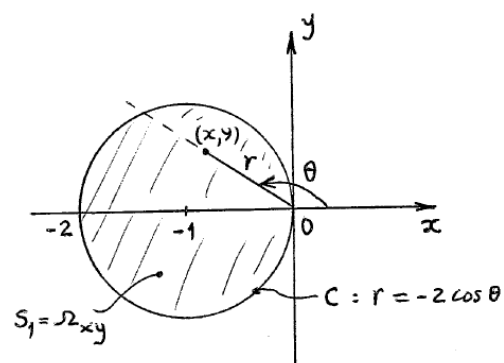
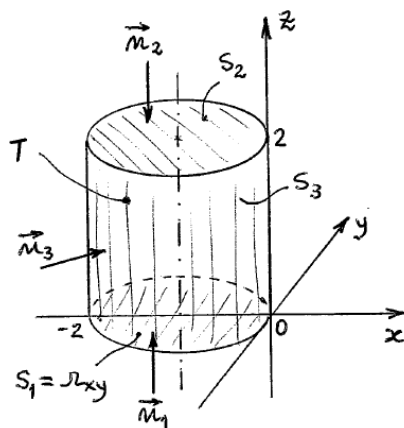
$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \iiint_T (\nabla \cdot \vec{v}) dx dy dz = - \iiint_T (1 + x^2 + y^2) dx dy dz \quad (9)$$

A projecção do sólido, T , sobre o plano xOy é a região circular, Ω_{xy} , definida por

$$\Omega_{xy} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq (x+1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

ou seja, é o conjunto de todos os pontos (x,y) que possuem coordenadas polares (r,θ) no conjunto:

$$\Gamma : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq -2\cos(\theta)$$



Assim, o sólido, T , pode ser descrito, em coordenadas cilíndricas, pela região:

$$\Pi : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq -2\cos(\theta), \quad 0 \leq z \leq 2$$

O integral de fluxo apresentado em (9) pode, então, ser reescrito sob a forma:

$$\begin{aligned}
 \oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS &= -\iiint_T (1 + x^2 + y^2) \, dx dy dz = -\iiint_{\Pi} (1 + r^2) \, r \, dr d\theta dz = \\
 &= -\int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{-2\cos(\theta)} (r + r^3) \, dr d\theta dz = \\
 &= -\frac{1}{4} \int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[2r^2 + r^4 \right]_0^{-2\cos(\theta)} d\theta dz = \\
 &= -\int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(2\cos^2(\theta) + 4\cos^4(\theta) \right) d\theta dz \quad (10)
 \end{aligned}$$

Particularizando, verifica-se:

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(\theta) \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (1 + \cos(2\theta)) \, d\theta = \\
 &= \frac{1}{4} [2\theta + \sin(2\theta)]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\pi}{2} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando um processo de integração por partes e atendendo a (11), resulta:

$$\begin{aligned}
 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^4(\theta) \, d\theta &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\theta) \cos^3(\theta) \, d\theta = \\
 &= \frac{1}{4} \left[\sin(\theta) \cos^3(\theta) \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{3}{4} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(\theta) \, d\theta = \frac{3\pi}{8} \quad (12)
 \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo em (10), obtém-se:

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS = -\frac{5\pi}{2} \int_0^2 dz = -5\pi$$

b) O cálculo através da definição de integral de fluxo exige, neste caso, o cálculo do fluxo através de cada uma das três superfícies elementares que limitam o sólido T (o cilindro da figura da página 7.23), nomeadamente, as duas regiões circulares, S_1 e S_2 , que correspondem às bases do cilindro, e a região cilíndrica, S_3 , que constitui a sua superfície lateral.

Em relação à secção S_1 obtém-se:

$$\vec{v}(x, y, 0) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{k} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$\iint_{S_1} (\vec{v} \cdot \vec{n}_1) dS = 0 \quad (13)$$

Em relação à secção S_2 obtém-se:

$$\vec{v}(x, y, 2) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = -\vec{k} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n}_2 = -2$$

$$\iint_{S_2} (\vec{v} \cdot \vec{n}_2) dS = -2 \iint_{S_2} dxdy = -2A(S_2) = -2\pi \quad (14)$$

onde $A(S_2) = \pi$ é a área da região S_2 (região circular de raio um).

A região cilíndrica S_3 pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(\theta, z) = -2\cos^2(\theta)\vec{i} - 2\cos(\theta)\sin(\theta)\vec{j} + z\vec{k}, (\theta, z) \in R$$

em que:

$$R : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, 0 \leq z \leq 2$$

O produto vectorial fundamental é:

$$\begin{aligned}\vec{N}(\theta, z) &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2(\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))\vec{i} - 4\sin(\theta)\cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k} \quad (15)\end{aligned}$$

A análise da expressão (15) permite verificar que o vector $\vec{N}(\theta, z)$ está orientado no sentido *de dentro para fora* da superfície S_3 , isto é, tem o sentido oposto ao do vector unitário normal à superfície, $\vec{n}_3(\theta, z)$. Nestas condições, atendendo a (6) e sabendo que

$$\begin{aligned}\vec{v}[\vec{r}(\theta, z)] &= -8\cos^4(\theta)\sin^2(\theta)\vec{i} - 8\cos^5(\theta)\sin(\theta)\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{v}[\vec{r}(\theta, z)] \cdot \vec{N}(\theta, z) &= -16\cos^4(\theta)\sin^4(\theta) + 48\cos^6(\theta)\sin^2(\theta) = \\ &= -16\cos^4(\theta)(1 - \cos^2(\theta))^2 + 48\cos^6(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) = \\ &= -16\cos^4(\theta) + 80\cos^6(\theta) - 64\cos^8(\theta)\end{aligned}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} (\vec{v} \cdot \vec{n}_3) dS &= -\iint_R \vec{v}[\vec{r}(\theta, z)] \cdot \vec{N}(\theta, z) d\theta dz = \\ &= 16 \int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos^4(\theta) - 5\cos^6(\theta) + 4\cos^8(\theta)) d\theta dz \quad (16)\end{aligned}$$

Aplicando um processo de integração por partes e atendendo a (12), resulta:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^6(\theta) d\theta &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\theta) \cos^5(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{6} \left[\sin(\theta) \cos^5(\theta) \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{5}{6} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^4(\theta) d\theta = \frac{5\pi}{16} \quad (17)\end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando um processo de integração por partes e atendendo a (17), resulta:

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^8(\theta) d\theta &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\theta) \cos^7(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{8} \left[\sin(\theta) \cos^7(\theta) \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{7}{8} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^6(\theta) d\theta = \frac{35\pi}{128} \quad (18) \end{aligned}$$

Substituindo em (16) os valores obtidos em (12), (17) e (18), conclui-se que o fluxo através da superfície S_3 é:

$$\iint_{S_3} (\vec{v} \cdot \vec{n}_3) dS = 16 \left(\frac{3\pi}{8} - \frac{25\pi}{16} + \frac{35\pi}{32} \right) \int_0^2 dz = -3\pi \quad (19)$$

Finalmente, tendo em conta (13), (14) e (19), o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x, y, z)$ no sentido *de fora para dentro* da superfície cilíndrica fechada S tem o valor:

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \sum_{i=1}^3 \iint_{S_i} (\vec{v} \cdot \vec{n}_i) dS = 0 - 2\pi - 3\pi = -5\pi$$

Teorema de Stokes

- Considere-se novamente o teorema de Green. Se Ω é uma região de Jordan limitada por uma curva de Jordan suave por secções, C , e P e Q são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém Ω , então

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

onde o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva C , percorrida no sentido directo.

- Considerando agora o campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, 0) = P(x, y, 0)\vec{i} + Q(x, y, 0)\vec{j} + 0\vec{k}$$

então o rotacional de $\vec{v}(x, y, 0)$ é

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

e, portanto:

$$(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Assim, o teorema de Green pode ser reescrito, em termos do campo vectorial \vec{v} , sob a forma

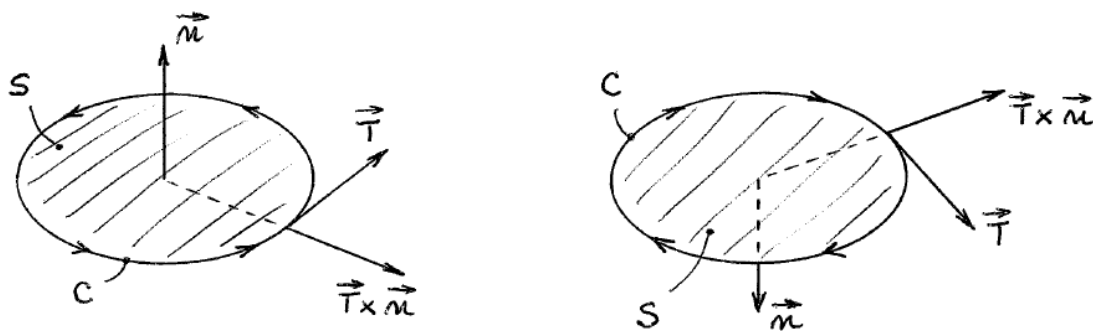
$$\iint_{\Omega} [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{k}] dx dy = \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (20)$$

- A propriedade expressa em (20) pode ser aplicada a uma superfície plana do espaço \mathbb{R}^3 .

Seja S uma superfície plana de \mathbb{R}^3 limitada por uma curva de Jordan suave por secções, C . Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém S , então

$$\iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (21)$$

onde \vec{n} é o vector unitário normal a S e o integral à direita é o integral de linha definido no *sentido positivo em relação a \vec{n}* , ou seja, no sentido do versor da tangente, \vec{T} , à curva C , que é definido de modo que o versor $\vec{T} \times \vec{n}$ aponte na direcção exterior à superfície S .



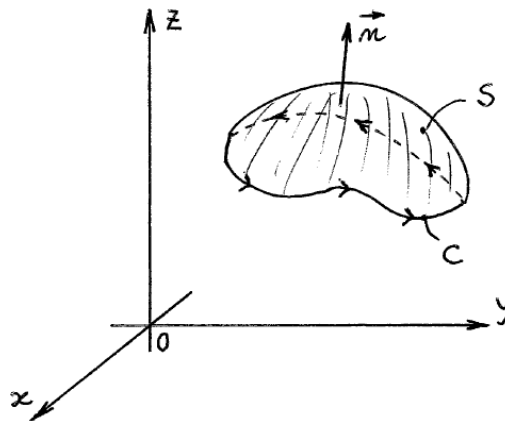
Por convenção, diz-se que a curva C é percorrida no *sentido positivo em relação a \vec{n}* , se a superfície S se situar sempre à esquerda quando se percorre a curva C com a cabeça orientada na direcção e sentido do vector \vec{n} .

- No teorema seguinte, designado por *teorema de Stokes*, o integral de fluxo definido em (21) é generalizado para uma *superfície regular e orientada* no espaço \mathbb{R}^3 .

Teorema 2: Seja S uma *superfície regular e orientada* limitada por uma curva de Jordan suave por secções, C . Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém S , então

$$\iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] \, dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

onde \vec{n} é um vector unitário normal que varia continuamente em S e o integral à direita é o integral de linha definido no *sentido positivo em relação a \vec{n}* .



Exemplo 10: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - xyz\vec{k}$$

através da superfície parabólica

$$S : z = 1 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 0$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície:

- Considerando a definição de integral de fluxo.
- Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

- O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x^2y & -xyz \end{vmatrix} = (-xz)\vec{i} + (yz)\vec{j} + 0\vec{k}$$

A superfície S pode ser parametrizada através de

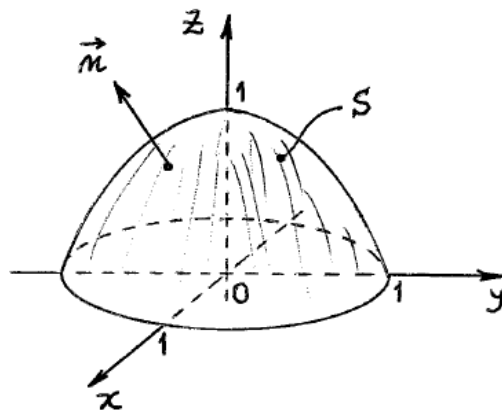
$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1 - u^2 - v^2)\vec{k}, \quad (u, v) \in \Omega$$

em que:

$$\Omega : 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$$

O produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = 2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k}$$



Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u, v)$, e o vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(u, v)$, estão orientados no mesmo sentido, isto é, no sentido *de dentro para fora* de S .

Assim, atendendo a (5) e sabendo que

$$(\nabla \times \vec{v})[\vec{r}(u, v)] = -u(1 - u^2 - v^2)\vec{i} + v(1 - u^2 - v^2)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$(\nabla \times \vec{v})[\vec{r}(u, v)] \cdot \vec{N}(u, v) = -2(u^2 - v^2) + 2(u^4 - v^4)$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla \times \vec{v}$ através de S :

$$\iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS = -2 \iint_{\Omega} ((u^2 - v^2) - (u^4 - v^4)) dudv$$

Considerando (coordenadas polares)

$$u = r \cos(\theta) \quad , \quad v = r \sin(\theta) \quad , \quad dudv = r dr d\theta$$

então

$$\begin{aligned} (u^2 - v^2) - (u^4 - v^4) &= r^2 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + \\ &+ r^4 (\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)) \quad , \quad (r, \theta) \in \Omega_1 \end{aligned}$$

em que:

$$\Omega_1 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq r \leq 1$$

Assim:

$$\begin{aligned} \iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS &= -2 \iint_{\Omega} ((u^2 - v^2) - (u^4 - v^4)) dudv = \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) dr d\theta - \\ &\quad -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^5 (\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)) dr d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) d\theta - \\ &\quad -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)) d\theta \end{aligned} \tag{22}$$

Particularizando, verifica-se:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{4} [2\theta + \sin(2\theta)]_0^{2\pi} = \pi \quad (23)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{4} [2\theta - \sin(2\theta)]_0^{2\pi} = \pi \quad (24)$$

Por outro lado, recorrendo a processos de integração por partes e atendendo a (23) e a (24), resulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \cos^3(\theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \left[\sin(\theta) \cos^3(\theta) \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{3\pi}{4} \\ \int_0^{2\pi} \sin^4(\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \sin(\theta) \sin^3(\theta) d\theta = \\ &= -\frac{1}{4} \left[\cos(\theta) \sin^3(\theta) \right]_0^{2\pi} + \frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo em (22), obtém-se:

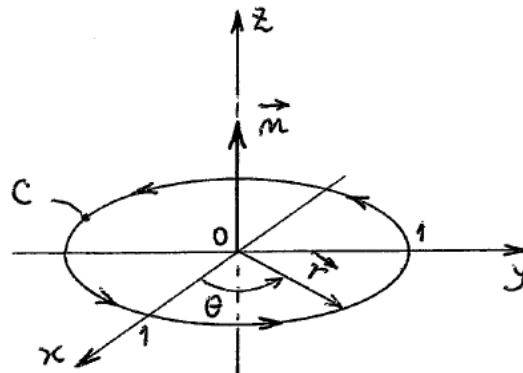
$$\iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS = -\frac{1}{2}(\pi - \pi) - \frac{1}{3} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \right) = 0$$

b) A superfície parabólica

$$S : z = 1 - (x^2 + y^2), \quad z \geq 0$$

é limitada, no seu bordo, pela circunferência de raio um centrada na origem:

$$C : x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$$



A linha C pode ser parametrizada sob a forma:

$$C : \vec{r}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}, \theta \in [0, 2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de dentro para fora* da superfície S, o vector unitário \vec{n} está orientado no *sentido do semi-eixo positivo dos z* e, portanto, a linha C deverá ser percorrida no *sentido directo*, quando vista de um ponto com cota positiva.

Sabendo que

$$\vec{r}'(\theta) = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}(\vec{r}(\theta)) = \cos(\theta)\sin^2(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\cos^2(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}'(\theta) = -\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin(\theta)\cos^3(\theta)$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\begin{aligned} \iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS &= \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin(\theta)\cos^3(\theta) \right) d\theta = \\ &= -\frac{1}{4} \left[\sin^4(\theta) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \left[\cos^4(\theta) \right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 11: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z) = -3y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^4\vec{k}$$

através da superfície do elipsoide

$$S : 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq \sqrt{2}/2$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície:

a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x, y, z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & z^4 \end{vmatrix} = 6\vec{k}$$

A superfície S pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{1 - 4(u^2 + v^2)}\vec{k}, \quad (u, v) \in \Omega$$

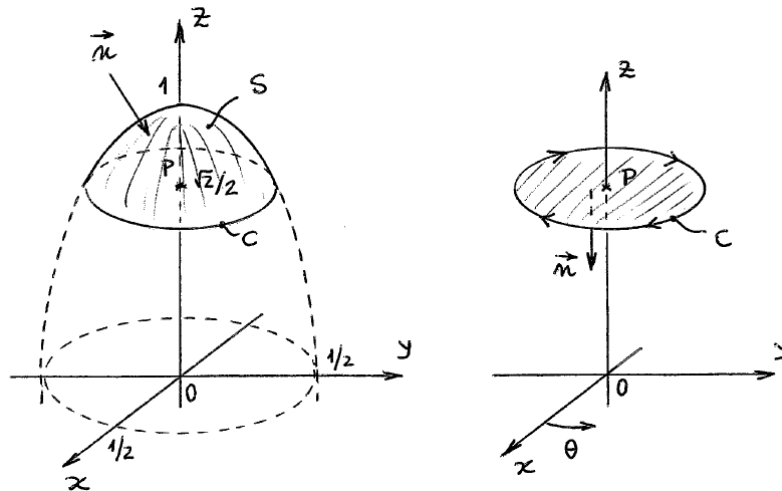
em que:

$$\Omega : 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1/8$$

O produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4u(1 - 4(u^2 + v^2))^{-1/2} \\ 0 & 1 & -4v(1 - 4(u^2 + v^2))^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4u}{\sqrt{1-4(u^2+v^2)}} \vec{i} + \frac{4v}{\sqrt{1-4(u^2+v^2)}} \vec{j} + \vec{k}$$



Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u,v)$, e o vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(u,v)$, estão orientados em sentidos opostos.

Assim, atendendo a (6) e sabendo que

$$(\nabla \times \vec{v})[\vec{r}(u,v)] = 6\vec{k}$$

$$(\nabla \times \vec{v})[\vec{r}(u,v)] \cdot \vec{N}(u,v) = 6$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla \times \vec{v}$ através de S:

$$\iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS = -6 \iint_{\Omega} dudv = -6A(\Omega) = -6\frac{\pi}{8} = -\frac{3\pi}{4}$$

em que $A(\Omega) = \pi/8$ é a área da região Ω .

b) A superfície do elipsoide

$$S : 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1, z \geq \sqrt{2}/2$$

é limitada, no seu bordo, pela linha

$$C : x^2 + y^2 = 1/8, z = \sqrt{2}/2$$

ou seja, pela circunferência de raio $\sqrt{2}/4$ centrada em $P = (0, 0, \sqrt{2}/2)$.

A linha C pode ser parametrizada sob a forma:

$$C : \vec{r}(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(\theta) \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(\theta) \vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{k}, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de fora para dentro* da superfície S , o vector unitário \vec{n} está orientado no *sentido do semi-eixo negativo dos z* e, portanto, a linha C deverá ser percorrida no *sentido directo*, quando vista da origem.

Sabendo que

$$\vec{r}'(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \sin(\theta) \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cos(\theta) \vec{j} + 0 \vec{k}$$

$$\vec{v}(\vec{r}(\theta)) = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \sin(\theta) \vec{i} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \cos(\theta) \vec{j} + \frac{1}{4} \vec{k}$$

$$\vec{v}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}'(\theta) = \frac{3}{8}$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \frac{3}{8} \int_{2\pi}^0 d\theta = -\frac{3\pi}{4}$$

Exemplo 12: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x, y, z) = z^2 \vec{i} - 2x \vec{j} + y^3 \vec{k}$$

através da superfície esférica

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície:

a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x, y, z)$ é o campo vectorial:

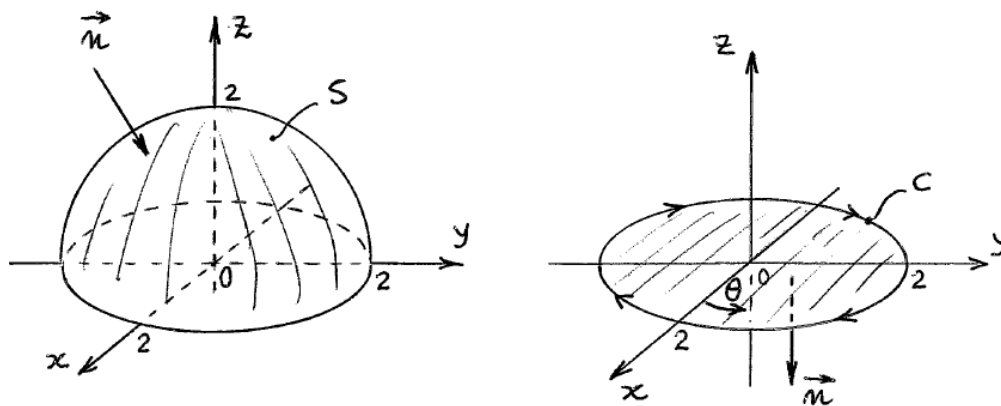
$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & -2x & y^3 \end{vmatrix} = 3y^2\vec{i} + 2z\vec{j} - 2\vec{k}$$

A superfície S pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{4 - (u^2 + v^2)}\vec{k}, \quad (u, v) \in \Omega$$

em que:

$$\Omega : 0 \leq u^2 + v^2 \leq 4$$



O produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -u(4 - (u^2 + v^2))^{-1/2} \\ 0 & 1 & -v(4 - (u^2 + v^2))^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{u}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}} \vec{i} + \frac{v}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}} \vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u,v)$, e o vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(u,v)$, estão orientados em sentidos opostos.

Assim, atendendo a (6) e sabendo que

$$(\nabla \times \vec{v})[\vec{r}(u,v)] = 3v^2 \vec{i} + 2\sqrt{4-(u^2+v^2)} \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(\nabla \times \vec{v})[\vec{r}(u,v)] \cdot \vec{N}(u,v) = \frac{3uv^2}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}} + 2v - 2$$

resulta:

$$\iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS = - \iint_{\Omega} \left[\frac{3uv^2}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}} + 2v - 2 \right] dudv$$

Uma vez que a função

$$h(u,v) = \frac{3uv^2}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}}$$

é ímpar na variável u e a região Ω é simétrica em relação ao eixo dos vv , tem-se:

$$\iint_{\Omega} \frac{3uv^2}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}} dudv = 0$$

Obtém-se, então, para o fluxo do campo vectorial $\nabla \times \vec{v}$ através de S

$$\begin{aligned} \iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS &= -2 \iint_{\Omega} v dudv + 2 \iint_{\Omega} dudv = \\ &= -2\bar{v}_C A(\Omega) + 2A(\Omega) = 8\pi \end{aligned}$$

em que $A(\Omega) = 4\pi$ é a área da região Ω e $\bar{v}_C = 0$ é a coordenada v do seu centroide.

b) A superfície esférica

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$$

é limitada, no seu bordo, pela linha

$$C : x^2 + y^2 = 4, z = 0$$

ou seja, pela circunferência de raio dois centrada na origem.

A linha C pode ser parametrizada sob a forma:

$$C : \vec{r}(\theta) = 2\cos(\theta)\vec{i} + 2\sin(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}, \theta \in [0, 2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de fora para dentro* da superfície S , o vector unitário \vec{n} está orientado no *sentido do semi-eixo negativo dos z* e, portanto, a linha C deverá ser percorrida no *sentido retrógrado*, quando vista de um ponto com cota positiva.

Sabendo que

$$\vec{r}'(\theta) = -2\sin(\theta)\vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}(\vec{r}(\theta)) = 0\vec{i} - 4\cos(\theta)\vec{j} + 8\sin^3(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{v}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}'(\theta) = -8\cos^2(\theta)$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\begin{aligned} \iint_S [(\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n}] dS &= \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -8 \int_{2\pi}^0 \cos^2(\theta) d\theta = \\ &= -4 \int_{2\pi}^0 (1 + \cos(2\theta)) d\theta = -2 [2 + \sin(2\theta)]_{2\pi}^0 = 8\pi \end{aligned}$$