COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 7

INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE; FLUXO

1. Dados os vectores não nulos $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, determine o integral de superfície do campo escalar $h(x,y,z) = xy$ sobre a superfície, S, parametrizada através da função vectorial a duas variáveis reais $\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + v\vec{b}$, $(u,v) \in \Omega$, em que $\Omega = \{(u,v) \ : \ 0 \le u \le 1 \ , \ 0 \le v \le 1\}$.

2. Calcule o integral $\iint_S (2y)\, dS$ sobre a superfície, S, definida por $z = y^2/2$, $(x,y) \in \Omega$, em que $\Omega = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1\}$.

3. Calcule o integral $2\iint_S dS$ sobre a superfície, S, definida por $z = y^2/2$, $(x,y) \in \Omega$, em que $\Omega = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1\}$.

4. Calcule o integral $\iint_S 4\sqrt{x^2 + y^2}\, dS$ sobre a superfície, S, definida por $z = xy$, $(x,y) \in \Omega$, em que $\Omega = \left\{(x,y) \ : \ 0 \le x^2 + y^2 \le 1\right\}$.

5. Calcule o integral $\iint_S (xyz)\, dS$ sobre a superfície, S, que corresponde ao primeiro octante do plano $x + y + z = 1$.

6. Calcule o integral $\iint_S (x^2 z)\, dS$ sobre a superfície cilíndrica, S, definida por $x^2 + z^2 = 1$, tal que $1 \le y \le 4$ e $z \ge 0$.

10. Seja a superfície, *S*, parametrizada através da função vectorial a duas variáveis reais $\vec{r}(u,v) = (u+v)\vec{i} + (u-v)\vec{j} + u\vec{k}$, $(u,v) \in \Omega$, em que $\Omega = \{(u,v)\ :\ 0 \le u \le 1\ ,\ 0 \le v \le 1\}$. Admita que a densidade, em cada um dos seus pontos, é dada por $\lambda(x,y,z) = kz$ $(k > 0)$. Calcule:

a) A sua área.
b) As coordenadas do seu centroide.
c) A sua massa.
d) As coordenadas do seu centro de massa.
e) Os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados, I_x, I_y e I_z.

11. Seja a superfície triangular, *S*, com vértices nos pontos $(a,0,0)$, $(0,a,0)$ e $(0,0,a)$, tal que $a > 0$. Calcule:

a) A sua área.
b) As coordenadas do seu centroide.

12. Admitindo que a densidade em cada ponto da superfície do exemplo 11 é dada por $\lambda(x,y,z) = kx^2$ $(k > 0)$, calcule:

a) A sua massa.
b) As coordenadas do seu centro de massa.

16. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ através da superfície cilíndrica, *S*, parametrizada através da função vectorial a duas variáveis reais $\vec{r}(u,v) = a\cos(u)\vec{i} + a\operatorname{sen}(u)\vec{j} + v\vec{k}$, com $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0,1]$ e $a > 0$, no sentido de dentro para fora da superfície.

17. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ através da superfície do paraboloide, *S*, definida por $z = 1 - (x^2 + y^2)$, $z \ge 0$, no sentido de dentro para fora da superfície.

18. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$, através da superfície cónica, *S*, definida por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \le 4$, no sentido de dentro para fora da superfície.

19. Seja *S* a superfície parametrizada através da função vectorial a duas variáveis reais $\vec{r}(u,v) = u\cos(v)\vec{i} + u\operatorname{sen}(v)\vec{j} + v\vec{k}$, com $u \in [0,1]$ e $v \in [0, 2\pi]$. Calcule o integral de fluxo $\iint_S x\,dy \wedge dz$ através de *S*, no sentido definido pelo seu produto vectorial fundamental.

20. Seja a superfície triangular, *S*, do exemplo 11.. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x^2\vec{i} - y^2\vec{j}$ através de *S*, no sentido definido pelo semieixo positivo dos *zz*.

22. Considere a superfície, *S*, definida por $z = xy$, $(x,y) \in \Omega$, tal que $\Omega = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 2\}$. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = -xz\vec{j} + xy\vec{k}$ através de *S*, no sentido definido pelo semieixo negativo dos *zz*.

23. Seja a superfície fechada, *S*, limitada pelas superfícies $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = 1$. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z^2\vec{k}$ através de *S*, no sentido de fora para dentro da superfície.

24. Considere a superfície fechada, *S*, que limita o cubo unitário, *T*, situado no quarto octante $T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le a \ , \ -a \le y \le 0 \ , \ 0 \le z \le a\}$ $(a > 0)$. Em cada uma das alíneas seguintes, determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície.

a) $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j}$.

b) $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

c) $\vec{f}(x,y,z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

d) $\vec{f}(x,y,z) = -2x^2\vec{i} - 2xz\vec{j} + z^2\vec{k}$.

e) $\vec{f}(x,y,z) = xz\vec{i} + 4xyz^2\vec{j} + 2yz\vec{k}$.

26. Considere a superfície fechada, *S*, limitada pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + xy\vec{j} + z^2\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície.

28. Seja a superfície fechada, *S*, limitada pelas superfícies $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = 2$. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = \left(2x + ze^y\right)\vec{i} + \left(y + \mathrm{sen}(z)\right)\vec{j} + \left(3z + e^{xy}\right)\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície.

29. Considere a superfície fechada, *S*, situada no primeiro octante, limitada pelos planos coordenados e pela superfície $x+y+z=a\ (a>0)$. Determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=3x^2\vec{i}+2xy\vec{j}-5xz\vec{k}$ através de *S*, no sentido de fora para dentro da superfície.

30. Calcule $\nabla\cdot\vec{f}$ (divergência) e $\nabla\times\vec{f}$ (rotacional), sendo $\vec{f}$ o campo vectorial:

a) $\vec{f}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

b) $\vec{f}(x,y,z)=-2x\vec{i}+4y\vec{j}-6z\vec{k}$.

c) $\vec{f}(x,y,z)=xyz\vec{i}+xz\vec{j}+z\vec{k}$.

d) $\vec{f}(x,y,z)=x^3y\vec{i}+y^3z\vec{j}+xy^3\vec{k}$.

e) $\vec{f}(x,y,z)=x^2y\vec{i}+(z-x-y)\vec{j}+2xy\vec{k}$.

f) $\vec{f}(x,y,z)=xz\vec{i}+4xyz^2\vec{j}+2yz\vec{k}$.

g) $\vec{f}(\vec{r})=e^{r^2}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

h) $\vec{f}(\vec{r})=r^{-2}\vec{r}$.

i) $\vec{f}(x,y,z)=\dfrac{\alpha x}{x^2+y^2}\vec{i}+\dfrac{\alpha y}{x^2+y^2}\vec{j}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

j) $\vec{f}(x,y,z)=\dfrac{\alpha y}{x^2+y^2}\vec{i}+\dfrac{\alpha x}{x^2+y^2}\vec{j}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

k) $\vec{f}(x,y,z)=\left(2x+ze^{y}\right)\vec{i}+\left(y+\operatorname{sen}(z)\right)\vec{j}+\left(3z+e^{xy}\right)\vec{k}$.

31. Mostre que a divergência e o rotacional são operadores lineares, isto é, se $\vec{f}$ e $\vec{g}$ são campos vectoriais e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, então:

a) $\nabla\cdot(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})=\alpha(\nabla\cdot\vec{f})+\beta(\nabla\cdot\vec{g})$.

b) $\nabla\times(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})=\alpha(\nabla\times\vec{f})+\beta(\nabla\times\vec{g})$.

32. Mostre que o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=2x^3y\vec{i}-y^2z\vec{j}+(yz^2-6x^2yz)\vec{k}$ é solenoidal.

33. Mostre que o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=(2xy+z^2)\vec{i}+(x^2-2yz)\vec{j}+(2xz-y^2)\vec{k}$ é irrotacional.

34. Mostre que se φ é um campo escalar e $\vec{f}$ um campo vectorial, então:

a) $\nabla\cdot(\varphi\vec{f})=(\nabla\varphi)\cdot\vec{f}+\varphi(\nabla\cdot\vec{f})$.

b) $\nabla\times(\varphi\vec{f})=(\nabla\varphi)\times\vec{f}+\varphi(\nabla\times\vec{f})$.

39. Resolva os exercícios 23. a 29. recorrendo ao teorema da divergência.

40. Considere a superfície fechada, S, que limita o sólido, V, definido por $V=\left\{(x,y,z)\ :\ 1\geq z\geq \sqrt{x^2+y^2}\right\}$ e o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Verifique o teorema da divergência.

41. Considere a superfície fechada, S, que limita o sólido, V, definido pelos planos $x=0$, $y=-1$, $y=1$, $z=0$ e $x+z=2$ e o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=y\vec{j}$. Verifique o teorema da divergência.

42. Recorrendo ao teorema adequado, determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=-x^2y\vec{i}+3y\vec{j}+2xyz\vec{k}$ através da superfície fechada, S, que limita o volume $V=\left\{(x,y,z)\ :\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 2-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$, no sentido de dentro para fora da superfície.

43. Considere o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=xy^2\vec{i}+x^2y\vec{j}+z\vec{k}$ e seja a superfície fechada, S, limitada pelas superfícies $x^2+y^2=1$, $z=0$ e $z=1$. Calcule $\oiint_S (\vec{f}\cdot\vec{n})\,dS$:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b)** Recorrendo ao teorema da divergência.

44. Calcule o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=2xy\vec{i}+y^2\vec{j}+3yz\vec{k}$ através da superfície esférica, S, definida por $x^2+y^2+z^2=a^2$ ($a>0$), no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b)** Recorrendo ao teorema da divergência.

45. Sejam o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ e a superfície fechada, S, limitada pelas superfícies $x^2+y^2=2y$, $z=0$ e $z=2$. Usando o teorema adequado, determine o fluxo do campo vetorial $\vec{f}(x,y,z)$ através de S, no sentido de dentro para fora da superfície.

46. Seja a superfície fechada $S=\left\{(x,y,z)\ :\ (x^2+y^2+z^2=4\ ,\ z\geq 0)\ \vee\ (x^2+y^2\leq 4\ ,\ z=0)\right\}$. Recorrendo ao teorema adequado, determine o fluxo do campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=\dfrac{x^3}{y^2}\vec{i}+5\dfrac{x^2}{y}\vec{j}+2z\left(\dfrac{x^2}{y^2}+1\right)\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície.

52. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}$. Verifique o teorema de Stokes sobre a superfície $S=\left\{(x,y,z)\ :\ z+1=x^2+y^2\ ,\ z\in[-1,0]\right\}$.

53. Considere a superfície triangular, *S*, com vértices nos pontos $A=(2,0,0)$, $B=(0,2,0)$ e $C=(0,0,2)$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z)=x^3\vec{i}+2xy\vec{j}+z^2\vec{k}$ através de *S*, no sentido definido pelo semieixo positivo dos *zz*:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b)** Recorrendo ao teorema de Stokes.

54. Seja S a superfície $z=\sqrt{x^2+y^2}$, limitada por $2z=x^2+y^2$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z)=z\vec{i}+x\vec{j}+2\vec{k}$ através de *S*, no sentido de fora para dentro da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b)** Recorrendo ao teorema de Stokes.

55. Seja S a superfície definida por $z=1-x^2-y^2$, $z\geq 0$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z)=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b)** Recorrendo ao teorema de Stokes.

56. Seja S a superfície definida por $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z)=z^2\vec{i}+2x\vec{j}-y^3\vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b)** Recorrendo ao teorema de Stokes.

57. Seja S a superfície $z = x^2 + y^2$, limitada superiormente pelo plano $z = 2x$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z) = y^2\vec{i} - \vec{k}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b)** Recorrendo ao teorema de Stokes.

58. Seja S a superfície definida por $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq -2$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z) = (2xyz + 2z)\vec{i} + xy^2\vec{j} + xz\vec{k}$ através de *S*, no sentido de fora para dentro da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b)** Recorrendo ao teorema de Stokes.

59. Seja S a superfície definida por $z = x^2 + y^2$, $z \leq -2$, $y \geq 0$. Calcule o fluxo do rotacional de $\vec{f}(x,y,z) = (x^2 + xz)\vec{i} + yz\vec{j}$ através de *S*, no sentido de dentro para fora da superfície:

a) Por cálculo directo do integral de fluxo. **b)** Recorrendo ao teorema de Stokes.

61. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{i} + zx\vec{j} + zy\vec{k}$. Verifique o teorema de Stokes sobre a superfície $S = \left\{(x,y,z) \ : \ z = 5 - (x^2 + y^2) \ , z \geq 1\right\}$.

Soluções: Consultar o manual "Noções sobre Análise Matemática", Efeitos Gráficos, 2019. ISBN: 978-989-54350-0-5.

16. - - - -

17. $A(S)=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\left[\sqrt{6}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$ m^2.

18. $A(S)=\dfrac{a^2}{2}\left[\sqrt{1+2e^{4\pi}}-\sqrt{3}+2\pi+\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln\left(\sqrt{1+2e^{4\pi}}+1\right)\right]$ m^2.

Integrais de Superfície

1. $\iint_S h(x,y,z)dS=\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|\left[\dfrac{1}{3}a_1a_2+\dfrac{1}{4}(a_1b_2+b_1a_2)+\dfrac{1}{3}b_1b_2\right]$.

2. $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

3. $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$.

4. $\pi\left[3\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)\right]$.

5. $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$.

6. 2.

7. $28\sqrt{2}\pi$.

8. $\dfrac{\pi}{60}\left[10a^2(1+4a^2)^{3/2}-(1+4a^2)^{5/2}+1\right]$.

9. $\dfrac{4}{3}\pi a^4+\pi a^3$.

10. **a)** $\sqrt{6}$ m^2.

b) $\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $\dfrac{\sqrt{6}k}{2}$ Kg.

d) $\left(\dfrac{7}{6},\dfrac{1}{6},\dfrac{2}{3}\right)$.

e) $I_x=\dfrac{\sqrt{6}k}{3}$ Kgm^2, $I_y=\sqrt{6}k$ Kgm^2 e $I_z=\dfrac{5\sqrt{6}k}{6}$ Kgm^2.

11. **a)** $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$ m^2.

b) $\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$.

12. **a**) $\dfrac{\sqrt{3}ka^4}{12}$ Kg .

b) $\left(\dfrac{3a}{5}, \dfrac{a}{5}, \dfrac{a}{5}\right)$.

13. **a**) $\lambda(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$, $k>0$.

b) $\dfrac{2\sqrt{2}k\pi}{3}$ Kg .

c) $\left(0,0,\dfrac{3}{4}\right)$.

d) $I_x = I_y = \dfrac{3\sqrt{2}k\pi}{5}$ Kgm^2 e $I_z = \dfrac{2\sqrt{2}k\pi}{5}$ Kgm^2.

14. $\dfrac{k}{15}\left(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1\right)$ Kg .

15. $I_z = \dfrac{8\pi a^4}{3}$ Kgm^2.

16. $2\pi a^2$.

17. $\dfrac{3\pi}{2}$.

18. $-\dfrac{128\pi}{3}$.

19. 0.

20. 0.

21. $-\dfrac{8}{35}$.

22. $-\dfrac{3}{2}$.

23. -4π.

24. **a**) 0.

b) $3a^3$.

c) a^4.

d) $-a^4$.

e) $\dfrac{a^4}{6}(4a^2-3)$.

25. **a**) $-\dfrac{8\pi a^3}{3}$.

b) $-4\pi a^3$.

c) 0.

d) 0.

e) $4\pi a^3$.

26. $\dfrac{152\pi}{3}$.

27. $-\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.

28. 12π.

29. $-\dfrac{a^4}{8}$.

30. **a**) $\nabla\cdot\vec{f}=3$ e $\nabla\times\vec{f}=\vec{0}$.

b) $\nabla\cdot\vec{f}=-4$ e $\nabla\times\vec{f}=\vec{0}$.

c) $\nabla\cdot\vec{f}=1+yz$ e $\nabla\times\vec{f}=-x\vec{i}+xy\vec{j}+(z-xz)\vec{k}$.

d) $\nabla\cdot\vec{f}=3x^2y+3y^2z$ e $\nabla\times\vec{f}=(3xy^2-y^3)\vec{i}-y^3\vec{j}-x^3\vec{k}$.

e) $\nabla\cdot\vec{f}=2xy-1$ e $\nabla\times\vec{f}=(2x-1)\vec{i}+(-2y)\vec{j}+(-1-x^2)\vec{k}$.

f) $\nabla\cdot\vec{f}=z+4xz^2+2y$ e $\nabla\times\vec{f}=(2z-8xyz)\vec{i}+x\vec{j}+4yz^2\vec{k}$.

g) $\nabla\cdot\vec{f}=2e^{x^2+y^2+z^2}(x+y+z)$ e $\nabla\times\vec{f}=2e^{x^2+y^2+z^2}\left((y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}\right)$.

h) $\nabla\cdot\vec{f}=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{1}{r^2}$ e $\nabla\times\vec{f}=\vec{0}$.

i) $\nabla\cdot\vec{f}=0$ e $\nabla\times\vec{f}=\vec{0}$.

j) $\nabla\cdot\vec{f}=\dfrac{-4\alpha xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ e $\nabla\times\vec{f}=\dfrac{-2\alpha(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\vec{k}$.

k) $\nabla\cdot\vec{f}=6$ e $\nabla\times\vec{f}=\left(xe^{xy}-\cos(z)\right)\vec{i}+(e^y-ye^{xy})\vec{j}+(-ze^y)\vec{k}$.

31. **a**) - - - -

b) - - - -

32. $\nabla\cdot\vec{f}=0$.

33. $\nabla\times\vec{f}=\vec{0}$.

34. **a**) - - - -

b) - - - -

35. **a**) $\nabla f=\left(2y+\operatorname{sen}(y)\right)\vec{i}+\left(2x+x\cos(y)\right)\vec{j}$.

b) $\nabla f=3(x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k})$.

c) $\nabla f=-2x(2yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k})$.

d) $\nabla f=x^3yz^2(4yz\vec{i}+2xz\vec{j}+3xy\vec{k})$.

e) $\nabla f = r^{-1}e^{r}\ \vec{r}$.

f) $\nabla f = r^{-1}\cos(r)\ \vec{r}$.

g) $\nabla f = r^{-2}\ \vec{r}$.

36. **a)** $\nabla^2 f = -x\mathrm{sen}(y)$.

b) $\nabla^2 f = 6(x+y+z)$.

c) $\nabla^2 f = -4yz$.

d) $\nabla^2 f = 2x^2 z(6y^2z^2 + x^2z^2 + 3x^2y^2)$.

e) $\nabla^2 f = e^{r}(1+2r^{-1})$.

f) $\nabla^2 f = 2r^{-1}\cos(r) - \mathrm{sen}(r)$.

g) $\nabla^2 f = r^{-2}$.

37. - - - -

38. - - - -

39. - - - -

40. $\oiint_S (\vec{f}\cdot\vec{n})\ dS = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{f})\ dV = \pi$.

41. $\oiint_S (\vec{f}\cdot\vec{n})\ dS = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{f})\ dV = 4$.

42. $\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f})\ dV = 2\pi$.

43. **a)** $\oiint_S (\vec{f}\cdot\vec{n})\ dS = \dfrac{3\pi}{2}$.

b) $\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f})\ dV = \dfrac{3\pi}{2}$.

44. **a)** $\oiint_S (\vec{f}\cdot\vec{n})\ dS = 0$.

b) $\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f})\ dV = 0$.

45. $\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f})\ dV = 8\pi$.

46. $\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f})\ dV = \dfrac{32\pi}{3}$.

47. - - - -

48. Seja, por exemplo, o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = z^3\vec{k}$, tal que $\nabla\cdot\vec{f} = 3z^2$. Assim, o teorema da divergência permite escrever $\iiint_V 3z^2\ dV = \oiint_S (\vec{f}\cdot\vec{n})\ dS = \dfrac{4\pi}{5}$.

49. $\oiint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\ dS = \iiint_V \nabla\cdot(\nabla\times\vec{f})\ dV = 0$, uma vez que $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{f}) = 0$ (teorema 3.3).

50. **a)** $\oiint_S (\vec{f}\cdot\vec{n})\, dS = -4\pi$.

b) $-\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f})\, dV = -4\pi$.

51. **a)** $\oiint_S (\vec{f}\cdot\vec{n})\, dS = 2\pi$.

b) $\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f})\, dV = 2\pi$.

52. $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = \oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = 0$.

53. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = \frac{8}{3}$.

b) $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = \frac{8}{3}$.

54. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = 4\pi$.

b) $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = 4\pi$.

55. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = -\pi$.

b) $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\pi$.

56. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = 2\pi$.

b) $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = 2\pi$.

57. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = 0$.

b) $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = 0$.

58. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = -9\pi$.

b) $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = -9\pi$.

59. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = 0$.

b) $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = 0$.

60. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = -2\pi$.

b) $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = -2\pi$.

61. $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = \oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = 0$.

62. $\iint_S (\nabla\times\vec{f})\cdot\vec{n}\, dS = \oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = \frac{3\pi}{2}$.

63. $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = -4$.

64. $\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = -6\pi$.

65. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec f)\cdot\vec n\; dS = -\pi$. **b)** $\oint_C \vec f\cdot d\vec r = -\pi$.

66. **a)** $\iint_S (\nabla\times\vec f)\cdot\vec n\; dS = 4$. **b)** $\oint_C \vec f\cdot d\vec r = 4$.

67. O integral $\oiint_S (\nabla\times\vec f)\cdot\vec n\; dS$ é igual à soma dos integrais sobre as duas superfícies que definem a superfície fechada *S*, isto é:

$$\oiint_S (\nabla\times\vec f)\cdot\vec n\; dS = \iint_{S_1} (\nabla\times\vec f)\cdot\vec n\; dS + \iint_{S_2} (\nabla\times\vec f)\cdot\vec n\; dS$$

Designando, respectivamente, por C_1 e C_2 as linhas que limitam as superfícies S_1 e S_2, recorrendo ao teorema de Stokes obtém-se:

$$\oiint_S (\nabla\times\vec f)\cdot\vec n\; dS = \oint_{C_1} \vec f\cdot d\vec r + \oint_{C_2} \vec f\cdot d\vec r$$

Sendo C_1 e C_2 a mesma linha (a circunferência $C : x^2+y^2=1\,,\ z=0$) e devendo ser percorridas em sentidos opostos nos dois integrais de linha (é indiferente que o versor $\vec n$ aponte para o exterior ou para o interior em ambas as superfícies S_1 e S_2), então:

$$\oint_{C_1} \vec f\cdot d\vec r = -\oint_{C_2} \vec f\cdot d\vec r \;\Rightarrow\; \oiint_S (\nabla\times\vec f)\cdot\vec n\; dS = 0\,.$$

68. $\oint_C \vec f\cdot d\vec r = \iint_S (\nabla\times\vec f)\cdot\vec n\; dS = \dfrac{\pi}{8}$.

69. - - - -