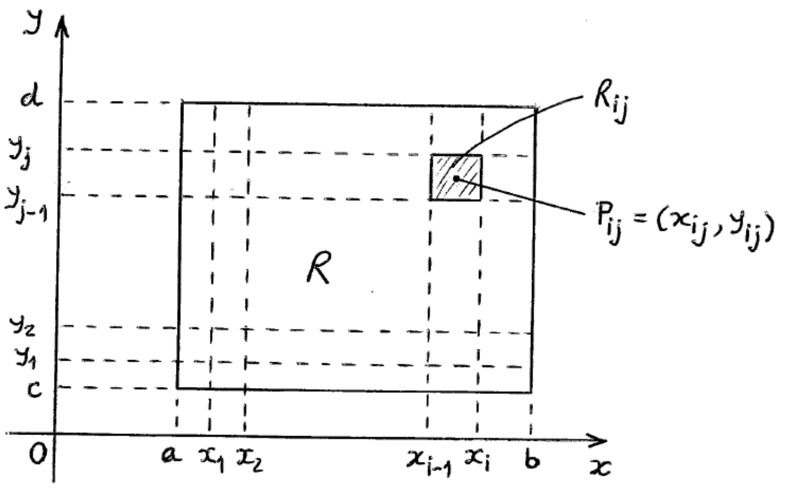
INTEGRAIS DUPLOS

Integral duplo sobre um rectângulo

- Seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis, contínua na região rectangular (fechada), R, do plano xOy, dada por:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b \ , \ c \leq y \leq d\right\} = [a,b] \times [c,d]$$



Pretende-se definir o *integral duplo* de $f(x,y)$ sobre R:

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

Considere-se uma *partição* para $[a,b]$

$$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \text{ , tal que } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$$

e uma *partição* para $[c,d]$:

$$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \text{ , tal que } c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$$

O conjunto resultante do *produto cartesiano* de P_1 e P_2

$$P = P_1 \times P_2 = \left\{ (x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_i \in P_1 \;,\; y_j \in P_2 \right\} \tag{1}$$

é designada por *partição P para a região R* e é formada pelos pontos (x_i, y_j) situados na malha resultante em *R*.

A partição *P* permite definir, sobre a região *R*, $m \times n$ rectângulos elementares (que não se sobrepõem):

$$R_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x_{i-1} \le x \le x_i \;,\; y_{j-1} \le y \le y_j \right\} =$$

$$= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \;,\; (i = 1, \ldots, m \;;\; j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

- Chama-se *diâmetro da partição P para a região R* ao comprimento, δ_P, da maior diagonal de R_{ij}, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

- Seja ΔA_{ij} a área de cada rectângulo R_{ij}, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, e seleccione-se, em cada um destes rectângulos, um ponto arbitrário $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$.

  Considerando o valor da função $f(x, y)$ em cada ponto P_{ij}, $f(x_{ij}, y_{ij})$, formem-se as *somas duplas de Riemann* relativas à partição *P*:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \; \Delta A_{ij} \tag{3}$$

  Assim, se para toda a partição *P* para a região *R* o limite das somas (3) existir e for finito, sendo independente da escolha de $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$, esse limite é designado por *integral duplo de* $f(x, y)$ *sobre a região R*, escrevendo-se:

$$\iint_R f(x, y)\,dxdy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x, y)\,dA \,.$$

Nestas condições, verifica-se

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\delta_P \to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij},y_{ij})\ \Delta A_{ij}\right) \tag{4}$$

e $f(x,y)$ diz-se uma *função integrável em R*.

Sendo δ_P o diâmetro de uma partição *P* para a região *R*, quando se considera em (4) o limite, quando δ_P tende para zero, está-se a admitir que a partição *P* é formada por um número crescente de rectângulos elementares, R_{ij}, cada um deles de área cada vez menor, ou seja:

$$\text{quando } \delta_P \to 0\,,\ \Delta A_{ij} \to 0\,.$$

O integral duplo como o volume de um sólido

- Seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis, contínua na região rectangular $R=[a,b]\times[c,d]$, do plano *xOy*, e não negativa, isto é:

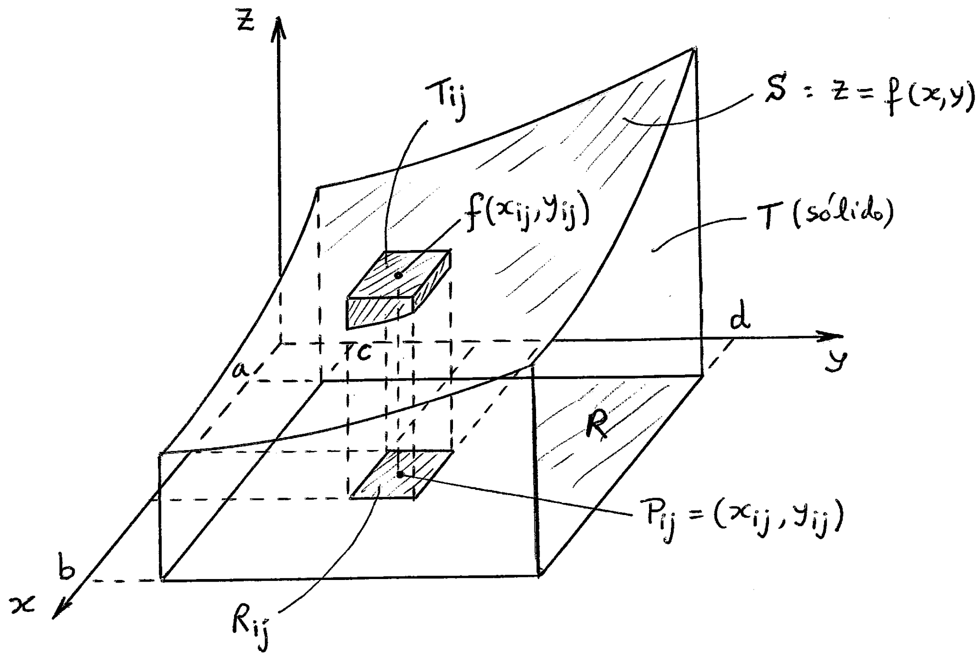
$$f(x,y) \geq 0\ ,\ \forall (x,y) \in R$$

Considere-se o sólido, *T*, limitado inferiormente pela região *R* e superiormente pela superfície, *S*, de equação $z = f(x,y)$, ou seja:

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ (x,y) \in R\ ,\ 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}$$

Tal como anteriormente, seja a partição *P*, apresentada em (1) para a região *R*, de que resulta a divisão desta região nos $m \times n$ rectângulos elementares, R_{ij}, definidos em (2).

Seja $f(x_{ij}, y_{ij})$ o valor da função $f(x, y)$ num ponto arbitrário $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ situado no interior de cada rectângulo R_{ij}.



Considere-se o paralelepípedo (elementar), T_{ij}, de base R_{ij} e altura $f(x_{ij}, y_{ij})$; o seu volume (elementar), ΔV_{ij}, tem o valor

$$\Delta V_{ij} = f(x_{ij}, y_{ij})\ \Delta A_{ij}$$

em que ΔA_{ij} é a área (elementar) do rectângulo R_{ij}.
A soma dos volumes dos paralelepípedos T_{ij} $(i = 1, \ldots, m\ ;\ j = 1, \ldots, n)$ traduz uma aproximação do volume, V, do sólido T, ou seja:

$$V \cong \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta V_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\ \Delta A_{ij}$$

Quando o diâmetro, δ_P, da partição P tende para zero, tendo em atenção a equação (4), resulta:

$$V = \lim_{\delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta V_{ij} = \lim_{\delta_P \to 0} \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\ \Delta A_{ij} \right)$$

Teorema 1: Seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis, não negativa e integrável numa região rectangular *R* do plano *xOy*.
Então o volume, *V*, do sólido limitado inferiormente pela região *R*, superiormente pela superfície de equação $z = f(x,y)$ e de faces laterais paralelas aos planos coordenados *xOz* e *yOz*, é dado por:

$$V = \iint_R f(x,y)dxdy \qquad (5)$$

- Se $f(x,y) \leq 0$, $\forall(x,y) \in R$, a equação (5) pode ser reescrita sob a forma

  $$V = \iint_R -f(x,y)dxdy$$

  representando, neste caso, o volume do sólido limitado superiormente pela região *R*, inferiormente pela superfície de equação $z = f(x,y)$ e de faces laterais paralelas aos planos coordenados *xOz* e *yOz*.

Exemplo 1: O integral duplo

$$\iint_R 1\, dxdy = \iint_R dxdy \text{ , onde } z = f(x,y) = 1 \text{ , } \forall(x,y) \in R$$

exprime o volume (em unidades cúbicas) de um sólido de altura igual a 1 (constante) e de base *R* (região do plano *xOy*). Conclui-se, então, que o seu valor é (em unidade quadradas) igual à área, *A*(*R*), da região *R*, isto é:

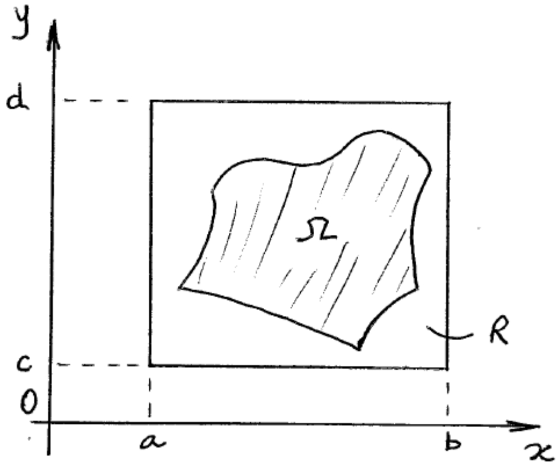
$$A(R) = \iint_R dxdy$$

- O cálculo do integral duplo usando a equação (4) é, na maioria das situações, muito complexo. Assim, irá apresentar-se um método simples e eficiente, designado por *método dos integrais iterados*, para o cálculo do integral duplo sobre uma região, que não é, de um modo geral, rectangular.

Integral duplo sobre uma região limitada do plano

- Considere-se uma região fechada e limitada, Ω, do plano *xOy* e seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis contínua em Ω. Pretende-se definir o integral duplo:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$$



Assim, encerre-se Ω numa região rectangular $R=[a,b]\times[c,d]$ (com lados paralelos aos eixos coordenados) e seja a função real a duas variáveis $f^*(x,y)$ definida por

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) \text{ , se } (x,y)\in\Omega \\ 0 \text{ , se } (x,y)\in R\setminus\Omega \end{cases} \tag{6}$$

que resulta da extensão de $f(x,y)$ à região *R*.

A função $f^*(x,y)$ é limitada na região *R* e é contínua em todos os pontos de *R*, excepto, possivelmente, em pontos que pertencem à fronteira de Ω.

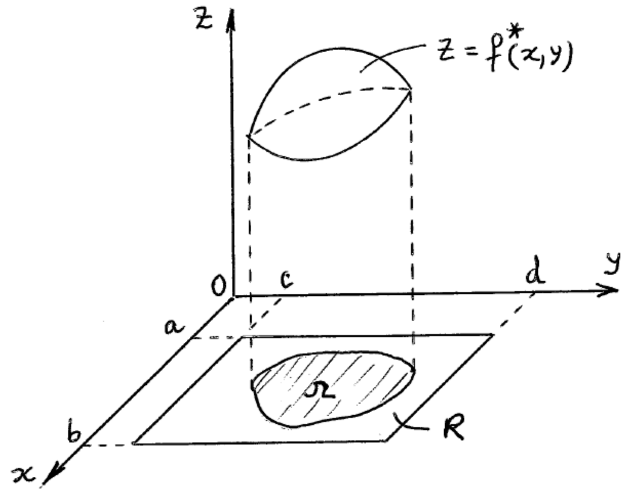
Apesar da possível existência de descontinuidades, pode-se mostrar que $f^*(x,y)$ é ainda integrável em *R*, pelo que existe o integral duplo

$$\iint_R f^*(x,y)dxdy$$

ou seja, atendendo a (6):

$$\iint_R f^*(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x,y)dxdy \tag{7}$$

- Se $f(x,y)$ é não negativa em Ω, então $f^*(x,y)$ é não negativa em *R*; assim, o integral duplo (7) dá o volume do sólido limitado superiormente pela superfície de equação $z = f^*(x,y)$ e inferiormente pela região *R*.



No entanto, como $f^*(x,y) = 0$ nos pontos de *R* exteriores a Ω, o volume do sólido na região $R \setminus \Omega$ é nulo, pelo que o integral

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

dá *o volume do sólido T*, $V(T)$, limitado superiormente pela superfície de equação $z = f(x,y)$ e inferiormente pela região Ω, isto é:

$$V(T) = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

- Tal como se mostrou no exemplo 1, o integral duplo

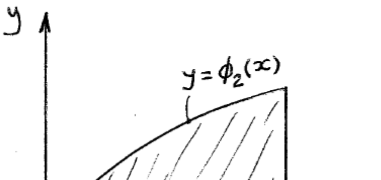
$$\iint_{\Omega} 1\ dxdy = \iint_{\Omega} dxdy \text{, onde } z = f(x,y) = 1 \text{ , } \forall (x,y) \in \Omega$$

dá o volume (em unidade cúbicas) de um sólido de altura igual a 1 e de base Ω; este valor (em unidade quadradas) é igual à área, $A(\Omega)$, de Ω, ou seja:

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dxdy$$

Cálculo do integral duplo sobre uma região

- O cálculo do integral duplo sobre uma região fechada e limitada, Ω, do plano *xOy* pode ser reduzido ao cálculo do integral sobre um de dois tipos de regiões básicas: região *Tipo I*, ou *verticalmente simples*, e região *Tipo II*, ou *horizontalmente simples*.



Tipo I

Tipo II

- Se Ω é uma região do *Tipo I*, a sua projecção sobre o eixo dos *xx* é o intervalo fechado $[a,b]$, pelo que

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b \ , \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \right\} \qquad (8)$$

em que $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são funções contínuas.

Neste caso, tem-se:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx \tag{9}$$

Em primeiro lugar calcula-se

$$A(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \tag{10}$$

integrando a função $f(x,y)$ relativamente à variável *y* entre $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$. O resultado de (10) é, de um modo geral, uma função na variável *x*, $A(x)$, que deverá ser integrada relativamente a *x* entre $x = a$ e $x = b$.

- Se Ω é uma região do *Tipo II*, a sua projecção sobre o eixo dos *yy* é o intervalo fechado $[c,d]$, pelo que

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \le y \le d \ , \ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \right\}$$

em que $\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ são funções contínuas.
Neste caso, tem-se:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \tag{11}$$

Em primeiro lugar calcula-se

$$B(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \tag{12}$$

integrando a função $f(x,y)$ relativamente à variável *x* entre $x = \psi_1(y)$ e $x = \psi_2(y)$. O resultado de (12) é, de um modo geral, uma função na variável *y*, $B(y)$, que deverá ser integrada relativamente a *y* entre $y = c$ e $y = d$.

- Finalmente pode escrever-se:

$$\int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$$

$$\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy = \int_c^d\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Os integrais anteriores são designados por *integrais iterados*.

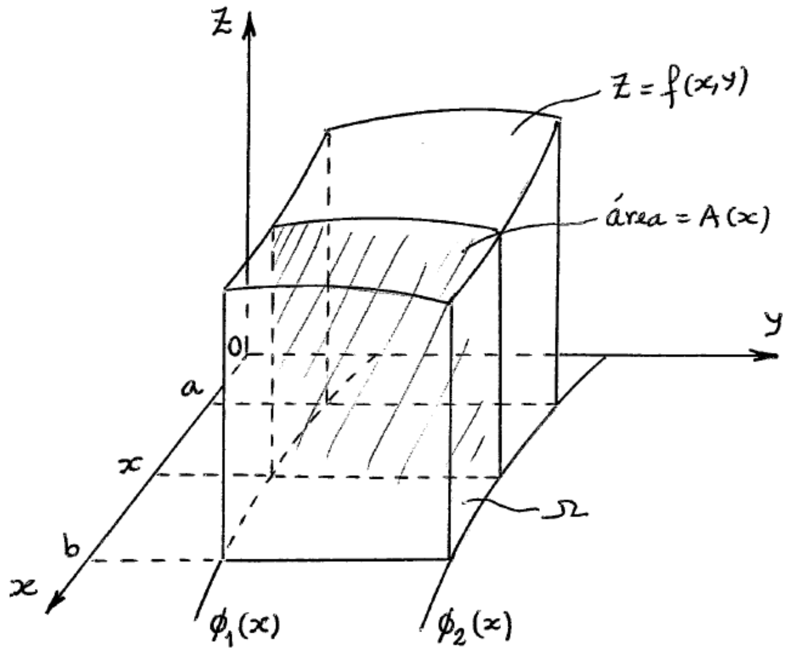
Interpretação geométrica

- É possível fazer uma interpretação geométrica para os integrais duplos referidos em (9) e (11). Dada a semelhança existente entre os dois casos, apenas se considerará o primeiro deles.

- Seja $f(x,y)$ uma função não negativa e Ω a região do *Tipo I* (*verticalmente simples*) definida em (8).
  O integral duplo de $f(x,y)$ sobre Ω dá o volume do sólido *T*, $V(T)$, limitado superiormente pela superfície $z = f(x,y)$ e inferiormente pela região Ω, ou seja:

$$V(T) = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

Considere-se a secção do sólido *T* resultante da sua intersecção com um plano paralelo a *yOz* e que passa no ponto $(x,0,0)$, em que $a \le x \le b$, e designe-se por $A(x)$ a área dessa secção.



Sabe-se que:

$$V(T) = \int_a^b A(x)dx$$

Uma vez que a área da secção é dada por

$$A(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$$

resulta

$$V(T) = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

e, portanto:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Propriedades do integral duplo

- Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ funções integráveis numa região fechada e limitada, Ω, do plano *xOy* e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Verifica-se:

  i) $\iint_\Omega [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]dxdy = \alpha\iint_\Omega f(x,y)dxdy + \beta\iint_\Omega g(x,y)dxdy$

  ii) Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo o $(x,y) \in \Omega$, então:

  $$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \geq \iint_\Omega g(x,y)dxdy$$

  iii) Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, em que Ω_1 e Ω_2 são regiões do plano que não se intersectam, excepto, possivelmente, nas suas fronteiras, então:

  $$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$$

  iv) $\left|\iint_\Omega f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_\Omega |f(x,y)|dxdy$

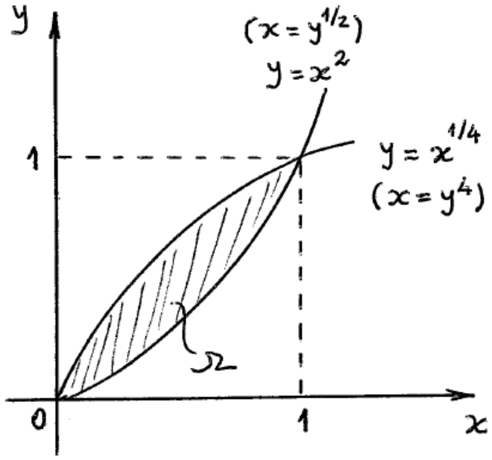
- O teorema seguinte é conhecido por *teorema do valor médio para o integral duplo*.

Teorema 2: Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ funções contínuas numa região fechada e limitada, Ω, do plano *xOy*. Se $g(x,y) \geq 0$ para todo o $(x,y) \in \Omega$, então existe um ponto $(x_0,y_0) \in \Omega$ tal que:

$$\iint_\Omega f(x,y)g(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\iint_\Omega g(x,y)dxdy$$

O valor $f(x_0,y_0)$ chama-se *média ponderada da função* $f(x,y)$ *em* Ω *através da função (de peso)* $g(x,y)$.

Exemplo 2: Calcule o integral duplo $\iint_\Omega (x^{1/2} - y^2)dxdy$ onde Ω é a região apresentada na figura seguinte:



Resolva o problema considerando Ω como uma região do *Tipo I* (*verticalmente simples*).

Solução:

Projectando Ω sobre o eixo dos *xx* (região do *Tipo I*) obtém-se:

$$\Omega = \left\{(x,y)\ :\ 0 \le x \le 1\ ,\ x^2 \le y \le x^{1/4}\right\}$$

Então:

$$\iint_\Omega (x^{1/2} - y^2)dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} (x^{1/2} - y^2)dydx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^{1/2}y - \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x^{1/4}} dx = \int_0^1 \left(x^{3/4} - \frac{x^{3/4}}{3} - x^{5/2} + \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2x^{3/4}}{3} - x^{5/2} + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left[\frac{8x^{7/4}}{21} - \frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{x^7}{21} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{21} - \frac{2}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7}$$

Exemplo 3: Resolva o mesmo problema do exemplo 2 considerando agora Ω como uma região do *Tipo II* (*horizontalmente simples*).

Solução:

Projectando Ω sobre o eixo dos *yy* (região do *Tipo II*) obtém-se:

$$\Omega = \left\{ (x,y) \ : \ 0 \le y \le 1 \ , \ y^4 \le x \le y^{1/2} \right\}$$

Então:

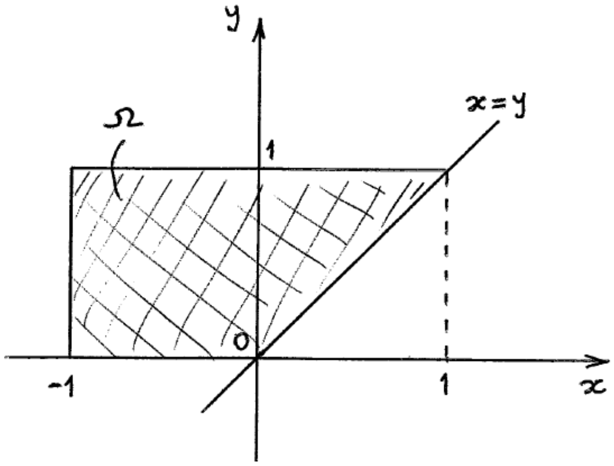
$$\iint_\Omega (x^{1/2} - y^2)dxdy = \int_0^1 \int_{y^4}^{y^{1/2}} (x^{1/2} - y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - xy^2 \right]_{y^4}^{y^{1/2}} dy = \int_0^1 \left(\frac{2y^{3/4}}{3} - y^{5/2} - \frac{2y^6}{3} + y^6 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2y^{3/4}}{3} - y^{5/2} + \frac{y^6}{3} \right) dy = \left[\frac{8y^{7/4}}{21} - \frac{2y^{7/2}}{7} + \frac{y^7}{21} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{21} - \frac{2}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7}$$

Exemplo 4: Calcule o integral duplo $\iint_\Omega (xy - y^3)dxdy$ onde Ω é a região apresentada na figura seguinte:



Resolva o problema considerando Ω como uma região do *Tipo II* (*horizontalmente simples*).

Solução:

Projectando Ω sobre o eixo dos *yy* (região do *Tipo II*) obtém-se:

$$\Omega = \{(x, y) \ : \ 0 \le y \le 1 \ , \ -1 \le x \le y\}$$

Então:

$$\iint_\Omega (xy - y^3)dxdy = \int_0^1 \int_{-1}^{y} (xy - y^3)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} - xy^3 \right]_{-1}^{y} dy = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} - y^4 - \frac{y}{2} - y^3 \right) dy =$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} + y^4 + \frac{y}{2} \right) dy = -\left[\frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^2}{4} \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{23}{40}$$

Exemplo 5: Resolva o mesmo problema do exemplo 4 considerando agora Ω como uma região do *Tipo I* (*verticalmente simples*).

Solução:

Projectando Ω sobre o eixo dos *xx* (região do *Tipo I*) obtém-se:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

em que:

$$\Omega_1 = \{(x,y) \ : \ -1 \le x \le 0 \ , \ 0 \le y \le 1\}$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ x \le y \le 1\}$$

Então:

$$\iint_{\Omega}(xy - y^3)dxdy = \iint_{\Omega_1}(xy - y^3)dxdy + \iint_{\Omega_2}(xy - y^3)dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}(xy - y^3)dydx + \int_{0}^{1}\int_{x}^{1}(xy - y^3)dydx =$$

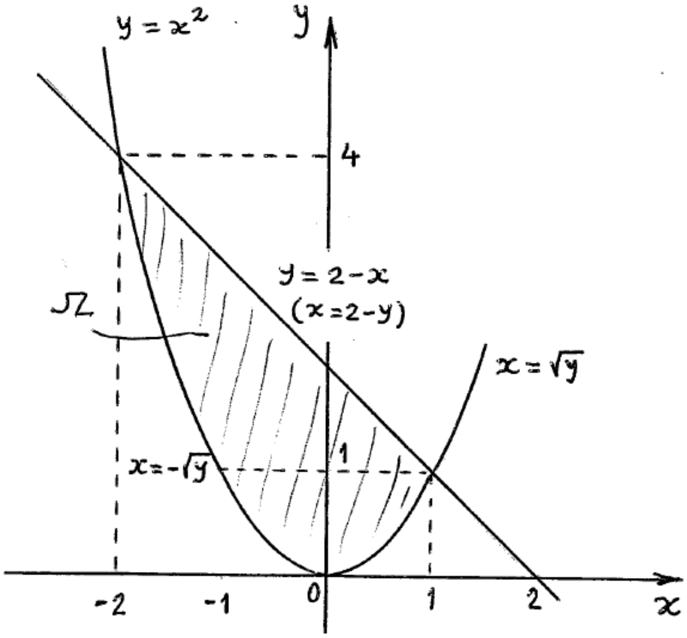
$$= \int_{-1}^{0}\left[\frac{xy^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 dx + \int_{-1}^{0}\left[\frac{xy^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_x^1 dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)dx + \int_{-1}^{0}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20}\right]_0^1 =$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{20}\right) = -\frac{23}{40}$$

Exemplo 6: Calcule a área da região Ω, $A(\Omega)$, apresentada na figura seguinte:



Solução:

Projectando Ω sobre o eixo dos *xx* (região do *Tipo I*, ou *verticalmente simples*) obtém-se:

$$\Omega = \left\{(x,y)\ :\ -2 \le x \le 1\ ,\ x^2 \le y \le 2 - x\right\}$$

Então:

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dxdy = \int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} dydx = \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx =$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

Se se optasse por considerar Ω como região do *Tipo II* (*horizontalmente simples*), o processo de cálculo era mais complexo.

Com efeito, projectando Ω sobre o eixo dos *yy* (região do *Tipo II*) obtém-se

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

em que:

$$\Omega_1 = \left\{(x,y)\ :\ 0 \le y \le 1\ ,\ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,y)\ :\ 1 \le y \le 4\ ,\ -\sqrt{y} \le x \le 2-y\right\}$$

Neste caso, é necessário resolver os seguintes integrais duplos:

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dxdy = \iint_{\Omega_1} dxdy + \iint_{\Omega_2} dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy + \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} dxdy$$

Simetrias no integral duplo

- Seja $f(x,y)$ uma função integrável numa região fechada e limitada, Ω, do plano *xOy*.
  Admitindo que Ω é *simétrica em relação ao eixo dos yy*:

  i) Se $f(x,y)$ é *ímpar na variável x*, $f(x,y) = -f(-x,y)$, então:

  $$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = 0$$

  ii) Se $f(x,y)$ é *par na variável x*, $f(x,y) = f(-x,y)$, então

  $$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = 2\iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$$

  sendo, por exemplo, Ω_1 a *metade direita* (*em relação ao eixo dos yy*) de Ω.

- Seja $f(x,y)$ uma função integrável numa região fechada e limitada, Ω, do plano *xOy*.
  Admitindo que Ω é *simétrica em relação ao eixo dos xx*:

  i) Se $f(x,y)$ é *ímpar na variável y*, $f(x,y) = -f(x,-y)$, então:

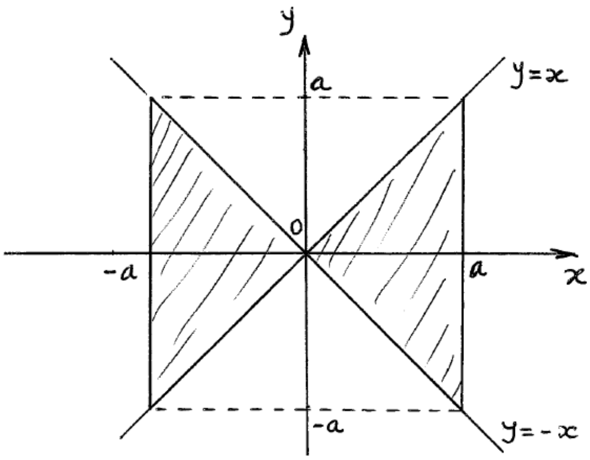
$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = 0$$

  ii) Se $f(x,y)$ é *par na variável y*, $f(x,y) = f(x,-y)$, então

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = 2\iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$$

  onde Ω_1 é, por exemplo, a *metade superior* (*em relação ao eixo dos xx*) de Ω.

Exemplo 7: Calcule o integral duplo $\iint_{\Omega}\left(2x^2 - \text{sen}(x^4 y)\right)dxdy$ onde Ω é a região apresentada na figura seguinte:



Solução:

A região Ω é simétrica em relação aos dois eixos coordenados.
Tendo em atenção que a função $f(x,y) = \text{sen}(x^4 y)$ é *ímpar na variável y* e a região Ω é *simétrica em relação ao eixo dos xx*, então:

$$\iint_{\Omega} \text{sen}(x^4 y)dxdy = 0$$

Por outro lado, uma vez que a função $g(x,y)=2x^2$ *é par na variável x* e a região Ω é *simétrica em relação ao eixo dos yy*, então

$$\iint_{\Omega} 2x^2 dxdy = 2\iint_{\Omega_1} 2x^2 dxdy$$

onde Ω_1 é, por exemplo, a *metade direita* (*em relação ao eixo dos yy*) da região Ω.
Projectando Ω_1 sobre o eixo dos *xx* (região do *Tipo I*) obtém-se:

$$\Omega_1 = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le a \ , \ -x \le y \le x\}$$

Então:

$$\iint_{\Omega} 2x^2 dxdy = 2\iint_{\Omega_1} 2x^2 dxdy = 4\int_0^a \int_{-x}^{x} x^2 dydx =$$

$$= 4\int_0^a x^2 [y]_{-x}^{x} dx = 8\int_0^a x^3 dx =$$

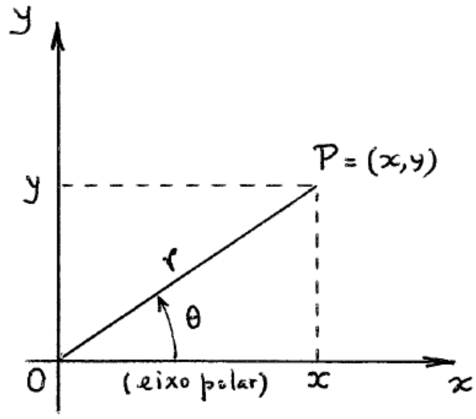
$$= 2\left[x^4\right]_0^a = 2a^4$$

Integral duplo em coordenadas polares

- Existem situações onde o *cálculo do integral duplo* sobre uma região, Ω, do plano *xOy* pode ser efectuado de forma mais expedita quando se descreve essa região *usando coordenadas polares*.

- Considere-se um ponto *P* do plano *xOy*; se este ponto tem *coordenadas polares* (r,θ), em que $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, as suas *coordenadas cartesianas* (x,y) são dadas por:

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\mathrm{sen}\theta. \tag{13}$$



As expressões inversas de (13) são

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = arctg\frac{y}{x}$$

excepto para os casos em que $x = 0$.

- Pretende-se mostrar como é possível calcular o integral duplo

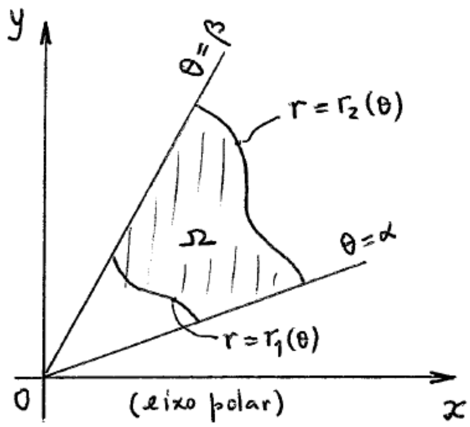
$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy \tag{14}$$

usando coordenadas polares (r,θ).

- Seja a região Ω apresentada na figura seguinte, que é o conjunto de todos os pontos (x,y) que possuem coordenadas polares (r,θ) definidas no conjunto

$$\Gamma = \{(r,\theta) \ : \ \alpha \le \theta \le \beta \ \wedge \ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$$

em que $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$.



Como é já conhecido, a área da região Ω, $A(\Omega)$, é dada por:

$$A(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left([r_2(\theta)]^2 - [r_1(\theta)]^2\right) d\theta$$

A expressão anterior pode, ainda, ser reescrita sob a forma de um integral duplo sobre a região Γ.
Com efeito, tendo em conta que

$$\frac{1}{2}\left([r_2(\theta)]^2 - [r_1(\theta)]^2\right) = \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r \ dr$$

então:

$$A(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r \ drd\theta = \iint_{\Gamma} r \ drd\theta$$

- Admita-se que $f(x,y)$ é uma função contínua em todos os pontos (x,y) da região Ω. Então a função composta

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\ \mathrm{sen}\theta)$$

é também uma função contínua em todos os pontos (r,θ) da região Γ.

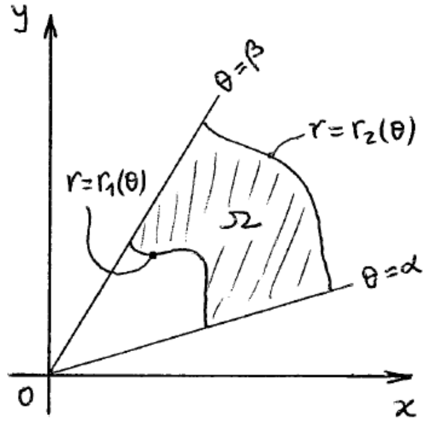
Nestas condições, é possível mostrar que *o integral duplo* (14) é dado, *em coordenadas polares*, por:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Gamma} f(r\cos\theta, r\ \mathrm{sen}\theta)\ r\ drd\theta \qquad (15)$$

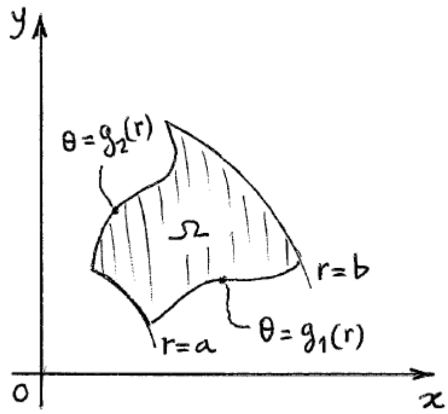
A igualdade (15) traduz, no *integral duplo*, *a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares*.

Cálculo do integral duplo em coordenadas polares

- O cálculo do integral duplo, sobre uma região Ω, em coordenadas polares pode ser reduzido ao cálculo do integral sobre um de dois tipos de regiões básicas: região do *Tipo I* e região do *Tipo II*.



Tipo I



Tipo II

- Admita-se que Ω é uma região do *Tipo I*, isto é, é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r,θ) no conjunto

$$\Gamma = \{(r,\theta) \ : \ \alpha \le \theta \le \beta \ , \ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\}$$

em que $r_1(\theta)$ e $r_2(\theta)$ são funções contínuas em $[\alpha, \beta]$.
Se $f(x, y)$ é uma função contínua em todos os pontos de Ω, então:

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r \ \text{sen}\theta) \ r \ drd\theta$$

- Admita-se que Ω é uma região do *Tipo II*, isto é, é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r,θ) no conjunto

$$\Gamma = \{(r,\theta) \ : \ a \le r \le b \ , \ g_1(r) \le \theta \le g_2(r)\}$$

em que $g_1(r)$ e $g_2(r)$ são funções contínuas em $[a, b]$.
Se $f(x, y)$ é uma função contínua em todos os pontos de Ω, então:

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} f(r\cos\theta, r \ \text{sen}\theta) \ r \ d\theta dr$$

Exemplo 8: Usando coordenadas polares, calcule o integral duplo $\iint_\Omega xy \ dxdy$ onde Ω é a região, situada no primeiro quadrante, do círculo de raio um centrado na origem.

Solução:

Admita-se que Ω é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r,θ) no conjunto (região do *Tipo I*):

$$\Gamma = \{(r,\theta) \ : \ 0 \le \theta \le \pi/2 \ , \ 0 \le r \le 1\}$$

Então:

$$\iint_{\Omega} xy\ dxdy = \iint_{\Gamma} (r\cos\theta)(r\ \text{sen}\theta)\ r\ drd\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3 \cos\theta\ \text{sen}\theta\ drd\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cos\theta\ \text{sen}\theta\ d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \text{sen}(2\theta)\ d\theta = \frac{1}{8}\left[\frac{-\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}$$

Convém notar que o integral duplo também poderia ser calculado considerando Ω como uma região do *Tipo II*; neste caso, obtém-se

$$\iint_{\Omega} xy\ dxdy = \iint_{\Gamma_1} r^3 \cos\theta\ \text{sen}\theta\ d\theta dr = \int_0^1\int_0^{\pi/2} r^3 \cos\theta\ \text{sen}\theta\ d\theta dr$$

em que:

$$\Gamma_1 = \{(r,\theta)\ :\ 0 \le r \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le \pi/2\}$$

Exemplo 9: Usando coordenadas polares, calcule o volume da esfera de raio *R*.

Solução:

Considere-se a superfície esférica de raio *R* centrada na origem, cuja equação cartesiana é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Assim, a esfera é o sólido, *T*, limitado superiormente pela superfície, S_1, de equação

$$S_1\ :\ z = f(x,y) = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}\ ,\ (x,y) \in \Omega$$

e inferiormente pela superfície, S_2, de equação

$$S_2 \,:\, z = g(x,y) = -\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que Ω é o círculo de raio R centrado na origem:

$$\Omega = \left\{ (x,y) \ : \ 0 \le x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$$

Então, o volume da esfera, $V(T)$, é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo

$$V(T) = \iint_\Omega \big(f(x,y) - g(x,y) \big)\, dxdy$$

isto é, dada a simetria da esfera em relação ao plano *xOy*:

$$V(T) = 2\iint_\Omega f(x,y)dxdy = 2\iint_\Omega \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}dxdy \tag{16}$$

Considere-se, agora, que Ω é o conjunto de todos os pontos (x,y) que possuem coordenadas polares (r,θ) no conjunto (região do *Tipo I*):

$$\Gamma = \left\{ (r,\theta) \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le R \right\}$$

Recorrendo às coordenadas polares, verifica-se que

$$\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{R^2 - r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)} = \sqrt{R^2 - r^2}$$

e, portanto, a equação (16) pode ser reescrita sob a forma:

$$V(T) = 2\iint_\Omega \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}dxdy = 2\iint_\Gamma \sqrt{R^2 - r^2} \ r \ drd\theta \tag{17}$$

Obtém-se, finalmente:

$$V(T) = 2\iint_\Gamma \sqrt{R^2 - r^2} \ r \ drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R 2r\left(R^2 - r^2\right)^{1/2} drd\theta =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}\left(R^2 - r^2\right)^{3/2}\right]_0^R d\theta = \frac{2}{3}R^3\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Convém notar que o integral duplo (17) também poderia ser calculado considerando Γ como uma região do *Tipo II*; neste caso, obtém-se

$$V(T) = 2\iint_{\Gamma_1} \sqrt{R^2 - r^2}\ r\ d\theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r\left(R^2 - r^2\right)^{1/2} d\theta dr$$

em que:

$$\Gamma_1 = \{(r,\theta)\ :\ 0 \le r \le R\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Exemplo 10: Usando coordenadas polares, calcule o volume do sólido, *T*, limitado superiormente pela superfície cónica, *S*, de equação

$$S\ :\ z = f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

e inferiormente pela região:

$$\Omega = \left\{(x,y)\ :\ 0 \le x^2 + (y-1)^2 \le 1\right\} \qquad (18)$$

Solução:

Neste caso, Ω é a região circular situada no plano *xOy*, de raio um e com centro no ponto $P = (0,1,0)$, sendo a sua fronteira constituída pelos pontos que pertencem à circunferência, *C*, de equação cartesiana:

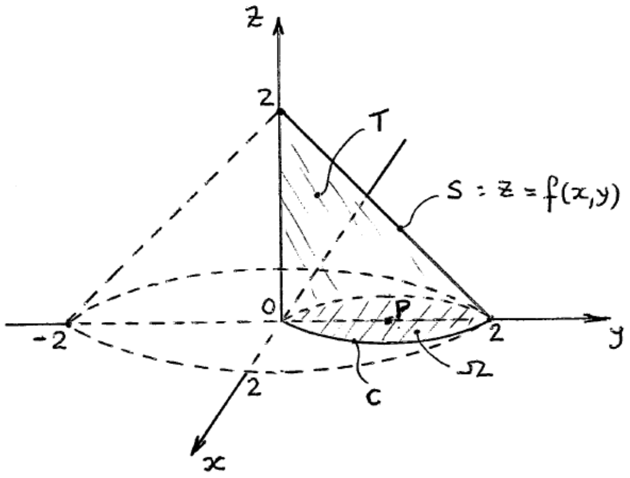
$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 = 2y$$

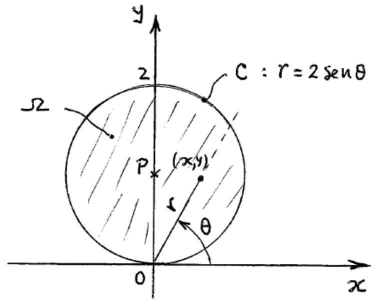
Esta equação pode ser reescrita em coordenadas polares, resultando:

$$r^2 = 2r\ \text{sen}\theta \ \Leftrightarrow\ r = 2\ \text{sen}\theta$$

Assim, a região Ω, deinida em (18), é o conjunto de todos os pontos (x,y) que possuem coordenadas polares (r,θ) no conjunto (região do *Tipo I*):

$$\Gamma = \{(r,\theta)\ :\ 0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le r \le 2\ \text{sen}\theta\} \qquad (19)$$





O volume do sólido T, $V(T)$, é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo:

$$V(T) = \iint_{\Omega}\left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dxdy = 2\iint_{\Omega} dxdy - \iint_{\Omega}\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy \qquad (20)$$

Na equação (20) a primeira parcela do segundo membro é igual ao dobro da área da região Ω, $A(\Omega)$, ou seja,

$$2\iint_{\Omega} dxdy = 2A(\Omega) = 2\pi$$

enquanto a segunda parcela deverá ser determinada usando coordenadas polares.
Então, tendo em atenção (19), resulta:

$$\iint_{\Omega}\sqrt{x^2 + y^2}\,dxdy = \iint_{\Gamma}\sqrt{r^2}\; r\; drd\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\mathrm{sen}\theta} r^2\; drd\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\mathrm{sen}\theta} d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi} sen\theta(1 - \cos^2\theta)\; d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi} sen\theta\; d\theta - \frac{8}{3}\int_0^{\pi} sen\theta\cos^2\theta\; d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} + \frac{8}{3}\left[\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{16}{3} - \frac{16}{9} = \frac{32}{9}$$

Obtém-se finalmente para o volume do sólido *T*:

$$V(T) = 2\pi - \frac{32}{9} = \frac{18\pi - 32}{9}$$

Outras aplicações do integral duplo

- Considere-se uma placa muito fina ocupando uma região, Ω, do plano *xOy* e designe-se por $\lambda(x, y)$ o valor da densidade mássica (por unidade de área) em cada ponto (x, y) de Ω (placa).
  Assim, a *massa* da placa, $M(\Omega)$, é dada por:

  $$M(\Omega) = \iint_\Omega \lambda(x, y)dxdy$$

  Se a densidade for constante em cada ponto (x, y) de Ω, por exemplo, $\lambda(x, y) = \lambda$, então

  $$M(\Omega) = \lambda \iint_\Omega dxdy = \lambda A(\Omega) \tag{21}$$

  em que $A(\Omega)$ é a área de Ω.
  Além disso, as coordenadas do *centro de massa* da placa, $C_M = (x_M, y_M)$, são obtidas a partir das duas *médias ponderadas*, *através da função (de peso)* $\lambda(x, y)$, seguintes:

  $$x_M = \frac{1}{M(\Omega)} \iint_\Omega x \ \lambda(x, y) \ dxdy$$

  $$y_M = \frac{1}{M(\Omega)} \iint_\Omega y \ \lambda(x, y) \ dxdy$$

Exemplo 11: Seja uma placa fina com a forma de um semicírculo de raio *a* e admita-se que a sua densidade mássica (por unidade de área), $\lambda(x, y)$, é, em cada ponto, directamente proporcional à distância ao ponto médio do lado recto da placa. Determine:

a) A função que define a densidade mássica em cada ponto da placa.

b) A massa da placa.

c) As coordenadas do seu centro de massa.

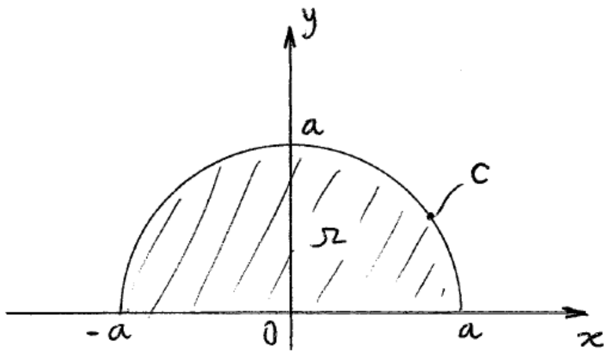
Solução:

a) Admita-se que a placa ocupa a região, Ω, do plano *xOy*

$$\Omega = \left\{(x, y) \ : \ -a \le x \le a \ , \ 0 \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}\right\}$$

tendo como fronteira o eixo dos *xx* e a linha, *C*, de equação cartesiana:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$



Nestas condições, a densidade mássica é definida, em cada ponto de Ω (placa), pela função

$$\lambda(x, y) = \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante de proporcionalidade.

b) A massa da placa, *M*, é dada pelo integral duplo

$$M = \iint_{\Omega} \alpha\sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy$$

que deverá ser calculado em coordenadas polares.
Assim, considere-se que Ω é o conjunto de todos os pontos (x, y) que possuem coordenadas polares (r,θ) no conjunto (região do *Tipo I*):

$$\Gamma = \{(r,\theta)\ :\ 0 \le \theta \le \pi\ ,\ 0 \le r \le a\}$$

Notando que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)} = r$$

obtém-se:

$$M = \iint_{\Omega} \alpha\sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy = \iint_{\Gamma} (\alpha r)\ r\ drd\theta = \alpha\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2\ drd\theta =$$

$$= \alpha\int_0^{\pi} \frac{1}{3}\Big[r^3\Big]_0^a d\theta = \frac{\alpha a^3}{3}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{\alpha\pi a^3}{3} \qquad (22)$$

c) Designando o centro de massa por $C_M = (x_M, y_M)$, então:

$$x_M = \frac{1}{M}\iint_{\Omega} \alpha x\sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy \qquad (23)$$

$$y_M = \frac{1}{M}\iint_{\Omega} \alpha y\sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy$$

Como a placa é simétrica em relação ao eixo dos *yy* e a função integranda em (23) é ímpar na variável *x*, resulta:

$$\iint_{\Omega} \alpha x\sqrt{x^2 + y^2}\ dxdy = 0\ \Rightarrow\ x_M = 0$$

Por outro lado,

$$y_M = \frac{1}{M}\iint_\Omega \alpha y\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy = \frac{1}{M}\iint_\Gamma (\alpha r)(r\ \operatorname{sen}\theta)\ r\ drd\theta =$$

$$= \frac{\alpha}{M}\int_0^\pi\int_0^a r^3 \operatorname{sen}\theta\ drd\theta = \frac{\alpha}{M}\int_0^\pi \frac{1}{4}\left[r^4\right]_0^a \operatorname{sen}\theta\ d\theta =$$

$$= \frac{\alpha a^4}{4M}\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\ d\theta = \frac{\alpha a^4}{4M}\left[-\cos\theta\right]_0^\pi = \frac{\alpha a^4}{2M}$$

isto é, atendendo a (22):

$$y_M = \frac{3a}{2\pi}$$

Conclui-se que o centro de massa da placa localiza-se no ponto com coordenadas:

$$C_M = \left(0, \frac{3a}{2\pi}\right)$$

- Se a placa é materialmente *homogénea* (se a densidade é constante), tendo em atenção (21), obtém-se:

  $$\lambda(x,y) = \lambda = \frac{M(\Omega)}{A(\Omega)}$$

  Neste caso, o *centro de massa* da placa é coincidente com o *centroide da região* Ω, $\bar{C} = (\bar{x}, \bar{y})$, sendo as suas coordenadas dadas por:

  $$\bar{x} = \frac{1}{A(\Omega)}\iint_\Omega x\ dxdy$$

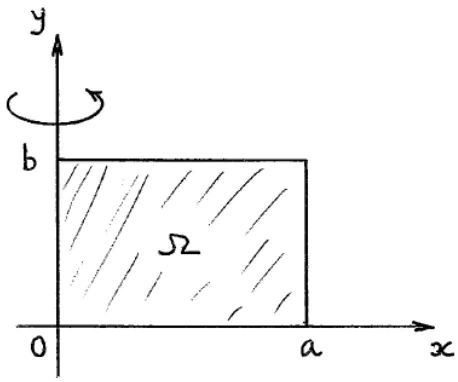
  $$\bar{y} = \frac{1}{A(\Omega)}\iint_\Omega y\ dxdy$$

- Admita-se, agora, que a placa roda em torno de uma linha, *L*. O *momento de inércia*, I_L, da placa *em relação ao eixo de rotação L*, é dado por

$$I_L = \iint_{\Omega} \lambda(x,y)[r(x,y)]^2 \ dxdy$$

onde $r(x,y)$ é distância de cada ponto (x,y) de Ω ao eixo de rotação. Os momentos de inércia em relação aos eixos dos *xx* e dos *yy* são, respectivamente, designados por I_x e I_y.

Exemplo 12: Seja a placa fina de massa *M* apresentada na figura seguinte



e admita-se que ela roda em torno do eixo dos *yy*. Calcule o momento de inércia da placa em relação a esse eixo, I_y, supondo que:

a) A placa tem uma densidade mássica uniforme.

b) A placa tem uma densidade mássica que varia proporcionalmente com o quadrado da distância ao lado oposto ao eixo de rotação.

Solução:

a) Se a densidade mássica da placa é constante, então o seu valor é

$$\lambda(x,y) = \frac{M}{A(\Omega)} = \frac{M}{ab}$$

onde $A(\Omega) = ab$ é a área da placa (região Ω).

Projectando Ω sobre o eixo dos *yy* (região do *Tipo II*)

$$\Omega = \{(x,y)\ :\ 0 \le y \le b\ ,\ 0 \le x \le a\}$$

e sabendo que $r(x,y) = x$, obtém-se:

$$I_y = \frac{M}{ab}\iint_\Omega x^2\ dxdy = \frac{M}{ab}\int_0^b\int_0^a x^2\ dxdy =$$

$$= \frac{M}{ab}\int_0^b \frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_0^a dy = \frac{Ma^2}{3b}\int_0^b dy = \frac{Ma^2}{3}$$

b) Neste caso, a densidade mássica da placa é dada por

$$\lambda(x,y) = \alpha(a-x)^2$$

em que $\alpha > 0$ é uma constante de proporcionalidade.
Tem-se, portanto:

$$I_y = \iint_\Omega \alpha(a-x)^2 x^2\ dxdy = \alpha\int_0^b\int_0^a (a^2x^2 - 2ax^3 + x^4)\ dxdy =$$

$$= \alpha\int_0^b\left[\frac{a^2x^3}{3} - \frac{ax^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^a dy = \alpha\frac{a^5}{30}\int_0^b dy = \frac{\alpha a^5 b}{30} \qquad (24)$$

O resultado obtido em (24) pode, ainda, ser reescrito em função da massa, *M*, da placa.
Com efeito, notando que

$$M = \iint_\Omega \alpha(a-x)^2\ dxdy = \alpha\int_0^b\int_0^a (a-x)^2\ dxdy =$$

$$= \alpha\int_0^b \frac{1}{3}\Big[-(a-x)^3\Big]_0^a dy = \frac{\alpha a^3}{3}\int_0^b dy = \frac{\alpha a^3 b}{3}$$

ou seja,

$$\alpha = \frac{3M}{a^3 b}$$

substituindo em (24) obtém-se finalmente:

$$I_y = \frac{Ma^2}{10}$$

Jacobianos: mudança de variáveis na integração dupla

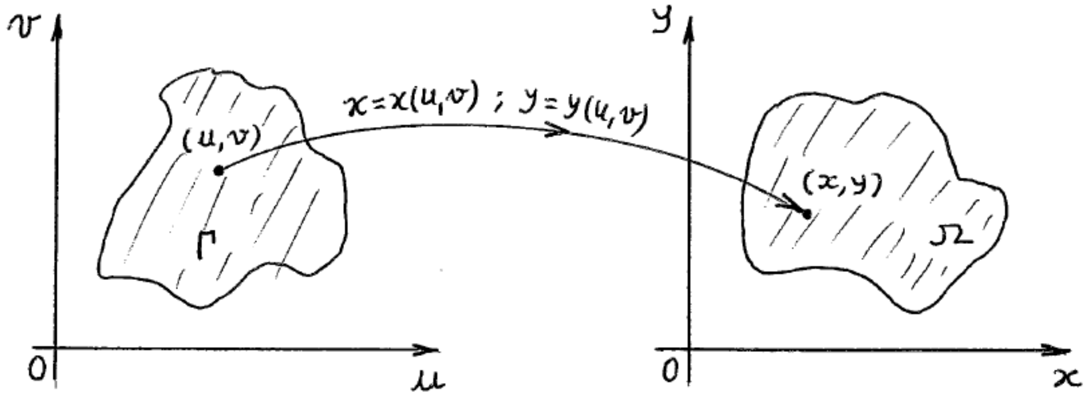
- Como se viu anteriormente, a expressão

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Gamma} f(r\cos\theta, r\ \text{sen}\theta)\ r\ drd\theta \tag{25}$$

traduz, no *integral duplo*, *a mudança de coordenadas cartesianas* (x,y) *para coordenadas polares* (r,θ).

- Pretende-se agora tratar o processo de cálculo que envolve uma mudança de variáveis na integração dupla de um modo mais geral, do qual a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares pode ser considerado um caso particular.

- Inicie-se este processo pela análise do conceito de área. Seja a região Γ de um plano que é designado pelo plano *uOv*; neste plano, um ponto *P* terá coordenadas (u,v), em que *u* é a *abcissa* e *v* a *ordenada*.



Admita-se que

$$x = x(u,v) \ \ , \ \ y = y(u,v) \tag{26}$$

são funções continuamente diferenciáveis na região Γ.

À medida que (u,v) toma valores no interior da região Γ, os pontos de coordenadas $(x,y)=\left(x(u,v),y(u,v)\right)$ geram uma região Ω no plano *xOy*. Se o mapeamento associado à transformação

$$(u,v) \;\rightarrow\; (x,y)$$

for injectivo no interior de Γ e se o *Jacobiano*, $J(u,v)$, definido pelo determinante de ordem 2

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

nunca se anular no interior de Γ, então a área da região Ω, $A(\Omega)$, é dada por:

$$A(\Omega)=\iint_\Omega dxdy=\iint_\Gamma \left|J(u,v)\right| dudv \tag{27}$$

- Admita-se agora que se pretende integrar uma função contínua $f(x,y)$ na região Ω. Se o processo de cálculo se mostrar demasiado complexo, então é desejável aplicar uma adequada mudança de variáveis, tal como se define em (26), de modo a torná-lo mais acessível. Atendendo a (27), obtém-se, neste caso:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\iint_\Gamma f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\;\left|J(u,v)\right| dudv \tag{28}$$

- Pode-se agora mostrar que a expressão (25) é um caso particular do processo de mudança de variáveis definido em (28). Neste caso, as expressões

$$x=r\cos\theta \;\text{ e }\; y=r\text{ sen}\theta$$

fazem o mapeamento da região Γ (definida no plano $rO\theta$) na região Ω (definida no plano xOy), sendo o Jacobiano dado por:

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r}\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -r\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r \ \Rightarrow\ \left|J(r,\theta)\right|=r$$

Obtém-se, então:

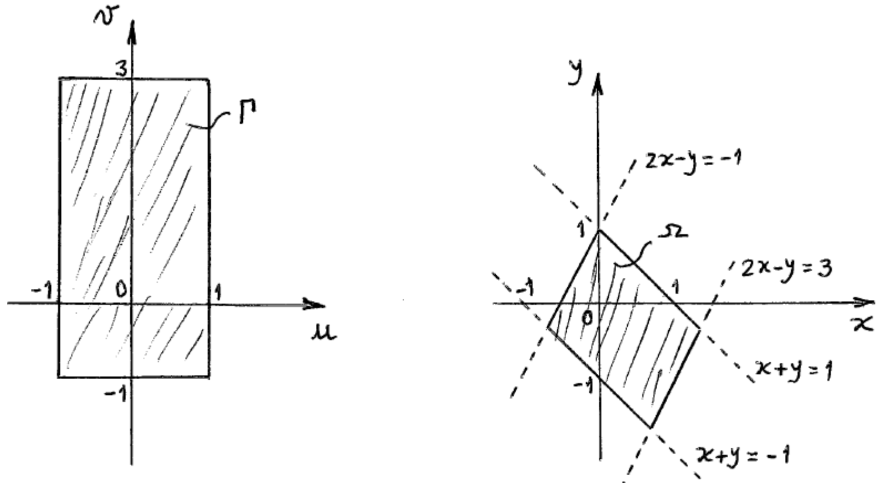
$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy=\iint_\Gamma f(r\cos\theta, r\ \operatorname{sen}\theta)\ r\ drd\theta$$

Exemplo 13: Pretende-se calcular o integral duplo $\iint_\Omega (x+y)^2 dxdy$ onde Ω é o paralelogramo limitado pelas linhas:

$$x+y=-1\ \ ,\ \ x+y=1\ \ ,\ \ 2x-y=-1\ \text{ e }\ 2x-y=3\,.$$

Solução:

A figura seguinte apresenta um esboço da região de integração Ω.



As linhas que definem a fronteira de Ω sugerem que se considere as seguintes relações para a mudança de variáveis

$$u=x+y \quad \text{e} \quad v=2x-y$$

em que $-1\le u\le 1$ e $-1\le v\le 3$.

Resolvendo as equações anteriores em ordem às variáveis x e y obtém-se:

$$x = \frac{u+v}{3} \quad \text{e} \quad y = \frac{2u-v}{3}.$$

Esta transformação faz o mapeamento do rectângulo Γ da figura anterior na região Ω, em que o Jacobiano toma o valor:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \left|J(u,v)\right| = \frac{1}{3}$$

Notando que $f(x,y) = (x+y)^2$, obtém-se

$$f\left(x(u,v), y(u,v)\right) = \frac{1}{9}\left((u+v) + (2u-v)\right)^2 = u^2$$

e, portanto:

$$\iint_\Omega (x+y)^2 dxdy = \iint_\Gamma u^2 \ \left|J(u,v)\right| dudv = \frac{1}{3}\int_{-1}^{3}\int_{-1}^{1} u^2 \ dudv =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{-1}^{3}\left[u^3\right]_{-1}^{1} dv = \frac{2}{9}\int_{-1}^{3} dv = \frac{8}{9}$$

Exemplo 14: Pretende-se calcular o integral duplo $\iint_\Omega xy \ dxdy$ onde Ω é a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad , \quad x^2 + y^2 = 8 \quad , \quad x^2 - y^2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 - y^2 = 4 .$$

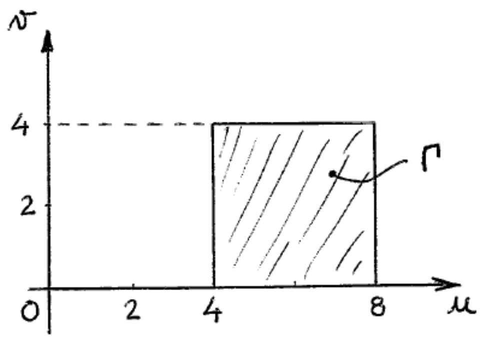
Solução:

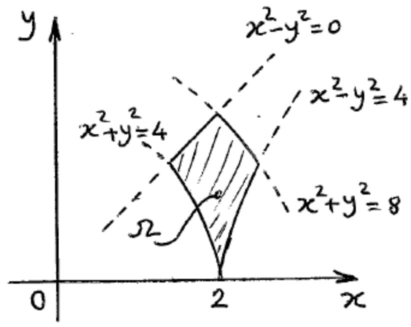
A figura seguinte apresenta um esboço da região de integração Ω.

As linhas que definem a fronteira de Ω sugerem que se considere as seguintes relações para a mudança de variáveis

$$u = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad v = x^2 - y^2$$

em que $4 \le u \le 8$ e $0 \le v \le 4$.





Resolvendo as equações anteriores em ordem às variáveis x e y obtém-se:

$$x = \sqrt{\frac{u+v}{2}} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{\frac{u-v}{2}}.$$

Esta transformação faz o mapeamento do quadrado Γ da figura anterior na região Ω, em que o Jacobiano toma o valor:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u+v}} & \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u-v}} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u+v}} & -\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{u-v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |J(u,v)| = \frac{1}{4\sqrt{u^2-v^2}} \quad (u^2 - v^2 \ge 0)$$

Notando que $f(x,y) = xy$, obtém-se

$$f\left(x(u,v), y(u,v)\right) = \frac{\sqrt{u^2-v^2}}{2}$$

e, portanto,

$$\iint_{\Omega} xy \ dxdy = \frac{1}{2}\iint_{\Gamma} \sqrt{u^2 - v^2} \ \left|J(u,v)\right| dudv =$$

$$= \frac{1}{8}\iint_{\Gamma} dudv = \frac{A(\Gamma)}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

onde $A(\Gamma) = 16$ é a área da região quadrada Γ.