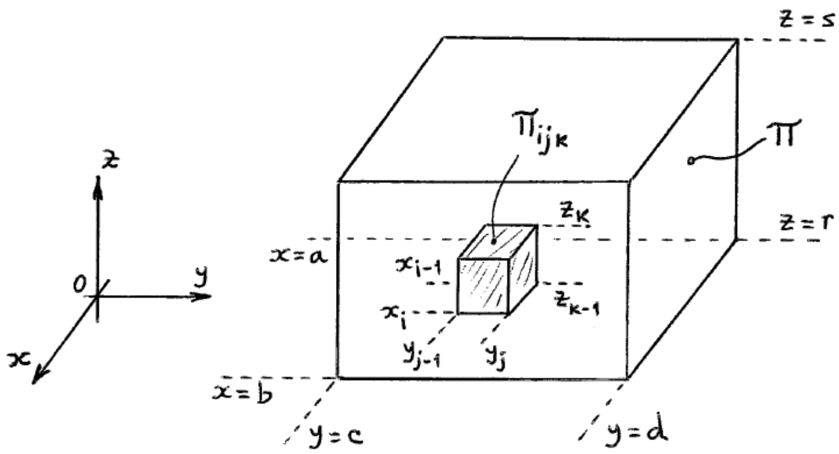
# INTEGRAIS TRIPLOS

## Integral triplo sobre um paralelepípedo

- Seja $f(x,y,z)$ uma função real a três variáveis, contínua numa região paralelepipédica (fechada), $\Pi$, do espaço, dada por:

$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \le x \le b \ , \ c \le y \le d \ , \ r \le z \le s\right\} = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$$




Pretende-se definir o *integral triplo* de $f(x,y,z)$ sobre $\Pi$:

$$\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz \qquad (1)$$

Considere-se uma *partição* para $[a,b]$

$$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \text{ , tal que } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$$

uma *partição* para $[c,d]$

$$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \text{ , tal que } c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$$

e uma *partição* para $[r,s]$:

$$P_3 = \{z_0, z_1, \ldots, z_p\} \text{ , tal que } r = z_0 < z_1 < \ldots < z_p = s$$

O conjunto resultante do *produto cartesiano* de $P_1$, $P_2$ e $P_3$

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3 = \left\{(x_i, y_j, z_k) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_i \in P_1 \ , \ y_j \in P_2 \ , \ z_k \in P_3\right\}$$

chama-se *partição P para a região* $\Pi$.
A partição *P* permite definir, sobre a região $\Pi$, $m \times n \times p$ paralelepípedos elementares (que não se sobrepõem), com faces paralelas aos planos coordenados:

$$\Pi_{ijk} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_{i-1} \le x \le x_i \ , \ y_{j-1} \le y \le y_j \ , \ z_{k-1} \le z \le z_k\right\} =$$

$$= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \ , \ (i = 1, \ldots, m \ ; \ j = 1, \ldots, n \ ; \ k = 1, \ldots, p)$$

- Designa-se por *diâmetro da partição P para a região* $\Pi$ o comprimento, $\delta_P$, da maior diagonal de entre todos os paralelepípedos elementares $\Pi_{ijk}$, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, p$.

- Seja $\Delta V_{ijk}$ o volume de cada paralelepípedo elementar $\Pi_{ijk}$, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, p$, e seleccione-se, em cada um destes paralelepípedos, um ponto arbitrário $P_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$.
Considerando o valor da função $f(x,y,z)$ em cada ponto $P_{ijk}$, $f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, formem-se as *somas triplas de Riemann* relativas à partição *P*:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \ \Delta V_{ijk} \tag{2}$$

Assim, se para toda a partição $P$ para a região $\Pi$ o limite das somas (2) existir e for finito, sendo independente da escolha de $P_{ijk} = (x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})$, esse limite é designado por *integral triplo de* $f(x, y, z)$ *sobre a região* $\Pi$ e escreve-se:

$$\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz \text{ ou } \iiint_\Pi f(x,y,z)dV.$$

Nestas condições, verifica-se

$$\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\delta_P \to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk})\,\Delta V_{ijk}\right) \qquad (3)$$

e $f(x, y, z)$ diz-se uma função integrável em $\Pi$.
Sendo $\delta_P$ o diâmetro de uma partição $P$ para a região $\Pi$, quando se considera em (3) o limite, quando $\delta_P$ tende para zero, está-se a admitir que a partição $P$ é formada por um número crescente de paralelepípedos elementares, $\Pi_{ijk}$, cada um deles de volume cada vez menor, ou seja:

$$\text{quando } \delta_P \to 0,\ \Delta V_{ijk} \to 0.$$

- Considerando em (3) $f(x, y, z) = 1$ para todo o $(x, y, z) \in \Pi$, então

$$\iiint_\Pi dxdydz = \lim_{\delta_P \to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \Delta V_{ijk}\right) = V(\Pi)$$

sendo $V(\Pi)$ o volume da região paralelepipédica $\Pi$.

- Se a função real a três variáveis $f(x, y, z)$ é integrável numa região paralelepipédica

$$\Pi = [a,b]\times[c,d]\times[r,s]$$

então a aplicação do *método dos integrais iterados* ao intergral triplo (1) conduz a:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\ dxdydz =$$

$$= \int_r^s \int_a^b \int_c^d f(x,y,z)\ dydxdz = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\ dydzdx =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x,y,z)\ dzdydx = \int_c^d \int_a^b \int_r^s f(x,y,z)\ dzdxdy =$$

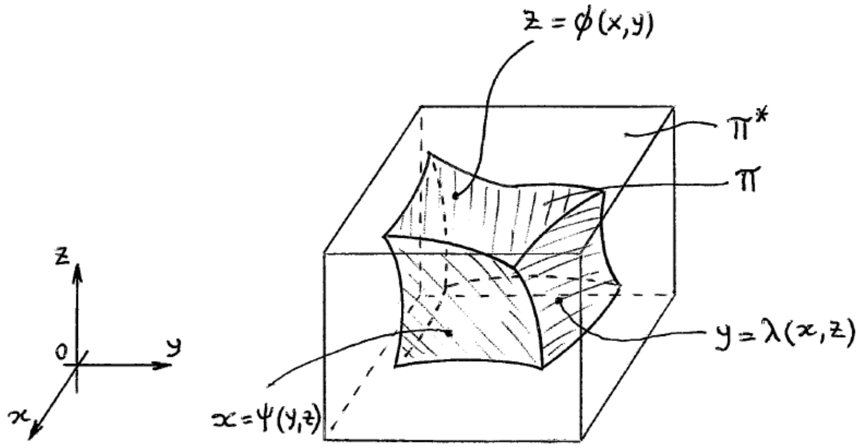
$$= \int_c^d \int_r^s \int_a^b f(x,y,z)\ dxdzdy$$

## Integral triplo sobre uma região limitada do espaço

- O cálculo do integral triplo

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz \tag{4}$$

onde $\Pi$ é uma qualquer região limitada do espaço, é feito usando um método similar ao utilizado no caso do integral duplo.



- Considere-se uma região paralelepipédica $\Pi^*$ que contém a região $\Pi$ e uma função real a três variáveis $f^*(x,y,z)$ definida por

$$f^*(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z) \text{ , se } (x,y,z)\in \Pi \\ 0 \text{ , se } (x,y,z)\in \Pi^* \setminus \Pi \end{cases}$$

que resulta da extensão de $f(x,y,z)$ à região $\Pi^*$.

A função $f^*(x,y,z)$ é limitada na região $\Pi^*$ e é contínua em todos os pontos de $\Pi^*$, excepto, possivelmente, em pontos que pertencem à fronteira de $\Pi$.
Verifica-se, então, que

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Pi^*} f^*(x,y,z)dxdydz$$

e diz-se que $f(x,y,z)$ é integrável em $\Pi$ se $f^*(x,y,z)$ for integrável na região paralelepipédica $\Pi^*$.

- Considerando $f(x,y,z)=1$ em (4), conclui-se que o integral triplo

$$V(\Pi)=\iiint_{\Pi} dxdydz$$

exprime o volume do sólido, $V(\Pi)$, descrito pela região $\Pi$.

## Cálculo do integral triplo (região limitada do espaço)

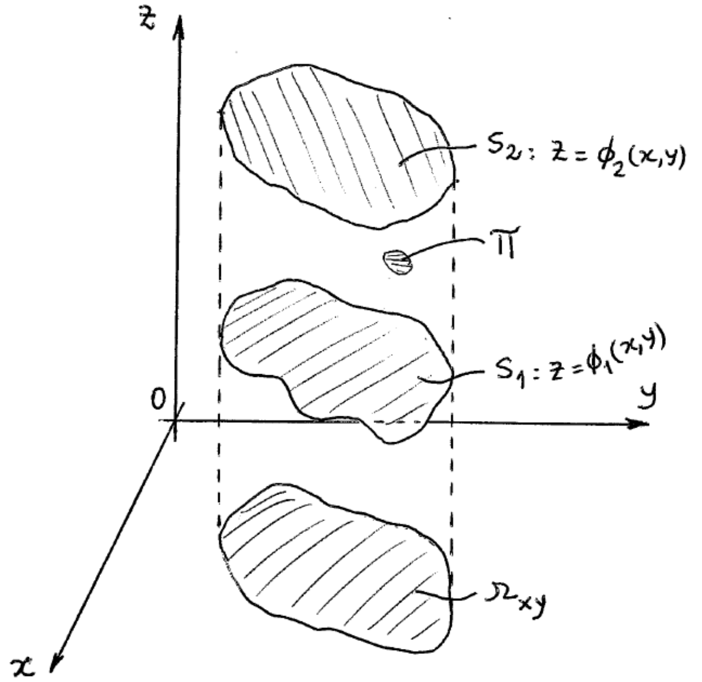
- O cálculo do integral triplo sobre uma região fechada e limitada, $\Pi$, do espaço pode ser reduzido ao cálculo do integral sobre uma de três tipos de regiões básicas.

- Uma região do espaço, $\Pi$, diz-se do *Tipo 1*, se existir uma região $\Omega_{xy}$ do plano *xOy*, tal que

$$\Pi = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x,y) \in \Omega_{xy} \;,\; \phi_1(x,y) \le z \le \phi_2(x,y) \right\}$$

em que $\phi_1(x,y)$ e $\phi_2(x,y)$ são funções contínuas em $\Omega_{xy}$.

A região $\Pi$ define um sólido cuja projecção sobre o plano *xOy* é a região $\Omega_{xy}$, sendo limitado superiormente pela superfície, $S_2$, de equação $z = \phi_2(x,y)$ e inferiormente pela superfície, $S_1$, de equação $z = \phi_1(x,y)$.




**Tipo 1**

Neste caso, tem-se:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} \left( \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy \tag{5}$$

Em primeiro lugar calcula-se

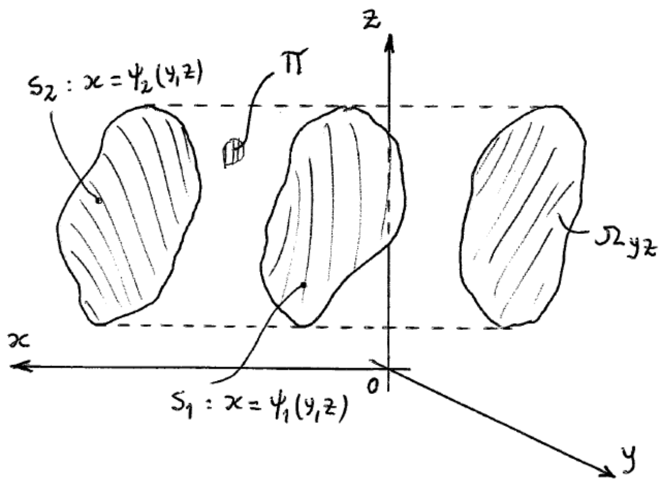
$$A(x,y) = \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \tag{6}$$

integrando a função $f(x,y,z)$ em relação à variável $z$ entre $z=\phi_1(x,y)$ e $z=\phi_2(x,y)$. O resultado de (6) é uma função nas variáveis $x$ e $y$, $A(x,y)$, que deverá ser integrada em $\Omega_{xy}$.

- Uma região do espaço, $\Pi$, diz-se do *Tipo 2*, se existir uma região $\Omega_{yz}$ do plano *yOz*, tal que

$$\Pi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (y,z)\in\Omega_{yz}\ ,\ \psi_1(y,z)\le x\le\psi_2(y,z)\right\}$$

em que $\psi_1(y,z)$ e $\psi_2(y,z)$ são funções contínuas em $\Omega_{yz}$.




**Tipo 2**

A região $\Pi$ define um sólido cuja projecção sobre o plano *yOz* é a região $\Omega_{yz}$, sendo limitado superiormente pela superfície, $S_2$, de equação $x=\psi_2(y,z)$ e inferiormente pela superfície, $S_1$, de equação $x=\psi_1(y,z)$.

Neste caso, tem-se:

$$\iiint_\Pi f(x,y,z)dxdydz=\iint_{\Omega_{yz}}\left(\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right)dydz \tag{7}$$

Em primeiro lugar calcula-se

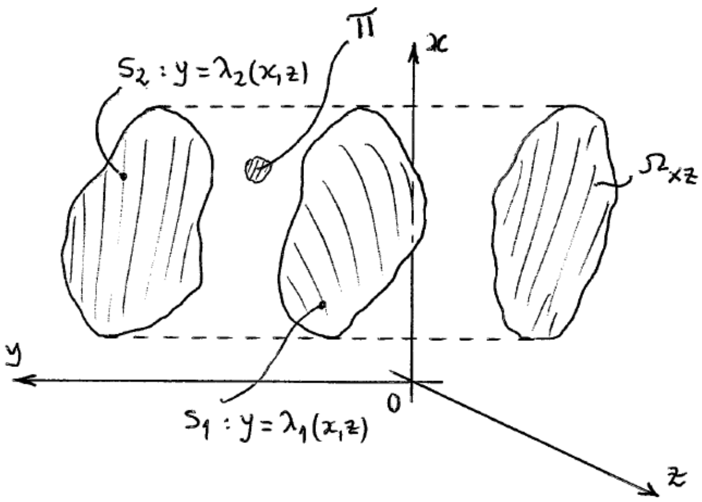
$$B(y,z)=\int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)dx \tag{8}$$

integrando a função $f(x,y,z)$ em relação à variável $x$ entre $x=\psi_1(y,z)$ e $x=\psi_2(y,z)$. O resultado de (8) é uma função nas variáveis $y$ e $z$, $B(y,z)$, que deverá ser integrada em $\Omega_{yz}$.

- Uma região do espaço, $\Pi$, diz-se do *Tipo 3*, se existir uma região $\Omega_{xz}$ do plano *xOz*, tal que

$$\Pi=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ (x,z)\in\Omega_{xz}\ ,\ \lambda_1(x,z)\le y\le\lambda_2(x,z)\right\}$$

em que $\lambda_1(x,z)$ e $\lambda_2(x,z)$ são funções contínuas em $\Omega_{xz}$.




**Tipo 3**

A região $\Pi$ define um sólido cuja projecção sobre o plano *xOz* é a região $\Omega_{xz}$, sendo limitado superiormente pela superfície, $S_2$, de equação $y=\lambda_2(x,z)$ e inferiormente pela superfície, $S_1$, de equação $y=\lambda_1(x,z)$.

Neste caso, tem-se:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz=\iint_{\Omega_{xz}}\left(\int_{\lambda_1(x,z)}^{\lambda_2(x,z)} f(x,y,z)dy\right)dxdz \qquad (9)$$

Em primeiro lugar calcula-se

$$C(x,z)=\int_{\lambda_1(x,z)}^{\lambda_2(x,z)} f(x,y,z)dy \qquad (10)$$

integrando a função $f(x,y,z)$ em relação à variável $y$ entre $y=\lambda_1(x,z)$ e $y=\lambda_2(x,z)$. O resultado de (10) é uma função nas variáveis $x$ e $z$, $C(x,z)$, que deverá ser integrada em $\Omega_{xz}$.

- Os integrais apresentados em (6), (8) e (10) são designados por *integrais iterados* para o integral triplo.

## Propriedades do integral triplo

- Sejam $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ funções integráveis numa região limitada do espaço, $\Pi$, e $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Verifica-se:

i) $\iiint_{\Pi}[\alpha f(x,y,z)+\beta g(x,y,z)]dxdydz=$

$$=\alpha\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz+\beta\iiint_{\Pi} g(x,y,z)]dxdydz$$

ii) Se $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$ para todo o $(x,y,z)\in\Pi$, então:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz\geq\iiint_{\Pi} g(x,y,z)dxdydz$$

iii) Se $\Pi=\Pi_1\cup\Pi_2$, em que $\Pi_1$ e $\Pi_2$ são regiões do espaço que não se intersectam, excepto, possivelmente, nas suas fronteiras comuns, então:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{\Pi_1} f(x,y,z)dxdydz+\iiint_{\Pi_2} f(x,y,z)dxdydz$$

iv) $\left|\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz\right|\leq\iiint_{\Pi}\left|f(x,y,z)\right|dxdydz$

- O teorema seguinte é conhecido por *teorema do valor médio para o integral triplo*.

**Teorema 1**: Sejam $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ funções contínuas numa região limitada do espaço, $\Pi$. Se $g(x,y,z) \geq 0$ para todo o $(x,y,z) \in \Pi$, então existe um ponto $(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$ tal que:

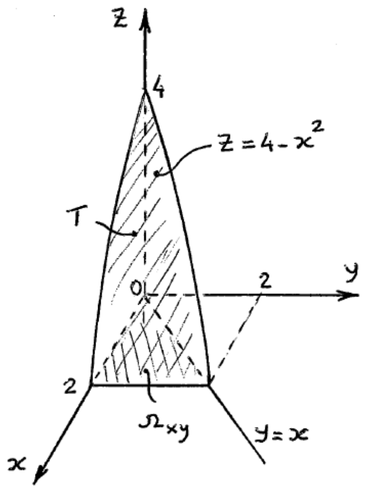
$$\iiint_\Pi f(x,y,z)g(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)\iiint_\Pi g(x,y,z)dxdydz$$

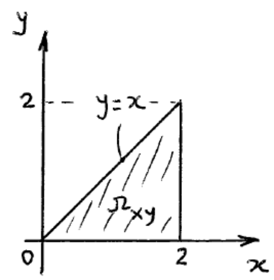
O valor $f(x_0,y_0,z_0)$ chama-se *média ponderada da função* $f(x,y,z)$ *em* $\Pi$ *através da função (de peso)* $g(x,y,z)$.

**Exemplo 1**: Calcule o integral triplo $\iint_T xyz\ dxdydz$, onde $T$ é o sólido situado no primeiro octante, limitado pela superfície $z = 4 - x^2$ (cilindro parabólico) e pelos planos $z = 0$, $y = x$ e $y = 0$. Considere $T$ como uma região do *Tipo 1*.

Solução:

Na figura seguinte apresenta-se um esboço do sólido *T*.




Projectando *T* sobre o plano *xOy* (região do *Tipo 1*), obtém-se

$$T = \left\{(x,y,z)\ :\ (x,y) \in \Omega_{xy}\ ,\ 0 \leq z \leq 4 - x^2\right\}$$

onde $\Omega_{xy}$ é a região do plano *xOy* tal que:

$$\Omega_{xy} = \{(x,y)\ :\ 0 \leq x \leq 2\ ,\ 0 \leq y \leq x\}$$

Então:

$$\iiint_T xyz\ dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} \int_0^{4-x^2} xyz\ dz\ dxdy = \iint_{\Omega_{xy}} \frac{xy}{2}\left[z^2\right]_0^{4-x^2} dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{\Omega_{xy}} xy\left(4-x^2\right)^2 dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2\int_0^x x\left(4-x^2\right)^2 y\ dydx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 x\left(4-x^2\right)^2\left[y^2\right]_0^x dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^3\left(4-x^2\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2\left(16x^3-8x^5+x^7\right)dx = \frac{1}{4}\left[4x^4-\frac{4}{3}x^6+\frac{x^8}{8}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

**Exemplo 2**: Escreva o integral triplo do exemplo 1, considerando *T*:

a) Uma região do *Tipo 2*.

b) Uma região do *Tipo 3*.

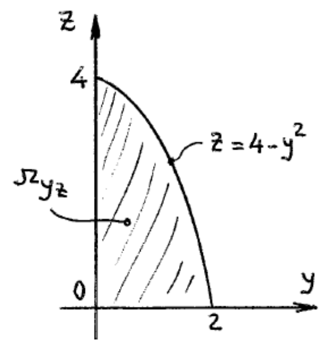
Solução:

a) Projectando *T* sobre o plano *yOz* (região do *Tipo 2*), obtém-se

$$T = \left\{(x,y,z)\ :\ (y,z)\in\Omega_{yz}\ ,\ y\le x\le\sqrt{4-z}\right\}$$

onde $\Omega_{yz}$ é a região do plano *yOz* tal que:

$$\Omega_{yz} = \left\{(y,z)\ :\ 0\le y\le 2\ ,\ 0\le z\le 4-y^2\right\}$$



Então:

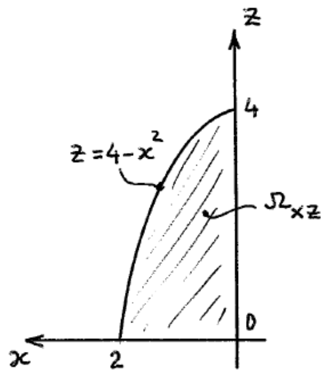
$$\iiint_T xyz\ dxdydz = \iint_{\Omega_{yz}} \int_y^{\sqrt{4-z}} xyz\ dx\ dydz = \int_0^2 \int_0^{4-y^2} \int_y^{\sqrt{4-z}} xyz\ dx\ dzdy$$

b) Projectando *T* sobre o plano *xOz* (região do *Tipo 3*), obtém-se

$$T = \{(x, y, z)\ :\ (x, z) \in \Omega_{xz}\ ,\ 0 \le y \le x\}$$

onde $\Omega_{xz}$ é a região do plano *xOz* tal que:

$$\Omega_{xz} = \left\{(x, z)\ :\ 0 \le x \le 2\ ,\ 0 \le z \le 4 - x^2\right\}$$




Então:

$$\iiint_T xyz\ dxdydz = \iint_{\Omega_{xz}} \int_0^x xyz\ dy\ dxdz = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x xyz\ dy\ dzdx$$

**Exemplo 3**: Calcule o volume do tetraedro, *T*, apresentado na figura da página seguinte.

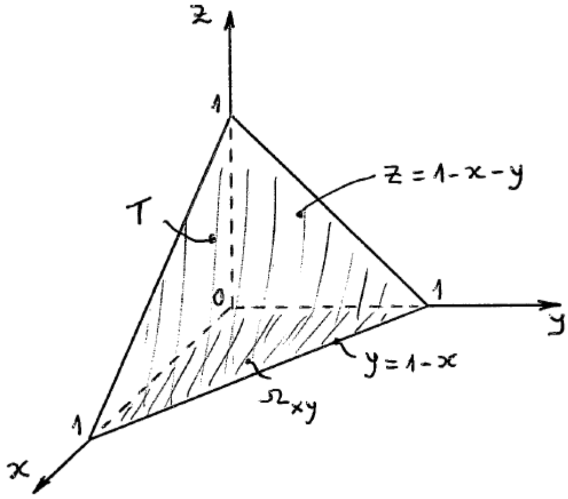
Solução:

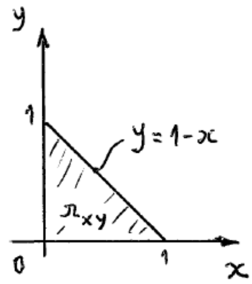
Projectando *T* sobre o plano *xOy* (região do *Tipo 1*), obtém-se

$$T = \left\{(x, y, z)\ :\ (x, y) \in \Omega_{xy}\ ,\ 0 \le z \le 1 - x - y\right\}$$

onde $\Omega_{xy}$ é a região do plano *xOy* tal que:

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 - x\}$$




Então o volume, $V(T)$, do sólido é:

$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} \int_0^{1-x-y} dz \ dxdy =$$

$$= \iint_{\Omega_{xy}} [z]_0^{1-x-y} \ dxdy = \iint_{\Omega_{xy}} (1 - x - y) dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dydx = \int_0^1 \left[ (1-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left( (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2x + x^2) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

## Simetrias no integral triplo

- Seja $f(x,y,z)$ uma função integrável numa região limitada do espaço, $\Pi$.

  Admitindo que $\Pi$ é *simétrica em relação ao plano xOy*:

  i) Se $f(x,y,z)$ é *ímpar na variável z*, isto é, $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$, então:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = 0$$

  ii) Se $f(x,y,z)$ é *par na variável z*, isto é, $f(x,y,z) = f(x,y,-z)$, então:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = 2\iiint_{\Pi_1} f(x,y,z)dxdydz$$

  sendo $\Pi_1$ é *uma das metades* (*em relação ao plano xOy*) de $\Pi$.

- Seja $f(x,y,z)$ uma função integrável numa região limitada do espaço, $\Pi$.

  Admitindo que $\Pi$ é *simétrica em relação ao plano yOz*:

  i) Se $f(x,y,z)$ é *ímpar na variável x*, isto é, $f(x,y,z) = -f(-x,y,z)$, então:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = 0$$

  ii) Se $f(x,y,z)$ é *par na variável x*, isto é, $f(x,y,z) = f(-x,y,z)$, então:

$$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = 2\iiint_{\Pi_1} f(x,y,z)dxdydz$$

  sendo $\Pi_1$ é *uma das metades* (*em relação ao plano yOz*) de $\Pi$.

- Seja $f(x,y,z)$ uma função integrável numa região limitada do espaço, $\Pi$.
  Admitindo que $\Pi$ é *simétrica em relação ao plano xOz*:

  i) Se $f(x,y,z)$ é *ímpar na variável y*, isto é, $f(x,y,z) = -f(x,-y,z)$, então:

  $$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = 0$$

  ii) Se $f(x,y,z)$ é *par na variável y*, isto é, $f(x,y,z) = f(x,-y,z)$, então:

  $$\iiint_{\Pi} f(x,y,z)dxdydz = 2\iiint_{\Pi_1} f(x,y,z)dxdydz$$

  sendo $\Pi_1$ é *uma das metades* (*em relação ao plano xOz*) de $\Pi$.

**Exemplo 4**: O integral triplo

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} \int_{-1}^{1} \frac{z}{\sqrt{2-x^2-y^2}} dzdxdy = 0$$

já que a região

$$V = \left\{(x,y,z) \ : \ (x,y) \in \Omega_{xy} \ , \ -1 \le z \le 1\right\}$$

é *simétrica em relação ao plano xOy* e a função

$$f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{2-x^2-y^2}} = -f(x,y,-z)$$

é *ímpar na variável z*.

O integral triplo

$$\iiint_V g(x,y,z)dxdydz = \iint_{\Omega_{xy}} \int_{-1}^{1} \frac{xyz^2}{\sqrt{4-x^2+z^4}} dzdxdy =$$

$$= 2\iint_{\Omega_{xy}} \int_{0}^{1} \frac{xyz^2}{\sqrt{4-x^2+z^4}} dzdxdy$$

já que a região

$$V = \left\{(x,y,z) \ : \ (x,y) \in \Omega_{xy} \ , \ -1 \le z \le 1\right\}$$

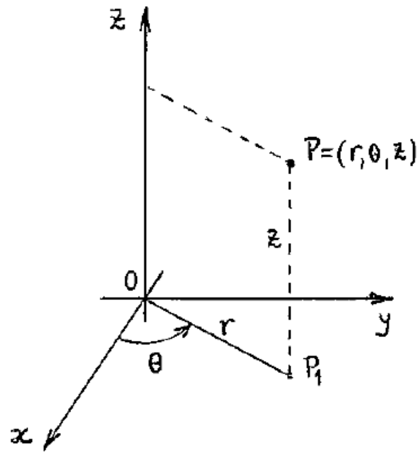
é *simétrica em relação ao plano xOy* e a função

$$g(x,y,z) = \frac{xyz^2}{\sqrt{4-x^2+z^4}} = g(x,y,-z)$$

é *par na variável z*.

## Integral triplo em coordenadas cilíndricas

- Um ponto $P$ do espaço, com coordenadas $(x, y, z)$ definidas num referencial ortonormado $Oxyz$, pode ainda ser expresso através de um terno de números reais $(r, \theta, z)$; as duas primeiras coordenadas, $r$ e $\theta$, são as coordenadas polares do ponto, $P_1$, que é a projecção ortogonal do ponto $P$ sobre o plano $xOy$, sendo a terceira coordenada a coordenada cartesiana $z$ do ponto $P$.




Os números $r$, $\theta$ e $z$ relacionam-se com as coordenadas cartesianas através das seguintes igualdades

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\ \mathrm{sen}\theta \quad \text{e} \quad z = z \tag{11}$$

em que $r \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e definem-se como as *coordenadas cilíndricas* do ponto $P$. As expressões inversas de (11) são

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{e} \quad z = z$$

excepto para os casos em que $x = 0$. Os pontos onde $x = 0$ requerem uma atenção particular.

- Em coordenadas cartesianas, as *superfícies coordenadas*

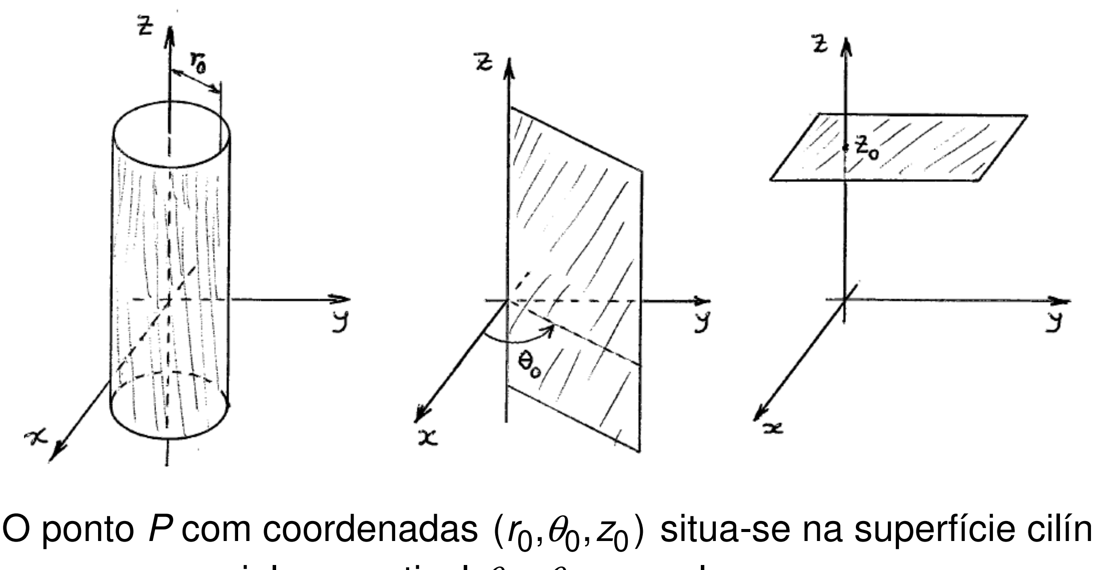
$$x = x_0 \quad , \quad y = y_0 \quad \text{e} \quad z = z_0$$

são três planos paralelos aos planos coordenados.
O ponto $P$ com coordenadas $(x_0, y_0, z_0)$ situa-se nos planos $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$.

- Em coordenadas cilíndricas, as *superfícies coordenadas* tomam a forma:

$$r = r_0 \quad , \quad \theta = \theta_0 \quad \text{e} \quad z = z_0 .$$

A superfície $r = r_0$ é uma *superfície cilíndrica circular recta* de raio $r_0$; o seu eixo central é o eixo dos *zz*.
A superfície $\theta = \theta_0$ é um *semiplano vertical* apoiado no eixo dos *zz* e faz um ângulo $\theta_0$ radianos com o semieixo positivo dos *xx*.
A última superfície coordenada é o *plano* $z = z_0$ (plano paralelo ao plano coordenado *xOy*).

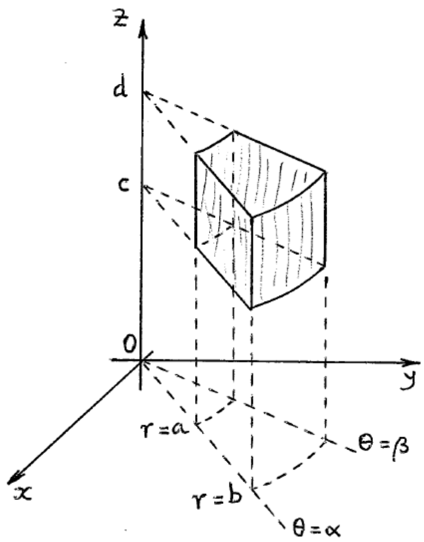



O ponto $P$ com coordenadas $(r_0, \theta_0, z_0)$ situa-se na superfície cilíndrica $r = r_0$, no semiplano vertical $\theta = \theta_0$ e no plano $z = z_0$.

- As coordenadas cilíndricas são adequadas para descrever sólidos que apresentam uma forma que se assemelha a uma *cunha cilíndrica*, isto é, que são formados por todos os pontos $(x,y,z)$ do espaço com coordenadas cilíndricas $(r,\theta,z)$ definidas no conjunto

$$\Pi=\{(r,\theta,z)\ :\ a\le r\le b\ ,\ \alpha\le\theta\le\beta\ ,\ c\le z\le d\}$$

em que $0\le a<b$, $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$ e $c<d$.




As coordenadas cilíndricas podem ser usadas, de um modo mais geral, em casos onde a região de integração possui um eixo de simetria, sendo considerado o eixo dos *zz* como eixo de simetria.

## Cálculo do integral triplo em coordenadas cilíndricas

- Seja $f(x,y,z)$ uma função real a três variáveis, contínua numa região (sólido), *T*, do espaço. Se *T* é o conjunto de todos os pontos $(x,y,z)$ com coordenadas cilíndricas $(r,\theta,z)$ definidas numa região $\Pi$, então:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Pi f(r\cos\theta,r\ \mathrm{sen}\theta,z)\ r\ drd\theta dz \tag{12}$$

A igualdade (12) traduz, no integral triplo, a *mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas*.

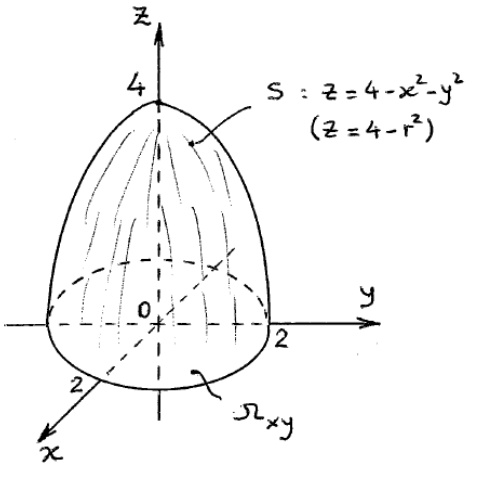
- Considerando $f(x,y,z)=1$ em (12), conclui-se que o integral triplo

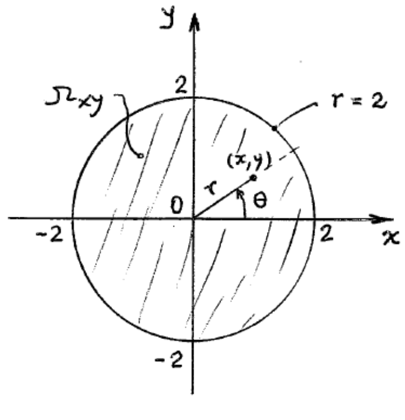
$$V(T)=\iiint_T dxdydz=\iiint_\Pi r\ drd\theta dz$$

exprime o volume do sólido, $V(T)$, descrito pela região $T$ e definido em coordenadas cilíndricas pela região $\Pi$.

**Exemplo 5**: Utilize coordenadas cilíndricas para calcular o integral triplo $\iiint_T (x^2+y^2)dxdydz$, em que $T$ é a região do espaço definida por:

$$T=\left\{(x,y,z):-2\le x\le 2,\ -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2},\ 0\le z\le 4-x^2-y^2\right\}$$




Solução:

O sólido, $T$, é limitado superiormente pelo paraboloide de revolução de equação

$$z=f(x,y)=4-x^2-y^2$$

e inferiormente pela região circular, $\Omega_{xy}$, situada no plano $xOy$ dada por:

$$\Omega_{xy}=\left\{(x,y)\ :\ 0\le x^2+y^2\le 4\right\}$$

Dado que o sólido, $T$, é simétrico em relação ao eixo dos $zz$, então pode ser descrito, em coordenadas cilíndricas, pela região:

$$\Pi = \left\{ (r,\theta,z) \ : \ 0 \le r \le 2 \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le z \le 4 - r^2 \right\}$$

Assim, obtém-se para o integral triplo:

$$\iiint_T (x^2 + y^2)dxdydz = \iiint_\Pi r^2 \ r \ drd\theta dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} r^3 \ dzd\theta dr =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 [z]_0^{4-r^2} \ d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4r^3 - r^5) d\theta dr =$$

$$= \int_0^2 (4r^3 - r^5)[\theta]_0^{2\pi} \ dr = 2\pi \int_0^2 (4r^3 - r^5) dr =$$

$$= 2\pi \left[ r^4 - \frac{r^6}{6} \right]_0^2 = 2\pi \left( 16 - \frac{32}{3} \right) = \frac{32\pi}{3}$$

**Exemplo 6**: Recorra a coordenadas cilíndricas para determinar o volume do sólido, $T$, limitado superiormente pelo plano $z = y$ (superfície $S_1$) e inferiormente pelo paraboloide de revolução de equação $z = x^2 + y^2$ (superfície $S_2$).

Solução:

Considerando a região $T$ descrita em coordenadas cartesianas, verifica-se que as superfícies $S_1$ e $S_2$ intersectam-se na curva, $C$, definida por

$$C : z = y \ , \ x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$$

estando situada sobre a superfície cilíndrica circular de equação:

$$x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$$

A projecção ortogonal de $C$ sobre o plano $xOy$ é a curva, $C_1$, tal que

$$C_1 : x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4 \ , \ z = 0$$

sendo uma circunferência de raio $1/2$ centrada no ponto $P = (0, 1/2, 0)$. Assim, o sólido, $T$, é limitado superiormente pela superfície

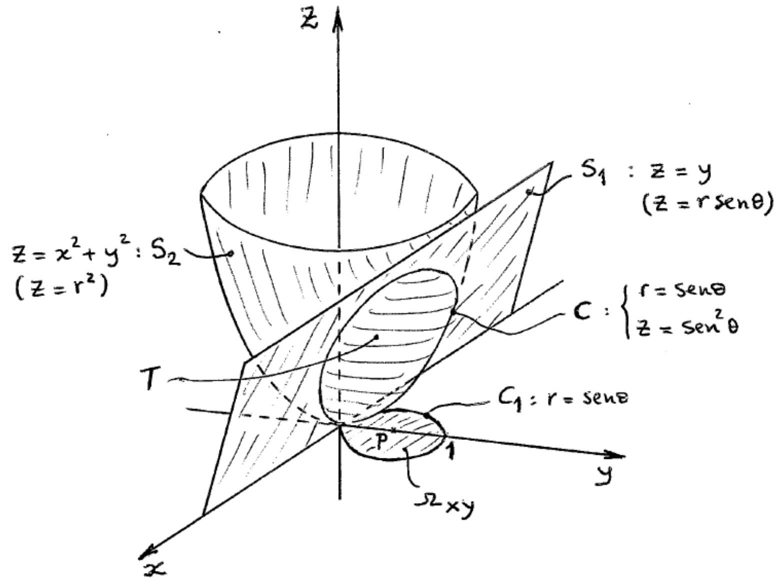
$$S_1 : z = y$$

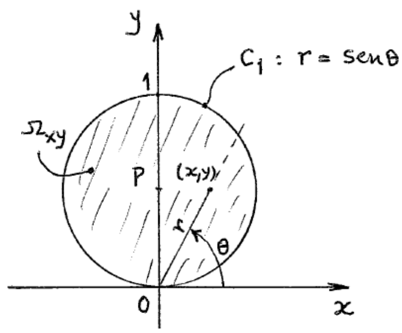
inferiormente pela superfície

$$S_2 : z = x^2 + y^2$$

e a sua projecção ortogonal sobre o plano $xOy$ é a região circular, $\Omega_{xy}$, definida por:

$$\Omega_{xy} = \left\{ (x, y) \ : \ 0 \leq x^2 + (y - 1/2)^2 \leq 1/4 \right\}$$




Considerando, em alternativa, coordenadas cilíndricas, as equações das superfícies $S_1$ e $S_2$ são:

$$S_1 : z = r \ \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad S_2 : z = r^2 .$$

Por outro lado, as equações das curvas $C$ e $C_1$ são:

$$C : r = \text{sen}\theta \ , \ z = \text{sen}^2\theta \quad \text{e} \quad C_1 : r = \text{sen}\theta \ , \ z = 0 .$$

Notando que $\Omega_{xy}$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ que possuem coordenadas polares $(r,\theta)$ no conjunto

$$\Gamma = \{(r,\theta) \ : \ 0 \le \theta \le \pi \ , \ 0 \le r \le \text{sen}\theta\}$$

o sólido, $T$, pode ser descrito, em coordenadas cilíndricas, pela região:

$$\Pi = \left\{(r,\theta,z) \ : \ 0 \le \theta \le \pi \ , \ 0 \le r \le \text{sen}\theta \ , \ r^2 \le z \le r \ \text{sen}\theta\right\}$$

Então, obtém-se para o volume do sólido, $V(T)$:

$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \iiint_\Pi r \ drd\theta dz \ = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\theta} \int_{r^2}^{r \ \text{sen}\theta} r \ dzdrd\theta =$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\theta} r\left[z\right]_{r^2}^{r \ \text{sen}\theta} drd\theta = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\theta} (r^2\text{sen}\theta - r^3)drd\theta =$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3}\text{sen}\theta - \frac{r^4}{4}\right]_0^{\text{sen}\theta} d\theta = \frac{1}{12}\int_0^\pi \text{sen}^4\theta \ d\theta$$

Sabendo que

$$4\text{sen}^4\theta = \left(1 - \cos(2\theta)\right)^2 = 1 - 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta) =$$

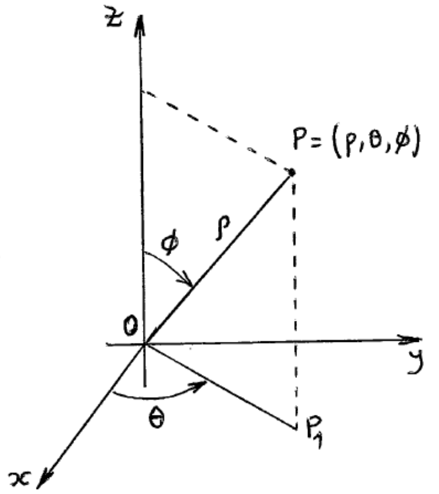
$$= 1 - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\theta) = \frac{3}{2} - 2\cos(2\theta) + \frac{1}{2}\cos(4\theta)$$

obtém-se:

$$V(T) = \frac{1}{32}\int_0^\pi d\theta - \frac{1}{24}\int_0^\pi \cos(2\theta)d\theta + \frac{1}{96}\int_0^\pi \cos(4\theta)d\theta = \frac{\pi}{32} - 0 + 0 = \frac{\pi}{32}$$

## Integral triplo em coordenadas esféricas

- Um ponto *P* do espaço, com coordenadas $(x, y, z)$ definidas num referencial ortonormado *Oxyz*, pode também ser representado através de um terno de números reais $(\rho, \theta, \phi)$. A primeira coordenada, $\rho$, é a distância de *P* à origem, pelo que $\rho \geq 0$. A segunda coordenada, o ângulo $\theta$, designada por *longitude*, corresponde à segunda coordenada das coordenadas cilíndricas e, portanto, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A terceira coordenada exprime o ângulo, $\phi$, que o vector $\overrightarrow{OP}$ faz com o semieixo positivo dos *zz*; é designada por *colatitude*, ou *ângulo polar*, e $0 \leq \phi \leq \pi$.




Os números $\rho$, $\theta$ e $\phi$ estão relacionados com as coordenadas cartesianas através das seguintes igualdades

$$x = \rho \operatorname{sen}(\phi)\cos(\theta) \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen}(\phi)\operatorname{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad z = \rho \cos(\phi) \qquad (13)$$

e definem-se como as *coordenadas esféricas* do ponto *P*. As expressões inversas de (13) são

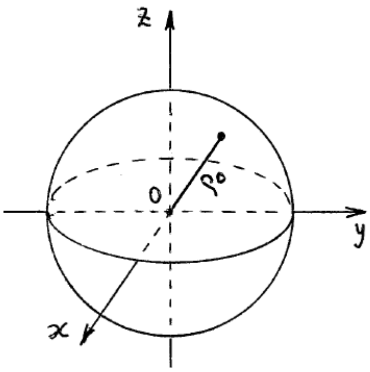
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad \text{e} \quad \phi = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

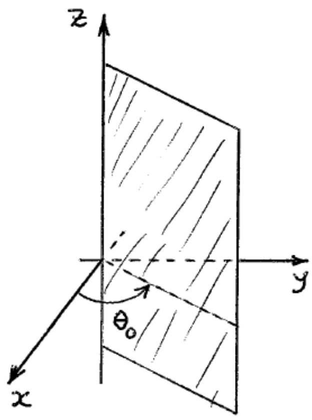
excepto para os casos em que $x = 0$.

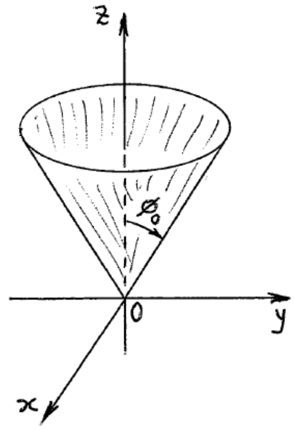
- Em coordenadas esféricas, as *superfícies coordenadas* tomam a forma:

$$\rho=\rho_0 \quad , \quad \theta=\theta_0 \;\text{ e }\; \phi=\phi_0 .$$

A superfície $\rho=\rho_0$ é uma *superfície esférica* de raio $\rho_0$ centrada na origem.
Tal como nas coordenadas cilíndricas, $\theta=\theta_0$ é um *semiplano vertical* apoiado no eixo dos *zz* e faz um ângulo de $\theta_0$ radianos com o semieixo positivo dos *xx*.



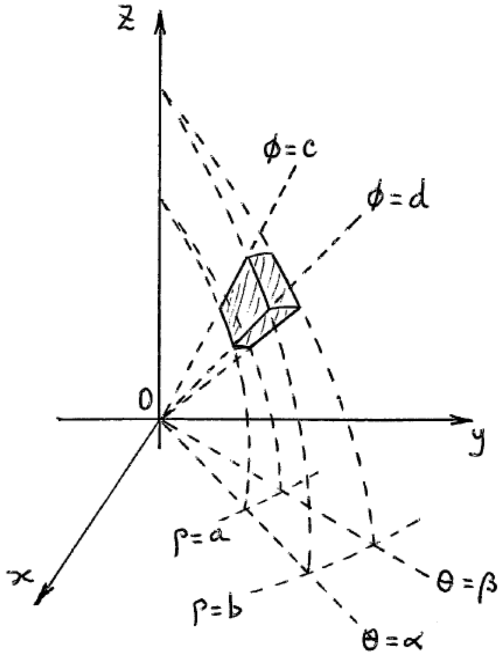




Relativamente à superfície $\phi=\phi_0$ verifica-se o seguinte:
i) Se $0<\phi_0<\pi/2$ ou $\pi/2<\phi_0<\pi$ a superfície corresponde a uma das folhas de um cone circular, que é gerado rodando, em torno do eixo dos *zz*, uma recta que passa na origem e faz um ângulo de $\phi_0$ radianos com o semieixo positivo dos *zz*;
ii) A superfície $\phi_0=\pi/2$ é o plano coordenado *xOy*;
iii) A equação $\phi_0=0$ define o semieixo positivo dos *zz* e a equação $\phi_0=\pi$ define o semieixo negativo dos *zz*.
O ponto *P* com coordenadas $(\rho_0,\theta_0,\phi_0)$ situa-se na intersecção das superfícies $\rho=\rho_0$, $\theta=\theta_0$ e $\phi=\phi_0$.

- As coordenadas esféricas são adequadas para descrever sólidos que apresentam uma forma que se assemelha a uma *cunha esférica*, ou seja, que são formados por todos os pontos $(x,y,z)$ do espaço com coordenadas esféricas $(\rho,\theta,\phi)$ definidas no conjunto

$$\Pi=\{(\rho,\theta,\phi)\ :\ a\le\rho\le b\ ,\ \alpha\le\theta\le\beta\ ,\ c\le\phi\le d\}$$

em que $0\le a<b$, $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$ e $0\le c<d\le\pi$.




As coordenadas esféricas podem ser usadas, de uma forma mais geral, em situações onde a região de integração é simétrica em relação à origem do referencial.

## Cálculo do integral triplo em coordenadas esféricas

- Seja $f(x,y,z)$ uma função real a três variáveis, contínua numa região (sólido), *T*, do espaço. Se *T* é o conjunto de todos os pontos $(x,y,z)$ com coordenadas esféricas $(\rho,\theta,\phi)$ definidas numa região $\Pi$, então:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_\Pi f\left(\rho \text{sen}(\phi)\cos(\theta), \rho \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta), \rho\cos(\phi)\right)\ \rho^2 \text{sen}(\phi)\ d\rho d\theta d\phi \quad (14)$$

A equação (14) exprime, no integral triplo, a *mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas*.

- Considerando $f(x,y,z)=1$ em (14), conclui-se que o integral triplo

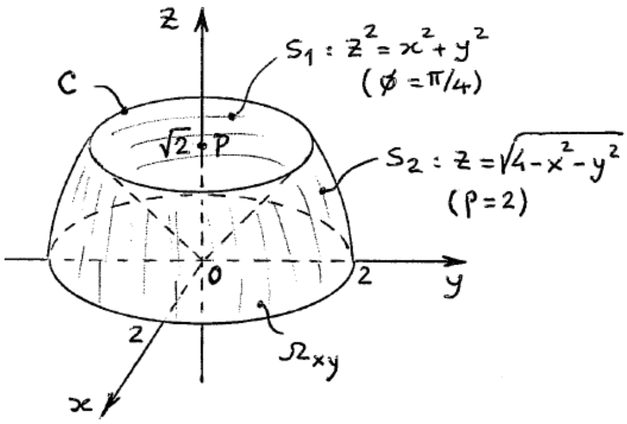
$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \iiint_\Pi \rho^2 \text{sen}(\phi)\ d\rho d\theta d\phi$$

traduz o volume do sólido, $V(T)$, descrito pela região $T$ e definido em coordenadas esféricas pela região $\Pi$.

**Exemplo 7**: Use coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido, *T*, limitado pelo cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ (superfície $S_1$), pela superfície, $S_2$, de equação $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e pelo plano $z = 0$.

Solução:

Todos os pontos situados na superfície $S_2$ pertencem à metade da superfície esférica de raio $\rho = 2$, centrada na origem e definida no semieixo positivo dos *zz*.



As superfícies $S_1$ e $S_2$ intersectam-se na curva, $C$, definida por:

$$C : x^2 + y^2 = 2 \ , \ z = \sqrt{2}$$

Trata-se de uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ centrada no ponto $P = (0,0,\sqrt{2})$ e está situada sobre a superfície cilíndrica circular de equação:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Verifica-se que $\phi = \pi / 4$ radianos para todos os pontos situados em $C$.
O sólido, $T$, é limitado pela superfície

$$S_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \ \ (z \geq 0)$$

pela superfície

$$S_2 : z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

e pela região circular do plano $xOy$, $\Omega_{xy}$, definida por

$$\Omega_{xy} = \left\{ (x, y) \ : \ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

que corresponde à projecção ortogonal do sólido, $T$, sobre o plano $z = 0$.
Recorrendo a coordenadas esféricas, conclui-se que o sólido, $T$, é o conjunto de todos os pontos $(x, y, z)$ que possuem coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \phi)$ no conjunto:

$$\Pi = \{ (\rho, \theta, \phi) \ : \ 0 \leq \rho \leq 2 \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ \pi / 4 \leq \phi \leq \pi / 2 \}$$

Então, obtém-se para o volume do sólido, $V(T)$:

$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \iiint_\Pi \rho^2 \text{sen}(\phi) \ d\rho d\theta d\phi =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^2 \text{sen}(\phi) \ d\phi d\theta d\rho = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \left[ -\cos\phi \right]_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^2\int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^2 \rho^2 \left[\theta\right]_0^{2\pi} d\rho = \sqrt{2}\pi\int_0^2 \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\left[\rho^3\right]_0^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$$

## Outras aplicações do integral triplo

- Considere-se um sólido, $T$, definido no espaço e designe-se por $\lambda(x,y,z)$ o valor da densidade mássica (por unidade de volume) em cada ponto $(x,y,z)$ de $T$.

  Assim, a *massa* do sólido, $M(T)$, é dada por:

  $$M(T) = \iiint_T \lambda(x,y,z)\ dxdydz$$

  Se a densidade for constante em cada ponto $(x,y,z)$ de $T$, por exemplo, $\lambda(x,y,z) = \lambda$, então

  $$M(T) = \lambda\iiint_T dxdydz = \lambda V(T) \qquad (15)$$

  em que $V(T)$ é o volume de $T$.

  Além disso, as coordenadas do *centro de massa* do sólido, $C_M = (x_M, y_M, z_M)$, são obtidas a partir das três *médias ponderadas*, *através da função (de peso)* $\lambda(x,y,z)$, seguintes:

  $$x_M = \frac{1}{M(T)}\iiint_T x\ \lambda(x,y,z)\ dxdydz$$

  $$y_M = \frac{1}{M(T)}\iiint_T y\ \lambda(x,y,z)\ dxdydz$$

  $$z_M = \frac{1}{M(T)}\iiint_T z\ \lambda(x,y,z)\ dxdydz$$

**Exemplo 8**: Determine a massa do sólido, $T$, que tem a forma de um cilindro circular recto, com raio $R$ e altura $h$, sabendo que a densidade mássica (por unidade de volume), $\lambda(x,y,z)$, é, em cada ponto, directamente proporcional à distância ao eixo do cilindro.

Solução:

Admita-se que a base do cilindro está situada no plano coordenado $xOy$ e que o seu eixo coincide com o eixo dos $zz$. Nestas condições, o sólido $T$ corresponde, em coordenadas cartesianas, ao conjunto

$$T = \left\{(x,y,z)\ :\ (x,y) \in \Omega_{xy}\ ,\ 0 \le z \le h\right\}$$

onde $\Omega_{xy}$ é a região do plano $xOy$ tal que:

$$\Omega_{xy} = \left\{(x,y)\ :\ 0 \le x^2 + y^2 \le R^2\right\}$$

A densidade mássica é definida, em cada ponto de $T$, pela função

$$\lambda(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

em que $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade.
Recorrendo a coordenadas cilíndricas, o sólido $T$ é o conjunto de todos os pontos $(x,y,z)$ que possuem coordenadas cilíndricas $(r,\theta,z)$ no conjunto:

$$\Pi = \left\{(r,\theta,z)\ :\ 0 \le r \le R\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le z \le h\right\}$$

Então, a massa do sólido $T$, $M(T)$, é:

$$M(T) = \iiint_T k\sqrt{x^2 + y^2}\ dxdydz = \iiint_\Pi (kr)r\ drd\theta dz =$$

$$= k\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^2\ dzd\theta dr = k\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \left[z\right]_0^h d\theta dr =$$

$$= kh\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2\ d\theta dr = kh\int_0^R r^2 \left[\theta\right]_0^{2\pi} dr = 2\pi kh\int_0^R r^2\ dr =$$

$$= \frac{2\pi kh}{3}\left[r^2\right]_0^R = \frac{2}{3}k\pi R^3 h$$

**Exemplo 9**: Determine a massa do sólido, *T*, que tem a forma de uma esfera de raio um, sabendo que a densidade mássica (por unidade de volume), $\lambda(x,y,z)$, é, em cada ponto, directamente proporcional ao quadrado da distância ao centro de *T*.

Solução:

Admita-se que a esfera tem o seu centro na origem do referencial, isto é:

$$T = \left\{(x,y,z)\ :\ 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$$

A densidade mássica é definida, em cada ponto de *T*, pela função

$$\lambda(x,y,z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$$

em que $k > 0$ é uma constante de proporcionalidade.
Recorrendo a coordenadas esféricas, o sólido *T* é o conjunto de todos os pontos $(x,y,z)$ que possuem coordenadas esféricas $(\rho,\theta,\phi)$ no conjunto:

$$\Pi = \{(\rho,\theta,\phi)\ :\ 0 \le \rho \le 1\ ,\ 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le \phi \le \pi\}$$

Então, a massa do sólido *T*, $M(T)$, é:

$$M(T) = \iiint_T k(x^2 + y^2 + z^2)\ dxdydz = \iiint_\Pi (k\rho^2)\rho^2 \text{sen}(\phi)\ d\rho d\theta d\phi =$$

$$= k\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \rho^4 \text{sen}(\phi)\ d\phi d\theta d\rho = k\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^4 \left[-\cos\phi\right]_0^{\pi}\ d\rho d\theta =$$

$$= 2k\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho^4\ d\rho d\theta = 2k\int_0^1 \rho^4 \left[\theta\right]_0^{2\pi} d\rho = 4k\pi\int_0^1 \rho^4\ d\rho =$$

$$= \frac{4k\pi}{5}\left[\rho^5\right]_0^1 = \frac{4}{5}k\pi$$

- Se o sólido é materialmente *homogéneo* (se a densidade é constante), tendo em atenção (15), obtém-se:

$$\lambda(x,y,z)=\lambda=\frac{M(T)}{V(T)}$$

Neste caso, o *centro de massa* do sólido é coincidente com o *centroide da região T*, $\overline{C}=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, sendo as suas coordenadas dadas por:

$$\overline{x}=\frac{1}{V(T)}\iiint_T x\ dxdydz$$

$$\overline{y}=\frac{1}{V(T)}\iiint_T y\ dxdydz$$

$$\overline{z}=\frac{1}{V(T)}\iiint_T z\ dxdydz$$

**Exemplo 10**: Localize o centroide do sólido, *T*, tratado no exemplo 6.

Solução:

Verificou-se no exemplo 6 que o volume do sólido tem o valor $V(T)=\pi/32$.
Dado que *T* é simétrico em relação ao plano coordenado *yOz*, então $\overline{x}=0$.
Relativamente a $\overline{y}$ verifica-se:

$$\overline{y}=\frac{32}{\pi}\iiint_T y\ dxdydz=\frac{32}{\pi}\iiint_\Pi \big(r\ \mathrm{sen}(\theta)\big)\, r\ drd\theta dz=$$

$$=\frac{32}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\mathrm{sen}\theta}\int_{r^2}^{r\ \mathrm{sen}\theta} r^2\mathrm{sen}(\theta)\ dzdrd\theta=$$

$$=\frac{32}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\mathrm{sen}\theta} r^2\mathrm{sen}(\theta)\big[z\big]_{r^2}^{r\ \mathrm{sen}\theta}\ drd\theta=$$

$$= \frac{32}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\operatorname{sen}\theta}\left(r^3\operatorname{sen}^2(\theta) - r^4\operatorname{sen}(\theta)\right)drd\theta =$$

$$= \frac{32}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\operatorname{sen}^2(\theta) - \frac{1}{5}r^5\operatorname{sen}(\theta)\right]_0^{\operatorname{sen}\theta} d\theta =$$

$$= \frac{8}{5\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^6(\theta)\ d\theta$$

Sabendo que

$$\operatorname{sen}^6\theta = \frac{1}{8}(1-\cos(2\theta))^3 = \frac{1}{8}\left(1-2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)\right)(1-\cos(2\theta)) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1-3\cos(2\theta)+3\cos^2(2\theta)-\cos^3(2\theta)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1-4\cos(2\theta)+3\cos^2(2\theta)+\cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\cos(2\theta)+\cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)\right) =$$

$$= \frac{5}{16}-\frac{5}{16}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)$$

obtém-se:

$$\overline{y} = \frac{8}{5\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{5}{16}-\frac{5}{16}\cos(2\theta)+\frac{1}{8}\cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)\right)\ d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(2\theta)d\theta + \frac{1}{5\pi}\int_0^{\pi}\cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{1}{2}$$

Relativamente a $\bar{z}$ obtém-se:

$$\bar{z} = \frac{32}{\pi}\iiint_T z\ dxdydz = \frac{32}{\pi}\iiint_\Pi zr\ drd\theta dz =$$

$$= \frac{32}{\pi}\int_0^\pi\int_0^{\operatorname{sen}\theta}\int_{r^2}^{r\ \operatorname{sen}\theta} zr\ dzdrd\theta = \frac{16}{\pi}\int_0^\pi\int_0^{\operatorname{sen}\theta} r\left[z^2\right]_{r^2}^{r\ \operatorname{sen}\theta} drd\theta =$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_0^\pi\int_0^{\operatorname{sen}\theta}\left(r^3\operatorname{sen}^2(\theta) - r^5\right)drd\theta =$$

$$= \frac{16}{\pi}\int_0^\pi\left[\frac{1}{4}r^4\operatorname{sen}^2(\theta) - \frac{1}{6}r^6\right]_0^{\operatorname{sen}\theta} d\theta = \frac{4}{3\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen}^6(\theta)\ d\theta =$$

$$= \frac{5}{12\pi}\int_0^\pi d\theta - \frac{5}{12\pi}\int_0^\pi \cos(2\theta)d\theta + \frac{1}{6\pi}\int_0^\pi \cos(2\theta)\operatorname{sen}^2(2\theta)d\theta =$$

$$= \frac{5}{12} - 0 + 0 = \frac{5}{12}$$

Concluindo, as coordenadas do centroide do sólido são:

$$\bar{C} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}\right)$$

- Admita-se, agora, que o sólido roda em torno de uma linha, $L$. O *momento de inércia*, $I_L$, do sólido *em relação ao eixo de rotação L*, é dado por

$$I_L = \iiint_T \lambda(x,y,z)[r(x,y,z)]^2\ dxdydz$$

onde $r(x,y,z)$ é distância de cada ponto $(x,y,z)$ de $T$ ao eixo de rotação. Os momentos de inércia em relação aos eixos dos *xx*, dos *yy* e dos *zz* são, respectivamente, designados por $I_x$, $I_y$ e $I_z$.

## Jacobianos: mudança de variáveis na integração tripla

- O processo que envolve a mudança de variáveis na integração tripla é semelhante ao que foi exposto para a integração dupla. No presente capítulo foram já referidas duas situações particulares de mudança de variáveis: a integração em coordenadas cilíndricas e a integração em coordenadas esféricas.

- Neste caso, considere-se o conceito de volume. Seja a região $\Pi$ de um espaço que é representado pelo referencial *Ouvw*; neste espaço, um ponto *P* terá coordenadas $(u,v,w)$, em que *u* é a *abcissa*, *v* a *ordenada* e *w* a *cota*. Admita-se que

$$x = x(u,v,w) \quad , \quad y = y(u,v,w) \quad , \quad z = z(u,v,w) \tag{16}$$

são funções continuamente diferenciáveis na região $\Pi$.
À medida que $(u,v,w)$ toma valores no interior da região $\Pi$, os pontos de coordenadas $(x,y,z) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$ geram uma região *T* no espaço representado pelo referencial *Oxyz*.
Se o mapeamento associado à transformação

$$(u,v,w) \;\to\; (x,y,z)$$

for injectivo no interior de $\Pi$ e se o *Jacobiano*, $J(u,v,w)$, definido pelo determinante de ordem 3

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} - \frac{\partial y}{\partial u}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} + \frac{\partial z}{\partial u}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}$$

nunca se anular no interior de $\Pi$, então o volume da região *T*, $V(T)$, é dado por:

$$V(T)=\iiint_T dxdydz=\iiint_\Pi |J(u,v,w)|\, dudvdw \tag{17}$$

- Admita-se agora que se pretende integrar uma função contínua $f(x,y,z)$ na região *T*. Se o processo de cálculo se mostrar demasiado complexo, então é conveniente a aplicação de uma adequada mudança de variáveis, tal como se define em (16), de forma a torná-lo mais expedito. Assim, atendendo a (17), obtém-se:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint_\Pi f\big(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\big)\ |J(u,v,w)|\, dudvdw \tag{18}$$

- Seja *T* o conjunto de todos os pontos $(x,y,z)$ com coordenadas cilíndricas $(r,\theta,z)$ definidas numa região $\Pi$. A expressão que traduz, no integral triplo, a *mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas*, é:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Pi f(r\cos\theta, r\ \text{sen}\theta, z)\ r\ drd\theta dz \tag{19}$$

Notando que as equações de mudança variáveis são

$$x=r\cos\theta\quad,\quad y=r\ \text{sen}\theta\quad \text{e}\quad z=z$$

obtém-se para o Jacobiano:

$$J(r,\theta,z)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & \text{sen}\theta & 0\\ -r\ \text{sen}\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\ \Rightarrow\ |J(r,\theta,z)|=r$$

Tendo em conta (18), confirma-se o resultado apresentado em (19).

- Seja $T$ o conjunto de todos os pontos $(x, y, z)$ com coordenadas esféricas $(\rho,\theta,\phi)$ definidas numa região $\Pi$. A expressão que traduz, no integral triplo, a *mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas*, é:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_\Pi f\left(\rho\text{sen}(\phi)\cos(\theta),\rho\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta),\rho\cos(\phi)\right)\rho^2\text{sen}(\phi)d\rho d\theta d\phi \quad (20)$$

Notando que as equações de mudança variáveis são

$$x = \rho\text{sen}(\phi)\cos(\theta) \quad , \quad y = \rho\text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) \quad \text{e} \quad z = \rho\cos(\phi)$$

obtém-se para o Jacobiano:

$$J(\rho,\theta,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\rho} \\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \\ \frac{\partial x}{\partial\phi} & \frac{\partial y}{\partial\phi} & \frac{\partial z}{\partial\phi} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{sen}(\phi)\cos(\theta) & \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) & \cos(\phi) \\ -\rho\ \text{sen}(\phi)\text{sen}(\theta) & \rho\ \text{sen}(\phi)\cos(\theta) & 0 \\ \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\text{sen}(\theta) & -\rho\ \text{sen}(\phi) \end{vmatrix} = \rho^2\text{sen}(\phi)$$

Tendo em atenção (18), confirma-se o resultado obtido em (20).