INTEGRAIS DE LINHA

Trabalho de um campo de forças

- Seja S um subconjunto não vazio do plano xOy ou do espaço tridimensional. Chama-se *campo escalar* à função que associa um escalar a cada ponto de S (por exemplo, a função que define a temperatura ou a densidade de um material nesse ponto). Chama-se *campo vectorial* à função que associa um vector a cada ponto de S (por exemplo, o vector velocidade do vento, a aceleração da gravidade ou o gradiente de um campo escalar nesse ponto).

- O conceito de *integral de linha* está associado à noção de *trabalho*.

- Seja um *ponto material* que se desloca ao longo de uma trajectória rectilínea entre os pontos A e B, sujeito a um campo de forças constante $\vec{f}$. Designando por $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AB} = B - A$ o *vector deslocamento*, então o trabalho, $W_{\overline{AB}}$, realizado pelo campo de forças entre os pontos A e B é dado por

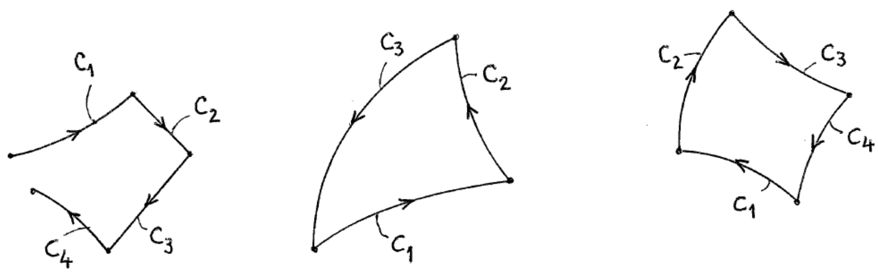
$$W_{\overline{AB}} = \|\vec{f}\|\|\Delta\vec{r}\|\cos\theta = \vec{f}\cdot\Delta\vec{r} \qquad (1)$$

onde θ é o ângulo (constante) formado pelos vectores $\vec{f}$ e $\Delta\vec{r}$.
No entanto, se a trajectória do ponto material não for rectilínea e/ou se o campo de forças aplicado variar ao longo da trajectória percorrida, a expressão (1) revela-se inadequada para o cálculo do trabalho, $W_{\overline{AB}}$; é o que acontece, por exemplo, quando o movimento se realiza num *campo gravítico* ou num *campo magnético*.

- Considere-se, então, que o ponto material se desloca ao longo de uma *curva orientada*, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in [a,b]$$

e admita-se que se trata de uma *curva suave*, isto é, uma curva em que a derivada $\vec{r}'(t)$ (vector tangente à curva) é uma função vectorial contínua e não nula em $]a,b[$.



Além disso, uma *curva C* diz-se *suave por secções*, se existe uma partição de subintervalos tal que a curva é suave em cada um desses subintervalos.

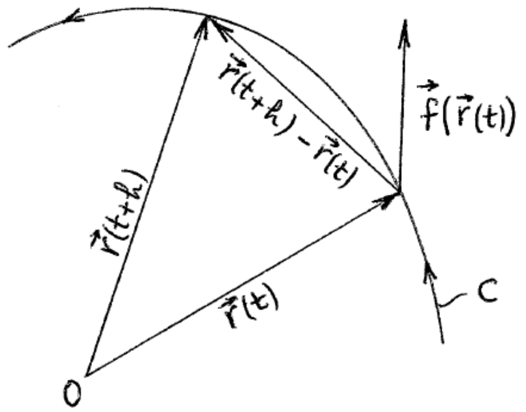
- Assim, pretende-se mostrar que se o campo de forças $\vec{f}$ é contínuo (podendo variar, de ponto para ponto, em direcção e intensidade), então o trabalho, W_C, realizado ao longo de *C* é:

$$W_C = \int_a^b \left[\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \right] dt \tag{2}$$

Seja, então, o intervalo paramétrico $[t, t+h]$, $h > 0$. Se h for suficientemente pequeno, atendendo a (1), uma estimativa do trabalho realizado neste intervalo é dada pelo produto escalar

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \left[\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t) \right]$$

em que $\vec{f}(\vec{r}(t))$ é o valor da força aplicada no ponto $\vec{r}(t)$ e o vector deslocamento $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$ tem a direcção do segmento de recta que liga os pontos $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$, que é uma aproximação ao arco de curva compreendido entre estes dois pontos.



Designando por $W(t)$ o trabalho realizado por $\vec{f}(t)$ entre $\vec{r}(a)$ (onde a curva tem o seu início) e $\vec{r}(t)$, e por $W(t+h)$ o trabalho realizado entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t+h)$, então o trabalho realizado entre $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$ é dado por

$$W(t+h)-W(t)$$

que pode ser expresso, de um modo aproximado, através da expressão

$$W(t+h)-W(t) \cong \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \left[\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)\right]$$

ou seja, dividindo por *h*:

$$\frac{W(t+h)-W(t)}{h} \cong \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\left[\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)\right]}{h} \tag{3}$$

O valor do trabalho realizado entre os pontos $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$ estará definido, se ambos os membros de (3) possuírem o mesmo limite quando $h \to 0$, isto é, desde que:

$$W'(t) = \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

Dado que $W(a)=0$ e $W(b)$ é o valor do trabalho total realizado pelo campo de forças $\vec{f}(t)$ ao longo de toda a curva *C*, então

$$W(b)-W(a)=W(b)=\int_a^b W'(t)dt=\int_a^b\left[\vec{f}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\right]dt$$

o que confirma o resultado entretanto apresentado em (2).

Exemplo 1: Determine o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\vec{f}(x,y,z)=xy\vec{i}+4x\vec{j}+2z\vec{k}$$

ao longo da hélice circular:

$$\vec{r}(t)=\cos(t)\vec{i}+\text{sen}(t)\vec{j}+t\vec{k}\ ,\ t\in[0,2\pi]$$

Solução:

Notando que

$$\vec{r}'(t)=-\text{sen}(t)\vec{i}+\cos(t)\vec{j}+\vec{k}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t))=\cos(t)\text{sen}(t)\vec{i}+4\cos(t)\vec{j}+2t\vec{k}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)=-\cos(t)\text{sen}^2(t)+4\cos^2(t)+2t$$

obtém-se o seguinte valor para o trabalho:

$$W=\int_0^{2\pi}\left(-\cos(t)\text{sen}^2(t)+4\cos^2(t)+2t\right)dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\cos(t)\text{sen}^2(t)+2+2\cos(2t)+2t\right)dt=$$

$$=\left[-\frac{\text{sen}^3(t)}{3}+2t+\text{sen}(2t)+t^2\right]_0^{2\pi}=4\pi(1+\pi)$$

Integral de linha

- O integral apresentado em (2) pode ser generalizado para um qualquer campo vectorial, $\vec{h}(x,y,z)$, contínuo ao longo da curva *C*, sendo designado genericamente por *integral de linha*.

- Seja o campo vectorial

$$\vec{h}(x,y,z) = h_1(x,y,z)\vec{i} + h_2(x,y,z)\vec{j} + h_3(x,y,z)\vec{k}$$

que é contínuo ao longo da curva suave:

$$C \;:\; \vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k} \;,\; u \in [a,b] \tag{4}$$

O *integral de linha* de $\vec{h}$ ao longo da curva *C*, também designada por *caminho*, é definido por

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[\vec{h}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u)\right] du \tag{5}$$

desde que o integral do segundo membro em (5) exista.
Se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ o *caminho C* diz-se *fechado*, sendo utilizado o símbolo

$$\oint_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

para o integral de linha definido em (5), que, neste caso, é designado por *circulação*.

Exemplo 2: Determine o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{h}(x,y,z) = xy\vec{i} + \frac{1}{2}xyz\vec{j} + yz\vec{k}$$

ao longo do caminho

$$C \ : \ \vec{r}(u) = u\vec{i} + u^2\vec{j} + u^3\vec{k}$$

entre os pontos $P = (-1,1,-1)$ e $Q = (2,4,8)$.

Solução:

Sabendo que

$$\vec{r}'(u) = \vec{i} + 2u\vec{j} + 3u^2\vec{k}$$

$$\vec{h}(\vec{r}(u)) = u^3\vec{i} + \frac{u^6}{2}\vec{j} + u^5\vec{k}$$

$$\vec{h}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = u^3 + u^7 + 3u^7 = u^3 + 4u^7$$

e notando que $P = (-1,1,-1) = \vec{r}(-1)$ e $Q = (2,4,8) = \vec{r}(2)$, obtém-se para o integral de linha:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{2} (u^3 + 4u^7)du = \left[\frac{u^4}{4} + \frac{u^8}{2} \right]_{-1}^{2} = 4 + 128 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{525}{4}$$

Propriedades do integral de linha

- Na definição do integral de linha apresentada em (5) pressupõe-se que a curva C possui a parametrização expressa em (4).
  No entanto, para que o integral de linha tenha sentido, ele deverá ser *invariante* face à parametrização admitida para definir a curva C, desde que seja preservada a direcção considerada para o percurso da curva; ou seja, na definiçãodo integral de linha está envolvido o conceito de *curva orientada*.

Teorema 1: Seja $\vec{h}$ um campo vectorial contínuo ao longo de uma curva (orientada) suave, C, parametrizada por $\vec{r}(u)$, $u \in [a,b]$. Então, o integral de linha

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[\vec{h}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u) \right] du$$

é invariante face a qualquer mudança de parâmetro admitida na parametrização da curva, desde que se mantenha a direcção considerada para o seu percurso.

- Na propriedade seguinte mostra-se que o integral de linha é *linear*.

Teorema 2: Se $\vec{g}$ e $\vec{h}$ são campos vectoriais contínuos ao longo de uma curva suave, C, então:

$$\int_C \left(\alpha\vec{g}(\vec{r}) + \beta\vec{h}(\vec{r}) \right) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \beta \int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \;,\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- A propriedade imediata mostra que o integral de linha satisfaz a propriedade *aditiva* se for aplicado a uma curva suave por secções.

$$\int_C \left(\alpha\vec{f}(\vec{r}) + \beta\vec{g}(\vec{r}) \right) \cdot d\vec{r} = \alpha \int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \beta \int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \;,\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Teorema 3: Seja $\vec{f}$ um campo vectorial contínuo ao longo de uma curva suave por secções, C, formada por um número finito de curvas suaves adjacentes C_1, C_2,…, C_n. Então:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \cdots + \int_{C_n} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Exemplo 3: Calcule $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, em que $\vec{f}(x,y) = e^y\vec{i} - \text{sen}(\pi x)\vec{j}$ e C é o caminho percorrido no *sentido directo* (*positivo*), correspondente ao triângulo com vértices nos pontos $A = (2,0)$, $B = (0,2)$ e $C = (-2,0)$.

Solução:

A linha *C*, suave por secções, é formada pelos segmentos de recta orientados (o percurso é feito no *sentido directo*)

$$C_1 : \vec{r}(t) = A + t\overrightarrow{AB} = (2-2t)\vec{i} + 2t\vec{j}\ ,\ t \in [0,1]$$

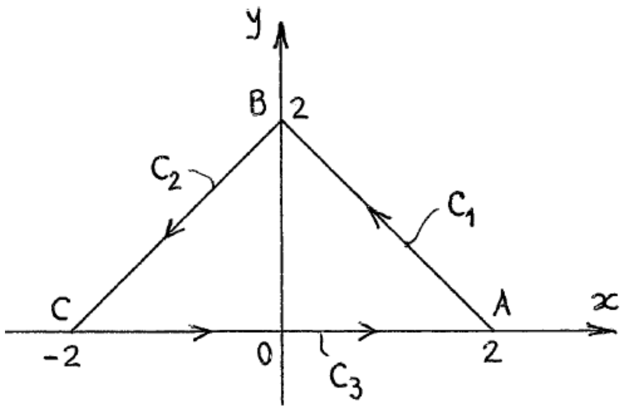
que liga o ponto *A* ao ponto *B*,

$$C_2 : \vec{r}(u) = B + u\overrightarrow{BC} = -2u\vec{i} + (2-2u)\vec{j}\ ,\ u \in [0,1]$$

que liga o ponto *B* ao ponto *C*, e

$$C_3 : \vec{r}(w) = C + w\overrightarrow{CA} = (-2+4w)\vec{i} + 0\vec{j}\ ,\ w \in [0,1]$$

que liga o ponto *C* ao ponto *A*.



O integral de linha correspondente à secção C_1 (percorrida no sentido directo) é:

$$\vec{r}'(t) = -2\vec{i} + 2\vec{j}\ , \qquad \vec{f}(\vec{r}(t)) = e^{2t}\vec{i} - \text{sen}[\pi(2-2t)]\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t) = -2e^{2t} - 2\text{sen}[\pi(2-2t)] = -2e^{2t} + 2\text{sen}[\pi(2t-2)]$$

$$\int_{C_1} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[-2e^{2t} + 2\text{sen}[\pi(2t-2)] \right] dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\pi e^{2t} + \cos[\pi(2t-2)] \right]_0^1 = 1 - e^2$$

O integral de linha correspondente à secção C_2 (percorrida no sentido directo) é:

$$\vec{r}\,'(u) = -2\vec{i} - 2\vec{j}\,, \qquad \vec{f}(\vec{r}(u)) = e^{2-2u}\vec{i} - \text{sen}(\pi(-2u))\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}\,'(u) = -2e^{2-2u} + 2\text{sen}(\pi(-2u)) = -2e^{2-2u} - 2\text{sen}(2\pi u)$$

$$\int_{C_2} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [-2e^{2-2u} - 2\text{sen}(2\pi u)]du = \frac{1}{\pi} \left[\pi e^{2-2u} + \cos(2\pi u) \right]_0^1 = 1 - e^2$$

O integral de linha correspondente à secção C_3 (percorrida no sentido directo) é:

$$\vec{r}\,'(w) = 4\vec{i} + 0\vec{j}\,, \qquad \vec{f}(\vec{r}(w)) = \vec{i} - \text{sen}[\pi(-2+4w)]\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(w)) \cdot \vec{r}\,'(w) = 4$$

$$\int_{C_3} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 4dw = 4$$

Finalmente, o integral de linha ao longo do caminho C (triângulo), *percorrido no sentido directo*, é dado pela soma dos três integrais de linha atrás obtidos:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 2(3 - e^2)$$

- Como foi salientado anteriormente, quando se integra ao longo de uma curva representada por uma dada parametrização, o processo de integração é realizado na direcção que está associada a esta parametrização.
  Contudo, se se optar por uma nova parametrização que implique o percurso da curva na direcção oposta, o integral de linha daqui resultante é simétrico do anterior.

Teorema 4: Considere-se um campo vectorial, $\vec{f}$, contínuo ao longo de uma curva suave C e sejam

$$\vec{r}(u)\ ,\ u \in I \quad \text{e} \quad \vec{q}(w)\ ,\ w \in I_1$$

duas parametrizações distintas para C. Se às duas parametrizações dadas corresponder o percurso de C em direcções opostas, então:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{f}(\vec{q}) \cdot d\vec{q}$$

Exemplo 4: Determine o integral de linha do campo vectorial $\vec{f}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ ao longo da semicircunferência, C, parametrizada por:

a) $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j}$, $t \in [0,\pi]$ (percorrida no *sentido directo*).

b) $\vec{q}(u) = u\vec{i} + \sqrt{1-u^2}\,\vec{j}$, $u \in [-1,1]$ (percorrida no *sentido retrógrado*, ou *negativo*).

Solução:

a) Sabendo que

$$\vec{r}\,'(t) = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}\ , \qquad \vec{f}(\vec{r}(t)) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = -\operatorname{sen}^2(t) - \cos^2(t) = -1$$

obtém-se para o integral de linha:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_0^{\pi} dt = -\pi$$

b) Neste caso, sabendo que

$$\vec{q}\,'(u) = \vec{i} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\vec{j}\ , \qquad \vec{f}(\vec{q}(u)) = \sqrt{1-u^2}\,\vec{i} - u\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{q}(u)) \cdot \vec{q}\,'(u) = \sqrt{1-u^2} + \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

resulta:

$$\int_C \vec{f}(\vec{q}) \cdot d\vec{q} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \qquad (7)$$

Considerando, em (7),

$$u = \cos\theta \ \text{ e } \ du = -\text{sen}(\theta)d\theta$$

obtém-se para o integral de linha:

$$\int_C \vec{f}(\vec{q}) \cdot d\vec{q} = -\int_{\arccos(-1)}^{\arccos(1)} \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \text{sen}(\theta)d\theta = -\int_{\arccos(-1)}^{\arccos(1)} d\theta =$$

$$= \arccos(-1) - \arccos(1) = \pi - 0 = \pi$$

Como era de prever

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{f}(\vec{q}) \cdot d\vec{q}$$

já que as parametrizações dadas para a semicircunferência correspondem ao seu percurso segundo direcções opostas.

- Pode-se, neste momento, exprimir o conceito de *trabalho* como um *integral de linha*. Se um ponto material percorre uma curva suave, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, sujeito a um campo de forças $\vec{f}$ ao longo de *C*, então o trabalho realizado é dado por:

$$W = \int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Teorema fundamental para o integral de linha

- Em geral, quando se integra um campo vectorial, $\vec{h}(x,y,z)$, entre um ponto *P* e um ponto *Q*, o valor do integral de linha *depende do caminho* escolhido para ligar esses pontos.

  Contudo, existe uma importante excepção: quando o *campo vectorial* $\vec{h}(x,y,z)$ *é gradiente*, isto é, se

$$\vec{h}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$$

  em que $\varphi(x,y,z)$ é um determinado campo escalar.

  Neste caso, o *integral de linha é independente do caminho* que liga os pontos *P* e *Q*, dependendo apenas da localização de *P* e de *Q* no espaço. Esta situação encontra-se devidamente justificada no teorema seguinte, que é designado por *teorema fundamental para o integral de linha*.

Teorema 1: Seja $C : \vec{r}(u)$, $u \in [a,b]$ uma curva suave que se inicia no ponto $A = \vec{r}(a)$ e termina no ponto $B = \vec{r}(b)$. Se o campo escalar $\varphi(x,y,z)$ é continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém *C*, então:

$$\int_C \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) \qquad (7)$$

- Convém notar que a expressão (7) se reduz a

$$\int_C \nabla \varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \tag{8}$$

se o *caminho C* for *fechado* (ou seja, se $B = A$).

Exemplo 5: Sejam o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = y^2\vec{i} + (2xy - e^{2y})\vec{j}$ e os pontos $R = (1,0)$ e $S = (0,1)$.

a) Verifique que $\vec{f}(x,y)$ é gradiente.

b) Calcule o integral de linha de $\vec{f}(x,y)$ entre *R* e *S*, recorrendo à definição de integral de linha.

c) Calcule o integral de linha de $\vec{f}(x,y)$ entre *R* e *S*, recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

Solução:

a) Seja $\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, com $P(x,y) = y^2$ e $Q(x,y) = 2xy - e^{2y}$. Uma vez que *P* e *Q* são continuamente diferenciáveis em qualquer ponto do plano *xOy* e

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

conclui-se que o campo vectorial $\vec{f}(x,y)$ é gradiente.

b) Dado que o *integral de linha é independente do caminho* que liga o ponto *R* ao ponto *S* (o *campo vectorial é gradiente*), podemos integrar, por exemplo, ao longo do segmento de recta, *C*, que liga *R* a *S*, isto é:

$$C : \vec{r}(u) = R + u\overrightarrow{RS} = (1-u)\vec{i} + u\vec{j} \ , \ u \in [0,1]$$

Sabendo que

$$\vec{r}\,'(u) = -\vec{i} + \vec{j} \ , \ \vec{f}(\vec{r}(u)) = u^2\vec{i} + [2u(1-u) - e^{2u}]\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}\,'(u) = -u^2 + 2u(1-u) - e^{2u} = 2u - 3u^2 - e^{2u}$$

obtém-se:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2u - 3u^2 - e^{2u})du = \left[u^2 - u^3 - \frac{1}{2}e^{2u} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2$$

c) Uma vez que o campo vectorial é gradiente, então:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(0,1) - \varphi(1,0)$$

Neste caso, é necessário obter o campo escalar $\varphi(x,y)$, tal que $\vec{f}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$. Assim, notando que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = y^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = 2xy - e^{2y}$$

recorrendo ao integral indefinido, resulta:

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)dx = xy^2 + \phi_1(y) + k_1 \qquad (9)$$

$$\varphi(x,y) = \int Q(x,y)dy = xy^2 - \frac{1}{2}e^{2y} + \phi_2(x) + k_2 \qquad (10)$$

Compatibilizando (9) e (10), obtém-se:

$$\varphi(x,y) = xy^2 - \frac{1}{2}e^{2y} + k$$

Independentemente do valor que se possa atribuir à constante *k*, o integral de linha toma o valor:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(0,1) - \varphi(1,0) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^2 + k\right) - \left(-\frac{1}{2} + k\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2$$

Exemplo 6: Obtenha o valor de $\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, em que

$$\vec{g}(x,y) = (3x^2y + xy^2 - 1)\vec{i} + (x^3 + x^2y + 4y^3)\vec{j}$$

e C é o quadrado com vértices em $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (1,1)$ e $C = (0,1)$, percorrido no sentido directo. Comece por verificar se o campo vectorial $\vec{g}(x,y)$ é gradiente.

Solução:

Verifique-se, então, se o campo vectorial é gradiente. Seja $\vec{g}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, tal que:

$$P(x,y) = 3x^2y + xy^2 - 1 \ \text{ e } \ Q(x,y) = x^3 + x^2y + 4y^3$$

Uma vez que P e Q são continuamente diferenciáveis em qualquer ponto do plano *xOy* e

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

conclui-se que o campo vectorial $\vec{g}(x,y)$ é gradiente, ou seja, é possível encontrar um campo escalar $\varphi(x,y)$, tal que $\vec{g}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$.
Nestas condições e tendo em atenção que o *caminho é fechado*, atendendo à propriedade (8) conclui-se que:

$$\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$

- O campo de forças que actua sobre um objecto em movimento diz-se *conservativo*, se for gradiente. Neste caso, o trabalho realizado entre dois pontos é independente do caminho, sendo nulo se o caminho for fechado.

- Quando um objecto passa num dado ponto com uma dada *energia cinética*, ele deverá retornar a esse ponto com exactamente a mesma energia cinética.
  À medida que um objecto se desloca num campo de forças conservativo, $\vec{f}$, tanto a sua *energia cinética*, K_E, como a sua *energia potencial*, U, podem variar; no entanto, a soma dos seus valores mantém-se constante em cada ponto da sua trajectória, $C : \vec{r}(t)$ (sendo t o instante de tempo). Esta constante é designada por *energia mecânica total*, E, ou seja:

$$K_E + U = E$$

Sabe-se que a energia cinética do objecto é

$$K_E = \frac{1}{2} m [v(t)]^2$$

em que m é a sua massa e $v(t)$ é o módulo do seu vector velocidade em cada instante.
Por outro lado, tem-se

$$\nabla U = -\vec{f}$$

pelo que

$$U(\vec{b}) - U(\vec{a}) = \int_C -\vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

é o trabalho necessário para mover o objecto entre os pontos $\vec{r} = \vec{a}$ e $\vec{r} = \vec{b}$ da sua trajectória.
A expressão

$$\frac{1}{2} m v^2 + U = E$$

traduz a chamada *lei de conservação da energia mecânica*.

Notação alternativa para o integral de linha

- Existe uma notação alternativa à apresentada em (6) para o integral de linha. Trata-se do integral de linha na *forma diferencial*.
  Tendo em atenção que

$$\vec{h}(x,y,z) = h_1(x,y,z)\vec{i} + h_2(x,y,z)\vec{j} + h_3(x,y,z)\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

então o integral de linha pode ser reescrito sob a *forma diferencial*:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C h_1 dx + h_2 dy + h_3 dz \qquad (11)$$

Exemplo 7: Calcule o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{h}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$$

ao longo da curva C : $y = x^2$ e $z = x^3$, entre os pontos $P = (-1,1,-1)$ e $Q = (1,1,1)$.

Solução:

Trata-se do exercício analisado no exemplo 2, estando agora a curva definida através de equações cartesianas (intersecção de duas superfícies). Neste caso, o integral de linha pode ser resolvido recorrendo à forma diferencial (11). Designe-se:

$$h_1(x,y,z) = xy \ , \ h_2(x,y,z) = yz \ , \ h_3(x,y,z) = xz$$

Relativamente à curva C tem-se:

$$y = x^2 \text{ e } z = x^3 \ , \ x \in [-1,1]$$

$$dy = 2xdx \quad \text{e} \quad dz = 3x^2 dx$$

Notando que

$$h_1dx + h_2dy + h_3dz = (xy)dx + (yz)2xdx + (xz)3x^2dx =$$

$$= (xx^2)dx + (x^2x^3)2xdx + (xx^3)3x^2dx = (x^3 + 5x^6)dx$$

obtém-se:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (x^3 + 5x^6)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{5x^7}{7} \right]_{-1}^{1} = \frac{27}{28} - \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{10}{7}$$

Exemplo 8: Pretende-se, neste caso, resolver o exercício do exemplo 4 recorrendo à forma diferencial (11).

Solução:

Designe-se:

$$g_1(x,y) = e^y \ , \ \ g_2(x,y) = -\text{sen}(\pi x)$$

A linha *C* é formada pelos três segmentos de recta

$$C_1 : y = -x + 1 \ , \ x \in [0,1] \ , \text{ em que } dy = -dx$$

percorrido no sentido oposto (de $x = 1$ para $x = 0$), ligando o ponto *A* ao ponto *B*,

$$C_2 : y = x + 1 \ , \ x \in [-1,0] \ , \text{ em que } dy = dx$$

percorrido no sentido oposto (de $x = 0$ para $x = -1$), ligando o ponto *B* ao ponto *C*, e

$$C_3 : y = 0 \ , \ x \in [-1,1] \ , \text{ em que } dy = 0dx$$

que liga o ponto *C* ao ponto *A*.

O integral de linha correspondente à secção C_1 é:

$$g_1dx + g_2dy = (e^{-x+1})dx + [-\text{sen}(\pi x)](-dx) = [e^{-x+1} + \text{sen}(\pi x)]dx$$

$$\int_{C_1} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_0^1 [e^{-x+1} + \text{sen}(\pi x)]dx = \left[e^{-x+1} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} - e - \frac{1}{\pi} = 1 - e - \frac{2}{\pi}$$

O integral de linha correspondente à secção C_2 é:

$$g_1dx + g_2dy = (e^{x+1})dx + [-\text{sen}(\pi x)]dx = [e^{x+1} - \text{sen}(\pi x)]dx$$

$$\int_{C_2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_{-1}^0 [e^{x+1} - \text{sen}(\pi x)]dx = \left[-e^{x+1} - \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_{-1}^0 =$$

$$= -e - \frac{1}{\pi} + 1 - \frac{1}{\pi} = 1 - e - \frac{2}{\pi}$$

O integral de linha correspondente à secção C_3 é:

$$g_1dx + g_2dy = (e^0)dx = dx$$

$$\int_{C_3} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 dx = 2$$

Então, o integral de linha ao longo da linha C (triângulo), *percorrida no sentido directo*, é a soma dos três integrais de linha anteriores:

$$\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} == 4 - 2e - \frac{4}{\pi}$$

O integral de linha em relação ao comprimento de arco

- Seja o $f(x,y,z)$ um campo escalar contínuo ao longo da curva suave:

$$C \;:\; \vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k} \;,\; u \in [a,b] \qquad (12)$$

Se $s(u)$ é o comprimento da curva entre os pontos $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(u)$, então (tal como vimos no capítulo 1):

$$s'(u) = \left\|\vec{r}'(u)\right\| = \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}$$

O integral de linha de $f(x,y,z)$ ao longo de C *em relação ao comprimento de arco s* é definido por:

$$\int_C f(\vec{r})ds = \int_a^b f(\vec{r}(u))s'(u)du$$

- Admita-se agora que a curva C, apresentada em (12), representa um arame fino (*curva material*), cuja *densidade mássica* tem o valor $\lambda = \lambda(\vec{r})$ em cada ponto da curva (neste caso a densidade mássica define uma massa por unidade de comprimento).
O *comprimento* do arame, L, é dado por:

$$L = \int_C ds$$

A *massa* do arame, M, tem o valor:

$$M = \int_C \lambda(\vec{r})ds$$

O *centro de massa*, $\vec{r}_M$, pode ser obtido através da equação vectorial:

$$\vec{r}_M = \frac{1}{M}\int_C \vec{r}\,\lambda(\vec{r})ds \tag{13}$$

Designando $\vec{r}_M = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$ a equação (13) conduz às seguintes equações escalares:

$$x_M = \frac{1}{M}\int_C x\lambda(\vec{r})ds \ , \ \ y_M = \frac{1}{M}\int_C y\lambda(\vec{r})ds \ , \ \ z_M = \frac{1}{M}\int_C z\lambda(\vec{r})ds$$

Finalmente, o momento de inércia do arame, *I*, em relação a um eixo é dado por

$$I = \int_C \lambda(\vec{r})\left[R(\vec{r})\right]^2 ds$$

em que $R(\vec{r})$ exprime a distância do ponto $\vec{r}(u)$ ao eixo em causa.

Exemplo 9: A densidade mássica de um arame semicircular de raio *a* é, em cada ponto, directamente proporcional à distância ao diâmetro que une as duas extremidades do arame. Determine:

a) A massa do arame.

b) As coordenadas do seu centro de massa.

c) O seu momento de inércia em relação ao diâmetro referido.

Solução:

a) O arame semicircular, apresentado na figura seguinte, pode ser parametrizado por

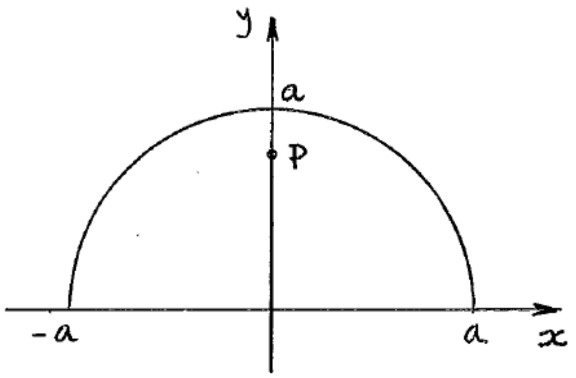
$$\vec{r}(u) = a\cos(u)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}(u)\vec{j} \ , \ u \in [0,\pi]$$

tendo-se admitido que o diâmetro do arame está situado no eixo dos *xx* do referencial.

Nestas condições, a função que define a densidade mássica em cada ponto do arame é

$$\lambda(x,y) = ky$$

em que k é uma constante positiva.



Sabendo que

$$\vec{r}'(u) = -a\mathrm{sen}(u)\vec{i} + a\cos(u)\vec{j}$$

$$s'(u) = \|\vec{r}'(u)\| = \sqrt{[-a\mathrm{sen}(u)]^2 + [a\cos(u)]^2} = a$$

então:

$$M = \int_C \lambda(\vec{r})ds = \int_C ky ds = \int_0^{\pi} ky(u)s'(u)du =$$

$$= k\int_0^{\pi}[a\mathrm{sen}(u)]a du = ka^2\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(u)du = 2ka^2 \qquad (14)$$

b) Por razões de simetria (geométrica e mássica) é evidente que a abcissa do centro de massa é $x_M = 0$.

Por outro lado, a ordenada do centro de massa é:

$$y_M = \frac{1}{M}\int_C y\lambda(\vec{r})ds = \frac{1}{2ka^2}\int_C ky^2 ds = \frac{1}{2a^2}\int_C [y(u)]^2 s'(u)du =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^{\pi}[a\mathrm{sen}(u)]^2 a\,du = \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2(u)du =$$

$$= \frac{a}{4}\int_0^{\pi}\left(1-\cos(2u)\right)du = \frac{a\pi}{4}$$

O centro de massa, P, situa-se no eixo de simetria do arame (eixo dos yy), à distância $a\pi/4$ do diâmetro (ver figura anterior); neste caso, o centro de massa está situado num ponto exterior ao arame.

c) O momento de inércia do arame em relação ao diâmetro tem o valor

$$I = \int_C \lambda(\vec{r})\left[R(\vec{r})\right]^2 ds = \int_C (ky)y^2 ds = k\int_C [y(u)]^3 s'(u)du =$$

$$= k\int_0^{\pi}[a\mathrm{sen}(u)]^3 a\,du = ka^4\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^3(u)du =$$

$$= ka^4\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(u)\left(1-\cos^2(u)\right)du =$$

$$= ka^4\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(u)du - ka^4\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(u)\cos^2(u)du =$$

$$= 2ka^4 + ka^4\left[\frac{\cos^3(u)}{3}\right]_0^{\pi} = ka^4\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4ka^4}{3}$$

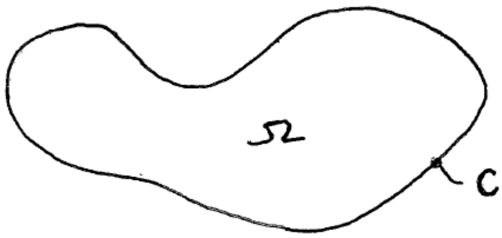
ou seja, atendendo a (14):

$$I = \frac{2}{3}Ma^2$$

Teorema de Green

- O cálculo do integral de linha a partir do teorema de Green pode ser aplicado a regiões planas limitadas por *curvas de Jordan* suaves por secções. Trata-se de curvas planas que são fechadas e simples, isto é, não se intersectam a si próprias. Por exemplo, são curvas de Jordan, circunferências, elipses, triângulos e rectângulos; o mesmo já não acontece com curvas em forma de um oito.

- Chama-se *região de Jordan* à região fechada do plano, Ω, limitada por uma curva de Jordan, *C*, incluindo a sua fronteira.



- O teorema seguinte, chamado *teorema de Green*, exprime o integral de linha ao longo de uma curva de Jordan, *C*, através de um integral duplo sobre a região de Jordan, Ω, limitada por *C*.

Teorema 2: Seja Ω a região de Jordan limitada pela curva de Jordan suave por secções, *C*. Se *P* e *Q* são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém Ω, então

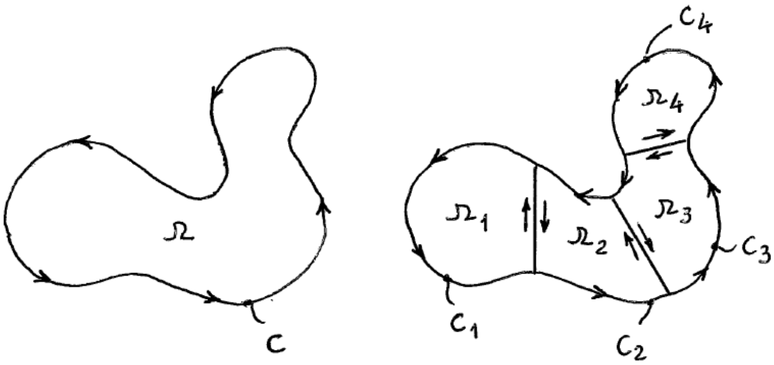
$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_{C}P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (14)$$

onde o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva *C*, percorrida no sentido directo.

- Se o campo vectorial $\vec{f}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ *é gradiente*, então o o integral de linha (14) é nulo, já que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=0$$

- Atente-se na figura seguinte, onde a região de Jordan Ω, limitada pela curva *C*, foi dividida em quatro regiões de Jordan Ω_1, Ω_2, Ω_3 e Ω_4, limitadas, respectivamente, pelas curvas C_1, C_2, C_3 e C_4.



Neste caso, tem-se:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\sum_{i=1}^{4}\iint_{\Omega_i}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_{C_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_{C_2}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_3}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_{C_3}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_4}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_{C_4}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

Exemplo 10: Calcule o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = (3x^2 + y)\vec{i} + (2x + y^3)\vec{j}$$

ao longo da circunferência $C\ :\ x^2 + y^2 = a^2$, percorrida no sentido directo.

a) Recorrendo ao teorema de Green.

b) Calculando o integral de linha.

Solução:

a) Seja Ω o círculo fechado $0 \le x^2 + y^2 \le a^2$. Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1\ ,\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2\ \ \text{e}\ \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$$

da aplicação do teorema de Green resulta

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega dxdy = A(\Omega) = \pi a^2$$

onde $A(\Omega) = a^2$ é a área da região Ω.

b) A curva *C*, percorrida no sentido directo, pode ser parametrizada por:

$$\vec{r}(\theta) = a\cos(\theta)\vec{i} + a\text{sen}(\theta)\vec{j}\ ,\ \ \theta \in [0, 2\pi]$$

Considere-se:

$$\vec{r}\,'(\theta) = -a\text{sen}(\theta)\vec{i} + a\cos(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(\theta)) = [3a^2\cos^2(\theta) + a\text{sen}(\theta)]\vec{i} + [2a\cos(\theta) + a^3\text{sen}^3(\theta)]\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}\,'(\theta) = -3a^3\text{sen}(\theta)\cos^2(\theta) - a^2\text{sen}^2(\theta) + 2a^2\cos^2(\theta) +$$

$$+a^4\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta)$$

Sabendo que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta)\cos^2(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [1-\cos(2\theta)]d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [1+\cos(2\theta)]d\theta = \pi$$

obtém-se:

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}'(\theta)d\theta = -\pi a^2 + 2\pi a^2 = \pi a^2$$

Neste exemplo é evidente a vantagem da utilização do teorema de Green na obtenção do resultado pretendido.

Exemplo 11: Utilize o teorema de Green para calcular o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = (1+10xy+y^2)\vec{i} + (6xy+5x^2)\vec{j}$$

ao longo do quadrado, C, com vértices nos pontos $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a) e $(0,a)$, percorrido no sentido retrógrado.

Solução:

Seja Ω a região quadrada limitada por C. Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 10x + 2y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 6y + 10x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 4y$$

da aplicação do teorema de Green resulta

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -4\iint_\Omega y dx dy = -4\bar{y}A(\Omega) = -4\left(\frac{a}{2}\right)a^2 = -2a^3$$

onde $\bar{y} = a/2$ é a ordenada do centroide da região Ω e $A(\Omega) = a^2$ é a sua área.

Exemplo 12: Utilize o teorema de Green para calcular o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = e^x \operatorname{sen}(y)\vec{i} + e^x \cos(y)\vec{j} \qquad (15)$$

ao longo da linha, C, que é a fronteira da região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, percorrida no sentido retrógrado.

Solução:

Seja Ω a região limitada pela curva fechada C. Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = e^x \cos(y) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$$

da aplicação do teorema de Green resulta:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\iint_\Omega 0 dx dy = 0$$

Neste caso, o campo vectorial (15) é gradiente.
A resolução deste problema recorrendo ao integral de linha exige um esforço de cálculo que é substancialmente superior ao envolvido na presente resolução.

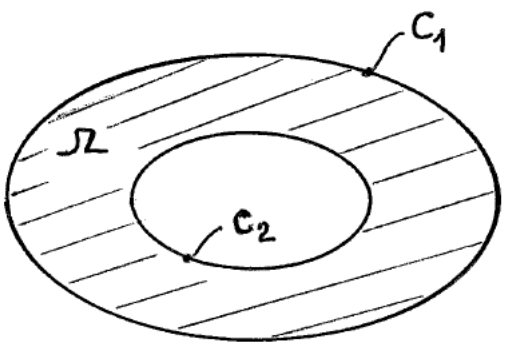
- O teorema de Green permite, ainda, calcular a área de uma região de Jordan, integrando ao longo da fronteira dessa região.

Teorema 3: Seja a região de Jordan, Ω, limitada pela curva de Jordan suave por secções, C. Então a área de Ω, $A(\Omega)$, tem o valor de qualquer um dos seguintes integrais de linha:

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dxdy = \oint_{C} -ydx = \oint_{C} xdy = \frac{1}{2}\oint_{C} -ydx + xdy$$

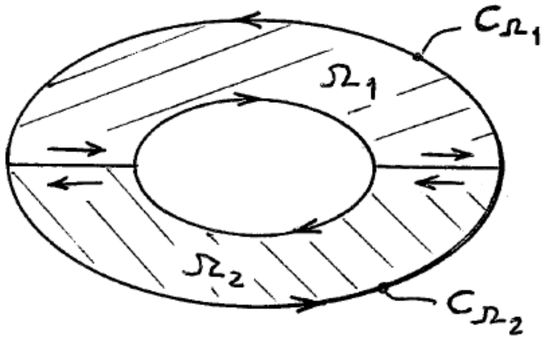
Teorema de Green: regiões multiplamente conexas

- Na figura seguinte apresenta-se uma região anelar, Ω, que não é uma região de Jordan: a fronteira é formada por duas curvas de Jordan, C_1 e C_2.



Neste caso não é possível aplicar directamente o teorema de Green.

- Contudo, se Ω for dividida em duas subregiões de Jordan, Ω_1 e Ω_2,



já é possível aplicar o teorema de Green a cada uma dessas duas subregiões.
Designando, respectivamente, por C_{Ω_1} e C_{Ω_2} as curvas de Jordan que limitam as subregiões Ω_1 e Ω_2, sabe-se que:

$$\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy = \oint_{C_{\Omega_1}} Pdx + Qdy$$

$$\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy = \oint_{C_{\Omega_2}} Pdx + Qdy$$

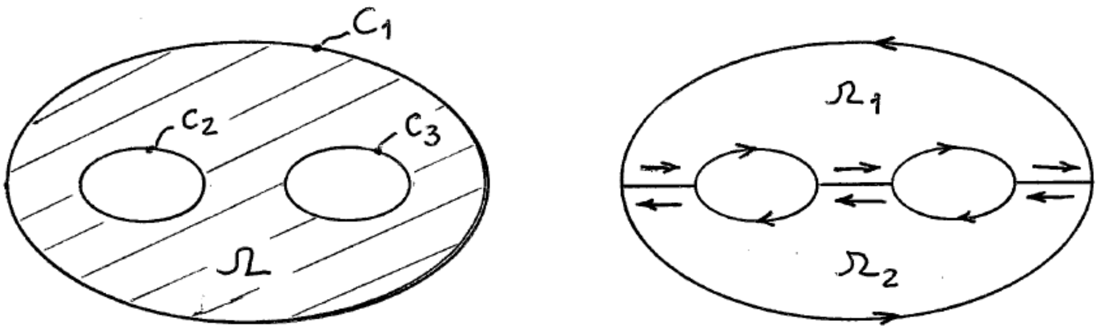
Considerando, agora, os integrais duplos, tem-se:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy = \iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy + \iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy$$

No entanto, quando se somam os dois integrais de linha, as contribuições das secções que são comuns às linhas C_{Ω_1} e C_{Ω_2} deverão se anular, pelo que a *linha* C_1 deverá ser *percorrida no sentido directo*, enquanto a *linha* C_2 deverá ser *percorrida no sentido retrógrado*; então:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy + \oint_{C_2} Pdx + Qdy$$

- Considere-se, por exemplo, a região Ω da figura seguinte, limitada por três curvas de Jordan: C_2 e C_3, cada uma delas exterior à outra, mas ambas interiores a C_1.



Neste caso, a aplicação do teorema de Green conduz a:

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy + \oint_{C_2} Pdx + Qdy +$$

$$+ \oint_{C_3} Pdx + Qdy$$

- Generalizando, é possível escrever para este tipo de configurações:

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dxdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy + \sum_{i=2}^{n} \oint_{C_i} Pdx + Qdy$$