Prova sem consulta. Duração: 2h. 2ª Prova de Avaliação

---

* **Todas as folhas devem ser identificadas com o <u>nome completo</u>. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;**
* **A <u>entrega da prova e a desistência</u> só serão possíveis após 1 hora do início da prova;**
* **Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;**
* **Resolva cada um dos <u>dois grupos</u> utilizando <u>folhas de capa distintas</u>.**

GRUPO I

1. [**3,6**] Considere a curva, *C*, de interseção das superfícies $z = 8 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva *C*.

b) Calcule o integral de linha $\int_C x\,dx - y\,dy + xyz\,dz$.

2. [**4,4**] Considere o campo vetorial:

$$\vec{f}(x,y) = \left(\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-\alpha+1} \cos(x^\beta y), x^\alpha \cos(x^\beta y)\right),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}.$$

a) Considerando os valores $\alpha = 1$ e $\beta = 0$, calcule, usando o teorema de Green, o integral de linha $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, sendo *C* a curva, percorrida no sentido retrógrado, ao longo do triângulo com vértices nos pontos $(0,0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Mostre que, se $\alpha = \beta$, $\vec{f}$ é um campo gradiente e determine o seu potencial, φ, isto é, $\vec{f} = \nabla\varphi$, em função do parâmetro α.

c) Admitindo que $\alpha = \beta$, calcule o integral de linha $\int_L \vec{f} \cdot d\vec{r}$, em que *L* é uma curva cujo ponto inicial é $P = (0,1)$ e o ponto final é $Q = \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$.

3. [**3,0**] Considere a superfície, *S*, definida por:

$$z = 1 + 2y^2,\ 0 \le x \le 4,\ -\sqrt{2} \le y \le 1.$$

Faça um esboço da superfície e calcule o integral $\iint_S y\,dS$.

....***continua no verso***

GRUPO II

4. [**3,0**] Considere o campo vetorial:

$$\vec{g}(x,y,z)=(x+1,y-1,2z-1).$$

Determine o fluxo do campo vetorial $\vec{g}$ no sentido de dentro para fora da superfície, *S*, definida por $z=2x^2+2y^2$, $z\leq 4$.

5. [**4,0**] Seja o integral triplo em coordenadas cilíndricas $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+r^2}(2r)\,dz\,dr\,d\theta$.

a) Calcule o seu valor.

b) Esboce o domínio de integração.

c) Reescreva-o em coordenadas cartesianas.

6. [**2,0**] Sejam $f(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ campos escalares com derivadas contínuas até à segunda ordem. Usando as definições do gradiente e do rotacional, mostre que:

$$\nabla\times\left(f\nabla g\right)=rot\left(f\nabla g\right)=(\nabla f)\times(\nabla g)$$