

- * Todas as folhas devem ser identificadas com o nome completo. Justifique adequadamente todos os cálculos que efetuar;
- * A entrega da prova e a desistência só serão possíveis após 1 hora do início da prova;
- * Não se pode utilizar telemóveis, máquinas de calcular gráficas e microcomputadores;
- * Resolva cada um dos dois grupos utilizando folhas de capa distintas.

GRUPO I

1. [3,6] Considere o campo vetorial $\vec{f}(x, y, z) = (y, z + y, -y)$ e a curva, C , de interseção das superfícies $y^2 + z^2 = 1$ e $x = y$.
- a) Obtenha uma parametrização para a curva C .
- b) Calcule o integral de linha $\int_C y \, dx + (z + y) \, dy - y \, dz$.

2. [4,4] Considere a função escalar $\varphi(x, y) = xy^2 + 2x + 3y$ e o campo vetorial:

$$\vec{f}(x, y) = \left(-\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Seja C a curva de fronteira da região do 1º quadrante delimitada pelo eixo dos yy e pelas linhas $y = x^2$ e $y = 2 - x$

- a) Considerando os valores $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, calcule, usando o teorema de Green, o integral de linha $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$.
- b) Admitindo que $\alpha = \beta$, determine todos os campos vetoriais, \vec{g} , que são perpendiculares a \vec{f} .
- c) Considerando um dos campos vetoriais não nulos, \vec{g} , obtidos na alínea anterior, calcule o integral de linha $\int_L \vec{g} \cdot d\vec{r}$, em que L é uma curva cujo ponto inicial é $O = (0, 0)$ e o ponto final é um dos outros vértices da curva C .

3. [3,0] Seja a superfície, S , definida por: $z = 4 - \frac{x^2 + y^2}{4}$, $0 \leq z \leq 3$.

Faça um esboço da superfície e calcule a sua área.

.....*continua no verso*

GRUPO II

4. [3,0] Considere o campo vetorial:

$$\vec{g}(x, y, z) = (xy, -yz, x).$$

Calcule o fluxo do campo vetorial \vec{g} através da superfície, S , $x=1$ limitada por $y^2 + z^2 = 1$.

5. [4,0] Seja o integral triplo em coordenadas cartesianas:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x} dz dy dx.$$

- Esboce o domínio de integração, V .
 - Reescreva-o em coordenadas cilíndricas, identificando analiticamente o domínio de integração.
 - Calcule o seu valor e indique o significado geométrico do resultado.
6. [2,0] Considere o campo de forças conservativo \vec{f} definido em $D \subset \mathbb{R}^3$ e seja C uma curva suave contida em D e parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Mostre que o trabalho realizado por \vec{f} entre os pontos $P = \vec{r}(a)$ e $Q = \vec{r}(b)$ depende apenas da localização destes pontos no espaço.