FUNÇÕES ESCALARES

Introdução

- Seja *D* um subconjunto não vazio do plano *xOy*. A função que associa um número real $f(x,y)$ a cada ponto $(x,y) \in D$ chama-se *função real a duas variáveis*. O conjunto *D* é designado por *domínio* de *f*, enquanto o conjunto de todos os valores $f(x,y)$ chama-se *contradomínio* de *f*.

Exemplo 1: A função

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

tem como domínio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 < 1\right\}$$

e como contradomínio $D' = (1,+\infty)$. O domínio é o conjunto dos pontos interiores à circunferência com a equação $x^2+y^2=1$.

- Seja *D* um subconjunto não vazio do espaço tridimensional. A função que associa um número real $f(x,y,z)$ a cada ponto $(x,y,z) \in D$ chama-se *função real a três variáveis*. O conjunto *D* é designado por *domínio* de *f*, enquanto o conjunto de todos os valores $f(x,y,z)$ chama-se *contradomínio* de *f*.

Exemplo 2: A função

$$f(x,y,z) = \cos\left(\frac{1}{x+y-z}\right)$$

tem como domínio

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \neq x+y\right\}$$

e como contradomínio $D' = [-1,1]$. O domínio é o conjunto dos pontos que não pertencem ao plano com a equação $x+y-z=0$.

Exemplo 3: A magnitude da força gravitacional exercida por um corpo de massa *M* situado na origem sobre um corpo de massa *m* situado no ponto (x,y,z) é dada por

$$F(x,y,z) = \frac{GmM}{x^2+y^2+z^2}$$

em que *G* é a constante gravitacional universal. O seu domínio é

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y,z) \neq (0,0,0)\right\}$$

e o contradomínio é $D' = (0,+\infty)$.

Exemplo 4: A função

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2-y^2}}$$

tem como domínio

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -2|x| < y < 2|x|\right\}$$

e contradomínio $D' = (0,+\infty)$.

- Sempre que o domínio de uma função a várias variáveis não for dado de forma explícita, considera-se que ele será formado pelo conjunto máximo dos pontos onde a função está definida.

Exemplo 5: No caso da função

$$f(x,y)=\frac{1}{x-y}$$

admite-se que o domínio é o conjunto dos pontos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tais que $y\neq x$; trata-se dos pontos do plano que não pertencem à recta com a equação $y=x$. O seu contradomínio é:

$$D'=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

Exemplo 6: No caso da função

$$f(x,y,z)=\text{arcsen}(x+y+z)$$

considera-se que o domínio é o conjunto dos pontos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tais que $-1\leq x+y+z\leq 1$; trata-se dos pontos do espaço situados na placa que é limitada pelos planos (estritamente paralelos) com as equações

$$x+y+z=-1 \text{ e } x+y+z=1.$$

O seu contradomínio é:

$$D'=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Superfícies quádricas

- As superfícies do espaço tridimensional definidas por uma equação do segundo grau da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Hx + Iy + Jz + K = 0$$

onde $A, B, C, \ldots, K$ são constantes (A, B, C não são todas nulas), chamam-se *superfícies quádricas*.
É possível eliminar os termos xy, xz, yz na equação anterior recorrendo a uma adequada mudança de coordenadas (envolvendo as noções de valores próprios e vectores próprios de uma matriz). Assim, apenas se considerará equações da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + H = 0$$

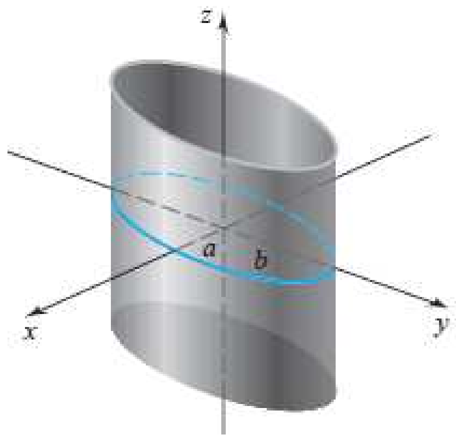
As superfícies quádricas podem ser classificadas em nove tipos distintos:
i) *Cilindro elíptico*;
ii) *Cilindro parabólico*;
iii) *Cilindro hiperbólico*;
iv) *Elipsoide*;
v) *Hiperboloide de uma folha*;
vi) *Hiperboloide de duas folhas*;
vii) *Cone elíptico*;
viii) *Paraboloide elíptico*;
ix) *Paraboloide hiperbólico*.

- A análise das superfícies quádricas inside sobre um conjunto de propriedades que as caracterizam, nomeadamente:
  i) Os *pontos de intersecção* com os eixos coordenados;
  ii) Os *traços*, que são as intersecções com os planos coordenados;
  iii) As *secções*, que são as intersecções com planos em geral;
  iv) O *centro* (algumas possuem um centro; outras não);
  v) *Simetria* (em relação a eixos ou a planos);
  vi) Se são *limitadas* ou *não limitadas*.

- Seja a curva *C* situada no plano *M*. O conjunto dos pontos situados nas linhas que passam em *C* e são perpendiculares a *M* definem uma superfície que é designada por *superfície cilíndrica recta*; a curva *C* chama-se *directriz*, enquanto as linhas referidas designam-se por *geratrizes* da superfície. Se as geratrizes não forem perpendiculares ao plano M, a superfície chama-se *superfície cilíndrica oblíqua*.

Exemplo 7: *Cilindro elíptico* (*recto*):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



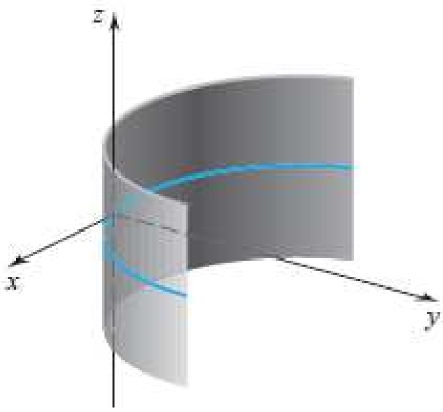
A superfície é formada pelas *geratrizes* que passam na elipse (*directriz*)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

e são perpendiculares ao plano coordenado *xOy*. Se $a=b$ obtém-se uma *superfície cilíndrica circular* (*recta*).

Exemplo 8: *Cilindro parabólico* (*recto*):

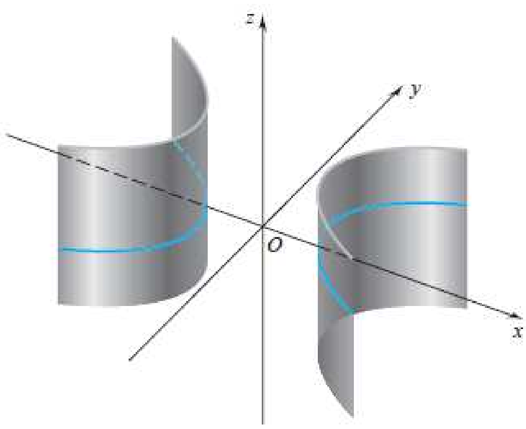
$$x^2 = 4cy$$



Trata-se de uma superfície que é formada pelas *geratrizes* que passam na parábola (*directriz*) $x^2 = 4cy$ e são perpendiculares ao plano coordenado *xOy*.

Exemplo 9: *Cilindro hiperbólico* (*recto*):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



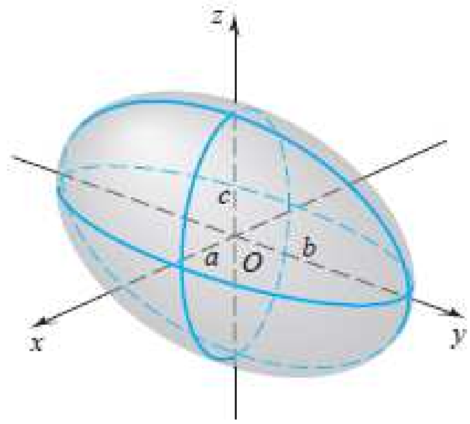
A superfície divide-se em duas regiões, cada uma delas gerada por um dos ramos da hipérbole (*directriz*):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

As *geratrizes* passam na hipérbole e são perpendiculares ao plano coordenado *xOy*.

Exemplo 10: *Elipsoide*:

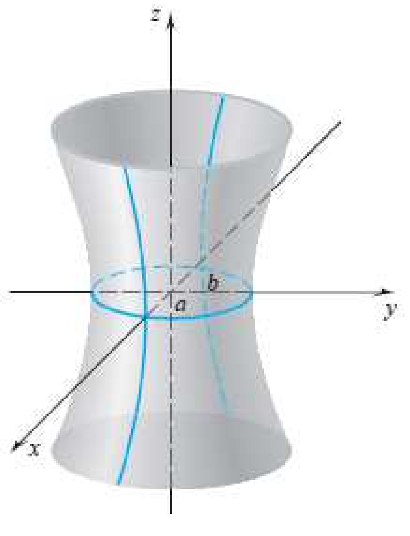
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



Os pontos onde a superfície intersecta os eixos coordenados são os *vértices* do elipsoide. Os valores *a*, *b* e *c* chamam-se *semieixos*. Se dois dos semieixos forem iguais obtém-se um *elipsoide de revolução*; se $a=b=c$ obtém-se uma *superfície esférica*.

Exemplo 11: *Hiperboloide de uma folha*:

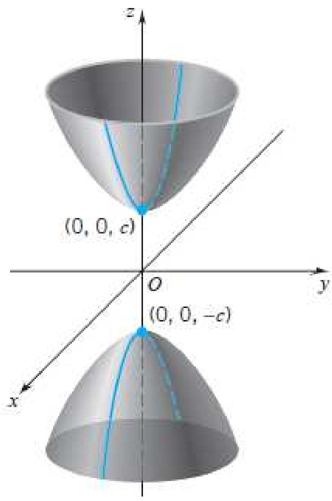
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



Se $a=b$ obtém-se um *hiperboloide* (*de uma folha*) *de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado *xOy* são círculos.

Exemplo 12: *Hiperboloide de duas folhas*:

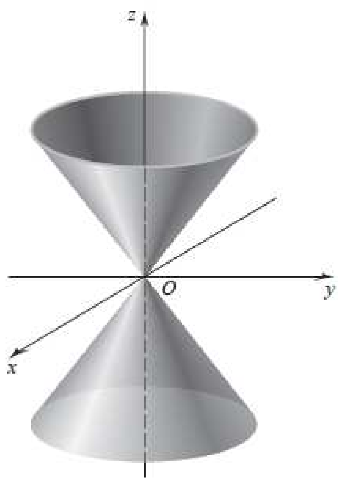
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



A superfície intersecta os eixos coordenados em dois pontos que são os seus *vértices*. Se $a=b$ obtém-se um *hiperboloide* (*de duas folhas*) *de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado *xOy* são círculos.

Exemplo 13: *Cone elíptico*:

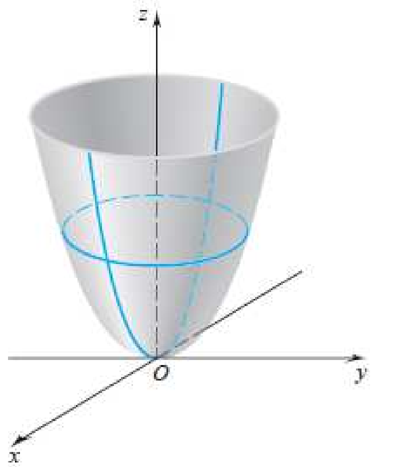
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



A superfície intersecta os eixos coordenados na origem. A superfície divide-se em duas regiões que se designam por *folhas do cone*. Se $a=b$ obtém-se um *cone circular* (*de duas folhas*) ou, simplesmente, um *cone*; as secções paralelas ao plano coordenado *xOy* são círculos.

Exemplo 14: *Paraboloide elíptico*:

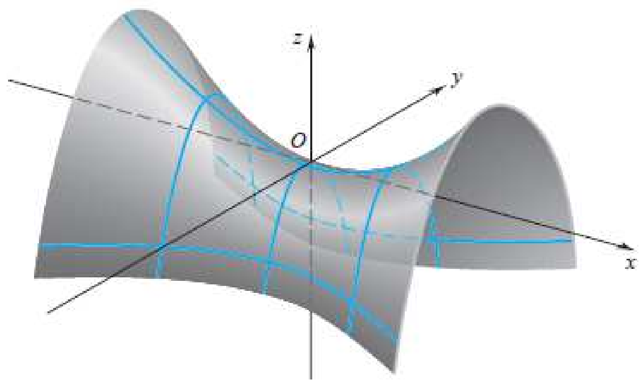
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$



A origem é o *vértice* do paraboloide. Se $a=b$ obtém-se um *paraboloide de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado *xOy* são círculos.

Exemplo 15: *Paraboloide hiperbólico*:

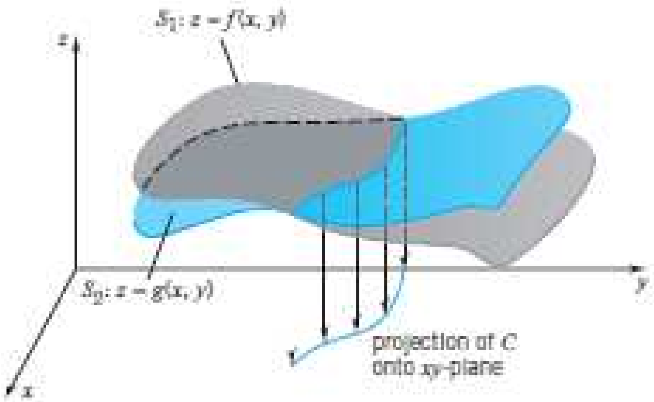
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$



A origem é um *mínimo* para o *traço* da superfície no plano *xOz* e um *máximo* para o *traço* no plano *yOz*. Como se verá oportunamente um ponto nestas condições é designado por *ponto de sela da função* $z=f(x,y)$.

Projeções

- Seja C a curva do espaço definida pela intersecção das superfícies $S_1 \ : \ z = f(x,y)$ e $S_2 \ : \ z = g(x,y)$.



- A curva C é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) tais que:

$$z = f(x,y) \text{ e } z = g(x,y)$$

- O conjunto de todos os pontos (x,y,z) tais que

$$f(x,y) = g(x,y)$$

  é a superfície cilíndrica vertical que passa através da curva C.

- O conjunto de todos os pontos $(x,y,0)$ tais que

$$f(x,y) = g(x,y)$$

  é designada por *projecção de C no plano xOy*; trata-se da curva no plano xOy que se situa imediatamente abaixo da curva C.

Exemplo 16: Seja a curva *C* definida pela intersecção do plano $z = 2y + 3$ com o *paraboloide de revolução* $z = x^2 + y^2$; esta superfície pode ser gerada rodando a parábola $z = x^2$ em torno do eixo dos *zz*.
A projecção de *C* no plano xOy é o conjunto de todos os pontos $(x, y, 0)$ tais que

$$x^2 + y^2 = 2y + 3$$

ou seja:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4$$

Trata-se de uma circunferência de raio 2 e com centro no ponto $(0,1,0)$.

Curvas de nível

- Seja *f* uma função real a duas variáveis definida num subconjunto *D* do plano *xOy*. Chama-se *gráfico de f* ao conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que:

$$z = f(x, y) \ , \ (x, y) \in D$$

Exemplo 17: O domínio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é todo o plano *xOy*. O gráfico de *f* é o *paraboloide de revolução*:

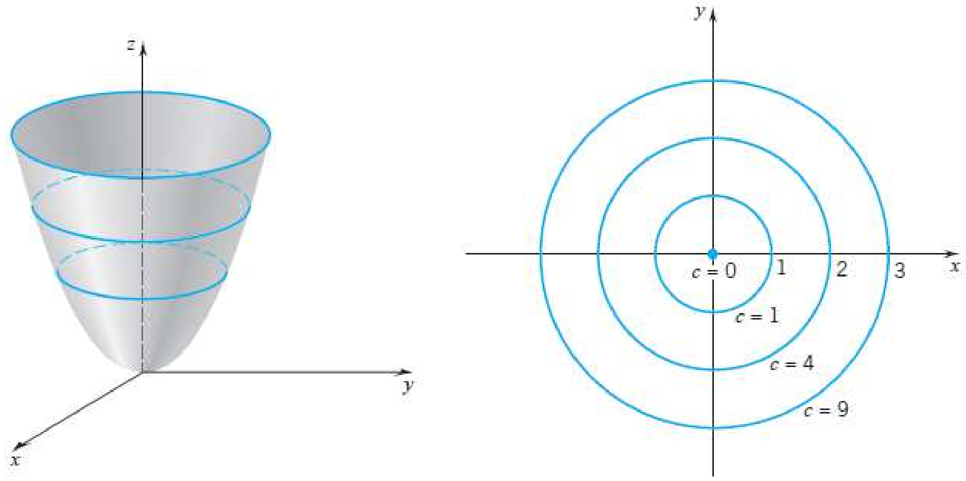
$$z = x^2 + y^2$$

- Se c pertence ao contradomínio da função $f(x,y)$, $(x,y) \in D$, então é possível traçar a curva $f(x,y) = c$, que é designada por *curva de nível de f*. Esta curva pode ser obtida através da intersecção do gráfico de *f* com o plano horizontal $z = c$, sendo depois projectada no plano *xOy*.

- As curvas de nível permitem interpretar gráficos de funções reais a duas variáveis que são, em muitos casos, difíceis de visualizar e de desenhar; mesmo quando desenhados, são difíceis de interpretar.

Exemplo 18: No caso da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ do exemplo 17, as suas curvas de nível são as circunferências centradas na origem:

$$x^2 + y^2 = c \ , \ c \geq 0$$



A função $f(x,y)$ toma o valor c em todos os pontos do plano *xOy* situados na circunferência de raio $\sqrt{c}$ e centrada na origem; na origem obtém-se $f(x,y) = 0$.

Superfícies de nível

- Sendo o desenho de funções reais a duas variáveis, muitas vezes, complicado, o desenho de uma função real a três variáveis é impossível. No entanto, é possível visualizar o comportamento de uma função $w = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in D$ analisando as chamadas *superfícies de nível de f*. São subconjuntos do domínio de *f* com equações da forma $f(x,y,z) = c$, em que *c* pertence ao contradomínio da função *f*.

Exemplo 19: As superfícies de nível da função $f(x,y,z) = Ax + By + Cz$ são os planos estritamente paralelos $Ax + By + Cz = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 20: As superfícies de nível da função $g(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ são as superfícies esféricas centradas na origem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \ , \ c \geq 0$$

Derivadas parciais: funções reais a duas variáveis

- Seja *f* uma função real a duas variáveis *x*, *y*. As *derivadas parciais de f em relação a x* e *em relação a y* são, respectivamente, as funções f_x e f_y , definidas por

$$f_x(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$f_y(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

desde que estes limites existam.

- Neste caso, $f_x(x_0,y_0)$ define a razão da variação de $f(x,y_0)$ em relação a x em $x = x_0$, e $f_y(x_0,y_0)$ define a razão da variação de $f(x_0,y)$ em relação a y em $y = y_0$.

Exemplo 21: Em relação à função

$$f(x,y) = e^{xy} + \ln(x^2 + y)$$

tem-se:

$$f_x(x,y) = ye^{xy} + \frac{2x}{x^2 + y} \qquad\qquad f_y(x,y) = xe^{xy} + \frac{1}{x^2 + y}$$

O número

$$f_x(2,1) = e^2 + \frac{4}{5}$$

representa a razão da variação em relação a x da função:

$$f(x,1) = e^x + \ln(x^2 + 1) \text{ em } x = 2$$

O número

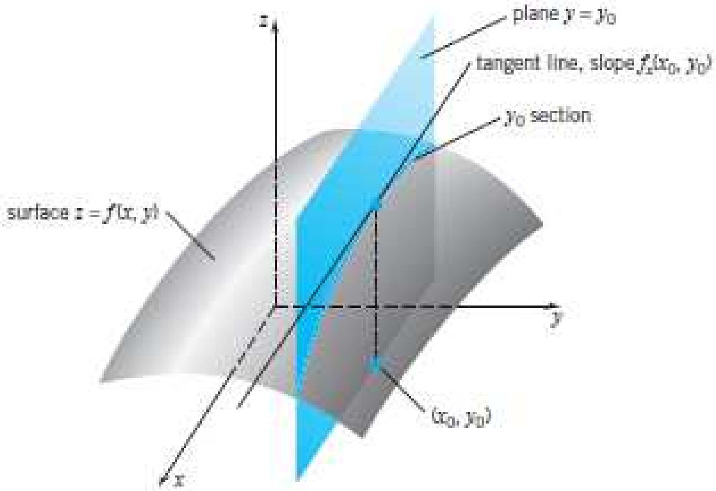
$$f_y(2,1) = 2e^2 + \frac{1}{5}$$

representa a razão da variação em relação a y da função:

$$f(2,y) = e^{2y} + \ln(4 + y) \text{ em } y = 1$$

- Tal como acontece no caso de uma função real a uma variável, os valores das derivadas parciais $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$ podem ser interpretados geometricamente.

- Seja a superfície $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Intersectando-a com o plano $y = y_0$ (paralelo ao plano *xOz*) obtém-se uma curva, que é a secção y_0 da superfície.



A secção y_0 da superfície é o gráfico da função:

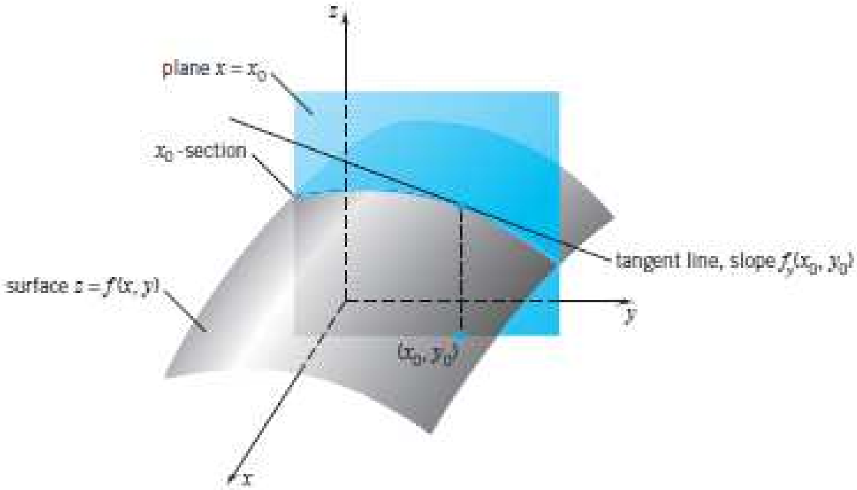
$$g(x) = f(x,y_0)$$

Derivando em ordem a *x* obtém-se

$$g'(x) = f_x(x,y_0)$$

e, em particular, $g'(x_0) = f_x(x_0,y_0)$. Assim, $f_x(x_0,y_0)$ é o declive da secção y_0 da superfície no ponto de coordenadas $\left(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\right)$.

- Seja a superfície $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Intersectando-a com o plano $x = x_0$ (paralelo ao plano *yOz*) obtém-se uma curva, que é a secção x_0 da superfície.



A secção x_0 da superfície é o gráfico da função:

$$h(y) = f(x_0, y)$$

Derivando em ordem a *y* obtém-se

$$h'(y) = f_y(x_0, y)$$

e, em particular, $h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$. Assim, $f_y(x_0, y_0)$ é o declive da secção x_0 da superfície no ponto de coordenadas $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$.

- Usando a notação de Leibniz pode-se escrever:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \text{ e } f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Derivadas parciais: funções reais a três variáveis

- Seja *f* uma função real a três variáveis *x*, *y*, *z*. As *derivadas parciais de f em relação a x*, *em relação a y* e *em relação a z* são, respectivamente, as funções f_x, f_y e f_z, definidas por

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$$

$$f_y(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h}$$

$$f_z(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h}$$

desde que estes limites existam.

- Neste caso:

i) $f_x(x_0,y_0,z_0)$ define a razão da variação de $f(x,y_0,z_0)$ em relação a x em $x = x_0$;

ii) $f_y(x_0,y_0,z_0)$ define a razão da variação de $f(x_0,y,z_0)$ em relação a y em $y = y_0$;

iii) $f_z(x_0,y_0,z_0)$ define a razão da variação de $f(x_0,y_0,z)$ em relação a z em $z = z_0$.

Exemplo 22: Em relação à função

$$g(x,y,z) = x^2 e^{y/z}$$

tem-se:

$$g_x(x,y,z) = 2xe^{y/z} \qquad g_y(x,y,z) = \frac{x^2}{z} e^{y/z}$$

$$g_z(x,y,z) = -\frac{x^2 y}{z^2} e^{y/z}$$

Em particular:

$$g_x(-1,2,1) = -2e^2, \qquad g_y(-1,2,1) = e^2, \qquad g_z(-1,2,1) = -2e^2$$

- Usando a notação de Leibniz pode-se escrever:

$$f_x(x,y,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \qquad f_y(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z),$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$$

Vizinhança de um ponto

- A *vizinhança* de um número real x_0 é um conjunto da forma $\{x \ : \ |x - x_0| < \delta\}$, com $\delta > 0$; trata-se do intervalo aberto centrado em x_0:

$$\left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right)$$

  Se retirarmos x_0 deste conjunto, obtém-se:

$$\left(x_0 - \delta, x_0\right) \cup \left(x_0, x_0 + \delta\right)$$

- A *vizinhança* de um ponto $\vec{x}_0$ é um conjunto da forma $\{\vec{x} \ : \ \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta\}$, onde $\delta > 0$; trata-se do intervalo aberto centrado em $\vec{x}_0$.

- Se $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$, a vizinhança de $\vec{x}_0$ é o conjunto dos pontos interiores à circunferência de raio δ e centrada em (x_0, y_0). Se $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a vizinhança de $\vec{x}_0$ é o conjunto dos pontos interiores à superfície esférica de raio δ e centrada em (x_0, y_0, z_0).

- Se retirarmos o ponto $\vec{x}_0$ do conjunto que define a vizinhança de $\vec{x}_0$, obtém-se o conjunto $\{\vec{x} \ : \ 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta\}$, onde $\delta > 0$.

- Um ponto $\vec{x}_0$ diz-se um *ponto interior* de um conjunto *S* se o conjunto *S* contém alguma vizinhança de $\vec{x}_0$. O conjunto de todos os pontos interiores de *S* é designado por *interior de S*.

- Um ponto $\vec{x}_0$ diz-se um *ponto fronteira* de um conjunto *S* se qualquer vizinhança de $\vec{x}_0$ contém pontos que estão em *S* e pontos que não estão em *S*. O conjunto de todos os pontos fronteira de *S* chama-se *fronteira de S*.

- Um conjunto *S* diz-se *aberto* se qualquer um dos seus pontos é um ponto interior (não possui pontos fronteira). Por outro lado, o conjunto *S* diz-se *fechado* se contém a sua fronteira.

Limite

- Seja *f* uma função real a várias variáveis definida pelo menos numa vizinhança de $\vec{x}_0$, podendo não estar definida em $\vec{x}_0$. Então

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \qquad (1)$$

se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que:

$$\text{se } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \;\Rightarrow\; |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$$

- No caso de uma função real a várias variáveis, o processo que permite demonstrar a existência de limite num ponto $\vec{x}_0$, envolve, na generalidade das situações, um processo de cálculo muito trabalhoso, já que se tem de mostrar que o limite toma sempre o mesmo valor, independentemente da trajectória que é considerada na aproximação a $\vec{x}_0$. Neste caso é necessário recorrer à definição de limite apresentada em (1). Pelo contrário, é mais simples mostrar que uma função a várias variáveis não tem limite em $\vec{x}_0$.

Exemplo 23: Vamos mostrar que a função

$$f(x,y)=\frac{xy+y^3}{x^2+y^2}$$

não tem limite em $(0,0)$. Note-se que *f* não está definida em $(0,0)$, mas está definida em todos os pontos $(x,y)\neq(0,0)$.
Ao longo dos caminhos mais óbvios que nos conduzem a $(0,0)$, os eixos coordenados, obtém-se:

Eixo dos *xx*, $y=0$:

$$f(x,y)=f(x,0)=0 \text{ e } \lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0} 0=0 .$$

Eixo dos *yy*, $x=0$:

$$f(x,y)=f(0,y)=y \text{ e } \lim_{y\to 0} f(0,y)=\lim_{y\to 0} y=0 .$$

Contudo, ao longo da linha $y=mx,\ m\neq 0$, obtém-se

$$f(x,y)=f(x,mx)=\frac{mx^2+m^3x^3}{(1+m^2)x^2}=\frac{m(1+m^2x)}{1+m^2} \quad (x\neq 0)$$

e

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{m(1+m^2x)}{1+m^2}=\frac{m}{1+m^2}$$

Uma vez que os caminhos considerados na aproximação a $(0,0)$ não conduzem ao mesmo valor limite, conclui-se que *f* não tem limite em $(0,0)$.

Exemplo 24: Vamos mostrar que a função

$$g(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

não tem limite em $(0,0)$. Note-se que o domínio de g contém todos os pontos do plano *xOy* tais que $(x,y)\neq(0,0)$.
Tal como no exemplo 23, verifica-se que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$$

ao longo dos eixos coordenados.
Considerando a linha $y=mx,\ m\neq 0$, obtém-se

$$g(x,y)=g(x,mx)=\frac{mx^3}{x^4+m^2x^2}=\frac{mx}{x^2+m^2}\ \ (x\neq 0)$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x^2+m^2}=0$$

Considerando, no entanto, o caminho $y=x^2$ na aproximação a $(0,0)$, obtém-se

$$g(x,y)=g(x,x^2)=\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2}\ \ (x\neq 0)$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Dado que os caminhos escolhidos na aproximação a $(0,0)$ não conduzem ao mesmo valor limite, conclui-se que g não tem limite em $(0,0)$.

- O limite de uma função $f(\vec{x})$ num ponto $\vec{x}_0$ existe, se for independente do caminho que for utilizado na aproximação a $\vec{x}_0$.

- O limite de uma função $f(\vec{x})$, se existir, é único. Além disso, se

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \ \text{ e } \ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} g(\vec{x}) = M$$

então:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left[f(\vec{x}) + g(\vec{x})\right] = L + M$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left[\alpha f(\vec{x})\right] = \alpha L \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left[f(\vec{x}) g(\vec{x})\right] = LM$$

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \left[\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}\right] = \frac{L}{M} \ \text{ se } M \neq 0$$

Continuidade

- Seja $\vec{x}_0$ um ponto interior do domínio de *f*. Dizer que *f* é *contínua* em $\vec{x}_0$ é equivalente a dizer que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

ou, em alternativa:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0)$$

- Dizer que *f* é contínua num *conjunto aberto S* é o mesmo que dizer que *f* é contínua em todos os pontos de *S*.

- Os *polinómios* a várias variáveis são funções contínuas em todos os pontos. As *funções racionais* (quocientes de polinómios) a várias variáveis são funções contínuas em todos os pontos, excepto naqueles onde o denominador se anula.

Exemplo 25: Por exemplo, o polinómio a duas variáveis

$$P(x,y) = x^2y + x^4y^2 - 2x + y$$

é contínuo em todos os pontos do plano *xOy*, e o polinómio a três variáveis

$$Q(x,y,z) = 2x^2z + z^4y^2 + 2xyz + 2x - y$$

é contínuo em todos os pontos do espaço tridimensional.

Exemplo 26: A função racional

$$f(x,y) = \frac{x - 2y}{x^2 + y^2}$$

é contínua em todos os pontos do plano *xOy*, excepto na origem $(0,0)$.

Exemplo 27: A função racional

$$g(x,y) = \frac{x^2}{2x - y}$$

é contínua em todos os pontos do plano *xOy*, excepto ao longo da recta $y = 2x$.

Exemplo 28: A função racional

$$h(x,y) = \frac{1}{y - x^2}$$

é contínua em todos os pontos do plano *xOy*, excepto ao longo da parábola $y = x^2$.

Exemplo 29: A função racional

$$q(x,y,z) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional, excepto na origem $(0,0,0)$.

Exemplo 30: A função racional

$$r(x,y,z) = \frac{x^3 + y}{2x + y - z}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional, excepto no plano $2x + y - z = 0$.

Exemplo 31: A função

$$w(x,y,z) = \operatorname{arctg}\frac{x^3 z}{x + y}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional, excepto no plano vertical $x + y = 0$.

Exemplo 32: A função

$$t(x,y,z) = \sqrt{x^4 + y^6 + z^2}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional.

- Sejam as funções a várias variáveis $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$. Se g é contínua no ponto $\vec{x}_0$ e se f é contínua em $g(\vec{x}_0)$, então a função composta $(f \circ g)(\vec{x}) = f[g(\vec{x})]$ é contínua no ponto $\vec{x}_0$ (*continuidade da composição de funções a várias variáveis*).

- Se uma função a várias variáveis é contínua, então é contínua em relação a cada uma das suas variáveis, consideradas individualmente; por exemplo, se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

então:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y_0) = f(x_0,y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{y\to y_0} f(x_0,y) = f(x_0,y_0).$$

Note-se, no entanto, que a *proposição inversa é falsa*.

Continuidade e existência de derivadas parciais

- Sabe-se que no caso de uma *função real a uma variável* a *existência de derivada* num ponto *garante a continuidade* da função nesse ponto.

- Já no caso de uma *função real a várias variáveis* a *existência de derivadas parciais* num ponto *não garante a continuidade* da função nesse ponto.

- Por exemplo, a existência da derivada parcial $f_x = \partial f / \partial x$ num ponto apenas depende do comportamento da função ao longo de uma linha paralela ao eixo dos *xx* que passa nesse ponto. No entanto, a continuidade da função num ponto depende do comportamento da função ao longo de qualquer linha que passe nesse ponto.

Exemplo 33: Seja a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Tendo em atenção que

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=0=f(0,0) \quad \text{e} \quad \lim_{y\to 0} f(0,y)=0=f(0,0)$$

pode-se concluir que a função é "contínua" ao longo do eixo dos *xx* e é "contínua" ao longo do eixo dos *yy*; além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=0$$

Contudo, considerando a linha $y=x$, obtém-se

$$f(x,y)=f(x,x)=\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\ (x\neq 0)$$

e

$$\lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$$

Conclui-se, assim, que a *função é descontínua em* $(0,0)$.

Derivadas parciais de segunda ordem

- Relativamente à função real a duas variáveis $f(x,y)$, além das derivadas parciais $f_x = \partial f / \partial x$ e $f_y = \partial f / \partial y$ (*de primeira ordem*), é possível definir as seguintes derivadas parciais de *segunda ordem*:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Exemplo 34: Seja a função $f(x,y) = \ln(x^2 + y^3)$.
Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2}{x^2 + y^3}$$

as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(x^2+y^3)-4x^2}{(x^2+y^3)^2} = \frac{2(-x^2+y^3)}{(x^2+y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{6y(x^2+y^3)-9y^4}{(x^2+y^3)^2} = \frac{3y(2x^2-y^3)}{(x^2+y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{-2x(3y^2)}{(x^2+y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-3y^2(2x)}{(x^2+y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2}$$

Note-se que, neste caso, verifica-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2}$$

- Pode-se provar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

em qualquer ponto de um conjunto aberto onde a função $f(x,y)$ e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

são contínuas.

- Relativamente à função real a três variáveis $f(x,y,z)$, além das derivadas parciais $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$ e $f_z = \partial f / \partial z$ (*de primeira ordem*), é possível definir as seguintes derivadas parciais de *segunda ordem*:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{xz} = (f_x)_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{yz} = (f_y)_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

$$f_{zx} = (f_z)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

$$f_{zy} = (f_z)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

$$f_{zz} = (f_z)_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Pode-se provar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

em qualquer ponto de um conjunto aberto onde a função $f(x, y, z)$ e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

são contínuas.

Exemplo 35: Seja a função $f(x, y, z) = xe^y \operatorname{sen}(\pi z)$.
Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xe^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \pi x e^y \cos(\pi z)$$

as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = xe^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -\pi^2 xe^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = e^y \operatorname{sen}(\pi z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \pi e^y \cos(\pi z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \pi xe^y \cos(\pi z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)$$

Diferenciabilidade; gradiente

- No caso de uma função real a uma variável, $f(x)$, diz-se que *f* é diferenciável em *x*, se existir o limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

em que o número $f'(x)$ representa a derivada de *f* em *x*.
Podemos afirmar que a derivada de *f* em *x* é o único número $f'(x)$ tal que:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$$

Quando $h \to 0$, $o(h) \to 0$, pelo que $f'(x)$ toma o valor do limite definido em (2).

- Diz-se que uma função real a várias variáveis, $f(\vec{x})$, é diferenciável em $\vec{x}$, desde que exista um vector $\vec{y}$, tal que:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \vec{y} \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$

É possível mostrar que o vector $\vec{y}$, se existir, é único, sendo designado por *gradiente de f em* $\vec{x}$, ou seja, $\vec{y} = \nabla f(\vec{x})$.
Podemos, então, afirmar que o gradiente de *f* em $\vec{x}$ é o único vector $\nabla f(\vec{x})$, tal que:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$

- O cálculo de $\nabla f(\vec{x})$ através da definição é, na maioria dos casos, um processo laborioso. O teorema seguinte, cuja demonstração é complexa, relaciona o gradiente de uma função com as suas derivadas parciais, sendo apresentado para funções reais a duas e a três variáveis.

Teorema 1: Se a função real a três variáveis $f(x,y,z)$ tem derivadas parciais $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ e $\partial f / \partial z$ contínuas numa vizinhança de $\vec{x}$, então $f(x,y,z)$ é diferenciável em $\vec{x}$ e:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})\vec{k}$$

Se a função real é a duas variáveis, $f(x,y)$, então:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j}$$

Exemplo 36: Seja a função $f(x,y) = xe^{y} - ye^{x}$.
Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y} - ye^{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{y} - e^{x}$$

são funções contínuas, *o gradiente de f em* (x,y) é:

$$\nabla f(x,y) = (e^{y} - ye^{x})\vec{i} + (xe^{y} - e^{x})\vec{j}$$

Exemplo 37: Seja a função $f(x,y,z) = x\text{sen}(\pi y) - y\cos(\pi z)$.
Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \text{sen}(\pi y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \pi x\cos(\pi y) - \cos(\pi z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \pi y\text{sen}(\pi z)$$

são funções contínuas, *o gradiente de f em* (x,y,z) é:

$$\nabla f(x,y,z) = \text{sen}(\pi y)\vec{i} + (\pi x\cos(\pi y) - \cos(\pi z))\vec{j} + \pi y\text{sen}(\pi z)\vec{k}$$

No ponto $\vec{x} = (0,1,2)$, obtém-se:

$$\nabla f(0,1,2) = -\vec{j} = (0,-1,0)$$

- No caso da função escalar

  $$r(x,y,z) = \|\vec{r}\| \text{ e } \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

  mostra-se que, se $r \neq 0$, então:

  $$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \text{ e } \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

  Além disso, se $\vec{r} \neq \vec{0}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

  $$\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$$

Teorama 2: Se a função real a várias variáveis $f(\vec{x})$ é diferenciável em $\vec{x}$, então $f(\vec{x})$ é contínua em $\vec{x}$.

Operações com o gradiente

- Sejam as funções reais a várias variáveis $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$. Se $\nabla f(\vec{x})$ e $\nabla g(\vec{x})$ existem, então $\nabla[f(\vec{x})+g(\vec{x})]$, $\nabla[\alpha f(\vec{x})]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\nabla[f(\vec{x})g(\vec{x})]$ também existem e:

$$\nabla[f(\vec{x})+g(\vec{x})]=\nabla f(\vec{x})+\nabla g(\vec{x}),$$

$$\nabla[\alpha f(\vec{x})]=\alpha\nabla f(\vec{x}) \ , \ \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\nabla[f(\vec{x})g(\vec{x})]=f(\vec{x})\nabla g(\vec{x})+\nabla f(\vec{x})g(\vec{x})$$

Derivada direcional

- A derivada direcional é uma generalização da noção de derivada parcial, estando relacionada com o conceito de gradiente.

- No caso de uma função real a duas variáveis verifica-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{i})-f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{j})-f(\vec{x})}{h}$$

- No caso de uma função real a três variáveis verifica-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{i})-f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{j})-f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h} \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{k})-f(\vec{x})}{h}$$

- Cada uma das derivadas parciais anteriores é dada pelo limite do quociente

$$\frac{f(\vec{x}+h\vec{u})-f(\vec{x})}{h}$$

onde $\vec{u}$ é um dos seguintes vectores coordenados unitários: $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

- Generalizando, para cada versor $\vec{u}$, o limite

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{u})-f(\vec{x})}{h}$$

se existir, chama-se *derivada direcional de f em $\vec{x}$ na direcção de $\vec{u}$*.

- Perante a definição anterior, pode-se escrever:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = f'_{\vec{i}}(\vec{x})$: *derivada direcional de f em* $\vec{x}$ *na direcção de* $\vec{i}$;

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = f'_{\vec{j}}(\vec{x})$: *derivada direcional de f em* $\vec{x}$ *na direcção de* $\vec{j}$;

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = f'_{\vec{k}}(\vec{x})$: *derivada direcional de f em* $\vec{x}$ *na direcção de* $\vec{k}$.

- Enquanto as derivadas parciais definem as *razões da variação de f em* $\vec{x}$ *nas direcções dos versores* $\vec{i}$ *,* $\vec{j}$ *e* $\vec{k}$, a derivada direcional $f'_{\vec{u}}(\vec{x})$ define a *razão da variação de f em* $\vec{x}$ *na direcção do versor* $\vec{u}$.

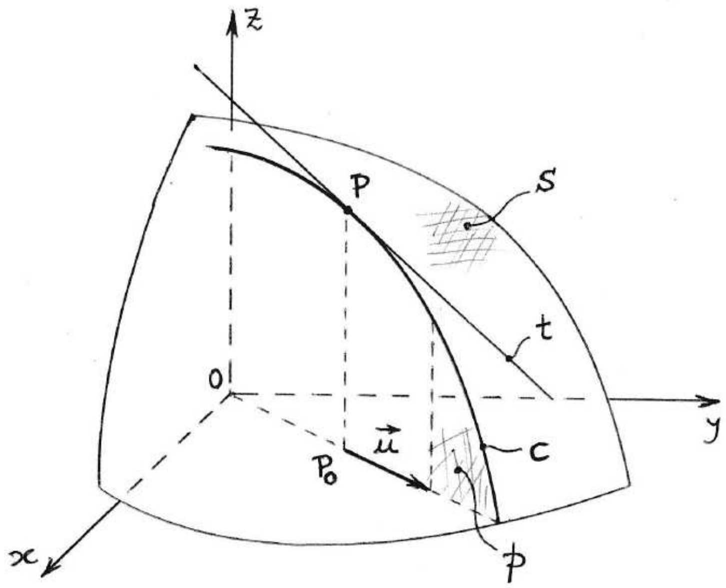
- Considere-se agora um vector $\vec{a}$ não nulo. Chama-se *derivada direcional de f em* $\vec{x}$ *na direcção do vector* $\vec{a}$, à derivada direcional $f'_{\vec{u}}(\vec{x})$, em que $\vec{u}$ é o versor com a mesma direcção e sentido do vector $\vec{a}$, isto é:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \qquad (3)$$

A operação definida em (3) é designada por *normalização do vector* $\vec{a}$.

- Tal como se verificou com as derivadas parciais, é possível apresentar uma interpretação geométrica para a derivada direcional de uma função real a duas variáveis.

- Seja a função real a duas variáveis $f(x,y)$ e admita-se que (x_0,y_0) pertence ao domínio de *f*.
  Seja a superfície $S\ :\ z=f(x,y)$ e fixem-se os pontos $P_0=(x_0,y_0,0)$, situado no plano *xOy*, e $P=\left(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\right)$ localizado sobre a superfície *S*.
  Seja o versor $\vec{u}$ do plano *xOy* aplicado em P_0.



Considere-se o plano, *p*, que passa em P_0, é paralelo ao versor $\vec{u}$ e é perpendicular ao plano *xOy*.
A intersecção deste plano com a superfície *S* é a curva *C* que passa no ponto *P*; seja *t* a *recta tangente a C* no ponto *P*.
Pode-se provar que a *derivada direcional* $f'_{\vec{u}}(x_0,y_0)$ determina o *declive da recta t no ponto P*.

Teorema 3: Se a função *f* é diferenciável em $\vec{x}$, então *f* possui derivada direcional em $\vec{x}$ em qualquer direcção. Além disso, para cada *versor* $\vec{u}$ obtém-se:

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x})=\nabla f(\vec{x})\cdot\vec{u}$$

Teorema 4: Se a função real $f(x, y, z)$ é diferenciável em $\vec{x}$, então as derivadas parciais $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ e $\partial f / \partial z$ existem em $\vec{x}$ e:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})\vec{k}$$

Se a função real é a duas variáveis, $f(x, y)$, então:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j}$$

Exemplo 38: Relativamente à função $f(x, y, z) = 2xz^2 \cos(\pi y)$, pretende-se calcular a derivada direcional da função no ponto $P = (1, 2, -1)$, na direcção do ponto $Q = (2, 1, 1)$.

Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2z^2 \cos(\pi y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2\pi xz^2 \mathrm{sen}(\pi y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4xz \cos(\pi y)$$

são funções contínuas, o gradiente de *f* em *P* é:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2, -1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2, -1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, -1) = -4$$

$$\nabla f(1, 2, -1) = 2\vec{i} - 4\vec{k}$$

O versor que define a direcção que liga *P* a *Q* é:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

Obtém-se, finalmente,

$$f'_{\vec{u}}(1,2,-1) = \nabla f(1,2,-1) \cdot \vec{u} = \frac{-6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}$$

- Notando que $\vec{u}$ é versor, então

$$\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{u}}\ \nabla f(\vec{x}) = \left(\nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u}\right)\vec{u} = f'_{\vec{u}}(\vec{x})\vec{u} \qquad (4)$$

  podendo concluir-se que (4) representa a *componente vectorial de* $\nabla f(\vec{x})$ *na direcção de* $\vec{u}$.
  Por outro lado, tem-se

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u} = \left\|\nabla f(\vec{x})\right\|\left\|\vec{u}\right\|\cos\theta = \left\|\nabla f(\vec{x})\right\|\cos\theta$$

  onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\nabla f(\vec{x})$ e $\vec{u}$.
  Uma vez que $-1 \le \cos\theta \le 1$, então

$$-\left\|\nabla f(\vec{x})\right\| \le f'_{\vec{u}}(\vec{x}) \le \left\|\nabla f(\vec{x})\right\| \qquad (5)$$

  para qualquer direcção definida pelo versor $\vec{u}$.

- A expressão (5) permite afirmar que, em cada ponto $\vec{x}$ do domínio, *a função f cresce mais rapidamente na direcção de* $\nabla f(\vec{x})$; a razão da variação de *f* em $\vec{x}$ toma o valor $\left\|\nabla f(\vec{x})\right\|$. Por outro lado, *a função f decresce mais rapidamente na direcção de* $-\nabla f(\vec{x})$; neste caso, a razão da variação de *f* em $\vec{x}$ é $-\left\|\nabla f(\vec{x})\right\|$.

Exemplo 39: Admita-se que a temperatura em cada ponto de uma placa metálica é definida pela função

$$T(x,y) = e^x \cos(y) + e^y \cos(x)$$

a) Obtenha o gradiente de T no ponto genérico (x,y).

b) Em que direcção a temperatura cresce mais rapidamente em $(0,0)$? Qual é o maior valor da razão da variação da temperatura neste ponto?

c) Em que direcção a temperatura decresce mais rapidamente em $(0,0)$? Qual é o menor valor da razão da variação da temperatura neste ponto?

Solução:

a) Sabendo que

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y) - e^y \operatorname{sen}(x), \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = -e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(x)$$

são funções contínuas, o gradiente de T em (x,y) é:

$$\nabla T(x,y) = \left(e^x \cos(y) - e^y \operatorname{sen}(x)\right)\vec{i} + \left(-e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(x)\right)\vec{j}$$

b) No ponto $(0,0)$ a temperatura cresce mais rapidamente na direcção do gradiente:

$$\nabla T(0,0) = \vec{i} + \vec{j}$$

O maior valor da razão da variação de T neste ponto é $\|\nabla T(0,0)\| = \sqrt{2}$.

c) No ponto $(0,0)$ a temperatura decresce mais rapidamente na direcção de:

$$-\nabla T(0,0) = -\vec{i} - \vec{j}$$

O menor valor da razão da variação de T neste ponto é $-\|\nabla T(0,0)\| = -\sqrt{2}$.

Exemplo 40: Admita-se que a densidade mássica (massa por unidade de volume) de uma esfera metálica centrada na origem é definida pela função

$$\rho(x,y,z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)}\ ,\ k > 0$$

a) Obtenha o gradiente de ρ no ponto genérico (x,y,z).

b) Em que direcção a densidade cresce mais rapidamente em (x,y,z)? Qual é o maior valor da razão da variação da densidade neste ponto?

c) Em que direcção a densidade decresce mais rapidamente em (x,y,z)? Qual é o menor valor da razão da variação da densidade neste ponto?

d) Quais são as razões da variação da densidade nas direcções dos vectores coordenados unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

Solução:

a) Sabendo que

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}(x,y,y) = -2kxe^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial y}(x,y,y) = -2kye^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}(x,y,y) = -2kze^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

são funções contínuas, o gradiente de ρ em (x,y,z) é

$$\nabla\rho(x,y,z) = -2ke^{-(x^2+y^2+z^2)}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -2\rho(x,y,z)\vec{r} \qquad (6)$$

em que $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é o vector de posição (vector radial) que determina a posição de cada ponto da esfera no espaço.

A equação (6) mostra que o vector gradiente é, em cada ponto (x,y,z) da esfera, paralelo ao vector de posição, mas com sentido oposto.

b) Atendendo a (6) verifica-se que, em cada ponto (x,y,z) da esfera, a densidade cresce mais rapidamente na direcção da origem do referencial.
A razão da variação de ρ é:

$$\|\nabla\rho(x,y,z)\| = 2\rho(x,y,z)\|\vec{r}\| = 2\rho(x,y,z)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

c) Atendendo a (6) verifica-se que, em cada ponto (x,y,z) da esfera, a densidade decresce mais rapidamente na direcção oposta à origem do referencial.
A razão da variação de ρ é:

$$-\|\nabla\rho(x,y,z)\| = -2\rho(x,y,z)\|\vec{r}\| = -2\rho(x,y,z)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

d) As razões da variação da densidade nas direcções dos vectores coordenados unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são, respectivamente:

$$\rho'_{\vec{i}}(x,y,z) = \nabla\rho(x,y,z)\cdot\vec{i} = -2x\rho(x,y,z)$$

$$\rho'_{\vec{j}}(x,y,z) = \nabla\rho(x,y,z)\cdot\vec{j} = -2y\rho(x,y,z)$$

$$\rho'_{\vec{k}}(x,y,z) = \nabla\rho(x,y,z)\cdot\vec{k} = -2z\rho(x,y,z)$$

Note-se que os valores encontrados correspondem às derivadas parciais (de primeira ordem) obtidas na alínea a).

Teorema do valor médio

- Como é sabido o *teorema do valor médio*, também conhecido por *teorema de Lagrange*, assume um papel extremamente importante no estudo das funções reais a uma variável.
  Relembrando o teorema: se $f(x)$ é uma função contínua definida num intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a,b), então existe, pelo menos, um ponto $c \in (a,b)$, tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

- Também é possível apresentar uma propriedade análoga para as funções reais a várias variáveis. O teorema seguinte é designado por *teorema do valor médio* para funções reais a várias variáveis.

Teorema 5: Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis diferenciável em cada ponto do segmento de recta que liga o ponto $\vec{a}$ ao ponto $\vec{b}$. Então existe, nesse segmento de recta, pelo menos um ponto $\vec{c}$ entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tal que:

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

- Um *conjunto aberto* (sem pontos fronteira) *U* diz-se *conexo*, se quaisquer dois pontos de *U* podem ser ligados através de uma linha poligonal que está totalmente contida em *U*.

Teorema 6: Sejam *U* um conjunto aberto conexo e $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis diferenciável em *U*. Se $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in U$, então $f(\vec{x})$ é constante em *U*.

Teorema 7: Sejam *U* um conjunto aberto conexo e $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ funções reais a várias variáveis diferenciáveis em *U*. Se $\nabla f(\vec{x}) = \nabla g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in U$, então $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ apenas diferem de uma constante em *U*.

Regra da cadeia

- Comecemos por relembrar a aplicação da regra da cadeia a funções reais a uma variável. Sejam $g(x)$ uma função diferenciável em x_0 e $f(x)$ uma função diferenciável em $g(x_0)$; então

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x_0)\right)\right] = f'\left(g(x_0)\right)g'(x_0)$$

- Sejam a função real a três variáveis $f(x,y,z)$, definida num conjunto aberto *U*, e a função vectorial $\vec{r}(t)$, com $t \in [t_0,t_1]$, tal que $\vec{r}[t_0,t_1] \subset U$. Então é possível definir a *função composta*

$$(f \circ \vec{r})(t) = f\left(\vec{r}(t)\right)\ ,\ t \in [t_0,t_1]$$

  A *derivada da função composta* $f \circ \vec{r}$ pode ser obtida recorrendo à *regra da cadeia*.

- Uma função real a três variáveis $f(x,y,z)$ é *continuamente diferenciável* num conjunto aberto *U*, se *f* é diferenciável em *U* e ∇f é contínuo em *U*.

Teorema 8: Se $f(x,y,z)$ é uma função real a três variáveis continuamente diferenciável num conjunto aberto U e $\vec{r}(t)$ é uma curva diferenciável contida em U, então a função composta $f \circ \vec{r}$ é diferenciável e:

$$\frac{d}{dt}\left[f\left(\vec{r}(t)\right)\right] = \nabla f\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}'(t) \tag{7}$$

- A expressão (7) pode ser reescrita sob uma forma alternativa. Notando que

  $$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

  $$\vec{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

  então:

  $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

- No caso de uma função real a duas variáveis $f(x,y)$ a equação (7) conduz-nos a:

  $$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

  $$\vec{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

  $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Exemplo 41: Considere-se a função $f(x,y,z) = x^2 y + z\cos(x)$ e a curva, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$.

a) Obtenha, usando a regra da cadeia, a razão da variação de *f* em relação *t* ao longo de *C*.

b) Confirme o resultado obtido na alínea anterior após calcular a função composta.

Solução:

a) O vector tangente à curva C é:

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

Sabendo que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2xy - z\text{sen}(x)\right)\vec{i} + x^2\vec{j} + \cos(x)\vec{k}$$

e tendo em atenção que $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ e $z(t) = t^3$, obtém-se:

$$\nabla f\left(\vec{r}(t)\right) = t^3\left(2 - \text{sen}(t)\right)\vec{i} + t^2\vec{j} + \cos(t)\vec{k}$$

A razão da variação de *f* em relação a *t* ao longo de *C* é:

$$\frac{d}{dt}\left[f\left(\vec{r}(t)\right)\right] = \nabla f\left(\vec{r}(t)\right)\cdot\vec{r}'(t) = t^3\left(2 - \text{sen}(t)\right) + 2t^3 + 3t^2\cos(t) =$$

$$= 4t^3 - t^3\text{sen}(t) + 3t^2\cos(t)$$

b) A função composta $f \circ \vec{r}$ é a função escalar

$$g(t) = (f \circ \vec{r})(t) = f\left(\vec{r}(t)\right) = t^4 + t^3\cos(t)$$

pelo que:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left[f\left(\vec{r}(t)\right)\right] = 4t^3 + 3t^2\cos(t) - t^3\text{sen}(t)$$

Exemplo 42: Dadas as funções

$$u = x^2 - y^2 , \quad x = t^2 - 1 \ \text{ e } \ y = 3\text{sen}(\pi t)$$

calcule $\partial u / \partial t$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y , \quad \frac{dx}{dt} = 2t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 3\pi \cos(\pi t)$$

então:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x)(2t) + (-2y)\big(3\pi \cos(\pi t)\big) =$$

$$= 2(t^2 - 1)(2t) + (-2)\big(3\text{sen}(\pi t)\big)\big(3\pi \cos(\pi t)\big) =$$

$$= 4t(t^2 - 1) - 18\pi \text{sen}(\pi t)\cos(\pi t)$$

Em alternativa, é possível resolver o problema, começando por calcular a função composta

$$u(t) = x^2(t) - y^2(t) = (t^2 - 1)^2 - \big(3\text{sen}(\pi t)\big)^2 =$$

$$= (t^2 - 1)^2 - 9\text{sen}^2(\pi t)$$

e derivando:

$$\frac{du}{dt} = 2(2t)(t^2 - 1) - 9(2)\big(\pi \cos(\pi t)\big)\big(\text{sen}(\pi t)\big) =$$

$$= 4t(t^2 - 1) - 18\pi \text{sen}(\pi t)\cos(\pi t)$$

Outras aplicações da regra da cadeia

- Sabendo que

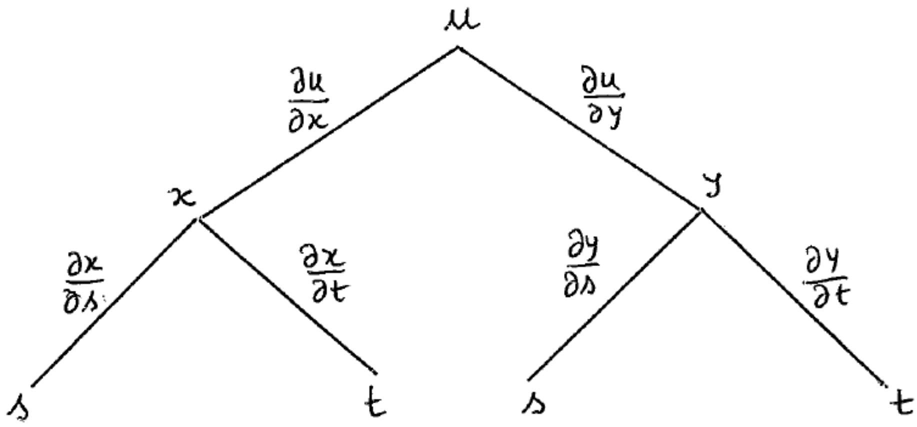
$$u = u(x,y), \text{ tal que } x = x(s,t) \text{ e } y = y(s,t)$$

então:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad (9)$$

As expressões (8) e (9) podem ser deduzidas a partir do *diagrama de árvore* seguinte:



Cada caminho que se inicia em *u* e termina numa variável (*s* ou *t*) determina um produto de derivadas (parciais). A *derivada parcial de u em relação a uma variável* (*s* ou *t*) é dada pela soma dos produtos gerados pelos vários caminhos que nos conduzem a essa variável.

Exemplo 43: Dadas as funções

$$u = x^2 - 2xy + 2y^3, \text{ tal que } x = s^2 \ln(t) \text{ e } y = 2st^3$$

calcule $\partial u / \partial s$ e $\partial u / \partial t$.

Solução:

As derivadas parciais pretendidas podem ser obtidas recorrendo ao *diagrama de árvore* apresentado na página anterior.
Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} =$$

$$= (2x - 2y)2s\ln(t) + (-2x + 6y^2)2t^3 =$$

$$= (2s^2\ln(t) - 4st^3)2s\ln(t) + (-2s^2\ln(t) + 24s^2t^6)2t^3 =$$

$$= 4s^2\ln(t)(s\ln(t) - 2t^3) + 4s^2t^3(-\ln(t) + 12t^6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= (2x - 2y)\frac{s^2}{t} + (-2x + 6y^2)(6st^2) =$$

$$= (2s^2\ln(t) - 4st^3)\frac{s^2}{t} + (-2s^2\ln(t) + 24s^2t^6)6st^2 =$$

$$= \frac{2s^3}{t}(s\ln(t) - 2t^3) + 12s^3t^2(-\ln(t) + 12t^6)$$

- Sabendo que

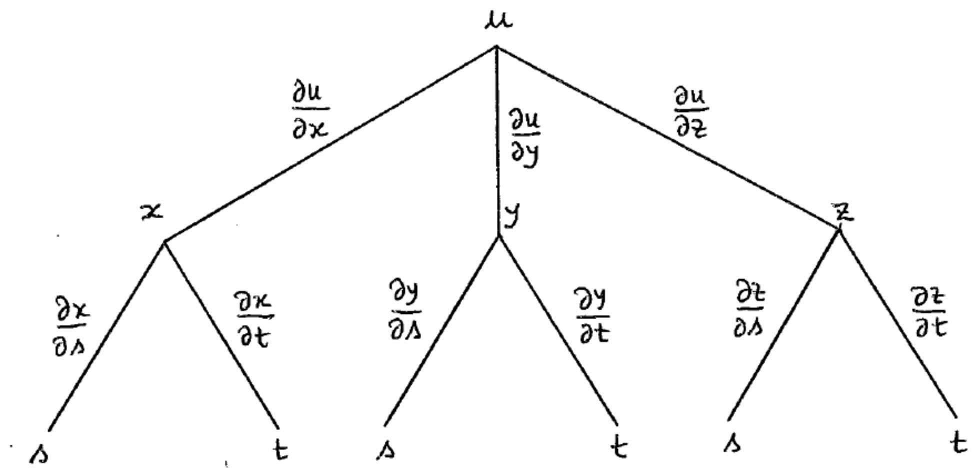
$$u = u(x,y,z)\,,\ \text{tal que}\ \ x = x(s,t)\,,\ \ y = y(s,t)\ \ \text{e}\ \ z = z(s,t)$$

então:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{11}$$

O diagrama de árvore que corresponde às derivadas parciais apresentadas em (10) e (11) é o seguinte:



Derivação implícita

- Admita-se que $u = u(x,y)$ é uma função continuamente diferenciável e que y é uma função diferenciável em x que satisfaz a condição $u(x,y) = 0$. Então, é possível calcular a *derivada de y em relação a x* sem que seja necessário *explicitar a função y em termos de x*; este processo é designado por *diferenciação (derivação) implícita*.

Teorema 9: Se $u = u(x,y)$ é uma função continuamente diferenciável e y é uma função diferenciável em x que satisfaz a equação $u(x,y) = 0$, então, para todos os pontos (x,y) onde $\partial u / \partial y \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}$$

Exemplo 44: Seja y uma função diferenciável em x que verifica a equação:

$$u(x,y) = 2x^2 y - y^3 + 1 - x - 2y = 0 \qquad (12)$$

Notando que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4xy - 1 \;\text{ e }\; \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 - 3y^2 - 2$$

então:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 1}{2x^2 - 3y^2 - 2} \qquad (13)$$

O resultado (13) também pode ser obtido diferenciando (12) em relação a x, tendo em atenção que y é uma função de x.
Obtém-se, neste caso,

$$4xy + 2x^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} - 1 - 2\frac{dy}{dx} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (2x^2 - 3y^2 - 2)\frac{dy}{dx} = -4xy + 1$$

e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 1}{2x^2 - 3y^2 - 2}$$

Exemplo 45: Calcule o declive da recta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no ponto $P = (1, \sqrt{3})$:

a) Usando a derivação implícita.

b) A partir da função que explicita *y* em função de *x* nesse ponto.

Solução:

a) Considerando a função real a duas variáveis

$$u(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

O declive da recta tangente em *P* é:

$$\frac{dy}{dx}(1, \sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) A função que define a linha que passa em *P* é:

$$y = +\sqrt{4 - x^2}$$

Derivando em ordem a *x*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

pelo que:

$$\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Teorema 10: Se $u = u(x,y,z)$ é uma função continuamente diferenciável e $z = z(x,y)$ é uma função diferenciável que satisfaz a equação $u(x,y,z) = 0$, então, para todos os pontos (x,y,z) onde $\partial u / \partial z \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial u / \partial y}{\partial u / \partial z}$$

Gradiente; curvas de nível

Teorema 11: Seja $f = f(x,y)$ uma função continuamente diferenciável. Então em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ do seu domínio, o *gradiente* ∇f, se não for nulo, é *perpendicular à curva de nível de f* que passa em $\vec{x}_0$.

Exemplo 46: Em relação à função $f(x,y) = x^2 + y^2$, as curvas de nível são as circunferências concêntricas:

$$x^2 + y^2 = c \ , \ c \geq 0$$

Em cada ponto $(x,y) \neq (0,0)$ o gradiente de $f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} = 2(x\vec{i} + y\vec{j}) = 2\vec{r}$$

é perpendicular à curva de nível (circunferência) que passa nesse ponto (tem a direcção radial) e aponta no sentido convexo da curva.
Na origem, a curva de nível reduz-se a um ponto e $\nabla f(0,0) = \vec{0}$.

- O gradiente $\nabla f(x,y)$ permite definir, em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ de uma curva de nível, a *linha normal* e a *linha tangente* a essa curva. Notando que o vector

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\vec{j}$$

é um *vector normal* à curva de nível no ponto $\vec{x}_0$, então a equação vectorial da *linha normal* à curva $f(x,y) = c$ em $\vec{x}_0$ é:

$$\vec{r}(u) = \vec{x}_0 + u\nabla f(\vec{x}_0) \text{ , } u \in \mathbb{R}$$

Por outro lado, sabendo que o vector

$$\vec{t}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\vec{j}$$

é perpendicular a $\nabla f(\vec{x}_0)$ (o produto escalar é nulo), então ele será um *vector tangente* à curva de nível em $\vec{x}_0$; assim, a equação vectorial da *linha tangente* à curva $f(x,y) = c$ em $\vec{x}_0$ é:

$$\vec{r}(v) = \vec{x}_0 + v\vec{t}(\vec{x}_0) \text{ , } v \in \mathbb{R}$$

Exemplo 47: Considere a curva plana *C* de equação $x^2 + 2y^3 = xy + 4$ e o ponto $P = (2,1)$ situado em *C*. Determine em *P*:

a) O vector normal e a equação da linha normal à curva.

b) O vector tangente e a equação da linha tangente à curva.

Solução:

a) Sendo $f(x,y) = x^2 + 2y^3 - xy$, a curva *C* é a curva de nível $f(x,y) = 4$.
O gradiente de *f* é:

$$\nabla f(x,y) = (2x - y)\vec{i} + (6y^2 - x)\vec{j}$$

Assim, o *vector normal* a *C* em *P* é:

$$\vec{n} = \nabla f(2,1) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

A equação vectorial da *linha normal* a *C* em *P* é:

$$\vec{r}(\alpha) = P + \alpha\vec{n} = (2 + 3\alpha, 1 + 4\alpha) \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

As suas equações cartesianas são

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4}$$

enquanto a sua equação reduzida é:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

b) O *vector tangente* a *C* em *P* é:

$$\vec{t} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

A equação vectorial da *linha tangente* a *C* em *P* é:

$$\vec{r}(\beta) = P + \beta\vec{t} = (2 + 4\beta, 1 - 3\beta) \ , \ \beta \in \mathbb{R}$$

As suas equações cartesianas são

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3}$$

enquanto a sua equação reduzida é:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

Gradiente; superfícies de nível

Teorema 12: Seja $f = f(x, y, z)$ uma função continuamente diferenciável. Então em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ do seu domínio, o *gradiente* ∇f, se não for nulo, é *perpendicular à superfície de nível de f* que passa em $\vec{x}_0$.

Exemplo 48: Em relação à função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, as superfícies de nível são as superfícies esféricas concêntricas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c \ , \ c \geq 0$$

Em cada ponto $(x, y, z) \neq (0,0,0)$ o gradiente de $f(x, y, z)$

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 2\vec{r}$$

é perpendicular à superfície de nível (superfície esférica) que passa nesse ponto (tem a direcção radial) e aponta no sentido convexo da superfície.
Na origem, a superfície de nível reduz-se a um ponto e $\nabla f(0,0,0) = \vec{0}$.

- Neste caso, o gradiente $\nabla f(x, y, z)$ permite definir, em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de uma superfície de nível, a *linha normal* e o *plano tangente* a essa superfície.
  O plano tangente em $\vec{x}_0$ é o plano que mais se aproxima da superfície na vizinhança desse ponto.

- Um ponto $\vec{x} = (x, y, z)$ está no *plano tangente* à superfície $f(x, y, z) = c$ em $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, se e só se:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = 0$$

A equação vectorial da *linha normal* à superfície em $\vec{x}_0$ é:

$$\vec{r}(u) = \vec{x}_0 + u \nabla f(\vec{x}_0) \ , \ u \in \mathbb{R}$$

Exemplo 49: Seja o cone elíptico de equação $z^2 = x^2 + 4y^2$ e o ponto $P = (3, 2, 5)$ situado nesta superfície. Determine em *P*:

a) O vector normal à superfície.

b) A equação da linha normal à superficie.

c) A equação do plano tangente à superficie.

Solução:

a) O cone elíptico é uma superfície de nível da forma $f(x, y, z) = 0$, em que $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2$.
O gradiente de *f* é:

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\vec{i} + 8y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

Assim, o *vector normal* à superfície em *P* é:

$$\nabla f(3, 2, 5) = 6\vec{i} + 16\vec{j} - 10\vec{k}$$

b) Notando que o vector $\nabla f(3, 2, 5)$ é paralelo ao vector $\vec{n} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}$, a equação vectorial da *linha normal* à superfície em *P* é:

$$\vec{r}(\alpha) = P + \alpha\vec{n} = (3 + 3\alpha, 2 + 8\alpha, 5 - 5\alpha) \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

As suas equações cartesianas são:

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{8}=\frac{x-5}{-5}$$

c) A equação cartesiana do *plano tangente* à superfície em *P* é:

$$(x-3,y-2,z-5)\cdot(3,8,-5)=0 \;\Leftrightarrow\; 3x+8y-5z=0$$

Trata-se de um plano que passa na origem.

Exemplo 50: A curva *C* de equação $\vec{r}(t)=2^{-1}t^2\vec{i}+4t^{-1}\vec{j}+(2^{-1}t-t^2)\vec{k}$ intersecta o paraboloide hiperbólico $x^2-4y^2-4z=0$ no ponto $P=(2,2,-3)$. Calcule o ângulo de intersecção.

Solução:

Pretende-se calcular o ângulo ϕ que o vector tangente à curva faz com o plano tangente ao cone hiperbólico no ponto *P*.
Sabendo que $P=\vec{r}(2)$ e uma vez que

$$\vec{r}'(t)=t\vec{i}-4t^{-2}\vec{j}+(2^{-1}-2t)\vec{k}$$

então o vector tangente a *C* em *P* é

$$\vec{r}'(2)=2\vec{i}-\vec{j}-\frac{7}{2}\vec{k}$$

sendo um vector paralelo a $\vec{t}=4\vec{i}-2\vec{j}-7\vec{k}$.
O paraboloide hiperbólico é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z)=0$, em que $f(x,y,z)=x^2-4y^2-4z$.
O gradiente de *f* é

$$\nabla f(x,y,z)=2x\vec{i}-8y\vec{j}-4\vec{k}$$

pelo que o *vector normal* à superfície em *P* é

$$\nabla f(2,2,-3) = 4\vec{i} - 16\vec{j} - 4\vec{k}$$

sendo um vector paralelo a $\vec{n} = \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$.
Designando por θ o ângulo formado pelos vectores $\vec{t}$ e $\vec{n}$, então:

$$\theta = \arccos\frac{\left|\vec{t}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{t}\right\|\left\|\vec{n}\right\|} = \arccos\frac{19}{\sqrt{69}\sqrt{18}} = \arccos\frac{19\sqrt{138}}{414}$$

Assim:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta = \operatorname{arc\,sen}\frac{19\sqrt{138}}{414}$$

Exemplo 51: Em que pontos da superfície $z = 3xy - x^3 - y^3$ o plano tangente é horizontal (paralelo ao plano *xOy*)?

Solução:

A superfície dada é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z) = 0$, em que $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3xy - z$.
O gradiente de *f* é:

$$\nabla f(x,y,z) = 3(x^2 - y)\vec{i} + 3(y^2 - x)\vec{j} - \vec{k}$$

Para que o plano tangente seja horizontal deverá verificar-se:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Concluindo, o plano tangente à superfície é horizontal nos pontos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$.

Extremos locais

- Tal como acontece nas funções reais a uma variável, também é possível analisar a existência de *extremos locais* em funções reais a várias variáveis.

- Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis e $\vec{x}_0$ um ponto interior do seu domínio.
  i) A função $f(\vec{x})$ tem um *máximo local em* $\vec{x}_0$, se e só se:

  $$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ numa vizinhança de } \vec{x}_0.$$

  ii) A função *f* tem um *mínimo local em* $\vec{x}_0$, se e só se:

  $$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ numa vizinhança de } \vec{x}_0.$$

  Os *máximos locais* e os *mínimos locais* da função $f(\vec{x})$ constituem os *extremos locais* da função.

- Se uma função real a uma variável, $f(x)$, possui um extremo local em x_0, então:

  $$f'(x_0) = 0 \text{ ou } f'(x_0) \text{ não existe.}$$

- O teorema seguinte estabelece a relação entre o gradiente e a existência de extremos locais para uma função real a várias variáveis.

Teorema 13: Se a função real a várias variáveis $f(\vec{x})$ possui um *extremo local em* $\vec{x}_0$, então:

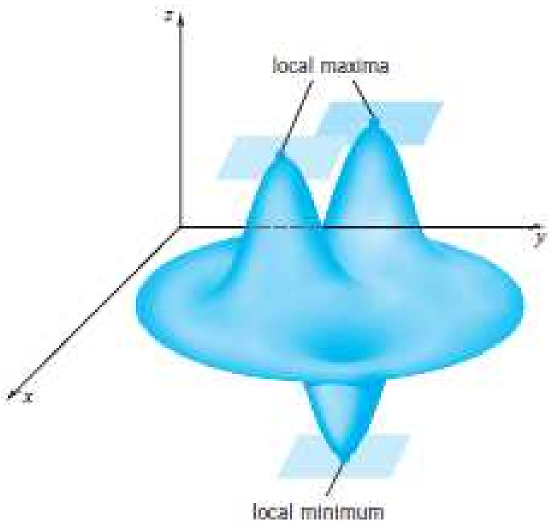
$$\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \text{ ou } \nabla f(\vec{x}_0) \text{ não existe.}$$

- Os pontos no interior do domínio de $f(\vec{x})$ onde o gradiente é nulo ou o gradiente não existe chamam-se *pontos críticos*. Estes são os únicos pontos onde poderão existir *extremos locais* (teorema 13).

- *Os pontos críticos onde o gradiente é nulo* designam-se por *pontos estacionários*. Os pontos estacionários onde não existem *extremos locais* (*máximos ou mínimos locais*) são designados por *pontos de sela*.

- No caso presente limitar-se-á a análise a funções reais a duas variáveis, $f(x,y)$. De um modo geral, o estudo deste problema em funções reais a mais de duas variáveis é demasiado complexo em termos do cálculo envolvido.

- Seja a função real a duas variáveis, $f(x,y)$, definida num conjunto aberto conexo, *U*, e continuamente diferenciável em *U*. O gráfico da função é a superfície $z = f(x,y)$.



Nos pontos onde $f(x,y)$ possui um máximo local ou um mínimo local, o gradiente, $\nabla f(x,y)$, é nulo e, portanto, o plano tangente à superfície é horizontal.

- Convém referir que o anulamento do gradiente num ponto apenas assinala a possibilidade da existência de um extremo local nesse ponto; no entanto, não o garante.

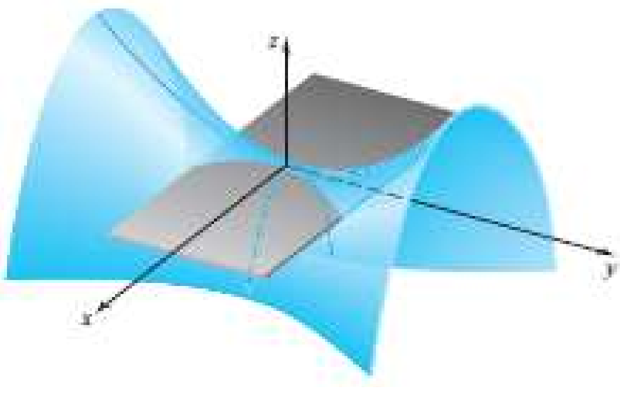
Exemplo 52: Seja a função real a duas variáveis:

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

O gráfico da função é o *paraboloide hiperbólico*:

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Na origem o plano tangente à superfície é horizontal e, portanto, o gradiente é nulo, $\nabla f(0,0) = \vec{0}$.
Contudo, não é possível concluir que existe um máximo local ou um mínimo local neste ponto (trata-se de um *ponto de sela*).



Com efeito, considerando o comportamento da função ao longo do eixo dos *xx*, verifica-se que existe um *máximo local na origem*. Por outro lado, considerando o comportamento da função ao longo do eixo dos *yy*, verifica-se que existe um *mínimo local na origem*.

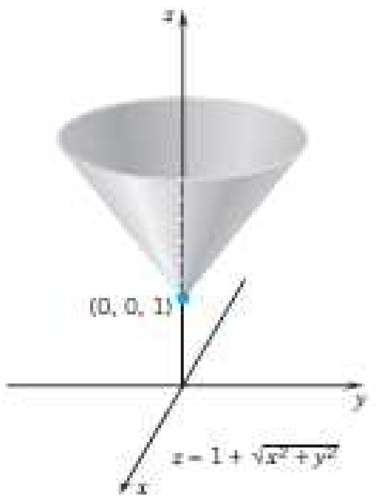
Exemplo 53: Seja a função:

$$f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

O gráfico da função é a folha superior do cone circular que tem o seu vértice no ponto $(0,0,1)$:

$$z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Analisando a figura é óbvio que o valor $f(0,0) = 1$ é um *mínimo local* da função.



Uma vez que as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

não estão definidas em $(0,0)$, conclui-se que $\nabla f(0,0)$ não existe.
Assim, o ponto $(0,0)$ *é um ponto crítico* da função $f(x,y)$, mas *não é um ponto estacionário*.
No ponto $(0,0,1)$ o plano tangente à superfície não está definido.

- Relembremos o *teste da segunda derivada* para uma função real a uma variável, $f(x)$. Assim, a função $f(x)$ possui um *mínimo local* em x_0, se $f''(x_0) > 0$; por outro lado, a função $f(x)$ possui um *máximo local* em x_0, se $f''(x_0) < 0$.

- O teorema seguinte estabelece um teste similar para funções reais a duas variáveis, $f(x,y)$, que é designado por *teste das derivadas parciais de segunda ordem*.

Teorema 14: Admita-se que $f(x,y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas numa vizinhança de (x_0,y_0) e que $\nabla f(x_0,y_0) = \vec{0}$. Sejam:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \ , \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \ \text{ e } \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Considerando o *discriminante* $D = AC - B^2$:
i) Se $D < 0$, então (x_0,y_0) é um *ponto de sela*;
ii) Se $D > 0$ e $A > 0$, então $f(x,y)$ possui um *mínimo local* em (x_0,y_0);
iii) Se $D > 0$ e $A < 0$, então $f(x,y)$ possui um *máximo local* em (x_0,y_0).

- No exemplo seguinte faz-se uma interpretação geométrica do *teste das derivadas parciais de segunda ordem*.

Exemplo 54: Seja a função real a duas variáveis:

$$f(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{c}{2}y^2 \ , \text{com } a \neq 0 \ \wedge \ c \neq 0$$

O gráfico de *f* é um paraboloide:

$$z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{c}{2}y^2 \tag{14}$$

Notando que

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = (ax)\vec{i} + (cy)\vec{j}$$

conclui-se que o gradiente é nulo na origem, $\nabla f(0,0) = \vec{0}$.
Sabendo que

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = a \ , \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0 \ \text{ e } \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = c$$

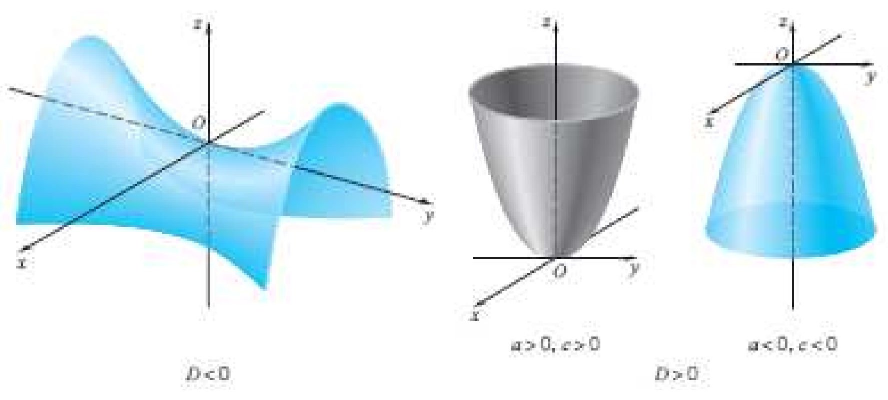
obtém-se o seguinte valor para o discriminante:

$$D = AC - B^2 = ac$$

Se $D < 0$, então a e c possuem sinais opostos; neste caso (14) descreve um *paraboloide hiperbólico*; neste caso, $(0,0)$ é um *ponto de sela*.

Se $D > 0$ e $a > 0$, então $c > 0$; neste caso (14) descreve um *paraboloide elíptico* definido no semieixo positivo do eixo dos *zz*; a função $f(x,y)$ possui um *mínimo local* em $(0,0)$.

Se $D > 0$ e $a < 0$, então $c < 0$; neste caso (14) descreve um *paraboloide elíptico* definido no semieixo negativo do eixo dos *zz*; a função $f(x,y)$ possui um *máximo local* em $(0,0)$.



Exemplo 55: Determine os pontos críticos e os extremos locais da função:

$$f(x,y) = -xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

Solução:

As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -ye^{-(x^2+y^2)/2} + x^2ye^{-(x^2+y^2)/2} = y(x^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xe^{-(x^2+y^2)/2} + xy^2e^{-(x^2+y^2)/2} = x(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

O gradiente da função $f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/2}\left[y(x^2-1)\vec{i} + x(y^2-1)\vec{j}\right]$$

está definido em todos os pontos do seu domínio, pelo que, neste caso, os pontos críticos são pontos estacionários (pontos onde o gradiente é nulo). Uma vez que

$$e^{-(x^2+y^2)/2} \neq 0$$

então $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, se e só se:

$$y(x^2-1) = 0 \quad \text{e} \quad x(y^2-1) = 0$$

As soluções destas equações são

$$x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ x = \pm 1 \ , \ y = \pm 1$$

a que correspondem os pontos estacionários:

$$(0,0) \ , \ (1,1) \ , \ (1,-1) \ , \ (-1,1) \ , \ (-1,-1)$$

As derivadas parciais de segunda ordem são:

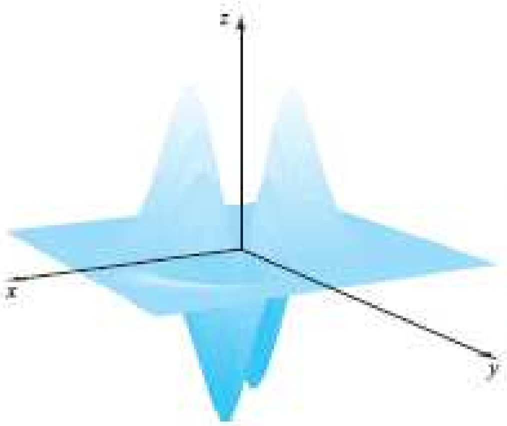
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = xy(3 - x^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (x^2 - 1)(1 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

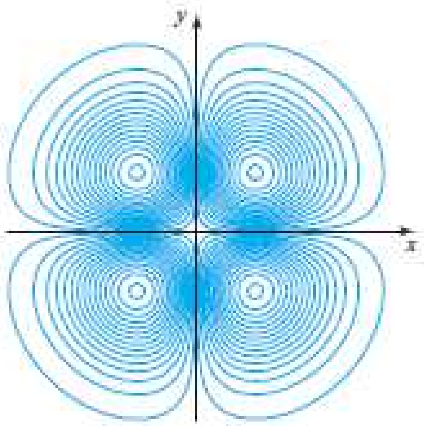
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xy(3 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

A tabela seguinte apresenta os resultados obtidos para cada um dos pontos estacionários:

Ponto	*A*	*B*	*C*	*D*	Classificação	Extremo
(0,0)	0	-1	0	-1	ponto de sela	------
(1,1)	$2e^{-1}$	0	$2e^{-1}$	$4e^{-2}$	mínimo local	$-e^{-1}$
(1,-1)	$-2e^{-1}$	0	$-2e^{-1}$	$4e^{-2}$	máximo local	e^{-1}
(-1,1)	$-2e^{-1}$	0	$-2e^{-1}$	$4e^{-2}$	máximo local	e^{-1}
(-1,-1)	$2e^{-1}$	0	$2e^{-1}$	$4e^{-2}$	mínimo local	$-e^{-1}$



Gráfico



curvas de nível

- No caso de uma função real a uma variável, $f(x)$, o *teste da segunda derivada* só pode ser aplicado num ponto x_0 onde $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)\neq 0$; se $f''(x_0)=0$, o teste nada permite concluir.

- Uma situação semelhante ocorre quando se está em presença de uma função real a duas variáveis, $f(x,y)$. A aplicação do *teste das derivadas parciais de segunda ordem* só é possível em pontos (x_0,y_0) onde $\nabla f(x_0,y_0)=\vec{0}$ e o discriminante $D=AC-B^2\neq 0$. Se $D=0$, o teste nada permite concluir.

Exemplo 53: Sejam as funções

$$f(x,y)=x^4+y^4 \ , \ \ g(x,y)=-(x^4+y^4) \ \text{ e } \ h(x,y)=x^4-y^4$$

No ponto $(0,0)$, cada uma das funções possui gradiente nulo, enquanto o discriminante é $D=0$; nestas condições *o teste das derivadas parciais de segunda ordem é inconclusivo*.
No entanto, analisando o comportamento de cada uma das funções na vizinhança do ponto $(0,0)$,verifica-se:
i) A função *f* possui um *mínimo local* em $(0,0)$;
ii) A função *g* possui um *máximo local* em $(0,0)$;
iii) A função *h* possui um *ponto de sela* em $(0,0)$.
Enquanto as conclusões apontadas em i) e ii) são óbvias, o mesmo já não acontece em iii).
Para confirmar iii), note-se que $h(0,0)=0$, ao passo que em pontos situados na vizinhança de $(0,0)$ a função assume valores positivos e negativos:

$$h(x,0)>0 \text{ , se } x\neq 0$$

$$h(0,y)<0 \text{ , se } y\neq 0$$

Extremos absolutos

- Enquanto a existência de *extremos locais* num ponto interior, $\vec{x}_0$, do domínio de uma função real a várias variáveis depende do comportamento da função numa vizinhança de $\vec{x}_0$, os *extremos absolutos* dependem do comportamento da função em todo o seu domínio.

- Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis:
  i) A função $f(\vec{x})$ tem um *máximo absoluto em* $\vec{x}_0$, se e só se:

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ no domínio de } f(\vec{x}).$$

  ii) A função $f(\vec{x})$ tem um *mínimo absoluto em* $\vec{x}_0$, se e só se:

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ no domínio de } f(\vec{x}).$$

Reconstrução da função a partir do seu gradiente

- O teorema seguinte estabelece as condições para que um *campo vectorial seja gradiente.*

Teorema 15: Seja

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

um campo vectorial continuamente diferenciável num *conjunto aberto conexo* $D \subseteq \mathbb{R}^3$. O *campo vectorial é gradiente*,

$$\vec{f}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$$

se e só se:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ , \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

No caso de

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

e $D \subseteq \mathbb{R}^2$, as condições anteriores reduzem-se a:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Exemplo 57: Verifique que o campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{x}} + 2x\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - \sqrt{x} + 1\right)\vec{j}$$

é gradiente e determine o campo escalar $\varphi(x,y)$, tal que $\vec{f}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

conclui-se que o campo vetorial $\vec{f}(x,y)$ é gradiente; então, existe um campo escalar $\varphi(x,y)$, tal que $\vec{f}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$.
Notando que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{x}} + 2x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}} - \sqrt{x} + 1$$

recorrendo ao integral indefinido, resulta:

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)dx = x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + x^2 + \phi_1(y) + k_1 \qquad (15)$$

$$\varphi(x,y) = \int Q(x,y)dy = x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + y + \phi_2(x) + k_2 \qquad (16)$$

Compatibilizando (15) e (16), obtém-se:

$$\varphi(x,y) = x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + x^2 + y + k$$

Exemplo 58: Verifique que é gradiente o campo vectorial:

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} =$$

$$= (x + y + 1)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (-y + e^z)\vec{k}$$

Obtenha o campo escalar $\varphi(x,y,z)$, tal que $\vec{f}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \ , \ \frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x} \ \text{ e } \ \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

conclui-se que o campo vetorial $\vec{f}(x,y,z)$ é gradiente; então, existe um campo escalar $\varphi(x,y,z)$, tal que $\vec{f}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$.
Notando que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z) = x + y + 1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z) = x - z$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z) = -y + e^z$$

recorrendo ao integral indefinido, resulta:

$$\varphi(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx = \frac{x^2}{2} + xy + x + \phi_1(y,z) + k_1 \qquad (17)$$

$$\varphi(x,y,z) = \int Q(x,y,z)dy = xy - zy + \phi_2(x,z) + k_2 \qquad (18)$$

$$\varphi(x,y,z) = \int R(x,y,z)dz = -yz + e^z + \phi_3(x,y) + k_3 \qquad (19)$$

Compatibilizando (17), (18) e (19), obtém-se:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + x + xy - yz + e^z + k$$