# INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE; FLUXO

## Massa de uma superfície

- Considere-se uma distribuição de matéria sobre uma superfície $S$ (*superfície material*). Se o campo escalar que exprime a densidade do material (massa por unidade de área) for constante, $\lambda$, então a massa da *superfície material* é dada pelo produto da densidade pela área de $S$, $A(S)$.
  Assim, se $S$ é uma superfície *simples* e *regular* parametrizada através de uma função vectorial diferenciável

  $$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{j} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

  então a massa de $S$, $M(S)$, é dada por

  $$M(S) = \lambda A(S) = \lambda \iint_{\Omega} \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv$$

  onde $\vec{N}(u,v)$ é o *produto vectorial fundamental* de $S$.
  No entanto, se a densidade variar de ponto para ponto, $\lambda(x,y,z)$, então a massa só pode ser obtida através de um processo de integração.
  Com efeito, é possível provar que:

  $$M(S) = \iint_{\Omega} \lambda\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right] \ \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv$$

  $$= \iint_{\Omega} \lambda\left[\vec{r}(u,v)\right] \ \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv \qquad (1)$$

# Integral de superfície

- O integral duplo expresso em (1) pode ser generalizado para um qualquer campo escalar, $h(x,y,z)$, que seja contínuo na superfície *S*. Este integral é, genericamente, designado por *integral de superfície de* $h(x,y,z)$ *sobre S* e escreve-se:

$$\iint_S h(x,y,z)\,dS = \iint_\Omega h\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]\,\left\|\vec{N}(u,v)\right\|dudv$$

Se $h(x,y,z)=1$, então:

$$A(S)=\iint_S dS = \iint_\Omega \left\|\vec{N}(u,v)\right\|dudv$$

**Exemplo 1**: Determine o integral de superfície do campo escalar $h(x,y,z)=xy$ sobre a superfície *S* parametrizada através de

$$\vec{r}(u,v)=u\vec{a}+v\vec{b}\ ,\ (u,v)\in\Omega$$

em que $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ e $\Omega\ :\ 0\le u\le 1\ ,\ 0\le v\le 1$.

Solução:

Notando que

$$\vec{N}(u,v)=\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=3\vec{j}+3\vec{k}\ \Rightarrow\ \left\|\vec{N}(u,v)\right\|=3\sqrt{2}$$

$$\vec{r}(u,v)=(2u+v)\vec{i}+(-u+v)\vec{j}+(u-v)\vec{k}$$

$$h\left[\vec{r}(u,v)\right]=x(u,v)y(u,v)=(2u+v)(-u+v)=-2u^2+v^2+uv$$

obtém-se para o integral de superfície:

$$\iint_S xy\ dS = 3\sqrt{2}\int_0^1\int_0^1(-2u^2+v^2+uv)dudv =$$

$$= 3\sqrt{2}\int_0^1\left[-\frac{2}{3}u^3+v^2u+\frac{1}{2}vu^2\right]_0^1 dv = 3\sqrt{2}\int_0^1\left(v^2+\frac{1}{2}v-\frac{2}{3}\right)dv =$$

$$= 3\sqrt{2}\left[\frac{1}{3}v^3+\frac{1}{4}v^2-\frac{2}{3}v\right]_0^1 = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

**Exemplo 2**: Calcule o integral de superfície do campo escalar $h(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ sobre a superfície $S$ parametrizada através de

$$\vec{r}(u,v) = u\cos(2v)\vec{i} + u\,\mathrm{sen}(2v)\vec{j} + 2v\vec{k}\ ,\ (u,v)\in\Omega$$

em que $\Omega$ : $0\le u\le 1$ , $0\le v\le \pi$ .

Solução:

Notando que

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(2v) & \mathrm{sen}(2v) & 0 \\ -u\,\mathrm{sen}(2v) & u\cos(2v) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,\mathrm{sen}(2v)\vec{i} - 2\cos(2v)\vec{j} + 2u\vec{k}$$

$$\left\|\vec{N}(u,v)\right\| = 2\sqrt{1+u^2}$$

$$h\left[\vec{r}(u,v)\right]=\sqrt{x^2(u,v)+y^2(u,v)}=$$

$$=\sqrt{u^2\cos^2(2v)+u^2\mathrm{sen}^2(2v)}=|u|=u \quad (0\le u\le 1)$$

obtém-se para o integral de superfície:

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS = 2\int_0^{\pi}\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,du\,dv=\frac{2}{3}\pi\left[\left(1+u^2\right)^{3/2}\right]_0^1=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

- As coordenadas do centroide, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, de uma superfície $S$ têm os seguintes valores

$$\bar{x}=\frac{1}{A(S)}\iint_S x\,dS \quad , \quad \bar{y}=\frac{1}{A(S)}\iint_S y\,dS \quad , \quad \bar{z}=\frac{1}{A(S)}\iint_S z\,dS$$

  onde $A(S)$ é a área da superfície:

$$A(S)=\iint_S dS$$

- As coordenadas do centro de massa, $(x_M,y_M,z_M)$, de uma superfície $S$ com densidade $\lambda(x,y,z)$ têm os seguintes valores

$$x_M=\frac{1}{M(S)}\iint_S x\lambda(x,y,z)\,dS \quad , \quad y_M=\frac{1}{M(S)}\iint_S y\lambda(x,y,z)\,dS$$

$$z_M=\frac{1}{M(S)}\iint_S z\lambda(x,y,z)\,dS$$

  onde $M(S)$ é a massa da superfície:

$$M(S)=\iint_S \lambda(x,y,z)\,dS$$

**Exemplo 3**: Determine a posição do centro de massa da superfície $S$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \ z \geq 0$$

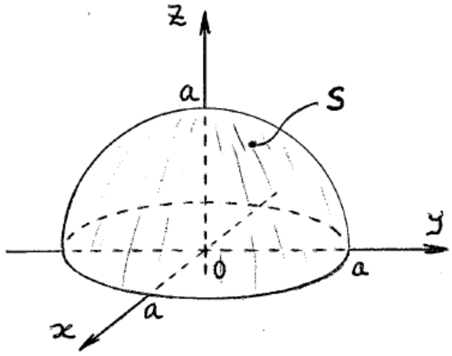
sabendo que a densidade, em cada um dos seus pontos, é directamente proporcional à distância ao plano $xOy$.

Solução:

A superfície $S$ é uma casca semi-esférica que pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{i} + a\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k} \ , \ (\theta,\phi) \in R$$

em que $R : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \phi \leq \pi/2$ (exemplo 5, capítulo 6).




A norma do seu produto vectorial fundamental é (exemplo 14, capítulo 6):

$$\left\| \vec{N}(\theta,\phi) \right\| = a^2 \text{sen}(\phi)$$

Por razões de simetria (geométrica e mássica), $x_M = y_M = 0$; resta o cálculo da cota do centro de massa.
O campo escalar que define a densidade pode ser escrito sob a forma

$$\lambda(x,y,z) = kz \ , \ k > 0$$

onde $k$ é uma constante de proporcionalidade.

Notando que

$$h\left[\vec{r}\,(\theta,\phi)\right] = kz(\theta,\phi) = ka\cos(\phi)$$

a massa da superfície é:

$$M(S) = \iint_S \lambda(x,y,z)\ dS = ka^3 \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \cos(\phi)\mathrm{sen}(\phi)\ d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi ka^3 \int_0^{\pi/2} \cos(\phi)\mathrm{sen}(\phi)\ d\phi = \pi ka^3 \left[\mathrm{sen}^2(\phi)\right]_0^{\pi/2} = \pi ka^3$$

Por outro lado, dado que

$$(zh)\left[\vec{r}\,(\theta,\phi)\right] = kz^2(\theta,\phi) = ka^2\cos^2(\phi)$$

então:

$$\iint_S z\lambda(x,y,z)\ dS = ka^4 \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\ d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi ka^4 \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\ d\phi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi ka^4 \left[-\cos^3(\phi)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi ka^4$$

Obtém-se, então:

$$z_M = \frac{1}{M(S)}\iint_S z\lambda(x,y,z)\ dS = \frac{2}{3}a$$

Concluindo, o centro de massa da superfície é o ponto de coordenadas:

$$(x_M, y_M, z_M) = \left(0, 0, \frac{2}{3}a\right)$$

## Fluxo de um campo vectorial

- Admita-se que

$$S \;:\; \vec{r}(u,v)\;,\;(u,v)\in\Omega \tag{2}$$

é uma superfície *simples* e *regular*, tendo como vector normal o vector unitário $\vec{n}(x,y,z)$ que é contínuo em $S$; nestas condições, a superfície $S$ chama-se *superfície orientada*. Convém notar que uma superfície deste tipo possui dois lados: o lado com vector normal $\vec{n}$ e o lado com vector normal $-\vec{n}$.

- Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial contínuo em $S$, então o integral de superfície dado por

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_S \left[\vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\right]dS \tag{3}$$

é designado por *fluxo de* $\vec{v}(x,y,z)$ *através de S na direcção de* $\vec{n}$.

- O fluxo de um campo vectorial através de uma superfície depende da escolha do vector normal unitário. Se, em vez de $\vec{n}$, for considerado o vector $-\vec{n}$, o fluxo altera o seu sinal, isto é:

$$\iint_S \left[\vec{v}\cdot(-\vec{n})\right]dS = \iint_S -(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dS = -\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\,dS$$

- Tendo em conta (2), o integral de fluxo (3) pode ser escrito sob a forma

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\,dS = \iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{n}\left[\vec{r}(u,v)\right]\left\|\vec{N}(u,v)\right\|\,dudv \tag{4}$$

- O integral de fluxo (4) pode ser reescrito apenas em função do produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u,v)$. Assim,

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\; dS = \iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}\left[\vec{r}(u,v)\right]\; dudv \tag{5}$$

se os vectores $\vec{n}(u,v)$ e $\vec{N}(u,v)$ possuem o mesmo sentido:

$$\vec{n}(u,v) = +\frac{\vec{N}(u,v)}{\left\|\vec{N}(u,v)\right\|}$$

Por outro lado,

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\; dS = -\iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}\left[\vec{r}(u,v)\right]\; dudv \tag{6}$$

se os vectores $\vec{n}(u,v)$ e $\vec{N}(u,v)$ possuem sentidos opostos:

$$\vec{n}(u,v) = -\frac{\vec{N}(u,v)}{\left\|\vec{N}(u,v)\right\|}$$

**Exemplo 4**: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

através da superfície esférica

$$S \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

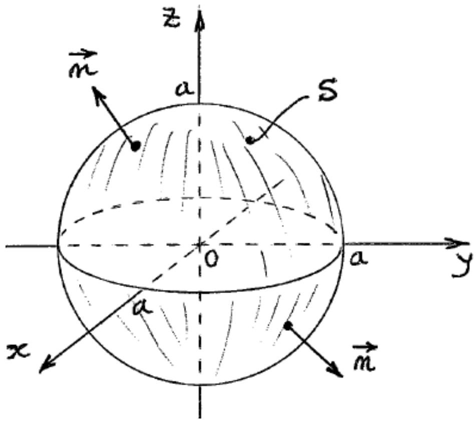
no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:

A superfície *S* pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + a\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k} \;,\; (\theta,\phi)\in R$$

em que $R\;:\; 0 \le \theta \le 2\pi \;,\; 0 \le \phi \le \pi$ (exemplo 5, capítulo 6).




O produto vectorial fundamental é (exemplo 10, capítulo 6):

$$\vec{N}(\theta,\phi) = -a^2\text{sen}(\phi)\Big(\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{i} + \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{j} + \cos(\phi)\vec{k}\Big)$$

Dado que $-a^2\text{sen}(\phi)\cos(\phi) < 0$ se $\phi < \pi/2$, então o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(\theta,\phi)$, está orientado no sentido *de fora para dentro* de *S*, ou seja, tem o sentido oposto ao do vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(\theta,\phi)$. Nestas condições, atendendo a (6) e sabendo que

$$\vec{v}\big[\vec{r}(\theta,\phi)\big] = x(\theta,\phi)\vec{i} + y(\theta,\phi)\vec{j} = a\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{i} + a\ \text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{j}$$

$$\vec{v}\big[\vec{r}(\theta,\phi)\big]\cdot\vec{N}(\theta,\phi) = -a^3\text{sen}^3(\phi)\Big(\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta)\Big) = -a^3\text{sen}^3(\phi)$$

obtém-se para o fluxo:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} -a^3\text{sen}^3(\phi)\ d\theta d\phi = 2\pi a^3\int_0^{\pi}\text{sen}^3(\phi)\ d\phi =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\pi}\text{sen}(\phi)\ d\phi - 2\pi a^3\int_0^{\pi}\text{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\ d\phi =$$

$$= -2\pi a^3\big[\cos(\phi)\big]_0^{\pi} + \frac{2}{3}\pi a^3\Big[\cos^3(\phi)\Big]_0^{\pi} =$$

$$= 4\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{8}{3}\pi a^3$$

**Exemplo 5**: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

através da superfície do paraboloide

$$S \ : \ z = 1 - (x^2 + y^2) \ , \ z \geq 0$$

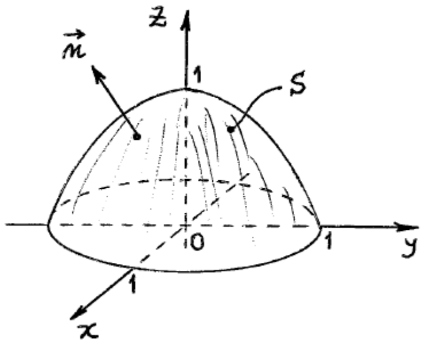
no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:

A superfície *S* pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1 - u^2 - v^2)\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

em que $\Omega : 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$.




O produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = 2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u,v)$, e o vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(u,v)$, estão orientados no mesmo sentido, isto é, no sentido *de dentro para fora* de *S*. Assim, atendendo a (5) e sabendo que

$$\vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right] = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} = u\vec{i} + v\vec{j} + (1-u^2-v^2)\vec{k}$$

$$\vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}(u,v) = 2u^2 + 2v^2 + 1 - u^2 - v^2 = 1 + u^2 + v^2$$

obtém-se para o fluxo:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = \iint_\Omega (1+u^2+v^2)\ dudv$$

Considerando (*coordenadas polares*)

$$u = r\cos(\theta) \ \ ,\ \ v = r\ \operatorname{sen}(\theta) \ \ ,\ \ dudv = r\ drd\theta$$

então

$$1+u^2+v^2 = 1+r^2\ ,\ (r,\theta)\in\Omega_1$$

$$\Omega_1 : 0 \le \theta \le 2\pi\ ,\ 0 \le r \le 1$$

e, portanto:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = \iint_\Omega (1+u^2+v^2)\ dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(1+r^2)\ drd\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 r\ drd\theta + 2\pi\int_0^1 r^3\ drd\theta = \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

- O fluxo através de uma *superfície orientada e fechada por secções* (a superfície lateral de um cubo, de um cilindro fechado nas suas bases, de um paraboloide fechado na sua base, etc.) pode ser determinado calculando-o em cada uma das secções e somando as contribuições de cada uma destas secções.

**Exemplo 6**: Calcule o fluxo do campo vectorial

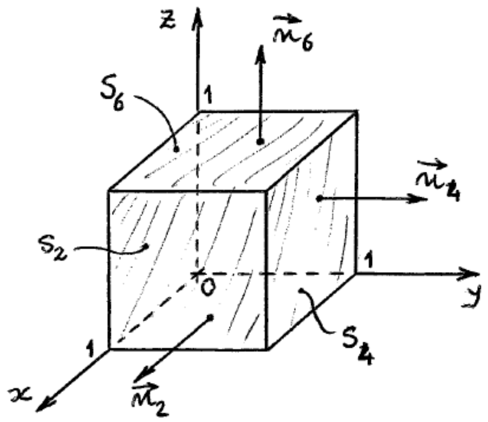
$$\vec{v}(x,y,z) = xy\vec{i} + 4yz^2\vec{j} + yz\vec{k}$$

através da superfície lateral, $S$, do cubo unitário

$$0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:




A superfície lateral do cubo, $S$, pode ser decomposta em seis secções quadradas, cujos vectores normais unitários, orientados de acordo com o que é exigido no problema, são:

$$S_1 \; : \; x = 0 \, , \, 0 \le y \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1 \;\Rightarrow\; \vec{n}_1 = -\vec{i}$$

$$S_2 \; : \; x = 1 \, , \, 0 \le y \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1 \;\Rightarrow\; \vec{n}_2 = \vec{i}$$

$$S_3 \; : \; y = 0 \, , \, 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1 \;\Rightarrow\; \vec{n}_3 = -\vec{j}$$

$$S_4 \; : \; y = 1 \, , \, 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1 \;\Rightarrow\; \vec{n}_4 = \vec{j}$$

$$S_5 \; : \; z = 0 \, , \, 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le 1 \;\Rightarrow\; \vec{n}_5 = -\vec{k}$$

$$S_6 \; : \; z = 1 \, , \, 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le 1 \;\Rightarrow\; \vec{n}_6 = \vec{k}$$

Em relação à secção $S_1$ obtém-se:

$$\vec{v}(0,y,z) = 4yz^2\vec{j} + yz\vec{k} \quad , \quad \vec{v}\cdot\vec{n}_1 = 0$$

$$\iint_{S_1} (\vec{v}\cdot\vec{n}_1)\ dS = 0$$

Em relação à secção $S_2$ obtém-se:

$$\vec{v}(1,y,z) = y\vec{i} + 4yz^2\vec{j} + yz\vec{k} \quad , \quad \vec{v}\cdot\vec{n}_2 = y$$

$$\iint_{S_2} (\vec{v}\cdot\vec{n}_2)\ dS = \int_0^1\int_0^1 y\ dydz = \frac{1}{2}$$

Em relação à secção $S_3$ obtém-se:

$$\vec{v}(x,0,z) = \vec{0} \quad , \quad \vec{v}\cdot\vec{n}_3 = 0$$

$$\iint_{S_3} (\vec{v}\cdot\vec{n}_3)\ dS = 0$$

Em relação à secção $S_4$ obtém-se:

$$\vec{v}(x,1,z) = x\vec{i} + 4z^2\vec{j} + z\vec{k} \quad , \quad \vec{v}\cdot\vec{n}_4 = 4z^2$$

$$\iint_{S_4} (\vec{v}\cdot\vec{n}_4)\ dS = \int_0^1\int_0^1 4z^2\ dxdz = \frac{4}{3}$$

Em relação à secção $S_5$ obtém-se:

$$\vec{v}(x,y,0) = xy\vec{i} \quad , \quad \vec{v}\cdot\vec{n}_5 = 0$$

$$\iint_{S_5} (\vec{v}\cdot\vec{n}_5)\ dS = 0$$

Em relação à secção $S_6$ obtém-se:

$$\vec{v}(x,y,1) = xy\vec{i} + 4y\vec{j} + y\vec{k} \quad , \quad \vec{v} \cdot \vec{n}_6 = y$$

$$\iint_{S_6} (\vec{v} \cdot \vec{n}_6)\ dS = \int_0^1 \int_0^1 y\ dxdy = \frac{1}{2}$$

O fluxo total através da superfície lateral do cubo, *S*, no sentido *de dentro para fora* da superfície, é:

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\ dS = \sum_{i=1}^{6} \iint_{S_i} (\vec{v} \cdot \vec{n}_i)\ dS = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{3}$$

- A noção de fluxo é muito importante quando se estuda um fluido em movimento. Admita-se que a superfície *S* está mergulhada num fluido e defina-se o *sentido do vector normal unitário*, $\vec{n}$, em cada um dos seus pontos.

  Seja $\vec{v}$ o campo vectorial que define, em cada ponto, o vector velocidade do fluido que atravessa *S*. Para simplificar a análise, considere-se que $\vec{v}$ não varia com o tempo (escoamento em *regime estacionário*).

  O fluxo de $\vec{v}$ através da superfície *S* é igual ao produto da área de *S* pelo valor médio da norma da componente de $\vec{v}$ na direcção de $\vec{n}$; do ponto de vista físico, trata-se do volume de fuido que atravessa *S* por unidade de tempo (*caudal*), a partir do lado da superfície com *vector normal* $-\vec{n}$ para o lado com *vector normal* $\vec{n}$.

## Integrais de fluxo: outras notações

- A expressão do integral de fluxo apresentada em (5) pode ser reescrita, tal como aconteceu com o integral de linha, usando uma *notação diferencial*.
  Assim, considere-se o campo vectorial

  $$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

  e a superfície *S* parametrizada através de:

  $$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad , \quad (u,v) \in \Omega$$

  Seja o produto vectorial fundamental dado por:

  $$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} =$$

  $$= \begin{vmatrix} \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v \end{vmatrix}\vec{k} =$$

  $$= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}$$

  Notando que

  $$\vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right] \cdot \vec{N}\left[\vec{r}(u,v)\right] =$$

  $$= P\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

resulta:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = \iint_\Omega P\left[\vec{r}\,(u,v)\right]\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\ dudv +$$

$$+\iint_\Omega Q\left[\vec{r}\,(u,v)\right]\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\ dudv + \iint_\Omega R\left[\vec{r}\,(u,v)\right]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ dudv$$

Designando na expressão anterior

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv = dy\wedge dz$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dudv = dz\wedge dx$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv = dx\wedge dy$$

obtém-se, em alternativa,

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = \iint_S P(x,y,z)\ dy\wedge dz + \iint_S Q(x,y,z)\ dz\wedge dx +$$

$$+\iint_S R(x,y,z)\ dx\wedge dy$$

ou ainda, sob uma forma mais compacta:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = \iint_S Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$

## Teorema de Gauss (da divergência)

- Seja $\Omega$ uma região de Jordan limitada por uma curva de Jordan suave por secções, *C*, e sejam *P* e *Q* campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém $\Omega$.
  Como se viu anteriormente, o teorema de Green permite exprimir o integral de linha de um campo vectorial ao longo de *C* através de um integral duplo sobre a região $\Omega$

$$\iint_\Omega \left[ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dxdy = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

  onde o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva *C*, percorrida no sentido directo.

- É possível mostrar que o teorema de Green pode ser reescrito, em termos vectoriais, sob a forma

$$\iint_\Omega (\nabla \cdot \vec{v})\ dxdy = \oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n})\ ds \qquad (7)$$

  onde o integral à direita está definido em relação ao comprimento de arco, sendo $\vec{n}$ o vector unitário normal à tangente à curva *C*, dirigido para o exterior da região $\Omega$.
  Assim, considerando

$$\vec{v}(x,y) = Q(x,y)\vec{i} - P(x,y)\vec{j}$$

  então:

$$\iint_\Omega (\nabla \cdot \vec{v})\ dxdy = \iint_\Omega \left[ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dxdy$$

  Resta mostrar que:

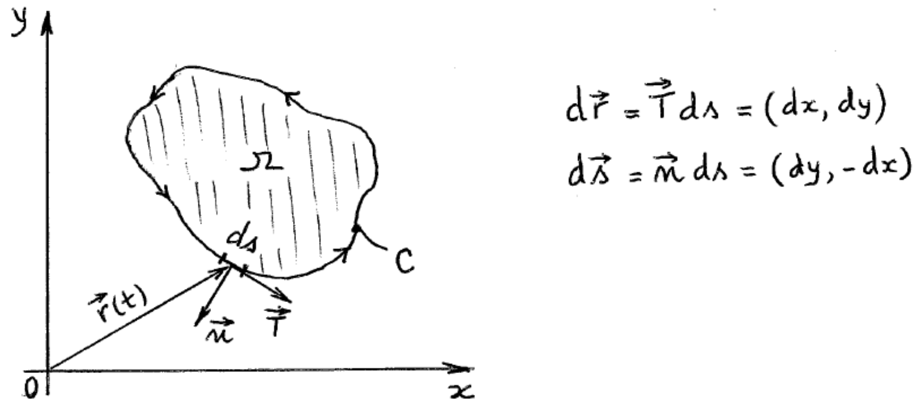
$$\oint_C (\vec{v}\cdot\vec{n})\ ds = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Dado que $C$ é percorrida no sentido directo, então

$$\vec{n} = \vec{T}\times\vec{k}$$

em que $\vec{T}$ é o versor da tangente à curva $C$ em cada um dos seus pontos, e, portanto:

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = \vec{v}\cdot(\vec{T}\times\vec{k}) = \vec{k}\cdot(\vec{v}\times\vec{T}) = \vec{T}\cdot(\vec{k}\times\vec{v}) = -\vec{T}\cdot(\vec{v}\times\vec{k}) = (-\vec{v}\times\vec{k})\cdot\vec{T}$$




Assim, notando que

$$-\vec{v}\times\vec{k} = (-Q\vec{i} + P\vec{j})\times\vec{k} = (-Q\vec{i}\times\vec{k}) + (P\vec{j}\times\vec{k}) = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

resulta:

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = (P\vec{i} + Q\vec{j})\cdot\vec{T}$$

Finalmente, tendo em conta que

$$d\vec{r} = \vec{T}ds = (dx, dy)$$

obtém-se:

$$\oint_C (\vec{v}\cdot\vec{n})\ ds = \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j})\cdot\vec{T}\ ds = \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j})\cdot d\vec{r} = \oint_C Pdx + Qdy$$

- Por outro lado, se se considerar

$$\vec{v}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

então

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

obtendo-se

$$\iint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v})\ dxdy = \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \right] dxdy =$$

$$= \oint_C -Q(x,y)dx + P(x,y)dy = \oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n})\ ds = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad (8)$$

em que:

$$d\vec{s} = \vec{n}ds = (dy, -dx)$$

A equação (8) representa o *fluxo do campo vectorial* $\vec{v}(x,y)$ *através da curva C na direcção de* $\vec{n}$.

- O teorema de Green apresentado em (7) pode ser transposto para o espaço tridimensional, sendo, neste caso, designado por *teorema da divergência* ou *teorema de Gauss*.

**Teorema 1**: Seja *T* um sólido limitado por uma superfície, *S*, *fechada e orientada* e seja $\vec{n}$ o versor normal a *S* em cada um dos seus pontos, dirigido para o exterior de *S*. Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial com derivadas parciais contínuas em *S*, então:

$$\iiint_T (\nabla \cdot \vec{v})\ dxdydz = \oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\ dS = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

**Exemplo 7**: Resolva o problema do exemplo 4 recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

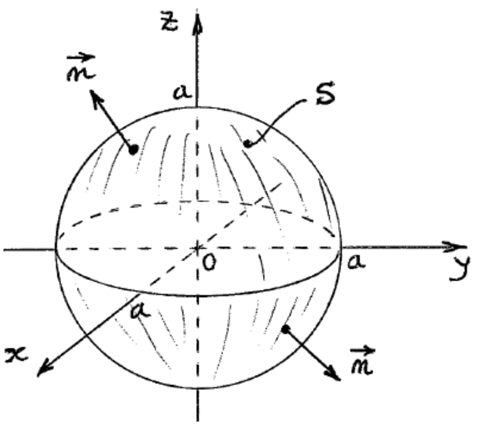
Solução:

Neste caso a superfície esférica

$$S \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

é uma superfície fechada e orientada que limita o sólido *T* (esfera):

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\right\}$$




Dado que se pretende calcular o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície *S*, o teorema de Gauss permite escrever

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS = \iiint_T (\nabla\cdot\vec{v})\, dxdydz$$

em que:

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} = 2$$

Obtém-se, então,

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\ dS = 2\iiint_T dxdydz = 2\ V(T) = \frac{8}{3}\pi a^3$$

onde

$$V(T) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

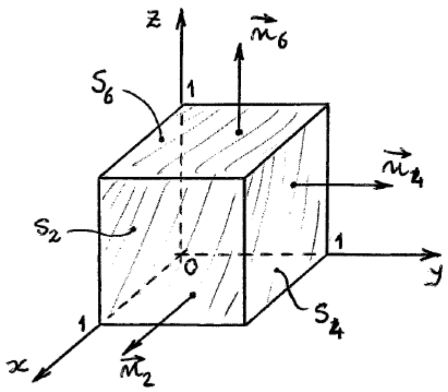
é o volume da esfera *T*.

**Exemplo 8**: Resolva o problema do exemplo 6 recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

Solução:

Neste caso, *S* é a superfície lateral do sólido *T* (cubo):

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\ ,\ 0 \le z \le 1\right\}$$




Dado que se pretende calcular o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy\vec{i} + 4yz^2\vec{j} + yz\vec{k}$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície *S*, o teorema de Gauss permite escrever

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\; dS = \iiint_T (\nabla\cdot\vec{v})\; dxdydz$$

em que:

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + 4\frac{\partial(yz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = 2y + 4z^2$$

Obtém-se, então:

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\; dS = 2\iiint_T (y+2z^2)\; dxdydz = 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y+2z^2)\; dxdydz =$$

$$= 2\int_0^1\int_0^1 (y+2z^2)\; dydz = 2\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2 + 2z^2 y\right]_0^1 dz =$$

$$= \int_0^1 \left(1+4z^2\right)dz = \left[z + \frac{4}{3}z^3\right]_0^1 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$$

**Exemplo 9**: Determine o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície cilíndrica fechada, *S*, limitada pelas superfícies $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = 2$:

a) Recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

b) Considerando a definição de integral de fluxo.

Solução:

a) A superfície *S* constitui a superfície lateral do sólido *T* (cilindro):

$$T = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; 0 \le (x+1)^2 + y^2 \le 1 \;,\; 0 \le z \le 2\right\}$$

Tendo em atenção que

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 + x^2 + y^2$$

e dado que o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ é no sentido *de fora para dentro* da superfície *S*, o teorema de Gauss permite escrever:

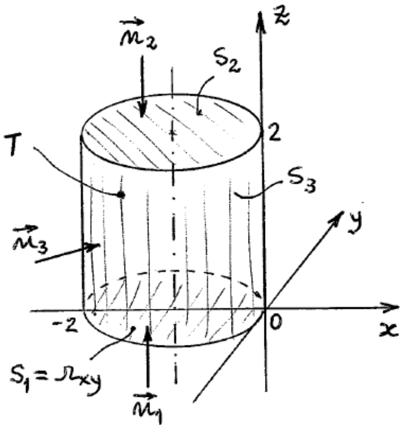
$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS = -\iiint_T (\nabla \cdot \vec{v})\, dxdydz = -\iiint_T (1 + x^2 + y^2)\, dxdydz \qquad (9)$$

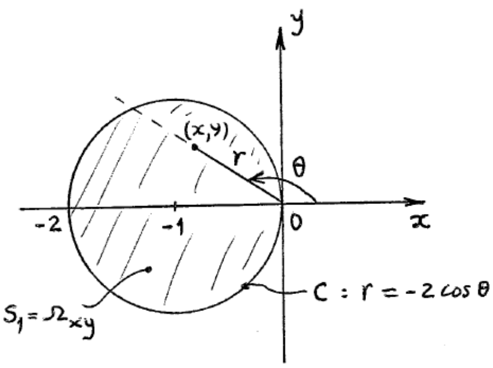
A projecção do sólido, *T*, sobre o plano *xOy* é a região circular, $\Omega_{xy}$, definida por

$$\Omega_{xy} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le (x+1)^2 + y^2 \le 1 \right\}$$

ou seja, é o conjunto de todos os pontos $(x,y)$ que possuem coordenadas polares $(r,\theta)$ no conjunto:

$$\Gamma \ : \ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2} \ , \ 0 \le r \le -2\cos(\theta)$$




Assim, o sólido, *T*, pode ser descrito, em coordenadas cilíndricas, pela região:

$$\Pi \ : \ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2} \ , \ 0 \le r \le -2\cos(\theta) \ , \ 0 \le z \le 2$$

O integral de fluxo apresentado em (9) pode, então, ser reescrito sob a forma:

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = -\iiint_T (1+x^2+y^2)\ dxdydz = -\iiint_\Pi (1+r^2)\ r\ \ drd\theta dz =$$

$$= -\int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{-2\cos(\theta)} (r+r^3)\ drd\theta dz =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \Big[2r^2 + r^4\Big]_0^{-2\cos(\theta)} d\theta dz =$$

$$= -\int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \Big(2\cos^2(\theta) + 4\cos^4(\theta)\Big)\ d\theta dz \tag{10}$$

Particularizando, verifica-se:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(\theta)\ d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \big(1+\cos(2\theta)\big)\ d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\big[2\theta + \mathrm{sen}(2\theta)\big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

Por outro lado, aplicando um processo de integração por partes e atendendo a (11), resulta:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^4(\theta)\ d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\theta)\cos^3(\theta)\ d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{sen}(\theta)\cos^3(\theta)\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{3}{4}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(\theta)\ d\theta = \frac{3\pi}{8} \tag{12}$$

Finalmente, substituindo em (10), obtém-se:

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = -\frac{5\pi}{2}\int_0^2 dz = -5\pi$$

b) O cálculo através da definição de integral de fluxo exige, neste caso, o cálculo do fluxo através de cada uma das três superfícies elementares que limitam o sólido $T$ (o cilindro da figura da página 7.23), nomeadamente, as duas regiões circulares, $S_1$ e $S_2$, que correspondem às bases do cilindro, e a região cilíndrica, $S_3$, que constitui a sua superfície lateral.

Em relação à secção $S_1$ obtém-se:

$$\vec{v}(x,y,0) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$$

$$\vec{n}_1 = \vec{k} \;\Rightarrow\; \vec{v}\cdot\vec{n}_1 = 0$$

$$\iint_{S_1} (\vec{v}\cdot\vec{n}_1)\, dS = 0 \tag{13}$$

Em relação à secção $S_2$ obtém-se:

$$\vec{v}(x,y,2) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{n}_2 = -\vec{k} \;\Rightarrow\; \vec{v}\cdot\vec{n}_2 = -2$$

$$\iint_{S_2} (\vec{v}\cdot\vec{n}_2)\, dS = -2\iint_{S_2} dxdy = -2A(S_2) = -2\pi \tag{14}$$

onde $A(S_2) = \pi$ é a área da região $S_2$ (região circular de raio um).

A região cilíndrica $S_3$ pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(\theta,z) = -2\cos^2(\theta)\vec{i} - 2\cos(\theta)\text{sen}(\theta)\vec{j} + z\vec{k}\ ,\ (\theta,z)\in R$$

em que:

$$R\ :\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}\ ,\ 0 \le z \le 2$$

O produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(\theta,z) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) & \mathrm{sen}^2(\theta)-\cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(\mathrm{sen}^2(\theta)-\cos^2(\theta)\right)\vec{i} - 4\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k} \qquad (15)$$

A análise da expressão (15) permite verificar que o vector $\vec{N}(\theta,z)$ está orientado no sentido *de dentro para fora* da superfície $S_3$, isto é, tem o sentido oposto ao do vector unitário normal à superfície, $\vec{n}_3(\theta,z)$. Nestas condições, atendendo a (6) e sabendo que

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,z)\right] = -8\cos^4(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta)\vec{i} - 8\cos^5(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,z)\right]\cdot\vec{N}(\theta,z) = -16\cos^4(\theta)\mathrm{sen}^4(\theta) + 48\cos^6(\theta)\mathrm{sen}^2(\theta) =$$

$$= -16\cos^4(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)^2 + 48\cos^6(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right) =$$

$$= -16\cos^4(\theta) + 80\cos^6(\theta) - 64\cos^8(\theta)$$

obtém-se:

$$\iint_{S_3}(\vec{v}\cdot\vec{n}_3)\; dS = -\iint_R \vec{v}\left[\vec{r}(\theta,z)\right]\cdot\vec{N}(\theta,z)\; d\theta dz =$$

$$= 16\int_0^2\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\cos^4(\theta) - 5\cos^6(\theta) + 4\cos^8(\theta)\right)d\theta dz \qquad (16)$$

Aplicando um processo de integração por partes e atendendo a (12), resulta:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^6(\theta)\; d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\theta)\cos^5(\theta)\; d\theta =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\mathrm{sen}(\theta)\cos^5(\theta)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{5}{6}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^4(\theta)\; d\theta = \frac{5\pi}{16} \qquad (17)$$

Por outro lado, aplicando um processo de integração por partes e atendendo a (17), resulta:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^8(\theta)\, d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\theta)\cos^7(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\operatorname{sen}(\theta)\cos^7(\theta)\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{7}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^6(\theta)\, d\theta = \frac{35\pi}{128} \qquad (18)$$

Substituindo em (16) os valores obtidos em (12), (17) e (18), conclui-se que o fluxo através da superfície $S_3$ é:

$$\iint_{S_3} (\vec{v}\cdot\vec{n}_3)\, dS = 16\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{25\pi}{16} + \frac{35\pi}{32}\right)\int_0^2 dz = -3\pi \qquad (19)$$

Finalmente, tendo em conta (13), (14) e (19), o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ no sentido *de fora para dentro* da superfície cilíndrica fechada $S$ tem o valor:

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS = \sum_{i=1}^{3}\iint_{S_i} (\vec{v}\cdot\vec{n}_i)\, dS = 0 - 2\pi - 3\pi = -5\pi$$

## Teorema de Stokes

- Considere-se novamente o teorema de Green. Se $\Omega$ é uma região de Jordan limitada por uma curva de Jordan suave por secções, *C*, e *P* e *Q* são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém $\Omega$, então

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_{C}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

onde o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva *C*, percorrida no sentido directo.

- Considerando agora o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,0)=P(x,y,0)\vec{i}+Q(x,y,0)\vec{j}+0\vec{k}$$

então o rotacional de $\vec{v}(x,y,0)$ é

$$\nabla\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

e, portanto:

$$\left(\nabla\times\vec{v}\right)\cdot\vec{k}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

Assim, o teorema de Green pode ser reescrito, em termos do campo vectorial $\vec{v}$, sob a forma

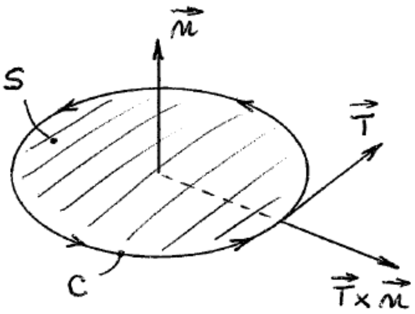
$$\iint_{\Omega}\left[\left(\nabla\times\vec{v}\right)\cdot\vec{k}\right]\,dxdy=\oint_{C}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{C}\vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \qquad (20)$$

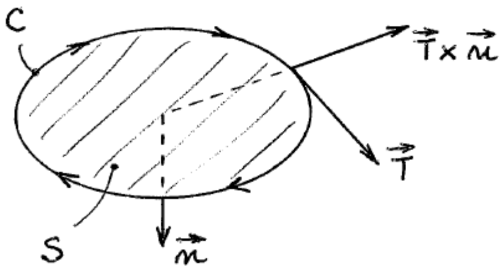
- A propriedade expressa em (20) pode ser aplicada a uma superfície plana do espaço $\mathbb{R}^3$.

  Seja *S* uma superfície plana de $\mathbb{R}^3$ limitada por uma curva de Jordan suave por secções, *C*. Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém *S*, então

$$\iint_S \left[ (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} \right] dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (21)$$

  onde $\vec{n}$ é o vector unitário normal a *S* e o integral à direita é o integral de linha definido no *sentido positivo em relação a* $\vec{n}$, ou seja, no sentido do versor da tangente, $\vec{T}$, à curva *C*, que é definido de modo que o versor $\vec{T} \times \vec{n}$ aponte na direcção exterior à superfície *S*.



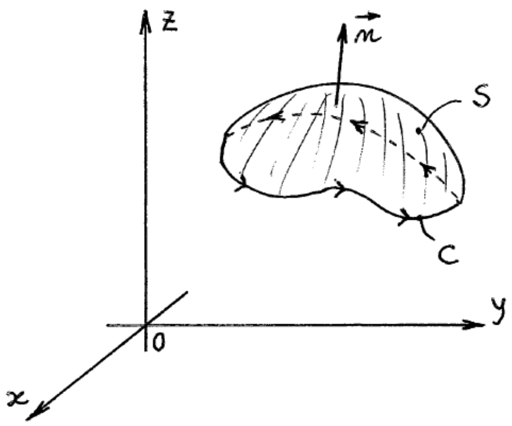

  Por convenção, diz-se que a curva *C* é percorrida no *sentido positivo em relação a* $\vec{n}$, se a superfície *S* se situar sempre à esquerda quando se percorre a curva *C* com a cabeça orientada na direcção e sentido do vector $\vec{n}$.

- No teorema seguinte, designado por *teorema de Stokes*, o integral de fluxo definido em (21) é generalizado para uma *superfície regular e orientada* no espaço $\mathbb{R}^3$.

**Teorema 2**: Seja $S$ uma *superfície regular e orientada* limitada por uma curva de Jordan suave por secções, $C$. Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém $S$, então

$$\iint_S \left[ (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} \right] \, dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

onde $\vec{n}$ é um vector unitário normal que varia continuamente em $S$ e o integral à direita é o integral de linha definido no *sentido positivo em relação a* $\vec{n}$.




**Exemplo 10**: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - xyz\vec{k}$$

através da superfície parabólica

$$S \; : \; z = 1 - (x^2 + y^2) \; , \; z \geq 0$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície:

a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x^2y & -xyz \end{vmatrix} = (-xz)\vec{i} + (yz)\vec{j} + 0\vec{k}$$

A superfície $S$ pode ser parametrizada através de

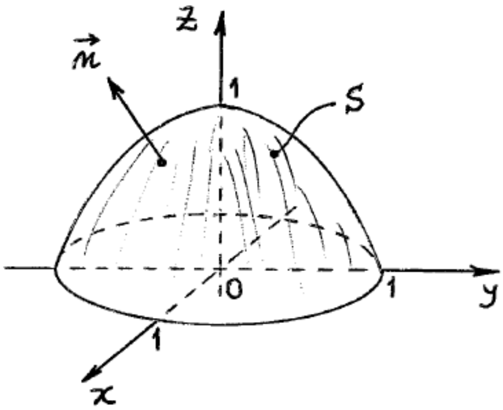
$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1-u^2-v^2)\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

em que:

$$\Omega : 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1$$

O produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = 2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k}$$




Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u,v)$, e o vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(u,v)$, estão orientados no mesmo sentido, isto é, no sentido *de dentro para fora* de $S$.
Assim, atendendo a (5) e sabendo que

$$(\nabla \times \vec{v})\left[\vec{r}(u,v)\right] = -u(1-u^2-v^2)\vec{i} + v(1-u^2-v^2)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$(\nabla\times\vec{v})\left[\vec{r}\,(u,v)\right]\cdot\vec{N}(u,v)=-2(u^2-v^2)+2(u^4-v^4)$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla\times\vec{v}$ através de *S*:

$$\iint_S\left[\left(\nabla\times\vec{v}\right)\cdot\vec{n}\right]\,dS=-2\iint_\Omega\left((u^2-v^2)-(u^4-v^4)\right)\,dudv$$

Considerando (*coordenadas polares*)

$$u=r\cos(\theta)\quad,\quad v=r\ \text{sen}(\theta)\quad,\quad dudv=r\ drd\theta$$

então

$$(u^2-v^2)-(u^4-v^4)=r^2\left(\cos^2(\theta)-sen^2(\theta)\right)+$$

$$+r^4\left(\cos^4(\theta)-\text{sen}^4(\theta)\right)\ ,\ (r,\theta)\in\Omega_1$$

em que:

$$\Omega_1:0\le\theta\le2\pi\ ,\ 0\le r\le1$$

Assim:

$$\iint_S\left[\left(\nabla\times\vec{v}\right)\cdot\vec{n}\right]\,dS=-2\iint_\Omega\left((u^2-v^2)-(u^4-v^4)\right)\,dudv=$$

$$=-2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\left(\cos^2(\theta)-sen^2(\theta)\right)\,drd\theta-$$

$$-2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5\left(\cos^4(\theta)-sen^4(\theta)\right)\,drd\theta=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2(\theta)-sen^2(\theta)\right)d\theta-$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\cos^4(\theta)-sen^4(\theta)\right)d\theta \qquad (22)$$

Particularizando, verifica-se:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1+\cos(2\theta)\right)\, d\theta = \frac{1}{4}\left[2\theta + \operatorname{sen}(2\theta)\right]_0^{2\pi} = \pi \quad (23)$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1-\cos(2\theta)\right)\, d\theta = \frac{1}{4}\left[2\theta - \operatorname{sen}(2\theta)\right]_0^{2\pi} = \pi \quad (24)$$

Por outro lado, recorrendo a processos de integração por partes e atendendo a (23) e a (24), resulta:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\cos^3(\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\operatorname{sen}(\theta)\cos^3(\theta)\Big]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)\, d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\Big[\cos(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)\Big]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(\theta)\, d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

Finalmente, substituindo em (22), obtém-se:

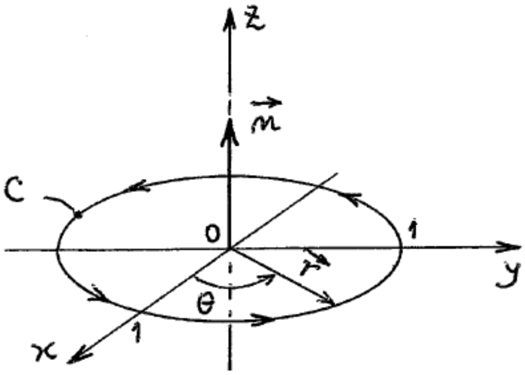
$$\iint_S \left[(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\right]\, dS = -\frac{1}{2}(\pi-\pi) - \frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

b) A superfície parabólica

$$S\ :\ z = 1-(x^2+y^2)\ ,\ z \geq 0$$

é limitada, no seu bordo, pela circunferência de raio um centrada na origem:

$$C\ :\ x^2+y^2 = 1\ ,\ z = 0$$




A linha *C* pode ser parametrizada sob a forma:

$$C\ :\ \vec{r}(\theta)=\cos(\theta)\vec{i}+sen(\theta)\vec{j}+0\vec{k}\ ,\ \theta\in[0,2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de dentro para fora* da superfície *S*, o vector unitário $\vec{n}$ está orientado no *sentido do semi-eixo positivo dos zz* e, portanto, a linha *C* deverá ser percorrida no *sentido directo*, quando vista de um ponto com cota positiva.
Sabendo que

$$\vec{r}'(\theta)=-\text{sen}(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right)=\cos(\theta)\text{sen}^2(\theta)\vec{i}+\text{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right)\cdot\vec{r}'(\theta)=-\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta)+\text{sen}(\theta)\cos^3(\theta)$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S\left[\left(\nabla\times\vec{v}\right)\cdot\vec{n}\right]\ dS=\oint_C\vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\ =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta)+\text{sen}(\theta)\cos^3(\theta)\right)d\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\text{sen}^4(\theta)\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{4}\left[\cos^4(\theta)\right]_0^{2\pi}=0$$

**Exemplo 11**: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = -3y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^4\vec{k}$$

através da superfície do elipsoide

$$S \ : \ 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1 \ , \ z \geq \sqrt{2}/2$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície:

a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & z^4 \end{vmatrix} = 6\vec{k}$$

A superfície $S$ pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{1-4(u^2+v^2)}\,\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

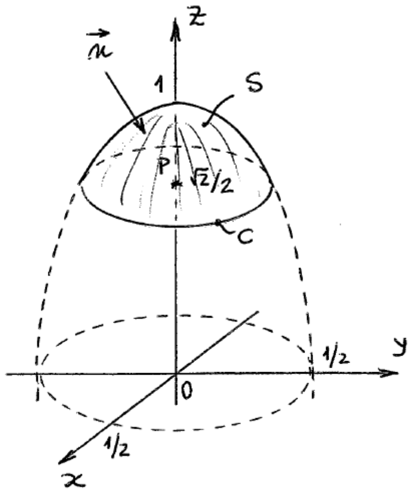
em que:

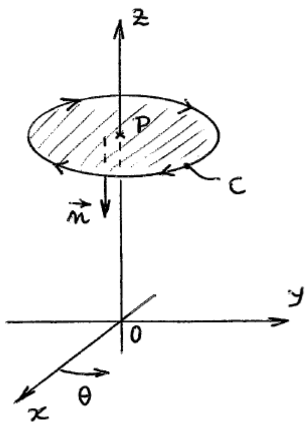
$$\Omega \ : \ 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1/8$$

O produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4u\left(1-4(u^2+v^2)\right)^{-1/2} \\ 0 & 1 & -4v\left(1-4(u^2+v^2)\right)^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4u}{\sqrt{1-4(u^2+v^2)}}\vec{i} + \frac{4v}{\sqrt{1-4(u^2+v^2)}}\vec{j} + \vec{k}$$




Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u,v)$, e o vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(u,v)$, estão orientados em sentidos opostos. Assim, atendendo a (6) e sabendo que

$$(\nabla\times\vec{v})\left[\vec{r}(u,v)\right] = 6\vec{k}$$

$$(\nabla\times\vec{v})\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}(u,v) = 6$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla\times\vec{v}$ através de $S$:

$$\iint_S \left[(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\right]\, dS = -6\iint_\Omega du dv = -6A(\Omega) = -6\frac{\pi}{8} = -\frac{3\pi}{4}$$

em que $A(\Omega) = \pi/8$ é a área da região $\Omega$.

b) A superfície do elipsoide

$$S \ :\ 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\ ,\ z \ge \sqrt{2}/2$$

é limitada, no seu bordo, pela linha

$$C \ :\ x^2 + y^2 = 1/8\ ,\ z = \sqrt{2}/2$$

ou seja, pela circunferência de raio $\sqrt{2}/4$ centrada em $P=\left(0,0,\sqrt{2}/2\right)$.

A linha *C* pode ser parametrizada sob a forma:

$$C\ :\ \vec{r}(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\theta)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}sen(\theta)\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\ ,\ \theta\in[0,2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de fora para dentro* da superfície *S*, o vector unitário $\vec{n}$ está orientado no *sentido do semi-eixo negativo dos zz* e, portanto, a linha *C* deverá ser percorrida no *sentido directo*, quando vista da origem.

Sabendo que

$$\vec{r}'(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\text{sen}(\theta)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\theta)\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{4}\text{sen}(\theta)\vec{i}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\cos(\theta)\vec{j}+\frac{1}{4}\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right)\cdot\vec{r}'(\theta)=\frac{3}{8}$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S\left[\left(\nabla\times\vec{v}\right)\cdot\vec{n}\right]\,dS=\oint_C\vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\frac{3}{8}\int_{2\pi}^{0}d\theta=-\frac{3\pi}{4}$$

**Exemplo 12**: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z)=z^2\vec{i}-2x\vec{j}+y^3\vec{k}$$

através da superfície esférica

$$S\ :\ x^2+y^2+z^2=4\ ,\ z\geq 0$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície:

a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

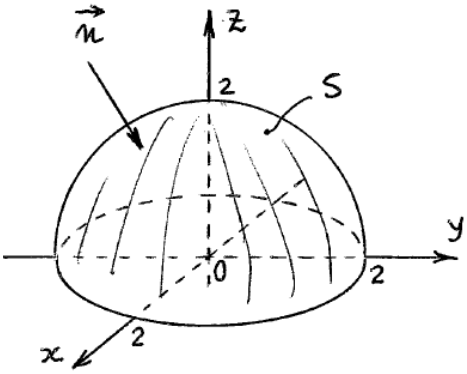
$$\nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & -2x & y^3 \end{vmatrix} = 3y^2\vec{i} + 2z\vec{j} - 2\vec{k}$$

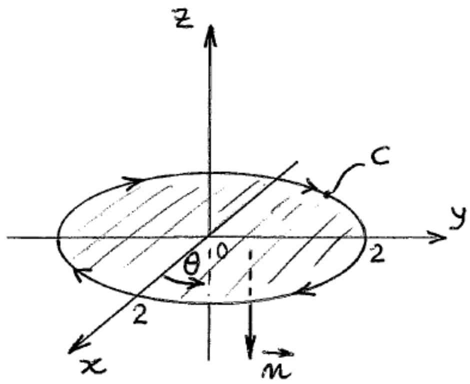
A superfície $S$ pode ser parametrizada através de

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{4-(u^2+v^2)}\,\vec{k} \ , \ (u,v)\in\Omega$$

em que:

$$\Omega : 0 \le u^2 + v^2 \le 4$$




O produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -u\left(4-(u^2+v^2)\right)^{-1/2} \\ 0 & 1 & -v\left(4-(u^2+v^2)\right)^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{u}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}}\vec{i} + \frac{v}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}}\vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u,v)$, e o vector unitário normal à superfície, $\vec{n}(u,v)$, estão orientados em sentidos opostos. Assim, atendendo a (6) e sabendo que

$$(\nabla\times\vec{v})\left[\vec{r}(u,v)\right] = 3v^2\vec{i} + 2\sqrt{4-(u^2+v^2)}\,\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(\nabla\times\vec{v})\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}(u,v) = \frac{3uv^2}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}} + 2v - 2$$

resulta:

$$\iint_S \left[(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\right]\, dS = -\iint_\Omega \left[\frac{3uv^2}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}} + 2v - 2\right] dudv$$

Uma vez que a função

$$h(u,v) = \frac{3uv^2}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}}$$

é ímpar na variável $u$ e a região $\Omega$ é simétrica em relação ao eixo dos *vv*, tem-se:

$$\iint_\Omega \frac{3uv^2}{\sqrt{4-(u^2+v^2)}}\, dudv = 0$$

Obtém-se, então, para o fluxo do campo vectorial $\nabla\times\vec{v}$ através de $S$

$$\iint_S \left[(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\right]\, dS = -2\iint_\Omega v\ dudv + 2\iint_\Omega dudv =$$

$$= -2\bar{v}_C A(\Omega) + 2A(\Omega) = 8\pi$$

em que $A(\Omega) = 4\pi$ é a área da região $\Omega$ e $\bar{v}_C = 0$ é a coordenada *v* do seu centroide.

b) A superfície esférica

$$S \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ , \ z \geq 0$$

é limitada, no seu bordo, pela linha

$$C \ : \ x^2 + y^2 = 4 \ , \ z = 0$$

ou seja, pela circunferência de raio dois centrada na origem.
A linha *C* pode ser parametrizada sob a forma:

$$C \ : \ \vec{r}(\theta) = 2\cos(\theta)\vec{i} + 2sen(\theta)\vec{j} + 0\vec{k} \ , \ \theta \in [0,2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de fora para dentro* da superfície *S*, o vector unitário $\vec{n}$ está orientado no *sentido do semi-eixo negativo dos zz* e, portanto, a linha *C* deverá ser percorrida no *sentido retrógrado*, quando vista de um ponto com cota positiva.
Sabendo que

$$\vec{r}\,'(\theta) = -2\text{sen}(\theta)\vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right) = 0\vec{i} - 4\cos(\theta)\vec{j} + 8\text{sen}^3(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right) \cdot \vec{r}\,'(\theta) = -8\cos^2(\theta)$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S \left[ \left( \nabla \times \vec{v} \right) \cdot \vec{n} \right] \, dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -8\int_{2\pi}^{0} \cos^2(\theta) d\theta =$$

$$= -4\int_{2\pi}^{0} \left(1 + \cos(2\theta)\right) d\theta = -2\left[2 + sen(2\theta)\right]_{2\pi}^{0} = 8\pi$$