COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 5

INTEGRAIS DE LINHA

1. Calcule os seguintes integrais ao longo da linha indicada:

a) $\int_C (2-y)dx + (x)dy$, sendo $C : \vec{r}(t) = (t - \text{sen}(t))\vec{i} + (1-\cos(t))\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b) $\int_C (2xy)dx + (x^2 + z)dy + (y)dz$, em que C é o segmento de recta que liga o ponto $P = (1,0,2)$ ao ponto $Q = (5,8,0)$.

c) $\int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, onde C é a linha que liga os pontos $O = (0,0)$ e $P = (3,-1)$, situada sobre o gráfico da função $y = 1 - |1-x|$.

d) $\int_C \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2 + y^2}$, sendo C a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$, percorrida no sentido retrógrado.

e) $\int_C (y)dx + (z)dy + (x)dz$, onde C é a linha de intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y = 2$, percorrida no sentido directo quando vista da origem do referencial.

f) $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, em que C é o quadrado com vértices nos pontos $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ e $D = (0,-1)$, percorrido no sentido directo.

2. Considere o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ e a linha, L, parametrizada por $\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\,\text{sen}(t)\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$ e $a > 0$. Calcule, recorrendo à definição, o valor do integral de linha $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, sendo L percorrida no sentido retrógrado.

3. Confirme o resultado obtido no exercício 2.:

a) Verificando que o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ é gradiente.

b) Usando o teorema de Green.

4. Verifique que o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}$ é gradiente e determine o valor de $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ao longo do caminho, L, parametrizado por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j}$, $t \in [0,2]$.

5. Confirme o resultado obtido no exercício 4. recorrendo à definição de integral de linha.

6. Verifique que o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = 3x\left(x^2 + y^4\right)^{1/2}\vec{i} + 6y^3\left(x^2 + y^4\right)^{1/2}\vec{j}$ é gradiente e calcule o valor de $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ao longo da curva $y = -\left(1 - x^2\right)^{1/2}$, entre os pontos $P = (-1,0)$ e $Q = (1,0)$.

7. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = (2xy + z^2)\vec{i} + (x^2 - 2yz)\vec{j} + (2xz - y^2)\vec{k}$. Mostre que $\vec{f}(x,y,z)$ é gradiente e calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, em que C é uma linha que liga o ponto $P = (1,0,1)$ ao ponto $Q = (3,2,1)$.

8. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = (e^{2y} - 2xy)\vec{i} + (2xe^{2y} - x^2 + 1)\vec{j}$ e a linha, C, parametrizada por $\vec{r}(u) = ue^u\vec{i} + (1+u)\vec{j}$, $u \in [0,1]$. Calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$:

a) Usando a definição de integral de linha.

b) Verificando que o campo vectorial é gradiente e recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

9. Mostre que o integral de linha $\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} (6xy^3 + 2z^2)dx + (9x^2y^2)dy + (4xz + 1)dz$ é independente do caminho e calcule-o.

10. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=(2xy+z^2)\vec{i}+x^2\vec{j}+2xz\vec{k}$ e a linha, C, parametrizada por $\vec{r}(u)=2u\vec{i}+(u^2+2)\vec{j}-u\vec{k}$, $u\in[0,1]$. Calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$:

a) Usando a definição de integral de linha.

b) Verificando que o campo vectorial é gradiente e recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

11. Considere o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=\left(2xz+\operatorname{sen}(y)\right)\vec{i}+x\cos(y)\vec{j}+x^2\vec{k}$ e a linha, C, parametrizada por $\vec{r}(u)=\cos(u)\vec{i}+\operatorname{sen}(u)\vec{j}+u\vec{k}$, $u\in[0,2\pi]$. Verifique que o campo vectorial é gradiente e calcule o valor de $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

12. Calcule o valor de $\int_C (x^2y)dx+(y)dy+(xz)dz$, sendo C a parcela da curva de intersecção da superfície cilíndrica $y-2z^2=1$ com o plano $z=x+1$, definida entre os pontos $P=(0,3,1)$ e $Q=(1,9,2)$.

13. Calcule, usando o teorema de Green, o integral de linha $\oint_C (3xy+y^2)dx+(2xy+5x^2)dy$, sendo C a circunferência de raio unitário e com centro no ponto $P=(1,-2)$.

14. Verifique o resultado obtido no exercício 13. recorrendo à definição de integral de linha.

15. Recorrendo ao teorema de Green, determine o integral de linha $\oint_C (2x^2+xy-y^2)dx+(3x^2-xy+2y^2)dy$, em que $C\ :\ (x-a)^2+y^2=r^2$.

16. Recorrendo ao teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (y)dx+(3x)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $y=2x$ e $y=x^2$, percorrida no sentido retrógrado. Verifique o teorema de Green.

17. Usando o teorema de Green, calcule o integral de linha $\oint_C (x+y)dx + (y^2 - x)dy$, sendo $C = C_1 \cup C_2$, tal que $C_1 : y = 0 \, , \, x \in [-1,1]$ e $C_2 : x^2 + y^2 = 1 \, , \, y \geq 0$. Verifique o teorema de Green.

18. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{i} + (z+y)\vec{j} - y\vec{k}$ e a curva, C, que é a intersecção das superfícies $y^2 + z^2 = 1$ e $x = y$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva C.

b) Calcule o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, se a curva for percorrida no sentido directo quando vista do ponto $P = (1,0,0)$.

19. Considere a curva, C, que é a intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - y^2$.

a) Obtenha uma parametrização para a curva C.

b) Calcule o integral de linha $\int_C (x)dx + (-y)dy + (xyz)dz$, se a curva for percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial.

20. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = z^2\vec{i} + y^2\vec{j} + xz\vec{k}$ e a curva, C, que é a intersecção das superfícies $x^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$ e $z = y$. Esboce a curva C e determine $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, se a curva for percorrida no sentido directo quando vista do ponto $P = (0,1,0)$.

21. Usando o teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (x)dx + (x)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $y = 1 - x$ e $y = (x-1)^2$, percorrida no sentido retrógrado. Verifique o teorema de Green.

22. Relativamente aos integrais de linha seguintes, verifique o teorema de Green:

a) $\oint_C (y^2)dx + (x)dy$, sendo C a fronteira da região quadrada, Ω, com vértices nos pontos $O=(0,0)$, $A=(2,0)$, $B=(2,2)$ e $C=(0,2)$.

b) $\oint_C (x^2)dy$, sendo C a fronteira da região rectangular, Ω, com vértices nos pontos $O=(0,0)$, $A=(a,0)$, $B=(a,b)$ e $C=(0,b)$.

c) $\oint_C (4x^3+2y^2)dx + (4xy+e^y)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, limitada pelos gráficos das funções $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$.

23. Recorrendo ao teorema de Green, calcule o integral de linha $\int_C (2xy+3x^2)dx + (2y)dy$, sendo C a fronteira da região, Ω, do 1º quadrante limitada pelos gráficos das funções $y=2$, $y=3-2x$ e $y=x^2$, percorrida no sentido directo. Verifique o teorema de Green.

29. Calcule os seguintes integrais de linha em relação ao comprimento de arco:

a) $\int_C (x-y)ds$, onde C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t)=4t\vec{i}+3t\vec{j}$, $t\in[0,2]$.

b) $\int_C (x^2+y^2)ds$, em que C é o segmento de recta percorrido entre o ponto $O=(0,0)$ e o ponto $P=(3,9)$.

c) $\int_C (x^2+y^2)ds$, sendo C o arco da circunferência $x^2+y^2=1$, percorrido entre o ponto $P=(1,0)$ e o ponto $Q=(0,1)$.

d) $\int_C (x+4\sqrt{y})ds$, sendo C o triângulo com vértices nos pontos $O=(0,0)$, $A=(1,0)$ e $C=(0,1)$, percorrido no sentido retrógrado.

e) $\int_C (z)ds$, onde C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t)=t\cos(t)\vec{i}+t\mathrm{sen}(t)\vec{j}+t\vec{k}$, $t\in[0,t_1]$.

30. Usando o teorema de Green, calcule o integral de linha

$$\oint_{C_1} (2x^3-y^3)dx + (x^3+y^3)dy - \oint_{C_2} (2x^3-y^3)dx + (x^3+y^3)dy$$

onde C_1 é a circunferência $x^2+y^2=b^2$ e C_2 é a circunferência $x^2+y^2=a^2$, tal que $0<a<b$.

31. Seja C a linha de intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 2y$ e $z = 1 + y$, percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial. Calcule:

a) $\int_C (yz)dx + (xz)dy$. **b)** $\int_C (yz)dx + (xz)dy + (xy)dz$.

32. Calcule o integral de linha $\int_C (z)dx + (y^2)dy + (xy)dz$, em que C é a linha de intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 1$ e $x + z = 1$, percorrida no sentido directo quando vista do ponto $P = (0,0,3)$.

33. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = x^2 y\vec{i} + y^2 z\vec{j} + xz^2\vec{k}$ e a linha, C, que é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 - 4 = 0$ e $z = 3$, percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial. Determine o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$.

34. Seja C a linha parametrizada por $\vec{r}(t) = \text{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + \frac{1}{2}\text{sen}(2t)\vec{k}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calcule o integral de linha $\int_C (yz + z^2)dx + (xz)dy + (xy + 2xz)dz$, se C é percorrida na direcção oposta à definida pela sua parametrização.

36. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y\vec{j}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo da parábola $y = 3x^2$, entre o ponto $O = (0,0)$ e o ponto $P = (1,3)$.

37. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z) = x\vec{i} + xy\vec{j} + xyz\vec{k}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo do segmento de recta que liga o ponto $P = (0,1,4)$ ao ponto $Q = (1,0,-4)$.

38. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z) = x^2\vec{i} + xy\vec{j} + z^2\vec{k}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo da hélice $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$, entre o ponto $P = (1,0,0)$ e o ponto $Q = (1,0,2\pi)$.

40. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z)=(x+e^{2y})\vec{i}+(2y+2xe^{2y})\vec{j}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo da linha, C, parametrizada por $\vec{r}(t)=3\cos(t)\vec{i}+4\text{sen}(t)\vec{j}$, $t\in[0,2\pi]$. Comece por verificar se o campo de forças é gradiente.

41. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{f}(x,y,z)=\left(2x\ln(y)-yz\right)\vec{i}+(x^2y^{-1}-xz)\vec{j}-xy\vec{k}$ aplicado a um ponto material que se desloca ao longo do segmento de recta, C, que liga o ponto $A=(1,2,1)$ ao ponto $B=(3,2,2)$. Comece por verificar se o campo de forças é gradiente.

45. Seja o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)=xy\vec{i}+yz\vec{j}+x^2\vec{k}$ e a linha C que é a fronteira da região rectangular com vértices nos pontos $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,1,1)$ e $D=(1,0,1)$. Determine o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, se a linha C é percorrida no sentido retrógrado quando vista da origem do referencial.

46. Calcule o integral de linha $\int_C (2xe^y)dx+(x^2e^y)dy+dz$, sendo C a linha parametrizada por $\vec{r}(t)=t\vec{i}+(4-t^2)\vec{j}+\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right)\vec{k}$, $t\in[0,2]$, percorrida na direcção oposta à definida pela sua parametrização.

47. Seja C a linha que liga o ponto $P=(1,0,0)$ ao ponto $Q=(0,-1,2)$ e que pertence à intersecção das superfícies $x^2+y^2-1=0$ e $x+y+z=1$. Calcule o integral de linha $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, em que $\vec{f}(x,y,z)=(2xz+y^2)\vec{i}+2xy\vec{j}+(x^2+3z^2)\vec{k}$.

Soluções: Consultar o manual "Noções sobre Análise Matemática", Efeitos Gráficos, 2019. ISBN: 978-989-54350-0-5.

Soluções dos Exercícios Propostos

Integrais de Linha

1. **a)** $\int_C (2-y)dx + (x)dy = -2\pi$.

b) $\int_C (2xy)dx + (x^2+z)dy + (y)dz = 200$.

c) $\int_C (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy = 2$.

d) $\int_C \frac{(x+y)dx + (y-x)dy}{x^2+y^2} = 2\pi$.

e) $\int_C (y)dx + (z)dy + (x)dz = 2\sqrt{2}\pi$.

f) $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 0$.

2. $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$.

3. **a)** - - - -

b) - - - -

4. $\int_L \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 32$.

5. - - - -

6. $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$.

7. $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 16$.

8. **a)** $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = e^5 - 2e^2 + 1$.

b) - - - -

9. Dado que o campo vectorial $\vec{f}(x,y,z) = (6xy^3 + 2z^2)\vec{i} + (9x^2y^2)\vec{j} + (4xz+1)\vec{k}$ é gradiente, então o integral de linha é independente do caminho que liga o ponto $P = (1,0,2)$ ao ponto $Q = (-2,1,3)$. O seu valor é:

$$\int_{(1,0,2)}^{(-2,1,3)} (6xy^3 + 2z^2)dx + (9x^2y^2)dy + (4xz+1)dz = -31.$$

10. **a)** $\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 14$.

b) - - - -

11. $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 2\pi$.

12. $\int_C (x^2y)dx + (y)dy + (xz)dz = \dfrac{1177}{30}$.

13. $\oint_C (3xy + y^2)dx + (2xy + 5x^2)dy = 7\pi$.

14. - - - -

15. $\oint_C (2x^2 + xy - y^2)dx + (3x^2 - xy + 2y^2)dy = 5a\pi r^2$.

16. $\oint_C (y)dx + (3x)dy = -2\iint_\Omega dxdy = -\dfrac{8}{3}$.

17. $\oint_C (x + y)dx + (y^2 - x)dy = -\pi$.

18. **a**) $\vec{r}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} + \mathrm{sen}(\theta)\vec{k}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

b) $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -2\pi$.

19. **a**) $\vec{r}(\theta) = 2\cos(\theta)\vec{i} + 2\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + 4\vec{k}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

b) $\int_C (x)dx + (-y)dy + (xyz)dz = 0$.

20. $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$.

21. $\oint_C (x)dx + (x)dy = -\iint_\Omega dxdy = -\dfrac{1}{6}$.

22. **a**) $\oint_C (y^2)dx + (x)dy = \iint_\Omega (1 - 2y)dxdy = -4$.

b) $\oint_C (x^2)dy = \iint_\Omega (2x)dxdy = a^2b$.

c) $\oint_C (4x^3 + 2y^2)dx + (4xy + e^y)dy = -\iint_\Omega (0)dxdy = 0$.

23. $\oint_C (2xy + 3x^2)dx + (2y)dy = -\iint_\Omega (2x)dxdy = -\dfrac{11}{12}$.

24. $\oint_C (2xy)dx + (x^2)dy = 0$.

25. $A(\Omega) = \pi ab \ \mathrm{m}^2$.

26. $A(\Omega)=\dfrac{15}{2}-8\ln(2)\ \text{m}^2$.

27. $A(\Omega)=3\pi a^2\ \text{m}^2$.

28. - - - -

29. **a**) $\int_C (x-y)ds=10$.

b) $\int_C (x^2+y^2)ds=90\sqrt{10}$.

c) $\int_C (x^2+y^2)ds=\dfrac{\pi}{2}$.

d) $\int_C (x+4\sqrt{y})ds=-\dfrac{19}{6}(1+\sqrt{2})$.

e) $\int_C (z)ds=\dfrac{1}{3}\left[(2+t_1)^{3/2}-2\sqrt{2}\right]$.

30. $\oint_{C_1}(2x^3-y^3)dx+(x^3+y^3)dy-\oint_{C_2}(2x^3-y^3)dx+(x^3+y^3)dy=\dfrac{3\pi}{2}(b^4-a^4)$.

31. **a**) $\int_C (yz)dx+(xz)dy=-\pi$.

b) $\int_C (yz)dx+(xz)dy+(xy)dz=0$, já que o campo vectorial é gradiente.

32. $\int_C (z)dx+(y^2)dy+(xy)dz=0$.

33. $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=-4\pi$.

34. $\int_C (yz+z^2)dx+(xz)dy+(xy+2xz)dz=0$, já que o campo vectorial é gradiente.

35. **a**) - - - -

b) - - - -

36. $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\dfrac{19}{4}$ J.

37. $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\dfrac{1}{3}$ J.

38. $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\dfrac{8\pi^3}{3}$ J.

39. $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=2\pi$ J.

40. Dado que o campo de forças é gradiente e a linha é fechada, então $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=0$ J.

41. Dado que o campo de forças é gradiente, é possível aplicar o teorema fundamental para o integral de linha, obtendo-se $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 8\ln(2) - 10$ J .

42. **a**) $\vec{f}(t) = M\vec{a}(t) = M\vec{r}''(t) = M(2\beta\vec{j} + 6\gamma t\vec{k})$ N .

b) $W = \int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \left(2\beta^2 + \frac{9}{2}\gamma^2\right)M$ J .

43. $\alpha = \frac{5}{2}$.

44. $\varphi(x,y,z) = \frac{MGr_t^2}{r_t + z}$.

45. $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\frac{3}{2}$.

46. $\int_C (2xe^y)dx + (x^2e^y)dy + dz = -5$.

47. $\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 8$.

48. **a**) $\vec{r}(\theta) = a\cos(\theta)\vec{i} + asen(\theta)\vec{j}\ ,\ \theta \in [0,\pi]$.

b) $\rho(\theta) = \begin{cases} a\cos(\theta) - \frac{a}{\sqrt{2}} & \text{, se } \theta \le \frac{\pi}{4} \\ -a\cos(\theta) + \frac{a}{\sqrt{2}} & \text{, se } \theta > \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

c) $M = \int_C \rho(x,y)ds = \int_C \rho(\theta)\|\vec{r}'(\theta)\|d\theta =$

$$= \int_0^{\pi/4}\left(a\cos(\theta) - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)ad\theta + \int_{\pi/4}^{\pi}\left(-a\cos(\theta) + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)ad\theta = \sqrt{2}a^2\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) \text{ Kg}.$$

49. **a**) $M = \int_C \rho(x,y)ds = \int_C \rho(u)\|\vec{r}'(u)\|du = 2ka^2$ Kg .

b) O seu centro de massa é $C_M = (x_M, y_M) = \frac{1}{8}a(\pi + 2)(1,1)$.

c) $I_x = ka^4 = \frac{Ma^2}{2}$ Kgm^2.

d) $I_z = 2ka^4 = Ma^2$ Kgm^2.

e) $I_{y=x} = \frac{ka^4}{3} = \frac{Ma^2}{6}$ Kgm^2.

50. **a**) $L = \int_C ds = \int_C \|\vec{r}'(u)\| du = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$ m.

b) O seu centro de massa é $C_M = (x_M, y_M, z_M) = (0, 0, \pi b)$.

c) $I_x = \frac{M}{6}(3a^2 + 8\pi^2 b^2)$ Kgm^2.

d) $I_y = \frac{M}{6}(3a^2 + 8\pi^2 b^2)$ Kgm^2.

e) $I_z = Ma^2$ Kgm^2.

51. $M = \int_C \rho(x,y) ds = \int_C \rho(u) \|\vec{r}'(u)\| du = \frac{2k\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2 + 4\pi^2 b^2)$ Kg.

Superfícies

1. **a**) $\vec{r}(u,v) = 2\sqrt{2}\cos(u)\cos(v)\vec{i} + 2\text{sen}(u)\cos(v)\vec{j} + 4\text{sen}(v)\vec{k}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi/2]$.

b) $\vec{r}(u,v) = 3\cos(u)\vec{i} + 3\text{sen}(u)\vec{j} + v\vec{k}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-1, 3]$.

c) $\vec{r}(u,v) = 2\cos(u)\cos(v)\vec{i} + 2\text{sen}(u)\cos(v)\vec{j} + 2\text{sen}(v)\vec{k}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in (-\pi/4, \pi/2]$.

d) $\vec{r}(r,v) = r\cos(v)\vec{i} + r\text{sen}(v)\vec{j} + (r\cos(v) - 1)\vec{k}$, $r \in [0,1]$, $v \in [0, 2\pi]$.

2. **a**) Elipsoide com a equação cartesiana $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$.

b) Paraboloide elíptico com a equação cartesiana $z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

c) Paraboloide hiperbólico com a equação cartesiana $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

3. **a**) $\vec{N}(u,v) = 4(u^2 - v^2)\vec{i} - 4(u^2 + v^2)\vec{j} + 2uv\vec{k}$. **b**) $y - z = 0$.

4. **a**) $\vec{N}(u,v) = \text{sen}(u)\text{sen}(v)\vec{i} + \cos(u)\cos(v)\vec{j} + \left(\text{sen}^2(u) - \cos^2(v)\right)\vec{k}$.

b) $y + z = 3$.