

FUNÇÕES ESCALARES

Introdução

- Seja D um subconjunto não vazio do plano xOy . A função que associa um número real $f(x,y)$ a cada ponto $(x,y) \in D$ chama-se *função real a duas variáveis*. O conjunto D é designado por *domínio* de f , enquanto o conjunto de todos os valores $f(x,y)$ chama-se *contradomínio* de f .

Exemplo 1: A função

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

tem como domínio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

e como contradomínio $D' = [1, +\infty)$. O domínio é o conjunto dos pontos interiores à circunferência com a equação $x^2 + y^2 = 1$.

- Seja D um subconjunto não vazio do espaço tridimensional. A função que associa um número real $f(x,y,z)$ a cada ponto $(x,y,z) \in D$ chama-se *função real a três variáveis*. O conjunto D é designado por *domínio* de f , enquanto o conjunto de todos os valores $f(x,y,z)$ chama-se *contradomínio* de f .

Exemplo 2: A função

$$f(x, y, z) = \cos\left(\frac{1}{x + y - z}\right)$$

tem como domínio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \neq x + y\}$$

e como contradomínio $D' = [-1, 1]$. O domínio é o conjunto dos pontos que não pertencem ao plano com a equação $x + y - z = 0$.

Exemplo 3: A magnitude da força gravitacional exercida por um corpo de massa M situado na origem sobre um corpo de massa m situado no ponto (x, y, z) é dada por

$$F(x, y, z) = \frac{GmM}{x^2 + y^2 + z^2}$$

em que G é a constante gravitacional universal. O seu domínio é

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

e o contradomínio é $D' = (0, +\infty)$.

Exemplo 4: A função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - y^2}}$$

tem como domínio

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2|x| < y < 2|x|\}$$

e contradomínio $D' = (0, +\infty)$.

- Sempre que o domínio de uma função a várias variáveis não for dado de forma explícita, considera-se que ele será formado pelo conjunto máximo dos pontos onde a função está definida.

Exemplo 5: No caso da função

$$f(x, y) = \frac{1}{x - y}$$

admite-se que o domínio é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y \neq x$; trata-se dos pontos do plano que não pertencem à recta com a equação $y = x$. O seu contradomínio é:

$$D' = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Exemplo 6: No caso da função

$$f(x, y, z) = \arcsen(x + y + z)$$

considera-se que o domínio é o conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $-1 \leq x + y + z \leq 1$; trata-se dos pontos do espaço situados na placa que é limitada pelos planos (estritamente paralelos) com as equações

$$x + y + z = -1 \text{ e } x + y + z = 1.$$

O seu contradomínio é:

$$D' = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Superfícies quádricas

- As superfícies do espaço tridimensional definidas por uma equação do segundo grau da forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Hx + Iy + Jz + K = 0$$

onde A, B, C, \dots, K são constantes (A, B, C não são todas nulas), chamam-se *superfícies quádricas*.

É possível eliminar os termos xy, xz, yz na equação anterior recorrendo a uma adequada mudança de coordenadas (envolvendo as noções de valores próprios e vectores próprios de uma matriz). Assim, apenas se considerará equações da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + H = 0$$

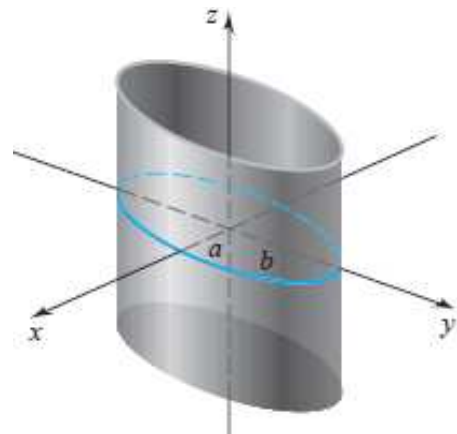
As superfícies quádricas podem ser classificadas em nove tipos distintos:

- i) *Cilindro elíptico*;
- ii) *Cilindro parabólico*;
- iii) *Cilindro hiperbólico*;
- iv) *Elipsoide*;
- v) *Hiperboloide de uma folha*;
- vi) *Hiperboloide de duas folhas*;
- vii) *Cone elíptico*;
- viii) *Paraboloide elíptico*;
- ix) *Paraboloide hiperbólico*.

- A análise das superfícies quádricas insere sobre um conjunto de propriedades que as caracterizam, nomeadamente:
 - i) Os *pontos de intersecção* com os eixos coordenados;
 - ii) Os *traços*, que são as intersecções com os planos coordenados;
 - iii) As *secções*, que são as intersecções com planos em geral;
 - iv) O *centro* (algumas possuem um centro; outras não);
 - v) *Simetria* (em relação a eixos ou a planos);
 - vi) Se são *limitadas* ou *não limitadas*.
- Seja a curva C situada no plano M . O conjunto dos pontos situados nas linhas que passam em C e são perpendiculares a M definem uma superfície que é designada por *superfície cilíndrica recta*; a curva C chama-se *directriz*, enquanto as linhas referidas designam-se por *geratrizes* da superfície. Se as geratrizes não forem perpendiculares ao plano M , a superfície chama-se *superfície cilíndrica oblíqua*.

Exemplo 7: *Cilindro elíptico (recto):*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z \in \mathbb{R}$$



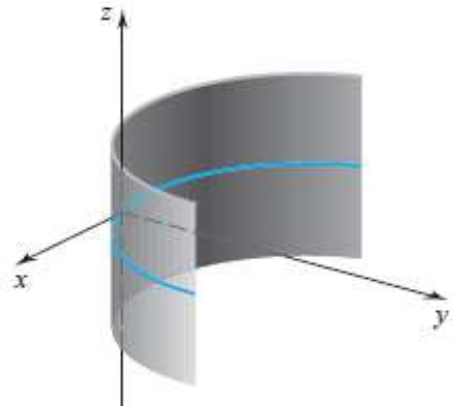
A superfície é formada pelas *geratrizes* que passam na elipse (*directriz*)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e são perpendiculares ao plano coordenado xOy . Se $a = b$ obtém-se uma *superfície cilíndrica circular (recta)*.

Exemplo 8: Cilindro parabólico (recto):

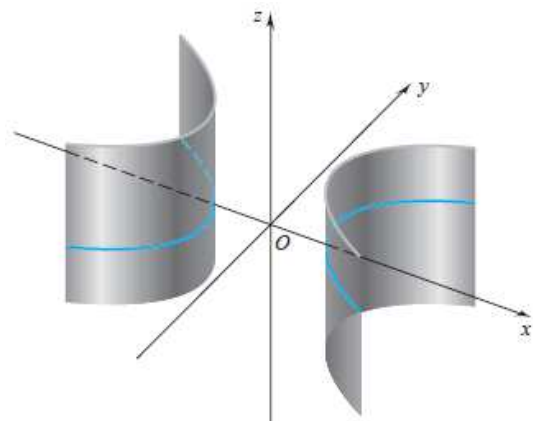
$$x^2 = 4cy, \quad z \in \mathbb{R}$$



Trata-se de uma superfície que é formada pelas *geratrizes* que passam na parábola (*directriz*) $x^2 = 4cy$ e são perpendiculares ao plano coordenado xOy .

Exemplo 9: Cilindro hiperbólico (recto):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z \in \mathbb{R}$$



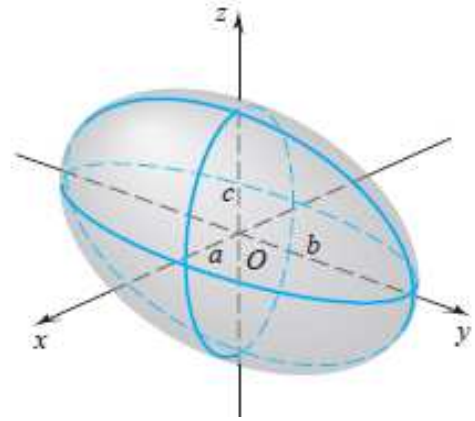
A superfície divide-se em duas regiões, cada uma delas gerada por um dos ramos da hipérbole (*directriz*):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

As *geratrizes* passam na hipérbole e são perpendiculares ao plano coordenado xOy .

Exemplo 10: *Elipsoide:*

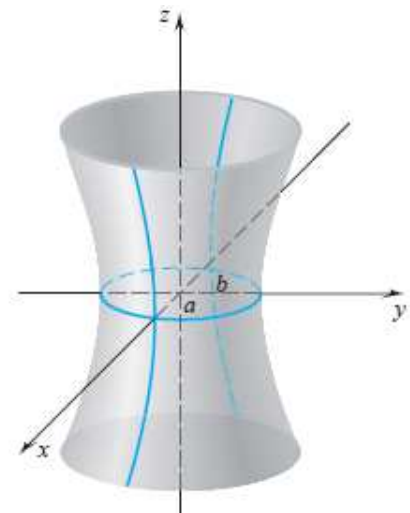
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Os pontos onde a superfície intersecta os eixos coordenados são os *vértices* do elipsoide. Os valores a , b e c chamam-se *semieixos*. Se dois dos semieixos forem iguais obtém-se um *elipsoide de revolução*; se $a = b = c$ obtém-se uma *superfície esférica*.

Exemplo 11: *Hiperboloide de uma folha:*

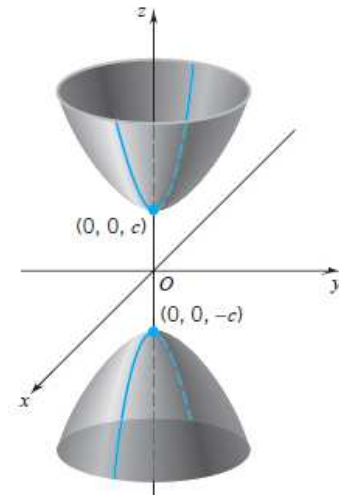
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Se $a = b$ obtém-se um *hiperboloide (de uma folha) de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado xOy são círcunferências.

Exemplo 12: *Hiperboloide de duas folhas:*

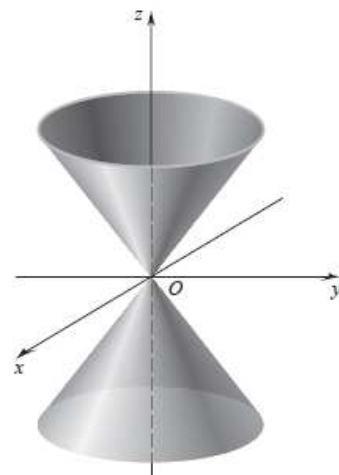
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



A superfície intersecta os eixos coordenados em dois pontos que são os seus *vértices*. Se $a = b$ obtém-se um *hiperboloide (de duas folhas) de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado xOy são circunferências.

Exemplo 13: *Cone elíptico:*

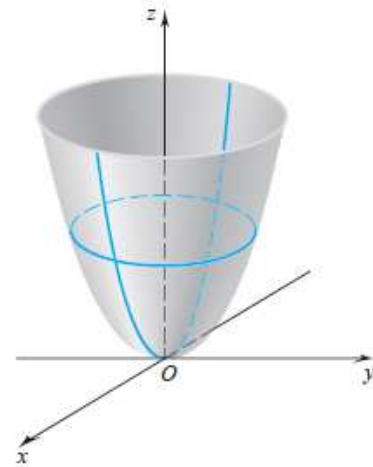
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$



A superfície intersecta os eixos coordenados na origem. A superfície divide-se em duas regiões que se designam por *folhas do cone*. Se $a = b$ obtém-se um *cone circular (de duas folhas)* ou, simplesmente, um *cone*; as secções paralelas ao plano coordenado xOy são circunferências.

Exemplo 14: *Paraboloide elíptico:*

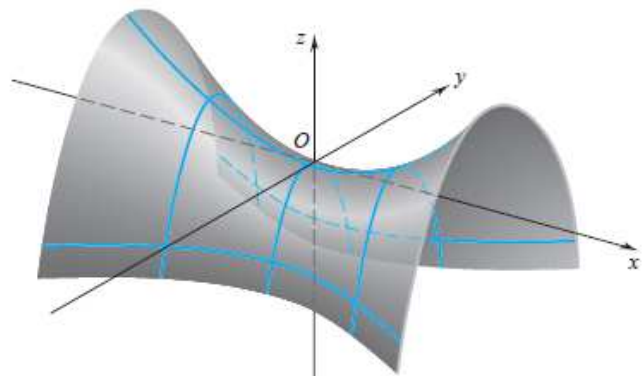
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$



A origem é o *vértice* do parabolóide. Se $a = b$ obtém-se um *parabolóide de revolução*; as secções paralelas ao plano coordenado xOy são circunferências.

Exemplo 15: *Paraboloide hiperbólico:*

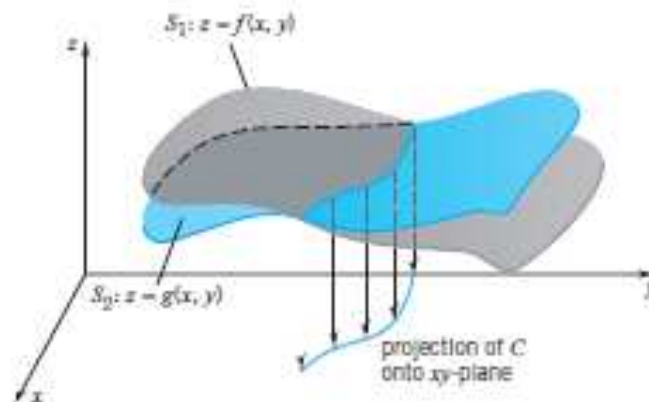
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



A origem é um *mínimo* para o *traço* da superfície no plano xOz e um *máximo* para o *traço* no plano yOz . Como se verá oportunamente um ponto nestas condições é designado por *ponto de sela* da função $z = f(x, y)$.

Projecções

- Seja C a curva do espaço definida pela intersecção das superfícies $S_1 : z = f(x, y)$ e $S_2 : z = g(x, y)$.



- A curva C é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que:

$$z = f(x, y) \text{ e } z = g(x, y)$$

- O conjunto de todos os pontos tais que

$$f(x, y) = g(x, y) , z \in \mathbb{R}$$

é a superfície cilíndrica vertical que passa pela curva C (*directriz*).

- O conjunto de todos os pontos tais que

$$f(x, y) = g(x, y) , z = 0$$

é designada por *projecção de C no plano xOy* ; trata-se da curva no plano xOy que resulta da intersecção deste plano com a superfície cilíndrica atrás referida.

Exemplo 16: Seja a curva C definida pela intersecção do plano $z = 2y + 3$ com o *parabolóide de revolução* $z = x^2 + y^2$; esta superfície pode ser gerada rodando a parábola $z = x^2$ em torno do eixo dos zz . A curva C é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que:

$$z = x^2 + y^2 \text{ e } z = 2y + 3$$

A projecção de C no plano xOy é o conjunto de todos os pontos tais que

$$x^2 + y^2 = 2y + 3, \quad z = 0$$

ou seja:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4, \quad z = 0$$

Trata-se de uma circunferência (situada no plano xOy) de raio 2 e com centro no ponto $(0, 1, 0)$.

Curvas de nível

- Seja f uma função real a duas variáveis definida num subconjunto D do plano xOy . Chama-se *gráfico de f* ao conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que:

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

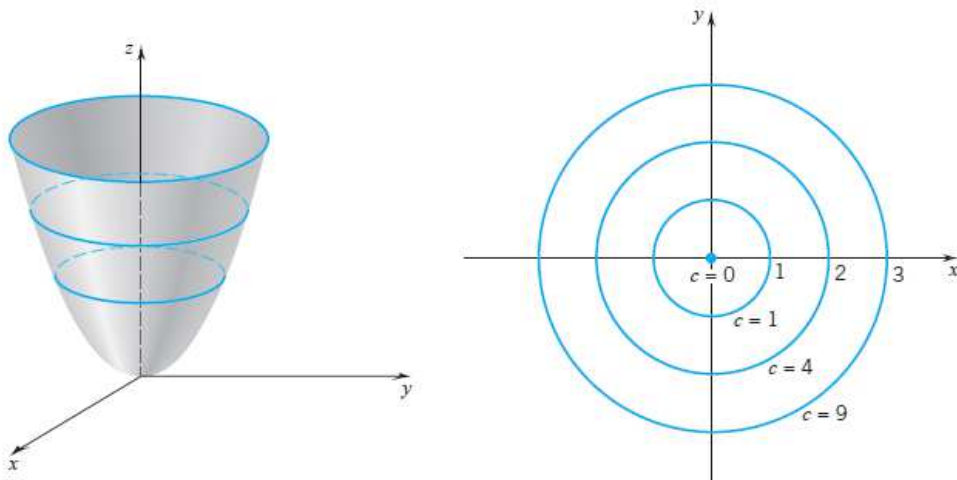
Exemplo 17: O domínio da função $f(x, y) = x^2 + y^2$ é todo o plano xOy . O gráfico de f é o *parabolóide de revolução*:

$$z = x^2 + y^2$$

- Se c pertence ao contradomínio da função $f(x,y)$, $(x,y) \in D$, então é possível traçar a curva $f(x,y) = c$, $z = 0$ e que é designada por *curva de nível de f* . Esta curva pode ser obtida a partir da projecção no plano xOy da linha de intersecção do gráfico de f com o plano horizontal $z = c$.
- As curvas de nível permitem interpretar gráficos de funções reais a duas variáveis que, em muitos casos, são difíceis de visualizar e de desenhar; mesmo quando desenhados, são difíceis de interpretar.

Exemplo 18: No caso da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ do exemplo 17, as suas curvas de nível são as circunferências situadas no plano xOy e centradas na origem:

$$x^2 + y^2 = c, \quad z = 0 \quad (c \geq 0)$$



A função $f(x,y)$ toma o valor c em todos os pontos do plano xOy situados na circunferência de raio \sqrt{c} e centrada na origem; na origem obtém-se $f(x,y) = 0$.

Superfícies de nível

- Sendo o desenho de funções reais a duas variáveis, muitas vezes, complicado, o desenho de uma função real a três variáveis é impossível. No entanto, é possível visualizar o comportamento de uma função $w = f(x, y, z)$, $(x, y, z) \in D$ analisando as chamadas *superfícies de nível de f* . São subconjuntos do domínio de f com equações da forma $f(x, y, z) = c$, em que c pertence ao contradomínio da função f .

Exemplo 19: As superfícies de nível da função $f(x, y, z) = Ax + By + Cz$ são os planos estritamente paralelos $Ax + By + Cz = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exemplo 20: As superfícies de nível da função $g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ são as superfícies esféricas centradas na origem:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2, \quad c \geq 0$$

Derivadas parciais: funções reais a duas variáveis

- Seja f uma função real a duas variáveis x, y . As *derivadas parciais de f em relação a x e em relação a y* são, respectivamente, as funções f_x e f_y , definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

desde que estes limites existam.

- Neste caso, $f_x(x_0, y_0)$ define a razão da variação de $f(x, y_0)$ em relação a x em $x = x_0$, e $f_y(x_0, y_0)$ define a razão da variação de $f(x_0, y)$ em relação a y em $y = y_0$.

Exemplo 21: Em relação à função

$$f(x, y) = e^{xy} + \ln(x^2 + y)$$

tem-se:

$$f_x(x, y) = ye^{xy} + \frac{2x}{x^2 + y} \qquad f_y(x, y) = xe^{xy} + \frac{1}{x^2 + y}$$

O número

$$f_x(2, 1) = e^2 + \frac{4}{5}$$

representa a razão da variação em relação a x da função:

$$f(x, 1) = e^x + \ln(x^2 + 1) \text{ em } x = 2$$

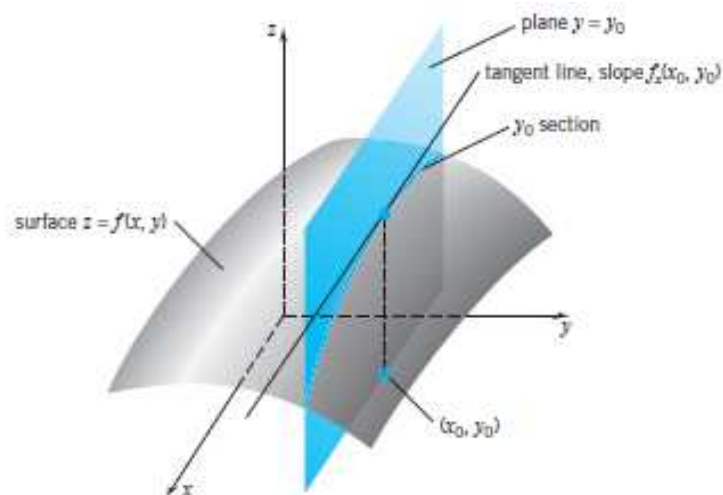
O número

$$f_y(2, 1) = 2e^2 + \frac{1}{5}$$

representa a razão da variação em relação a y da função:

$$f(2, y) = e^{2y} + \ln(4 + y) \text{ em } y = 1$$

- Tal como acontece no caso de uma função real a uma variável, os valores das derivadas parciais $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ podem ser interpretados geometricamente.
- Seja a superfície $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Intersectando-a com o plano $y = y_0$ (paralelo ao plano xOz) obtém-se uma curva, que é a secção y_0 da superfície.



A secção y_0 da superfície é o gráfico da função:

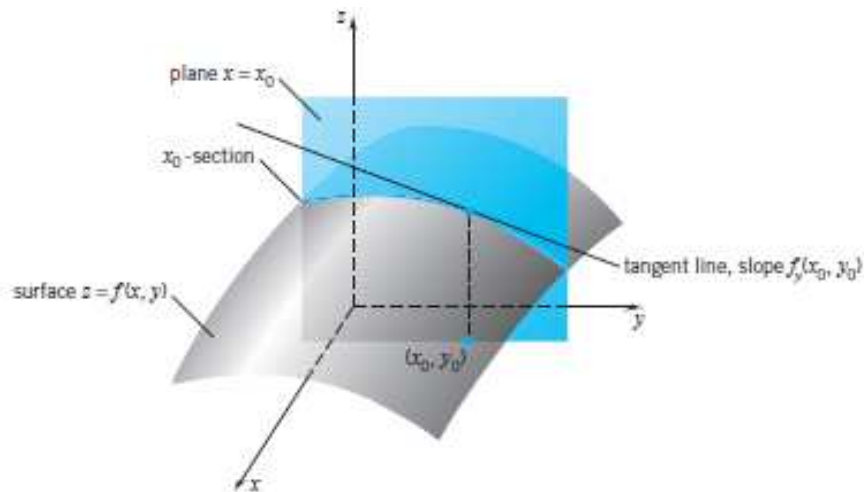
$$g(x) = f(x, y_0)$$

Derivando em ordem a x obtém-se

$$g'(x) = f_x(x, y_0)$$

e, em particular, $g'(x_0) = f_x(x_0, y_0)$. Assim, $f_x(x_0, y_0)$ é o declive da secção y_0 da superfície no ponto de coordenadas $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- Seja a superfície $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Intersectando-a com o plano $x = x_0$ (paralelo ao plano yOz) obtém-se uma curva, que é a secção x_0 da superfície.



A secção x_0 da superfície é o gráfico da função:

$$h(y) = f(x_0, y)$$

Derivando em ordem a y obtém-se

$$h'(y) = f_y(x_0, y)$$

e, em particular, $h'(y_0) = f_y(x_0, y_0)$. Assim, $f_y(x_0, y_0)$ é o declive da secção x_0 da superfície no ponto de coordenadas $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

- Usando a notação de Leibniz pode-se escrever:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ e } f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Derivadas parciais: funções reais a três variáveis

- Seja f uma função real a três variáveis x, y, z . As derivadas parciais de f em relação a x , em relação a y e em relação a z são, respectivamente, as funções f_x , f_y e f_z , definidas por

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$f_y(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h}$$

$$f_z(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h}$$

desde que estes limites existam.

- Neste caso:
 - i) $f_x(x_0, y_0, z_0)$ define a razão da variação de $f(x, y_0, z_0)$ em relação a x em $x = x_0$;
 - ii) $f_y(x_0, y_0, z_0)$ define a razão da variação de $f(x_0, y, z_0)$ em relação a y em $y = y_0$;
 - iii) $f_z(x_0, y_0, z_0)$ define a razão da variação de $f(x_0, y_0, z)$ em relação a z em $z = z_0$.

Exemplo 22: Em relação à função

$$g(x, y, z) = x^2 e^{y/z}$$

tem-se:

$$g_x(x, y, z) = 2xe^{y/z} \qquad g_y(x, y, z) = \frac{x^2}{z} e^{y/z}$$

$$g_z(x, y, z) = -\frac{x^2 y}{z^2} e^{y/z}$$

Em particular:

$$g_x(-1, 2, 1) = -2e^2, \qquad g_y(-1, 2, 1) = e^2, \qquad g_z(-1, 2, 1) = -2e^2$$

- Usando a notação de Leibniz pode-se escrever:

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \qquad f_y(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z),$$

$$f_z(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$$

Vizinhança de um ponto

- A *vizinhança* de um número real x_0 é um conjunto da forma $\{x : |x - x_0| < \delta\}$, com $\delta > 0$; trata-se do intervalo aberto centrado em x_0 :

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Se retirarmos x_0 deste conjunto, obtém-se:

$$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

- A *vizinhança* de um ponto \vec{x}_0 é um conjunto da forma $\{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta\}$, onde $\delta > 0$; trata-se do intervalo aberto centrado em \vec{x}_0 .
- Se $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$, a vizinhança de \vec{x}_0 é o conjunto dos pontos interiores à circunferência de raio δ e centrada em (x_0, y_0) . Se $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a vizinhança de \vec{x}_0 é o conjunto dos pontos interiores à superfície esférica de raio δ e centrada em (x_0, y_0, z_0) .
- Se retirarmos o ponto \vec{x}_0 do conjunto que define a vizinhança de \vec{x}_0 , obtém-se o conjunto $\{\vec{x} : 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta\}$, onde $\delta > 0$.
- Um ponto \vec{x}_0 diz-se um *ponto interior* de um conjunto S se o conjunto S contém alguma vizinhança de \vec{x}_0 . O conjunto de todos os pontos interiores de S é designado por *interior de S* .

- Um ponto \vec{x}_0 diz-se um *ponto fronteira* de um conjunto S se qualquer vizinhança de \vec{x}_0 contém pontos que estão em S e pontos que não estão em S . O conjunto de todos os pontos fronteira de S chama-se *fronteira de S* .
- Um conjunto S diz-se *aberto* se qualquer um dos seus pontos é um ponto interior (não possui pontos fronteira). Por outro lado, o conjunto S diz-se *fechado* se contém a sua fronteira.

Limite

- Seja f uma função real a várias variáveis definida pelo menos numa vizinhança de \vec{x}_0 , podendo não estar definida em \vec{x}_0 . Então

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \quad (1)$$

se para cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que:

$$\text{se } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - L| < \varepsilon$$

- No caso de uma função real a várias variáveis, o processo que permite demonstrar a existência de limite num ponto \vec{x}_0 , envolve, na generalidade das situações, um processo de cálculo muito trabalhoso, já que se tem de mostrar que o limite toma sempre o mesmo valor, independentemente da trajectória que é considerada na aproximação a \vec{x}_0 . Neste caso é necessário recorrer à definição de limite apresentada em (1). Pelo contrário, é mais simples mostrar que uma função a várias variáveis não tem limite em \vec{x}_0 .

Exemplo 23: Vamos mostrar que a função

$$f(x, y) = \frac{xy + y^3}{x^2 + y^2}$$

não tem limite em $(0,0)$. Note-se que f não está definida em $(0,0)$, mas está definida em todos os pontos $(x, y) \neq (0,0)$.

Ao longo dos caminhos mais óbvios que nos conduzem a $(0,0)$, os eixos coordenados, obtém-se:

Eixo dos xx , $y = 0$:

$$f(x, y) = f(x, 0) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Eixo dos yy , $x = 0$:

$$f(x, y) = f(0, y) = y \text{ e } \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} y = 0.$$

Contudo, ao longo da linha $y = mx$, $m \neq 0$, obtém-se

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{mx^2 + m^3x^3}{(1 + m^2)x^2} = \frac{m(1 + m^2x)}{1 + m^2} \quad (x \neq 0)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m(1 + m^2x)}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Uma vez que os caminhos considerados na aproximação a $(0,0)$ não conduzem ao mesmo valor limite, conclui-se que f não tem limite em $(0,0)$.

Exemplo 24: Vamos mostrar que a função

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

não tem limite em $(0,0)$. Note-se que o domínio de g contém todos os pontos do plano xOy tais que $(x, y) \neq (0,0)$.

Tal como no exemplo 23, verifica-se que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$$

ao longo dos eixos coordenados.

Considerando a linha $y = mx$, $m \neq 0$, obtém-se

$$g(x, y) = g(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \quad (x \neq 0)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$$

Considerando, no entanto, o caminho $y = x^2$ na aproximação a $(0,0)$, obtém-se

$$g(x, y) = g(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \quad (x \neq 0)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dado que os caminhos escolhidos na aproximação a $(0,0)$ não conduzem ao mesmo valor limite, conclui-se que g não tem limite em $(0,0)$.

- O limite de uma função $f(\vec{x})$ num ponto \vec{x}_0 existe, se for independente do caminho que for utilizado na aproximação a \vec{x}_0 .
- O limite de uma função $f(\vec{x})$, se existir, é único. Além disso, se

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = L \text{ e } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = M$$

então:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f(\vec{x}) + g(\vec{x})] = L + M$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\alpha f(\vec{x})] = \alpha L, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f(\vec{x})g(\vec{x})] = LM$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left[\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \right] = \frac{L}{M} \text{ se } M \neq 0$$

Continuidade

- Seja \vec{x}_0 um ponto interior do domínio de f . Dizer que f é *contínua* em \vec{x}_0 é equivalente a dizer que

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

ou, em alternativa:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0)$$

- Dizer que f é contínua num *conjunto aberto* S é o mesmo que dizer que f é contínua em todos os pontos de S .
- Os *polinómios* a várias variáveis são funções contínuas em todos os pontos. As *funções racionais* (quocientes de polinómios) a várias variáveis são funções contínuas em todos os pontos, excepto naqueles onde o denominador se anula.

Exemplo 25: Por exemplo, o polinómio a duas variáveis

$$P(x, y) = x^2y + x^4y^2 - 2x + y$$

é contínuo em todos os pontos do plano xOy , e o polinómio a três variáveis

$$Q(x, y, z) = 2x^2z + z^4y^2 + 2xyz + 2x - y$$

é contínuo em todos os pontos do espaço tridimensional.

Exemplo 26: A função racional

$$f(x, y) = \frac{x - 2y}{x^2 + y^2}$$

é contínua em todos os pontos do plano xOy , excepto na origem $(0,0)$.

Exemplo 27: A função racional

$$g(x, y) = \frac{x^2}{2x - y}$$

é contínua em todos os pontos do plano xOy , excepto ao longo da recta $y = 2x$.

Exemplo 28: A função racional

$$h(x, y) = \frac{1}{y - x^2}$$

é contínua em todos os pontos do plano xOy , excepto ao longo da parábola $y = x^2$.

Exemplo 29: A função racional

$$q(x, y, z) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional, excepto na origem $(0,0,0)$.

Exemplo 30: A função racional

$$r(x, y, z) = \frac{x^3 + y}{2x + y - z}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional, excepto no plano $2x + y - z = 0$.

Exemplo 31: A função

$$w(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{x^3 z}{x + y}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional, excepto no plano vertical $x + y = 0$.

Exemplo 32: A função

$$t(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^6 + z^2}$$

é contínua em todos os pontos do espaço tridimensional.

- Sejam as funções a várias variáveis $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$. Se g é contínua no ponto \vec{x}_0 e se f é contínua em $g(\vec{x}_0)$, então a função composta $(f \circ g)(\vec{x}) = f[g(\vec{x})]$ é contínua no ponto \vec{x}_0 (*continuidade da composição de funções a várias variáveis*).

- Se uma função a várias variáveis é contínua, então é contínua em relação a cada uma das suas variáveis, consideradas individualmente; por exemplo, se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0).$$

Note-se, no entanto, que a *proposição inversa é falsa*.

Continuidade e existência de derivadas parciais

- Sabe-se que no caso de uma *função real a uma variável* a *existência de derivada* num ponto *garante a continuidade* da função nesse ponto.
- Já no caso de uma *função real a várias variáveis* a *existência de derivadas parciais* num ponto *não garante a continuidade* da função nesse ponto.
- Por exemplo, a existência da derivada parcial $f_x = \partial f / \partial x$ num ponto apenas depende do comportamento da função ao longo de uma linha paralela ao eixo dos xx que passa nesse ponto. No entanto, a continuidade da função num ponto depende do comportamento da função ao longo de qualquer linha que passe nesse ponto.

Exemplo 33: Seja a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Tendo em atenção que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0 = f(0, 0) \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0 = f(0, 0)$$

pode-se concluir que a função é “contínua” ao longo do eixo dos xx e é “contínua” ao longo do eixo dos yy ; além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

Contudo, considerando a linha $y = x$, obtém-se

$$f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \quad (x \neq 0)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$$

Conclui-se, assim, que a *função é descontínua em (0,0)*.

Derivadas parciais de segunda ordem

- Relativamente à função real a duas variáveis $f(x, y)$, além das derivadas parciais $f_x = \partial f / \partial x$ e $f_y = \partial f / \partial y$ (de primeira ordem), é possível definir as seguintes derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Exemplo 34: Seja a função $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3)$. Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3y^2}{x^2 + y^3}$$

as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2(x^2 + y^3) - 4x^2}{(x^2 + y^3)^2} = \frac{2(-x^2 + y^3)}{(x^2 + y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{6y(x^2 + y^3) - 9y^4}{(x^2 + y^3)^2} = \frac{3y(2x^2 - y^3)}{(x^2 + y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{-2x(3y^2)}{(x^2 + y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2 + y^3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{-3y^2(2x)}{(x^2 + y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2 + y^3)^2}$$

Note-se que, neste caso, verifica-se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-6xy^2}{(x^2 + y^3)^2}$$

- Pode-se provar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

em qualquer ponto de um conjunto aberto onde a função $f(x, y)$ e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

são contínuas.

- Relativamente à função real a três variáveis $f(x,y,z)$, além das derivadas parciais $f_x = \partial f / \partial x$, $f_y = \partial f / \partial y$ e $f_z = \partial f / \partial z$ (de primeira ordem), é possível definir as seguintes derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{xz} = (f_x)_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{yz} = (f_y)_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

$$f_{zx} = (f_z)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

$$f_{zy} = (f_z)_y = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

$$f_{zz} = (f_z)_z = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- Pode-se provar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

em qualquer ponto de um conjunto aberto onde a função $f(x, y, z)$ e as suas derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

são contínuas.

Exemplo 35: Seja a função $f(x, y, z) = xe^y \sin(\pi z)$. Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^y \sin(\pi z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xe^y \sin(\pi z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \pi xe^y \cos(\pi z)$$

as derivadas parciais de segunda ordem são:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = x e^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = -\pi^2 x e^y \operatorname{sen}(\pi z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = e^y \operatorname{sen}(\pi z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \pi e^y \cos(\pi z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \pi x e^y \cos(\pi z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z)$$

Diferenciabilidade; gradiente

- No caso de uma função real a uma variável, $f(x)$, diz-se que f é diferenciável em x , se existir o limite

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2)$$

em que o número $f'(x)$ representa a derivada de f em x .

Podemos afirmar que a derivada de f em x é o único número $f'(x)$ tal que:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$$

Quando $h \rightarrow 0$, $o(h) \rightarrow 0$, pelo que $f'(x)$ toma o valor do limite definido em (2).

- Diz-se que uma função real a várias variáveis, $f(\vec{x})$, é diferenciável em \vec{x} , desde que exista um vector \vec{y} , tal que:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \vec{y} \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$

É possível mostrar que o vector \vec{y} , se existir, é único, sendo designado por *gradiente de f em \vec{x}* , ou seja, $\vec{y} = \nabla f(\vec{x})$.

Podemos, então, afirmar que o gradiente de f em \vec{x} é o único vector $\nabla f(\vec{x})$, tal que:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$

- O cálculo de $\nabla f(\vec{x})$ através da definição é, na maioria dos casos, um processo laborioso. O teorema seguinte, cuja demonstração é complexa, relaciona o gradiente de uma função com as suas derivadas parciais, sendo apresentado para funções reais a duas e a três variáveis.

Teorema 1: Se a função real a três variáveis $f(x,y,z)$ tem derivadas parciais $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ e $\partial f / \partial z$ contínuas numa vizinhança de \vec{x} , então $f(x,y,z)$ é diferenciável em \vec{x} e:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})\vec{k}$$

Se a função real é a duas variáveis, $f(x,y)$, então:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j}$$

Exemplo 36: Seja a função $f(x,y) = xe^y - ye^x$.

Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y - ye^x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y - e^x$$

são funções contínuas, o gradiente de f em (x,y) é:

$$\nabla f(x,y) = (e^y - ye^x)\vec{i} + (xe^y - e^x)\vec{j}$$

Exemplo 37: Seja a função $f(x, y, z) = x \sin(\pi y) - y \cos(\pi z)$.

Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \sin(\pi y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \pi x \cos(\pi y) - \cos(\pi z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \pi y \sin(\pi z)$$

são funções contínuas, o gradiente de f em (x, y, z) é:

$$\nabla f(x, y, z) = \sin(\pi y)\vec{i} + (\pi x \cos(\pi y) - \cos(\pi z))\vec{j} + \pi y \sin(\pi z)\vec{k}$$

No ponto $\vec{x} = (0, 1, 2)$, obtém-se:

$$\nabla f(0, 1, 2) = -\vec{j} = (0, -1, 0)$$

- No caso da função escalar

$$r(x, y, z) = \|\vec{r}\| \quad \text{e} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

mostra-se que, se $r \neq 0$, então:

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{e} \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Além disso, se $\vec{r} \neq \vec{0}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\nabla r^n = n r^{n-2} \vec{r}$$

Teorema 2: Se a função real a várias variáveis $f(\vec{x})$ é diferenciável em \vec{x} , então $f(\vec{x})$ é contínua em \vec{x} .

Operações com o gradiente

- Sejam as funções reais a várias variáveis $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$. Se $\nabla f(\vec{x})$ e $\nabla g(\vec{x})$ existem, então $\nabla[f(\vec{x}) + g(\vec{x})]$, $\nabla[\alpha f(\vec{x})]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\nabla[f(\vec{x})g(\vec{x})]$ também existem e:

$$\nabla[f(\vec{x}) + g(\vec{x})] = \nabla f(\vec{x}) + \nabla g(\vec{x}),$$

$$\nabla[\alpha f(\vec{x})] = \alpha \nabla f(\vec{x}), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\nabla[f(\vec{x})g(\vec{x})] = f(\vec{x})\nabla g(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x})g(\vec{x})$$

Derivada direcional

- A derivada direcional é uma generalização da noção de derivada parcial, estando relacionada com o conceito de gradiente.
- No caso de uma função real a duas variáveis verifica-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{i}) - f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{j}) - f(\vec{x})}{h}$$

- No caso de uma função real a três variáveis verifica-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{i}) - f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h, z) - f(x, y, z)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{j}) - f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z+h) - f(x, y, z)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{k}) - f(\vec{x})}{h}$$

- Cada uma das derivadas parciais anteriores é dada pelo limite do quociente

$$\frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h}$$

onde \vec{u} é um dos seguintes vectores coordenados unitários: \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} .

- Generalizando, para cada versor \vec{u} , o limite

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h}$$

se existir, chama-se *derivada direccional de f em \vec{x} na direcção de \vec{u}* .

- Perante a definição anterior, pode-se escrever:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = f'_i(\vec{x}): \text{derivada direccional de } f \text{ em } \vec{x} \text{ na direcção de } \vec{i};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = f'_j(\vec{x}): \text{derivada direccional de } f \text{ em } \vec{x} \text{ na direcção de } \vec{j};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = f'_k(\vec{x}): \text{derivada direccional de } f \text{ em } \vec{x} \text{ na direcção de } \vec{k}.$$

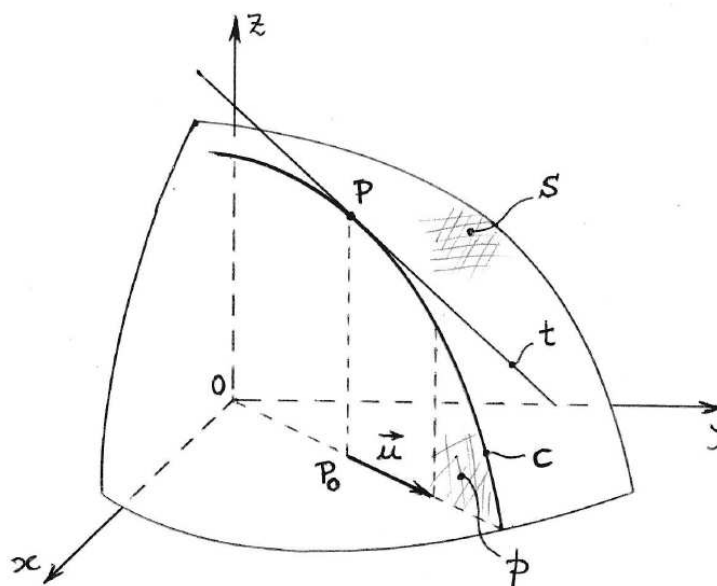
- Enquanto as derivadas parciais definem as *razões da variação de f em \vec{x} nas direcções dos versores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k}* , a derivada direccional $f'_u(\vec{x})$ define a *razão da variação de f em \vec{x} na direcção do versor \vec{u}* .
- Considere-se agora um vector \vec{a} não nulo. Chama-se *derivada direccional de f em \vec{x} na direcção do vector \vec{a}* , à derivada direccional $f'_u(\vec{x})$, em que \vec{u} é o versor com a mesma direcção e sentido do vector \vec{a} , isto é:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad (3)$$

A operação definida em (3) é designada por *normalização do vector \vec{a}* .

- Tal como se verificou com as derivadas parciais, é possível apresentar uma interpretação geométrica para a derivada direccional de uma função real a duas variáveis.

- Seja a função real a duas variáveis $f(x,y)$ e admita-se que (x_0, y_0) pertence ao domínio de f .
Seja a superfície $S : z = f(x,y)$ e fixem-se os pontos $P_0 = (x_0, y_0, 0)$, situado no plano xOy , e $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ localizado sobre a superfície S .
Seja o versor \vec{u} do plano xOy aplicado em P_0 .



Considere-se o plano, p , que passa em P_0 , é paralelo ao versor \vec{u} e é perpendicular ao plano xOy .

A intersecção deste plano com a superfície S é a curva C que passa no ponto P ; seja t a recta tangente a C no ponto P .

Pode-se provar que a derivada direccional $f'_u(x_0, y_0)$ determina o declive da recta t no ponto P .

Teorema 3: Se a função f é diferenciável em \vec{x} , então f possui derivada direccional em \vec{x} em qualquer direcção. Além disso, para cada versor \vec{u} obtém-se:

$$f'_u(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u}$$

Teorema 4: Se a função real $f(x, y, z)$ é diferenciável em \vec{x} , então as derivadas parciais $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ e $\partial f / \partial z$ existem em \vec{x} e:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})\vec{k}$$

Se a função real é a duas variáveis, $f(x, y)$, então:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j}$$

Exemplo 38: Relativamente à função $f(x, y, z) = 2xz^2 \cos(\pi y)$, pretende-se calcular a derivada direccional da função no ponto $P = (1, 2, -1)$, na direcção do ponto $Q = (2, 1, 1)$.

Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2z^2 \cos(\pi y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2\pi xz^2 \sin(\pi y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 4xz \cos(\pi y)$$

são funções contínuas, o gradiente de f em P é:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2, -1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2, -1) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, -1) = -4$$

$$\nabla f(1, 2, -1) = 2\vec{i} - 4\vec{k}$$

O versor que define a direcção que liga P a Q é:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

Obtém-se, finalmente,

$$f'_u(1,2,-1) = \nabla f(1,2,-1) \cdot \vec{u} = \frac{-6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}$$

- Notando que \vec{u} é versor, então

$$\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{u}} \nabla f(\vec{x}) = (\nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u}) \vec{u} = f'_u(\vec{x}) \vec{u} \quad (4)$$

podendo concluir-se que (4) representa a *componente vectorial de $\nabla f(\vec{x})$ na direcção de \vec{u}* .

Por outro lado, tem-se

$$f'_u(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(\vec{x})\| \|\vec{u}\| \cos \theta = \|\nabla f(\vec{x})\| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\nabla f(\vec{x})$ e \vec{u} .

Uma vez que $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, então

$$-\|\nabla f(\vec{x})\| \leq f'_u(\vec{x}) \leq \|\nabla f(\vec{x})\| \quad (5)$$

para qualquer direcção definida pelo versor \vec{u} .

- A expressão (5) permite afirmar que, em cada ponto \vec{x} do domínio, a *função f cresce mais rapidamente na direcção de $\nabla f(\vec{x})$* ; a razão da variação de f em \vec{x} toma o valor $\|\nabla f(\vec{x})\|$. Por outro lado, a *função f decresce mais rapidamente na direcção de $-\nabla f(\vec{x})$* ; neste caso, a razão da variação de f em \vec{x} é $-\|\nabla f(\vec{x})\|$.

Exemplo 39: Admita-se que a temperatura em cada ponto de uma placa metálica é definida pela função

$$T(x, y) = e^x \cos(y) + e^y \cos(x)$$

- a) Obtenha o gradiente de T no ponto genérico (x, y) .
- b) Em que direcção a temperatura cresce mais rapidamente em $(0, 0)$? Qual é o maior valor da razão da variação da temperatura neste ponto?
- c) Em que direcção a temperatura decresce mais rapidamente em $(0, 0)$? Qual é o menor valor da razão da variação da temperatura neste ponto?

Solução:

- a) Sabendo que

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(y) - e^y \sin(x), \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$$

são funções contínuas, o gradiente de T em (x, y) é:

$$\nabla T(x, y) = (e^x \cos(y) - e^y \sin(x))\vec{i} + (-e^x \sin(y) + e^y \cos(x))\vec{j}$$

- b) No ponto $(0, 0)$ a temperatura cresce mais rapidamente na direcção do gradiente:

$$\nabla T(0, 0) = \vec{i} + \vec{j}$$

O maior valor da razão da variação de T neste ponto é $\|\nabla T(0, 0)\| = \sqrt{2}$.

- c) No ponto $(0, 0)$ a temperatura decresce mais rapidamente na direcção de:

$$-\nabla T(0, 0) = -\vec{i} - \vec{j}$$

O menor valor da razão da variação de T neste ponto é $-\|\nabla T(0, 0)\| = -\sqrt{2}$.

Exemplo 40: Admita-se que a densidade mássica (massa por unidade de volume) de uma esfera metálica centrada na origem é definida pela função

$$\rho(x, y, z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad k > 0$$

- Obtenha o gradiente de ρ no ponto genérico (x, y, z) .
- Em que direcção a densidade cresce mais rapidamente em (x, y, z) ? Qual é o maior valor da razão da variação da densidade neste ponto?
- Em que direcção a densidade decresce mais rapidamente em (x, y, z) ? Qual é o menor valor da razão da variação da densidade neste ponto?
- Quais são as razões da variação da densidade nas direcções dos vectores coordenados unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} ?

Solução:

- Sabendo que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x, y, z) = -2kxe^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y}(x, y, z) = -2kye^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z}(x, y, z) = -2kze^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

são funções contínuas, o gradiente de ρ em (x, y, z) é

$$\nabla \rho(x, y, z) = -2ke^{-(x^2+y^2+z^2)}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -2\rho(x, y, z)\vec{r} \quad (6)$$

em que $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é o vector de posição (vector radial) que determina a posição de cada ponto da esfera no espaço.

A equação (6) mostra que o vector gradiente é, em cada ponto (x, y, z) da esfera, paralelo ao vector de posição, mas com sentido oposto.

- b) Atendendo a (6) verifica-se que, em cada ponto (x, y, z) da esfera, a densidade cresce mais rapidamente na direcção da origem do referencial.

A razão da variação de ρ é:

$$\|\nabla\rho(x, y, z)\| = 2\rho(x, y, z)\|\vec{r}\| = 2\rho(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- c) Atendendo a (6) verifica-se que, em cada ponto (x, y, z) da esfera, a densidade decresce mais rapidamente na direcção oposta à origem do referencial.

A razão da variação de ρ é:

$$-\|\nabla\rho(x, y, z)\| = -2\rho(x, y, z)\|\vec{r}\| = -2\rho(x, y, z)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- d) As razões da variação da densidade nas direcções dos vectores coordenados unitários \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são, respectivamente:

$$\rho'_i(x, y, z) = \nabla\rho(x, y, z) \cdot \vec{i} = -2x\rho(x, y, z)$$

$$\rho'_j(x, y, z) = \nabla\rho(x, y, z) \cdot \vec{j} = -2y\rho(x, y, z)$$

$$\rho'_k(x, y, z) = \nabla\rho(x, y, z) \cdot \vec{k} = -2z\rho(x, y, z)$$

Note-se que os valores encontrados correspondem às derivadas parciais (de primeira ordem) obtidas na alínea a).

Teorema do valor médio

- Como é sabido o *teorema do valor médio*, também conhecido por *teorema de Lagrange*, assume um papel extremamente importante no estudo das funções reais a uma variável.
Relembrando o teorema: se $f(x)$ é uma função contínua definida num intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) , então existe, pelo menos, um ponto $c \in (a, b)$, tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

- Também é possível apresentar uma propriedade análoga para as funções reais a várias variáveis. O teorema seguinte é designado por *teorema do valor médio* para funções reais a várias variáveis.

Teorema 5: Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis diferenciável em cada ponto do segmento de recta que liga o ponto \vec{a} ao ponto \vec{b} . Então existe, nesse segmento de recta, pelo menos um ponto \vec{c} entre \vec{a} e \vec{b} , tal que:

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

- Um *conjunto aberto* (sem pontos fronteira) U diz-se *conexo*, se quaisquer dois pontos de U podem ser ligados através de uma linha poligonal que está totalmente contida em U .

Teorema 6: Sejam U um conjunto aberto conexo e $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis diferenciável em U . Se $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in U$, então $f(\vec{x})$ é constante em U .

Teorema 7: Sejam U um conjunto aberto conexo e $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ funções reais a várias variáveis diferenciáveis em U . Se $\nabla f(\vec{x}) = \nabla g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in U$, então $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ apenas diferem de uma constante em U .

Regra da cadeia

- Começemos por relembrar a aplicação da regra da cadeia a funções reais a uma variável. Sejam $g(x)$ uma função diferenciável em x_0 e $f(x)$ uma função diferenciável em $g(x_0)$; então

$$\frac{d}{dx}[f(g(x_0))] = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

- Sejam a função real a três variáveis $f(x, y, z)$, definida num conjunto aberto U , e a função vectorial $\vec{r}(t)$, com $t \in [t_0, t_1]$, tal que $\vec{r}[t_0, t_1] \subset U$. Então é possível definir a *função composta*

$$(f \circ \vec{r})(t) = f(\vec{r}(t)) \text{ , } t \in [t_0, t_1]$$

A derivada da função composta $f \circ \vec{r}$ pode ser obtida recorrendo à regra da cadeia.

- Uma função real a três variáveis $f(x, y, z)$ é *continuamente diferenciável* num conjunto aberto U , se f é diferenciável em U e ∇f é contínuo em U .

Teorema 8: Se $f(x, y, z)$ é uma função real a três variáveis continuamente diferenciável num conjunto aberto U e $\vec{r}(t)$ é uma curva diferenciável contida em U , então a função composta $f \circ \vec{r}$ é diferenciável e:

$$\frac{d}{dt}[f(\vec{r}(t))] = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \quad (7)$$

- A expressão (7) pode ser reescrita sob uma forma alternativa. Notando que

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

então:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

- No caso de uma função real a duas variáveis $f(x, y)$ a equação (7) conduz-nos a:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$$

$$\vec{r}'(t) = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

Exemplo 41: Considere-se a função $f(x, y, z) = x^2y + z\cos(x)$ e a curva, C , parametrizada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$.

- Obtenha, usando a regra da cadeia, a razão da variação de f em relação t ao longo de C .
- Confirme o resultado obtido na alínea anterior após calcular a função composta.

Solução:

- O vector tangente à curva C é:

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

Sabendo que

$$\nabla f(x, y, z) = (2xy - z\sin(x))\vec{i} + x^2\vec{j} + \cos(x)\vec{k}$$

e tendo em atenção que $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ e $z(t) = t^3$, obtém-se:

$$\nabla f(\vec{r}(t)) = t^3(2 - \sin(t))\vec{i} + t^2\vec{j} + \cos(t)\vec{k}$$

A razão da variação de f em relação a t ao longo de C é:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[f(\vec{r}(t))] &= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = t^3(2 - \sin(t)) + 2t^3 + 3t^2 \cos(t) = \\ &= 4t^3 - t^3 \sin(t) + 3t^2 \cos(t) \end{aligned}$$

- A função composta $f \circ \vec{r}$ é a função escalar

$$g(t) = (f \circ \vec{r})(t) = f(\vec{r}(t)) = t^4 + t^3 \cos(t)$$

pelo que:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}[f(\vec{r}(t))] = 4t^3 + 3t^2 \cos(t) - t^3 \sin(t)$$

Exemplo 42: Dadas as funções

$$u = x^2 - y^2, \quad x = t^2 - 1 \quad \text{e} \quad y = 3\text{sen}(\pi t)$$

calcule $\partial u / \partial t$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{dx}{dt} = 2t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 3\pi \cos(\pi t)$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (2x)(2t) + (-2y)(3\pi \cos(\pi t)) = \\ &= 2(t^2 - 1)(2t) + (-2)(3\text{sen}(\pi t))(3\pi \cos(\pi t)) = \\ &= 4t(t^2 - 1) - 18\pi \text{sen}(\pi t) \cos(\pi t) \end{aligned}$$

Em alternativa, é possível resolver o problema, começando por calcular a função composta

$$\begin{aligned} u(t) &= x^2(t) - y^2(t) = (t^2 - 1)^2 - (3\text{sen}(\pi t))^2 = \\ &= (t^2 - 1)^2 - 9\text{sen}^2(\pi t) \end{aligned}$$

e derivando:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 2(2t)(t^2 - 1) - 9(2)(\pi \cos(\pi t))(\text{sen}(\pi t)) = \\ &= 4t(t^2 - 1) - 18\pi \text{sen}(\pi t) \cos(\pi t) \end{aligned}$$

Outras aplicações da regra da cadeia

- Sabendo que

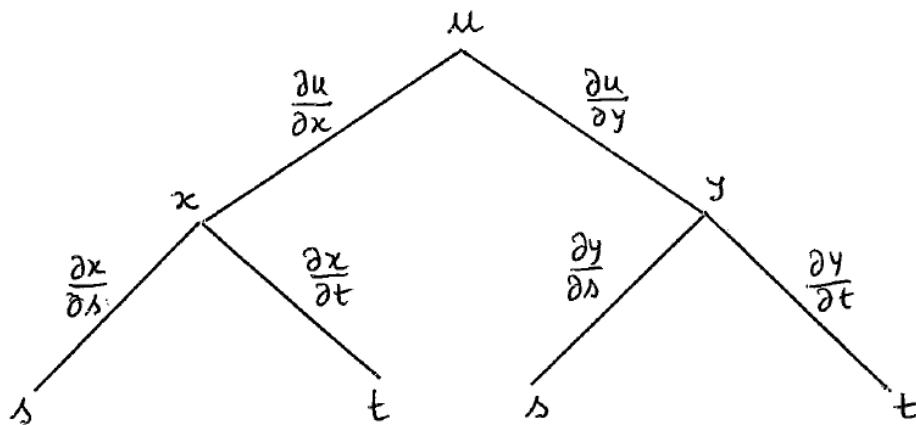
$$u = u(x, y), \text{ tal que } x = x(s, t) \text{ e } y = y(s, t)$$

então:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (9)$$

As expressões (8) e (9) podem ser deduzidas a partir do *diagrama de árvore* seguinte:



Cada caminho que se inicia em u e termina numa variável (s ou t) determina um produto de derivadas (parciais). A *derivada parcial de u em relação a uma variável* (s ou t) é dada pela soma dos produtos gerados pelos vários caminhos que nos conduzem a essa variável.

Exemplo 43: Dadas as funções

$$u = x^2 - 2xy + 2y^3, \text{ tal que } x = s^2 \ln(t) \text{ e } y = 2st^3$$

calcule $\partial u / \partial s$ e $\partial u / \partial t$.

Solução:

As derivadas parciais pretendidas podem ser obtidas recorrendo ao *diagrama de árvore* apresentado na página anterior.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \\ &= (2x - 2y)2s \ln(t) + (-2x + 6y^2)2t^3 = \\ &= (2s^2 \ln(t) - 4st^3)2s \ln(t) + (-2s^2 \ln(t) + 24s^2 t^6)2t^3 = \\ &= 4s^2 \ln(t)(s \ln(t) - 2t^3) + 4s^2 t^3(-\ln(t) + 12t^6) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \\ &= (2x - 2y)\frac{s^2}{t} + (-2x + 6y^2)(6st^2) = \\ &= (2s^2 \ln(t) - 4st^3)\frac{s^2}{t} + (-2s^2 \ln(t) + 24s^2 t^6)6st^2 = \\ &= \frac{2s^3}{t}(s \ln(t) - 2t^3) + 12s^3 t^2(-\ln(t) + 12t^6) \end{aligned}$$

- Sabendo que

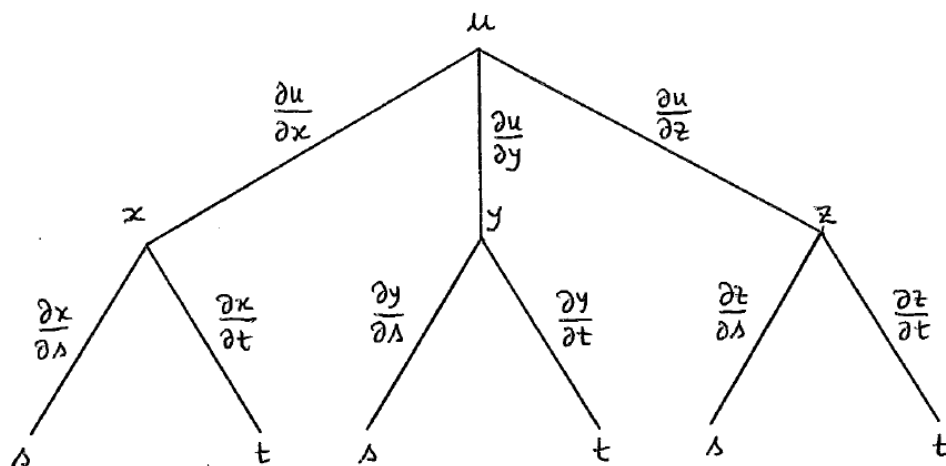
$$u = u(x, y, z), \text{ tal que } x = x(s, t), \quad y = y(s, t) \text{ e } z = z(s, t)$$

então:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (11)$$

O diagrama de árvore que corresponde às derivadas parciais apresentadas em (10) e (11) é o seguinte:



Derivação implícita

- Admita-se que $u = u(x, y)$ é uma função continuamente diferenciável e que y é uma função diferenciável em x que satisfaz a condição $u(x, y) = 0$. Então, é possível calcular a *derivada de y em relação a x* sem que seja necessário *explicitar a função y em termos de x* ; este processo é designado por *diferenciação (derivação) implícita*.

Teorema 9: Se $u = u(x, y)$ é uma função continuamente diferenciável e y é uma função diferenciável em x que satisfaz a equação $u(x, y) = 0$, então, para todos os pontos (x, y) onde $\partial u / \partial y \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}$$

Exemplo 44: Seja y uma função diferenciável em x que verifica a equação:

$$u(x, y) = 2x^2y - y^3 + 1 - x - 2y = 0 \quad (12)$$

Notando que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4xy - 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 - 3y^2 - 2$$

então:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 1}{2x^2 - 3y^2 - 2} \quad (13)$$

O resultado (13) também pode ser obtido diferenciando (12) em relação a x , tendo em atenção que y é uma função de x .

Obtém-se, neste caso,

$$\begin{aligned} 4xy + 2x^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} - 1 - 2 \frac{dy}{dx} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x^2 - 3y^2 - 2) \frac{dy}{dx} &= -4xy + 1 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 1}{2x^2 - 3y^2 - 2}$$

Exemplo 45: Calcule o declive da recta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no ponto $P = (1, \sqrt{3})$:

a) Usando a derivação implícita.

b) A partir da função que explicita y em função de x nesse ponto.

Solução:

a) Considerando a função real a duas variáveis

$$u(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

O declive da recta tangente em P é:

$$\frac{dy}{dx}(1, \sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) A função que define a linha que passa em P é:

$$y = +\sqrt{4 - x^2}$$

Derivando em ordem a x

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

pelo que:

$$\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Teorema 10: Se $u = u(x, y, z)$ é uma função continuamente diferenciável e $z = z(x, y)$ é uma função diferenciável que satisfaz a equação $u(x, y, z) = 0$, então, para todos os pontos (x, y, z) onde $\partial u / \partial z \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial u / \partial y}{\partial u / \partial z}$$

Gradiente; curvas de nível

Teorema 11: Seja $f = f(x, y)$ uma função continuamente diferenciável. Então em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ do seu domínio, o *gradiente* ∇f , se não for nulo, é *perpendicular à tangente à curva de nível de f* que passa em \vec{x}_0 .

Exemplo 46: Em relação à função $f(x, y) = x^2 + y^2$, as curvas de nível são as circunferências concêntricas:

$$x^2 + y^2 = c, \quad c \geq 0$$

Em cada ponto $(x, y) \neq (0, 0)$ o gradiente de $f(x, y)$

$$\nabla f(x, y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} = 2(x\vec{i} + y\vec{j}) = 2\vec{r}$$

é perpendicular à curva de nível (circunferência) que passa nesse ponto (tem a direcção radial) e aponta no sentido convexo da curva.

Na origem, a curva de nível reduz-se a um ponto e $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$.

- O gradiente $\nabla f(x, y)$ permite definir, em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ de uma curva de nível, a *linha normal* e a *linha tangente* a essa curva. Notando que o vector

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\vec{j}$$

é um *vector normal* à curva de nível no ponto \vec{x}_0 , então a equação vectorial da *linha normal* à curva $f(x, y) = c$ em \vec{x}_0 é:

$$\vec{r}(u) = \vec{x}_0 + u\nabla f(\vec{x}_0), \quad u \in \mathbb{R}$$

Por outro lado, sabendo que o vector

$$\vec{t}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\vec{j}$$

é perpendicular a $\nabla f(\vec{x}_0)$ (o produto escalar é nulo), então ele será um *vector tangente* à curva de nível em \vec{x}_0 ; assim, a equação vectorial da *linha tangente* à curva $f(x, y) = c$ em \vec{x}_0 é:

$$\vec{r}(v) = \vec{x}_0 + v\vec{t}(\vec{x}_0), \quad v \in \mathbb{R}$$

Exemplo 47: Considere a curva plana C de equação $x^2 + 2y^3 = xy + 4$ e o ponto $P = (2, 1)$ situado em C . Determine em P :

- O vector normal e a equação da linha normal à curva.
- O vector tangente e a equação da linha tangente à curva.

Solução:

- Sendo $f(x, y) = x^2 + 2y^3 - xy$, a curva C é a curva de nível $f(x, y) = 4$. O gradiente de f é:

$$\nabla f(x, y) = (2x - y)\vec{i} + (6y^2 - x)\vec{j}$$

Assim, o *vector normal* a C em P é:

$$\vec{n} = \nabla f(2,1) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

A equação vectorial da *linha normal* a C em P é:

$$\vec{r}(\alpha) = P + \alpha\vec{n} = (2 + 3\alpha, 1 + 4\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$$

A sua equação cartesiana é

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4}$$

enquanto a sua equação reduzida é:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

b) O *vector tangente* a C em P é:

$$\vec{t} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

A equação vectorial da *linha tangente* a C em P é:

$$\vec{r}(\beta) = P + \beta\vec{t} = (2 + 4\beta, 1 - 3\beta), \beta \in \mathbb{R}$$

A sua equação cartesiana é

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3}$$

enquanto a sua equação reduzida é:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

Gradiente; superfícies de nível

Teorema 12: Seja $f = f(x, y, z)$ uma função continuamente diferenciável. Então em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ do seu domínio, o *gradiente* ∇f , se não for nulo, é *perpendicular ao plano tangente à superfície de nível de f que passa em \vec{x}_0* .

Exemplo 48: Em relação à função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, as superfícies de nível são as superfícies esféricas concêntricas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c, \quad c \geq 0$$

Em cada ponto $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ o gradiente de $f(x, y, z)$

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 2\vec{r}$$

é perpendicular à superfície de nível (superfície esférica) que passa nesse ponto (tem a direcção radial) e aponta no sentido convexo da superfície. Na origem, a superfície de nível reduz-se a um ponto e $\nabla f(0, 0, 0) = \vec{0}$.

- Neste caso, o gradiente $\nabla f(x, y, z)$ permite definir, em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de uma superfície de nível, a *linha normal* e o *plano tangente* a essa superfície. O plano tangente em \vec{x}_0 é o plano que mais se aproxima da superfície na vizinhança desse ponto.

- Um ponto $\vec{x} = (x, y, z)$ está no *plano tangente* à superfície $f(x, y, z) = c$ em $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, se e só se:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = 0$$

A equação vectorial da *linha normal* à superfície em \vec{x}_0 é:

$$\vec{r}(u) = \vec{x}_0 + u \nabla f(\vec{x}_0), \quad u \in \mathbb{R}$$

Exemplo 49: Seja o cone elíptico de equação $z^2 = x^2 + 4y^2$ e o ponto $P = (3, 2, 5)$ situado nesta superfície. Determine em P :

- O vector normal à superfície.
- A equação da linha normal à superfície.
- A equação do plano tangente à superfície.

Solução:

- O cone elíptico é uma superfície de nível da forma $f(x, y, z) = 0$, em que $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2$.

O gradiente de f é:

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\vec{i} + 8y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

Assim, o *vector normal* à superfície em P é:

$$\nabla f(3, 2, 5) = 6\vec{i} + 16\vec{j} - 10\vec{k}$$

- Notando que o vector $\nabla f(3, 2, 5)$ é paralelo ao vector $\vec{n} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}$, a equação vectorial da *linha normal* à superfície em P é:

$$\vec{r}(\alpha) = P + \alpha \vec{n} = (3 + 3\alpha, 2 + 8\alpha, 5 - 5\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

As suas equações cartesianas são:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-5}{-5}$$

c) A equação cartesiana do *plano tangente* à superfície em P é:

$$(x-3, y-2, z-5) \cdot (3, 8, -5) = 0 \Leftrightarrow 3x + 8y - 5z = 0$$

Trata-se de um plano que passa na origem.

Exemplo 50: A curva C de equação $\vec{r}(t) = 2^{-1}t^2\vec{i} + 4t^{-1}\vec{j} + (2^{-1}t - t^2)\vec{k}$ intersecta o parabolóide hiperbólico $x^2 - 4y^2 - 4z = 0$ no ponto $P = (2, 2, -3)$. Calcule o ângulo de intersecção.

Solução:

Pretende-se calcular o ângulo ϕ que o vector tangente à curva faz com o plano tangente ao cone hiperbólico no ponto P .

Sabendo que $P = \vec{r}(2)$ e uma vez que

$$\vec{r}'(t) = t\vec{i} - 4t^{-2}\vec{j} + (2^{-1} - 2t)\vec{k}$$

então o vector tangente a C em P é

$$\vec{r}'(2) = 2\vec{i} - \vec{j} - \frac{7}{2}\vec{k}$$

sendo um vector paralelo a $\vec{t} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 7\vec{k}$.

O parabolóide hiperbólico é uma superfície de nível da forma $f(x, y, z) = 0$, em que $f(x, y, z) = x^2 - 4y^2 - 4z$.

O gradiente de f é

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\vec{i} - 8y\vec{j} - 4\vec{k}$$

pelo que o *vector normal* à superfície em P é

$$\nabla f(2,2,-3) = 4\vec{i} - 16\vec{j} - 4\vec{k}$$

sendo um vector paralelo a $\vec{n} = \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$.

Designando por θ o ângulo formado pelos vectores \vec{t} e \vec{n} , então:

$$\theta = \arccos \frac{|\vec{t} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{t}\| \|\vec{n}\|} = \arccos \frac{19}{\sqrt{69}\sqrt{18}} = \arccos \frac{19\sqrt{138}}{414}$$

Assim:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta = \arcsen \frac{19\sqrt{138}}{414}$$

Exemplo 51: Em que pontos da superfície $z = 3xy - x^3 - y^3$ o plano tangente é horizontal (paralelo ao plano xOy)?

Solução:

A superfície dada é uma superfície de nível da forma $f(x, y, z) = 0$, em que $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 3xy - z$.

O gradiente de f é:

$$\nabla f(x, y, z) = 3(x^2 - y)\vec{i} + 3(y^2 - x)\vec{j} - \vec{k}$$

Para que o plano tangente seja horizontal deverá verificar-se:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Concluindo, o plano tangente à superfície é horizontal nos pontos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$.

Extremos locais

- Tal como acontece nas funções reais a uma variável, também é possível analisar a existência de *extremos locais* em funções reais a várias variáveis.
- Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis e \vec{x}_0 um ponto interior do seu domínio.
 - i) A função $f(\vec{x})$ tem um *máximo local* em \vec{x}_0 , se e só se:

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ numa vizinhança de } \vec{x}_0.$$

- ii) A função $f(\vec{x})$ tem um *mínimo local* em \vec{x}_0 , se e só se:

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ numa vizinhança de } \vec{x}_0.$$

Os *máximos locais* e os *mínimos locais* da função $f(\vec{x})$ constituem os *extremos locais* da função.

- Se uma função real a uma variável, $f(x)$, possui um extremo local em x_0 , então:

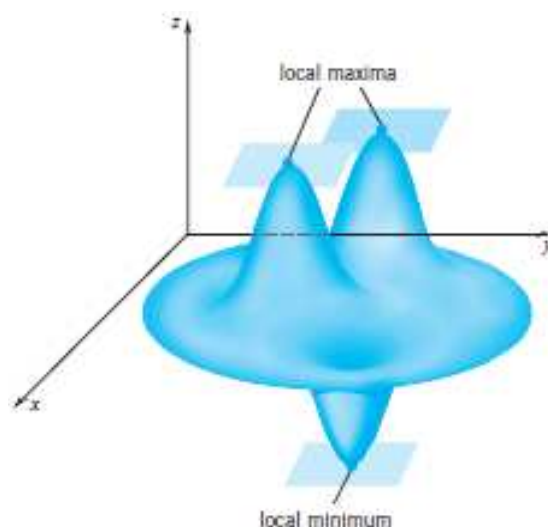
$$f'(x_0) = 0 \text{ ou } f'(x_0) \text{ não existe.}$$

- O teorema seguinte estabelece a relação entre o gradiente e a existência de extremos locais para uma função real a várias variáveis.

Teorema 13: Se a função real a várias variáveis $f(\vec{x})$ possui um *extremo local* em \vec{x}_0 , então:

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \text{ ou } \nabla f(\vec{x}_0) \text{ não existe.}$$

- Os pontos no interior do domínio de $f(\vec{x})$ onde o gradiente é nulo ou o gradiente não existe chamam-se *pontos críticos*. Estes são os únicos pontos onde poderão existir *extremos locais* (teorema 13).
- Os *pontos críticos onde o gradiente é nulo* designam-se por *pontos estacionários*. Os pontos estacionários onde não existem *extremos locais* (*máximos ou mínimos locais*) são designados por *pontos de sela*.
- No caso presente limitar-se-á a análise a funções reais a duas variáveis, $f(x,y)$. De um modo geral, o estudo deste problema em funções reais a mais de duas variáveis é demasiado complexo em termos do cálculo envolvido.
- Seja a função real a duas variáveis, $f(x,y)$, definida num conjunto aberto conexo, U , e continuamente diferenciável em U . O gráfico da função é a superfície $z = f(x,y)$.



Nos pontos onde $f(x,y)$ possui um máximo local ou um mínimo local, o gradiente, $\nabla f(x,y)$, é nulo e, portanto, o plano tangente à superfície é horizontal.

- Convém referir que o anulamento do gradiente num ponto apenas assinala a possibilidade da existência de um extremo local nesse ponto; no entanto, não o garante.

Exemplo 52: Seja a função real a duas variáveis

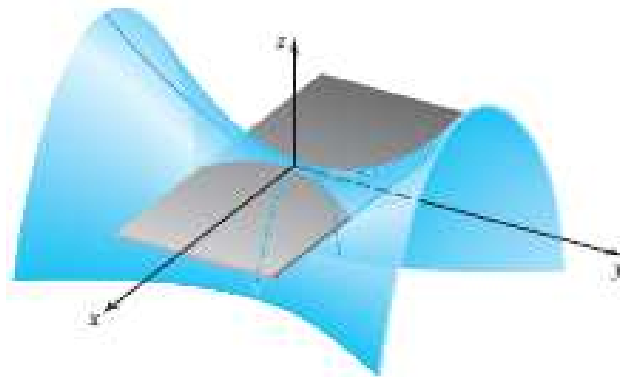
$$f(x, y) = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \text{ tal que } \nabla f(x, y) = \left(-\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2} \right)$$

O gráfico da função é o *paraboloide hiperbólico*:

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Na origem o plano tangente à superfície é horizontal e, portanto, o gradiente é nulo, $\nabla f(0, 0) = \vec{0}$.

Contudo, não é possível concluir que existe um máximo local ou um mínimo local neste ponto (trata-se de um *ponto de sela*).



Com efeito, considerando o comportamento da função ao longo do eixo dos xx , verifica-se que existe um *máximo local na origem*. Por outro lado, considerando o comportamento da função ao longo do eixo dos yy , verifica-se que existe um *mínimo local na origem*.

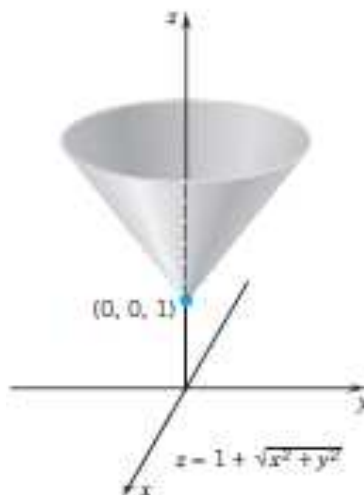
Exemplo 53: Seja a função:

$$f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

O gráfico da função é a folha superior do cone circular que tem o seu vértice no ponto $(0, 0, 1)$:

$$z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Analisando a figura é óbvio que o valor $f(0, 0) = 1$ é um *mínimo local* da função.



Uma vez que as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

não estão definidas em $(0, 0)$, conclui-se que $\nabla f(0, 0)$ não existe.

Assim, o ponto $(0, 0)$ é um *ponto crítico* da função $f(x, y)$, mas *não é um ponto estacionário*.

No ponto $(0, 0, 1)$ o plano tangente à superfície não está definido.

- Relembremos o *teste da segunda derivada* para uma função real a uma variável, $f(x)$. Assim, a função $f(x)$ possui um *mínimo local* em x_0 , se $f''(x_0) > 0$; por outro lado, a função $f(x)$ possui um *máximo local* em x_0 , se $f''(x_0) < 0$.
- O teorema seguinte estabelece um teste similar para funções reais a duas variáveis, $f(x, y)$, que é designado por *teste das derivadas parciais de segunda ordem*.

Teorema 14: Admita-se que $f(x, y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas numa vizinhança de (x_0, y_0) e que $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$. Sejam:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Considerando o *discriminante* $D = AC - B^2$:

- i) Se $D < 0$, então (x_0, y_0) é um *ponto de sela*;
- ii) Se $D > 0$ e $A > 0$, então $f(x, y)$ possui um *mínimo local* em (x_0, y_0) ;
- iii) Se $D > 0$ e $A < 0$, então $f(x, y)$ possui um *máximo local* em (x_0, y_0) .

- No exemplo seguinte faz-se uma interpretação geométrica do *teste das derivadas parciais de segunda ordem*.

Exemplo 54: Seja a função real a duas variáveis:

$$f(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{c}{2}y^2, \quad \text{com } a \neq 0 \wedge c \neq 0$$

O gráfico de $f(x,y)$ é um parabolóide:

$$z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{c}{2}y^2 \quad (14)$$

Notando que

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = (ax)\vec{i} + (cy)\vec{j}$$

conclui-se que o gradiente é nulo na origem, $\nabla f(0,0) = \vec{0}$.

Sabendo que

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = a, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = c$$

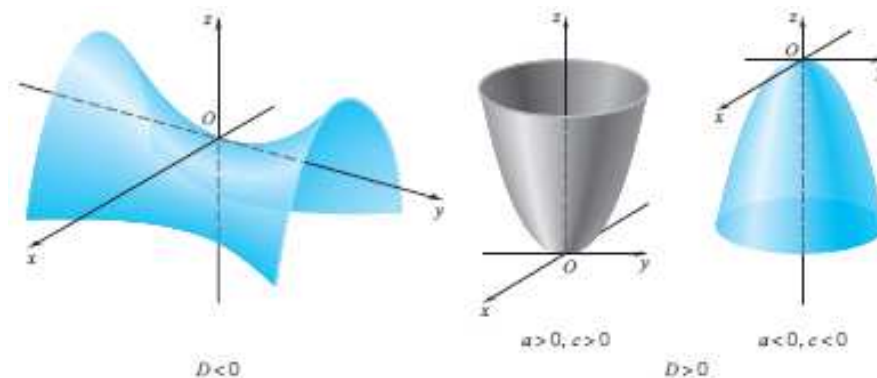
obtem-se o seguinte valor para o discriminante:

$$D = AC - B^2 = ac$$

Se $D < 0$, então a e c possuem sinais opostos; neste caso (14) descreve um *parabolóide hiperbólico*; neste caso, $(0,0)$ é um *ponto de sela*.

Se $D > 0$ e $a > 0$, então $c > 0$; neste caso (14) descreve um *parabolóide elíptico* definido no semieixo positivo do eixo dos zz ; a função $f(x,y)$ possui um *mínimo local* em $(0,0)$.

Se $D > 0$ e $a < 0$, então $c < 0$; neste caso (14) descreve um *parabolóide elíptico* definido no semieixo negativo do eixo dos zz ; a função $f(x,y)$ possui um *máximo local* em $(0,0)$.



Exemplo 55: Determine os pontos críticos e os extremos locais da função:

$$f(x, y) = -xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

Solução:

As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -ye^{-(x^2+y^2)/2} + x^2ye^{-(x^2+y^2)/2} = y(x^2 - 1)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -xe^{-(x^2+y^2)/2} + xy^2e^{-(x^2+y^2)/2} = x(y^2 - 1)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

O gradiente da função $f(x, y)$

$$\nabla f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2} \left[y(x^2 - 1)\vec{i} + x(y^2 - 1)\vec{j} \right]$$

está definido em todos os pontos do seu domínio, pelo que, neste caso, os pontos críticos são pontos estacionários (pontos onde o gradiente é nulo). Uma vez que

$$e^{-(x^2+y^2)/2} \neq 0$$

então $\nabla f(x, y) = \vec{0}$, se e só se:

$$y(x^2 - 1) = 0 \quad \text{e} \quad x(y^2 - 1) = 0$$

As soluções destas equações são

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \pm 1, \quad y = \pm 1$$

a que correspondem os pontos estacionários:

$$(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$$

As derivadas parciais de segunda ordem são:

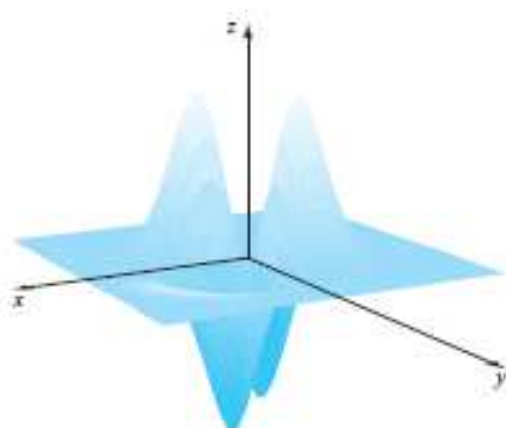
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = xy(3 - x^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = (x^2 - 1)(1 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

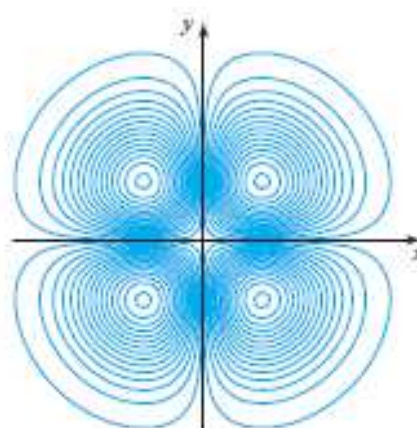
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = xy(3 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

A tabela seguinte apresenta os resultados obtidos para cada um dos pontos estacionários:

Ponto	A	B	C	D	Classificação	Extremo
(0,0)	0	-1	0	-1	ponto de sela	-----
(1,1)	$2e^{-1}$	0	$2e^{-1}$	$4e^{-2}$	mínimo local	$-e^{-1}$
(1,-1)	$-2e^{-1}$	0	$-2e^{-1}$	$4e^{-2}$	máximo local	e^{-1}
(-1,1)	$-2e^{-1}$	0	$-2e^{-1}$	$4e^{-2}$	máximo local	e^{-1}
(-1,-1)	$2e^{-1}$	0	$2e^{-1}$	$4e^{-2}$	mínimo local	$-e^{-1}$



Gráfico



curvas de nível

- No caso de uma função real a uma variável, $f(x)$, o *teste da segunda derivada* só pode ser aplicado num ponto x_0 onde $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \neq 0$; se $f''(x_0) = 0$, o teste nada permite concluir.
- Uma situação semelhante ocorre quando se está em presença de uma função real a duas variáveis, $f(x, y)$. A aplicação do *teste das derivadas parciais de segunda ordem* só é possível em pontos (x_0, y_0) onde $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0}$ e o discriminante $D = AC - B^2 \neq 0$. Se $D = 0$, o teste nada permite concluir.

Exemplo 53: Sejam as funções

$$f(x, y) = x^4 + y^4, \quad g(x, y) = -(x^4 + y^4) \quad \text{e} \quad h(x, y) = x^4 - y^4$$

No ponto $(0,0)$, cada uma das funções possui gradiente nulo, enquanto o discriminante é $D = 0$; nestas condições o *teste das derivadas parciais de segunda ordem é inconclusivo*.

No entanto, analisando o comportamento de cada uma das funções na vizinhança do ponto $(0,0)$, verifica-se:

- A função $f(x, y)$ possui um *mínimo local* em $(0,0)$;
- A função $g(x, y)$ possui um *máximo local* em $(0,0)$;
- A função $h(x, y)$ possui um *ponto de sela* em $(0,0)$.

Enquanto as conclusões apontadas em i) e ii) são óbvias, o mesmo já não acontece em iii).

Para confirmar iii), note-se que $h(0,0) = 0$, ao passo que em pontos situados na vizinhança de $(0,0)$ a função assume valores positivos e negativos:

$$h(x, 0) > 0, \text{ se } x \neq 0$$

$$h(0, y) < 0, \text{ se } y \neq 0$$

Extremos absolutos

- Enquanto a existência de *extremos locais* num ponto interior, \vec{x}_0 , do domínio de uma função real a várias variáveis depende do comportamento da função numa vizinhança de \vec{x}_0 , os *extremos absolutos* dependem do comportamento da função em todo o seu domínio.
- Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis:
 - i) A função $f(\vec{x})$ tem um *máximo absoluto* em \vec{x}_0 , se e só se:

$$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ no domínio de } f(\vec{x}).$$

- ii) A função $f(\vec{x})$ tem um *mínimo absoluto* em \vec{x}_0 , se e só se:

$$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ no domínio de } f(\vec{x}).$$

Reconstrução da função a partir do seu gradiente

- O teorema seguinte estabelece as condições para que um *campo vectorial seja gradiente*.

Teorema 15: Seja

$$\vec{f}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

um campo vectorial continuamente diferenciável num *conjunto aberto conexo* $D \subseteq \mathbb{R}^3$. O *campo vectorial é gradiente*,

$$\vec{f}(x, y, z) = \nabla \phi(x, y, z)$$

se e só se:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

No caso de

$$\vec{f}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

e $D \subseteq \mathbb{R}^2$, as condições anteriores reduzem-se a:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Exemplo 57: Verifique que o campo vectorial

$$\vec{f}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{x}} + 2x\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - \sqrt{x} + 1\right)\vec{j}$$

é gradiente e determine o campo escalar $\varphi(x, y)$, tal que $\vec{f}(x, y) = \nabla \varphi(x, y)$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

conclui-se que o campo vectorial $\vec{f}(x, y)$ é gradiente; então, existe um campo escalar $\varphi(x, y)$, tal que $\vec{f}(x, y) = \nabla \varphi(x, y)$.

Notando que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = P(x, y) = \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{x}} + 2x$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{y}} - \sqrt{x} + 1$$

recorrendo ao integral indefinido, resulta:

$$\varphi(x, y) = \int P(x, y)dx = x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + x^2 + \phi_1(y) + k_1 \quad (15)$$

$$\varphi(x, y) = \int Q(x, y)dy = x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + y + \phi_2(x) + k_2 \quad (16)$$

Compatibilizando (15) e (16), obtém-se:

$$\varphi(x, y) = x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + x^2 + y + k$$

Exemplo 58: Verifique que é gradiente o campo vectorial:

$$\begin{aligned}\vec{f}(x, y, z) &= P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} = \\ &= (x + y + 1)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (-y + e^z)\vec{k}\end{aligned}$$

Obtenha o campo escalar $\varphi(x, y, z)$, tal que $\vec{f}(x, y, z) = \nabla \varphi(x, y, z)$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

conclui-se que o campo vectorial $\vec{f}(x, y, z)$ é gradiente; então, existe um campo escalar $\varphi(x, y, z)$, tal que $\vec{f}(x, y, z) = \nabla \varphi(x, y, z)$.

Notando que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z) = x + y + 1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = Q(x, y, z) = x - z$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = R(x, y, z) = -y + e^z$$

recorrendo ao integral indefinido, resulta:

$$\varphi(x, y, z) = \int P(x, y, z)dx = \frac{x^2}{2} + xy + x + \phi_1(y, z) + k_1 \quad (17)$$

$$\varphi(x, y, z) = \int Q(x, y, z)dy = xy - zy + \phi_2(x, z) + k_2 \quad (18)$$

$$\varphi(x, y, z) = \int R(x, y, z)dz = -yz + e^z + \phi_3(x, y) + k_3 \quad (19)$$

Compatibilizando (17), (18) e (19), obtém-se:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + x + xy - yz + e^z + k$$