COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 1

FUNÇÕES VECTORIAIS

1. Seja a função vectorial $\vec{f}(t) = (t^2 - 2)\vec{i} + 2t\vec{j} + e^{t-1}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{t \to 1} \vec{f}(t)$.

2. Considere a função vectorial $\vec{f}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{\ln t}{t}\vec{j} + e^{-2t}\vec{k}$, $t \in (0, +\infty)$. Determine:

a) A sua função derivada, $\vec{f}'(t)$.

b) $\int_1^3 \vec{f}(t)\, dt$.

3. Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t}\vec{i} + \frac{1}{1+e^t}\vec{j} \right) dt$.

b) $\int_0^1 \left(te^t\vec{i} + t^2e^t\vec{j} + te^{-t}\vec{k} \right) dt$.

4. Dados os vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{b} = \int_0^1 \left(te^{2t}\vec{i} + t\cosh(2t)\vec{j} + 2te^{-2t}\vec{k} \right) dt$, calcule $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

5. Seja a função vectorial $\vec{f}(t) = \frac{2t}{1+t^2}\vec{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$. Mostre que o ângulo, θ, formado por $\vec{f}(t)$ e $\vec{f}'(t)$ é independente do valor do parâmetro t.

6. Sejam as funções vectoriais $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t) = \vec{f}(t) \times \vec{f}'(t)$ com valores em $\mathbb{R}^3$. Escreva $\vec{g}'(t)$ em função de $\vec{f}(t)$ e das derivadas desta função.

7. Considere a função vectorial $\vec{f}(t)$, com valores em $\mathbb{R}^3$, e a função escalar $g(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)$. Mostre que $g'(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) \times \vec{f}'''(t)$.

8. Seja a função vectorial $\vec{f}(t)$,$t \geq 0$, tal que $t\vec{f}'(t) = \vec{f}(t) + t\vec{a}$ e $\vec{a}$ é um vector não nulo e constante. Sabendo que $\vec{f}(1) = 2\vec{a}$, obtenha os valores de $\vec{f}(3)$ e $\vec{f}''(1)$.

9. Considere a função vectorial $\vec{f}(t) = \operatorname{sen}(2t)\vec{a} + \cos(2t)\vec{b}$, $t \in \mathbb{R}$, em que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vectores não nulos e constantes. Mostre que os vectores $\vec{f}''(t)$ e $\vec{f}(t)$ são paralelos.

10. Parametrize as curvas do plano xOy que são o gráfico das funções:

a) $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. **b)** $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha,\beta]$.

11. Obtenha a parametrização do segmento de recta que liga o ponto $P = (2,7,-1)$ ao ponto $Q = (4,2,3)$.

12. Parametrize as seguintes linhas do plano xOy:

a) $y = x^2$, percorrida no sentido do ponto $(-1,1)$ para o ponto $(3,9)$.

b) $y = x^2$, percorrida no sentido do ponto $(3,9)$ para o ponto $(-1,1)$.

c) $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido directo.

d) $x^2 + y^2 = 2x$, percorrida no sentido directo e unindo o ponto $(2,0)$ ao ponto $(0,0)$.

e) $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido retrógrado.

13. Determine as equações cartesianas das curvas do plano xOy definidas parametricamente pelas equações:

a) $\vec{f}(t) = (3t-1)\vec{i} + (5-2t)\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$. **b)** $\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 3\operatorname{sen}(t)\vec{j}$, $t \in [0,2\pi]$.

c) $\vec{f}(t) = t^{-1}\vec{i} + t^{-2}\vec{j}$, $t \in (0,3)$. **d)** $\vec{f}(t) = \operatorname{tg}(t)\vec{i} + \sec(t)\vec{j}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

e) $\vec{f}(t) = e^{2t}\vec{i} + (e^{2t}-1)\vec{j}$, $t \leq 0$. **f)** $\vec{f}(t) = 2\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

g) $\vec{f}(t) = \operatorname{sen}(t)\vec{i} + \left(1 + \cos^2(t)\right)\vec{j}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

14. Esboce as curvas definidas em cada uma das alíneas do exercício anterior e identifique o sentido do percurso das mesmas.

15. Parametrize as seguintes curvas do espaço:

a) $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$.

b) $y = x^2$ e $z = x^3$.

c) $x^2 + y^2 = 4$ e $z = e^x$.

d) $4(x+1)^2 + y^2 = 4$ e $z = 0$.

e) $x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ e $z = 0$.

16. Esboce as curvas definidas em cada uma das alíneas do exercício anterior.

17. Obtenha a curva do espaço descrita pela função vectorial $\vec{r}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{r}'(t) = \alpha \vec{r}(t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\vec{r}(0) = (1,2,3)$.

18. Em relação à curva, *C*, do espaço descrita pela função vectorial $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$, $t \in [0,1]$, determine:

a) A equação vectorial da recta, *r*, tangente à curva no ponto $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

b) Os pontos da curva onde o vector tangente é paralelo ao vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

c) Os pontos da curva onde o vector tangente é ortogonal ao vector $\vec{a}$.

19. Seja a curva plana descrita pela função vectorial $\vec{f}(t) = t^3\vec{i} + t^5\vec{j}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que a parametrização dada não é regular.

b) Indique uma parametrização regular para a curva.

20. Seja a curva, *C*, parametrizada por $\vec{r}(\theta) = \big(1 + 2\cos(\theta)\big)\vec{i} + \big(2 + 2\mathrm{sen}(\theta)\big)\vec{j}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) Esboce a curva *C*.

b) Determine a linha tangente à curva nos pontos onde *C* intersecta o eixo dos *xx*.

c) Determine a linha tangente à curva nos pontos onde *C* intersecta o eixo dos *yy*.

21. Considere a curva no espaço com equações paramétricas $x = \text{sen}(2t)$, $y = 2\text{sen}^2(t)$ e $z = 2\cos(t)$, $t \in [0,\pi]$. Mostre que:

a) A curva está situada sobre uma superfície esférica centrada na origem.

b) A norma do vector, $\vec{u}$, resultante da projecção ortogonal do vector tangente à curva sobre o plano xOy é constante.

22. Seja a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Determine os pontos da curva onde a linha tangente é paralela à recta de equação vectorial $\vec{r}(u) = (2,1) + u(1,1)$, $u \in \mathbb{R}$.

23. Seja a parábola de equação $y^2 = 4x$.

a) Parametrize a curva.

b) Determine as linhas tangentes à parábola que passam no ponto $P = (-2,0)$.

24. Seja a elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 8$.

a) Parametrize a curva.

b) Obtenha os pontos da elipse onde a linha tangente é paralela à recta de equação $x + 2y = 7$.

25. Seja a curva, C, do espaço descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\vec{i} + \text{sen}(2t)\vec{j} + e^{-t}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$. Obtenha a equação cartesiana do plano que passa no ponto $P = (0,-1,1)$ e é paralelo ao plano osculador da curva no ponto $Q = (-1,0,1)$.

26. Seja hélice cónica descrita pela função vectorial $\vec{r}(\lambda) = \lambda\cos(\lambda)\vec{i} + \lambda\text{sen}(\lambda)\vec{j} + b\lambda\vec{k}$, em que $\lambda \geq 0$ e $b > 0$. Determine, no ponto $O = (0,0,0)$ da hélice:

a) As equações vectoriais dos planos osculador, normal e rectificador.

b) As equações cartesianas dos planos osculador, normal e rectificador.

27. Seja a curva plana, C, de equação $y = x^2 / 2$. Calcule o comprimento do arco da curva compreendida entre os pontos $(0,0)$ e $(1/2, 1/8)$.

28. Seja a curva plana, C, de equação $y^2 = x^3$. Calcule o comprimento do arco da curva compreendida entre os pontos $(1,-1)$ e $(1,1)$.

29. Seja a curva, C, do espaço de equações $y = x^2$ e $z = 2x^3/3$, tal que $x \geq 0$. Obtenha a função comprimento de arco.

30. Seja a curva do espaço, C, descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = e^t\left(\cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + \vec{k}\right)$, $t \geq 0$.

a) Esboce a curva.

b) Calcule os versores da tangente, da normal principal e da binormal em $\vec{r}(t)$.

c) Obtenha as equações cartesianas dos planos osculador, normal e rectificador em $\vec{r}(t)$.

d) Determine as equações cartesianas dos planos osculador, normal e rectificador no ponto $P = (1,0,1)$.

e) Calcule a curvatura, o raio de curvatura e o centro de curvatura em P.

f) Obtenha a função comprimento de arco, que determina o comprimento da curva entre o seu ponto inicial e o ponto genérico $\vec{r}(t)$.

g) Calcule o comprimento do arco da curva, entre o seu ponto inicial e o ponto $\vec{f}(2)$.

h) Determine o comprimento do arco da curva, entre os pontos $\vec{f}(1)$ e $\vec{f}(2)$.

31. Para cada uma das curvas seguintes, determine a função comprimento de arco e indique o valor do comprimento da curva:

a) $\vec{r}(u) = a\left(1-\cos(u)\right)\vec{i} + a\left(u - \text{sen}(u)\right)\vec{j}$, $a > 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

b) $\vec{r}(u) = e^u\cos(u)\vec{i} + e^u\text{sen}(u)\vec{j}$, $0 \leq u \leq 2$.

c) $\vec{r}(u) = a\left(\cos(u) + u\,\text{sen}(u)\right)\vec{i} + a\left(\text{sen}(u) - u\cos(u)\right)\vec{j}$, $a > 0$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

d) $\vec{r}(u) = \text{sen}(u)\vec{i} + u\vec{j} + \left(1-\cos(u)\right)\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2\pi$.

e) $\vec{r}(u) = u\vec{i} + 3u^2\vec{j} + 6u^3\vec{k}$, $0 \leq u \leq 2$.

f) $\vec{f}(u) = a\cos(\omega u)\vec{i} + a\,\text{sen}(\omega u)\vec{j} + b\omega u\vec{k}$, $u_0 \leq t \leq u_1$.

32. Seja a curva do espaço, C, descrita pela função vectorial $\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}$, $t \geq 0$.

a) Calcule o comprimento do arco da curva entre os pontos $P = (1,0,0)$ e $Q = (1,0,2\pi)$.

b) Parametrize a curva em função do comprimento de arco.

33. Determine o comprimento da curva plana descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = \cos^3(t)\vec{i} + \text{sen}^3(t)\vec{j}$, $t \in [0, \pi/2]$.

34. Seja a curva do espaço, *C*, descrita pela função vectorial $\vec{r}(t) = 3\cos(t)\vec{i} + 3\text{sen}(t)\vec{j} + 4t\vec{k}$, $t \geq 0$.

a) Esboce a curva.

b) Determine o comprimento de arco em função do parâmetro *t*.

c) Obtenha as coordenadas do ponto Q da curva, tal que o comprimento do arco da curva entre os pontos $P = (3,0,0)$ e Q é igual a 5π m.

d) Parametrize a curva em relação ao comprimento de arco, isto é, defina a função $\vec{r}(s)$, $s \geq 0$.

e) Mostre que a primeira derivada da função vectorial encontrada na alínea anterior é versor.

35. Seja a hélice circular parametrizada por $\vec{f}(t) = a\cos(\omega t)\vec{i} + a\text{sen}(\omega t)\vec{j} + b\omega t\vec{k}$, $t \geq 0$, em que a e ω são constantes positivas. Determine:

a) O ângulo, θ, que a tangente à hélice faz com o eixo dos *zz*.

b) A curvatura da hélice.

36. Determine o comprimento da curva do plano *xOy* definida, em coordenadas polares, pela função $r = 1 + \cos(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$.

37. Calcule o comprimento da curva (espiral de Arquimedes) do plano *xOy* definida, em coordenadas polares, pela função $r = \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

38. Para cada uma das curvas planas seguintes, determine os pontos onde a curvatura é máxima:

a) $y = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) $9x^2 + 4y^2 = 36$.

c) $y = \ln(x)$, $x > 0$.

39. Para cada uma das curvas planas seguintes, determine os pontos onde a curvatura é nula:

a) $y = \text{tg}(x)$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

b) $y = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

40. Para cada uma das curvas seguintes, determine o vector curvatura e a curvatura no ponto genérico da curva e particularize os seus valores para o ponto P:

a) $\vec{r}(u) = (3u - u^3)\vec{i} + 3u^2\vec{j} + (3u + u^3)\vec{k}$, $u \in \mathbb{R}$ e $P = \vec{r}(2)$.

b) $\vec{r}(u) = \cos(u)\vec{i} + \operatorname{sen}(u)\vec{j} + \sqrt{3}u\vec{k}$, $u \in \mathbb{R}$ e $P = \vec{r}(\pi)$.

c) $\vec{r}(u) = \cos(u)\vec{i} + \operatorname{sen}(u)\vec{j} + e^u\vec{k}$, $u \in \mathbb{R}$ e $P = \vec{r}(\pi)$.

41. Seja a curva do plano xOy definida, em coordenadas polares, pela função $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$. Mostre que a curvatura da curva é dada pela expressão:

$$k(\theta) = \frac{\left|r^2 - rr'' + 2(r')^2\right|}{\left(r^2 + (r')^2\right)^{3/2}}$$

42. Considere as curvas planas $C_1 : 4x^2 + y^2 = 4$ e $C_2 : y = 2\left(1+\sqrt{2}\right)x - 2$.

a) Parametrize as curvas dadas.

b) Determine os pontos de intersecção das curvas.

c) Calcule o ângulo, θ, formado pelas duas curvas no ponto de intersecção de menor abcissa.

d) Obtenha a curvatura da curva C_1 no ponto referido na alínea anterior.

43. Seja a curva do espaço parametrizada por $\vec{r}(u) = \cos(u)\vec{i} + \operatorname{sen}(u)\vec{j} + \sqrt{3}u\vec{k}$, $u \geq 0$. Calcule:

a) A equação cartesiana do plano osculador no ponto $I = (1,0,0)$.

b) O centro de curvatura num ponto genérico da curva.

Soluções: Consultar o manual "Noções sobre Geometria Analítica e Análise Matemática", efeitosgraficos.pt (FEUP), 2017. ISBN: 978-989-99559-3-6