INTEGRAIS DE LINHA

Integral de linha

- Seja S um subconjunto não vazio do plano xOy ou do espaço tridimensional. Chama-se *campo escalar* à função que associa um escalar a cada ponto de S (por exemplo, a temperatura nesse ponto ou a densidade do material nesse ponto). Chama-se *campo vectorial* à função que associa um vector a cada ponto de S (por exemplo, a velocidade do vento nesse ponto ou o gradiente de uma função f nesse ponto).

- O conceito de *integral de linha* está associado à noção de *trabalho*.

- O trabalho, W, realizado por uma força constante $\vec{f}$, aplicada num objecto que se desloca ao longo de uma trajectória rectilínea, definida pelo vector deslocamento $\vec{d}$, é dado por

$$W = \|\vec{f}\|\|\vec{d}\|\cos\theta = \vec{f}\cdot\vec{d} \tag{1}$$

onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\vec{f}$ e $\vec{d}$.
No entanto, se a trajectória do objecto for uma curva e/ou se a força variar de ponto para ponto (por exemplo, movimento realizado num campo gravítico ou num campo magnético), a expressão (1) revela-se inadequada para o cálculo do trabalho.

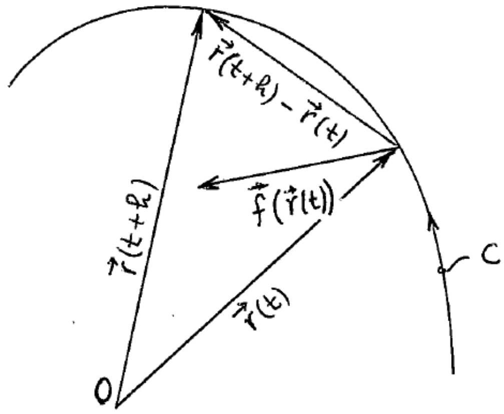
- Uma curva, C, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \;,\; t \in [a,b] \tag{2}$$

designa-se por *curva suave*, se a derivada $\vec{r}\,'(t)$ (vector tangente) é contínua e não nula em $]a,b[$; além disso, a curva C designa-se por *curva suave por secções*, se existe uma partição de subintervalos tal que a curva é suave em cada um deles.

- Admita-se que o objecto percorre a curva suave C parametrizada em (2); pretende-se mostrar que o trabalho, W, realizado pelo campo de forças $\vec{f}$ ao longo de C é:

$$W = \int_a^b \left[\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) \right] dt \tag{3}$$



Assim, seja o intervalo paramétrico $[t, t+h]$. Então, uma estimativa do trabalho realizado neste intervalo é dada pelo produto escalar

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \left[\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t) \right]$$

em que $\vec{f}(\vec{r}(t))$ é o valor de $\vec{f}$ no ponto $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$ representa o segmento de recta que liga os pontos $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$ e trata-se de uma aproximação do arco de curva entre estes dois pontos.

Designando por

$W(t)$ o trabalho realizado por $\vec{f}(t)$ entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$

$W(t+h)$ o trabalho realizado por $\vec{f}(t)$ entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t+h)$

o trabalho realizado por $\vec{f}(t)$ entre $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$ é:

$$W(t+h)-W(t)$$

Então é possível escrever a seguinte expressão de aproximação

$$W(t+h)-W(t) \cong \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \left[\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)\right]$$

ou seja, dividindo por *h*:

$$\frac{W(t+h)-W(t)}{h} \cong \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\left[\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)\right]}{h} \qquad (4)$$

A noção de trabalho estará definida, desde que ambos os membros de (4) possuem o mesmo limite quando $h \to 0$, isto é, desde que:

$$W'(t) \cong \vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

Uma vez que

$$W(a)=0$$

$W(b)$ é o trabalho total realizado por $\vec{f}(t)$ ao longo da curva C

então

$$W(b)-W(a)=\int_a^b W'(t)dt = \int_a^b \left[\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\right]dt$$

confirmando-se o resultado apresentado em (3).

Exemplo 1: Determine o trabalho realizado pelo campo de forças

$$\vec{f}(x,y,z) = xy\vec{i} + 2\vec{j} + 4z\vec{k}$$

ao longo da hélice circular:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k} \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

Solução:

Notando que

$$\vec{r}'(t) = -\text{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) = \cos(t)\text{sen}(t)\vec{i} + 2\vec{j} + 4t\vec{k}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = -\cos(t)\text{sen}^2(t) + 2\cos(t) + 4t$$

obtém-se:

$$W = \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\text{sen}^2(t) + 2\cos(t) + 4t)dt =$$

$$= \left[-\frac{\text{sen}^3(t)}{3} + 2\text{sen}(t) + 2t^2 \right]_0^{2\pi} = 8\pi^2$$

- O integral apresentado em (3) pode ser generalizado para um qualquer campo vectorial $\vec{h}(x,y,z)$ contínuo em C, sendo designado genericamente por *integral de linha*.

- Seja o campo vectorial

$$\vec{h}(x,y,z) = h_1(x,y,z)\vec{i} + h_2(x,y,z)\vec{j} + h_3(x,y,z)\vec{k}$$

que é contínuo ao longo da curva suave:

$$C \ : \ \vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k} \ , \ u \in [a,b] \tag{5}$$

O *integral de linha* de $\vec{h}$ ao longo da curva *C*, também designada por *caminho*, é definido por

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[\vec{h}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u) \right] du \tag{6}$$

desde que o integral do segundo membro exista.
Se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, o *caminho* diz-se *fechado*, sendo usado o símbolo

$$\oint_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

para o integral de linha (6), que é designado por *circulação*.

Exemplo 2: Determine o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{h}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$$

ao longo da curva

$$C \ : \ \vec{r}(u) = u\vec{i} + u^2\vec{j} + u^3\vec{k}$$

entre os pontos $P = (-1,1,-1)$ e $Q = (1,1,1)$.

Solução:

Sabe-se que:

$$\vec{r}'(u) = \vec{i} + 2u\vec{j} + 3u^2\vec{k}$$

$$\vec{h}(\vec{r}(u)) = u^3\vec{i} + u^5\vec{j} + u^4\vec{k}$$

$$\vec{h}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = u^3 + 5u^6$$

Atendendo a que $P = (-1,1,-1) = \vec{r}(-1)$ e $Q = (1,1,1) = \vec{r}(1)$, obtém-se:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (u^3 + 5u^6)du = \left[\frac{u^4}{4} + \frac{5u^7}{7} \right]_{-1}^{1} = \frac{27}{28} - \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{10}{7}$$

- O integral de linha apresentado em (6) é calculado sob a condição de a curva C ter a parametrização expressa em (5).
  No entanto, para que o integral de linha tenha sentido, ele deverá ser *invariante* face à parametrização escolhida para definir a curva C, desde que seja preservada a direcção considerada no percurso da curva (está envolvido o conceito de *curva orientada*).
  Assim, admita-se que

  $$C \ : \ \vec{q}(w) = x(w)\vec{i} + y(w)\vec{j} + z(w)\vec{k} \ , \ w \in [c,d]$$

  é uma nova parametrização para a curva (*orientada*) C definida em (5). Nestas condições verifica-se

  $$u = \phi(w)$$

  $$\vec{q}(w) = \vec{r}(\phi(w))$$

  $$u = a \ , \ \text{se } w = c$$

  $$u = b \ , \ \text{se } w = d$$

  $$du = \phi'(w)dw$$

  em que $\phi'(w)$ é uma função positiva (é preservada a direcção considerada no percurso da curva) e contínua no intervalo $[c,d]$.

Obtém-se, então, para o integral de linha

$$\int_C \vec{h}(\vec{q})\cdot d\vec{q} = \int_c^d [\vec{h}(\vec{q}(w))\cdot \vec{q}\,'(w)]dw =$$

$$= \int_c^d \left[\vec{h}(\vec{r}(\phi(w)))\cdot \vec{r}\,'(\phi(w))\phi'(w)\right]dw =$$

$$= \int_c^d \left[\vec{h}(\vec{r}(\phi(w)))\cdot \vec{r}\,'(\phi(w))\right]\phi'(w)dw =$$

$$= \int_a^b \left[\vec{h}(\vec{r}(u))\cdot \vec{r}\,'(u)\right]du = \int_C \vec{h}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

Propriedades do integral de linha

- Sendo $\vec{f}$ e $\vec{g}$ campos vectoriais contínuos ao longo da curva suave C, então (*linearidade*):

$$\int_C \left(\alpha\vec{f}(\vec{r}) + \beta\vec{g}(\vec{r})\right)\cdot d\vec{r} = \alpha\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \beta\int_C \vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \ , \ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$$

- Seja C uma *curva suave por secções* formada por um número finito de curvas suaves adjacentes C_1, C_2,…, C_n. Se $\vec{f}$ é um campo vectorial contínuo ao longo de C, então (*aditividade*):

$$\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \cdots + \int_{C_n} \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

- Conforme já vimos anteriormente, quando se integra ao longo de uma curva parametrizada, integra-se na direcção que está definida por essa parametrização.
  Se se optar por uma nova parametrização que implique o percurso da curva na direcção oposta, o integral de linha daqui resultante é simétrico do anterior.

- Sejam

$$\vec{r}(u)\ ,\ u \in I \quad \text{e} \quad \vec{q}(w)\ ,\ w \in I_1$$

  duas parametrizações distintas para uma curva suave C e $\vec{h}(x,y,z)$ um campo vectorial que é contínuo ao longo de C. Se às duas parametrizações anteriores corresponder o percurso da curva em direcções opostas, então:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{h}(\vec{q}) \cdot d\vec{q}$$

Exemplo 3: Calcule o integral de linha do campo vectorial $\vec{f}(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ ao longo da semicircunferência, C, parametrizada por:

a) $\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j}\ ,\ t \in [0,\pi]$ (percorrida no *sentido directo*).

b) $\vec{q}(u) = u\vec{i} + \sqrt{1-u^2}\,\vec{j}\ ,\ u \in [-1,1]$ (percorrida no *sentido retrógrado*).

Solução:

a) Sabendo que

$$\vec{r}\,'(t) = -\text{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) = \text{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = -\text{sen}^2(t) - \cos^2(t) = -1$$

obtém-se:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\int_0^{\pi} dt = -\pi$$

b) Sabendo que

$$\vec{q}'(u) = \vec{i} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{q}(u)) = \sqrt{1-u^2}\,\vec{i} - u\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{q}(u))\cdot\vec{q}'(u) = \sqrt{1-u^2} + \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$$

resulta:

$$\int_C \vec{f}(\vec{q}(u))\cdot d\vec{q} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

Fazendo $u = \cos\theta$ e $du = -\text{sen}(\theta)d\theta$, obtém-se:

$$\int_C \vec{f}(\vec{q}(u))\cdot d\vec{q} = -\int_{\arccos(-1)}^{\arccos(1)} \frac{1}{\text{sen}(\theta)}\text{sen}(\theta)d\theta = -\int_{\arccos(-1)}^{\arccos(1)} d\theta =$$

$$= \arccos(-1) - \arccos(1) = \pi - 0 = \pi$$

Tal como ser esperava

$$\int_C \vec{f}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\int_C \vec{f}(\vec{q})\cdot d\vec{q}$$

já que as parametrizações consideradas para a semicircunferência correspondem ao percurso da curva segundo direcções opostas.

Exemplo 4: Calcule $\int_C \vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, em que $\vec{g}(x,y)=e^y\vec{i}-\text{sen}(\pi x)\vec{j}$ e C é o triângulo com vértices em $A=(1,0)$, $B=(0,1)$ e $C=(-1,0)$, percorrido no sentido directo.

Solução:

A linha C é formada pelos três segmentos de recta orientados

$$C_1 : \vec{r}(t)=A+t\overrightarrow{AB}=(1-t)\vec{i}+t\vec{j}\ ,\ t\in[0,1]$$

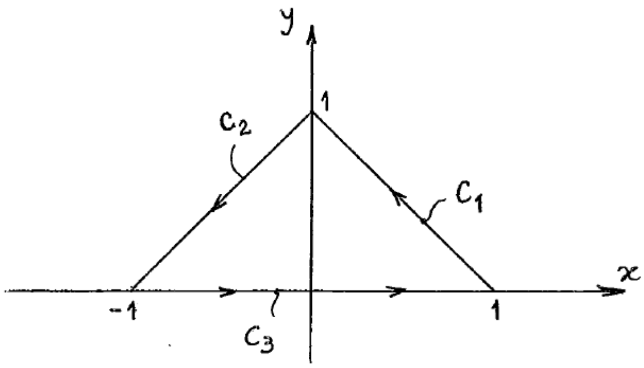
que liga o ponto A ao ponto B,

$$C_2 : \vec{r}(u)=B+u\overrightarrow{BC}=-u\vec{i}+(1-u)\vec{j}\ ,\ u\in[0,1]$$

que liga o ponto B ao ponto C e

$$C_3 : \vec{r}(w)=C+w\overrightarrow{CA}=(-1+2w)\vec{i}+0\vec{j}\ ,\ w\in[0,1]$$

que liga o ponto C ao ponto A.



O integral de linha correspondente à secção C_1 é:

$$\vec{r}'(t)=-\vec{i}+\vec{j}\ ,\ \vec{g}(\vec{r}(t))=e^t\vec{i}-\text{sen}[\pi(1-t)]\vec{j}$$

$$\vec{g}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)=-e^t-\text{sen}[\pi(1-t)]$$

$$\int_{C_1}\vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_0^1\Big[-e^t-\text{sen}[\pi(1-t)]\Big]dt=\left[-e^t-\frac{1}{\pi}\cos[\pi(1-t)]\right]_0^1=1-e-\frac{2}{\pi}$$

O integral de linha correspondente à secção C_2 é:

$$\vec{r}'(u) = -\vec{i} - \vec{j} \ , \ \ \vec{g}(\vec{r}(u)) = e^{1-u}\vec{i} - \text{sen}(-\pi u)\vec{j}$$

$$\vec{g}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u) = -e^{1-u} + \text{sen}(-\pi u)$$

$$\int_{C_2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 [-e^{1-u} + \text{sen}(-\pi u)]du = \left[e^{1-u} + \frac{1}{\pi}\cos(-\pi u) \right]_0^1 = 1 - e - \frac{2}{\pi}$$

O integral de linha correspondente à secção C_3 é:

$$\vec{r}'(w) = 2\vec{i} + 0\vec{j} \ , \ \ \vec{g}(\vec{r}(w)) = \vec{i} - \text{sen}[\pi(2w-1)]\vec{j}$$

$$\vec{g}(\vec{r}(w)) \cdot \vec{r}'(w) = 2$$

$$\int_{C_3} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 2dw = 2$$

Finalmente, o integral de linha ao longo da linha C (triângulo), *percorrida no sentido directo*, é a soma dos três integrais de linha anteriores:

$$\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} == 4 - 2e - \frac{4}{\pi}$$

- Podemos, então, exprimir o conceito de trabalho como um integral de linha. Se um objecto percorre uma curva suave C parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, o trabalho, W, realizado pelo campo de forças $\vec{f}$ ao longo de C é:

$$W = \int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Teorema fundamental para o integral de linha

- Em geral, quando se integra um campo vectorial, $\vec{h}(x,y,z)$, entre um ponto *P* e um ponto *Q*, o valor do integral de linha *depende do caminho* escolhido para ligar esses pontos.
  Contudo, existe uma importante excepção: quando o *campo vectorial* $\vec{h}(x,y,z)$ *é gradiente*, isto é, se

  $$\vec{h}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$$

  em que $\varphi(x,y,z)$ é um determinado campo escalar.
  Neste caso, o *integral de linha é independente do caminho* que liga os pontos *P* e *Q*, dependendo apenas da localização de *P* e de *Q* no espaço. Esta situação encontra-se devidamente justificada no teorema seguinte, que é designado por *teorema fundamental para o integral de linha*.

Teorema 1: Seja $C : \vec{r}(u)$, $u \in [a,b]$ uma curva suave que se inicia no ponto $A = \vec{r}(a)$ e termina no ponto $B = \vec{r}(b)$. Se o campo escalar $\varphi(x,y,z)$ é continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém *C*, então:

$$\int_C \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) \tag{7}$$

- Convém notar que a expressão (7) se reduz a

  $$\int_C \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0 \tag{8}$$

  se o *caminho C* for *fechado* (ou seja, se $B = A$).

Exemplo 5: Sejam o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = y^2\vec{i} + (2xy - e^{2y})\vec{j}$ e os pontos $R = (1,0)$ e $S = (0,1)$.

a) Verifique que $\vec{f}(x,y)$ é gradiente.

b) Calcule o integral de linha de $\vec{f}(x,y)$ entre *R* e *S*, recorrendo à definição de integral de linha.

c) Calcule o integral de linha de $\vec{f}(x,y)$ entre *R* e *S*, recorrendo ao teorema fundamental para o integral de linha.

Solução:

a) Seja $\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, com $P(x,y) = y^2$ e $Q(x,y) = 2xy - e^{2y}$. Uma vez que *P* e *Q* são continuamente diferenciáveis em qualquer ponto do plano *xOy* e

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

conclui-se que o campo vectorial $\vec{f}(x,y)$ é gradiente.

b) Dado que o *integral de linha é independente do caminho* que liga o ponto *R* ao ponto *S* (o *campo vectorial é gradiente*), podemos integrar ao longo do segmento de recta, *C*, que liga *R* a *S*, isto é:

$$C : \vec{r}(u) = R + u\overrightarrow{RS} = (1-u)\vec{i} + u\vec{j} \ , \ u \in [0,1]$$

Sabendo que

$$\vec{r}'(u) = -\vec{i} + \vec{j} \ , \ \vec{f}(\vec{r}(u)) = u^2\vec{i} + [2u(1-u) - e^{2u}]\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(u)) \cdot \vec{r}'(u) = -u^2 + 2u(1-u) - e^{2u} = 2u - 3u^2 - e^{2u}$$

obtém-se:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (2u - 3u^2 - e^{2u})du = \left[u^2 - u^3 - \frac{1}{2}e^{2u} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2$$

c) Uma vez que o campo vectorial é gradiente, então:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(0,1) - \varphi(1,0)$$

Neste caso, é necessário obter o campo escalar $\varphi(x,y)$, tal que $\vec{f}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$. Assim, notando que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = y^2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = 2xy - e^{2y}$$

recorrendo ao integral indefinido, resulta:

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)dx = xy^2 + \phi_1(y) + k_1 \qquad (9)$$

$$\varphi(x,y) = \int Q(x,y)dy = xy^2 - \frac{1}{2}e^{2y} + \phi_2(x) + k_2 \qquad (10)$$

Compatibilizando (9) e (10), obtém-se:

$$\varphi(x,y) = xy^2 - \frac{1}{2}e^{2y} + k$$

Independentemente do valor que se possa atribuir à constante *k*, o integral de linha toma o valor:

$$\int_C \vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(0,1) - \varphi(1,0) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}e^2 + k\right) - \left(-\frac{1}{2} + k\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2$$

Exemplo 6: Obtenha o valor de $\int_C \vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, em que

$$\vec{g}(x,y) = (3x^2y + xy^2 - 1)\vec{i} + (x^3 + x^2y + 4y^3)\vec{j}$$

e C é o quadrado com vértices em $O=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(1,1)$ e $C=(0,1)$, percorrido no sentido directo. Comece por verificar se o campo vectorial $\vec{g}(x,y)$ é gradiente.

Solução:

Então, comece-se por verificar se o campo vectorial é gradiente. Seja $\vec{g}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, tal que:

$$P(x,y) = 3x^2y + xy^2 - 1 \ \text{ e } \ Q(x,y) = x^3 + x^2y + 4y^3$$

Uma vez que P e Q são continuamente diferenciáveis em qualquer ponto do plano *xOy* e

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

conclui-se que o campo vectorial $\vec{g}(x,y)$ é gradiente, ou seja, é possível encontrar um campo escalar $\varphi(x,y)$, tal que $\vec{g}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$.
Nestas condições e tendo em atenção que o *caminho é fechado*, atendendo à propriedade (8) conclui-se que:

$$\int_C \vec{g}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$$

- O campo de forças que actua sobre um objecto em movimento diz-se *conservativo*, se for gradiente. Neste caso, o trabalho realizado entre dois pontos é independente do caminho, sendo nulo se o caminho for fechado.

- Sabe-se que quando um objecto passa num dado ponto com uma dada *energia cinética*, ele deverá retornar a esse ponto com exactamente a mesma energia cinética.

  À medida que um objecto se desloca num campo de forças conservativo, $\vec{f}$, tanto a sua *energia cinética*, K_E, como a sua *energia potencial*, U, podem variar; no entanto, a soma dos seus valores mantém-se constante em cada ponto da sua trajectória, $C : \vec{r}(t)$ (sendo t o instante de tempo). Esta constante é designada por *energia mecânica total*, E, ou seja:

  $$K_E + U = E$$

  Sabe-se que a energia cinética do objecto é

  $$K_E = \frac{1}{2}m[v(t)]^2$$

  em que m é a sua massa e $v(t)$ é o módulo do seu vector velocidade em cada instante.

  Por outro lado, tem-se

  $$\nabla U = -\vec{f}$$

  pelo que

  $$U(\vec{b}) - U(\vec{a}) = \int_C -\vec{f}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

  é o trabalho necessário para mover o objecto entre os pontos $\vec{r} = \vec{a}$ e $\vec{r} = \vec{b}$ da sua trajectória.

  A expressão

  $$\frac{1}{2}mv^2 + U = E$$

  traduz a chamada *lei de conservação da energia mecânica*.

Notação alternativa para o integral de linha

- Existe uma notação alternativa à apresentada em (6) para o integral de linha. Trata-se do integral de linha na *forma diferencial*.
  Tendo em atenção que

$$\vec{h}(x,y,z) = h_1(x,y,z)\vec{i} + h_2(x,y,z)\vec{j} + h_3(x,y,z)\vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

então o integral de linha pode ser reescrito sob a *forma diferencial*:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C h_1dx + h_2dy + h_3dz \qquad (11)$$

Exemplo 7: Calcule o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{h}(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$$

ao longo da curva C : $y = x^2$ e $z = x^3$ entre os pontos $P = (-1,1,-1)$ e $Q = (1,1,1)$.

Solução:

Trata-se do exercício tratado no exemplo 2, estando agora a curva definida através de equações cartesianas (intersecção de duas superfícies). Neste caso, o integral de linha pode ser resolvido recorrendo à forma diferencial (11). Designe-se:

$$h_1(x,y,z) = xy \ , \ h_2(x,y,z) = yz \ , \ h_3(x,y,z) = xz$$

Relativamente à curva C tem-se:

$$y = x^2 \text{ e } z = x^3 \ , \ x \in [-1,1]$$

$$dy = 2xdx \quad \text{e} \quad dz = 3x^2dx$$

Notando que

$$h_1dx + h_2dy + h_3dz = (xy)dx + (yz)2xdx + (xz)3x^2dx =$$

$$= (xx^2)dx + (x^2x^3)2xdx + (xx^3)3x^2dx = (x^3 + 5x^6)dx$$

obtém-se:

$$\int_C \vec{h}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (x^3 + 5x^6)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{5x^7}{7} \right]_{-1}^{1} = \frac{27}{28} - \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{10}{7}$$

Exemplo 8: Pretende-se, agora, resolver o exercício do exemplo 4 recorrendo à forma diferencial (11).

Solução:

Designe-se:

$$g_1(x,y) = e^y \ , \ \ g_2(x,y) = -\mathrm{sen}(\pi x)$$

A linha C é formada pelos três segmentos de recta

$$C_1 : y = -x + 1 \ , \ x \in [0,1] \ , \text{ em que } dy = -dx$$

percorrido no sentido oposto (de $x = 1$ para $x = 0$), ligando o ponto A ao ponto B,

$$C_2 : y = x + 1 \ , \ x \in [-1,0] \ , \text{ em que } dy = dx$$

percorrido no sentido oposto (de $x = 0$ para $x = -1$), ligando o ponto B ao ponto C, e

$$C_3 : y = 0 \ , \ x \in [-1,1] \ , \text{ em que } dy = 0dx$$

que liga o ponto C ao ponto A.

O integral de linha correspondente à secção C_1 é:

$$g_1 dx + g_2 dy = (e^{-x+1})dx + [-\text{sen}(\pi x)](-dx) = [e^{-x+1} + \text{sen}(\pi x)]dx$$

$$\int_{C_1} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_0^1 [e^{-x+1} + \text{sen}(\pi x)]dx = \left[e^{-x+1} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{\pi} - e - \frac{1}{\pi} = 1 - e - \frac{2}{\pi}$$

O integral de linha correspondente à secção C_2 é:

$$g_1 dx + g_2 dy = (e^{x+1})dx + [-\text{sen}(\pi x)]dx = [e^{x+1} - \text{sen}(\pi x)]dx$$

$$\int_{C_2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_{-1}^0 [e^{x+1} - \text{sen}(\pi x)]dx = \left[-e^{x+1} - \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \right]_{-1}^0 =$$

$$= -e - \frac{1}{\pi} + 1 - \frac{1}{\pi} = 1 - e - \frac{2}{\pi}$$

O integral de linha correspondente à secção C_3 é:

$$g_1 dx + g_2 dy = (e^0)dx = dx$$

$$\int_{C_3} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 dx = 2$$

Então, o integral de linha ao longo da linha C (triângulo), *percorrida no sentido directo*, é a soma dos três integrais de linha anteriores:

$$\int_C \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \int_{C_3} \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} == 4 - 2e - \frac{4}{\pi}$$

O integral de linha em relação ao comprimento de arco

- Seja o $f(x,y,z)$ um campo escalar contínuo ao longo da curva suave:

$$C \ : \ \vec{r}(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k} \ , \ u \in [a,b] \tag{12}$$

Se $s(u)$ é o comprimento da curva entre os pontos $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(u)$, então, tal como vimos no capítulo 1:

$$s'(u) = \left\| \vec{r}'(u) \right\| = \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2}$$

O integral de linha de $f(x,y,z)$ ao longo de C *em relação ao comprimento de arco s* é definido por:

$$\int_C f(\vec{r})ds = \int_a^b f(r(u))s'(u)du$$

- Admita-se agora que a curva C, apresentada em (12), representa um arame fino (*curva material*), cuja *densidade mássica* tem o valor $\lambda = \lambda(\vec{r})$ em cada ponto da curva (neste caso a densidade mássica define uma massa por unidade de comprimento).
O *comprimento* do arame, L, é dado por:

$$L = \int_C ds$$

A *massa* do arame, M, tem o valor:

$$M = \int_C \lambda(\vec{r})ds$$

O *centro de massa*, $\vec{r}_M$, pode ser obtido através da equação vectorial:

$$\vec{r}_M = \frac{1}{M}\int_C \vec{r}\,\lambda(\vec{r})ds \tag{13}$$

Designando $\vec{r}_M = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$ a equação (13) conduz às seguintes equações escalares:

$$x_M = \frac{1}{M}\int_C x\lambda(\vec{r})ds \ , \ \ y_M = \frac{1}{M}\int_C y\lambda(\vec{r})ds \ , \ \ z_M = \frac{1}{M}\int_C z\lambda(\vec{r})ds$$

Finalmente, o momento de inércia do arame, *I*, em relação a um eixo é dado por

$$I = \int_C \lambda(\vec{r})\left[R(\vec{r})\right]^2 ds$$

em que $R(\vec{r})$ exprime a distância do ponto $\vec{r}(u)$ ao eixo em causa.

Exemplo 9: A densidade mássica de um arame semicircular de raio *a* é, em cada ponto, directamente proporcional à distância ao diâmetro que une as duas extremidades do arame. Determine:

a) A massa do arame.

b) As coordenadas do seu centro de massa.

c) O seu momento de inércia em relação ao diâmetro referido.

Solução:

a) O arame semicircular, apresentado na figura seguinte, pode ser parametrizado por

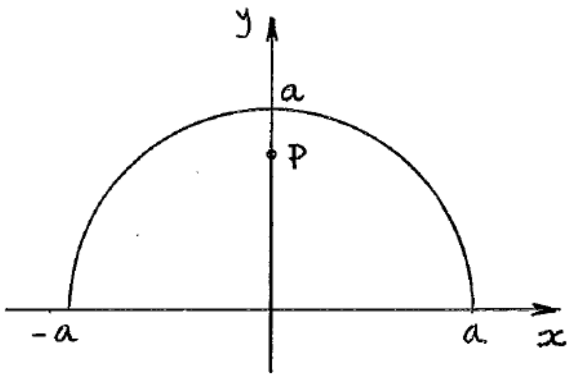
$$\vec{r}(u) = a\cos(u)\vec{i} + a\,\mathrm{sen}(u)\vec{j} \ , \ u \in [0,\pi]$$

tendo-se admitido que o diâmetro do arame está situado no eixo dos *xx* do referencial.

Nestas condições, a função que define a densidade mássica em cada ponto do arame é

$$\lambda(x,y) = ky$$

em que k é uma constante positiva.



Sabendo que

$$\vec{r}'(u) = -a\text{sen}(u)\vec{i} + a\cos(u)\vec{j}$$

$$s'(u) = \|\vec{r}'(u)\| = \sqrt{[-a\text{sen}(u)]^2 + [a\cos(u)]^2} = a$$

então:

$$M = \int_C \lambda(\vec{r})ds = \int_C ky ds = \int_0^{\pi} ky(u)s'(u)du =$$

$$= k\int_0^{\pi} [a\text{sen}(u)]a du = ka^2 \int_0^{\pi} \text{sen}(u)du = 2ka^2 \qquad (14)$$

b) Por razões de simetria (geométrica e mássica) sabe-se que a abcissa do centro de massa é $x_M = 0$.

Por outro lado, a ordenada do centro de massa é:

$$y_M = \frac{1}{M}\int_C y\lambda(\vec{r})ds = \frac{1}{2ka^2}\int_C ky^2 ds = \frac{1}{2a^2}\int_C [y(u)]^2 s'(u)du =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^{\pi}[a\text{sen}(u)]^2 a du = \frac{a}{2}\int_0^{\pi}\text{sen}^2(u)du =$$

$$= \frac{a}{4}\int_0^{\pi}\left(1-\cos(2u)\right)du = \frac{a\pi}{4}$$

O centro de massa, *P*, situa-se no eixo de simetria do arame (eixo dos *yy*), à distância $a\pi/4$ do diâmetro (ver figura anterior); neste caso, o centro de massa situa-se num ponto exterior ao arame.

c) O momento de inércia do arame em relação ao diâmetro tem o valor:

$$I = \int_C \lambda(\vec{r})\left[R(\vec{r})\right]^2 ds = \int_C (ky)y^2 ds = k\int_C [y(u)]^3 s'(u)du =$$

$$= k\int_0^{\pi}[a\text{sen}(u)]^3 a du = ka^4\int_0^{\pi}\text{sen}^3(u)du =$$

$$= ka^4\int_0^{\pi}\text{sen}(u)\left(1-\cos^2(u)\right)du =$$

$$= ka^4\int_0^{\pi}\text{sen}(u)du - ka^4\int_0^{\pi}\text{sen}(u)\cos^2(u)du =$$

$$= 2ka^4 + ka^4\left[\frac{\cos^3(u)}{3}\right]_0^{\pi} = ka^4\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{4ka^4}{3}$$

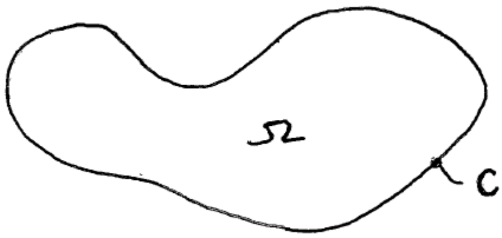
ou seja, atendendo a (14),

$$I = \frac{2}{3}Ma^2$$

Teorema de Green

- O cálculo do integral de linha a partir do teorema de Green pode ser aplicado a regiões planas limitadas por *curvas de Jordan* suaves por secções. Tratam-se de curvas planas que são fechadas e simples, isto é, não se intersectam a si próprias. Por exemplo, são curvas de Jordan, circunferências, elipses, triângulos e rectângulos; o mesmo já não acontece com curvas em forma de um oito.

- Chama-se *região de Jordan* à região fechada do plano, Ω, limitada por uma curva de Jordan, *C*, incluindo a sua fronteira.



- O teorema seguinte, chamado *teorema de Green*, exprime o integral de linha ao longo de uma curva de Jordan, *C*, através de um integral duplo sobre a região de Jordan, Ω, limitada por *C*.

Teorema 2: Seja Ω a região de Jordan limitada pela curva de Jordan suave por secções, *C*. Se *P* e *Q* são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém Ω, então

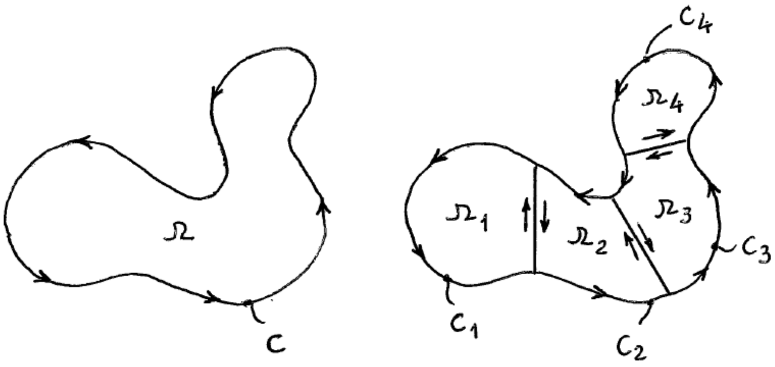
$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dxdy = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (14)$$

onde o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva *C*, percorrida no sentido directo.

- Se o campo vectorial $\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ *é gradiente*, então o o integral de linha (14) é nulo, já que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$$

- Atente-se na figura seguinte, onde a região de Jordan Ω, limitada pela curva *C*, foi dividida em quatro regiões de Jordan Ω_1, Ω_2, Ω_3 e Ω_4, limitadas, respectivamente, pelas curvas C_1, C_2, C_3 e C_4.



Neste caso, tem-se:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy = \sum_{i=1}^{4}\iint_{\Omega_i}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy$$

$$\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy = \oint_{C_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy = \oint_{C_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_3}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy = \oint_{C_3} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\iint_{\Omega_4}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy = \oint_{C_4} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Exemplo 10: Calcule o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = (3x^2 + y)\vec{i} + (2x + y^3)\vec{j}$$

ao longo da circunferência $C\ :\ x^2 + y^2 = a^2$, percorrida no sentido directo.

a) Recorrendo ao teorema de Green.

b) Calculando o integral de linha.

Solução:

a) Seja Ω o círculo fechado $0 \le x^2 + y^2 \le a^2$. Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1\ ,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$$

da aplicação do teorema de Green resulta

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_\Omega dxdy = A(\Omega) = \pi a^2$$

onde $A(\Omega) = a^2$ é a área da região Ω.

b) A curva *C*, percorrida no sentido directo, pode ser parametrizada por:

$$\vec{r}(\theta) = a\cos(\theta)\vec{i} + a\text{sen}(\theta)\vec{j}\ ,\quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Considere-se:

$$\vec{r}'(\theta) = -a\text{sen}(\theta)\vec{i} + a\cos(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(\theta)) = [3a^2\cos^2(\theta) + a\text{sen}(\theta)]\vec{i} + [2a\cos(\theta) + a^3\text{sen}^3(\theta)]\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}'(\theta) = -3a^3\text{sen}(\theta)\cos^2(\theta) - a^2\text{sen}^2(\theta) + 2a^2\cos^2(\theta) +$$

$$+ a^4\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta)$$

Sabendo que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta)\cos^2(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\text{sen}^3(\theta)d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [1-\cos(2\theta)]d\theta = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [1+\cos(2\theta)]d\theta = \pi$$

obtém-se:

$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{f}(\vec{r}(\theta))\cdot\vec{r}'(\theta)d\theta = -\pi a^2 + 2\pi a^2 = \pi a^2$$

Neste exemplo é evidente a vantagem da utilização do teorema de Green na obtenção do resultado pretendido.

Exemplo 11: Utilize o teorema de Green para calcular o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = (1+10xy+y^2)\vec{i} + (6xy+5x^2)\vec{j}$$

ao longo do quadrado, C, com vértices nos pontos $(0,0)$, $(a,0)$, (a,a) e $(0,a)$, percorrido no sentido retrógrado.

Solução:

Seja Ω a região quadrada limitada por C. Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 10x + 2y \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 6y + 10x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 4y$$

da aplicação do teorema de Green resulta

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -4\iint_\Omega y dxdy = -4\bar{y}A(\Omega) = -4\left(\frac{a}{2}\right)a^2 = -2a^3$$

onde $\bar{y} = a/2$ é a ordenada do centroide da região Ω e $A(\Omega) = a^2$ é a sua área.

Exemplo 12: Utilize o teorema de Green para calcular o integral de linha do campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = e^x \operatorname{sen}(y)\vec{i} + e^x \cos(y)\vec{j} \qquad (15)$$

ao longo da linha, C, que é a fronteira da região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, percorrida no sentido retrógrado.

Solução:

Seja Ω a região limitada pela curva fechada C. Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = e^x \cos(y) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$$

da aplicação do teorema de Green resulta:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\iint_\Omega 0 dxdy = 0$$

Neste caso, o campo vectorial (15) é gradiente.
A resolução deste problema recorrendo ao integral de linha exige um esforço de cálculo que é substancialmente superior ao envolvido na presente resolução.

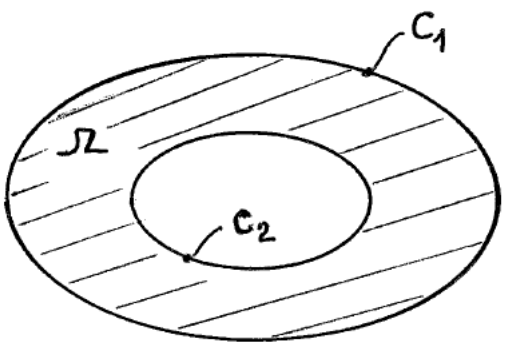
- O teorema de Green permite-nos, ainda, calcular a área de uma região de Jordan, integrando ao longo da fronteira dessa região.

Teorema 3: Seja a região de Jordan, Ω, limitada pela curva de Jordan suave por secções, *C*. Então a área de Ω, $A(\Omega)$, tem o valor de qualquer um dos seguintes integrais de linha:

$$A(\Omega)=\iint_{\Omega} dxdy=\oint_C -ydx=\oint_C xdy=\frac{1}{2}\oint_C -ydx+xdy$$

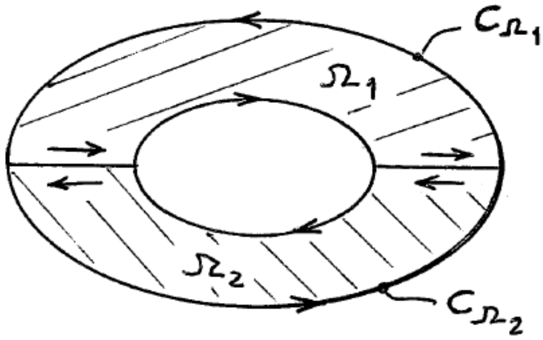
Teorema de Green: regiões multiplamente conexas

- Na figura seguinte apresenta-se uma região anelar, Ω, que não é uma região de Jordan: a fronteira é formada por duas curvas de Jordan, C_1 e C_2.



Neste caso não é possível aplicar directamente o teorema de Green.

- Contudo, se Ω for dividida em duas subregiões de Jordan, Ω_1 e Ω_2,



torna-se possível aplicar o teorema de Green a cada uma dessas duas subregiões.
Designando, respectivamente, por C_{Ω_1} e C_{Ω_2} as curvas de Jordan que limitam as subregiões Ω_1 e Ω_2, sabe-se que:

$$\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_{\Omega_1}} Pdx+Qdy$$

$$\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_{\Omega_2}} Pdx+Qdy$$

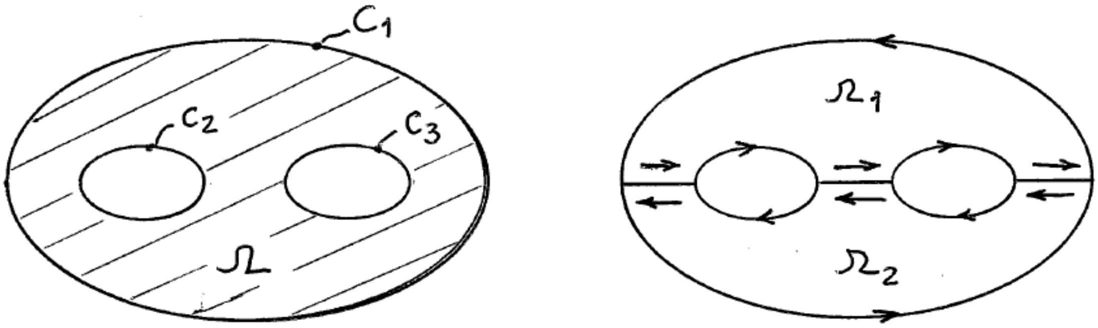
Considerando, agora, os integrais duplos, tem-se:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\iint_{\Omega_1}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy+\iint_{\Omega_2}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy$$

No entanto, quando se somam os integrais de linha, as contribuições das secções que são comuns às linhas C_{Ω_1} e C_{Ω_2} deverão se anular, pelo que a *linha* C_1 deverá ser *percorrida no sentido directo*, enquanto a *linha* C_2 deverá ser *percorrida no sentido retrógrado*; então:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_1} Pdx+Qdy+\oint_{C_2} Pdx+Qdy$$

- Considere-se, por exemplo, a região Ω da figura seguinte, limitada por três curvas de Jordan: C_2 e C_3, cada uma delas exterior à outra, mas ambas interiores a C_1.



Neste caso, a aplicação do teorema de Green conduz-nos a:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_1}Pdx+Qdy+\oint_{C_2}Pdx+Qdy+$$

$$+\oint_{C_3}Pdx+Qdy$$

- Generalizando, podemos escrever para este tipo de configurações:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy=\oint_{C_1}Pdx+Qdy+\sum_{i=2}^{n}\oint_{C_i}Pdx+Qdy$$