Curso MIEIC　　Data ..../..../....

Disciplina CMAT　　Ano ....　　Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

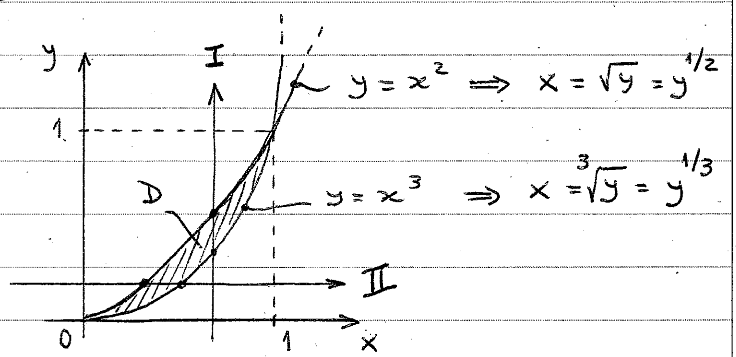
AULA 8 : Exºs Tratados - Ficha 3 : 3a), 4a), 6, 14, PA_20/04/2016_5

Exºs Propostos - Ficha 3 : 1a) b) c) d), 2, 3b) c), 4c), 8, 11, 12, 15

3) a) Região D limitada pelas curvas $y=x^3$ e $y=x^2$, $0 \le x \le 1$:

$$A(D) = \iint_D dx\,dy$$

Esboço da região D:



i) Definição da região D como região do tipo I:

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \ ,\ x^3 \le y \le x^2\}$$

Então:

$$A(D) = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} dy\,dx = \int_0^1 [y]_{x^3}^{x^2} dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0) = \frac{1}{12}$$

ii) O cálculo da área pode ainda ser feito considerando a região D como região do tipo II :

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \ , \ y^{1/2} \leq x \leq y^{1/3}\}$$

Então:

$$A(D) = \int_0^1 \int_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} dx\, dy = \int_0^1 [x]_{y^{1/2}}^{y^{1/3}} dy = \int_0^1 \left[y^{1/3} - y^{1/2} \right] dy =$$

$$= \left[\frac{3}{4} y^{4/3} - \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) - (0) = \frac{1}{12}$$

4) a) Neste caso, a forma como está definido o integral permite concluir que a região de integração, D, está definida como região do tipo II:

$$D = \{(x,y) : 1 \leq y \leq 2 \ , \ 0 \leq x \leq y^2\}$$

Obtém-se, então:

$$\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2} dx\, dy = \int_1^2 \left[y^2 e^{x/y^2} \right]_0^{y^2} dy =$$

(y é constante)

$$= \int_1^2 y^2 (e-1)\, dy = (e-1) \int_1^2 y^2 dy = (e-1) \left[\frac{y^3}{3} \right]_1^2 =$$

$$= (e-1) \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{3} (e-1)$$

NOTA: O cálculo do mesmo integral, considerando a região D como região do tipo I seria mais trabalhoso.
Verifiquemos esta situação começando por esboçar a região de integração D.

Folha Nº 3 / 11

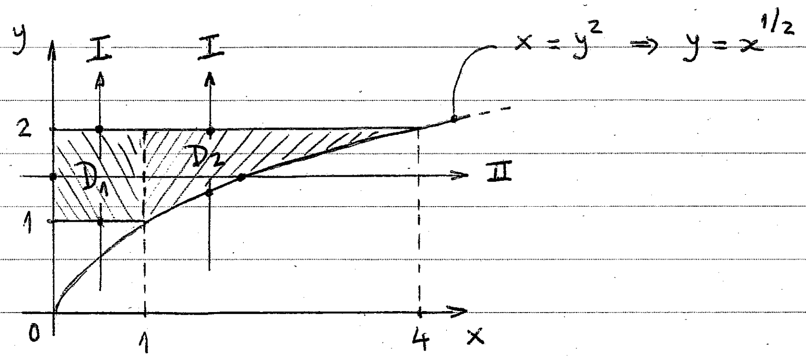
U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador



Se se pretende considerar a região D como região do tipo I, então a região D deverá ser considerada como a reunião das regiões D_1 e D_2

$$D = D_1 \cup D_2$$

já que, quando x varia no intervalo $[0,4]$ a variável y não tem uma variação uniforme.

Tem-se então

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1 \,,\ 1 \le y \le 2\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : 1 \le x \le 4 \,,\ x^{1/2} \le y \le 2\}$$

e, portanto,

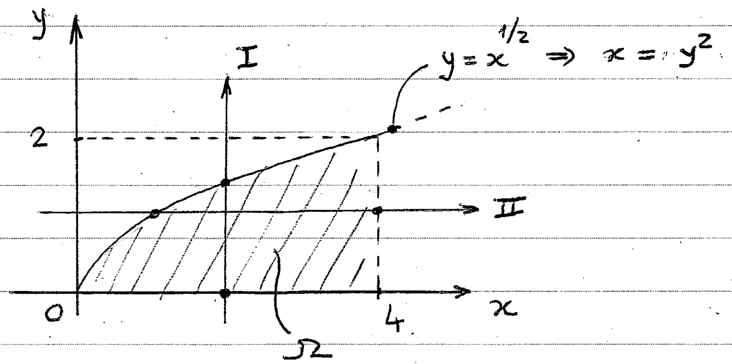
$$\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2}\, dx\, dy = \iint_{D_1} e^{x/y^2}\, dy\, dx + \iint_{D_2} e^{x/y^2}\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 \int_1^2 e^{x/y^2}\, dy\, dx + \int_1^4 \int_{x^{1/2}}^2 e^{x/y^2}\, dy\, dx = \cdots = \frac{7}{3}(e-1)$$

Como é visível este processo de cálculo é mais trabalhoso do que o que foi considerado inicialmente.

No cálculo de um integral duplo a definição de região de integração (tipo I ou tipo II) é, em muitas situações, extremamente importante para a eficiência do processo envolvido.

6) Neste caso, comecemos por esboçar a região de integração Ω, região do plano limitada pelas linhas $y=0$, $y=x^{1/2}$ e $x=4$:



i) Se definirmos a região Ω como região do tipo I, isto é,

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 4 ,\ 0 \le y \le x^{1/2}\}$$

o integral é escrito sob a forma

$$\iint_\Omega \frac{y}{1+x^2}\, dx\, dy = \int_0^4 \int_0^{x^{1/2}} \frac{y}{1+x^2}\, dy\, dx .$$

Neste caso, inicia-se por integrar a função em relação à variável y (o que é muito simples), já que

$$\frac{1}{1+x^2} \int_0^{x^{1/2}} y\, dy = \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{x^{1/2}} = \frac{x}{2(1+x^2)} \qquad (1)$$

ii) Se optarmos por definir a região Ω como região do tipo II, isto é,

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2 \ , \ y^2 \leq x \leq 4\}$$

o integral duplo é escrito sob a forma

$$\iint_{\Omega} \frac{y}{1+x^2}\, dx\, dy = \int_0^2 \int_{y^2}^4 \frac{y}{1+x^2}\, dx\, dy$$

Neste caso, inicia-se por integrar a função em relação à variável x

$$y \int_{y^2}^4 \frac{1}{1+x^2}\, dx = y \left[\operatorname{arctg}(x)\right]_{y^2}^4 =$$

$$= y \operatorname{arctg}(4) - y \operatorname{arctg}(y^2)$$

pelo que o integral seguinte, em relação à variável y,

$$\int_0^2 y \operatorname{arctg}(4)\, dy - \int_0^2 y \operatorname{arctg}(y^2)\, dy$$

será muito mais trabalhoso do que aquele resultante em i).

Assim, optando por considerar a região de integração Ω como região do tipo I, obtém-se:

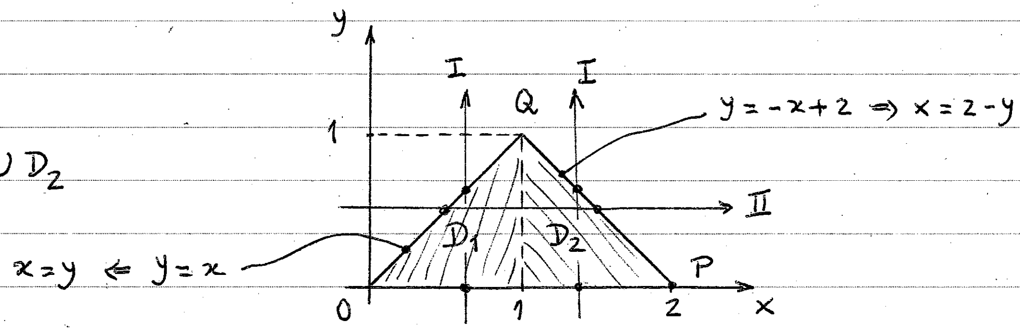
$$\iint_{\Omega} \frac{y}{1+x^2}\,dx\,dy = \int_0^4 \underbrace{\int_0^{x^{1/2}} \frac{y}{1+x^2}\,dy\,dx}_{\text{(ver (1))}} = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^4 = \frac{1}{4}\Big[\ln(17) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big] =$$

$$= \frac{1}{4}\ln(17)$$

14) A região de integração, D, é a região triangular com vértices nos pontos $O=(0,0)$, $P=(2,0)$ e $Q=(1,1)$, isto é:

$D = D_1 \cup D_2$



i) Se definirmos a região D como região do tipo I, então a região D deverá ser considerada como a reunião das regiões D_1 e D_2

$$D = D_1 \cup D_2$$

já que, quando x varia no intervalo $[0,2]$ a variável y não tem uma variação uniforme.

Tem-se então

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq -x+2\}$$

pelo que

$$\iint_D (2x)\,dy\,dx = \iint_{D_1} (2x)\,dy\,dx + \iint_{D_2} (2x)\,dy\,dx =$$

Folha Nº 7 / 11

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

$$= 2\int_0^1 \int_0^x (x)\, dy\, dx + 2\int_1^2 \int_0^{-x+2} (x)\, dy\, dx = \dots = 2$$

ii) Se a região D for definida como região do tipo II, isto é,

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \ , \ y \leq x \leq 2-y\}$$

o cálculo pode ser realizado através de um único integral duplo:

$$\iint_D (2x)\, dy\, dx = 2\int_0^1 \int_y^{2-y} (x)\, dx\, dy = 2\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_y^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left[(2-y)^2 - y^2\right] dy = \int_0^1 (4-4y)\, dy =$$

$$= 4\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 4\left[\left(1-\frac{1}{2}\right) - (0)\right] = 2$$

iii) Um processo alternativo para o cálculo consiste em recorrer à propriedade

$$\iint_D x\, dx\, dy = \bar{x}\, A(D)$$

onde A(D) é a área da região D (triângulo) e $\bar{x}$ é a abcissa do centroide, ou centro geométrico) da região D.

Neste caso, a área da região D é:

$$A(D) = \frac{b\,h}{2} = \frac{2\,(1)}{2} = 1 \text{ u.a.}$$

Dado que o triângulo D é um triângulo isósceles, tendo como eixo de simetria a recta $x = 1$, então o centroide estará situado sobre a recta $x = 1$ e, portanto, $\bar{x} = 1$.
Assim, conclui-se que:

$$\iint_D (2x)\, dy\, dx = 2\,\bar{x}\, A(D) = 2\,(1)\,(1) = 2$$

Exercício 5) da 1.ª Prova de Avaliação, realizada em 20/04/2016

Considere-se o integral duplo:

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2x+2} (y)\, dy\, dx + \int_{0}^{1}\int_{x}^{2-x^2} (y)\, dy\, dx$$

a) Esboce o domínio de integração.

Neste caso a região de integração está definida como região do tipo I sendo dada pela reunião de duas regiões, ou seja,

$$D = D_1 \cup D_2$$

em que, por exemplo,

$$D_1 = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 0 \,,\, 0 \leq y \leq 2x+2\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \,,\, x \leq y \leq 2-x^2\}$$

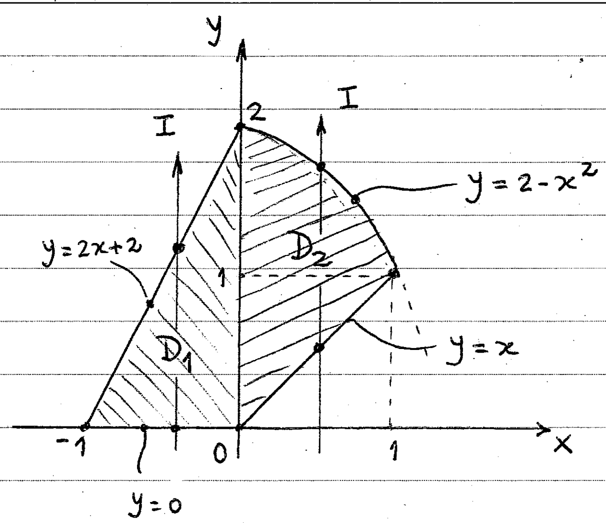
O esboço da região de integração envolve as linhas $y = 0$, $y = 2x+2$, se $x \in [-1,0]$, e as linhas $y = x$, $y = 2-x^2$, se $x \in [0,1]$.

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador



b) Calcule o valor do integral.

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2x+2} (y)\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \left[y^2\right]_0^{2x+2} dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 4(x+1)^2\, dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{0} (x^2+2x+1)\, dx = 2\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{-1}^{0} =$$

$$= 2\left[(0) - \left(-\frac{1}{3} + \cancel{1} - \cancel{1}\right)\right] = \frac{2}{3}$$

$$\int_{0}^{1}\int_{x}^{2-x^2} (y)\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \left[y^2\right]_x^{2-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \left[(2-x^2)^2 - x^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{1} (4 - 5x^2 + x^4)\, dx = \frac{1}{2}\left[4x - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 =$$

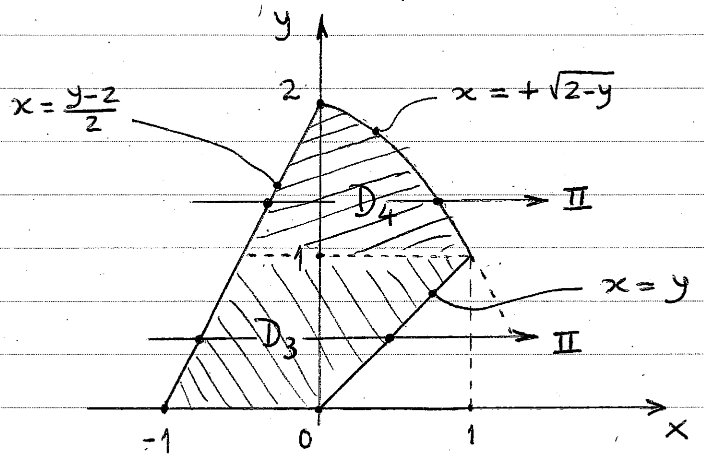
$$= \frac{1}{2}\left[\left(4 - \frac{5}{3} + \frac{1}{5}\right) - (0)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{38}{15}\right) = \frac{19}{5}$$

Conclui-se que:

$$\iint_{D_1} (y)\, dy\, dx + \iint_{D_2} (y)\, dy\, dx = \frac{2}{3} + \frac{19}{15} = \frac{29}{15}$$

c) Reescrever o integral duplo trocando a ordem de integração.

Considere-se novamente a região de integração D:



Neste caso, a região de integração situa-se no intervalo $y \in [0,2]$. Estudando a variação de x ao longo deste intervalo, verifica-se que ela não é uniforme, registando-se uma alteração na sua variação na linha $y = 1$.

Assim, a região de integração D, como região do tipo II, deverá ser definida como a reunião das regiões D_3 e D_4

$$D = D_3 \cup D_4$$

em que

$$D_3 = \left\{ (x,y) : 0 \leq y \leq 1 ,\ \frac{y-2}{2} \leq x \leq y \right\}$$

$$D_4 = \left\{ (x,y) : 1 \leq y \leq 2 ,\ \frac{y-2}{2} \leq x \leq +\sqrt{2-y} \right\}$$

Obtém-se, então:

$$\iint_D (y)\, dy\, dx = \iint_{D_3} (y)\, dx\, dy + \iint_{D_4} (y)\, dx\, dy =$$

Folha Nº 11 / 11

U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso ____ Data __/__/__

Disciplina ____ Ano ____ Semestre ____

Nome ____

Espaço reservado para o avaliador

$$= \int_0^1 \int_{\frac{y-2}{2}}^{y} (y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_{\frac{y-2}{2}}^{\sqrt{2-y}} (y)\, dx\, dy$$

Curso MIEIC Data / /

Disciplina CMAT Ano Semestre

Nome

Espaço reservado para o avaliador

AULA 9 : Ex's Tratados - ficha 3 : 21, 24 b) c) d) e)

Ex's Propostos - ficha 3 : 18, 20 a) b), 22, 23, 24 a)

21) a) $\iint_S f(x,y)\,dx\,dy$

Região de integração : $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq a^2,\ a>0\}$

A região S é um círculo de raio a e com centro na origem $O=(0,0)$. É limitada pela linha C, que a circunferência de equação cartesiana

$$C : x^2+y^2=a^2 \ , \ x\in[-a,a]$$

ou de equação polar (em coordenadas polares)

$$C : r=a \ , \ \theta\in[0,2\pi]$$

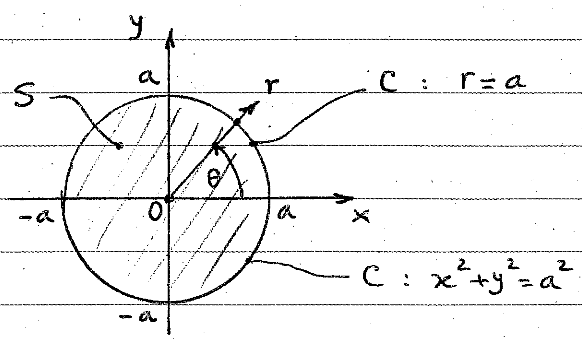
Coord. Polares

$x = r\cos(\theta)$

$y = r\,sen(\theta)$

$x^2+y^2=r^2$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$



Começamos por definir a função $f(x,y)$ em coordenadas polares:

$$f(x,y) \longrightarrow f(r\cos(\theta), r\,sen(\theta))$$

Neste caso, é indiferente a definição de região S (em coordenadas polares) como região do tipo I ou tipo II.

i) Definição da região S como região do tipo I (S_1):

$$S_1 = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq r \leq a\}$$

Então:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^a f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\ r\,dr\,d\theta$$

Neste caso, inicia-se por integrar em relação à variável r e, em seguida, em relação à variável θ.

ii) Definição da região S como região do tipo II (S_2):

$$S_2 = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq a \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Então:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{a}\int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))\ r\,d\theta\,dr$$

Neste caso, inicia-se por integrar em relação à variável θ e, em seguida, em relação à variável r.

NOTA: Se pretendessemos resolver o problema em coordenadas cartesianas, começaríamos por definir a região S, por exemplo, como região do tipo I

$$S = \{(x,y) : -a \leq x \leq a \ , \ -\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}\}$$

e escreveríamos o integral sob a forma:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Possivelmente o processo de integração seria mais trabalhoso do que o que decorre do recurso às coordenadas polares.

b) $\iint_S f(x,y)\,dx\,dy$

Região de integração: $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2x\}$

Notando que

$$x^2+y^2 \leq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \leq 1$$

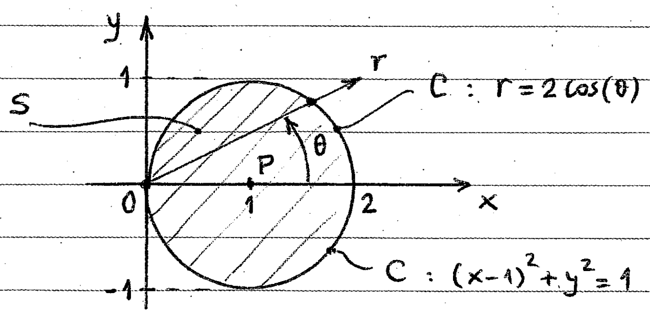
a região S é um círculo de raio 1 e com centro no ponto $P=(1,0)$. É limitada pela linha C, que é a circunferência de equação cartesiana

$$C : (x-1)^2+y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 2x \qquad (1)$$

Recorrendo às coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\text{sen}(\theta)$ é possível obter a equação polar da curva C a partir da expressão (1), ou seja:

$$x^2+y^2 = 2x \Leftrightarrow r^2\cos^2(\theta) + r^2\,\text{sen}^2(\theta) = 2r\cos(\theta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 = 2r\cos(\theta) \Leftrightarrow r = 2\cos(\theta)$$



Assim, a equação polar da curva C é:

$$C : r = 2\cos(\theta) \ , \ \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Dado que r é função da variável θ, a região S deverá ser definida como região do tipo I, isto é:

$$S_1 = \{ (r,\theta) : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \ , \ 0 \leq r \leq 2\cos(\theta) \}$$

Notando que $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ e que

$$f(x,y) \longrightarrow f(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta))$$

o integral passa a escrever-se:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{S_1} f(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta))\, r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos(\theta)} f(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta))\, r\,dr\,d\theta$$

Neste caso, inicia-se por integrar a função em relação à variável r e, em seguida, em relação à variável θ.

NOTA: Se pretendessemos resolver o problema em coordenadas cartesianas, começariamos por definir a região S, por exemplo, como região do tipo II. Tendo em atenção que

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow x - 1 = \pm\sqrt{1-y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$$

tem-se

$$S = \{ (x,y) : -1 \leq y \leq 1 \ , \ 1 - \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1 + \sqrt{1-y^2} \}$$

U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano ..... Semestre .....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

e, portanto,

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$$

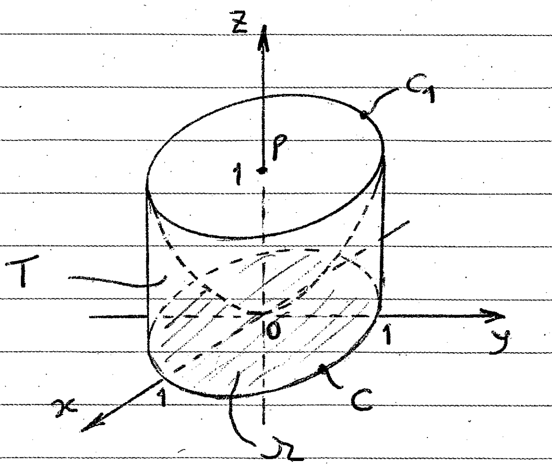
Possivelmente o processo de integração seria mais trabalhoso do que o que decorre do recurso às coordenadas polares.

24)b) Sólido limitado pelas superfícies:

S_1 : $z = x^2+y^2$ (parabolóide)

S_2 : $x^2+y^2=1$ (cilindro)

S_3 : $z=0$ (plano xOy)



A linha C_1 (ver figura) é a intersecção das superfícies cilíndrica e parabólica:

$$C_1 : \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Trata-se de uma circunferência de raio 1 e com centro no ponto $P=(0,0,1)$.
A projecção de C_1 no plano xOy é a circunferência, C, de raio 1 e com centro na origem $O=(0,0,0)$:

$$C : \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, o sólido T é limitado superiormente pela superfície

$$S_4 : z = f(x,y) = x^2+y^2 \ , \ (x,y) \in \Omega$$

e inferiormente pela superfície

$$S_5 : z = g(x,y) = 0 \quad , \ (x,y) \in \Omega$$

em que Ω é a região circular do plano xOy:

$$\Omega = \{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 1 \}$$

Então, o volume do sólido T, $V(T)$, é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo

$$V(T) = \iint_\Omega [f(x,y) - \underbrace{g(x,y)}_{=0}] \, dx\,dy = \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

isto é,

$$V(T) = \iint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad (1)$$

Uma vez que Ω é uma região circular vamos recorrer a coordenadas polares para o cálculo de (1).

Sabendo que $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\text{sen}(\theta)$ então:

$$f(x,y) = x^2+y^2 \implies f(r\cos(\theta), r\,\text{sen}(\theta)) = r^2$$

A equação polar da linha C é:

$$C : r = 1 \ , \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

A região de integração Ω pode ser definida, em coordenadas polares, como região, por exemplo, do tipo I (Ω_1):

$$\Omega_1 = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq r \leq 1\}$$

Notando que $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, o integral duplo (1) pode ser reescrito, em coordenadas polares, sob a forma

$$V(T) = \iint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} r^2(r)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$$

NOTA : Se pretendessemos resolver o integral duplo (1) em coordenadas cartesianas, começaríamos por definir a região Ω, por exemplo, como região do tipo I

$$\Omega = \{ (x,y) \,;\, -1 \leq x \leq 1 \,,\, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$$

e, portanto,

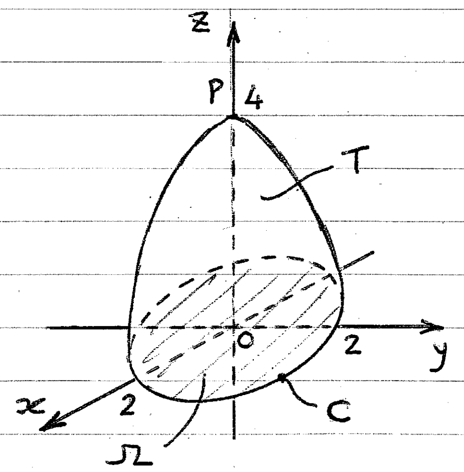
$$V(T) = \iint_{\Omega} (x^2+y^2)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\, dy\, dx$$

O processo de integração é, neste caso, mais trabalhoso do que o resultante da utilização de coordenadas polares.

c) Sólido limitado pelas superfícies:

$S_1 : z = 4 - x^2 - y^2$ (parabolóide)

$S_2 : z = 0$ (plano xOy)



A linha C é a intersecção do parabolóide, com vértice no ponto $P = (0,0,4)$ com o plano xOy:

$$C : \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

Trata-se de uma circunferência de raio 2 e com centro na origem $O=(0,0,0)$.

Assim, o sólido T é limitado superiormente pela superfície

$$S_3 : z = f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 , \quad (x,y) \in \Omega$$

e inferiormente pela superfície

$$S_4 : z = g(x,y) = 0 , \quad (x,y) \in \Omega$$

em que Ω é a região circular do plano xOy:

$$\Omega = \{ (x,y) : x^2+y^2 \leq 4 \}$$

Então, o volume do sólido T, V(T), é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo

$$V(T) = \iint_\Omega [f(x,y) - \underbrace{g(x,y)}_{=0}] \, dx\, dy = \iint_\Omega f(x,y)\, dx\, dy$$

isto é,

$$V(T) = \iint_\Omega [4-(x^2+y^2)]\, dx\, dy = \iint_\Omega 4\, dx\, dy - \iint_\Omega (x^2+y^2)\, dx\, dy =$$

$$= 4 \iint_\Omega dx\, dy - \iint_\Omega (x^2+y^2)\, dx\, dy \qquad (1)$$

A primeira parcela na expressão (1) tem o valor

$$4\iint_{\Omega} dx\,dy = 4\,A(\Omega) = 4\,[4\pi] = 16\pi \qquad (2)$$

onde $A(\Omega) = 4\pi$ é a área da região circular Ω.
Por outro lado, o cálculo da segunda parcela na expressão (1) é feito de forma idêntica à utilizada no cálculo do volume do sólido do exercício 24) b) (ver expressão (1) na página 6).
Neste caso, a região de integração Ω é definida, em coordenadas polares, pela região, por exemplo, do tipo I (Ω_1)

$$\Omega_1 = \{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 2\}$$

pelo que

$$\iint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} (r^2)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = 4\int_0^{2\pi} d\theta = 8\pi \qquad (3)$$

Substituindo (2) e (3) na expressão (1), obtém-se:

$$V(T) = 16\pi - 8\pi = 8\pi$$

NOTA: Se pretendêssemos resolver o integral duplo (3) em coordenadas cartesianas, começaríamos por definir a região Ω, por exemplo, como região do tipo I

$$\Omega = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

e, portanto,

$$\iint_{\Omega} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

O processo de integração é, neste caso, mais trabalhoso do que o resultante da utilização de coordenadas polares.

Folha Nº 11 / 18

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ../../..

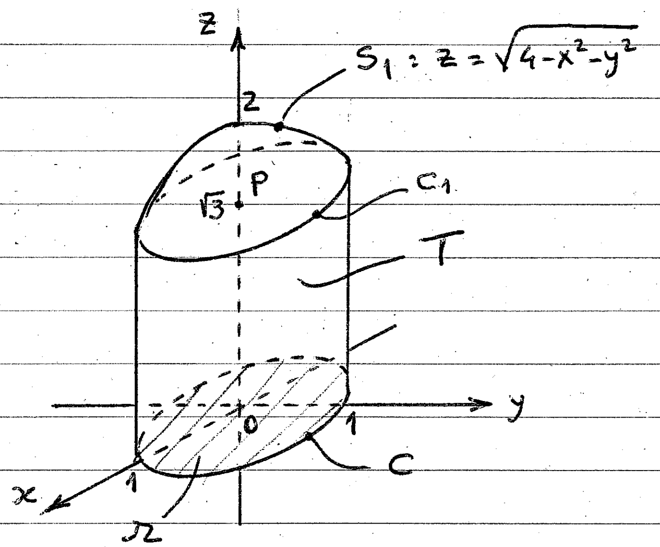
Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

d) Sólido definido por

$$x^2+y^2+z^2 \leq 4$$
$$x^2+y^2 \leq 1$$
$$z \geq 0$$



A linha C_1 é a intersecção da superfície esférica com a superfície cilíndrica

$$C_1 : \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=3 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \wedge z \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=\sqrt{3} \end{cases}$$

Trata-se de uma circunferência de raio 1 e com centro no ponto $P=(0,0,\sqrt{3})$.
A projecção de C_1 no plano xOy é a circunferência, C, de raio 1 e com centro na origem $O=(0,0,0)$:

$$C: \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Assim, o sólido T é limitado superiormente pela superfície

$$S_1 : z = f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}\ , \ (x,y)\in\Omega$$

e inferiormente pela superfície

$$S_2 : z = g(x,y) = 0 \ , \ (x,y)\in\Omega$$

em que Ω é a região circular do plano xOy:

$$\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$$

Então, o volume do sólido T, $V(T)$, é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo

$$V(T) = \iint_\Omega [f(x,y) - \underbrace{g(x,y)}_{=0}]\,dx\,dy = \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$$

isto é,

$$V(T) = \iint_\Omega \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy \qquad (1)$$

Uma vez que Ω é uma região circular vamos recorrer a coordenadas polares para o cálculo de (1).
Sabendo que $x=r\cos(\theta)$, $y=r\,sen(\theta)$ então:

$$f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow f(r\cos(\theta), r\,sen(\theta)) = \sqrt{4-r^2}$$

A equação polar da linha C é:

$$C : r=1 \ , \ \theta\in[0,2\pi]$$

A região de integração Ω pode ser definida, em coordenadas polares, como região, por exemplo, do tipo I (Ω_1):

$$\Omega_1 = \{ (r,\theta) \;,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \;;\; 0 \leq r \leq 1 \}$$

Notando que $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, o integral duplo (1) pode ser reescrito, em coordenadas polares, sob a forma

$$V(T) = \iint_{\Omega} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dx\,dy = \iint_{\Omega_1} \sqrt{4-r^2}\,(r)\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[4-r^2\right]^{1/2} dr\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-2r)\left[4-r^2\right]^{1/2} dr\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) \int_0^{2\pi} \left[\left(4-r^2\right)^{3/2} \right]_0^1 d\theta =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(3\sqrt{3} - 4\sqrt{4} \right) d\theta = \frac{8-3\sqrt{3}}{3}\,(2\pi) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{8-3\sqrt{3}}{3} \right)$$

NOTA: Se pretendessemos resolver o integral duplo (1) em coordenadas cartesianas, começaríamos por definir a região Ω, por exemplo, como região do tipo I

$$\Omega = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1 \,,\, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

e, portanto,

$$V(T) = \iint_\Omega \sqrt{4-x^2-y^2}\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\, dy\, dx$$

O processo de integração é, neste caso, mais trabalhoso do que o resultante da utilização de coordenadas polares.

e) O sólido limitado pelas superfícies:

S_1 : $z = 2x+1$ (plano)

S_2 : $x^2+y^2 = 2x \iff (x-1)^2+y^2=1$ (cilindro)

S_3 : $z=0$ (plano)

A superfície S_1 é um plano paralelo ao eixo dos yy.
A superfície S_2 é uma superfície cilíndrica de raio 1 e que tem como eixo a recta $x=1$ e $y=0$.
A linha C_1 (ver figura na página seguinte) é a intersecção da superfície cilíndrica S_2 com a superfície S_1:

$$C_1 : \begin{cases} z = 2x+1 \\ x^2+y^2 = 2x \end{cases}$$

Trata-se de uma elipse que passa nos pontos $P_1 = (0,0,1)$ e $P_2 = (2,0,5)$.
A projecção de C_1 no plano xOy é a circunferência, C, de raio 1 e com centro em $P_3 = (1,0,0)$:

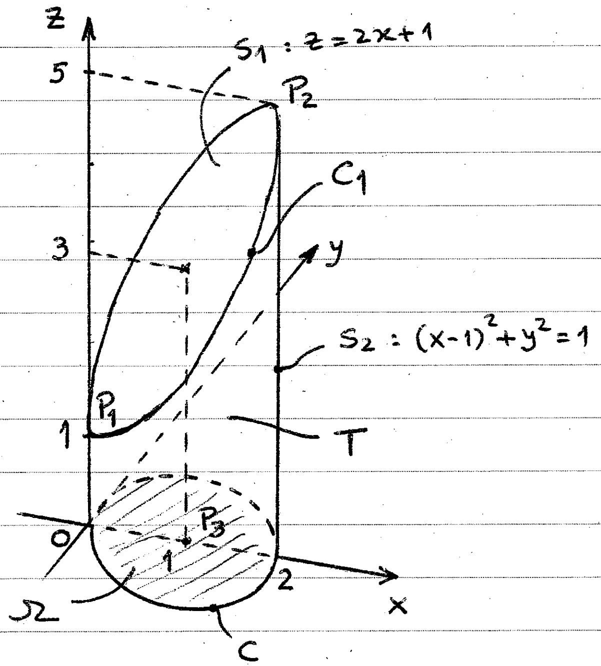
U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano ...... Semestre ......

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador



$$C : \begin{cases} (x-1)^2+y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Assim, o sólido T é limitado superiormente pela superfície

$$S_4 : z = f(x,y) = 2x+1 \ , \ (x,y) \in \Omega$$

e inferiormente pela superfície

$$S_5 : z = g(x,y) = 0 \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que Ω é a região circular do plano xOy

$$\Omega = \{(x,y) : (x-1)^2+y^2 \leq 1\}$$

Então, o volume do sólido T, V(T), é dado, em coordenadas cartesianas, pelo integral duplo

$$V(T) = \iint_{\Omega} [\, f(x,y) - \underbrace{g(x,y)}_{=0} \,]\, dx\,dy = \iint_{\Omega} f(x,y)\, dx\,dy$$

isto é,

$$V(T) = \iint_{\Omega} (2x+1)\, dx\,dy = \iint_{\Omega} dx\,dy + 2\iint_{\Omega} x\, dx\,dy \quad (1)$$

A primeira parcela na expressão (1) tem o valor

$$\iint_{\Omega} dx\,dy = A(\Omega) = \pi \qquad (2)$$

onde $A(\Omega) = \pi$ é a área da região circular Ω.

Por outro lado, a segunda parcela na expressão (1) tem o valor

$$2\iint_{\Omega} x\, dx\,dy = 2\left[\,\bar{x}\, A(\Omega)\right] = 2\,(1)\,(\pi) = 2\pi \qquad (3)$$

onde $A(\Omega) = \pi$ é a área da região circular Ω e $\bar{x} = 1$ é a abcissa do centroide (ou centro geométrico) da região Ω, que corresponde ao centro do círculo, o ponto $P_3 = (1,0,0)$.

Substituindo (2) e (3) na expressão (1), obtém-se

$$V(T) = \pi + 2\pi = 3\pi$$

NOTA 1: O cálculo do integral duplo

$$\iint_{\Omega} x\, dx\,dy \qquad (4)$$

na expressão (1) poderia ser feito adoptando um procedimento análogo ao que foi considerado na resolução do exercício 21) b) (páginas 3 e 4).

Neste caso, tendo em atenção que

$$h(x,y) = x \Rightarrow h(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) = r\cos(\theta)$$

ter-se-ia:

$$\iint_{\Omega} x\,dx\,dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)} r\cos(\theta)\,(r)\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)} r^2\cos(\theta)\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta}\cos(\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4(\theta)\,d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]^2 d\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{4}\cos^2(2\theta)\right]d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[1+2\cos(2\theta)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(4\theta)\right)\right]d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[3+4\underbrace{\cos(2\theta)}_{=0}+\underbrace{\cos(4\theta)}_{=0}\right]d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \pi$$

NOTA 2: Se pretendessemos calcular o integral duplo (4) em coordenadas cartesianas, começaríamos por definir a região Ω, por exemplo, Como região do tipo II (ver exercício 21) b), página 4)

$$\Omega = \{ (x,y) : -1 \leq y \leq 1 \,,\, -1-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1+\sqrt{1-y^2} \}$$

e, portanto,

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} x \, dx \, dy$$

Trata-se de um processo de cálculo muito trabalhoso quando comparado com o que foi considerado na NOTA 1 (coordenadas polares) e, em especial, quando comparado com o que foi adoptado na obtenção da solução referida em (3).