1) $\vec{r}(t) = \left(e^t \operatorname{sen}(t), e^t \cos(t), t+1 \right), \; t \in \mathbb{R}$

a) Vetor tangente à curva:

$$\vec{r}\,'(t) = \left(e^t \operatorname{sen}(t) + e^t \cos(t), e^t \cos(t) - e^t \operatorname{sen}(t), 1 \right)$$

Vector tangente à curva no ponto $P = (0,1,1) = \vec{r}(0)$

$$\vec{r}\,'(0) = (1, 1, 1)$$

Vector de tangente à curva no ponto P

$$\vec{T}(0) = \frac{\vec{r}\,'(0)}{\|\vec{r}\,'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

b)

$$\vec{r}\,''(t) = \left(e^t \cancel{\operatorname{sen}(t)} + e^t \cos(t) + e^t \cos(t) - \cancel{e^t \operatorname{sen}(t)}, \right.$$
$$\left. e^t \cancel{\cos(t)} - e^t \operatorname{sen}(t) - e^t \operatorname{sen}(t) - \cancel{e^t \cos(t)}, 0 \right) =$$
$$= \left(2e^t \cos(t), -2e^t \operatorname{sen}(t), 0 \right)$$

obtendo-se para o ponto $P = \vec{r}(0)$

$$\vec{r}\,''(0) = (2, 0, 0)$$

Vetor normal ao plano osculador no ponto P

$$\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2, -2)$$

Sendo o vector binormal no ponto P

$$\vec{B}(0) = \frac{\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0)}{\|\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0)\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,2,-2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

A equação cartesiana do plano osculador no ponto P é

$$\left[(x,y,z) - P \right] \cdot \vec{B}(0) = 0 \iff (x, y-1, z-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1) = 0 \iff$$

$$\iff \frac{1}{\sqrt{2}} y - \frac{1}{\sqrt{2}} z = 0 \iff y - z = 0$$

[illegible signature]

2) $f(x,y,z) = x + e^{z^2-y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^{z^2-y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z\, e^{z^2-y}$$

$$\nabla f = \left(1, -e^{z^2-y}, 2z\, e^{z^2-y}\right)$$

$$\nabla f(0,1,1) = (1, -1, 2)$$

Seja a superfície esférica

$$g(x,y,z) = 0 \quad \text{com} \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2$$

tendo como vector normal

$$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$$

O versor da normal à superfície em $R = (0,1,1)$ é

$$\vec{u} = \frac{\nabla g(0,1,1)}{\|\nabla g(0,1,1)\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,2,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$$

A derivada direcional pretendida é

$$f'(R,\vec{u}) = \nabla f(R) \cdot \vec{u} = (1,-1,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wiz

3) $f(x,y) = x - xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$$

Determinação dos pontos críticos

$$\begin{cases} 1 - y^2 = 0 \\ -2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Classificação dos pontos críticos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y$$

Relativamente ao ponto $(0,-1)$ obtém-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{ponto de sela}$$

Relativamente ao ponto $(0,1)$ obtém-se

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0 \Rightarrow \text{ponto de sela}$$

4) $x\,\mathrm{sen}(x) + z e^{z} + y^{2} - 1 = 0$ com $z = f(x,y)$

Derivando em ordem a x :

$$\mathrm{sen}(x) + x\cos(x) + \frac{\partial z}{\partial x} e^{z} + z\frac{\partial z}{\partial x} e^{z} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{z} + z e^{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = -\mathrm{sen}(x) - x\cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\mathrm{sen}(x) - x\cos(x)}{e^{z}(1+z)}$$

Derivando em ordem a y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} e^{z} + z\frac{\partial z}{\partial y} e^{z} + 2y = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\left(e^{z} + z e^{z}\right) = -2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{e^{z}(1+z)}$$

No ponto $Q = (0,1,0)$ obtém-se

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1,0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1,0) = \frac{-2}{1} = -2$$

Jorge

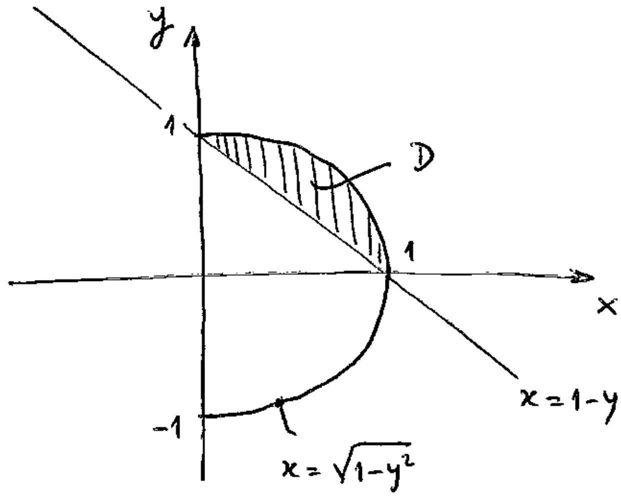
5) $$\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} 2x \, dx \, dy$$

a)

$x = \sqrt{1-y^2}$: semicircunferência

$x = 1-y$: reta

D : domínio de integração



$$\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} 2x \, dx \, dy = \int_0^1 \left[x^2\right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= \int_0^1 \left[1-y^2-(1-y)^2\right] dy = \int_0^1 (2y-2y^2)\, dy = 2\int_0^1 (y-y^2)\, dy =$$

$$= 2\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}$$

b) i) $x = \sqrt{1-y^2}$, $y \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [0,1]$

$x = 1-y$, $y \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $y = 1-x$, $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} 2x \, dy \, dx$$

ii) $x = r\cos\theta$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$2x = 2r\cos\theta$

$x = \sqrt{1-y^2}$, $y \in [0,1]$ $\Rightarrow$ $r = 1$, $\theta \in [0, \pi/2]$

[illegible]

$x = 1 - y$ $\Rightarrow$ $r\cos\theta = 1 - r\,\text{sen}\,\theta$ $\Rightarrow$ $r = \dfrac{1}{\text{sen}\,\theta + \cos\theta}$

$y \in [0,1]$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\theta \in [0, \pi/2]$

$$\int_0^{\pi/2} \int_{\frac{1}{\text{sen}\,\theta+\cos\theta}}^{1} 2r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta$$

6) Curva : $\vec{r}(t)$

O Plano Osculador da curva em $\vec{r}(t)$ é o plano que é gerado pelos vetores $\vec{T}(t)$ (versor da tangente) e $\vec{N}(t)$ (versor da normal principal). Para mostrarmos que $\vec{r}''(t)$ pertence ao plano osculador basta mostrar que ele é combinação linear dos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$.

Seja o vetor tangente à curva $\vec{r}'(t)$ que pode ser expresso em função do versor $\vec{T}(t)$, isto é,

$$\vec{r}'(t) = \| \vec{r}'(t) \| \, \vec{T}(t)$$

Derivando em ordem a t obtém-se

$$\vec{r}''(t) = \| \vec{r}'(t) \|' \, \vec{T}(t) + \| \vec{r}'(t) \| \, \vec{T}'(t)$$

em que $\vec{T}'(t)$ é um vetor normal ao versor $\vec{T}(t)$, tendo a direção do versor $\vec{N}(t)$. Assim, considerando

$$\vec{T}'(t) = \| \vec{T}'(t) \| \, \vec{N}(t)$$

resulta finalmente

$$\vec{r}''(t) = \| \vec{r}'(t) \|' \, \vec{T}(t) + \| \vec{r}'(t) \| \, \| \vec{T}'(t) \| \, \vec{N}(t)$$

Comprova-se que $\vec{r}''(t)$ é combinação linear dos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$, pertencendo ao plano osculador à curva em $\vec{r}(t)$.

qd