COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 6

SUPERFÍCIES

1. Parametrize as seguintes superfícies:

a) $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

b) $x^2 + y^2 = 9$, $z \in [-1,3]$.

c) A região da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ situada acima do plano $z = -\sqrt{2}$.

d) A região do plano $z = x - 1$ que é limitada pela superfície $x^2 + y^2 = 1$.

2. Identifique as seguintes superfícies e defina-as através das respectivas equações cartesianas:

a) $\vec{r}(u,v) = \cos(u)\cos(v)\vec{i} + 2\text{sen}(u)\cos(v)\vec{j} + 3\text{sen}(v)\vec{k}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-\pi/2, \pi/2]$.

b) $\vec{r}(u,v) = au\cos(v)\vec{i} + bu\text{sen}(v)\vec{j} - u^2\vec{k}$, $u \geq 0$, $v \in [0, 2\pi]$ $(a,b \in \mathbb{R}^+)$.

c) $\vec{r}(u,v) = \dfrac{a}{2}(u+v)\vec{i} + \dfrac{b}{2}(u-v)\vec{j} + uv\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ $(a,b \in \mathbb{R}^+)$.

3. Seja a superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v) = (u^2 - v^2)\vec{i} + (u^2 + v^2)\vec{j} + 2uv\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Calcule:

a) O seu produto vectorial fundamental.

b) A equação cartesiana do plano tangente à superfície no ponto $R = (0,2,2)$.

4. Considere a superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v) = \cos(u)\text{sen}(v)\vec{i} + \text{sen}(u)\cos(v)\vec{j} + u\vec{k}$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Calcule:

a) O seu produto vectorial fundamental.

b) A equação cartesiana do plano que passa no ponto $Q = (1,2,1)$ e é paralelo ao plano tangente à superfície no ponto $R = (0,0,\pi)$.

5. Considere a superfície, S, definida por $z = x^2 + y^2$, $z \in [0,4]$.

a) Esboce a superfície. **b)** Determine a sua área.

6. Seja a superfície, S, parametrizada por $\vec{r}(u,v) = u\cos(v)\vec{i} + u\operatorname{sen}(v)\vec{j} + u\vec{k}$, tal que $u \in [0,1]$ e $v \in [0,2\pi]$.

a) Esboce a superfície. **b)** Calcule a sua área.

7. Confirme o resultado obtido no exercício da alínea b) do exercício 6., considerando uma parametrização da superfície em coordenadas cartesianas.

8. Seja a superfície, S, definida por $2 - 2x^2 - 2y^2 - z = 0$, $z \geq 0$.

a) Esboce a superfície. **b)** Determine a sua área.

9. Seja a superfície, S, definida por $z = 5 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 4$.

a) Esboce a superfície. **b)** Obtenha a sua área.

10. Considere a superfície, S, definida por $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [-4,-1]$.

a) Esboce a superfície. **b)** Calcule a sua área.

11. Seja a superfície, S, definida por $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, tal que $x \geq 0$, $z \geq 0$ e $x + z \leq 1$.

a) Esboce a superfície. **b)** Calcule a sua área.

12. Seja a superfície, S, definida por $x^2 + y^2 = (z-4)^2$, tal que $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $0 \leq z \leq 2$.

a) Esboce a superfície. **b)** Calcule a sua área.

13. Determine a área da região, *S*, do plano $x+y+z=a$ situada no interior da superfície cilíndrica $x^2+y^2=b^2$.

14. Seja o plano $bcx+acy+abz=abc$, em que $a,b,c \in \mathbb{R}^+$. Calcule a área da região, *S*, do plano situada no primeiro octante.

15. Determine a área das superfícies, *S*, definidas por:

a) $3z=x^{3/2}+y^{3/2}$, tal que $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le x$.

b) $z^2=2xy$, tal que $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$ e $z \ge 0$.

c) $z=a^2-(x^2+y^2)$, tal que $0 \le z \le \frac{3}{4}a^2$.

d) $3z^2=(x+y)^3$, tal que $x \ge 0$, $y \ge 0$ e $x+y \le 2$.

e) $z=y^2$, tal que $x \in [0,1]$ e $y \in [0,1]$.

f) $x^2+y^2+z^2-4z=0$, tal que $z \ge \sqrt{3(x^2+y^2)}$.

g) $x^2+y^2+z^2-2az=0$, tal que $z \ge \frac{1}{b}(x^2+y^2)$ e $a,b \in \mathbb{R}^+$.

Soluções: Consultar o manual "Noções sobre Análise Matemática", Efeitos Gráficos, 2019. ISBN: 978-989-54350-0-5.

50. **a**) $L=\int_C ds=\int_C \|\vec{r}'(u)\|du=2\pi\sqrt{a^2+b^2}$ m.

b) O seu centro de massa é $C_M=(x_M,y_M,z_M)=(0,0,\pi b)$.

c) $I_x=\dfrac{M}{6}(3a^2+8\pi^2b^2)$ Kgm^2.

d) $I_y=\dfrac{M}{6}(3a^2+8\pi^2b^2)$ Kgm^2.

e) $I_z=Ma^2$ Kgm^2.

51. $M=\int_C \rho(x,y)ds=\int_C \rho(u)\|\vec{r}'(u)\|du=\dfrac{2k\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2)$ Kg.

Superfícies

1. **a**) $\vec{r}(u,v)=2\sqrt{2}\cos(u)\cos(v)\vec{i}+2\text{sen}(u)\cos(v)\vec{j}+4\text{sen}(v)\vec{k}$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,\pi/2]$.

b) $\vec{r}(u,v)=3\cos(u)\vec{i}+3\text{sen}(u)\vec{j}+v\vec{k}$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in[-1,3]$.

c) $\vec{r}(u,v)=2\cos(u)\cos(v)\vec{i}+2\text{sen}(u)\cos(v)\vec{j}+2\text{sen}(v)\vec{k}$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in(-\pi/4,\pi/2]$.

d) $\vec{r}(r,v)=r\cos(v)\vec{i}+r\text{sen}(v)\vec{j}+\left(r\cos(v)-1\right)\vec{k}$, $r\in[0,1]$, $v\in[0,2\pi]$.

2. **a**) Elipsoide com a equação cartesiana $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$.

b) Paraboloide elíptico com a equação cartesiana $z=-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$.

c) Paraboloide hiperbólico com a equação cartesiana $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$.

3. **a**) $\vec{N}(u,v)=4(u^2-v^2)\vec{i}-4(u^2+v^2)\vec{j}+2uv\vec{k}$. **b**) $y-z=0$.

4. **a**) $\vec{N}(u,v)=\text{sen}(u)\text{sen}(v)\vec{i}+\cos(u)\cos(v)\vec{j}+\left(\text{sen}^2(u)-\cos^2(v)\right)\vec{k}$.

b) $y+z=3$.

5. **a**) - - - -

b) $A(S)=\dfrac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$ m^2.

6. **a**) - - - -

b) $A(S)=\sqrt{2}\pi$ m^2.

7. Pode ser usada a seguinte parametrização: $\vec{r}(x,y)=x\vec{i}+y\vec{j}+\sqrt{x^2+y^2}\,\vec{k}$, $(x,y)\in\Omega$, em que $\Omega=\left\{(x,y)\ :\ 0\le x^2+y^2\le 1\right\}$.

8. **a**) - - - -

b) $A(S)=\dfrac{\pi}{24}\left(17\sqrt{17}-1\right)$ m^2.

9. **a**) - - - -

b) $A(S)=\dfrac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$ m^2.

10. **a**) - - - -

b) $A(S)=15\sqrt{2}\pi$ m^2.

11. **a**) - - - -

b) $A(S)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ m^2.

12. **a**) - - - -

b) $A(S)=3\sqrt{2}\pi$ m^2.

13. $A(S)=\sqrt{3}\pi b^2$ m^2.

14. $A(S)=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$ m^2.

15. **a**) $A(S)=\dfrac{1}{15}\left(32+36\sqrt{6}-50\sqrt{5}\right)$ m^2.

b) $A(S)=\dfrac{2\sqrt{2ab}}{3}(a+b)$ m^2.

c) $A(S)=\dfrac{\pi}{6}\left[\left(4a^2+1\right)^{3/2}-\left(a^2+1\right)^{3/2}\right]$ m^2.

d) $A(S)=\dfrac{16\sqrt{6}}{15}$ m^2.

e) $A(S)=\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ m^2.

f) $A(S)=4\pi$ m^2.

g) $A(S)=2\pi ab$ m^2.

16. - - - -

17. $A(S)=\dfrac{\sqrt{2}\pi}{4}\left[\sqrt{6}+\dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$ m^2.

18. $A(S)=\dfrac{a^2}{2}\left[\sqrt{1+2e^{4\pi}}-\sqrt{3}+2\pi+\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln\left(\sqrt{1+2e^{4\pi}}+1\right)\right]$ m^2.

Integrais de Superfície

1. $\iint_S h(x,y,z)dS=\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|\left[\dfrac{1}{3}a_1a_2+\dfrac{1}{4}(a_1b_2+b_1a_2)+\dfrac{1}{3}b_1b_2\right]$.

2. $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

3. $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$.

4. $\pi\left[3\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}+1)\right]$.

5. $\dfrac{\sqrt{3}}{120}$.

6. 2.

7. $28\sqrt{2}\pi$.

8. $\dfrac{\pi}{60}\left[10a^2(1+4a^2)^{3/2}-(1+4a^2)^{5/2}+1\right]$.

9. $\dfrac{4}{3}\pi a^4+\pi a^3$.

10. **a**) $\sqrt{6}$ m^2.

b) $\left(1,0,\dfrac{1}{2}\right)$.

c) $\dfrac{\sqrt{6}k}{2}$ Kg.

d) $\left(\dfrac{7}{6},\dfrac{1}{6},\dfrac{2}{3}\right)$.

e) $I_x=\dfrac{\sqrt{6}k}{3}$ Kgm^2, $I_y=\sqrt{6}k$ Kgm^2 e $I_z=\dfrac{5\sqrt{6}k}{6}$ Kgm^2.

11. **a**) $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}$ m^2.

b) $\left(\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3},\dfrac{a}{3}\right)$.