1)

a)

$$A = |xy| + 2|xz| + 2|yz|$$

$$f(x,y,z) = |xy| + 2|xz| + 2|yz|$$

$$D_f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0 \}$$

b)

$\vec{v} = (1,1,0)$ $\qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$

$\vec{x} = (x,y,z)$ $\qquad \|\vec{x}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\vec{v} \cdot \vec{x} = x + y$$

$$f(x,y,z) = \arccos\left[\frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] = \arccos\left[\frac{x+y}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}}\right]$$

$$D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

c)

$\vec{v} = (1,0,0)$

$\vec{u} = (1,1,0)$ $\qquad \vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = z$

$\vec{x} = (x,y,z)$

$$V = |\vec{v} \cdot \vec{u} \times \vec{x}|$$

$$f(x,y,z) = |z|$$

$$D_f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , z \neq 0 \}$$

Wj

2) $$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = z$$

Analisando a equação é evidente que:

$$b \neq 0 \quad e \quad z \geq 0$$

a)

A intersecção da superfície com planos paralelos a Oxy são elipses. Assim

$$z = k \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + \frac{y^2}{b^2} = k$$

(nota: se $k = 0$ temos o ponto $(0,0,0)$)

Trata-se de elipses com centro sobre o eixo dos zz e semi-eixos:

- $\sqrt{k}$ segundo o eixo dos xx
- $\sqrt{k}\,|b|$ segundo o eixo dos yy

$$\left[\frac{x^2}{(\sqrt{k})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{k}\,b)^2} = 1\right]$$

A intersecção da superfície com planos paralelos a Oyz são parábolas. Assim

$$x = k \quad \wedge \quad z = \frac{y^2}{b^2} + k^2$$

A intersecção da superfície com planos paralelos a Oxz são ainda parábolas. Assim

$$y = k \quad \wedge \quad z = x^2 + \frac{k^2}{b^2}$$

Conclui-se então que a superfície em causa é um parabolóide elíptico.

[illegible]

b) Quando $b \to \infty$ a superfície passa a ter como equação

$$z = x^2 \quad , \quad y \in \mathbb{R}$$

Trata-se de um cilindro parabólico com eixo paralelo ao eixo dos yy.

c) Considerando $z = 1$ obtém-se a secção

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \wedge \quad z = 1$$

Trata-se de uma elipse situada no plano $z=1$, com centro em $(0,0,1)$ e com semi-eixos:

i) 1 segundo a direcção do eixo dos xx

ii) $|b|$ segundo a direcção do eixo dos yy

d) Quando $b \to \infty$ a secção anterior passa a ter como equação

$$x^2 = 1 \quad \wedge \quad z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x = 1 \wedge z = 1) \quad \vee \quad (x = -1 \wedge z = 1)$$

Trata-se de duas rectas paralelas ao eixo dos yy situadas no plano $z = 1$.

Wir

4) $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

a) Ao longo do eixo dos xx

$(x,y) \to (0,0)$
$\Downarrow$
$x \to 0$

$\mathcal{C} \to$ eixo dos xx : $y=0$

$$f(x,0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = 0$$

b) Ao longo do eixo dos yy

$(x,y) \to (0,0)$
$\Downarrow$
$y \to 0$

$\mathcal{C} \to$ eixo dos yy : $x=0$

$$f(0,y) = 0$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0$$

c) Ao longo da recta $y=mx$

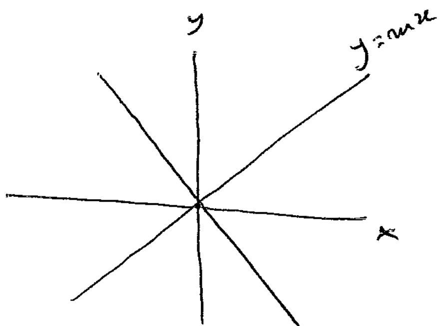
$(x,y) \to (0,0)$
$\Downarrow$
$x \to 0$

$\mathcal{C}$: $y = mx$

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = g(x)$$

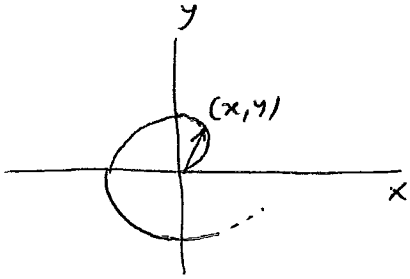
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \frac{m}{1+m^2}$$



d) Ao longo da espiral $r = \theta\ ,\ \theta > 0$

$$C:\ r = \theta\ ,\ \theta > 0$$



$$x = r\cos\theta = \theta\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta = \theta\,\text{sen}\,\theta$$

$$(x,y) \longrightarrow (0,0)$$
$$\Downarrow$$
$$\theta \to 0^+$$

$$f(\theta\cos\theta, \theta\,\text{sen}\,\theta) = \frac{\theta^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\theta^2\cos^2\theta + \theta^2\,\text{sen}^2\theta} =$$

$$= \frac{\theta^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\theta^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\theta^2\,\text{sen}\,2\theta}{\theta^2} = g(\theta)$$

$$\lim_{\theta\to 0^+} g(\theta) = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{1}{2}\,\frac{\theta^2\,\text{sen}\,2\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0^+}(\text{sen}\,2\theta) = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ r=\theta}} f(x,y) = 0$$

e) Ao longo do arco $r = \text{sen}\,3\theta\ ,\ \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$

$$C:\ r = \text{sen}\,3\theta\ ,\ \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$$

$$(x,y) \longrightarrow (0,0)$$
$$\Downarrow$$
$$\theta \to \frac{\pi}{3}^-$$

$$x = r\cos\theta = \text{sen}(3\theta)\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta = \text{sen}(3\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

$$f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \frac{\text{sen}^2(3\theta)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\text{sen}^2(3\theta)\cos^2\theta + \text{sen}^2(3\theta)\,\text{sen}^2\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\text{sen}^2(3\theta)\,\text{sen}\,2\theta}{\text{sen}^2(3\theta)} = g(\theta)$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-} g(\theta) = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-} \frac{\text{sen}^2(3\theta)\,\text{sen}\,2\theta}{\text{sen}^2(3\theta)} = \frac{1}{2}\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}(\text{sen}\,2\theta) = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ r=\text{sen}\,3\theta}} f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

f) Ao longo da curva $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$, $t > 0$

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = \frac{\operatorname{sen} t}{t} \end{cases}, \quad t > 0$$

$$(x,y) \to (0,0) \quad \Downarrow \quad t \to +\infty$$

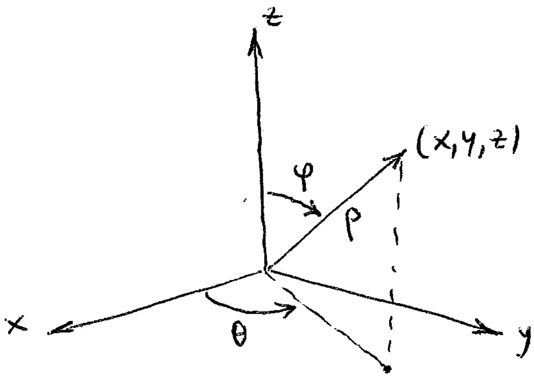
$$f\left(\frac{1}{t}, \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{t^2}}{\frac{1}{t^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}} = \frac{t^2 \operatorname{sen} t}{t^2(1+\operatorname{sen}^2 t)} = g(t)$$

$$\lim_{t \to +\infty} g(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 \operatorname{sen} t}{t^2(1+\operatorname{sen}^2 t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{1+\operatorname{sen}^2 t}$$ <u>não existe</u>

$\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (\text{ao longo de } \mathcal{C})}} f(x,y) \longrightarrow$ não existe limite

5)

a) $\rho = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta$



$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = \cos\varphi \cos\theta$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta$$

Coordenadas esféricas : $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$$

NOTA : $\rho = \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho^2 = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = x \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1/2)^2+y^2+z^2 = \frac{1}{4}$ $\longrightarrow$ Superficie esférica $\begin{cases} \text{centro} = (1/2, 0, 0) \\ \text{raio} = 1/2 \end{cases}$

c) $g(x,y) = \operatorname{arctg}(2x+y)$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} = \frac{2}{1+(2x+y)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} = \frac{1}{1+(2x+y)^2}$$

d) $u(x,y,z) = \dfrac{e^z}{x y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x^{-2}\frac{e^z}{y^2} = -\frac{e^z}{x^2y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y^{-3}\frac{e^z}{x} = -\frac{2e^z}{xy^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{e^z}{xy^2}$$

b)

$$g(x,y) = \sqrt{x^2+4y^2} = (x^2+4y^2)^{1/2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}(2x)(x^2+4y^2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{2}(8y)(x^2+4y^2)^{-1/2} = \frac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$$

e) $\omega(x,y,z) = \ln(zx+3y)$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{z}{xz+3y} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{3}{xz+3y} \qquad \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{x}{xz+3y}$$

f) $v(x,y,z) = x^{y^z}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \ln(x)\frac{\partial}{\partial y}(y^z)\, x^{y^z} = z\ln(x)\, y^{z-1} x^{y^z}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \ln(x)\frac{\partial}{\partial z}(y^z)\, x^{y^z} = \ln(x)\ln(y)\, y^z x^{y^z}$$

$$x^{y^z} = e^{\ln x^{y^z}}$$

$$\frac{d}{dy} \ln x^{y^z} \quad e^{\cdots}$$

$$\frac{d}{dy} y^z \ln x$$

Wy

6) a) $f(x,y,z) = x \operatorname{sen}(x+z)\, e^{y} = x e^{y} \operatorname{sen}(x+z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y} \operatorname{sen}(x+z) + x e^{y} \cos(x+z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x e^{y} \operatorname{sen}(x+z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x e^{y} \cos(x+z)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(e^{y} \operatorname{sen}(x+z) + x e^{y} \cos(x+z),\ x e^{y} \operatorname{sen}(x+z),\ x e^{y} \cos(x+z) \right) =$$

$$= e^{y} \left(\operatorname{sen}(x+z) + x \cos(x+z),\ x \operatorname{sen}(x+z),\ x \cos(x+z) \right)$$

b) $g(x,y,z) = (-x+2y)^{5} + \frac{2}{z}$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 5(-1)(-x+2y)^{4} = -5(-x+2y)^{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 5(2)(-x+2y)^{4} = 10(-x+2y)^{4}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{2}{z^{2}}$$

$$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(-5(-x+2y)^{4},\ 10(-x+2y)^{4},\ -\frac{2}{z^{2}} \right)$$

Wiy

7) $f(x,y) = x(4-y^2)$

$\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t)) = (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t)$

b) Usando a composição de funções:

$f(t) = f(\alpha(t)) = 2\cos t\,(4 - 4\,\text{sen}^2 t) =$

$= 8\cos t\,(1 - \text{sen}^2 t) = 8\cos^3 t$

$f'(t) = 8\,(3)\cos^2 t\,(-\text{sen}\,t) = -24\,\text{sen}\,t\cos^2 t$

a) Não efectuando a composição de funções:

$f'(t) = \nabla f(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t) = 4 - y^2 = 4 - 4\,\text{sen}^2 t = 4(1 - \text{sen}^2 t) = 4\cos^2 t$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(t) = x(-2y) = -2xy = -8\,\text{sen}\,t\cos t$

$\vec{\alpha}'(t) = (-2\,\text{sen}\,t, 2\cos t) = 2(-\text{sen}\,t, \cos t)$

$\nabla f(\vec{\alpha}(t)) = (4\cos^2 t, -8\,\text{sen}\,t\cos t) = 4(\cos^2 t, -2\,\text{sen}\,t\cos t)$

$f'(t) = 4(\cos^2 t, -2\,\text{sen}\,t\cos t) \cdot [2(-\text{sen}\,t, \cos t)] =$

$= 8(-\text{sen}\,t\cos^2 t - 2\,\text{sen}\cos^2 t) = -24\,\text{sen}\,t\cos^2 t$

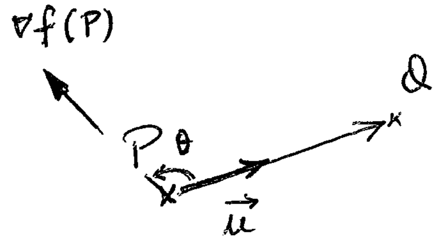
$\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (x'(t), y'(t)) = \nabla f \cdot \vec{\alpha}'(t)$

Nuno

8) $f(x,y,z) = z \ln \frac{x}{y}$

$P = (1,2,-2)$

$Q = (2,2,1)$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = z \frac{1/y}{x/y} = \frac{z}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z \frac{-x y^{-2}}{x/y} = -\frac{z}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \ln \frac{x}{y}$$

$\vec{PQ} = Q - P = (1,0,3)$

$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{10}$

$\vec{u} = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{z}{x}, -\frac{z}{y}, \ln\frac{x}{y}\right)$$

No ponto P obtém-se

$$\nabla f(1,2,-2) = \left(-2, 1, \ln\frac{1}{2}\right) = (-2,1,-\ln 2)$$

$$f'(P,\vec{u}) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} \iff$$

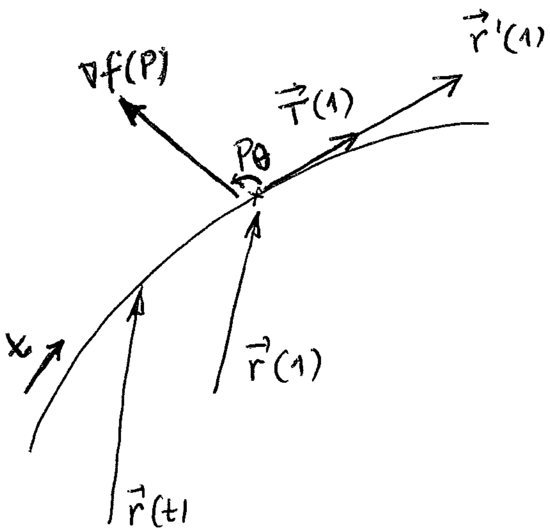
$$\iff f'\left[(1,2,-2) ; \frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)\right] = (-2,1,-\ln 2) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\left(-2+0-3\ln 2\right) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{10}} - \frac{3\ln 2}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{5} - 3\frac{\sqrt{10}}{10}\ln 2$$

$(\theta > \pi/2)$

9) $f(x,y,z) = x\, e^{y^2-z^2}$



$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y^2-z^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy\, e^{y^2-z^2}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -2xz\, e^{y^2-z^2}$

$\vec{r}(t) = (t, 2\cos(t-1), -2e^{t-1})$

$P = (1,2,-2) \Rightarrow \vec{r}(1) = P$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(e^{y^2-z^2}, 2xy\, e^{y^2-z^2}, -2xz\, e^{y^2-z^2}\right) =$$
$$= e^{y^2-z^2}(1, 2xy, -2xz)$$

Em P obtém-se

$$\nabla f(1,2,-2) = (1,4,4)$$

$\vec{r}\,'(t) = (1, -2\operatorname{sen}(t-1), -2e^{t-1})$

$\vec{r}\,'(1) = (1,0,-2)$ e $\|\vec{r}\,'(1)\| = \sqrt{5}$

$\vec{u} = \vec{T}(1) = \dfrac{\vec{r}\,'(1)}{\|\vec{r}\,'(1)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2) \rightarrow$ versor tangente à curva no ponto P

$$f'\left[(1,2,-2); \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)\right] = \nabla f(1,2,-2) \cdot \vec{T}(1) =$$
$$= (1,4,4) \cdot \left[\tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2)\right] = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1+0-8) =$$
$$= -\frac{7}{\sqrt{5}} = -\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

Concluindo $f'(P; \vec{T}(1)) = -\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ $(\theta > \pi/2)$

15)

Seja a função $f(x,y,z)$ diferenciável e contínua em todos os pontos do segmento de recta $[AB]$ e $f(A) = f(B)$.

Seja a parametrização do segmento de recta $[AB]$

$$\vec{r}(t) = A + t\,(B-A) \quad , \quad t \in [0,1]$$

em que $\quad A = \vec{r}(0) \quad$ e $\quad B = \vec{r}(1)$

Considere-se a função composta

$$g(t) = f[\vec{r}(t)] \quad , \quad t \in [0,1]$$

tal que $\quad g(0) = f(A) \quad$ e $\quad g(1) = f(B)$

Sendo $g(t)$ uma função contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $]0,1[$, tal que

$$g(0) = g(1)$$

o teorema de Rolle (para as funções reais de variável real) permite escrever

$$\exists_{t \in]0,1[} \; : \; g'(t) = 0$$

Sabendo que

$$g'(t) = \nabla f[\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}\,'(t) = \nabla f[\vec{r}(t)] \cdot (B-A)$$

então

$$\exists_{C \in [AB]} \; : \; 0 = \nabla f(C) \cdot (B-A)$$

ou ainda

$$\exists_{C \in [AB]} \; : \; \nabla f(C) \perp (B-A)$$

Wnij

16) $f(x,y,z) = 4xz - y^2 + z^2$

$A = (0,1,1)$

$B = (1,3,2)$

Parametrização do segmento de recta $[AB]$

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,2,1)$

$\vec{r}(t) = A + t\vec{v}\ ,\ t \in [0,1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = (0,1,1) + t\,(1,2,1)\ ,\ t \in [0,1] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{r}(t) = (t, 1+2t, 1+t)\ ,\ t \in [0,1]$

$f(B) = f(1,3,2) = 8 - 9 + 4 = 3$

$f(A) = f(0,1,1) = -1 + 1 = 0$

$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (4z, -2y, 4x + 2z)$

$C \in [AB] \Rightarrow C = (t, 1+2t, 1+t)\ ,\ t \in [0,1]$

$\nabla f(C) = \nabla f(t, 1+2t, 1+t) = (4+4t, -2-4t, 4t+2+2t) =$

$= (4+4t, -2-4t, 2+6t)$

$\nabla f(C) \cdot \vec{v} = 4+4t-4-8t+2+6t = 2+2t$

$f(B) - f(A) = \nabla f(C) \cdot \vec{v} \Leftrightarrow 3 = 2+2t \Leftrightarrow t = 1/2$

Então

$C = (1/2, 2, 3/2)$

Wair

18) $P = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

$$T(x,y) = \sqrt{2}\, e^{-y} \cos x$$

Admite-se que a trajectória da partícula na vizinhança de P é dada pela curva $y = f(x)$, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

cujo vector tangente é

$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t))$$

PROCESSO I

A condição a verificar é

$$\nabla T(x,y) = k\, \vec{r}\,'(t), \quad k > 0$$

(o vector gradiente tem a mesma direcção e sentido do vector tangente à curva, para que a partícula possa seguir um percurso a que corresponde a máxima variação positiva de temperatura)

$$\nabla T(x,y) = \left(-\sqrt{2}\, e^{-y} \operatorname{sen} x, -\sqrt{2}\, e^{-y} \cos x\right)$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \operatorname{sen} x(t) = k\, x'(t) \\ -\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \cos x(t) = k\, y'(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{-\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \operatorname{sen} x(t)}{x'(t)} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \cos x(t) = \dfrac{-\sqrt{2}\, e^{-y(t)} \operatorname{sen} x(t)}{x'(t)}\, y'(t) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ x'(t) \cos x(t) = y'(t) \operatorname{sen} x(t) \end{cases}$$

Da expressão anterior resulta

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Wug

Então

$$y = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

Como a curva passa no ponto $P = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, obtém-se

$$0 = \ln\left|\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right| + C \Leftrightarrow C = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}$$

Assim,

$$y = \ln|\operatorname{sen} x| + \ln\sqrt{2} = \ln\left(\sqrt{2}\,|\operatorname{sen} x|\right)$$

<u>PROCESSO II</u> (o problema em causa está no plano Oxy)

O vector tangente à curva tem a direcção do vector

$$\vec{u} = (1, f'(x))$$

O vector normal à curva, em cada ponto, será então

$$\vec{n} = (f'(x), -1)$$

Assim, a condição

$$\nabla T(x,y) = k\, \vec{r}\,'(t), \quad k > 0$$

pode ser substituída por

$$\nabla T(x,y) \perp \vec{n} \Leftrightarrow \nabla T(x,y) \cdot \vec{n} = 0$$

Então

$$(-\sqrt{2}\, e^{-y} \operatorname{sen} x, -\sqrt{2}\, e^{-y} \cos x) \cdot (y', -1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\, e^{-y} y' \operatorname{sen} x + \sqrt{2}\, e^{-y} \cos x = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

A partir deste momento o processo de resolução é idêntico ao considerado no processo de resolução anterior.

Wiz

19) $f(x,y,z) = z - xy$

Superfície: $z - xy = 0$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-y, -x, 1)$$

O plano tangente é horizontal $\Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 0$

Verifica-se no ponto $O = (0,0,0)$

$g(x,y,z) = 4x + 2y - x^2 + xy - y^2 - z$

Superfície: $g(x,y,z) = 0$

$$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (4 - 2x + y, 2 + x - 2y, -1)$$

O plano tangente é horizontal $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 - 2x + y = 0 \\ 2 + x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10/3 \\ y = 8/3 \end{cases}$$

A coordenada z do ponto é

$$\frac{40}{3} + \frac{16}{3} - \frac{100}{9} + \frac{80}{9} - \frac{64}{9} - z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{28}{3}$$

Verifica-se no ponto $P = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{28}{3}\right)$

Wej

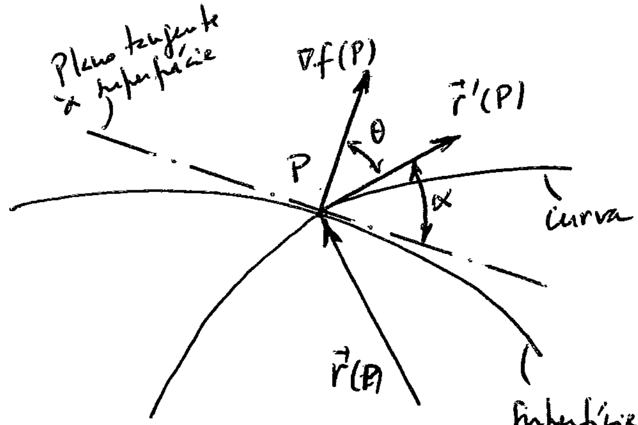
23) Curva:

$$\vec{r}(t) = (2t, 3t^{-1}, -2t^2), \ t > 0$$

$$\vec{r}\,'(t) = (2, -3t^{-2}, -4t)$$

$$P = (2, 3, -2) = \vec{r}(1)$$

$$\vec{r}\,'(P) = \vec{r}\,'(1) = (2, -3, -4)$$



Superfície: $f(x,y,z) = 25$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$$

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 6z)$$

$$\nabla f(P) = \nabla f(2,3,-2) = (4, 6, -12)$$

$$\cos\theta = \frac{|\nabla f(P) \cdot \vec{r}\,'(P)|}{\|\nabla f(P)\| \ \|\vec{r}\,'(P)\|} = \frac{|8 - 18 + 48|}{\sqrt{29}\ \sqrt{196}} = \frac{38}{14\sqrt{29}} = \frac{19}{7\sqrt{29}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{19\sqrt{29}}{203}$$

Então

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{19\sqrt{29}}{203}\right)$$

24) Seja $f(x,y,z) = x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2}$ e a superfície

$f(x,y,z) = \omega^{1/2}$, $\omega > 0$.

Ponto da superfície: $P = (x_0, y_0, z_0)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}, y^{-1/2}, z^{-1/2}\right)$$

O vector normal ao plano tangente à superfície em P é

$$\nabla f(P) = \nabla f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$$

Plano tangente à superfície em P

$$(X-P)\cdot \nabla f(P) = 0 \Leftrightarrow (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x_0}}, \frac{1}{\sqrt{y_0}}, \frac{1}{\sqrt{z_0}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = \frac{x_0}{\sqrt{x_0}} + \frac{y_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{z_0}{\sqrt{z_0}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = x_0^{1/2} + y_0^{1/2} + z_0^{1/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_0}}x + \frac{1}{\sqrt{y_0}}y + \frac{1}{\sqrt{z_0}}z = \omega^{1/2}$$

Ponto de intersecção do plano tangente com o eixo dos xx

$$I_x = \left(x_0^{1/2}\omega^{1/2}, 0, 0\right)$$

Ponto de intersecção do plano tangente com o eixo dos yy

$$I_y = \left(0, y_0^{1/2}\omega^{1/2}, 0\right)$$

Ponto de intersecção do plano tangente com o eixo dos zz

$$I_z = \left(0, 0, z_0^{1/2}\omega^{1/2}\right)$$

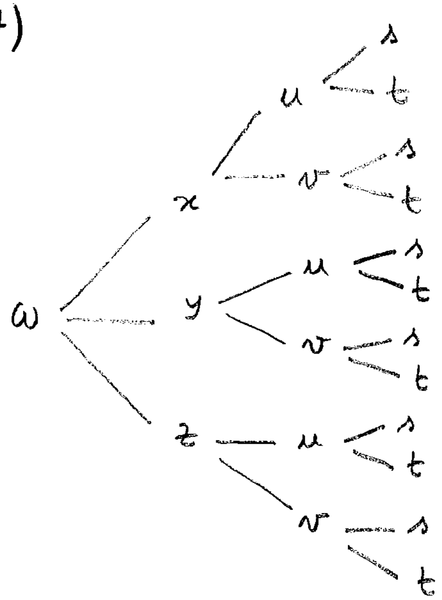
Então

$$x_0^{1/2}\omega^{1/2} + y_0^{1/2}\omega^{1/2} + z_0^{1/2}\omega^{1/2} = \omega^{1/2}\left(x_0^{1/2} + y_0^{1/2} + z_0^{1/2}\right) =$$

$$= \omega^{1/2}\omega^{1/2} = \omega$$

Wrig

27)



$w = w(x, y, z)$

$x = x(u, v)$

$y = y(u, v)$

$z = z(u, v)$

$u = u(s, t)$

$v = v(s, t)$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right) +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

De modo análogo, obtém-se

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right) +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)$$

28)

$$x + z + (y+z)^2 = 6 \longrightarrow z = f(x,y)$$

Cálculo de $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x+z+(y+z)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{1 + \frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial x}(y+z) = 0}_{(1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2y+2z)\frac{\partial z}{\partial x} = -1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{1+2y+2z}}$$

Cálculo de $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x+z+(y+z)^2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y} + 2\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)(y+z) = 0}_{(2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial y}(y+z) + 2(y+z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2y+2z)\frac{\partial z}{\partial y} = -2y-2z \Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y-2z}{1+2y+2z}}$$

Cálculo de $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Diferenciando a expressão (2) em ordem à variável x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)(y+z) + 2\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2y+2z)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+2y+2z)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2\left(1+\frac{-2y-2z}{1+2y+2z}\right)\frac{(-1)}{1+2y+2z} \Leftrightarrow$$

Vnij

$$\Leftrightarrow \quad (1+2y+2z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{2}{1+2y+2z} \quad \frac{1}{1+2y+2z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3}}$$

A função $z = f(x,y)$ diz-se regular se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

Calculando $\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$, diferenciando a expressão 1 em ordem à variável y, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(y+z) + 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+2y+2z)\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = -2\,\frac{\partial z}{\partial x}\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+2y+2z)\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{2}{1+2y+2z}\left(1 + \frac{-2y-2z}{1+2y+2z}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+2y+2z)\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{2}{1+2y+2z} \quad \frac{1}{1+2y+2z} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial z} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3}}$$

Assim, conclui-se que a função $z = f(x,y)$ é regular.

Sabendo que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y-2z}{1+2y+2z}$$

obtém-se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2y-2z}{1+2y+2z}\right) =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(-2y-2z)\,(1+2y+2z) - (-2y-2z)\frac{\partial}{\partial x}(1+2y+2z)}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{-2\frac{\partial z}{\partial x}(1+2y+2z) + (2y+2z)\, 2\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\left(-2-\cancel{4y}-\cancel{4z}+\cancel{4y}+\cancel{4z}\right)}{(1+2y+2z)^2} = \frac{-2\frac{\partial z}{\partial x}}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{-2\left(\frac{-1}{1+2y+2z}\right)}{(1+2y+2z)^2} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3}$$

Sabendo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{1+2y+2z}$$

obtém-se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-1}{1+2y+2z}\right) = \frac{-(-1)\frac{\partial}{\partial y}(1+2y+2z)}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{2+2\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+2y+2z)^2} = \frac{2+2\,\frac{-2y-2z}{1+2y+2z}}{(1+2y+2z)^2} =$$

$$= \frac{2(1+2y+2z)-4y-4z}{(1+2y+2z)^3} = \frac{2}{(1+2y+2z)^3}$$

A função $z = f(x,y)$ é regular, já que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$

29)

$$z = f(x,y)$$

$$e^{\cos z} \ln(z+1) = \operatorname{arctg}(2x+y)$$

Derivando em ordem a x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\cos z} \ln(z+1)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\cos z}\right) \ln(z+1) + e^{\cos z} \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(z+1)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\cos z)\, e^{\cos z} \ln(z+1) + e^{\cos z} \frac{\frac{\partial}{\partial x}(z+1)}{z+1} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}(-\operatorname{sen} z)\, e^{\cos z} \ln(z+1) + e^{\cos z} \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z+1} =$$

$$= e^{\cos z}\left(-\operatorname{sen} z \ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right) \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}(2x+y)\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} = \frac{2}{1+(2x+y)^2}$$

Considerando a derivada da expressão em ordem a x obtém-se:

$$e^{\cos z}\left(-\operatorname{sen} z \ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{1+(2x+y)^2}$$

No ponto $\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ obtém-se

$$e \, \frac{\partial z}{\partial x}\left(-\tfrac{1}{2}, 1, 0\right) = \frac{2}{1+0} \iff \frac{\partial z}{\partial x}\left(-\tfrac{1}{2}, 1, 0\right) = \frac{2}{e}$$

Wiz

Derivando em ordem a y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\cos z}\ln(z+1)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\cos z}\right)\ln(z+1) + e^{\cos z}\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(z+1)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(\cos z)\, e^{\cos z}\ln(z+1) + e^{\cos z}\,\frac{\frac{\partial}{\partial y}(z+1)}{z+1} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial y}(-\operatorname{sen} z)\, e^{\cos z}\ln(z+1) + e^{\cos z}\,\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{z+1} =$$

$$= e^{\cos z}\left(-\operatorname{sen} z\ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{arctg}(2x+y) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} = \frac{1}{1+(2x+y)^2}$$

Considerando a derivada da expressão em ordem a y obtém-se

$$e^{\cos z}\left(-\operatorname{sen} z\ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(2x+y)^2}$$

No ponto $\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ obtém-se

$$e\,\frac{\partial z}{\partial y}(-1/2, 1, 0) = \frac{1}{1+0} \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(-1/2, 1, 0) = \frac{1}{e}$$

Nuno

38 f)

$$f(x,y) = (x-y+1)^2$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2x-2y+2\,,\ -2x+2y-2\right) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ -x+y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ 0=0 \end{cases}$$

Pontos estacionários ao longo da recta $y = x+1$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ o teste é inconclusivo.

Verifica-se que

$$f(x, x+1) = 0$$

Notando que

$$f(x,y) = (x-y+1)^2 \geq 0$$

Conclui-se que ao longo da recta $y = x+1$ teremos um mínimo local de valor igual a zero.

Wij

38 k) $f(x,y) = e^x \cos y$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y\right) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y = 0 \\ -e^x \operatorname{sen} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \\ \operatorname{sen} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Impossível} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

A função não tem pontos estacionários (ausência de mínimos e de máximos locais).

l) $f(x,y) = x \operatorname{sen} y$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\operatorname{sen} y, x \cos y\right) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} y = 0 \\ x \cos y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \end{cases}$$

Pontos estacionários : $(0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \operatorname{sen} y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos y$$

$$\Delta(0, k\pi) = \begin{vmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{vmatrix} < 0 \Rightarrow \text{pontos de sela}$$

40) Recta $r: \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$ $O = (0,0,0) \in r$ $A = (1,2,3) \in r$ $\vec{a} = \vec{OA} = (1,2,3)$

Equação vectorial da recta r: $X(s) = s\vec{a} = s(1,2,3)$, $s \in \mathbb{R}$

Recta v : $\begin{cases} z = x \\ y = x+2 \end{cases}$ $B = (0,2,0) \in v$ $C = (1,3,1) \in v$ $\vec{b} = \vec{BC} = (1,1,1)$

Equação vectorial da recta v: $X(t) = B + t\vec{b} = (0,2,0) + t(1,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$

Seja $I_r = (s, 2s, 3s)$ um ponto situado na recta r

Seja $I_v = (t, t+2, t)$ um ponto situado na recta v

$I_v - I_r = (t-s, t-2s+2, t-3s)$

$\| I_v - I_r \|^2 = (t-s)^2 + (t-2s+2)^2 + (t-3s)^2$

Seja a função

$$f(t,s) = (t-s)^2 + (t-2s+2)^2 + (t-3s)^2$$

que traduz o quadrado da distância entre dois pontos genéricos situados nas rectas r e v (I_r e I_v).

A distância entre as duas rectas passa pela determinação do valor mínimo da função $f(t,s)$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2(t-s) + 2(t-2s+2) + 2(t-3s) = 6t - 12s + 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -2(t-s) - 4(t-2s+2) - 6(t-3s) = -12t + 28s - 8$$

$$\nabla f = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 3t - 6s = -2 \\ -3t + 7s = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -2/3 \\ s = 0 \end{cases}$$

Confirmemos que $(-2/3, 0)$ corresponde a um mínimo local:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = 28 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} = -12$$

$$\Delta(-2/3, 0) = \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 28 \end{vmatrix} > 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} > 0 \Rightarrow \text{mínimo local}$$

Vira

O mínimo local em $(-2/3, 0)$ tem o valor

$$f(-2/3, 0) = (-2/3)^2 + (-2/3 + 2)^2 + (-2/3)^2 =$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

A distância entre as rectas r e s é

$$d_{r,s} = \sqrt{f(-2/3, 0)} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

que corresponde à distância entre os pontos

$$I_r = O = (0,0,0) \in r$$

$$I_s = (-2/3, 4/3, -2/3) \in s$$

W.P.

Curso MIEIC Data / /

Disciplina CMAT Ano Semestre

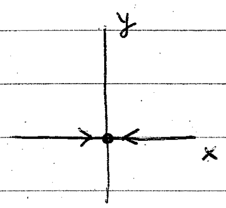
Nome

Espaço reservado para o avaliador AULA 4 : Ex°s Tratados - Ficha 2 : 4, 6, 8, 10, 9

Ex°s Propostos - ficha 2 : 1, 2, 5g), 7

4) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

a)

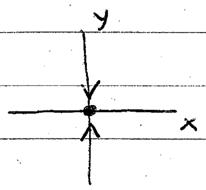


Eixo dos xx : $y=0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

b)

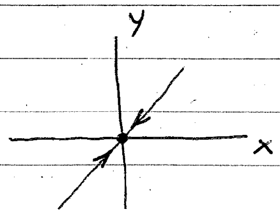


Eixo dos yy : $x=0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

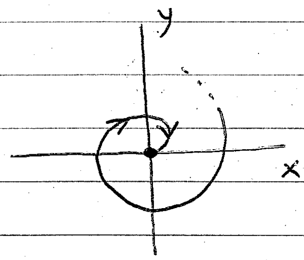
c)



Recta : $y = mx$, $m \neq 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

d)



Espiral : $r = \theta$, $\theta > 0$

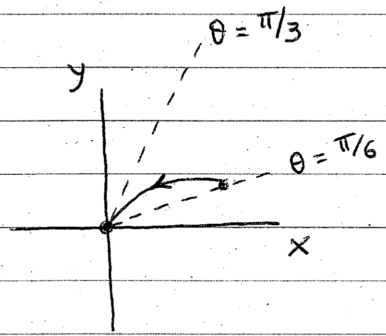
$$x = \theta \cos\theta$$

$$y = \theta \operatorname{sen}\theta$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=\theta\cos\theta\\ y=\theta\operatorname{sen}\theta}} f(x,y) = \lim_{\theta\to 0^+} f(\theta\cos\theta, \theta\operatorname{sen}\theta) =$$

$$= \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\theta^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\theta^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)} = \lim_{\theta\to 0^+} \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

e)



Arco : $r = \operatorname{sen}(3\theta)$, $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$

$$\theta = \pi/6 \Rightarrow r = 1$$

$$\theta = \pi/3 \Rightarrow r = 0$$

$$x = \operatorname{sen}(3\theta)\cos\theta$$

$$y = \operatorname{sen}(3\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=\operatorname{sen}(3\theta)\cos\theta\\ y=\operatorname{sen}(3\theta)\operatorname{sen}\theta}} f(x,y) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-} \frac{\operatorname{sen}^2(3\theta)\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}^2(3\theta)(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)} =$$

$$= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-} \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Papel 100% Reciclado

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

f) Curva : $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{\operatorname{sen} t}{t}\right), t>0$

$x = \frac{1}{t} \wedge y = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{-2}\operatorname{sen} t}{t^{-2}(1+\operatorname{sen}^2 t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{1+\operatorname{sen}^2 t} \Rightarrow$$

$x = t^{-1}$

$y = t^{-1}\operatorname{sen} t$ $\Rightarrow$ não existe limite

6) a) $f(x,y,z) = x e^y \operatorname{sen}(x+z)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^y \operatorname{sen}(x+z) + x e^y \cos(x+z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x e^y \operatorname{sen}(x+z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x e^y \cos(x+z)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

$$= e^y\left(\operatorname{sen}(x+z) + x\cos(x+z), x\operatorname{sen}(x+z), x\cos(x+z)\right)$$

b) $g(x,y,z) = (-x+2y)^5 + 2z^{-1}$

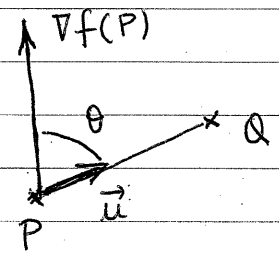
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = -5(-x+2y)^4$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 10(-x+2y)^4$

$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = -2z^{-2}$

$\nabla g(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \left(-5(-x+2y)^4, 10(-x+2y)^4, -2z^{-2}\right)$

8) $f(x,y,z) = z\ln\left(\frac{x}{y}\right)$ $(y \neq 0)$ $\wedge$ $(x/y > 0)$



$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = z\frac{1/y}{x/y} = \frac{z}{x}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = z\frac{-xy^{-2}}{x/y} = -\frac{z}{y}$

$P = (1,2,-2)$
$Q = (2,2,1)$
$\vec{PQ} = (1,0,3)$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{z}{x}, -\frac{z}{y}, \ln\left(\frac{x}{y}\right)\right)$

$\nabla f(1,2,-2) = (-2, 1, -\ln(2)) = \nabla f(P)$

Seja o versor $\vec{u} = \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,0,3)$

Então $f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P)\cdot\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-2-3\ln(2)) < 0$,

pelo que a função $f(x,y,z)$ tem um comportamento decrescente no ponto P segundo o versor $\vec{u}$ (na figura $\theta \in]\pi/2, \pi[$), ou na direcção do vector $\vec{PQ}$.

Wiri

Folha Nº 5 / 6

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

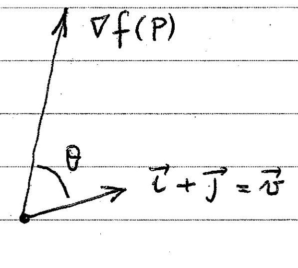
Espaço reservado para o avaliador

10) $f(x,y,z) = \left(x+y^2+z^3\right)^2, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2\left(x+y^2+z^3\right)$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 4y\left(x+y^2+z^3\right)$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 6z^2\left(x+y^2+z^3\right)$



$P = (1,-1,1)$

$\vec{v} = \vec{i}+\vec{j} = (1,1,0)$

$\nabla f(x,y,z) = 2\left(x+y^2+z^3\right)\left(1, 2y, 3z^2\right)$

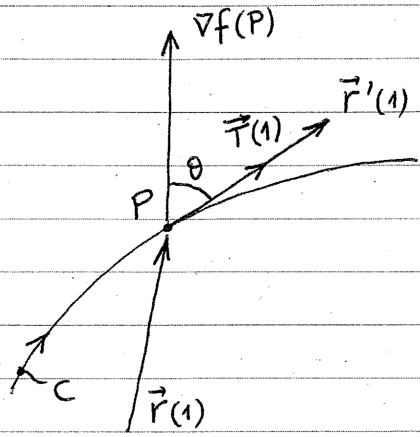
$\nabla f(P) = \nabla f(1,-1,1) = 2(3)(1,-2,3) = 6(1,-2,3)$

Seja o versor $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

Então $f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \dfrac{6}{\sqrt{2}}(-1) = -3\sqrt{2} < 0$, pelo que

a função $f(x,y,z)$ tem um comportamento decrescente no ponto P na direcção de $\vec{u}$ (ou do vector $\vec{v}$); na figura acima $\theta \in \left]\pi/2, \pi\right[$ (o produto escalar é negativo).

9) $f(x,y,z) = x\,e^{y^2-z^2}$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$



$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{y^2-z^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2xy\,e^{y^2-z^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2xz\,e^{y^2-z^2}$

$\nabla f(x,y,z) = e^{y^2-z^2}(1, 2xy, -2xz)$

Curva C : $\vec{r}(t) = (t, 2\cos(t-1), -2e^{t-1})$, $t\in\mathbb{R}$

$P = (1,2,-2) = \vec{r}(1)$

$\nabla f(P) = \nabla f(1,2,-2) = (1,4,4)$

Considere-se a linha tangente à curva C no ponto P, definida pelo vector tangente $\vec{r}\,'(1)$:

$$\vec{r}\,'(t) = (1, -2\,\mathrm{sen}(t-1), -2e^{t-1}) \Rightarrow \vec{r}\,'(1) = (1,0,-2)$$

O versor da tangente em P é : $\vec{T}(1) = \dfrac{\vec{r}\,'(1)}{\|\vec{r}\,'(1)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,0,-2) = \vec{u}$

Então $f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P)\cdot\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-7) = -\dfrac{7\sqrt{5}}{5} < 0$, pelo que

a função $f(x,y,z)$ tem um comportamento decrescente no ponto P na direcção de $\vec{u}$ (ou do vector $\vec{r}\,'(1)$) ; na figura acima $\theta \in\,]\pi/2, \pi[$ (o produto escalar é negativo).

Folha Nº 1 / 6

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEIC Data ../../..

Disciplina CMAT Ano ..... Semestre .....

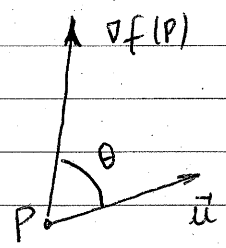
Nome .....

Espaço reservado para o avaliador

AULA 5 : Ex°s. Tratados - Ficha 2 : 11, 13, 20, 19, 21, 14 a)

Ex°s. Propostos - ficha 2 : 12, 22, 23.

11) $f(x,y) = y^2 e^{2x}, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$



$P = (0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y^2 e^{2x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\, e^{2x}$$

$$\nabla f(x,y,z) = 2y e^{2x} (y,1)$$

$$\nabla f(P) = \nabla f(0,1) = (2,2)$$

A derivada direccional de $f(x,y)$ no ponto P na direcção do versor $\vec{u}$ é dada por

$$f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(P)\| \, \|\vec{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(P)\| \cos\theta$$

onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\nabla f(P)$ e $\vec{u}$ (ver figura acima).

Assim, a taxa de variação de $f(x,y)$ em P será máxima, se $\cos\theta = 1$, ou seja, quando os vectores $\nabla f(P)$ e $\vec{u}$ forem colineares (paralelos) e tiverem o mesmo sentido. Então, para que tal sucede deverá verificar-se:

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

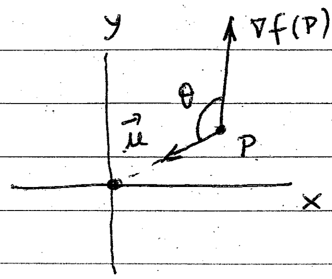
A taxa de variação de $f(x,y)$ em $P = (0,1)$ é máxima na direcção do vector $\nabla f(P)$, ou do versor $\vec{u}$; neste caso, o seu valor é

$$f'_{\vec{u}}(P) = \|\nabla f(P)\| = 2\sqrt{2}$$

13) $f(x,y) = \ln (x^2+y^2)^{1/2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}}{(x^2+y^2)^{1/2}} = \frac{y}{x^2+y^2}$$



$P = (x,y) \neq (0,0)$

$\vec{PO} = (-x,-y)$

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(x,y) = \nabla f(P)$$

Seja o vector $\vec{u} = \frac{\vec{PO}}{\|\vec{PO}\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-x,-y)$

Então $f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \frac{1}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}(-x^2-y^2) =$

$= \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} < 0$, pelo que a função $f(x,y)$ tem um comportamento decrescente no ponto P na direcção de $\vec{u}$ (da origem); na figura acima $\theta \in]\pi/2, \pi[$ (o produto escalar é negativo).

20) A superfície $x^2+y^2+z^2=3$ é uma superfície esférica centrada na origem e com raio igual a $\sqrt{3}$. Trata-se de uma superfície de nível da forma $f(x,y,z)=3$, em que

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

Então $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$

Assim, o vector normal à superfície em P é

$$\nabla f(P) = \nabla f(1,1,1) = (2,2,2)$$

sendo também um vector normal ao plano tangente à superfície em $P=(1,1,1)$.

Papel 100% Reciclado

Assim, a equação cartesiana do plano tangente à superfície em P é:

$$(x,y,z)\cdot\nabla f(P) = P\cdot\nabla f(P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x+2y+2z = 6 \Leftrightarrow x+y+z=3$$

19) O plano tangente a uma superfície é horizontal (paralelo ao plano coordenado xOy), se e só se o seu vector normal for colinear com o versor $\vec{k} = (0,0,1)$.

i) A superfície $z - xy = 0$ é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z) = 0$ em que $f(x,y,z) = z - xy$.

Então $\nabla f(x,y,z) = (-y,-x,1)$, pelo que o plano tangente à superfície é horizontal, se e só se

$$\begin{cases} -y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Substituindo na equação da superfície obtém-se $z = 0$. Assim, o único ponto da superfície onde o plano tangente é horizontal é a origem $O = (0,0,0)$.
Como $\nabla f(O) = (0,0,1)$ a equação cartesiana do plano tangente é

$$z = 0$$

ii) A superfície $4x+2y-x^2+xy-y^2-z=0$ é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z)=0$ em que

$$f(x,y,z)=4x+2y-x^2+xy-y^2-z$$

Então $\nabla f(x,y,z)=(4-2x+y,\,2+x-2y,\,-1)$

pelo que o plano tangente à superfície é horizontal, se e só se

$$\begin{cases}4-2x+y=0\\2+x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-y=4\\x-2y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=10/3\\y=8/3\end{cases}$$

Substituindo na equação da superfície obtém-se

$$z=4\left(\frac{10}{3}\right)+\frac{16}{3}-\frac{100}{9}+\frac{80}{9}-\frac{64}{9}=\frac{56}{3}-\frac{84}{9}=\frac{28}{3}$$

Assim, o único ponto da superfície onde o plano tangente é horizontal é o ponto

$$P=\left(\frac{10}{3},\frac{8}{3},\frac{28}{3}\right)$$

Como $\nabla f(P)=(0,0,-1)$ a equação cartesiana do plano tangente é

$$-z=-\frac{28}{3} \Leftrightarrow z=\frac{28}{3}$$

21) A superfície $xy+yz+xz=11$ é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z)=11$ em que

$$f(x,y,z)=xy+yz+xz$$

Então $\nabla f(x,y,z)=(y+z,\,x+z,\,y+x)$

Assim, o vector normal à superfície em $P=(1,2,3)$ é

$$\nabla f(P)=\nabla f(1,2,3)=(5,4,3)$$

sendo também um vector normal ao plano tangente à superfície em P.

A equação cartesiana do plano tangente à superfície em P é

$$(x,y,z) \cdot \nabla f(P) = P \cdot \nabla f(P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x + 4y + 3z = 22$$

Por outro lado, a equação vectorial da recta normal à superfície (perpendicular ao plano tangente) em P é

$$\vec{x}(t) = P + t\nabla f(P) = (1,2,3) + t\,(5,4,3)\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

14) a) $f(x,y,z) = x^2 + xy + yz$ e $P = (1,0,2)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x + z$

$$\nabla f(x,y,z) = (2x+y,\ x+z,\ y)$$

$$\nabla f(P) = \nabla f(1,0,2) = (2,3,0)$$

A definição da direcção sobre a qual se calculará a derivada direccional exige a determinação do versor da normal à superfície $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$ no ponto $P = (1,0,2)$. Esta superfície é uma superfície de nível da forma $g(x,y,z) = 3$ em que

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 6y + z$$

Então $\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y-6, 1)$

Assim, o vector normal à superfície $g(x,y,z) = 3$ em P é

$$\nabla g(P) = \nabla g(1,0,2) = (2,-6,1)$$

Seja o versor $\vec{u} = \dfrac{\nabla g(P)}{\|\nabla g(P)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{41}}(2,-6,1)$

Então $f'_{\vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{41}}(4-18) = \dfrac{-14\sqrt{41}}{41} < 0$,

pelo que a função $f(x,y,z)$ tem um comportamento decrescente no ponto P na direcção de $\vec{u}$ (ou do vector $\nabla g(P)$).

É evidente que se for considerado o versor $\vec{u}_1 = -\vec{u}$, também ele normal à superfície $g(x,y,z) = 3$ em P, a derivada direccional

$$f'_{\vec{u}_1}(P) = -f'_{\vec{u}}(P) = \frac{14\sqrt{41}}{41} > 0,$$ pelo que a

função $f(x,y,z)$ tem, neste caso, um comportamento crescente no ponto P na direcção de $\vec{u}_1$ (ou do vector $-\nabla g(P)$).

Papel 100% Reciclado

Folha Nº 1 / 9

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEIC Data / /

Disciplina CMAT Ano Semestre

Nome

Espaço reservado para o avaliador

AULA 6 : Ex°s Tratados : ficha 2 : 33, 29, 28, 30, 31

Ex°s Propostos : 25, 26, 27, 32

33) $xz^2 - yz^2 + xy^2z - 5 = 0$ e $z = f(x,y)$

Derivando a expressão em ordem a x:

$$z^2 + x\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) - y\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y^2z + xy^2\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2xz - 2yz + xy^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} = -z^2 - y^2z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-z(z+y^2)}{2xz - 2yz + xy^2}$$

Derivando a expressão em ordem a y:

$$x\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}\right) - z^2 - y\left(2z\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2xyz + xy^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2xz - 2yz + xy^2\right)\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - 2xyz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z(z-2xy)}{2xz - 2yz + xy^2}$$

Determinemos as coordenadas z (cotas) dos pontos da superfície tais que $x=3$ e $y=1$; substituindo estes valores na expressão que define a superfície obtém-se

$$3z^2 - z^2 + 3z - 5 = 0 \Leftrightarrow 2z^2 + 3z - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 \;\vee\; z = -\dfrac{5}{2}$, pelo que

existem dois pontos: $P = (3,1,1)$ e $P_1 = (3,1,-\frac{5}{2})$.

Assim, obtém-se para o ponto P

$$\frac{\partial z}{\partial x}(3,1,1) = \frac{-2}{7} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(3,1,1) = -\frac{5}{7}$$

e para o ponto P_1

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(3,1,-\frac{5}{2}\right) = \frac{-15/4}{-7} = \frac{15}{28} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\left(3,1,-\frac{5}{2}\right) = \frac{85/4}{-7} = -\frac{85}{28}$$

29) $e^{\cos(z)} \ln(z+1) = \operatorname{arctg}(2x+y)$ e $z = f(x,y)$

Derivando a expressão em ordem a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{\cos(z)}\right] \ln(z+1) + e^{\cos(z)} \frac{\partial}{\partial x}\left[\ln(z+1)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{arctg}(2x+y)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(z)\right] e^{\cos(z)} \ln(z+1) + e^{\cos(z)} \frac{\frac{\partial}{\partial x}(z+1)}{z+1} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial z}{\partial x} \operatorname{sen}(z)\, e^{\cos(z)} \ln(z+1) + e^{\cos(z)} \frac{\partial z/\partial x}{z+1} = \frac{2}{1+(2x+y)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\cos(z)} \left(-\operatorname{sen}(z) \ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{1+(2x+y)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{e^{\cos(z)}\left(-\operatorname{sen}(z)\ln(z+1) + \frac{1}{z+1}\right)\left[1+(2x+y)^2\right]}$$

Papel 100% Reciclado

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

Derivando a expressão em ordem a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\cos(z)}\right]\ln(z+1)+e^{\cos(z)}\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln(z+1)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{arctg}(2x+y)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos(z)\right]e^{\cos(z)}\ln(z+1)+e^{\cos(z)}\frac{\frac{\partial}{\partial y}(z+1)}{z+1}=\frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)}{1+(2x+y)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}(z)\,e^{\cos(z)}\ln(z+1)+e^{\cos(z)}\frac{\partial z/\partial y}{z+1}=\frac{1}{1+(2x+y)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\cos(z)}\left(-\operatorname{sen}(z)\ln(z+1)+\frac{1}{z+1}\right)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+(2x+y)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e^{\cos(z)}\left(-\operatorname{sen}(z)\ln(z+1)+\frac{1}{z+1}\right)\left[1+(2x+y)^2\right]}$$

Então, obtém-se para o ponto $P=\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(-\tfrac{1}{2},1,0\right)=\frac{2}{e(0+1)(1)}=\frac{2}{e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(-\tfrac{1}{2},1,0\right)=\frac{1}{e(0+1)(1)}=\frac{1}{e}$$

28) $x + z + (y+z)^2 = 6$ e $z = f(x,y)$

Derivando a expressão em ordem a x:

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y+z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-1}{1+2(y+z)} \quad (1)$$

Derivando a expressão em ordem a y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(y+z)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} + 2(y+z)\frac{\partial}{\partial y}(y+z) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} + 2(y+z)\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}\left(1 + 2(y+z)\right) = -2(y+z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2(y+z)}{1+2(y+z)} \quad (2)$$

Derivando a expressão (1) em ordem a y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{-1}{1+2(y+z)}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{-(-1)\frac{\partial}{\partial y}(1+2y+2z)}{\left[1+2(y+z)\right]^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2 + 2\frac{\partial z}{\partial y}}{\left[1+2(y+z)\right]^2}$$, substituindo a expressão (2),

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2\left[1+2\cancel{(y+z)}\right] + 2\left[\cancel{-2(y+z)}\right]}{\left[1+2(y+z)\right]^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{\left[1+2(y+z)\right]^3}$$

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano ...... Semestre ......

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

Derivando a expressão (2) em ordem a x:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{-2(y+z)}{1+2(y+z)}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2\frac{\partial}{\partial x}(y+z)\left[1+2(y+z)\right] + 2(y+z)\frac{\partial}{\partial x}(1+2y+2z)}{\left[1+2(y+z)\right]^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2\frac{\partial z}{\partial x}\left[1+\cancel{2(y+z)}\right] + \cancel{2(y+z)}(2)\frac{\partial z}{\partial x}}{\left[1+2(y+z)\right]^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-2\frac{\partial z}{\partial x}}{\left[1+2(y+z)\right]^2}$$, substituindo a expressão (1),

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{\left[1+2(y+z)\right]^3}$$

Convém notar que, neste caso, se verifica que $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}$ uma vez que as derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial y \partial z}$ são funções contínuas em todos os pontos onde estão definidas, isto é, em todos os pontos de $\mathbb{R}^3$ excepto nos pontos onde $1+2(y+z)=0$

30) $x\ln(y) + y^2 z + z^2 = 6$ e $z = f(x,y)$

Derivando a expressão em ordem a x:

$$\ln(y) + y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\ln(y)}{y^2+2z} \quad (1)$$

Derivando a expressão em ordem a y:

$$x\left(\frac{1}{y}\right) + 2yz + y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x/y - 2yz}{y^2+2z} = \frac{-x-2y^2z}{y^3+2yz} \quad (2)$$

Derivando a expressão (1) em ordem a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-\ln(y)}{y^2+2z}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{-\frac{1}{y}(y^2+2z) + \ln(y)\frac{\partial}{\partial y}(y^2+2z)}{(y^2+2z)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{-(y^2+2z) + y\ln(y)\left(2y + 2\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{y(y^2+2z)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{-(y^2+2z) + 2y^2\ln(y) + 2y\ln(y)\frac{\partial z}{\partial y}}{y(y^2+2z)^2} \quad (3)$$

Derivando a expressão (2) em ordem a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x-2y^2z}{y^3+2yz}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(-x-2y^2z)(y^3+2yz) + (x+2y^2z)\frac{\partial}{\partial x}(y^3+2yz)}{(y^3+2yz)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\left(-1-2y^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)(y^3+2yz)+(x+2y^2z)\left(2y\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{(y^3+2yz)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-y^3-2yz-2y^5\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial x}}{(y^3+2yz)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-y^3-2yz-2y(y^4-x)\frac{\partial z}{\partial x}}{(y^3+2yz)^2} \qquad (4)$$

Assim, as derivadas parciais de primeira ordem em $P=(1,1,2)$ são:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1,2) = \frac{0}{5} = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1,2) = \frac{-1-4}{5} = -1 \qquad (6)$$

Recorrendo a (6) e à expressão (3) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(1,1,2) = \frac{-5+0+0}{25} = -\frac{1}{5}$$

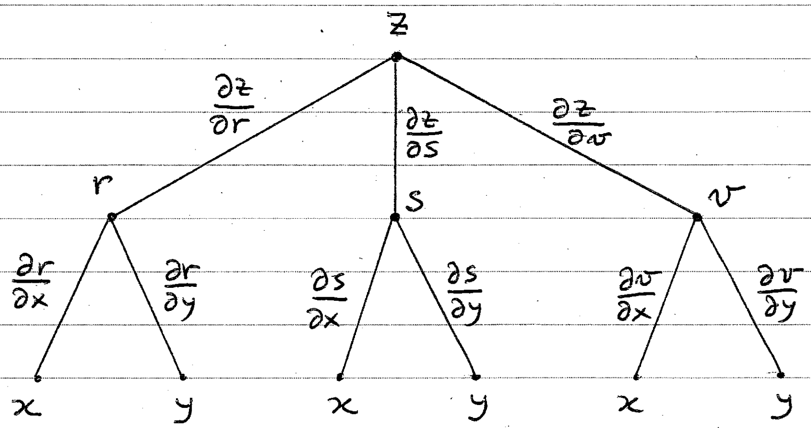
Recorrendo a (5) e à expressão (4) obtém-se:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1,2) = \frac{-1-4-2(0)}{25} = -\frac{1}{5}$$

31) $z(r,s,v) = \dfrac{r+s}{v}$ em que

$r(x,y) = x\cos(y)$, $s(x,y) = y\,\text{sen}(x)$, $v(x,y) = 2x - y$

Considere-se o diagrama de árvore



Sabe-se que:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{v} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{1}{v} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{r+s}{v^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(y) \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -x\,\text{sen}(y)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = y\cos(x) \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \text{sen}(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Então:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos(y)}{v} + \frac{y\cos(x)}{v} - 2\,\frac{r+s}{v^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\cos(y) + y\cos(x)}{2x-y} - 2\,\frac{x\cos(y) + y\,\text{sen}(x)}{(2x-y)^2}$$

Folha Nº 9 / 9

U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano ...... Semestre ......

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x \operatorname{sen}(y)}{v} + \frac{\operatorname{sen}(x)}{v} + \frac{r+s}{v^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x)}{2x-y} + \frac{x\cos(y) + y\operatorname{sen}(x)}{(2x-y)^2}$$

Folha Nº 1 / 10

U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso MIEIC Data / /

Disciplina CMAT Ano Semestre

Nome

Espaço reservado para o avaliador

AULA 7 : Ex°s Tratados - ficha 2 : 34, 38 a) d) e) i), 41, 39

Ex°s Propostos - ficha 2 : 37, 38 b) c) f) h) k), 40

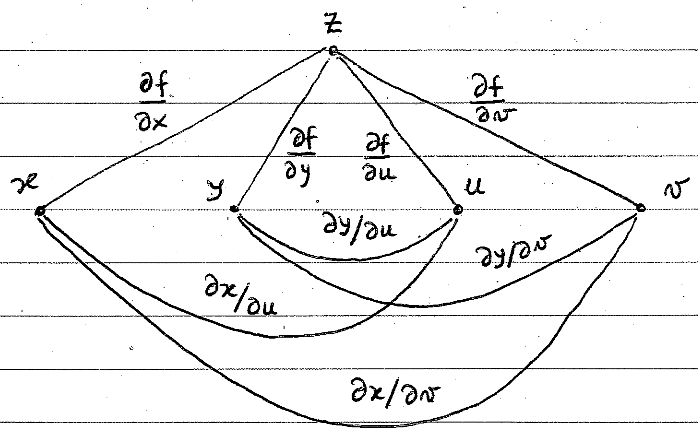
34) $z = f(y, x, v, u)$ em que

$$f(y, x, v, u) = x + \ln(u) + (y+v)^2$$

$$x(u,v) = 2u + 3v$$

$$y(u,v) = \cos(u) + \operatorname{sen}(v)$$

Considere-se o diagrama de árvore



Sabe-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+v) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 2(y+v) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 3 \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 2 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \cos(v) \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\operatorname{sen}(u)$$

Então:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = 2(y+v)(-\text{sen}(u)) + (1)(2) + \frac{1}{u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = -2\,\text{sen}(u)\left(v + \cos(u) + \text{sen}(v)\right) + 2 + \frac{1}{u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = 2(y+v)\cos(v) + (1)(3) + 2\cdot(y+v) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = 2(y+v)\left(1+\cos(v)\right) + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial v} = 2\left(1+\cos(v)\right)\left(v + \cos(u) + \text{sen}(v)\right) + 3$$

EXTREMOS LOCAIS - RESUMO

Seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis.

Pontos Críticos → pontos onde:

i) $\nabla f(x,y) = 0$

↓

Pontos Estacionários

Neste caso a classificação é feita recorrendo ao teste das derivadas parciais de segunda ordem

ii) $\nabla f(x,y)$ não existe

Neste caso a classificação do ponto crítico tem de ser feita estudando o comportamento da função na vizinhança desse ponto.

No caso presente apenas nos centraremos no problema da classificação de um ponto estacionário. Existem três situações que podem ocorrer: mínimo local, máximo local e ponto de sela (ponto onde a função não tem um comportamento uniforme ao longo de todas as direcções que passam nesse ponto).

Se (x_0, y_0) é um ponto estacionário, o teste das derivadas parciais de segunda ordem envolve o cálculo do determinante:

$$\Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

onde se admitiu que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = B$

Então;

i) $\Delta < 0$, (x_0,y_0) é um <u>ponto de sela</u>;

ii) $\Delta > 0$ e $A > 0$, $f(x,y)$ possui um <u>mínimo local</u> em (x_0,y_0);

iii) $\Delta > 0$ e $A < 0$, $f(x,y)$ possui um <u>máximo local</u> em (x_0,y_0);

iv) $\Delta = 0$, o teste é inconclusivo; a classificação é feita analisando o comportamento da função na vizinhança de (x_0,y_0)

38) a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = (0,0) \Leftrightarrow x = y = 0$

Ponto Estacionário : $O = (0,0)$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ então

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

No ponto $O = (0,0)$:

$\Delta = AC - B^2 = 4 > 0$ e $A > 0$.

A função tem um mínimo local (neste caso, é um mínimo absoluto) em $O = (0,0)$ tendo o valor $f(0,0) = 0$.

NOTA : A superfície $z = f(x,y) = x^2 + y^2$ é um parabolóide virado para cima (na direcção do semieixo positivo dos zz) pelo que o ponto $O = (0,0)$ corresponde, de facto, a um ponto onde $f(x,y)$ possui um mínimo local (absoluto).

38) d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \\ y^3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^9 - y = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^8 - 1) = 0 \\ x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}$

Pontos Estacionários : $O = (0,0)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (-1,-1)$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$ então

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$$

i) No ponto $O = (0,0)$:

$$\Delta = AC - B^2 = 0 - (-4)^2 = -16 < 0$$

A função tem um ponto de sela em $O = (0,0)$.

ii) No ponto $P_1 = (1,1)$:

$$\Delta = 12(12) - (-4)^2 = 128 > 0 \quad e \quad A = 12 > 0$$

A função tem um mínimo local em $P_1 = (1,1)$ tendo o valor $f(1,1) = -2$.

iii) No ponto $P_2 = (-1,-1)$:

$$\Delta = 12(12) - (-4)^2 = 128 > 0 \quad e \quad A = 12 > 0$$

A função tem um mínimo local em $P_2 = (-1,-1)$ tendo o valor $f(-1,-1) = -2$.

Neste caso, como $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$, estes pontos correspondem a mínimos absolutos.

38) e) $f(x,y) = 1-(x-1)^2-y^2 = -x^2-y^2+2x$

$\nabla f(x,y) = (-2x+2, -2y) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+1=0 \\ -y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Ponto Estacionário : $P=(1,0)$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x+2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ então

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

No ponto $P=(1,0)$:

$\Delta = AC - B^2 = (-2)(-2) - 0 = 4 > 0$ e $A < 0$

A função tem um máximo local (neste caso, é um máximo absoluto) em $P=(1,0)$ tendo o valor $f(1,0) = 1$.

38) i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

$\nabla f(x,y) = (3x^2-6y, 3y^2-6x) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2y=0 \\ y^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4-8y=0 \\ x=y^2/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^3-8)=0 \\ x=y^2/2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Pontos Estacionários : $O=(0,0)$, $P=(2,2)$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-6y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2-6x$ então

$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6$

No ponto $O = (0,0)$:

$\Delta = AC - B^2 = 0 - (-6)^2 = -36 < 0$

A função tem um ponto de sela em $O = (0,0)$.

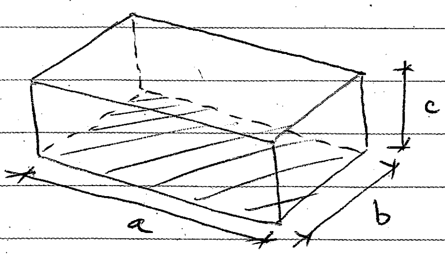
No ponto $P = (2,2)$

$\Delta = 12(12) - (-6)^2 = 108 > 0$ e $A = 12 > 0$

A função tem um mínimo local (neste caso, é um mínimo absoluto) em $P = (2,2)$ tendo o valor $f(2,2) = -8$.

41)

Volume:



$V = abc = 96 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = \frac{96}{ab}$

Custo da base da caixa: $0,3\,ab$

Custo das faces laterais da caixa: $2(0,1)\,bc + 2(0,1)\,ac =$

$= 0,2\,\cancel{b}\,\frac{96}{a\cancel{b}} + 0,2\,\cancel{a}\,\frac{96}{\cancel{a}b} = 19,2\,a^{-1} + 19,2\,b^{-1}$

função que define o custo da caixa:

$$f(a,b) = 0{,}3\,ab + 19{,}2\,a^{-1} + 19{,}2\,b^{-1}$$

Pretende-se encontrar o "ponto" (a,b) onde a função possui um mínimo local (absoluto).

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b}\right) = \left(0{,}3b - \frac{19{,}2}{a^2}, 0{,}3a - \frac{19{,}2}{b^2}\right) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}3b - \dfrac{19{,}2}{a^2} = 0 \\ 0{,}3a - \dfrac{19{,}2}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - \dfrac{64}{a^2} = 0 \\ a - \dfrac{64}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 64 \\ ab^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 64 \\ ab^2 = a^2 b \end{cases} \underset{(a \neq 0)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a^2 b = 64 \\ b^2 - ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 b = 64 \\ b(b-a) = 0 \end{cases} \underset{(b \neq 0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 64 \\ b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

pelo que $c = \dfrac{96}{16} = 6$ e

$$f(4,4) = 0{,}3\,(16) + \frac{19{,}2}{4} + \frac{19{,}2}{4} = 4{,}8 + 2\,(4{,}8) = 14{,}4\ €$$

Confirmemos que $a = b = 4$ corresponde a um mínimo local (absoluto) da função:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = \frac{38{,}4}{a^3}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = \frac{38{,}4}{b^3}, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a} = 0{,}3$$

No "ponto" $(4,4)$ verifica-se:

$$\Delta = AC - B^2 = \frac{(38{,}4)^2}{2\,(64)^2} - (0{,}3)^2 = 0{,}09 > 0 \quad \text{e} \quad A = \frac{38{,}4}{64} = 0{,}6 > 0$$

Efectivamente, a função tem um mínimo local (absoluto) em $(4,4)$.

[signature]

Folha Nº 9 / 10

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

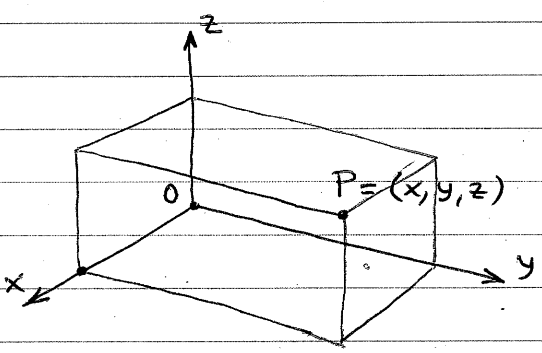
Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

39)

O ponto P está situado no plano $x+y+z=1$.



Volume do prisma:

$$V = xyz \quad \wedge \quad x+y+z=1$$

A função que define o volume do prisma é:

$$f(x,y) = xy(1-x-y) = xy - x^2y - xy^2$$

Pretende-se encontrar o "ponto" (x,y) onde a função possui um máximo local (absoluto).

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(y - 2xy - y^2,\ x - x^2 - 2xy\right) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = y - y^2 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(x \neq 0 \wedge y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 - y \\ 1 - x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 1 - x - 2(1-2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ -1 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 1/3 \end{cases}$$

pelo que $z = 1 - 1/3 - 1/2 = 1/3$ e

$$f(1/3, 1/3) = \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{27} = \frac{1}{27} \quad \text{(volume)}$$

Confirmemos que $x = y = 1/3$ corresponde a um máximo local (absoluto) de função:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \ , \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \ , \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 - 2x - 2y$$

No "ponto" $(1/3, 1/3)$ verifica-se:

$$\Delta = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} > 0 \quad e \quad A = -\frac{2}{3} < 0$$

Efectivamente, a função tem um máximo local (absoluto) em $(1/3, 1/3)$.

Wij