FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso: MIEIC — Data: /06/21

Disciplina: Complementos de Matemática — Ano: 1 — Semestre: 2º

Nome: José Augusto Trigo Barbosa (Regente)

Espaço reservado para o avaliador

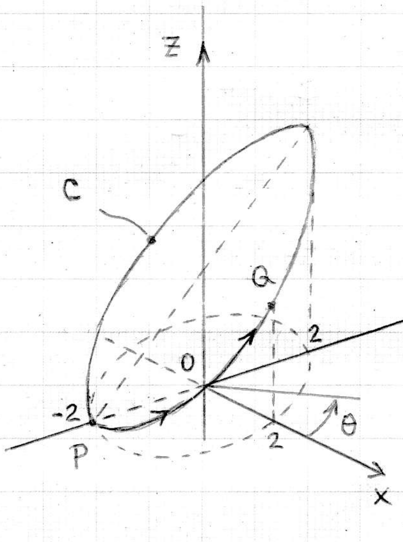
Descritores de desempenho considerados como critérios de correção da 2ª Prova de Reavaliação em 28/06/2021

PERGUNTA 1:

Alínea a)

1. Esboço da curva C:

$$C: \begin{cases} x^2+y^2=4 & \text{(cilindro)} \\ z=2+y & \text{(plano paralelo ao eixo dos } xx\text{)} \end{cases}$$



$x = 2\cos(\theta)$

$y = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$

$z = 2 + 2\,\mathrm{sen}(\theta)$

2. Parametrização da curva C:

$$C: \vec{r}(\theta) = (2\cos(\theta),\ 2\,\mathrm{sen}(\theta),\ 2+2\,\mathrm{sen}(\theta)),\quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Alínea b)

1. Identificação de P e Q sobre a curva:

$$P = (0,-2,0) = \vec{r}(3\pi/2)$$

$$Q = (2,0,2) = \vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi)$$

2. Cálculo do integral de linha (trabalho):

$$\vec{r}\,'(\theta) = (-2\,\mathrm{sen}(\theta),\ 2\cos(\theta),\ 2\cos(\theta))$$

$$\vec{f}\,[\vec{r}(\theta)] = (-2,\ 2\,\mathrm{sen}(\theta),\ -2\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$$\vec{f}\,[\vec{r}(\theta)] \cdot \vec{r}\,'(\theta) = 4\,\mathrm{sen}(\theta) + \cancel{4\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)} - \cancel{4\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)} = 4\,\mathrm{sen}(\theta)$$

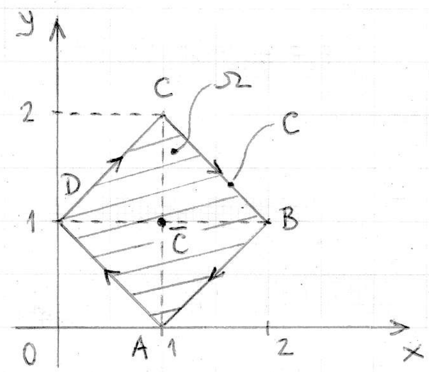
$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} \vec{f}\,[\vec{r}(\theta)] \cdot \vec{r}\,'(\theta)\, d\theta = 4 \int_{3\pi/2}^{2\pi} \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta = 4\left[-\cos(\theta)\right]_{3\pi/2}^{2\pi} = 4(-1+0) = -4$$

PERGUNTA 2:

1. Esboço da linha C:

Centroide de Ω (quadrado):

$\bar{C} = (1,1) = (\bar{x}, \bar{y})$



2. Cálculo do integral de linha recorrendo ao teorema de Green

$$\vec{f}(x,y) = (P, Q) = (y^2, 2x^2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4x - 2y$$

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -\iint_\Omega (4x - 2y)\,dx\,dy = -4\iint_\Omega x\,dx\,dy + 2\iint_\Omega y\,dx\,dy$$

i) Cálculo do integral duplo recorrendo ao centróide da região Ω:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -4 \iint_\Omega x\,dx\,dy + 2 \iint_\Omega y\,dx\,dy =$$

$$= -4\,\bar{x}\,A(\Omega) + 2\,\bar{y}\,A(\Omega) =$$

$$= -4\,A(\Omega) + 2\,A(\Omega) = -2\,A(\Omega)$$

em que $A(\Omega)$ é a área da região Ω.
Sabendo que o lado do quadrado tem o valor

$$\overline{AB} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

então $A(\Omega) = (\sqrt{2})^2 = 2$, e, portanto,

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -2\,(2) = -4$$

ii) Cálculo do integral duplo recorrendo ao método dos integrais iterados:

Considerando $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, em que

$$\Omega_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 1-x \leq y \leq 1+x\}$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ x-1 \leq y \leq 3-x\}$$

então

$$\iint_\Omega x\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} x\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} x\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} x\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{x-1}^{3-x} x\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 2x^2\,dx + \int_1^2 (4x - 2x^2)\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^1 + \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{2}{3} + \left[8 - \frac{16}{3} - 2 + \frac{2}{3}\right] = 6 - 4 = 2$$

$$\iint_{\Omega} y\,dx\,dy = \iint_{\Omega_1} y\,dx\,dy + \iint_{\Omega_2} y\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \int_{1-x}^{1+x} y\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{x-1}^{3-x} y\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^{1+x} dx + \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x-1}^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left[(x+1)^2 - (1-x)^2\right] dx + \int_1^2 \frac{1}{2}\left[(3-x)^2 - (x-1)^2\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (4x)\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 (8-4x)\,dx =$$

$$= \left[x^2\right]_0^1 + \left[4x - x^2\right]_1^2 = 1 + (8-4-4+1) = 2$$

Concluindo:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = -4(2) + 2(2) = -4$$

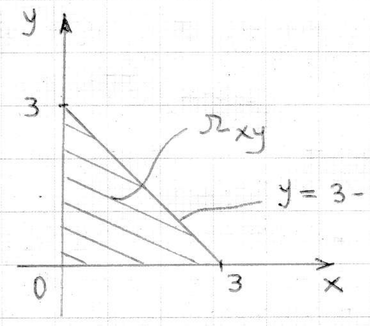
PERGUNTA 3:

Alínea a)

Parametrização de S (coordenadas cartesianas):

$$S : \vec{r}(x,y) = \left(x, y, 1+\sqrt{x^2+y^2}\right), \quad (x,y) \in \Omega_{xy}$$

$$\Omega_{xy} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3-x\}$$



Alínea b)

Cálculo da área de S

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}(x,y) = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}(x,y) = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\vec{N}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

$$\|\vec{N}(x,y)\| = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} + 1} = \sqrt{2}$$

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_{\Omega_{xy}} \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2} \iint_{\Omega_{xy}} dx\, dy =$$

$$= \sqrt{2}\, A(\Omega_{xy})$$

em que $A(\Omega_{xy})$ é a área da região triangular Ω_{xy}.
Sabendo que

$$A(\Omega_{xy}) = \frac{3(3)}{2} = \frac{9}{2}$$

então $$A(S) = \sqrt{2}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

Wr

PERGUNTA 4:

Alínea a)

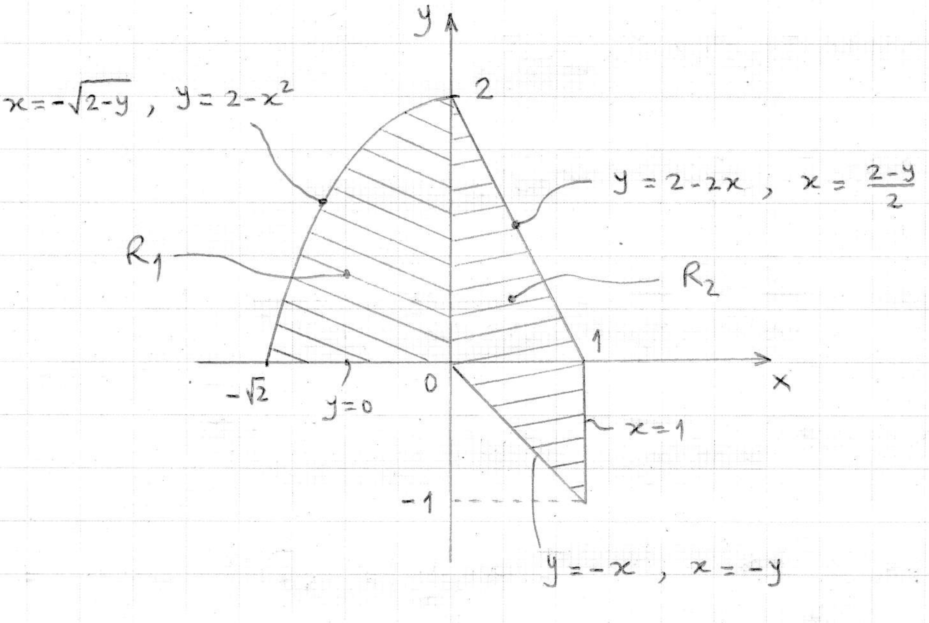
1. Identificação de R:

$$R = R_1 \cup R_2 \text{ , em que}$$

$$R_1 = \{(x,y) : -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \text{ , } 0 \leq y \leq 2-x^2\}$$

$$R_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ , } -x \leq y \leq 2-2x\}$$

2. Esboço de R:



Alínea b)

1. Definição do domínio de integração:

$$R = R_3 \cup R_4 \text{ , em que}$$

$$R_3 = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 2 \text{ , } -\sqrt{2-y} \leq x \leq \frac{2-y}{2}\} .$$

$$R_4 = \{(x,y) : -1 \leq y \leq 0 \text{ , } -y \leq x \leq 1\}$$

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

2. Reescrita do integral duplo:

$$\iint_R f(x,y)\,dy\,dx = \iint_{R_3} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_4} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^2 \int_{-\sqrt{2-y}}^{\frac{2-y}{2}} (x)\,dx\,dy + \int_{-1}^{0} \int_{-y}^{1} (x)\,dx\,dy$$

PERGUNTA 5:

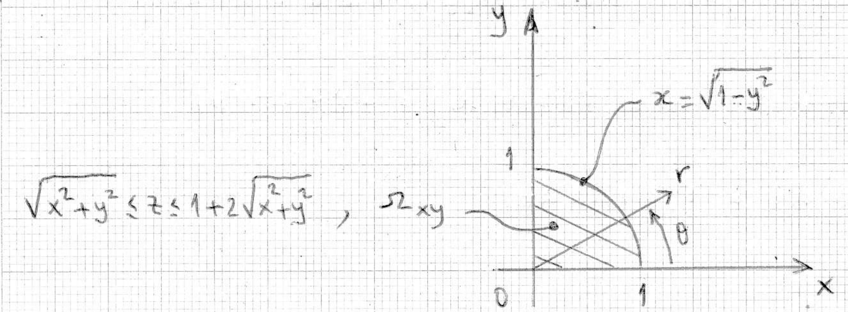
Alínea a)

1. Definição do domínio de integração V:

$$V = \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega_{xy} \;,\; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1+2\sqrt{x^2+y^2}\}$$

$$\Omega_{xy} = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1 \,,\, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

2. Esboço da projecção de V no plano Oxy (Ω_{xy}):



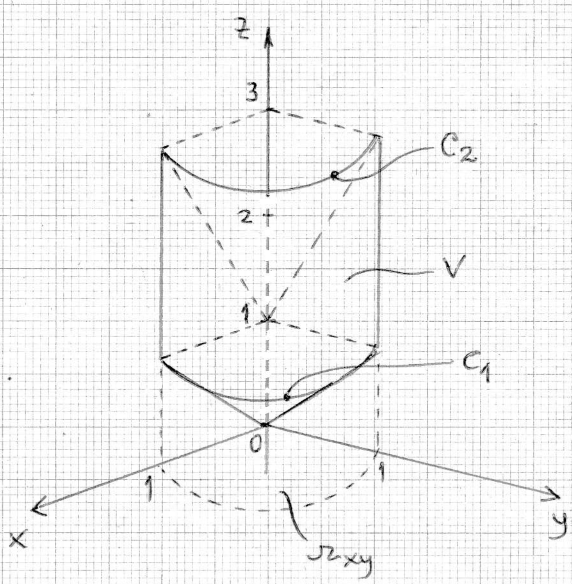
3. Esboço do domínio de integração V:

Curva de intersecção C_1:

$$C_1 : \begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} & (\text{cilindro}) \\ z = \sqrt{x^2+y^2} & (\text{cone}) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Curva de intersecção C_2

$$C_2 : \begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} & (\text{cilindro}) \\ z = 1+2\sqrt{x^2+y^2} & (\text{cone}) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ z = 3 \end{cases}$$



Alínea b)

$$\Omega_{xy} \longrightarrow \Omega_{r\theta} = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \pi/2 \,,\, 0 \le r \le 1\}$$

$$V \leadsto \Pi = \{(r,\theta,z) : (r,\theta) \in \Omega_{r\theta} \,,\, r \le z \le 1+2r\}$$

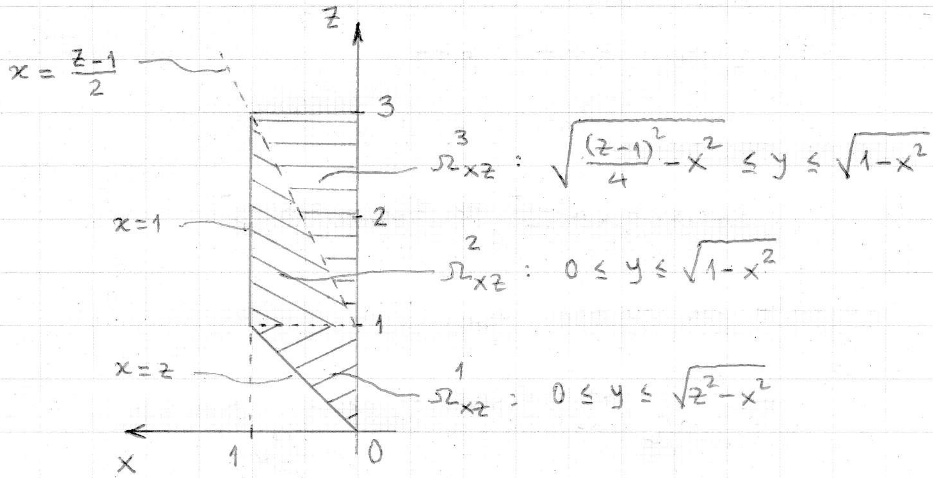
$$f(x,y,z) = -xz \leadsto f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), z) = -rz\cos(\theta)$$

$$dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^{1+2r} \left(-r^2 z\cos(\theta)\right)\,dz\,dr\,d\theta$$

PERGUNTA 6 :

1. Esboço da projecção de V no plano Oxz (Ω_{xz}):



2. Definição do domínio de integração V:

$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, em que

$$V_1 = \left\{ (x,y,z) : (x,z)\in\Omega^1_{xz} ,\ 0\le y\le \sqrt{z^2-x^2} \right\}$$

$$\Omega^1_{xz} = \left\{ (x,z) : 0\le z\le 1 ,\ 0\le x\le z \right\}$$

$$V_2 = \left\{ (x,y,z) : (x,z)\in\Omega^2_{xz} ,\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2} \right\}$$

$$\Omega^2_{xz} = \left\{ (x,z) : 1\le z\le 3 ,\ \frac{z-1}{2}\le x\le 1 \right\}$$

$$V_3 = \{ (x,y,z) : (x,z) \in \Omega^3_{xz} , \sqrt{\frac{(z-1)^2}{4} - x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \}$$

$$\Omega^3_{xz} = \{ (x,z) : 1 \leq z \leq 3 , 0 \leq x \leq \frac{z-1}{2} \}$$

3. Reescrita do integral triplo:

$$\iiint_V f(x,y,z) \, dz \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^z \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} (-xz) \, dy \, dx \, dz +$$

$$+ \int_1^3 \int_{\frac{z-1}{2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (-xz) \, dy \, dx \, dz + \int_1^3 \int_0^{\frac{z-1}{2}} \int_{\sqrt{\frac{(z-1)^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (-xz) \, dy \, dx \, dz$$

PERGUNTA 7:

1. Função densidade

$$\rho(x,y) = k x^2 , \quad k > 0$$

2. Função distância

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow r^2(x,y) = x^2+y^2$$

3. Momento de inércia I_0

$$I_0 = \iint_S \rho(x,y) \, r^2(x,y) \, dy \, dx = \iint_S k x^2 (x^2+y^2) \, dy \, dx =$$

$$= \iint_S (k x^4 + k x^2 y^2) \, dy \, dx$$

4. Teorema de Green

$$I_0 = \iint_S (k x^4 + k x^2 y^2) \, dy \, dx = \oint_C P \, dx + Q \, dy =$$

$$= \iint_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dy \, dx$$

5. Determinação do campo vectorial:

Designando $\vec{f}(x,y) = (P, Q)$, considera-se, por exemplo,

$Q(x,y) = \frac{kx^5}{5}$ e $P(x,y) = \frac{-kx^2y^3}{3}$, tais que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = kx^4 - \left(-kx^2y^2\right) = kx^4 + kx^2y^2$$

6. Conclusão:

$$I_0 = \iint_S \rho(x,y)\, r^2(x,y)\, dy\, dx = \iint_S (kx^4 + kx^2y^2)\, dy\, dx =$$

$$= \oint_C \left(-\frac{kx^2y^3}{3}\right) dx + \left(\frac{kx^5}{5}\right) dy$$