INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE; FLUXO

Massa de uma superfície

- Considere-se uma distribuição de matéria sobre uma superfície S (*superfície material*). Se o campo escalar que exprime a densidade do material (massa por unidade de área) for constante, λ, então a massa da *superfície material* é dada pelo produto da densidade pela área da superfície, $A(S)$.
  Assim, se S é uma superfície *simples* e *regular*, parametrizada através de uma função vectorial diferenciável

  $$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{j} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

  então a massa de S, $M(S)$, é dada por

  $$M(S) = \lambda A(S) = \lambda \iint_{\Omega} \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv \tag{1}$$

  onde $\vec{N}(u,v)$ é o *produto vectorial fundamental* de S.
  No entanto, se a densidade variar de ponto para ponto, $\lambda(x,y,z)$, então a massa só poderá ser obtida recorrendo a um processo de integração.
  Com efeito, é possível provar que:

  $$M(S) = \iint_{S} \lambda(x,y,z) dS = \iint_{\Omega} \lambda\left[\vec{r}(u,v)\right] \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv =$$

  $$= \iint_{\Omega} \lambda\left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right] \left\| \vec{N}(u,v) \right\| dudv \tag{2}$$

Integral de superfície

- O integral duplo apresentado em (2) pode ser generalizado para um qualquer campo escalar, $h(x,y,z)$, que seja contínuo na superfície *S*. Este integral é, genericamente, designado por *integral de superfície de* $h(x,y,z)$ *sobre S* e escreve-se:

$$\iint_S h(x,y,z)\, dS = \iint_\Omega h\left[x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right]\, \left\|\vec{N}(u,v)\right\| dudv$$

Se $h(x,y,z)=1$, então:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_\Omega \left\|\vec{N}(u,v)\right\| dudv$$

Exemplo 1: Determine o integral de superfície do campo escalar $h(x,y,z)=yz$ sobre a superfície, *S*, parametrizada através de

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{a} + v\vec{b}\ ,\ (u,v) \in \Omega$$

com $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\Omega = \left\{(u,v)\ :\ 0 \le u \le 1\ ,\ 0 \le v \le 1\right\}$.

Solução:

Notando que

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \ \Rightarrow\ \left\|\vec{N}(u,v)\right\| = \sqrt{6}$$

$$\vec{r}(u,v) = u\vec{i} + (-u+2v)\vec{j} + (u-v)\vec{k}$$

$$h\left[\vec{r}(u,v)\right] = y(u,v)z(u,v) = (-u+2v)(u-v) = -u^2 - 2v^2 + 3uv$$

obtém-se para o integral de superfície:

$$\iint_S (yz)dS = \sqrt{6}\int_0^1\int_0^1 (-u^2 - 2v^2 + 3uv)dudv =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\int_0^1 \left[-2u^3 - 12uv^2 + 9u^2v\right]_0^1 dv = \frac{\sqrt{6}}{6}\int_0^1 \left(-2 - 12v^2 + 9v\right)dv =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{12}\left[-4v - 8v^3 + 9v^2\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Exemplo 2: Calcule o integral de superfície do campo escalar $g(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre a superfície, S, parametrizada através de

$$\vec{r}(u,v) = u\cos(2v)\vec{i} + u\,\mathrm{sen}(2v)\vec{j} + 2v\vec{k} \ , \ (u,v) \in \Omega$$

em que $\Omega = \{(u,v) \ : \ 0 \le u \le 1 \ , \ 0 \le v \le \pi\}$.

Solução:

Notando que

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos(2v) & \mathrm{sen}(2v) & 0 \\ -u\,\mathrm{sen}(2v) & u\cos(2v) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,\mathrm{sen}(2v)\vec{i} - 2\cos(2v)\vec{j} + 2u\vec{k}$$

$$\left\|\vec{N}(u,v)\right\| = 2\sqrt{1+u^2}$$

$$g\left[\vec{r}(u,v)\right] = \sqrt{x^2(u,v) + y^2(u,v)} =$$

$$= \sqrt{u^2\cos^2(2v) + u^2\text{sen}^2(2v)} = |u| = u \quad (0 \le u \le 1)$$

obtém-se para o integral de superfície:

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS = 2\int_0^{\pi}\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\,du\,dv = \frac{2\pi}{3}\left[\left(1+u^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Propriedades do integral de superfície

- Tal como acontece com outros processos de integração, também é possível estabelecer uma condição de valor médio para o integral de superfície.

Teorema 1: Sejam $h(x,y,z)$ e $g(x,y,z)$ campos escalares contínuos numa superfície regular, S. Se $g(x,y,z) \ge 0$ em S, então existe um ponto $(x_0,y_0,z_0) \in S$ tal que:

$$\iint_S h(x,y,z)g(x,y,z)dS = h(x_0,y_0,z_0)\iint_S g(x,y,z)dS$$

O valor $h(x_0,y_0,z_0)$ chama-se *média ponderada da função* $h(x,y,z)$ *em S através da função (de peso)* $g(x,y,z)$.

- As coordenadas do centro de massa, (x_M, y_M, z_M), de uma superfície, S, com densidade $\lambda(x,y,z)$ são dadas por

$$x_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S x\lambda(x,y,z)\, dS \quad , \quad y_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S y\lambda(x,y,z)\, dS$$

$$z_M = \frac{1}{M(S)} \iint_S z\lambda(x,y,z)\, dS \tag{3}$$

onde $M(S)$ é a massa da superfície.

- Considerando $\lambda(x,y,z) = 1$ nas expressões (3) e tendo em atenção (1), obtêm-se as coordenadas do centroide, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, da superfície, ou seja,

$$\bar{x} = \frac{1}{A(S)} \iint_S x\, dS \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{A(S)} \iint_S y\, dS \quad , \quad \bar{z} = \frac{1}{A(S)} \iint_S z\, dS$$

onde $A(S)$ é a área da superfície.

- Admitindo que a superfície roda em torno de um eixo, L, o *momento de inércia*, I_L, da superfície *em relação ao eixo de rotação L* é

$$I_L = \iint_S \lambda(x,y,z) [R_L(x,y,z)]^2 dS$$

onde $R_L(x,y,z)$ exprime a distância de cada ponto da superfície ao eixo em causa.

Exemplo 3: Determine a posição do centro de massa da superfície *S*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \ z \geq 0 \ (a > 0)$$

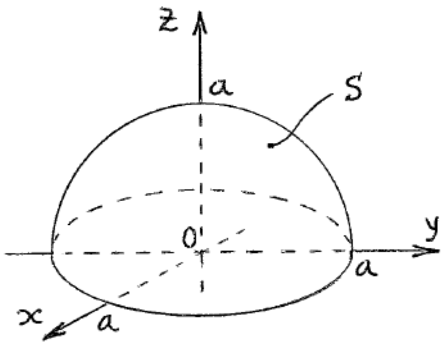
sabendo que a densidade em cada um dos seus pontos, $\lambda(x, y, z)$, é directamente proporcional à distância ao plano *xOy*.

Solução:

A superfície, *S*, é uma casca semi-esférica que pode ser parametrizada, recorrendo a coordenadas esféricas, por

$$\vec{r}(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{i} + a\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k} \ , \ (\theta,\phi) \in R$$

em que $R = \{(\theta,\phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \ , \ 0 \leq \phi \leq \pi/2\}$ (exemplo 5, capítulo 6).



A norma do seu produto vectorial fundamental é (exemplo 14, capítulo 6):

$$\left\|\vec{N}(\theta,\phi)\right\| = a^2\text{sen}(\phi)$$

O campo escalar que define a densidade pode ser escrito sob a forma

$$\lambda(x, y, z) = kz \ , \ k > 0$$

onde *k* é uma constante de proporcionalidade.

Uma vez que a superfície é, em termos geométricos/materiais, simétrica em relação aos planos *xOz* e *yOz*, então a abcissa e a ordenada do seu centro de massa são nulas, $x_M = y_M = 0$.

Notando que

$$\lambda\left[\vec{r}(\theta,\phi)\right] = kz(\theta,\phi) = ka\cos(\phi)$$

a massa da superfície é:

$$M(S) = \iint_S \lambda(x,y,z)\ dS = ka^3 \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \cos(\phi)\text{sen}(\phi)\ d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi ka^3 \int_0^{\pi/2} \cos(\phi)\text{sen}(\phi)\ d\phi = \pi ka^3 \left[\text{sen}^2(\phi)\right]_0^{\pi/2} = \pi ka^3$$

Por outro lado, dado que

$$(z\lambda)\left[\vec{r}(\theta,\phi)\right] = kz^2(\theta,\phi) = ka^2\cos^2(\phi)$$

então:

$$\iint_S z\lambda(x,y,z)\ dS = ka^4 \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \text{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\ d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi ka^4 \int_0^{\pi/2} \text{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\ d\phi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi ka^4 \left[-\cos^3(\phi)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}\pi ka^4$$

Obtém-se, assim:

$$z_M = \frac{1}{M(S)}\iint_S z\lambda(x,y,z)\ dS = \frac{2a}{3}$$

Concluindo, o centro de massa da superfície é o ponto com coordenadas:

$$(x_M, y_M, z_M) = \left(0, 0, \frac{2a}{3}\right)$$

Fluxo de um campo vectorial

- Seja S uma superfície *simples e regular* parametrizada através de uma função vectorial diferenciável

$$\vec{r}(u,v)\ ,\ (u,v) \in \Omega \tag{4}$$

e seja $\vec{n}(x,y,z)$ a função que define, em cada ponto de S, o versor normal à superfície e que se admite como sendo uma função contínua em S; nestas condições, a superfície S é designada por *superfície orientada*.
Convém referir que uma superfície deste tipo possui duas faces: a face que tem $\vec{n}$ como versor e a face cujo versor normal é $-\vec{n}$.

- Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial contínuo em S, então o integral de superfície dado por

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = \iint_S \left[\vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\right]\ dS \tag{5}$$

é designado por *fluxo do campo vectorial* $\vec{v}(x,y,z)$ *através de S na direcção de* $\vec{n}$.

- O fluxo de um campo vectorial através de uma *superfície orientada* depende da orientação do versor normal à superfície. Se na expressão (5) for considerado, em vez de $\vec{n}$, o versor normal $-\vec{n}$, é fácil concluir que o fluxo sofre uma alteração no seu sinal, isto é:

$$\iint_S \left[\vec{v}\cdot(-\vec{n})\right]\ dS = \iint_S -(\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS = -\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\ dS$$

- Recorrendo a (4) e notando que

$$dS = \left\| \vec{N}(u,v) \right\| \; dudv$$

o integral de fluxo (5) pode ser escrito sob a forma:

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \; dS = \iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right] \cdot \vec{n}(u,v) \; \left\| \vec{N}(u,v) \right\| \; dudv \qquad (6)$$

- O integral de fluxo (6) pode ser reescrito em função do produto vectorial fundamental, $\vec{N}(u,v)$, da superfície. Neste caso,

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \; dS = \iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right] \cdot \vec{N}(u,v) \; dudv \qquad (7)$$

se os vectores $\vec{n}(u,v)$ e $\vec{N}(u,v)$ possuem o mesmo sentido,

$$\vec{n}(u,v) = +\frac{\vec{N}(u,v)}{\left\| \vec{N}(u,v) \right\|}$$

e, por outro lado,

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) \; dS = -\iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right] \cdot \vec{N}(u,v) \; dudv \qquad (8)$$

se os vectores $\vec{n}(u,v)$ e $\vec{N}(u,v)$ possuem sentidos opostos:

$$\vec{n}(u,v) = -\frac{\vec{N}(u,v)}{\left\| \vec{N}(u,v) \right\|}$$

Exemplo 4: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}$$

através da superfície esférica

$$S \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ \ (a > 0)$$

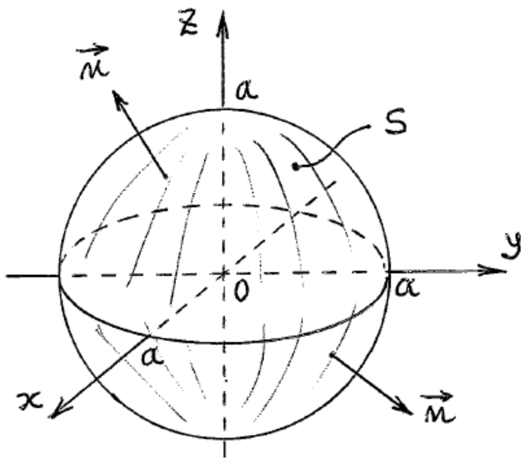
no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:

A superfície esférica orientada, S, pode ser parametrizada, recorrendo a coordenadas esféricas, através da função vectorial

$$\vec{r}(\theta,\phi) = a\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + a\mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j} + a\cos(\phi)\vec{k} \ , \ (\theta,\phi) \in R$$

em que $R = \{(\theta,\phi) \ : \ 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le \phi \le \pi\}$ (exemplo 5, capítulo 6).



O seu produto vectorial fundamental é (exemplo 10, capítulo 6):

$$\vec{N}(\theta,\phi) = -a^2\mathrm{sen}(\phi)\left(\cos(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{i} + \mathrm{sen}(\theta)\mathrm{sen}(\phi)\vec{j} + \cos(\phi)\vec{k}\right)$$

Dado que

$$\vec{N}(\theta,\phi)\cdot\vec{k} = -a^2\text{sen}(\phi)\cos(\phi) < 0\text{, se } \phi < \pi/2$$

e

$$\vec{N}(\theta,\phi)\cdot\vec{k} > 0\text{, se } \phi > \pi/2$$

então o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(\theta,\phi)$, está orientado no sentido *de fora para dentro* de *S*, ou seja, tem o sentido oposto ao que é considerado para o versor normal à superfície, $\vec{n}(\theta,\phi)$.

Uma vez que

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,\phi)\right] = a\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{i} + a\text{sen}(\theta)\text{sen}(\phi)\vec{j} + a^2\cos(\theta)\text{sen}(\phi)\cos(\phi)\vec{k}$$

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,\phi)\right]\cdot\vec{N}(\theta,\phi) = -a^3\text{sen}^3(\phi) - a^4\cos(\theta)\text{sen}^2(\phi)\cos^2(\phi)$$

atendendo a (8), obtém-se para o fluxo:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\,dS = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(-a^3\text{sen}^3(\phi) - a^4\cos(\theta)\text{sen}^2(\phi)\cos^2(\phi)\right)d\theta d\phi =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\pi}\text{sen}^3(\phi)\,d\phi =$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{\pi}\text{sen}(\phi)\,d\phi - 2\pi a^3\int_0^{\pi}\text{sen}(\phi)\cos^2(\phi)\,d\phi =$$

$$= -2\pi a^3\left[\cos(\phi)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{3}\pi a^3\left[\cos^3(\phi)\right]_0^{\pi} =$$

$$= 4\pi a^3 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{8}{3}\pi a^3$$

Exemplo 5: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 3z\vec{k}$$

através da superfície do paraboloide

$$S \ : \ z = 1 - (x^2 + y^2) \ , \ z \geq 0$$

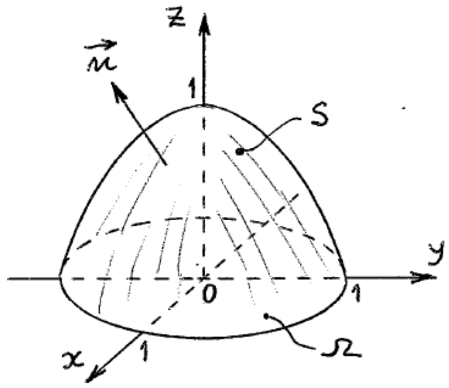
no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Solução:

A superfície parabólica orientada, S, pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - x^2 - y^2)\vec{k} \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que $\Omega = \left\{(x,y) \ : \ 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.



O seu produto vectorial fundamental é:

$$\vec{N}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, pode-se verificar que o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(x,y)$, e o versor normal a S, $\vec{n}(x,y)$, estão orientados no mesmo sentido, isto é, no sentido *de dentro para fora* da superfície.

Assim, atendendo a (7) e sabendo que

$$\vec{v}\left[\vec{r}(x,y)\right] = x\vec{i} + y\vec{j} + 3(1 - x^2 - y^2)\vec{k}$$

$$\vec{v}\left[\vec{r}(x,y)\right] \cdot \vec{N}(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 3(1 - x^2 - y^2) = 3 - (x^2 + y^2)$$

obtém-se para o fluxo

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS = 3\iint_\Omega dxdy - \iint_\Omega (x^2 + y^2)dxdy =$$

$$= 3A(\Omega) - \iint_\Omega (x^2 + y^2)dxdy = 3\pi - \iint_\Omega (x^2 + y^2)dxdy$$

onde $A(\Omega) = \pi$ é a área da região Ω.
Recorrendo a coordenadas polares

$$x = r\cos(\theta) \quad , \quad y = r \ \mathrm{sen}(\theta) \quad , \quad dxdy = r \ drd\theta$$

então

$$x^2 + y^2 = r^2 \ , \ (r,\theta) \in \Omega_1$$

$$\Omega_1 = \left\{(\theta, r) : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le 1\right\}$$

e, portanto:

$$\iint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dS = 3\pi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 \ drd\theta = 3\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

- O fluxo através de uma *superfície orientada e fechada por secções* (por exemplo, a superfície lateral de um prisma, a superfície de um cilindro fechado nas suas bases e a superfície de um paraboloide fechado na sua base) pode ser determinado somando as contribuições, para o fluxo, de cada uma das secções que limitam essa superfície.

Exemplo 6: Calcule o fluxo do campo vectorial

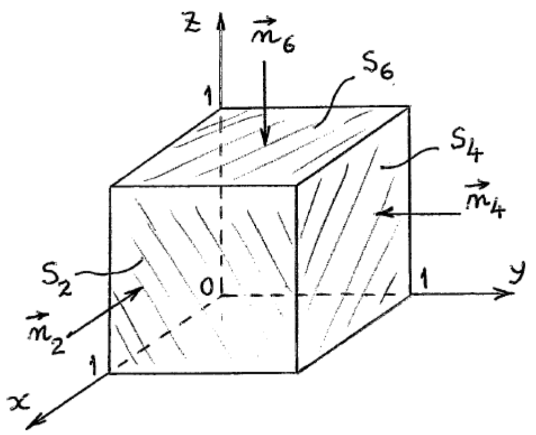
$$\vec{v}(x,y,z) = xy\vec{i} + 2yz^2\vec{j} + yz\vec{k}$$

através da superfície, *S*, que limita o cubo unitário, *T*, situado no primeiro octante

$$T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1\}$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície.

Solução:



A superfície que limita o cubo, *S*, é uma superfície orientada e fechada por secções e pode ser decomposta em seis secções planas, cujos versores normais, orientados de acordo com o que é exigido no problema, são:

$$\text{Secção } S_1 = \{(x,y,z) : x = 0 \, , \, 0 \le y \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1\} \text{ e } \vec{n}_1(x,y,z) = \vec{i}$$

$$\text{Secção } S_2 = \{(x,y,z) : x = 1 \, , \, 0 \le y \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1\} \text{ e } \vec{n}_2(x,y,z) = -\vec{i}$$

$$\text{Secção } S_3 = \{(x,y,z) : y = 0 \, , \, 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1\} \text{ e } \vec{n}_3(x,y,z) = \vec{j}$$

$$\text{Secção } S_4 = \{(x,y,z) : y = 1 \, , \, 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le z \le 1\} \text{ e } \vec{n}_4(x,y,z) = -\vec{j}$$

$$\text{Secção } S_5 = \{(x,y,z) : z = 0 \, , \, 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le 1\} \text{ e } \vec{n}_5(x,y,z) = \vec{k}$$

$$\text{Secção } S_6 = \{(x,y,z) : z = 1 \, , \, 0 \le x \le 1 \, , \, 0 \le y \le 1\} \text{ e } \vec{n}_6(x,y,z) = -\vec{k}$$

Em relação à secção S_1 obtém-se:

$$\vec{v}(0,y,z)=2yz^2\vec{j}+yz\vec{k} \quad , \quad \vec{v}(0,y,z)\cdot\vec{n}_1(x,y,z)=0$$

$$\iint_{S_1}(\vec{v}\cdot\vec{n}_1)\ dS=0$$

Em relação à secção S_2 obtém-se:

$$\vec{v}(1,y,z)=y\vec{i}+2yz^2\vec{j}+yz\vec{k} \quad , \quad \vec{v}(1,y,z)\cdot\vec{n}_2(x,y,z)=-y$$

$$\iint_{S_2}(\vec{v}\cdot\vec{n}_2)\ dS=\int_0^1\int_0^1(-y)dydz=-\frac{1}{2}$$

Em relação à secção S_3 obtém-se:

$$\vec{v}(x,0,z)=\vec{0} \quad , \quad \vec{v}(x,0,z)\cdot\vec{n}_3(x,y,z)=0$$

$$\iint_{S_3}(\vec{v}\cdot\vec{n}_3)\ dS=0$$

Em relação à secção S_4 obtém-se:

$$\vec{v}(x,1,z)=x\vec{i}+2z^2\vec{j}+z\vec{k} \quad , \quad \vec{v}(x,1,z)\cdot\vec{n}_4(x,y,z)=-2z^2$$

$$\iint_{S_4}(\vec{v}\cdot\vec{n}_4)\ dS=\int_0^1\int_0^1(-2z^2)dxdz=-\frac{2}{3}$$

Em relação à secção S_5 obtém-se:

$$\vec{v}(x,y,0)=xy\vec{i} \quad , \quad \vec{v}(x,y,0)\cdot\vec{n}_5(x,y,z)=0$$

$$\iint_{S_5}(\vec{v}\cdot\vec{n}_5)\ dS=0$$

Em relação à secção S_6 obtém-se:

$$\vec{v}(x,y,1) = xy\vec{i} + 2y\vec{j} + y\vec{k} \quad , \quad \vec{v}(x,y,1)\cdot\vec{n}_6(x,y,z) = -y$$

$$\iint_{S_6} (\vec{v}\cdot\vec{n}_6)\, dS = \int_0^1\int_0^1 (-y)dxdy = -\frac{1}{2}$$

Então, o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ através da superfície lateral do cubo, S, no sentido *de fora para dentro* da superfície, é:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\, dS = \sum_{i=1}^{6}\iint_{S_i} (\vec{v}\cdot\vec{n}_i)\, dS = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{3}$$

- O conceito de fluxo é aplicado quando se estudam, por exemplo, problemas no âmbito da mecânica dos fluidos. Assim, considere-se um fluido em movimento no espaço, tal que o vector velocidade, em cada ponto (x,y,z), é definido pelo campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$; para simplificar a análise, admita-se que $\vec{v}(x,y,z)$ não varia com o tempo (escoamento em *regime estacionário*).

  Fixe-se uma região do espaço, S, representada por uma superfície *orientada*, *simples* e *regular* e seja $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z)$ a função que define, em cada ponto de S, o *versor normal* à superfície.

  O fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ através de S, definido em (5), representa, em termos relativos, o *caudal* (volume por unidade de tempo) de fluido que atravessa S, a partir da face com *versor normal* $-\vec{n}$ para a face com *versor normal* $\vec{n}$, sendo de realçar o seguinte:

  i) O fluxo é *positivo*, se $\vec{v}\cdot\vec{n} > 0$; neste caso, a transferência de matéria dá-se no sentido admitido para a orientação de S;

  ii) O fluxo é *negativo*, se $\vec{v}\cdot\vec{n} < 0$; neste caso, a transferência de matéria dá-se no sentido oposto àquele que define a orientação de S.

Integral de fluxo: notação diferencial

- A expressão do integral de fluxo apresentada em (5) pode ser reescrita, tal como ocorreu com o integral de linha, usando uma *notação diferencial*.
  Assim, considere-se o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

e a superfície *orientada*, *simples* e *regular*, *S*, parametrizada através de uma função vectorial diferenciável:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad , \quad (u,v) \in \Omega$$

Seja o produto vectorial fundamental da superfície, dado por:

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}$$

Notando que

$$\vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right] \cdot \vec{N}(u,v) =$$

$$= P\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

e admitindo que $\vec{N}(u,v)$ e o versor normal, $\vec{n}(u,v)$, estão orientados no mesmo sentido, resulta:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\; dS = \iint_\Omega \vec{v}\left[\vec{r}(u,v)\right]\cdot\vec{N}(u,v)dudv =$$

$$= \iint_\Omega P\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\; dudv + \iint_\Omega Q\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\; dudv +$$

$$+\iint_\Omega R\left[\vec{r}(u,v)\right]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\; dudv$$

Designando

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}dudv = dy\wedge dz$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}dudv = dz\wedge dx$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv = dx\wedge dy$$

obtém-se, em alternativa,

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\; dS = \iint_S P(x,y,z)\; dy\wedge dz + \iint_S Q(x,y,z)\; dz\wedge dx +$$

$$+\iint_S R(x,y,z)\; dx\wedge dy$$

ou ainda, sob um modo mais compacto:

$$\iint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})\; dS = \iint_S Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$

O operador vectorial diferencial ∇ (nabla)

- O *operador vectorial diferencial*, ∇, por vezes também designado por *operador gradiente*, é definido por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

e tanto pode ser aplicado a *campos escalares*, como a *campos vectoriais*.

Gradiente de um campo escalar, ∇f

- Se $f(x,y,z)$ é um *campo escalar*, então

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

designa *o gradiente de* $f(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).
A função resultante, $\nabla f(x,y,z)$, é um campo vectorial e pode ser usada, por exemplo, no cálculo da *derivada direccional de* $f(x,y,z)$ num ponto ou na definição do *plano tangente* a uma *superfície de nível* que passa num ponto, ou seja, a uma superfície do tipo $f(x,y,z) = k$, $k \in \mathbb{R}$ (tal como vimos no capítulo 2).

Exemplo 7: O gradiente do campo escalar

$$f(x,y,z) = x^3 z + xy^2 z^2 - 2yz + 2x - 1$$

é o campo vectorial:

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 z + y^2 z^2 + 2)\vec{i} + (2xyz^2 - 2z)\vec{j} + (x^3 + 2xy^2 z - 2y)\vec{k}$$

Divergência de um campo vectorial, $\nabla \cdot \vec{f} = div\ \vec{f}$

- Dado o campo vectorial

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

o campo escalar definido por

$$\nabla \cdot \vec{f}(x,y,z) = div\ \vec{f}(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

chama-se *divergência de* $\vec{f}(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).

- O campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ diz-se *solenoidal* quando $\nabla \cdot \vec{f}(x,y,z) = 0$.

Exemplo 8: A divergência do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = \alpha\vec{r}(x,y,z) = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j} + \alpha z\vec{k} \qquad (9)$$

é o campo escalar:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \alpha\frac{\partial v_1}{\partial x} + \alpha\frac{\partial v_2}{\partial y} + \alpha\frac{\partial v_3}{\partial z} = 3\alpha$$

O campo vectorial não é solenoidal, se $\alpha \neq 0$.

Exemplo 9: Seja o campo vectorial:

$$\vec{v}(x,y,z) = \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ (x,y) \neq (0,0) \qquad (10)$$

Calculando as derivadas parciais

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\alpha y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \ , \ \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\alpha x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \ , \ \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \qquad (11)$$

obtém-se para a divergência de $\vec{v}(x,y,z)$:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (12)$$

O campo vectorial não é solenoidal, se $\alpha \neq 0$.

Exemplo 10: Seja o campo vectorial:

$$\vec{v}(x,y,z) = -\frac{\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{\alpha x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + 0\vec{k} \ , \ (x,y) \neq (0,0) \qquad (13)$$

Recorrendo às derivadas parciais

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\alpha xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \ , \ \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{\alpha xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \ , \ \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \qquad (14)$$

conclui-se que

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0$$

ou seja, o campo vectorial é *solenoidal*.

Rotacional de um campo vectorial, $\nabla \times \vec{f} = rot\ \vec{f}$

- Considerando o campo vectorial

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

o campo vectorial dado por

$$\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = rot\ \vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)\vec{k}$$

chama-se *rotacional de* $\vec{f}(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).

- O campo vectorial $\vec{f}(x,y,z)$ diz-se *irrotacional* quando $\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = \vec{0}$.

- A propriedade apresentada no teorema seguinte estabelece uma condição para que um campo vectorial, $\vec{v}(x,y,z)$, seja *gradiente*, ou seja, para que $\vec{v}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$, em que $f(x,y,z)$ é um dado campo escalar.

Teorema 2: O rotacional de um gradiente é o vector nulo, isto é, se $f(x,y,z)$ é um campo escalar com derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então:

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

- Em face do teorema anterior pode-se, ainda, afirmar que um campo vectorial, $\vec{v}(x,y,z)$, é *gradiente*, se e só se for *irrotacional*.

Exemplo 11: O rotacional do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (9) é:

$$\nabla\times\vec{v}(x,y,z)=\alpha\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\vec{0}$$

Conclui-se, então, que o campo vectorial é *gradiente* (*irrotacional*).

Exemplo 12: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (10). Notando que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}=-\frac{\alpha xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\ ,\ \frac{\partial v_2}{\partial x}=-\frac{\alpha xy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{15}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z}=\frac{\partial v_2}{\partial z}=0$$

resulta para o rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$

$$\nabla\times\vec{v}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ v_1 & v_2 & 0\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}=\vec{0}$$

ou seja, trata-se de um campo vectorial *gradiente* (*irrotacional*).

Exemplo 13: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (13). Notando que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{-\alpha}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} + \frac{\alpha y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{16}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\alpha}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} - \frac{\alpha x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \tag{17}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_2}{\partial z} = 0$$

resulta para o rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$:

$$\nabla \times \vec{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k} = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k} \tag{18}$$

- Atente-se em mais algumas propriedades que envolvem a divergência e o rotacional.

Teorema 3: A divergência de um rotacional é nula, isto é, se as componentes de um campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ possuem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, então:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

Teorema 4: Se $f(x,y,z)$ um campo escalar e se $\vec{u}(x,y,z)$ e $\vec{v}(x,y,z)$ são campos vectoriais, então:

$$\nabla\cdot(f\ \vec{v})=(\nabla f)\cdot\vec{v}+f(\nabla\cdot\vec{v})$$

$$\nabla\times(f\ \vec{v})=(\nabla f)\times\vec{v}+f(\nabla\times\vec{v})$$

$$\nabla\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=(\nabla\times\vec{u})\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot(\nabla\times\vec{v})$$

Teorema 5: Seja o campo vectorial $\vec{r}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, tal que $r(x,y,z)=\left\|\vec{r}(x,y,z)\right\|$. Se $n\in\mathbb{N}$, então para todo o $\vec{r}\neq\vec{0}$ verifica-se:

$$\nabla\cdot(r^n\ \vec{r})=(n+3)r^n$$

$$\nabla\times(r^n\ \vec{r})=\vec{0}$$

Laplaciano de um campo escalar, $\nabla^2 \boldsymbol{f}$

- Seja $f(x,y,z)$ um campo escalar. O campo escalar definido por

$$\nabla^2 f(x,y,z)=\nabla\cdot\left(\nabla f(x,y,z)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

  designa *o laplaciano de* $f(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).

Exemplo 14: O laplaciano do campo escalar

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

é o campo escalar:

$$\nabla^2 f(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2+z^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2+y^2+z^2) = 6$$

Exemplo 15: O laplaciano do campo escalar

$$g(x,y,z) = e^{xyz}$$

é o campo escalar:

$$\nabla^2 g(x,y,z) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^{xyz}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(e^{xyz}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{xyz}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(yze^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial y}(xze^{xyz}) + \frac{\partial}{\partial z}(xye^{xyz}) =$$

$$= (y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2)e^{xyz}$$

Laplaciano de um campo vectorial, $\nabla^2 \vec{f}$

- Considerando o campo vectorial

$$\vec{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

o campo vectorial dado por

$$\nabla^2 \vec{f}(x,y,z) = \left(\nabla^2 f_1(x,y,z)\right)\vec{i} + \left(\nabla^2 f_2(x,y,z)\right)\vec{j} + \left(\nabla^2 f_3(x,y,z)\right)\vec{k}$$

designa *o laplaciano de* $\vec{f}(x,y,z)$ no ponto (x,y,z).

Exemplo 16: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (10). Recorrendo a (11) e (15), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = -\frac{3\alpha x y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}} \ , \ \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{3\alpha x y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = -\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = -\frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{3\alpha x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}} \ , \ \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = -\frac{3\alpha x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = -\frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Então, o laplaciano de $\vec{v}(x,y,z)$ é:

$$\nabla^2 \vec{v}(x,y,z) = -\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{i} - \frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j} \tag{19}$$

Exemplo 17: Seja o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ definido em (13). Recorrendo a (14) e (16), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} - \frac{3\alpha x^2 y}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} = \frac{3\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} - \frac{3\alpha y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}=\frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Por outro lado, tendo em atenção (14) e (17), resulta:

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}=-\frac{3\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{3\alpha x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}=-\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{3\alpha x y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}=-\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$$

Então, o laplaciano de $\vec{v}(x,y,z)$ é:

$$\nabla^2\vec{v}(x,y,z)=\frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{i}-\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j} \qquad (20)$$

- A propriedade apresentada no teorema seguinte relaciona os operadores divergência, rotacional e laplaciano de um campo vectorial.

Teorema 6: Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial, então:

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v})=\nabla(\nabla\cdot\vec{v})-\nabla^2\vec{v} \qquad (21)$$

Exemplo 18: Uma vez que o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ dos exemplos 9 e 12 é *irrotacional*, então o seu laplaciano pode ser obtido, recorrendo a (21), através da relação:

$$\nabla^2\vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v})$$

Recorrendo a (12), obtém-se

$$\nabla^2\vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{j} =$$

$$= -\frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{i} - \frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j}$$

confirmando-se o resultado encontrado em (19).

Exemplo 19: Uma vez que o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ do exemplo 10 é *solenoidal*, então o seu laplaciano pode ser obtido, recorrendo a (21), através da relação:

$$\nabla^2\vec{v} = -\nabla\times(\nabla\times\vec{v})$$

Recorrendo a (18), obtém-se

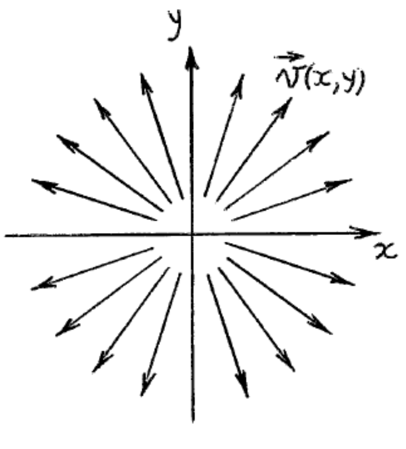
$$\nabla^2\vec{v} = -\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = -\alpha\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \left(x^2+y^2\right)^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\alpha y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{i} - \frac{\alpha x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j}$$

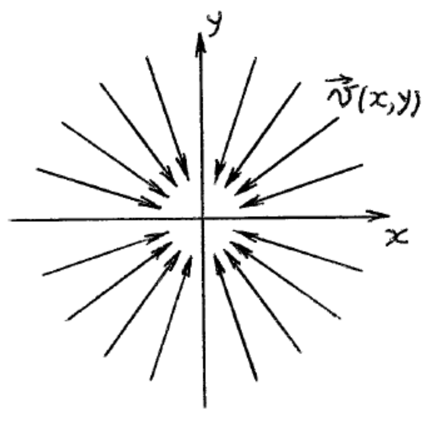
confirmando-se o resultado encontrado em (20).

Interpretação da divergência

- Considere-se uma sala fechada sujeita a um processo de aquecimento/arrefecimento, em que o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ define, em cada ponto (x,y,z) da sala, a velocidade do ar que se encontra em movimento.
  Se, numa determinada região, o ar é aquecido, então ele estará sujeito a um fenómeno de expansão em todas as direcções; nesta situação a *divergência* do campo de velocidades é *positiva*. Fixando um pequeno elemento de volume em torno de um ponto, *P*, nessa região, verifica-se que haverá uma maior quantidade de ar a sair do que a entrar nesse elemento de volume; neste caso, o ponto *P* é designado por "*fonte*".



$\nabla\vec{v}(x,y) > 0$ (*fonte*)



$\nabla\vec{v}(x,y) < 0$ (*sumidouro*)

Por outro lado, se o ar for arrefecido, verificar-se-á uma contracção e a *divergência* do campo de velocidades será *negativa*. No elemento de volume referido haverá, agora, uma maior quantidade de ar a entrar do que a sair e o ponto *P* é designado por "*sumidouro*".
Se a *divergência* do campo de velocidades for *nula* não se verifica nem a acumulação, nem a dispersão do fluido em qualquer ponto do escoamento; neste caso, diz-se que o escoamento é *solenoidal*.

Exemplo 20: O campo de velocidades expresso em (9), cuja divergência é definida por

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = 3\alpha$$

diz respeito a uma *fonte*, se $\alpha > 0$, e a um *sumidouro*, se $\alpha < 0$.

Exemplo 21: O campo de velocidades expresso em (10), cuja divergência é definida por

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

diz respeito a uma *fonte*, se $\alpha > 0$, e a um *sumidouro*, se $\alpha < 0$.

Exemplo 22: O campo de velocidades definido em (13), cuja divergência é

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = 0$$

diz respeito a um escoamento *solenoidal*.

Interpretação do rotacional

- É, ainda, possível dar uma interpretação para o rotacional de um campo vectorial no âmbito da mecânica dos fluidos. Assim, se o campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ representar o campo de velocidades de um fluido, o seu rotacional num dado ponto *P* caracteriza a tendência do fluido poder girar sobre si próprio em torno de *P*.
  Nos dois exemplos seguintes apresentam-se dois casos particulares de dois escoamentos bidimensionais designados por *vórtices*, isto é, escoamentos em que a componente radial da velocidade é nula; nestes casos, o fluido circula ao longo de linhas de escoamento que são circunferências concêntricas.

Exemplo 23: Admita-se que o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j} \ , \ \omega > 0 \tag{22}$$

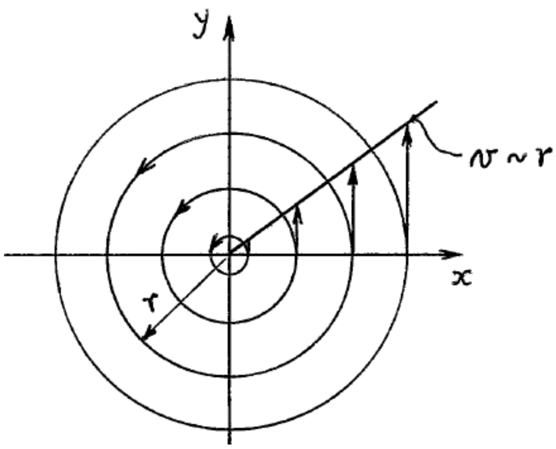
define o campo de velocidades de um escoamento bidimensional.
Pode-se verificar que, em cada ponto do escoamento, o vector velocidade é ortogonal ao vector de posição

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = (-\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j}) = 0$$

e a sua intensidade

$$\|\vec{v}(x,y)\| = \omega\sqrt{x^2 + y^2} = \omega r$$

é directamente proporcional à distância, *r*, do ponto à origem.



rotação sólida (*vórtice forçado*)

Dado que a componente radial do campo de velocidades é nula, então a divergência é nula (o escoamento é *solenoidal*)

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\omega\frac{\partial y}{\partial x} + \omega\frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

sendo o seu rotacional dado por

$$\nabla\times\vec{v}(x,y)=\omega\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & 0\end{vmatrix}=2\omega\vec{k}$$

ou seja, é duas vezes o vector velocidade angular, $\vec{\omega}=\omega\vec{k}$.
O campo de velocidades (22) define um escoamento onde o meio não sofre qualquer deformação, sendo designado por *rotação sólida*, ou *vórtice forçado*.
Para exemplificar este tipo de escoamento, considere-se um recipiente cilíndrico com água que é colocado lentamente em rotação em torno do seu eixo até se atingir uma velocidade angular constante ω. A viscosidade inerente ao fluido conduzirá a uma situação em que este se moverá em círculos concêntricos. Após um período transitório, espera-se que o fluido se mova apenas com velocidade na direcção tangencial (escoamento *solenoidal*) e sem qualquer variação na direcção vertical. Nestas condições o fluido desloca-se como se fosse um corpo sólido.

Exemplo 24: Considere-se, agora, o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j} \ , \ (x,y) \neq (0,0) \tag{23}$$

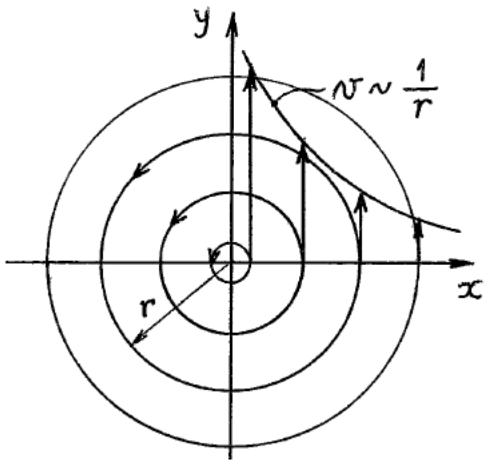
que define um campo de velocidades de um escoamento bidimensional.
Em cada ponto do escoamento o vector velocidade é ortogonal ao vector de posição

$$\vec{v}\cdot\vec{r} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}\right)\cdot(x\vec{i}+y\vec{j}) = 0$$

sendo a sua intensidade

$$\|\vec{v}(x,y)\| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}$$

inversamente proporcional à distância, *r*, do ponto à origem.



Vórtice irrotacional (*vórtice livre*)

Uma vez que o escoamento é *solenoidal* (a componente radial do campo de velocidades é nula), a divergência é nula:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = 0$$

Por outro lado, sabendo que

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

obtém-se para o rotacional

$$\nabla \times \vec{v}(x,y) = \omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

ou seja, o escoamento é *irrotacional*.

O campo de velocidades (23) define um escoamento que é designado por *vórtice irrotacional*, ou *vórtice livre*.

Este modelo de escoamento, também conhecido por *modelo furacão*, pode ser observado no processo de escoamento da água de uma banheira, quando a água se aproxima do ralo.

Teorema de Gauss (da divergência)

- Seja Ω uma região de Jordan limitada por uma curva de Jordan suave por secções, *C*, e sejam $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém Ω.
  Como se viu anteriormente, o teorema de Green permite exprimir o integral de linha de um campo vectorial ao longo da curva *C*, através de um integral duplo sobre a região Ω, isto é,

$$\iint_\Omega \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dxdy = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (24)$$

  onde o integral à direita é o integral de linha ao longo de *C*, percorrida no sentido directo.

- É possível mostrar que a expressão (24) pode ser reescrita, em termos vectoriais, sob a forma

$$\iint_\Omega (\nabla \cdot \vec{v})\ dxdy = \oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n})ds \qquad (25)$$

  onde o integral à direita está definido em relação ao comprimento de arco, sendo $\vec{n}$ o versor normal à tangente em cada ponto da curva *C*, dirigido para o exterior da região Ω.
  Admita-se que a curva C é parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}\ ,\ t \in I$$

  e seja o campo vectorial:

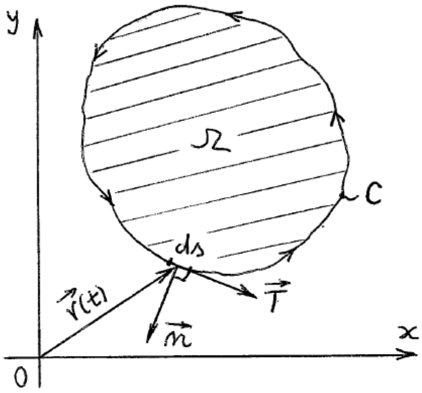
$$\vec{v}(x,y) = Q(x,y)\vec{i} - P(x,y)\vec{j}$$

Tem-se, então,

$$\iint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v})dxdy = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] dxdy$$

restando, agora, mostrar que:

$$\oint_C (\vec{v} \cdot \vec{n})ds = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$



Dado que a curva C é percorrida no sentido directo, então

$$\vec{n} = \vec{T} \times \vec{k}$$

em que $\vec{T}(t)$ é o versor da tangente à curva em cada um dos seus pontos.
Recorrendo às propriedades do produto vectorial e do produto misto, verifica-se:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot (\vec{T} \times \vec{k}) = \vec{k} \cdot (\vec{v} \times \vec{T}) = \vec{T} \cdot (\vec{k} \times \vec{v}) = -\vec{T} \cdot (\vec{v} \times \vec{k}) = (-\vec{v} \times \vec{k}) \cdot \vec{T}$$

Notando, ainda, que

$$-\vec{v} \times \vec{k} = (-Q\vec{i} + P\vec{j}) \times \vec{k} = -Q(\vec{i} \times \vec{k}) + P(\vec{j} \times \vec{k}) = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

resulta:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (P\vec{i} + Q\vec{j}) \cdot \vec{T}$$

Finalmente, tendo em conta que

$$d\vec{r} = \vec{T}ds = (dx)\vec{i} + (dy)\vec{j}$$

obtém-se:

$$\oint_C (\vec{v}\cdot\vec{n})ds = \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j})\cdot\vec{T}ds = \oint_C (P\vec{i} + Q\vec{j})\cdot d\vec{r} = \oint_C Pdx + Qdy$$

- É, ainda, possível relacionar o teorema de Green com o conceito de fluxo de um campo vectorial, quando aplicado ao espaço bidimensional.
  Assim, considere-se, neste caso, o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} \tag{26}$$

tal que:

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

Atendendo a (24), obtém-se

$$\iint_\Omega (\nabla\cdot\vec{v})dxdy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right]dxdy =$$

$$= \oint_C -Q(x,y)dx + P(x,y)dy = \oint_C (\vec{v}\cdot\vec{n})ds = \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{s} \tag{27}$$

já que:

$$d\vec{s} = \vec{n}ds = (dy)\vec{i} - (dx)\vec{j}$$

A expressão (27) traduz o *fluxo do campo vectorial* $\vec{v}(x,y)$, definido em (26), *através da curva C na direcção de* $\vec{n}$.

- O teorema seguinte, designado por *teorema de Gauss*, ou *teorema da divergência*, constitui uma generalização do teorema de Green, referido em (25), para o espaço tridimensional.

Teorema 7: Seja T um sólido limitado por uma superfície, S, *fechada e orientada* e seja $\vec{n}(x,y,z)$ a função que define, em cada ponto de S, o versor normal à superfície, dirigido para o exterior de S. Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial com derivadas parciais contínuas em S, então:

$$\iiint_T (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz = \oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})dS = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \qquad (28)$$

- A expressão (28) estabelece que o *fluxo do campo vectorial* $\vec{v}(x,y,z)$ *através da superfície* (fechada e orientada) S, *dirigido para o exterior de* S, tem o valor do integral triplo da função escalar definida pela *divergência de* $\vec{v}(x,y,z)$ sobre o sólido, T, limitado por S.

Exemplo 25: Resolva o problema do exemplo 4 recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

Solução:

Neste caso a superfície esférica

$$S \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ \ (a > 0)$$

é uma superfície fechada e orientada que limita o sólido (esfera):

$$T = \left\{(x,y,z) \ : \ 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le a^2\right\}$$

Dado que se pretende calcular o fluxo do campo vectorial

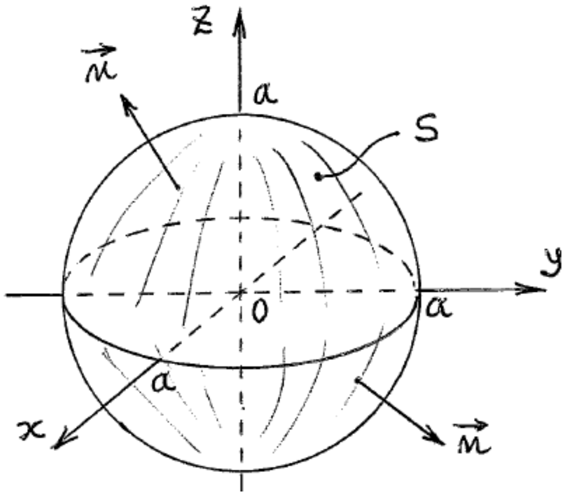
$$\vec{v}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + xz\vec{k}$$

através da superfície S, dirigido para o exterior de S, o teorema de Gauss permite escrever

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = \iiint_T (\nabla\cdot\vec{v})dxdydz$$

em que:

$$\nabla\cdot\vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(y)}{\partial y} + \frac{\partial(xz)}{\partial z} = 2 + x$$



Obtém-se, então,

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = 2\iiint_T dxdydz + \iiint_T (x)dxdydz = 2V(T) + \bar{x}V(T) = \frac{8}{3}\pi a^3$$

onde $\bar{x} = 0$ é a abcissa do centroide do sólido (esfera) T e

$$V(T) = \frac{4}{3}\pi a^3$$

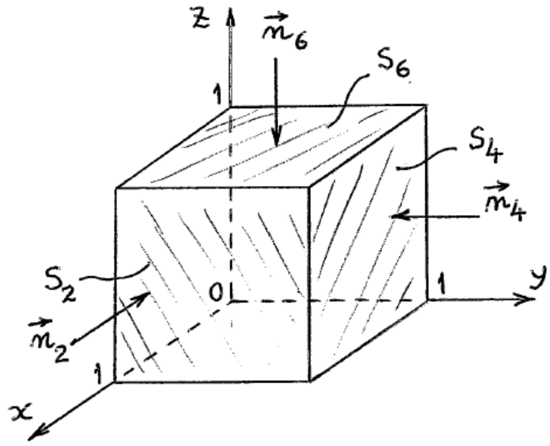
é o seu volume.

Exemplo 26: Resolva o problema do exemplo 6 recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

Solução:

Neste caso, a superfície (fechada e orientada) *S* corresponde à superfície que limita o sólido *T* (cubo):

$$T = \{(x,y,z)\ :\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\ ,\ 0 \le z \le 1\}$$



Dado que se pretende calcular o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy\vec{i} + 2yz^2\vec{j} + yz\vec{k}$$

através da superfície *S*, dirigido para o interior de *S*, o teorema de Gauss permite escrever

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})dS = -\iiint_T (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz$$

em que:

$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial(2yz^2)}{\partial y} + \frac{\partial(yz)}{\partial z} = 2y + 2z^2$$

Assim, obtém-se

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n})dS = -2\iiint_T (y)dxdydz - 2\iiint_T (z^2)dxdydz =$$

$$= -2\bar{y}V(T) - 2\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (z^2)dxdydz = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

onde $\bar{y} = 1/2$ é a ordenada do centroide do sólido (cubo) T e $V(T) = 1$ é o seu volume.

Exemplo 27: Calcule o fluxo do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$$

dirigido *de fora para dentro* da superfície fechada, *S*, definida por: $(x+1)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ e $z = 2$.

a) Recorrendo ao teorema de Gauss (da divergência).

b) Considerando a definição de integral de fluxo.

Solução:

a) A superfície fechada, *S*, constitui a superfície que limita o sólido *T* (cilindro):

$$T = \left\{(x,y,z)\ :\ 0 \le (x+1)^2 + y^2 \le 1\ ,\ 0 \le z \le 2\right\}$$

Tendo em atenção que

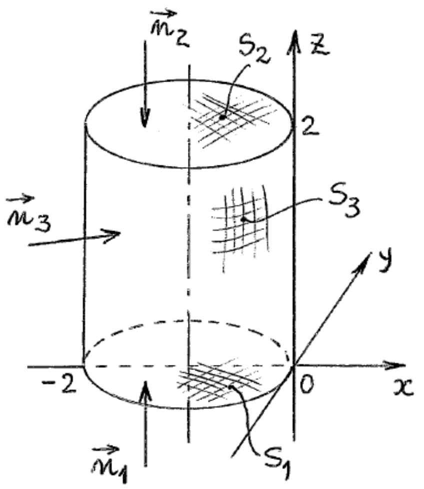
$$\nabla \cdot \vec{v}(x,y,z) = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial(z)}{\partial z} = 1 + x^2 + y^2$$

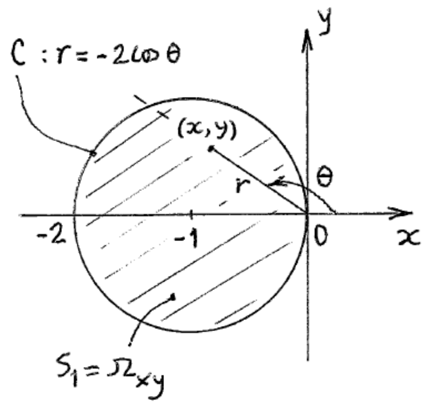
e dado que o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$ é dirigido para o interior de *S*, da aplicação do teorema de Gauss resulta

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = -\iiint_T (\nabla\cdot\vec{v})dxdydz = -\iiint_T (1+x^2+y^2)dxdydz =$$

$$= -V(T) - \iiint_T (x^2+y^2)dxdydz = -2\pi - \iiint_T (x^2+y^2)dxdydz \qquad (29)$$

onde $V(T) = 2\pi$ é o volume do sólido *T* e o restante integral triplo deverá ser calculado recorrendo a coordenadas cilíndricas.





Nesse sentido, a projecção de *T* sobre o plano *xOy* é a região circular, Ω_{xy}, definida por

$$\Omega_{xy} = \left\{(x,y)\ :\ 0 \le (x+1)^2 + y^2 \le 1\right\}$$

e pode ser reescrita, no referencial $rO\theta$ (*coordenadas polares*), como:

$$\Gamma = \left\{(r,\theta)\ :\ \pi/2 \le \theta \le 3\pi/2\ ,\ 0 \le r \le -2\cos(\theta)\right\}$$

Assim, o sólido *T* pode ser descrito, em coordenadas cilíndricas, pela região:

$$\Pi = \left\{(r,\theta,z)\ :\ \pi/2 \le \theta \le 3\pi/2\ ,\ 0 \le r \le -2\cos(\theta)\ ,\ 0 \le z \le 2\right\}$$

O integral de fluxo apresentado em (29) toma, então, a forma:

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = -2\pi - \iiint_T (x^2+y^2)dxdydz = -2\pi - \iiint_\Pi (r^3)drd\theta dz =$$

$$= -2\pi - \int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{-2\cos(\theta)} (r^3)drd\theta dz =$$

$$= -2\pi - \frac{1}{4}\int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left[r^4 \right]_0^{-2\cos(\theta)} d\theta dz =$$

$$= -2\pi - 4\int_0^2 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^4(\theta)d\theta dz \qquad (30)$$

Particularizando, aplicando um processo de integração por partes, resulta:

$$4\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^4(\theta)d\theta = 4\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(\theta)\cos^3(\theta)d\theta =$$

$$= \left[\operatorname{sen}(\theta)\cos^3(\theta) \right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + 3\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(1+\cos(2\theta)\right)d\theta = \frac{3}{4}\left[2\theta + \operatorname{sen}(2\theta)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = \frac{3\pi}{2} \qquad (31)$$

Finalmente, substituindo (31) em (30), obtém-se:

$$\oiint_S (\vec{v}\cdot\vec{n})dS = -2\pi - \frac{3\pi}{2}\int_0^2 dz = -5\pi$$

b) O cálculo do fluxo através da definição exige, neste caso, o cálculo do fluxo através de cada uma das três superfícies elementares que limitam o sólido T (ver figura da página 7.43), nomeadamente, as duas regiões circulares, S_1 e S_2, que correspondem às bases do cilindro e a região cilíndrica, S_3, que constitui a superfície lateral de T.

Em relação à secção S_1 verifica-se:

$$\vec{v}(x,y,0) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j}\ , \qquad \vec{n}_1 = \vec{k} \ \Rightarrow \ \vec{v}\cdot\vec{n}_1 = 0$$

$$\iint_{S_1} (\vec{v}\cdot\vec{n}_1)dS = 0 \tag{32}$$

Em relação à secção S_2 tem-se

$$\vec{v}(x,y,2) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + 2\vec{k}\ , \qquad \vec{n}_2 = -\vec{k} \ \Rightarrow \ \vec{v}\cdot\vec{n}_2 = -2$$

$$\iint_{S_2} (\vec{v}\cdot\vec{n}_2)dS = -2\iint_{S_2} dS = -2A(S_2) = -2\pi \tag{33}$$

onde $A(S_2) = \pi$ é a área da região circular S_2.
A região cilíndrica S_3 pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(\theta,z) = -2\cos^2(\theta)\vec{i} - 2\cos(\theta)\mathrm{sen}(\theta)\vec{j} + z\vec{k}\ ,\ (\theta,z)\in R$$

em que:

$$R = \left\{(\theta,z) : \pi/2 \le \theta \le 3\pi/2\ ,\ 0 \le z \le 2\right\}$$

O produto vectorial fundamental é

$$\vec{N}(\theta,z) = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\,2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) & \mathrm{sen}^2(\theta)-\cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(\mathrm{sen}^2(\theta)-\cos^2(\theta)\right)\vec{i} - 4\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)\vec{j}$$

e está orientado no sentido *de dentro para fora* da superfície S_3, isto é, tem o sentido oposto ao que é considerado para o versor normal à superfície, $\vec{n}_3$; note-se que, por exemplo, se $\pi/2 < \theta < \pi$, então $-4\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) > 0$.

Nestas condições, uma vez que

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,z)\right] = -8\cos^4(\theta)\text{sen}^2(\theta)\vec{i} - 8\cos^5(\theta)\text{sen}(\theta)\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v}\left[\vec{r}(\theta,z)\right]\cdot\vec{N}(\theta,z) = -16\cos^4(\theta)\text{sen}^4(\theta) + 48\cos^6(\theta)\text{sen}^2(\theta) =$$

$$= -16\cos^4(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right)^2 + 48\cos^6(\theta)\left(1-\cos^2(\theta)\right) =$$

$$= -16\cos^4(\theta) + 80\cos^6(\theta) - 64\cos^8(\theta)$$

resulta:

$$\iint_{S_3}(\vec{v}\cdot\vec{n}_3)dS = -\iint_R \vec{v}\left[\vec{r}(\theta,z)\right]\cdot\vec{N}(\theta,z)d\theta dz =$$

$$= 16\int_0^2\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\cos^4(\theta) - 5\cos^6(\theta) + 4\cos^8(\theta)\right)d\theta dz \qquad (34)$$

Aplicando um processo de integração por partes e atendendo a (31), tem-se:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^6(\theta)d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\theta)\cos^5(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\text{sen}(\theta)\cos^5(\theta)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{5}{6}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^4(\theta)d\theta = \frac{5\pi}{16} \qquad (35)$$

Por outro lado, aplicando novamente um processo de integração por partes e atendendo a (35), obtém-se:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^8(\theta)d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos(\theta)\cos^7(\theta)d\theta =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\text{sen}(\theta)\cos^7(\theta)\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \frac{7}{8}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^6(\theta)d\theta = \frac{35\pi}{128} \qquad (36)$$

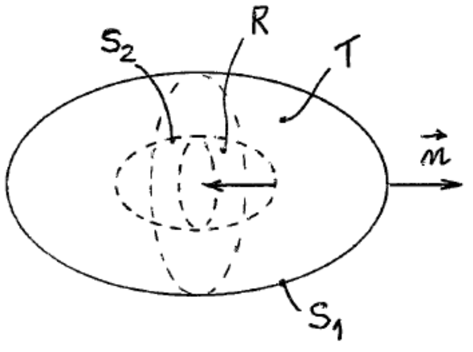
Substituindo em (34) os valores obtidos em (31), (35) e (36), conclui-se que o fluxo através da superfície S_3 é:

$$\iint_{S_3} (\vec{v} \cdot \vec{n}_3) dS = 16\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{25\pi}{16} + \frac{35\pi}{32}\right)\int_0^2 dz = -3\pi \tag{37}$$

Finalmente, tendo em atenção (32), (33) e (37), o fluxo do campo vectorial $\vec{v}(x,y,z)$, dirigido *de fora para dentro* da superfície fechada S, tem o valor:

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \sum_{i=1}^{3} \iint_{S_i} (\vec{v} \cdot \vec{n}_i) dS = 0 - 2\pi - 3\pi = -5\pi$$

- O teorema da divergência apresentado em (28), definido para sólidos limitados por uma única superfície fechada e orientada, pode ser generalizado a sólidos limitados por várias superfícies fechadas e orientadas.



Considere-se, por exemplo, um sólido limitado por uma *superfície fechada e orientada* S_1 e extraia-se do seu interior um sólido, R, limitado por uma *superfície fechada e orientada* S_2.

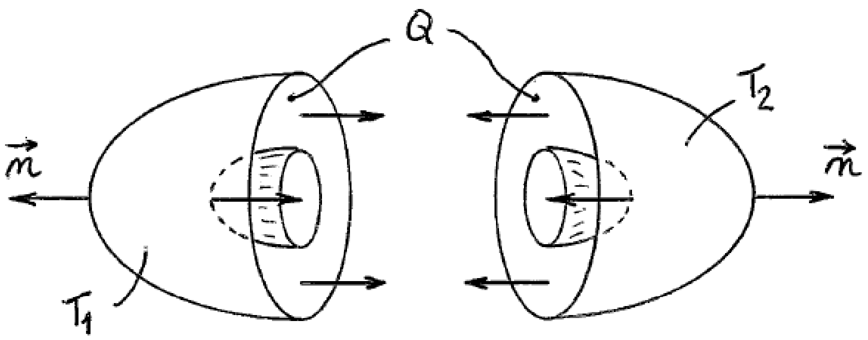
A fronteira, S, do sólido restante, T, é formada por duas regiões, nomeadamente, a região exterior S_1 e a região interior S_2.

O teorema da divergência pode ser estabelecido para o sólido T, dividindo-o em duas partes, T_1 e T_2, e aplicando o teorema da divergência a cada uma delas, isto é,

$$\iiint_{T_1} (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz = \oiint_{S_{T1}} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS \qquad (38)$$

$$\iiint_{T_2} (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz = \oiint_{S_{T2}} (\vec{v} \cdot \vec{n})dS \qquad (39)$$

onde S_{T1} e S_{T2} designam, respectivamente, as fronteiras de T_1 e T_2.



Adicionando os dois integrais triplos nos primeiros membros de (38) e (39), obtém-se, tendo em atenção a aditividade do integral triplo, o integral triplo sobre o sólido T, ou seja:

$$\iiint_{T} (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz = \sum_{j=1}^{2} \iiint_{T_j} (\nabla \cdot \vec{v})dxdydz$$

Contudo, quando se somam os dois integrais de superfície, nos segundos membros dessas mesmas equações, as contribuições da secção, Q, que é comum às partes T_1 e T_2 anulam-se (os versores normais apontam em sentidos opostos), restando, portanto, as contribuições relativas aos integrais de superfície sobre as regiões S_1 e S_2.

Assim, uma vez que $S = S_1 \cup S_2$, resulta

$$\oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{S_1} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \iint_{S_2} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS =$$

$$= \oiint_{S_{T1}} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS + \oiint_{S_{T2}} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

podendo concluir-se que o teorema da divergência se mantém válido para o sólido *T*, pelo que:

$$\iiint_T (\nabla \cdot \vec{v}) dxdydz = \oiint_S (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Teorema de Stokes

- Seja, novamente, o teorema de Green. Se Ω é uma região de Jordan limitada por uma curva de Jordan suave por secções, C, e $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são campos escalares continuamente diferenciáveis num conjunto aberto que contém Ω, então

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right]dxdy=\oint_{C}P(x,y)dx+Q(x,y)dy \qquad (40)$$

onde o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva C, percorrida no sentido directo.

- Considerando, agora, o campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,0)=P(x,y,0)\vec{i}+Q(x,y,0)\vec{j}+0\vec{k} \qquad (41)$$

obtém-se para o seu rotacional

$$\nabla\times\vec{v}(x,y,0)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & 0\end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

e, portanto:

$$\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,0)\right)\cdot\vec{k}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

A expressão (40) pode, então, ser reescrita, em termos do campo vectorial (41), sob a forma

$$\iint_{\Omega}\left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,0)\right)\cdot\vec{k}\right]dxdy=\oint_{C}P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_{C}\vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \quad (42)$$

onde

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}\ ,\ t\in I$$

é a função vectorial que parametriza a curva *C*.

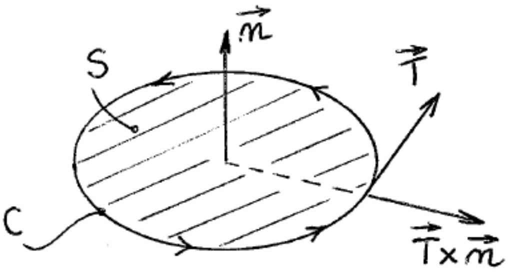
- A propriedade expressa em (42), derivada para uma região de Jordan situada no plano coordenado *xOy*, pode, ainda, ser aplicada a uma superfície plana do espaço $\mathbb{R}^3$.

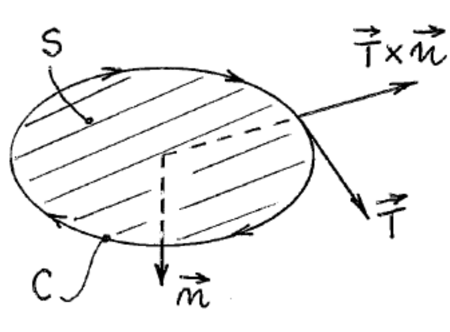
  Seja *S* uma superfície plana de $\mathbb{R}^3$ limitada por uma curva de Jordan suave por secções, *C*. Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém *S*, então

$$\iint_{S}\left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\right)\cdot\vec{n}\right]dS=\oint_{C}\vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

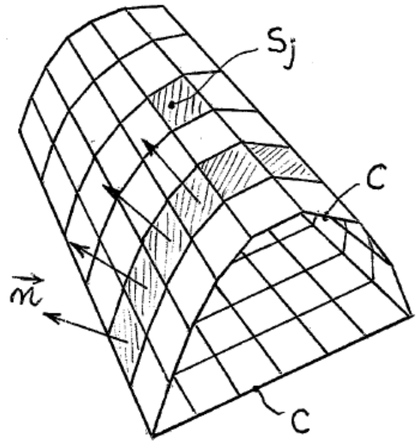
  onde $\vec{n}$ é o versor normal à superfície *S* e o integral à direita é o integral de linha ao longo de *C*, percorrido no *sentido positivo em relação a* $\vec{n}$, isto é, no sentido do versor da tangente, $\vec{T}$, à curva *C*, o qual é definido de modo que o versor $\vec{T}\times\vec{n}$ aponte na direcção exterior à superfície *S*.

  Neste caso, diz-se que a curva *C* é *percorrida no sentido positivo* (*em relação a* $\vec{n}$).





- A figura seguinte ilustra uma *superfície poliédrica*, S, limitada, no seu bordo, por uma *linha poligonal fechada*, C. A superfície S é constituída por um número finito de faces planas, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, que são, respectivamente, limitadas pelas linhas poligonais $C_1, C_2, \ldots, C_n$, e possuem versores normais $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_n$; admite-se que todos estes versores apontam para o mesmo lado da superfície S.



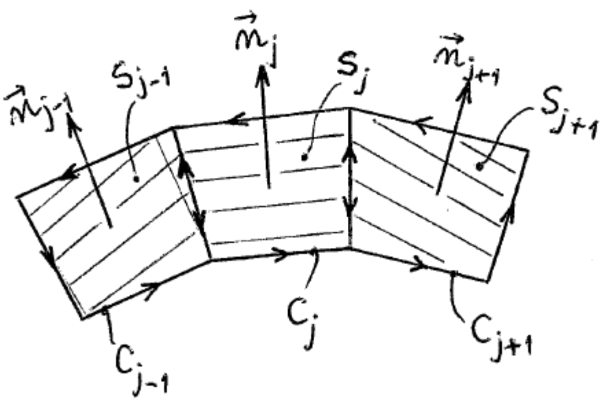
Seja, agora, $\vec{n} = \vec{n}(x,y,z)$ a função que define, em cada ponto de S, o versor normal à superfície e que toma os valores $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \ldots, \vec{n}_n$ nas faces planas $S_1, S_2, \ldots, S_n$, respectivamente, sendo irrelevante o seu valor em cada um dos segmentos de recta que são comuns a essas mesmas faces.
Assim, se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém S, então

$$\iint_\Omega \left[(\nabla \times \vec{v}(x,y,0)) \cdot \vec{k} \right] dxdy = \sum_{j=1}^{n} \iint_{S_j} \left[(\nabla \times \vec{v}(x,y,0)) \cdot \vec{n}_j \right] dS =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (43)$$

em que o integral de linha ao longo da linha poligonal C_j é definido de modo a que esta é percorrida *no sentido positivo* (*em relação a* $\vec{n}_j$).

Quando se somam os integrais de linha no segundo membro de (43), verifica-se o anulamento das contribuições, para o integral de linha, dos segmentos de recta que não pertencem à linha poligonal fechada *C*, já que esses segmentos de recta, sendo comuns a duas faces planas adjacentes, são percorridos duas vezes e em sentidos opostos.



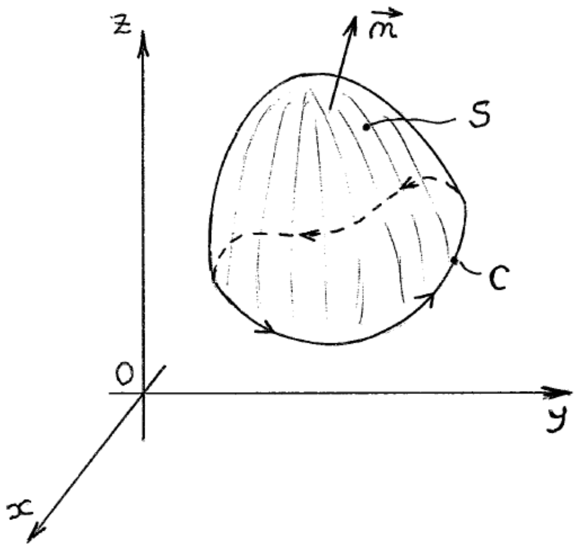
Então, tendo em atenção que

$$\sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Obtém-se para uma superfície poliédrica, *S*, limitada por uma linha poligonal fechada, *C*:

$$\iint_S \left[\left(\nabla \times \vec{v}(x,y,z) \right) \cdot \vec{n} \right] dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \qquad (44)$$

- A propriedade estabelecida em (44) pode ser generalizada a uma superfície suave e orientada, *S*, limitada por uma curva suave, *C*, já que esta superfície pode ser sempre aproximada por uma superfície poliédrica. No limite, quando o número de faces planas, S_j, admitidas na aproximação tender para infinito, a superfície poliédrica tende para a superfície *S*.



É desta forma informal que é possível justificar a propriedade transcrita no teorema seguinte, que é conhecido por *teorema de Stokes*.

Teorema 8: Seja *S* uma *superfície regular e orientada* limitada por uma *curva suave*, *C*. Se $\vec{v}(x,y,z)$ é um campo vectorial continuamente diferenciável num conjunto aberto que contém *S*, então

$$\iint_S \left[\left(\nabla \times \vec{v}(x,y,z) \right) \cdot \vec{n} \right] dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

onde $\vec{n}$ é o versor normal a *S*, que varia continuamente em *S*, e o integral à direita é o integral de linha ao longo da curva *C*, *percorrida no sentido positivo* (*em relação a* $\vec{n}$).

Exemplo 28: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} - xyz\vec{k}$$

através da superfície parabólica

$$S \ : \ z = 1-(x^2+y^2) \ , \ z \geq 0$$

no sentido *de dentro para fora* da superfície:

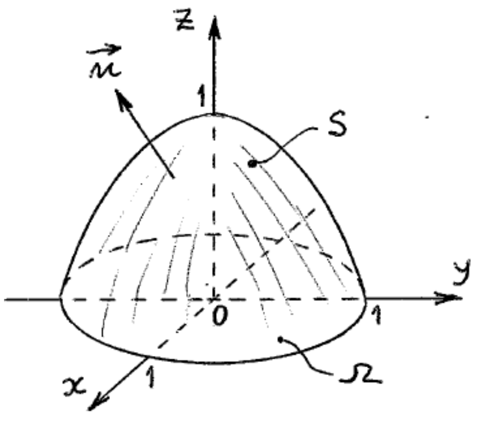
a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla\times\vec{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & x^2y & -xyz \end{vmatrix} = (-xz)\vec{i} + (yz)\vec{j} + 0\vec{k}$$



A superfície parabólica orientada, S, pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (1-x^2-y^2)\vec{k} \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que

$$\Omega = \left\{ (x, y) \, : \, 0 \le x^2 + y^2 \le 1 \right\}$$

e o seu produto vectorial fundamental é dado por:

$$\vec{N}(x, y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(x, y)$, e o versor normal à superfície, $\vec{n}(x, y)$, estão orientados no mesmo sentido, isto é, no sentido *de dentro para fora* de *S*.
Assim, atendendo a (7) e sabendo que

$$(\nabla \times \vec{v})\left[\vec{r}(x, y) \right] = -x(1 - x^2 - y^2)\vec{i} + y(1 - x^2 - y^2)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$(\nabla \times \vec{v})\left[\vec{r}(x, y) \right] \cdot \vec{N}(x, y) = -2(x^2 - y^2) + 2(x^4 - y^4)$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla \times \vec{v}$ através de *S*:

$$\iint_S \left[\left(\nabla \times \vec{v}(x, y, z) \right) \cdot \vec{n} \right] dS = -2 \iint_\Omega \left((x^2 - y^2) - (x^4 - y^4) \right) dxdy \qquad (45)$$

Recorrendo a *coordenadas polares*

$$x = r\cos(\theta) \quad , \quad y = r \ \mathrm{sen}(\theta) \quad , \quad dxdy = r \ drd\theta$$

então

$$(x^2 - y^2) - (x^4 - y^4) = r^2 \left(\cos^2(\theta) - sen^2(\theta) \right) +$$

$$+ r^4 \left(\cos^4(\theta) - \mathrm{sen}^4(\theta) \right) \ , \ (r, \theta) \in \Omega_1$$

em que:

$$\Omega_1 = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le 2\pi \ , \ 0 \le r \le 1\}$$

Assim, a expressão (45) toma a forma:

$$\iint_S \left[(\nabla \times \vec{v}(x,y,z)) \cdot \vec{n} \right] dS = -2\iint_\Omega \Big((x^2 - y^2) - (x^4 - y^4) \Big) dxdy =$$

$$= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 \Big(\cos^2(\theta) - sen^2(\theta) \Big) drd\theta -$$

$$-2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^5 \Big(\cos^4(\theta) - sen^4(\theta) \Big) drd\theta =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big(\cos^2(\theta) - sen^2(\theta) \Big) d\theta -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \Big(\cos^4(\theta) - sen^4(\theta) \Big) d\theta \qquad (46)$$

Particularizando, verifica-se:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{4}[2\theta + \mathrm{sen}(2\theta)]_0^{2\pi} = \pi \qquad (47)$$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta = \frac{1}{4}[2\theta - \mathrm{sen}(2\theta)]_0^{2\pi} = \pi \qquad (48)$$

Por outro lado, recorrendo a processos de integração por partes e atendendo a (47) e (48), resulta:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\cos^3(\theta) d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{sen}(\theta)\cos^3(\theta) \Big]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \frac{3\pi}{4} \qquad (49)$$

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^4(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta)\text{sen}^3(\theta)d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\Big[\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta)\Big]_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\theta)d\theta = \frac{3\pi}{4} \qquad (50)$$

Finalmente, substituindo (47) a (50) em (46), obtém-se:

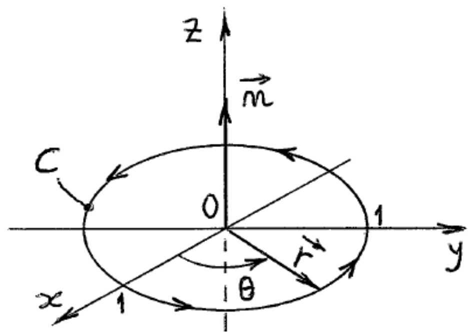
$$\iint_S \Big[\big(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\big)\cdot\vec{n}\Big]dS = -\frac{1}{2}(\pi-\pi) - \frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

b) A superfície parabólica

$$S \; : \; z = 1-(x^2+y^2) \; , \; z \geq 0$$

é limitada, no seu bordo, pela circunferência de raio um e centrada na origem:

$$C \; : \; x^2+y^2 = 1 \; , \; z = 0$$



Esta linha pode ser parametrizada através da função vectorial:

$$C \; : \; \vec{r}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + sen(\theta)\vec{j} + 0\vec{k} \; , \; \theta \in [0,2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de dentro para fora* da superfície *S*, o versor normal, $\vec{n}$, está orientado no *sentido do semieixo positivo dos zz* e, portanto, a linha *C* deverá ser percorrida no *sentido directo*, quando vista de um ponto com cota positiva.

Sabendo que

$$\vec{r}'(\theta) = -\text{sen}(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right) = \cos(\theta)\text{sen}^2(\theta)\vec{i} + \text{sen}(\theta)\cos^2(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right)\cdot\vec{r}'(\theta) = -\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta) + \text{sen}(\theta)\cos^3(\theta)$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S \left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\right)\cdot\vec{n}\right]dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\cos(\theta)\text{sen}^3(\theta) - \text{sen}(\theta)\cos^3(\theta)\right)d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\text{sen}^4(\theta)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4}\left[\cos^4(\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$$

Exemplo 29: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = -3y\vec{i} + 3x\vec{j} + z^4\vec{k}$$

através da superfície do elipsoide

$$S\ :\ 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\ ,\ z \geq \sqrt{2}/2$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície:

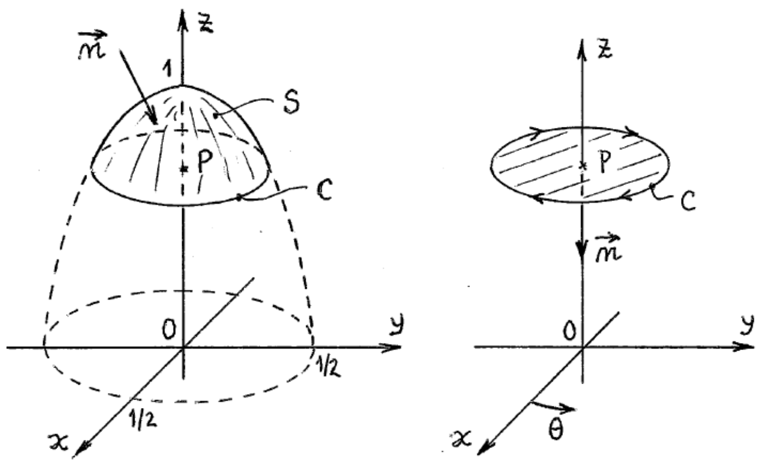
a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla \times \vec{v}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & z^4 \end{vmatrix} = 6\vec{k}$$



A superfície elipsoidal orientada, S, pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{1-4(x^2+y^2)}\,\vec{k} \ , \ (x,y) \in \Omega$$

em que

$$\Omega = \left\{ (x,y) \ : \ 0 \le x^2 + y^2 \le 1/8 \right\}$$

e o seu produto vectorial fundamental é dado por:

$$\vec{N}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4x\left(1-4(x^2+y^2)\right)^{-1/2} \\ 0 & 1 & -4y\left(1-4(x^2+y^2)\right)^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4x}{\sqrt{1-4(x^2+y^2)}}\vec{i} + \frac{4y}{\sqrt{1-4(x^2+y^2)}}\vec{j} + \vec{k}$$

Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(x,y)$, e o versor normal à superfície, $\vec{n}(x,y)$, estão orientados em sentidos opostos ($\vec{N}(x,y)$ tem coordenada positiva na direcção do eixo dos *zz*).
Assim, atendendo a (8) e sabendo que

$$(\nabla\times\vec{v})\big[\vec{r}(x,y)\big]=6\vec{k}\,, \qquad\qquad (\nabla\times\vec{v})\big[\vec{r}(x,y)\big]\cdot\vec{N}(x,y)=6$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla\times\vec{v}$ através de *S*

$$\iint_S\big[(\nabla\times\vec{v}(x,y,z))\cdot\vec{n}\big]dS=-6\iint_\Omega dxdy=-6A(\Omega)=-\frac{3\pi}{4}$$

onde $A(\Omega)=\pi/8$ é a área da região circular Ω.

b) A superfície do elipsoide

$$S\ :\ 4x^2+4y^2+z^2=1\,,\ z\ge\sqrt{2}/2$$

é limitada, no seu bordo, pela linha

$$C\ :\ x^2+y^2=1/8\,,\ z=\sqrt{2}/2$$

isto é, pela circunferência de raio $\sqrt{2}/4$ e centrada em $P=\left(0,0,\sqrt{2}/2\right)$, que pode ser parametrizada através da função vectorial:

$$C\ :\ \vec{r}(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\theta)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}sen(\theta)\vec{j}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}\ ,\ \theta\in[0,2\pi]$$

Dado que o fluxo é no sentido *de fora para dentro* da superfície *S*, o versor normal, $\vec{n}$, está orientado no *sentido do semieixo negativo dos zz* e, portanto, a linha *C* deverá ser percorrida no *sentido directo*, quando vista da origem do referencial.
Sabendo que

$$\vec{r}\,'(\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{sen}(\theta)\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos(\theta)\vec{j}+0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{sen}(\theta)\vec{i} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\cos(\theta)\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right)\cdot\vec{r}'(\theta) = \frac{3}{8}$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S \left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\right)\cdot\vec{n}\right]dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \frac{3}{8}\int_{2\pi}^{0} d\theta = -\frac{3\pi}{4}$$

Exemplo 30: Calcule o fluxo do rotacional do campo vectorial

$$\vec{v}(x,y,z) = z^2\vec{i} - 2x\vec{j} + y^3\vec{k}$$

através da superfície esférica

$$S \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ , \ z \geq 0$$

no sentido *de fora para dentro* da superfície:

a) Considerando a definição de integral de fluxo.

b) Recorrendo ao teorema de Stokes.

Solução:

a) O rotacional de $\vec{v}(x,y,z)$ é o campo vectorial:

$$\nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & -2x & y^3 \end{vmatrix} = 3y^2\vec{i} + 2z\vec{j} - 2\vec{k}$$

A superfície esférica orientada, S, pode ser parametrizada através da função vectorial

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{4-(x^2+y^2)}\,\vec{k} \;,\; (x,y) \in \Omega$$

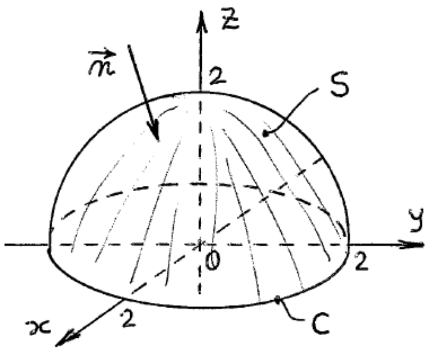
em que

$$\Omega = \left\{ (x,y) \,:\, 0 \le x^2 + y^2 \le 4 \right\}$$

e o seu produto vectorial fundamental é dado por:

$$\vec{N}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -x\left(4-(x^2+y^2)\right)^{-1/2} \\ 0 & 1 & -y\left(4-(x^2+y^2)\right)^{-1/2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}\vec{j} + \vec{k}$$



Neste caso, o produto vectorial fundamental, $\vec{N}(x,y)$, e o versor normal à superfície, $\vec{n}(x,y)$, estão orientados em sentidos opostos ($\vec{N}(x,y)$ tem coordenada positiva na direcção do eixo dos *zz*).
Assim, atendendo a (8) e sabendo que

$$(\nabla \times \vec{v})\left[\vec{r}(x,y)\right] = 3y^2\vec{i} + 2\sqrt{4-(x^2+y^2)}\,\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$(\nabla \times \vec{v})\left[\vec{r}(x,y)\right] \cdot \vec{N}(x,y) = \frac{3xy^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} + 2y - 2$$

obtém-se para o fluxo do campo vectorial $\nabla \times \vec{v}$ através de *S*:

$$\iint_S \left[(\nabla \times \vec{v}(x,y,z)) \cdot \vec{n} \right] dS = -\iint_\Omega \left[\frac{3xy^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} + 2y - 2 \right] dxdy$$

Uma vez que a função

$$h(x,y) = \frac{3xy^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$$

é ímpar na variável *x* e a região de integração Ω é simétrica em relação ao eixo dos *yy*, resulta:

$$\iint_\Omega \frac{3xy^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} dxdy = 0$$

Então, o fluxo do campo vectorial $\nabla \times \vec{v}$ através de *S* reduz-se à expressão

$$\iint_S \left[(\nabla \times \vec{v}(x,y,z)) \cdot \vec{n} \right] dS = -2\iint_\Omega (y) dxdy + 2\iint_\Omega dxdy =$$

$$= -2\bar{y}A(\Omega) + 2A(\Omega) = 8\pi$$

em que $A(\Omega) = 4\pi$ é a área da região circular Ω e $\bar{y} = 0$ é a ordenada do seu centroide.

b) A superfície esférica

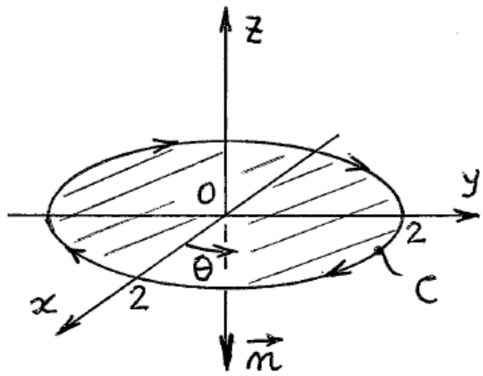
$$S \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ , \ z \geq 0$$

é limitada, no seu bordo, pela linha

$$C \ : \ x^2 + y^2 = 4 \ , \ z = 0$$

isto é, pela circunferência de raio dois e centrada na origem, que pode ser parametrizada através da função vectorial:

$$C \;:\; \vec{r}(\theta) = 2\cos(\theta)\vec{i} + 2sen(\theta)\vec{j} + 0\vec{k} \;,\; \theta \in [0,2\pi]$$



Dado que o fluxo é no sentido *de fora para dentro* da superfície *S*, o versor normal, $\vec{n}$, está orientado no *sentido do semieixo negativo dos zz* e, portanto, a linha *C* deverá ser percorrida no *sentido retrógrado*, quando vista de um ponto com cota positiva.
Sabendo que

$$\vec{r}'(\theta) = -2\mathrm{sen}(\theta)\vec{i} + 2\cos(\theta)\vec{j} + 0\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right) = 0\vec{i} - 4\cos(\theta)\vec{j} + 8\mathrm{sen}^3(\theta)\vec{k}$$

$$\vec{v}\left(\vec{r}(\theta)\right)\cdot\vec{r}'(\theta) = -8\cos^2(\theta)$$

da aplicação do teorema de Stokes resulta:

$$\iint_S \left[\left(\nabla\times\vec{v}(x,y,z)\right)\cdot\vec{n}\right]dS = \oint_C \vec{v}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -8\int_{2\pi}^{0}\cos^2(\theta)d\theta =$$

$$= -4\int_{2\pi}^{0}\left(1+\cos(2\theta)\right)d\theta = -2\left[2+sen(2\theta)\right]_{2\pi}^{0} = 8\pi$$