Curso MIEIC Data / /

Disciplina CMAT Ano Semestre

Nome

Espaço reservado para o avaliador PROVA DE AFERIÇÃO - 29/04/2020

1) $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 1+\operatorname{sen}(t), \sqrt{3}\operatorname{sen}(t)),\ t \in [0, 2\pi]$

$P = (2,1,0) = \vec{r}(0)$

a) Vector Tangente a C:

$\vec{r}'(t) = (-2\operatorname{sen}(t), \cos(t), \sqrt{3}\cos(t))$

Vector Tangente em P:

$\vec{r}'(0) = (0, 1, \sqrt{3})$ $\Rightarrow$ Vector de Tangente em P:

$\vec{T}(0) = \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} = \frac{1}{2}(0,1,\sqrt{3})$

b) $Q = (0,0,-\sqrt{3}) = \vec{r}(3\pi/2)$

$\widehat{PQ} = \int_0^{3\pi/2} \|\vec{r}'(t)\|\, dt$ em que

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 3\cos^2(t)} = \sqrt{4} = 2$

$\widehat{PQ} = \int_0^{3\pi/2} 2\, dt = 2\,[t]_0^{3\pi/2} = 3\pi$

2) $f(x,y,z) = (x-y)^4 + y^2 + 2z$

$C: \vec{r}(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \pi - t),\ t \in \mathbb{R}$

a) Vector Tangente a C:

$\vec{r}'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), -1)$

Dado que $P = (0, 1, \pi/2) = \vec{r}(\pi/2)$ então o vector tangente em P é

$$\vec{r}\,'(\pi/2) = (-1, 0, -1) \Rightarrow \| \vec{r}\,'(\pi/2) \| = \sqrt{2}$$

e, portanto, o versor da tangente é

$$\vec{u} = \vec{T}(\pi/2) = \frac{\vec{r}\,'(\pi/2)}{\| \vec{r}\,'(\pi/2) \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1)$$

O gradiente de $f(x,y,z)$ é:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(4(x-y)^3, -4(x-y)^3 + 2y, 2 \right)$$

O gradiente de $f(x,y,z)$ em P é:

$$\nabla f(0, 1, \pi/2) = (-4, 6, 2)$$

Então a derivada direccional de $f(x,y,z)$ em P e segundo a direcção $\vec{u}$ é:

$$f'(P; \vec{u}) = \nabla f(P) \cdot \vec{u} = (-4,6,2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2) =$$
$$= \sqrt{2}$$

b) Designando por $\theta = \measuredangle(\nabla f, \vec{v})$ então

$$f'(P; \vec{v}) = \nabla f(P) \cdot \vec{v} = \| \nabla f(P) \| \underbrace{\| \vec{v} \|}_{\substack{=1 \\ (\text{versor})}} \cos(\theta) =$$
$$= \| \nabla f(P) \| \cos(\theta)$$

Uma vez que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, então $f'(P, \vec{v})$ é mínima quando $\cos(\theta) = -1$, isto é, se os vectores $\nabla f(P)$ e $\vec{v}$ forem colineares e tiverem sentidos opostos.

Concluindo $f'(P; \vec{v})$ é mínimo se

$$\vec{v} = -\frac{\nabla f(P)}{\| \nabla f(P) \|} = -\frac{1}{\sqrt{56}}(-4,6,2) = -\frac{1}{\sqrt{14}}(-2,3,1)$$

Wm

U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso ______ Data __/__/__

Disciplina ______ Ano ____ Semestre ____

Nome ______

Espaço reservado para o avaliador

Neste a taxa de variação (mínima) tem o valor

$$f'(P;v) = -\|\nabla f(P)\| = -\sqrt{56} = -2\sqrt{14}$$
$$(\cos(\theta) = -1)$$

3) $\cos(2x+3y) - xy - z^2y + z = -1$ com $z = z(x,y)$ e

$Q = \left(0, \pi, \frac{1}{\pi}\right)$.

a) Derivando a expressão dada em ordem a y resulta

$$-3\,\text{sen}(2x+3y) - x - z^2 - 2zy\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1 - 2yz) = 3\,\text{sen}(2x+3y) + x + z^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3\,\text{sen}(2x+3y) + x + z^2}{1 - 2yz}$$

Assim: $$\frac{\partial z}{\partial y}\left(0, \pi, \frac{1}{\pi}\right) = \frac{3\,\underbrace{\text{sen}(3\pi)}_{=0} + \frac{1}{\pi^2}}{1 - 2} =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2}$$

b) Dado que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, derivando, por exemplo, a expressão (1) da alínea anterior em ordem a x resulta:

$$-6\cos(2x+3y) - 1 - 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - 2yz\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1-2yz) = 6\cos(2x+3y) + 1 + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{1}{1-2yz}\left[6\cos(2x+3y) + 1 + \underset{(?)}{\frac{\partial z}{\partial x}}\left(2z + 2y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]$$

Então:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(Q) = \frac{1}{1-2}\left[6\cos(3\pi) + 1 + \underset{(?)}{\frac{\partial z}{\partial x}}\underbrace{\left(\frac{2}{\pi} + 2\pi\left(-\frac{1}{\pi^2}\right)\right)}_{=0}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(0, \pi, \frac{1}{\pi}\right) = -\left[-6+1\right] = 5$$

(Não é necessário conhecer o valor de $\frac{\partial z}{\partial x}(Q)$)

4) Função: $f(x,y) = x^3 + 3y^2 + 3xy - 3$

a)

$$\nabla f(x,y) = (3x^2+3y,\ 6y+3x) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y = 0 \\ 6y+3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y = 0 \\ x+2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(4y+1) = 0 \\ x = -2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1/4 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

U.PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ___/___/___

Disciplina .... Ano ...... Semestre ......

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador

Pontos Estacionários : $O = (0,0)$, $P = (1/2, -1/4)$.

b) Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 6y + 3x$ então

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad , \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$$

i) No ponto $O = (0,0)$:

$\Delta = AC - B^2 = 0 - 9 = -9 < 0$

A função tem um ponto de sela em $O = (0,0)$.

ii) No ponto $P = (1/2, -1/4)$:

$\Delta = (3)(6) - 9 = 9 > 0$ e $A = 3 > 0$

A função tem um mínimo local (neste caso, um mínimo absoluto) em $P = (1/2, -1/4)$ tendo o valor

$$f(1/2, -1/4) = \frac{1}{8} + \frac{3}{16} - \frac{3}{8} - 3 = \frac{3}{16} - \frac{1}{4} - 3 =$$

$$= -\frac{49}{16}$$

5)

$$\iint_D (3y)\,dx\,dy = 3\int_{-1}^{1}\int_{-1-y}^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx\,dy$$

a)

$$\iint_D (3y)\,dx\,dy = 3\int_{-1}^{1}\left[y\,x\right]_{-1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$

$$= 3\int_{-1}^{1} y\sqrt{1-y^2}\,dy - 3\int_{-1}^{1} y(-1-y)\,dy =$$

$$= -\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(-2y)(1-y^2)^{1/2}\,dy + 3\int_{-1}^{1}(y+y^2)\,dy =$$

$$= -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left[(1-y^2)^{3/2}\right]_{-1}^{1} + 3\left[\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= -\left[0\right] + 3\left[\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}+\tfrac{1}{3}\right)-\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\tfrac{1}{3}\right)\right] = 2$$

b) O integral dado está definido considerando a região de integração D como uma região do tipo II (projectada sobre o eixo dos yy), pelo que

$$D = \{(x,y) : -1 \leq y \leq 1 \ ,\ -1-y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$$

A linha $x = -1-y$ é a recta $y = -1-x$ (declive -1)
A linha $x = \sqrt{1-y^2}$ é uma parte da circunferência $x^2+y^2=1$ (de raio 1 e centrada na origem).

Esboço da região D:

Wir

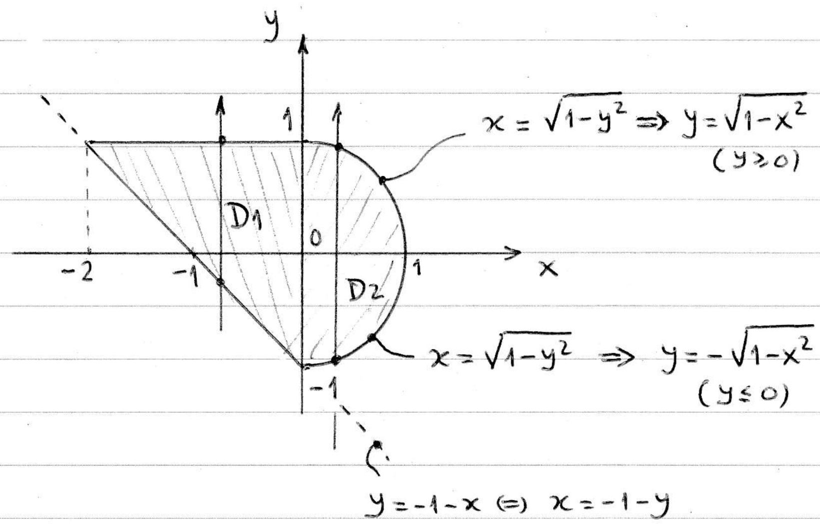
U. PORTO
FEUP FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

Curso .... Data ..../..../....

Disciplina .... Ano .... Semestre ....

Nome ....

Espaço reservado para o avaliador



A alteração da ordem de integração implica a definição da região D como região do tipo I. Projectando, assim, a região D sobre o eixo dos xx conclui-se que $-2 \leq x \leq 1$. Neste caso, a variação da ordenada dos pontos situados em D não é uniforme no intervalo $-2 \leq x \leq 1$, pelo que é necessário definir a região D como a reunião dos conjuntos

$$D = D_1 \cup D_2$$

em que

$$D_1 = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 0 , -1-x \leq y \leq 1\}$$

$$D_2 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 , -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

e, portanto,

$$\iint_D (3\ \ ) \, dx\, dy = \iint_{D_1} (3y)\, dy\, dx + \iint_{D_2} (3y)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} \int_{-1-x}^{1} (3y)\, dy\, dx + \int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3y)\, dy\, dx$$