FUNÇÕES VECTORIAIS

Introdução

- Chamam-se *funções reais a uma variável real*, ou simplesmente *funções escalares*, às funções que associam um número real a um dado número real. Por exemplo:

$$f(t) = 1 - 3t\,, \qquad g(t) = 1 + 2t + 3t^3\,, \qquad h(t) = \cos(4t) + e^t$$

- Chamam-se *funções vectoriais a uma variável real*, ou simplesmente *funções vectoriais*, às funções que associam um vector a um dado número real. Por exemplo:

$$\vec{f}(t) = \vec{r} + t\vec{d}\,, \qquad \vec{g}(t) = \vec{a} + t\vec{b} + t^2\vec{c}\,, \qquad \vec{h}(t) = \cos(4t)\vec{a} + \operatorname{sen}(2t)\vec{b}$$

- As funções vectoriais podem ser encontradas em diversas áreas da ciência. Por exemplo:
  i) **Geometria**: representação das linhas (rectas e curvas) no espaço e estudo das suas propriedades;
  ii) **Física/Mecânica**: trabalho realizado por uma força ao longo de uma dada trajectória, estudo do comportamento cinemático (espaço, velocidade e aceleração) de um corpo em movimento.

Definições

- Sendo $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ funções escalares definidas num intervalo *I*, então, para cada $t \in I$, é possível definir a função vectorial

$$\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}\ ,\ t \in I \tag{1}$$

em que *I* representa o *domínio de* $\vec{f}(t)$ e as funções $f_1(t)$, $f_2(t)$ e $f_3(t)$ são designadas por *componentes de* $\vec{f}(t)$.
Um valor *t* pertence ao domínio de $\vec{f}(t)$, se e só se pertencer ao domínio de cada uma das suas componentes. Se o domínio de $\vec{f}(t)$ não for especificado, admite-se que ele corresponderá ao domínio comum das suas componentes.

- Se a função $\vec{f}(t)$ definida em (1) for entendida como um *vector de posição* (*vector radial*) aplicado na origem do referencial, à medida que *t* toma valores no intervalo *I* a extremidade do vector de posição traça um determinado *caminho* (*curva*), *C*, no espaço. Diz-se, então, que $\vec{f}(t)$ *parametriza C*, sendo

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t) \text{ e } z = f_3(t)$$

as *equações paramétricas* de *C*. Se uma das suas componentes for nula em *I*, por exemplo, se $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j}$, $t \in I$, então *C* é uma *curva plana*; caso contrário, trata-se de uma *curva espacial*.

- Se se considerar o *referencial cartesiano ortonormado directo Oxyz* para se representar os vectores no espaço, a que está associada a *base canónica*, ou *base natural*, $E = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \subset \mathbb{R}^3$, a função vectorial definida em (1) pode ser simplesmente escrita sob a forma:

$$\vec{f}(t) = \left(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\right) \ , \ t \in I$$

Exemplo 1: Considerando as funções escalares

$$f_1(t) = p_1 + a_1 t \ , \qquad f_2(t) = p_2 + a_2 t \ , \qquad f_3(t) = p_3 + a_3 t \ , \qquad t \in \mathbb{R}$$

obtém-se a função vectorial

$$\vec{f}(t) = (p_1 + a_1 t)\vec{i} + (p_2 + a_2 t)\vec{j} + (p_3 + a_3 t)\vec{k} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

que parametriza a *linha recta* que passa no ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ e tem o *vector direcção* (*vector director*) $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = (a_1, a_2, a_3)$.
Se $\vec{a} = (0,0,0)$, então $\vec{f}(t)$ reduz-se à função constante:

$$\vec{f}(t) = p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k} = (p_1, p_2, p_3) \ , \ t \in \mathbb{R}$$

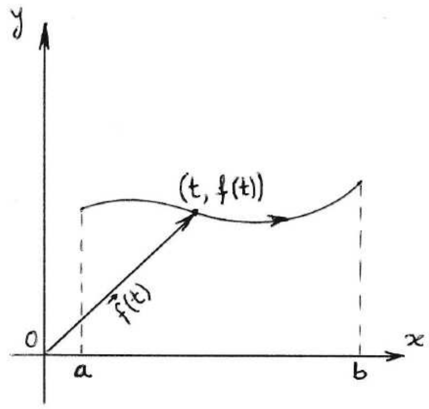
Neste caso, o caminho traçado por $\vec{f}(t)$ reduz-se ao ponto *P*.

Exemplo 2: A função vectorial

$$\vec{f}(t) = (1 - 3t)\vec{i} + (2 + t)\vec{j} + (-3 + 2t)\vec{k} \ , \ t \in [-1,1]$$

parametriza o *segmento de recta* que liga o ponto $P = (4,1,-5)$ ao ponto $Q = (-2,3,-1)$.

Exemplo 3: É possível associar a qualquer função real de variável real, *f*, definida no intervalo $[a,b]$, uma função vectorial.



Considerando

$$f_1(t)=t\,,\qquad f_2(t)=f(t)\,,\qquad f_3(t)=0\,,\qquad t\in[a,b]$$

obtém-se

$$\vec{f}(t)=t\vec{i}+f(t)\vec{j}+0\vec{k}\ ,\ t\in[a,b]$$

À medida que *t* varia entre *a* e *b*, a extremidade do vector de posição $\vec{f}(t)$ traça o *gráfico de f* no sentido definido pelos valores crescentes de *t*.

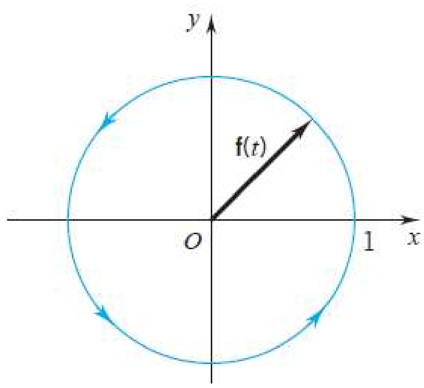
Exemplo 4: Seja a função vectorial

$$\vec{f}(t)=\cos(t)\vec{i}+\mathrm{sen}(t)\vec{j}\ ,\ t\in[0,2\pi] \tag{2}$$

Notando que

$$\left\|\vec{f}(t)\right\|=1\,,\ t\in[0,2\pi]$$

conclui-se que a função (2) parametriza uma *circunferência* de raio unitário, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no *sentido directo*.



Exemplo 5: A função vectorial

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k} \ , \ t \geq 0 \qquad (3)$$

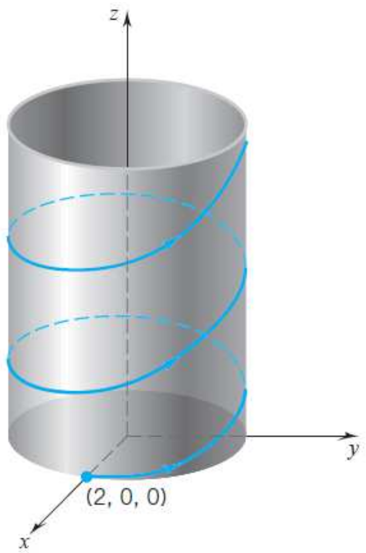
parametriza uma *hélice circular*. Se $t = 0$, a extremidade do vector de posição $\vec{f}(0)$ situa-se no ponto $(2,0,0)$.

À medida que *t* aumenta, a extremidade de $\vec{f}(t)$ descreve uma *espiral* situada sobre a *superfície cilíndrica circular*

$$x^2 + y^2 = 4 \ , \ z \in \mathbb{R}$$

efectuando uma volta completa em cada intervalo de *t* de amplitude 2π.

Em cada um desses intervalos a cota da extremidade de $\vec{f}(t)$ sofre uma variação de valor 2π, que é designado por *passo da hélice*.



Operações envolvendo funções vectoriais

Teorema 1: Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais e $u(t)$ uma função escalar, funções com um domínio comum *I*. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então é possível obter as seguintes funções vectoriais, definidas em *I*,

$$(\vec{f} + \vec{g})(t) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t), \qquad (\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})(t) = \alpha\vec{f}(t) + \beta\vec{g}(t),$$

$$(u\vec{f})(t) = u(t)\vec{f}(t), \qquad (\vec{f} \times \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$$

assim como a função escalar, definida em *I*:

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$$

Teorema 2: Seja $u(t)$ uma função escalar com domínio *I* e tal que o seu contradomínio está contido no domínio da função vectorial $\vec{f}(t)$. Então é possível obter a seguinte função vectorial (*composta*) definida em *I*:

$$(\vec{f} \circ u)(t) = \vec{f}[u(t)]$$

Limite de uma função vectorial

Teorema 3: Seja a função vectorial $\vec{f}(t)$ definida no intervalo *I* que contém o ponto t_0, podendo não estar definida em t_0, e seja o vector $\vec{a}$. Então:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a} \text{, se e só se } \lim_{t \to t_0} \left\| \vec{f}(t) - \vec{a} \right\| = 0 . \tag{4}$$

- A expressão $\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$ pode ser substituída por:

$$\text{quando } t \to t_0 ,\ \vec{f}(t) \to \vec{a}$$

Teorema 4: Seja a função vectorial $\vec{f}(t)$ definida no intervalo *I* que contém o ponto t_0, podendo não estar definida em t_0, e seja o vector $\vec{a}$. Então:

$$\lim_{t \to t_0} \left\| \vec{f}(t) \right\| = \left\| \vec{a} \right\| \text{, se } \lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a} \tag{5}$$

- Note-se que a proposição inversa de (5) é falsa; por exemplo, seja $\vec{f}(t) = \vec{i}$ e $\vec{a} = -\vec{i}$.

Regras para o cálculo de limites

Teorema 5: Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais, $u(t)$ uma função escalar e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Supondo que, quando $t \to t_0$,

$$\vec{f}(t) \to \vec{a}\,, \qquad \vec{g}(t) \to \vec{b}\,, \qquad u(t) \to \varphi$$

então:

$$\vec{f}(t) + \vec{g}(t) \to \vec{a} + \vec{b}\,, \qquad \alpha\vec{f}(t) + \beta\vec{g}(t) \to \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\,,$$

$$u(t)\vec{f}(t) \to \varphi\vec{a}\,, \qquad \vec{f}(t)\cdot\vec{g}(t) \to \vec{a}\cdot\vec{b}\,, \qquad \vec{f}(t)\times\vec{g}(t) \to \vec{a}\times\vec{b}$$

- O cálculo do limite apresentado em (4) pode ser feito componente a componente.

Teorema 6: Admitindo que $\vec{f}(t) = \big(f_1(t), f_2(t), f_3(t)\big)$ e $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, então $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$, se e só se:

$$\lim_{t\to t_0} f_1(t) = a_1, \qquad \lim_{t\to t_0} f_2(t) = a_2\,, \qquad \lim_{t\to t_0} f_3(t) = a_3 \tag{6}$$

Exemplo 6: Seja a função vectorial:

$$\vec{f}(t) = \cos(t-\pi)\vec{i} + 2\ln(e+t)\vec{j} + e^{2t^3}\vec{k}\ ,\ t \in (-e, +\infty)$$

Então:

$$\lim_{t\to 0}\vec{f}(t) = \left[\lim_{t\to 0}\cos(t-\pi)\right]\vec{i} + \left[2\lim_{t\to 0}\ln(e+t)\right]\vec{j} + \left[\lim_{t\to 0} e^{2t^3}\right]\vec{k} =$$

$$= (-1)\vec{i} + (2)\vec{j} + (1)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (-1, 2, 1)$$

Continuidade de uma função vectorial

- A função vectorial $\vec{f}(t)$ é *contínua* em t_0, se e só se:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$$

- Tendo em atenção (6) é evidente que $\vec{f}(t)$ é contínua em t_0, se e só se cada uma das suas componentes for contínua em t_0.

- Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais e $u(t)$ uma função escalar contínuas em t_0. Então as funções

$$(\vec{f} + \vec{g})(t), \qquad (\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})(t), \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

$$(u\vec{f})(t), \qquad (\vec{f} \cdot \vec{g})(t), \qquad (\vec{f} \times \vec{g})(t)$$

são contínuas em t_0.

- Sejam $u(t)$ uma função escalar contínua em t_0 e $\vec{f}(t)$ uma função vectorial contínua em $u(t_0)$. Então a função vectorial (*composta*) $(\vec{f} \circ u)(t)$ é contínua em t_0.

Derivabilidade de uma função vectorial

- A função vectorial $\vec{f}(t)$ é *diferenciável* (*derivável*) em *t*, se e só se:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{f}(t+h)-\vec{f}(t)}{h} \text{ existe.}$$

Se este limite existir, então ele é designado por *derivada de* $\vec{f}(t)$ *em t* e é indicado por $\vec{f}'(t)$.

- Também o cálculo da derivada da função vectorial $\vec{f}(t)$ pode ser feito componente a componente.

Teorema 7: Se $\vec{f}(t)=\left(f_1(t),f_2(t),f_3(t)\right)$ é diferenciável em *t*, então:

$$\vec{f}'(t)=f_1'(t)\vec{i}+f_2'(t)\vec{j}+f_3'(t)\vec{k}=\left(f_1'(t),f_2'(t),f_3'(t)\right)$$

- Tal como nas funções escalares, se $\vec{f}(t)$ é diferenciável em *t*, então $\vec{f}(t)$ é contínua em *t*. Além disso, se $\vec{f}'(t)$ é diferenciável em *t*, então é possível obter $\vec{f}''(t)$ (*segunda derivada*), e assim sucessivamente.

- Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais e $u(t)$ uma função escalar diferenciáveis em t_0. Então as funções

$$(\vec{f}+\vec{g})(t), \qquad (\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})(t), \text{ com } \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

$$(u\vec{f})(t), \qquad (\vec{f}\cdot\vec{g})(t), \qquad (\vec{f}\times\vec{g})(t)$$

são diferenciáveis em t_0.

- Sejam $u(t)$ uma função escalar diferenciável em t_0 e $\vec{f}(t)$ uma função vectorial diferenciável em $u(t_0)$. Então a função vectorial (*composta*) $(\vec{f} \circ u)(t)$ é diferenciável em t_0.

Exemplo 7: Seja a função vectorial:

$$\vec{f}(t) = \cos(t-\pi)\vec{i} + 2\ln(e+t)\vec{j} + e^{2t^3}\vec{k} \ , \ t \in (-e, +\infty)$$

Então:

$$\vec{f}'(t) = -\mathrm{sen}(t-\pi)\vec{i} + \frac{2}{e+t}\vec{j} + 6t^2 e^{2t^3}\vec{k}$$

$$\vec{f}''(t) = -\cos(t-\pi)\vec{i} - \frac{2}{(e+t)^2}\vec{j} + 3t\left(4+12t^3\right)e^{2t^3}\vec{k}$$

Regras para a derivação

- É possível estabelecer as seguintes regras para a derivação de funções vectoriais:

$$(\vec{f} + \vec{g})'(t) = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)$$

$$(\alpha\vec{f} + \beta\vec{g})'(t) = \alpha\vec{f}'(t) + \beta\vec{g}'(t), \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$(u\vec{f})'(t) = u(t)\vec{f}'(t) + u'(t)\vec{f}(t)$$

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})'(t) = [\vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)] + [\vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t)]$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})'(t) = [\vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)] + [\vec{f}'(t) \times \vec{g}(t)]$$

$$(\vec{f} \circ u)'(t) = \vec{f}'[u(t)]u'(t) = u'(t)\vec{f}'[u(t)] \ \ (\textit{regra da cadeia})$$

Exemplo 8: Sejam as funções

$$\vec{f}(t) = (t^2, -1, t), \qquad \vec{g}(t) = (1, 2t, t^3), \qquad u(t) = -2t^2$$

tais que:

$$\vec{f}'(t) = (2t, 0, 1), \qquad \vec{g}'(t) = (0, 2, 3t^2), \qquad u'(t) = -4t$$

Então:

$$(\vec{f} + \vec{g})(t) = (t^2 + 1, -1 + 2t, t + t^3) = \vec{f}(t) + \vec{g}(t)$$

$$(\vec{f} + \vec{g})'(t) = (2t, 2, 1 + 3t^2) = \vec{f}'(t) + \vec{g}'(t)$$

$$(-2\vec{f})(t) = (-2t^2, 2, -2t) = -2\vec{f}(t)$$

$$(-2\vec{f})'(t) = (-4t, 0, -2) = -2\vec{f}'(t)$$

$$(u\vec{f})(t) = (-2t^4, 2t^2, -2t^3) = u(t)\vec{f}(t)$$

$$(u\vec{f})'(t) = (-8t^3, 4t, -6t^2) = u'(t)\vec{f}(t) + u(t)\vec{f}'(t)$$

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = t^2 - 2t + t^4 = \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$$

$$(\vec{f} \cdot \vec{g})'(t) = 2t - 2 + 4t^3 = \vec{f}'(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \vec{g}'(t)$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t^2 & -1 & t \\ 1 & 2t & t^3 \end{vmatrix} = (-t^3 - 2t^2, t - t^5, 2t^3 + 1) = \vec{f}(t) \times \vec{g}(t)$$

$$(\vec{f} \times \vec{g})'(t) = (-3t^2 - 4t, 1 - 5t^4, 6t^2) = \vec{f}'(t) \times \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \times \vec{g}'(t)$$

$$(\vec{f} \circ u)(t) = (4t^4, -1, -2t^2) = \vec{f}[u(t)]$$

$$(\vec{f} \circ u)'(t) = (16t^3, 0, -4t) = u'(t)\vec{f}'[u(t)]$$

- Usando a notação de Leibniz, as regras para a derivação atrás apresentadas podem ser reescritas sob a forma:

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}+\vec{g})=\frac{d\vec{f}}{dt}+\frac{d\vec{g}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\alpha\vec{f}+\beta\vec{g})=\alpha\frac{d\vec{f}}{dt}+\beta\frac{d\vec{g}}{dt}\text{ , com }\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}(u\vec{f})=u\frac{d\vec{f}}{dt}+\frac{du}{dt}\vec{f}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}\cdot\vec{g})=\left(\vec{f}\cdot\frac{d\vec{g}}{dt}\right)+\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\cdot\vec{g}\right)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{f}\times\vec{g})=\left(\vec{f}\times\frac{d\vec{g}}{dt}\right)+\left(\frac{d\vec{f}}{dt}\times\vec{g}\right)$$

$$\frac{d\vec{f}}{dt}=\frac{d\vec{f}}{du}\frac{du}{dt}\text{ (}\textit{regra da cadeia}\text{)}$$

Teorema 8: Seja $\vec{f}(t)$ uma função vectorial diferenciável, tal que $\left\|\vec{f}(t)\right\|$ é constante num intervalo aberto *I*. Tem-se, então,

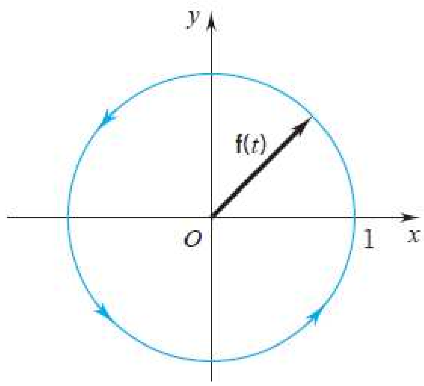
$$\vec{f}'(t)\cdot\vec{f}(t)=0\ ,\ \forall t\in I$$

ou seja, os vectores $\vec{f}'(t)$ e $\vec{f}(t)$ são ortogonais em *I*.

Exemplo 9: Seja a função vectorial do exemplo 4

$$\vec{f}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

que parametriza uma *circunferência* de raio unitário, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no *sentido directo*, tal que:



$$\left\|\vec{f}(t)\right\| = 1 \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

Considerando o vector

$$\vec{f}'(t) = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \ , \ t \in [0, 2\pi] \tag{7}$$

verifica-se, então, que

$$\vec{f}'(t) \cdot \vec{f}(t) = 0 \ , \ \forall t \in [0, 2\pi]$$

isto é, os vectores $\vec{f}'(t)$ e $\vec{f}(t)$ são ortogonais em cada ponto da circunferência. Assim, pode-se concluir que o vector (7) define uma linha que é tangente à circunferência em cada um dos seus pontos.

Teorema 9: Se $\vec{f}(t)$ é uma função vectorial diferenciável em t, então a função escalar $f(t) = \left\|\vec{f}(t)\right\|$ é diferenciável onde não é zero e:

$$\vec{f} \cdot \frac{d\vec{f}}{dt} = f \frac{df}{dt}$$

Além disso, onde $f(t) = \left\|\vec{f}(t)\right\| \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{f}}{f}\right) = \frac{1}{f^3}\left[\left(\vec{f} \times \frac{d\vec{f}}{dt}\right) \times \vec{f}\right]$$

Integrabilidade de uma função vectorial

- Tal como se verifica na derivação, também é possível definir a integração de funções vectoriais componente a componente.

Teorema 10: Sendo $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$ uma função vectorial contínua em $[a,b]$, obtém-se:

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b f_2(t)dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b f_3(t)dt\right)\vec{k}$$

Exemplo 10: Considerando

$$\vec{f}(t) = \text{sen}(\pi t)\vec{i} + 3\sqrt{1+t}\,\vec{j} + 4e^{-2t}\vec{k}$$

obtém-se:

$$\int_0^1 \vec{f}(t)dt = \left(\int_0^1 \text{sen}(\pi t)dt\right)\vec{i} + \left(\int_0^1 3\sqrt{1+t}\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_0^1 4e^{-2t}dt\right)\vec{k} =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\cos(\pi t)\right]_0^1 \vec{i} + 2\left[(1+t)^{3/2}\right]_0^1 \vec{j} - 2\left[e^{-2t}\right]_0^1 \vec{k} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\vec{i} + 2(2\sqrt{2}-1)\vec{j} - 2(e^{-2}-1)\vec{k}$$

- Da mesma forma é ainda possível definir integrais indefinidos com funções vectoriais.

Exemplo 11: Considerando

$$\vec{f}'(t) = \left(\cos(t)+1\right)\vec{i} + t^2\text{sen}(t^3)\vec{j} + 2(t-e^t)\vec{k} \text{ e } \vec{f}(0) = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

resulta

$$\vec{f}(t) = \int \vec{f}'(t)dt = \left(\int\left(\cos(t)+1\right)dt\right)\vec{i} + \left(\int t^2\text{sen}(t^3)dt\right)\vec{j} + \left(\int 2(t-e^t)dt\right)\vec{k} =$$

$$= \left(\text{sen}(t)+t+C_1\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{3}\cos(t^3)+C_2\right)\vec{j} + \left(t^2-2e^t+C_3\right)\vec{k}$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes a serem determinadas.
Uma vez que

$$2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = \vec{f}(0) = C_1\vec{i} + \left(-\frac{1}{3}+C_2\right)\vec{j} + \left(-2+C_3\right)\vec{k}$$

conclui-se que:

$$C_1 = 2,\ C_2 = \frac{4}{3} \text{ e } C_3 = 1$$

Obtém-se, então:

$$\vec{f}(t) = \left(\text{sen}(t)+t+2\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{3}\cos(t^3)+\frac{4}{3}\right)\vec{j} + (t^2-2e^t+1)\vec{k}$$

Propriedades do integral

Teorema 11: Sejam $\vec{f}(t)$ e $\vec{g}(t)$ funções vectoriais contínuas em $[a,b]$, o vector $\vec{a}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$\int_a^b [\vec{f}(t) + \vec{g}(t)]dt = \int_a^b \vec{f}(t)dt + \int_a^b \vec{g}(t)dt$$

$$\int_a^b [\alpha \vec{f}(t)]dt = \alpha \int_a^b \vec{f}(t)dt$$

$$\int_a^b [\vec{a} \cdot \vec{f}(t)]dt = \vec{a} \cdot \left(\int_a^b \vec{f}(t)dt \right)$$

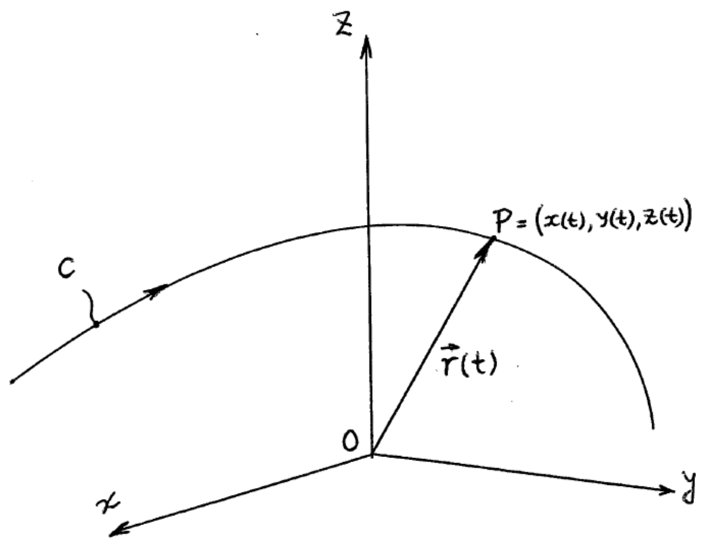
$$\left\| \int_a^b \vec{f}(t)dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \vec{f}(t) \right\| dt \tag{8}$$

Curvas no espaço

- Admita-se que a função vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in I$$

é diferenciável no intervalo *I*; nos extremos, caso existam, apenas se exige a continuidade da função. A extremidade do vector de posição (vector radial) $\vec{r}(t)$ é o ponto de coordenadas $P = (x(t), y(t), z(t))$, verificando-se que *P* traça um caminho, *C*, quando *t* toma valores no intervalo *I*. Diz-se, neste caso, que *C* é uma *curva diferenciável* e que é *parametrizada* por $\vec{r}(t)$ com o parâmetro *t*. É uma *curva orientada*, dado que quando *t* cresce no intervalo *I*, o vector de posição traça *C* segundo uma determinada orientação no espaço.



Exemplo 12: Tal como foi assinalado no exemplo 4, a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \mathrm{sen}(t)\vec{j} \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

é uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no *sentido directo*.

Exemplo 13: Em contrapartida, a curva parametrizada por

$$\vec{r}(u) = \cos(2\pi - u)\vec{i} + \mathrm{sen}(2\pi - u)\vec{j} \ , \ u \in [0, 2\pi]$$

é uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no *sentido retrógrado*.

Tangente a uma curva

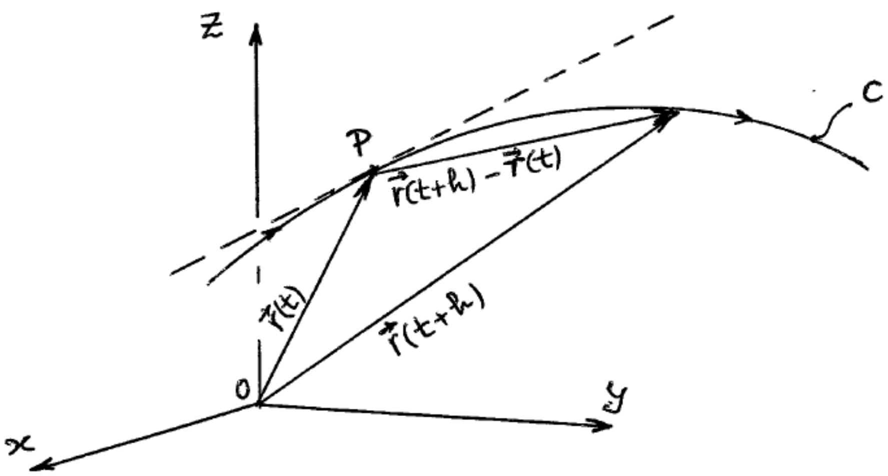
- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in I$$

Notando que

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \tag{9}$$

então, se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, é óbvio que, para um valor de h suficientemente pequeno, o vector $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t) \neq \vec{0}$.



Assim, para cada valor real $h \neq 0$, o vector

$$\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}$$

é paralelo a $\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)$ e, portanto, o seu limite (9), que se assume diferente de zero, pode ser tomado como o vector direcção da *linha tangente* à curva *C* no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$.

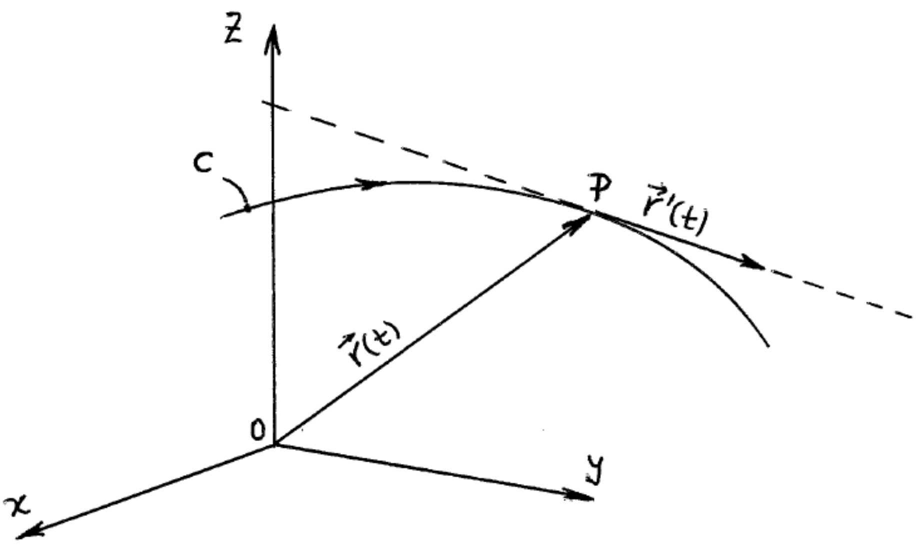
- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}\ ,\ t\in I \tag{10}$$

O vector $\vec{r}'(t)$, se não for nulo, é designado por *vector tangente* à curva *C* no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ e aponta no sentido definido pelos valores crescentes de *t*. A linha recta parametrizada por

$$X(u)=P+u\vec{r}'(t)\ ,\ u\in\mathbb{R}$$

chama-se *linha tangente* a *C* em *P*.



- Uma curva diferenciável e parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$ diz-se *regular*, se e só se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$.

Exemplo 14: Seja a circunferência de raio *a*, centrada na origem do referencial *Oxy* e percorrida no sentido directo:

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\text{sen}(t)\vec{j} + 0\vec{k} \ , \ t \in [0,2\pi] \tag{11}$$

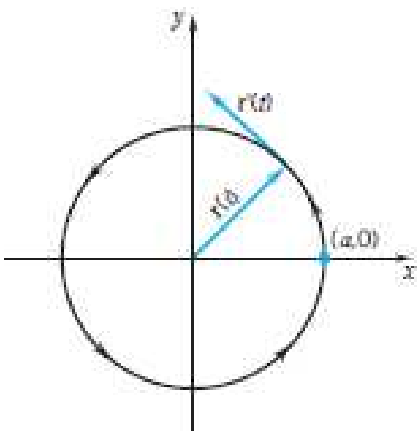
Neste caso, o vector tangente

$$\vec{r}'(t) = -a\text{sen}(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + 0\vec{k}$$

é ortogonal, em cada ponto da curva, ao vector de posição, já que

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

(teorema 8) e aponta no sentido directo, o sentido de percurso da curva.



Exemplo 15: Seja a curva

$$\vec{r}(t) = t\ \vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

que passa no ponto $P = (-2,4,-8)$. Dado que $P = \vec{r}(-2)$ e

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\ \vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

o vector tangente à curva em *P* é $\vec{a} = \vec{r}'(-2) = \vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$.
Além disso, a função vectorial

$$\vec{r}_1(u) = P + u\vec{a} = (-2+u)\vec{i} + (4-4u)\vec{j} + (-8+12u)\vec{k} \ , \ u \in \mathbb{R}$$

parametriza a linha tangente à curva no ponto *P*.

- A linha tangente a uma curva, *C*, é *invariante* face a uma alteração de parâmetro utilizado na sua parametrização.
  Admitindo $t = t(v)$ em (10), a curva passa a ser parametrizada pela função vectorial $\vec{r}_1(v) = \vec{r}\,[t(v)]$.
  Se a derivada $\vec{r}\,'[t(v)]$ existir, então $\vec{r}_1\,'(v)$ também existe, sendo dada por (*regra da cadeia*)

$$\frac{d\vec{r}_1}{dv} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{dv} \iff \vec{r}_1'(v) = \vec{r}\,'[t(v)]t'(v)$$

  onde $t'(v) \neq 0$; portanto, se $\vec{r}\,'[t(v)] \neq \vec{0}$, então $\vec{r}_1'(v) \neq \vec{0}$.
  Assim, $\vec{r}_1'(v)$ e $\vec{r}\,'[t(v)]$ são *vectores paralelos*; com o mesmo sentido se $t'(v) > 0$ e com sentidos opostos se $t'(v) < 0$.
  Conclui-se que as funções vectoriais $\vec{r}\,(t)$ e $\vec{r}_1(v)$ mantêm a mesma linha tangente em cada um dos pontos da curva, sendo designadas por *funções equivalentes*.

- As duas curvas

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in I_1$$

$$C_2 : \vec{r}_2(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k} \ , \ u \in I_2$$

  intersectam-se, se e só se existirem valores para *t* e *u* para os quais $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(u)$. O ângulo, θ, formado pelas curvas C_1 e C_2 num ponto onde $\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(u_0)$ é, por definição

$$\theta = \arccos \frac{\left|\vec{r}_1\,'(t_0) \cdot \vec{r}_2\,'(u_0)\right|}{\left\|\vec{r}_1\,'(t_0)\right\| \left\|\vec{r}_2\,'(u_0)\right\|}$$

  ou seja, é o menor dos ângulos formados pelas respectivas linhas tangentes nesse ponto.

Versor da tangente

- Seja a curva duas vezes diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ ,\ t \in I$$

tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então, em qualquer ponto $P = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ da curva é possível obter o vector

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|} \tag{12}$$

que é designado por *versor da tangente*. Uma vez que $\left\|\vec{r}'(t)\right\| > 0$, $\vec{T}(t)$ é um vector unitário com a mesma direcção (paralelo) e o mesmo sentido do vector tangente, $\vec{r}'(t)$.

Exemplo 16: No caso da hélice circular do exemplo 5, parametrizada em (3), o vector tangente à curva é:

$$\vec{f}'(t) = -2\text{sen}(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + \vec{k} = \left(-2\text{sen}(t), 2\cos(t), 1\right) \tag{13}$$

Notando que

$$\left\|\vec{f}'(t)\right\| = \sqrt{5} \tag{14}$$

o versor da tangente à curva é:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\left\|\vec{f}'(t)\right\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2\text{sen}(t), 2\cos(t), 1\right) \tag{15}$$

- De um modo geral, o versor $\vec{T}(t)$ vai-se alterando (tal como a linha tangente) ao longo da curva *C*. Dado que $\left\|\vec{T}(t)\right\| = 1$ (constante), essa variação reflecte-se unicamente na mudança da sua direcção.

- A taxa de variação de $\vec{T}(t)$ em relação a *t* é medida através da sua derivada, $\vec{T}'(t)$.

- O vector $\vec{T}'(t)$ é ortogonal a $\vec{T}(t)$ em cada ponto de *C* (teorema 8) e aponta no sentido definido pelo lado côncavo da curva.

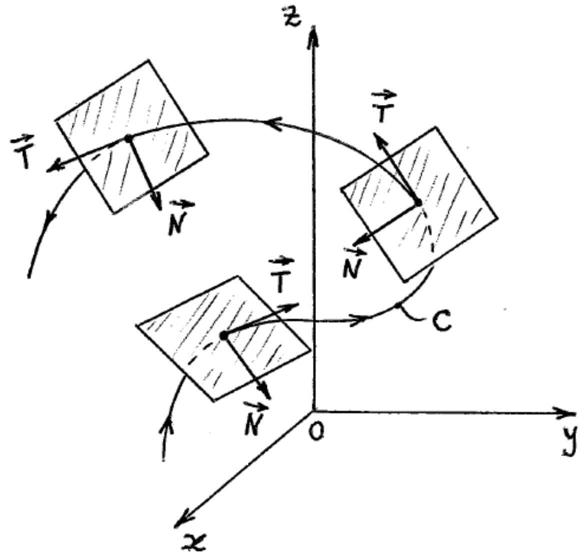
- No caso de *C* ser uma linha recta o versor $\vec{T}(t)$ mantém a sua direcção no espaço, pelo que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$.

Versor normal principal

- Se o vector $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então é possível definir, em cada ponto $P = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ da curva *C*, o *versor normal principal*

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{T}'(t)\right\|} \tag{16}$$

- Dado que $\left\|\vec{T}'(t)\right\| > 0$, $\vec{N}(t)$ é um vector unitário com a mesma direcção (paralelo) e o mesmo sentido do vector $\vec{T}'(t)$.



- A linha recta que passa no ponto $P=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ da curva e parametrizada por

$$X(v)=P+v\vec{N}(t)\ ,\ v\in\mathbb{R}$$

chama-se *linha normal* à curva *C* em *P*.

Exemplo 17: Em relação à hélice circular dos exemplos 5 e 16, obtém-se:

$$\vec{T}'(t)=\frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\cos(t),-\operatorname{sen}(t),0\right) \tag{17}$$

$$\left\|\vec{T}'(t)\right\|=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{\left\|\vec{T}'(t)\right\|}=\left(-\cos(t),-\operatorname{sen}(t),0\right) \tag{18}$$

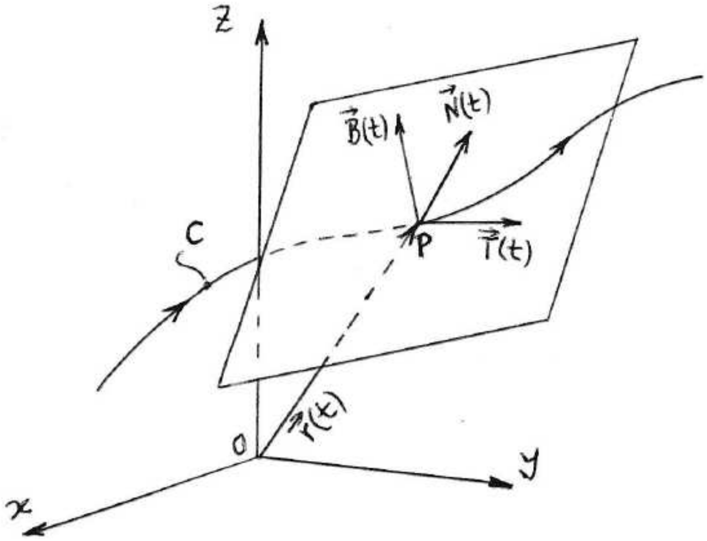
Atente-se que, neste caso (teorema 8):

$$\vec{T}(t)\cdot\vec{T}'(t)=0$$

Versor binormal

- Se o vector $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então é possível definir, em cada ponto $P = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ da curva C, o *versor binormal*

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$



- Relembrando as propriedades do produto vectorial, pode-se afirmar que $\vec{B}(t)$ é um vector unitário que tem a direcção ortogonal às direcções definidas pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$, sendo o seu sentido determinado pela *regra da mão direita*.

- A linha recta que passa no ponto $P = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ da curva e parametrizada por

$$X(w) = P + w\vec{B}(t) \ , \ w \in \mathbb{R}$$

chama-se *linha binormal* à curva C em P.

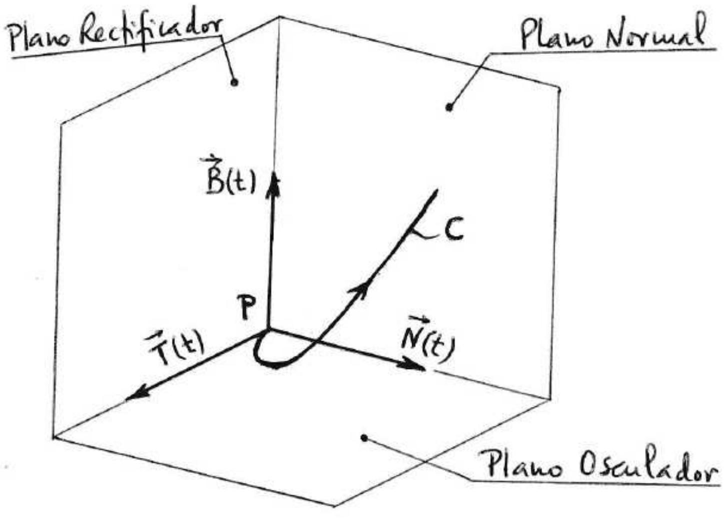
Exemplo 18: Relativamente à hélice circular dos exemplos 5, 16 e 17, resulta:

$$\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2\text{sen}(t) & 2\cos(t) & 1\\ -\cos(t) & -\text{sen}(t) & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\text{sen}(t),-\cos(t),2\right) \qquad (19)$$

Triedro de Frenet

- A cada ponto $P=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ de uma curva diferenciável C é possível associar o conjunto de versores $\left\{\vec{T}(t),\vec{N}(t),\vec{B}(t)\right\}$, que formam uma *base ortonormal* para o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ e que é designada por *triedro de Frenet*. Estes versores definem, para além das *linhas tangente*, *normal* e *binormal*, três planos ortogonais entre si que constituem os chamados *planos fundamentais* da curva C no ponto P, nomeadamente, os planos *osculador*, *normal* e *rectificador*.



Plano osculador

- O plano que passa no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ da curva *C* e é gerado pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$ chama-se *plano osculador*. É o plano que mais se aproxima da curva no ponto *P* e tem a equação vectorial:

$$X(u,v)=P+u\vec{T}(t)+v\vec{N}(t)\ ,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor binormal, $\vec{B}(t)$, é um vector normal ao plano osculador no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$\big(X-P\big)\cdot\vec{B}(t)=0\ \Leftrightarrow\ X\cdot\vec{B}(t)=P\cdot\vec{B}(t)$$

- Se a curva é plana, e não é uma linha recta, o plano osculador coincide com o plano que contém a curva.

Exemplo 19: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I=\vec{f}(0)=(2,0,0)$$

onde o versor da binormal, definido em (19), toma o valor:

$$\vec{B}(0)=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,-1,2)$$

Designando $X=(x,y,z)$, a equação cartesiana do plano osculador da curva no ponto *I* é:

$$X\cdot\vec{B}(0)=I\cdot\vec{B}(0)\ \Leftrightarrow\ -y+2z=0$$

Trata-se do plano que contém o eixo dos *xx* e intersecta o plano coordenado *yOz* segundo a recta $y=2z$.

Plano normal

- O plano que passa no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{N}(t)$ e $\vec{B}(t)$ chama-se *plano normal*; a sua equação vectorial é:

$$X(u,v)=P+u\vec{N}(t)+v\vec{B}(t)\ ,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor tangente, $\vec{T}(t)$, é um vector normal ao plano normal no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$\big(X-P\big)\cdot\vec{T}(t)=0\ \Leftrightarrow\ X\cdot\vec{T}(t)=P\cdot\vec{T}(t)$$

Exemplo 20: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I=\vec{f}(0)=(2,0,0)$$

onde o versor da tangente, definido em (15), toma o valor:

$$\vec{T}(0)=\frac{1}{\sqrt{5}}\big(0,2,1\big)$$

Designando $X=(x,y,z)$, a equação cartesiana do plano normal da curva no ponto I é:

$$X\cdot\vec{T}(0)=I\cdot\vec{T}(0)\ \Leftrightarrow\ 2y+z=0$$

Trata-se do plano que contém o eixo dos xx e intersecta o plano coordenado yOz segundo a recta $z=-2y$.

Plano rectificador

- O plano que passa no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{B}(t)$ chama-se *plano rectificador*; a sua equação vectorial é:

$$X(u,v)=P+u\vec{T}(t)+v\vec{B}(t)\ ,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor normal, $\vec{N}(t)$, é um vector normal ao plano rectificador no ponto $P=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$\big(X-P\big)\cdot\vec{N}(t)=0\ \Leftrightarrow\ X\cdot\vec{N}(t)=P\cdot\vec{N}(t)$$

Exemplo 21: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I=\vec{f}(0)=(2,0,0)$$

onde o versor da normal, definido em (18), toma o valor:

$$\vec{N}(0)=(-1,0,0)=-\vec{i}$$

Designando $X=(x,y,z)$, a equação cartesiana do plano rectificador da curva no ponto I é:

$$X\cdot\vec{N}(0)=I\cdot\vec{N}(0)\ \Leftrightarrow\ x=2$$

Trata-se do plano paralelo ao plano coordenado yOz e que é tangente à curva no ponto I.

Segunda derivada do vector de posição

- A expressão (12) permite apresentar o vector tangente sob a forma:

$$\vec{r}'(t) = \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}(t), \text{ se } \|\vec{r}'(t)\| \neq 0$$

Assim, pode-se concluir que o vector tangente pode variar, ao longo da curva *C*, de duas maneiras distintas:
i) Em direcção – relativa à variação do versor $\vec{T}(t)$;
ii) Na sua norma – relativa à variação da função escalar $\|\vec{r}'(t)\|$.

- A taxa de variação do vector tangente, $\vec{r}'(t)$, é medida, em termos globais, através da sua derivada, ou seja, através da função vectorial $\vec{r}''(t)$.

Teorema 12: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$. Se $\|\vec{r}'(t)\| \neq 0$, então:

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}'(t)$$

ou ainda, recorrendo a (11),

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \|\vec{T}'(t)\| \vec{N}(t) \qquad (20)$$

- A equação (20) mostra que o vector $\vec{r}''(t)$ pode ser expresso, em cada ponto da curva *C*, através da soma de duas componentes que são ortogonais entre si, isto é, uma *componente tangencial* e uma *componente normal*.

- A *componente tangencial*, definida por

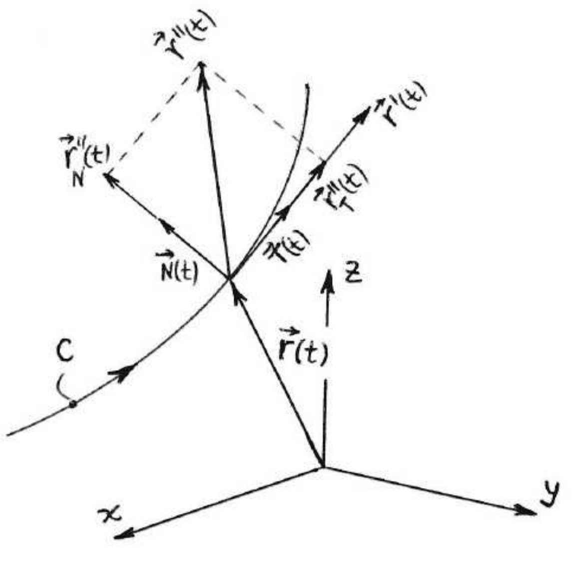
$$\vec{r}''_T(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \, \vec{T}(t)$$

é paralela ao versor $\vec{T}(t)$ e mede a variação da norma do vector tangente; não sendo nula, terá o mesmo sentido de $\vec{T}(t)$ se $\|\vec{r}'(t)\|' > 0$ e o sentido oposto se $\|\vec{r}'(t)\|' < 0$.

- A *componente normal*, definida por

$$\vec{r}''_N(t) = \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}'(t) = \|\vec{r}'(t)\| \|\vec{T}'(t)\| \vec{N}(t)$$

é paralela ao versor $\vec{N}(t)$ e mede a variação de direcção do vector tangente; não sendo nula, terá sempre o mesmo sentido de $\vec{N}(t)$, já que $\|\vec{r}'(t)\| \|\vec{T}'(t)\| > 0$.



- Se a curva não é uma linha recta, então $\vec{r}''_N(t) \neq \vec{0}$; caso contrário, obtém-se $\vec{r}''(t) = \vec{r}''_T(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \, \vec{T}(t)$, já que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$.

Exemplo 22: Seja a hélice circular do exemplos 5 e parametrizada em (3). Tendo em atenção (13) conclui-se que:

$$\vec{f}_T''(t) = \left\|\vec{f}'(t)\right\|' \vec{T}(t) = 0\vec{T}(t) = (0,0,0)$$

Além disso, recorrendo a (14) e (17), resulta:

$$\vec{f}_N''(t) = \left\|\vec{f}'(t)\right\| \vec{T}'(t) = 2\big(-\cos(t), -\mathrm{sen}(t), 0\big)$$

Derivando (13)

$$\vec{f}''(t) = \big(-2\cos(t), -2\mathrm{sen}(t), 0\big) \tag{21}$$

obtém-se, tal como era de prever:

$$\vec{f}''(t) = \vec{f}_N''(t)$$

Neste caso o vector $\vec{f}''(t)$ tem, em cada ponto da curva, a direcção e o sentido do versor $\vec{N}(t)$ e mede apenas a variação de direcção do vector tangente.

Teorema 13: Seja a curva diferenciável, C, parametrizada por $\vec{r}(t)$.
i) Se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ e $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então:

$$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{T}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t) \times \vec{T}'(t)\right\|}$$

ii) Se $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}''(t)$ são vectores não nulos e não paralelos, então:

$$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\right\|} \tag{22}$$

- Sendo $\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)$ um vector normal ao plano osculador no ponto $P=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ da curva, a equação cartesiana deste plano pode ainda ser dada por:

$$\left(X-P\right)\cdot\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=0 \;\Leftrightarrow\; X\cdot\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)=P\cdot\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)$$

Exemplo 23: Seja a hélice circular do exemplo 5. Atendendo a (13), (21) e (22) resulta

$$\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)=2\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2\operatorname{sen}(t) & 2\cos(t) & 1\\ -\cos(t) & -\operatorname{sen}(t) & 0\end{vmatrix}=2\left(\operatorname{sen}(t),-\cos(t),2\right)$$

$$\left\|\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)\right\|=2\sqrt{5}$$

$$\vec{B}(t)=\frac{\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)}{\left\|\vec{f}'(t)\times\vec{f}''(t)\right\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\operatorname{sen}(t),-\cos(t),2\right)$$

confirmando-se o resultado encontrado em (19).

Exemplo 24: Em relação à circunferência do exemplo 14 e parametrizada em (11) obtém-se

$$\vec{r}'(t)=-a\operatorname{sen}(t)\vec{i}+a\cos(t)\vec{j}+0\vec{k}=a\left(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),0\right),\qquad \left\|\vec{r}'(t)\right\|=a$$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}=\left(-\operatorname{sen}(t),\cos(t),0\right)$$

$$\vec{T}'(t)=\left(-\cos(t),-\operatorname{sen}(t),0\right),\qquad \left\|\vec{T}'(t)\right\|=1$$

$$\vec{N}(t) = \vec{T}'(t) = \left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\right)$$

$$\vec{r}''(t) = a\left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\right)$$

$$\vec{r}''_T(t) = \left\|\vec{r}'(t)\right\|'\vec{T}(t) = 0\vec{T}(t) = (0,0,0)$$

$$\vec{r}''_N(t) = \left\|\vec{r}'(t)\right\|\vec{T}'(t) = \vec{r}''(t) = a\left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\right)$$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) = a^2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ -\cos(t) & -\text{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} = a^2\left(0,0,1\right)$$

$$\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\| = a^2$$

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t)\times\vec{N}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ -\cos(t) & -\text{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\right\|} = (0,0,1) = \vec{k}$$

Neste caso o plano osculador é constante em todos os pontos da circunferência e tem a equação $z = 0$, sendo coincidente com o plano coordenado *xOy*, plano onde está situada toda a curva.
Por exemplo, no ponto inicial da curva $I = \vec{r}(0) = (a,0,0)$ tem-se

$$\vec{T}(0) = \left(0,1,0\right), \qquad \vec{N}(0) = \left(-1,0,0\right)$$

pelo que, neste ponto, o plano normal tem a equação $y = 0$ (plano coordenado *xOz*) e o plano rectificador tem a equação $x = a$, sendo um plano estritamente paralelo ao plano coordenado *yOz*.

Comprimento de arco

- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in [a,b]$$

Pretende-se obter uma função que determine o comprimento da curva, $L(C)$, medido a partir do seu ponto inicial, $\vec{r}(a)$.

- A função pretendida é uma função escalar, $s(t)$, $t \in [a,b]$, designada por *comprimento de arco*, que tem as seguintes propriedades:
i) É uma função monótona crescente;
ii) $s(a) = 0$ e $s(b) = L(C)$;
iii) É aditiva.

- Comecemos por mostrar que:

$$L(C) \leq \int_a^b \left\| \vec{r}'(t) \right\| dt$$

Consideremos o seguinte conjunto de pontos em $[a,b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

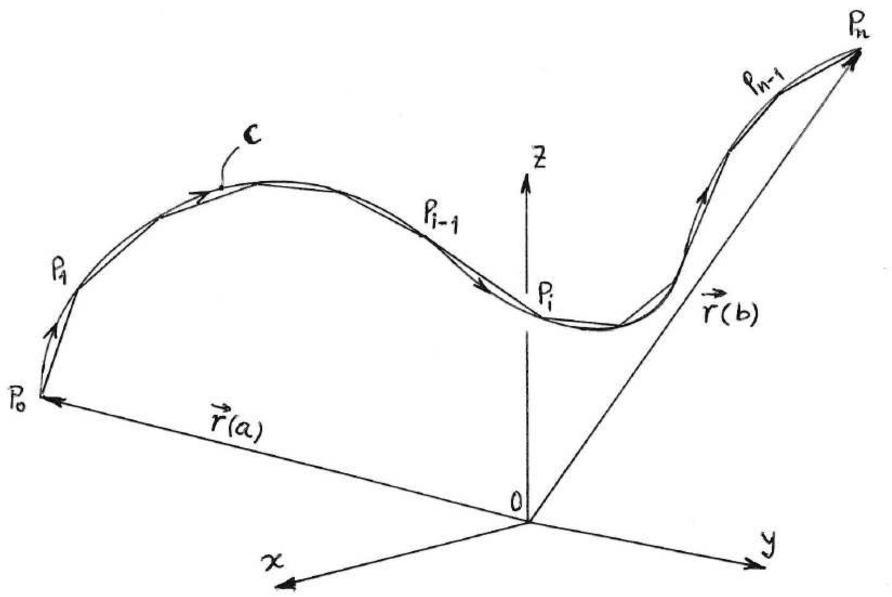
a que correspondem, respectivamente, os seguintes pontos sobre a curva *C*:

$$P_0, \ P_1, \ \ldots \ , \ P_{i-1}, \ P_i, \ \ldots \ , \ P_{n-1}, \ P_n$$

Unindo estes pontos, consecutivamente, através de segmentos de recta, obtém-se uma *linha poligonal* γ, ou seja,

$$\gamma = \overline{P_0P_1} \cup \ldots \cup \overline{P_{i-1}P_i} \cup \ldots \cup \overline{P_{n-1}P_n}$$

que constitui uma aproximação para a curva C.



É intuitivo que, por mais pontos que se considere na construção de γ, o comprimento de γ nunca excederá o comprimento de C, isto é:

$$L(\gamma) \leq L(C)$$

Seja, então, a seguinte partição arbitrária, Π , para o intervalo $[a,b]$

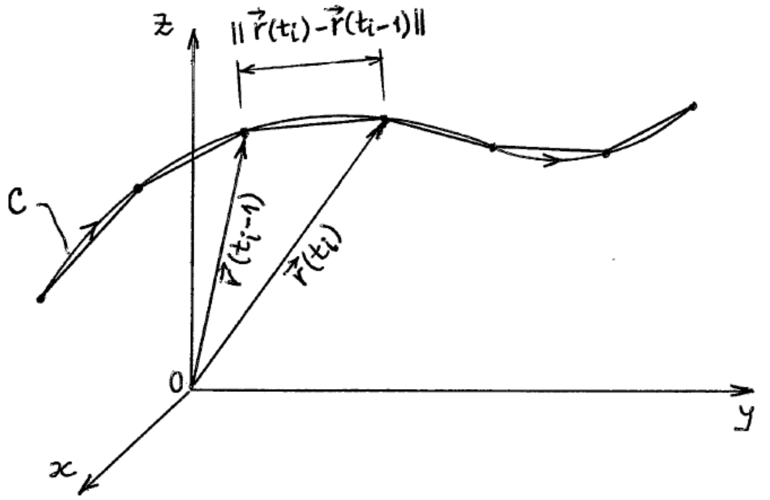
$$\Pi = \{a = t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_n = b\}$$

à qual estão associados os seguintes pontos em C:

$$\vec{r}(a) = \vec{r}(t_0), \ \ldots \ , \vec{r}(t_{i-1}), \ \vec{r}(t_i), \ \ldots \ , \vec{r}(t_n) = \vec{r}(b)$$

O comprimento da linha poligonal inscrita em C é dado por:

$$L_{\Pi} = \sum_{i=1}^{n} \left\| \vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) \right\|$$



Notando que

$$\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\vec{r}\,'(t)dt$$

resulta, tendo em atenção (8),

$$\left\|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})\right\|=\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\vec{r}\,'(t)dt\right\|\le\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|dt$$

e, portanto,

$$L_{\Pi}=\sum_{i=1}^{n}\left\|\vec{r}(t_i)-\vec{r}(t_{i-1})\right\|\le\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|dt=\int_a^b\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|dt$$

Como a partição Π considerada é arbitrária, então a desigualdade

$$L_{\Pi}\le\int_a^b\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|dt \tag{23}$$

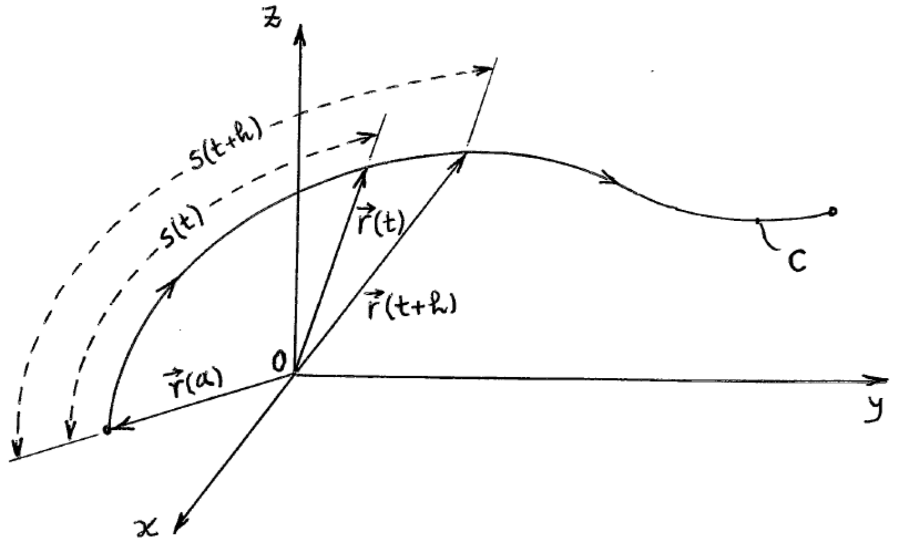
deverá verificar-se para qualquer L_{Π}, pelo que é possível afirmar que o integral em (23) será um *majorante* para qualquer L_{Π}.

Como $L(C)$ é o *supremo* de todos os valores que se podem obter para L_{Π}, então pode-se concluir que:

$$L_{\Pi}\le L(C)\le\int_a^b\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|dt \tag{24}$$

- O objectivo seguinte passa por mostrar que a desigualdade (24) é, na realidade, uma igualdade.

- Sejam os pontos $\vec{r}(a)$, $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$, em que $h>0$, sobre a curva *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in [a,b]$, tais que:
  i) $s(a)=0$;
  ii) $s(t)$ é o comprimento de *C* entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$;
  iii) $s(t+h)$ é o comprimento de *C* entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t+h)$;
  iv) $s(t+h)-s(t)$ é o comprimento de *C* entre $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+h)$.



Atendendo a (24), tem-se

$$\|\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)\| \le s(t+h)-s(t) \le \int_t^{t+h} \|\vec{r}\,'(u)\| du$$

ou seja, dividindo por $h>0$,

$$\left\| \frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h} \right\| \le \frac{s(t+h)-s(t)}{h} \le \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\vec{r}\,'(u)\| du$$

O *primeiro teorema do valor médio* permite escrever:

$$\exists c \in (t,t+h) \ : \ \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|\vec{r}\,'(u)\| du = \frac{1}{h}\|\vec{r}\,'(c)\|(t+h-t) = \|\vec{r}\,'(c)\|$$

Verifica-se, então,

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}\right\| \le \lim_{h\to 0^+}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \le \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\left\|\vec{r}\,'(u)\right\|du$$

isto é:

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \le \lim_{h\to 0^+}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \le \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \iff \lim_{h\to 0^+}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|$$

De modo semelhante, é possível mostrar que se $h<0$:

$$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \le \lim_{h\to 0^-}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \le \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \iff \lim_{h\to 0^-}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|$$

Assim, conclui-se que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| \iff s'(t) = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|$$

Integrando entre *a* e *t*, obtém-se

$$s(t)-s(a) = \int_a^t \left\|\vec{r}\,'(u)\right\|du$$

e, ainda,

$$s(t) = \int_a^t \left\|\vec{r}\,'(u)\right\|du$$

já que, por hipótese, se considerou $s(a)=0$.
O comprimento total da curva *C* é, então, dado por:

$$L(C) = s(b) = \int_a^b \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|dt$$

Exemplo 25: Seja a circunferência do exemplo 14, parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\text{sen}(t)\vec{j} + 0\vec{k} \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

Sabendo que

$$\vec{r}'(t) = -a\text{sen}(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + 0\vec{k} \ \Rightarrow \ \left\|\vec{r}'(t)\right\| = a$$

o comprimento de arco é:

$$s(t) = \int_0^t \left\|\vec{r}'(u)\right\| du = a\int_0^t du = at \ , \ t \in [0, 2\pi]$$

O perímetro da circunferência corresponde ao comprimento da curva entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(2\pi)$, isto é:

$$s(2\pi) = a\int_0^{2\pi} du = 2\pi a$$

Exemplo 26: Seja a hélice circular do exemplo 5, parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k} \ , \ t \geq 0$$

Notando que

$$\vec{f}'(t) = -2\text{sen}(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + \vec{k} \ \Rightarrow \ \left\|\vec{f}'(t)\right\| = \sqrt{5}$$

o comprimento de arco é:

$$s(t) = \int_0^t \left\|\vec{f}'(u)\right\| du = \sqrt{5}\int_0^t du = \sqrt{5}t \ , \ t \geq 0$$

O comprimento da curva entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(2\pi)$ é:

$$s(2\pi) = \sqrt{5}\int_0^{2\pi} du = 2\sqrt{5}\pi$$

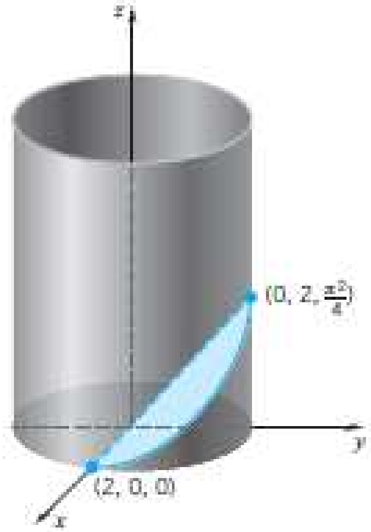
Exemplo 27: A função vectorial

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j} + t^2\vec{k}\ ,\ t \in [0, \pi/2]$$

parametriza a curva, *C*, que tem o seu ponto inicial em $\vec{r}(0) = (2,0,0)$ e tem o seu ponto final em $\vec{r}(\pi/2) = \left(0, 2, \pi^2/4\right)$.

A curva *C* é um arco de uma *hélice circular* que, contrariamente ao que sucede com a hélice do exemplo 5, tem *passo* variável; entre as rotações de ordem $n-1$ e de ordem n o passo tem o valor:

$$(2n-1)(2\pi)^2$$



Pretende-se calcular o comprimento de *C* e compara-lo com a distância entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(\pi/2)$.

Dado que

$$\vec{r}'(t) = -2\text{sen}(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + 2t\vec{k} \ \Rightarrow\ \|\vec{r}'(t)\| = 2\sqrt{1+t^2}$$

o comprimento da curva *C* é dado por:

$$L(C) = \int_0^{\pi/2} \|\vec{r}'(t)\| dt = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+t^2}\,dt \tag{25}$$

Considerando no integral indefinido

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt$$

a mudança de variável

$$t = \text{tg}(u) \ \Rightarrow\ dt = \frac{1}{\cos^2(u)}du = \sec^2(u)du$$

e notando que

$$\sec^2(u) = 1 + \mathrm{tg}^2(u)$$

resulta:

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \int \sec^2(u)\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(u)}\,du = \int \sec^2(u)\sec(u)\,du \qquad (26)$$

Aplicando o processo de integração por partes

$$v = \sec(u) \;\Rightarrow\; dv = \sec(u)\mathrm{tg}(u)du$$

$$dw = \sec^2(u)du \;\Rightarrow\; w = \mathrm{tg}(u)$$

obtém-se para (26):

$$\int \sec^2(u)\sec(u)du = \int v\,dw = vw - \int w\,dv \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \int \sec^3(u)du = \sec(u)\mathrm{tg}(\mathrm{u}) - \int \sec(u)\left(\sec^2(u) - 1\right)du \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2\int \sec^3(u)du = \sec(u)\mathrm{tg}(\mathrm{u}) + \int \sec(u)du \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \int \sec^3(u)du = \frac{1}{2}\sec(u)\mathrm{tg}(\mathrm{u}) + \frac{1}{2}\int \sec(u)du \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \int \sec^3(u)du = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\int \sec(u)du \qquad (27)$$

Por outro lado,

$$\int \sec(u)du = \int \sec(u)\frac{\sec(u)+\mathrm{tg}(u)}{\sec(u)+\mathrm{tg}(u)}du = \int \frac{\sec^2(u)+\sec(u)\mathrm{tg}(u)}{\sec(u)+\mathrm{tg}(u)}du$$

e tendo em conta que

$$v = \sec(u) + \mathrm{tg}(u) \;\Rightarrow\; dv = \left(\sec(u)\mathrm{tg}(u) + \sec^2(u)\right)du$$

resulta:

$$\int \sec(u)du = \int \frac{1}{v}dv = \ln(v) + K_1 = \ln\left(\sec(u) + \mathrm{tg}(u)\right) + K_1 =$$

$$= \ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right) + K_1 \tag{28}$$

Recorrendo a (27) e (28), o integral indefinido (26) toma o valor

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right) + K$$

pelo que o comprimento da curva *C*, definido em (25), é:

$$L(C) = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+t^2}dt = \left[t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(\sqrt{1+t^2} + t\right)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}} + \ln\left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right] \tag{29}$$

A distância entre os pontos $\vec{r}(0)$ e $\vec{r}(\pi/2)$ é:

$$\left\|\vec{r}(\pi/2) - \vec{r}(0)\right\| = \left\|-2\vec{i} + 2\vec{j} + \frac{\pi^2}{4}\vec{k}\right\| = \sqrt{8 + \frac{\pi^4}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{128 + \pi^4} \tag{30}$$

Comparando os valores das distâncias (29) e (30)

$$\frac{L(C)}{\left\|\vec{r}(\pi/2) - \vec{r}(0)\right\|} \cong 1{,}108$$

pode-se concluir que o comprimento da curva *C* é cerca de 11% maior que a distância entre os pontos que são as suas extremidades.

Exemplo 28 Seja a curva, C, correspondente ao gráfico da função real de variável real do exemplo 3, parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j} + 0\vec{k} \ , \ t \in [a,b]$$

Sabendo que

$$\vec{f}'(t) = \vec{i} + f'(t)\vec{j} + 0\vec{k} \ \Rightarrow \ \left\|\vec{f}'(t)\right\| = \sqrt{1 + [f'(t)]^2}$$

o seu comprimento é:

$$L(C) = \int_a^b \left\|\vec{f}'(t)\right\| dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} \ dt$$

- Seja a curva diferenciável, C, parametrizada por:

  $$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in [a,b]$$

  Sendo $s(t)$ o comprimento de C entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$, então

  $$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

  e, portanto,

  $$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

- Seja a função contínua e diferenciável $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. Sendo $s(x)$ o comprimento do gráfico da função entre $\big(a,f(a)\big)$ e $\big(x,f(x)\big)$, então:

  $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

O comprimento de arco como parâmetro

- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in [a,b]$$

com comprimento igual a $L(C) = L$.
O comprimento de *C* entre $\vec{r}(a)$ e $\vec{r}(t)$ é:

$$s(t) = \int_a^t \|\vec{r}'(u)\| du$$

Dado que $s'(t) = \|\vec{r}'(t)\| > 0$, a função $s = s(t)$ é estritamente crescente e injectiva. É, então, possível definir a sua função inversa:

$$t = t(s) \ , \ s \in [0,L]$$

A função vectorial

$$\vec{R} = \vec{R}(s) = \vec{r}[t(s)] \ , \ s \in [0,L]$$

parametriza a curva *C* em relação ao comprimento de arco.

Teorema 14: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada em relação ao comprimento de arco, *s*, pela função $\vec{R} = \vec{R}(s)$, $s \in [0,L]$. Então $\|\vec{R}'(s)\| = 1$ e, portanto:

$$\vec{R}'(s) = \vec{T}(s)$$

Neste caso o vector tangente à curva, $\vec{R}'(s)$, coincide com o versor da tangente, $\vec{T}(s)$, em cada ponto de *C*.

Exemplo 29: Em relação à circunferência dos exemplos 14 e 25, tem-se

$$s = s(t) = at \;\Leftrightarrow\; t = t(s) = s/a$$

pelo que:

$$\vec{R}(s) = \vec{r}\left(\frac{s}{a}\right) = a\cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + a\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ s \in [0, 2\pi a]$$

Assim,

$$\vec{R}'(s) = -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{a}\right)\vec{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\vec{j} + 0\vec{k}$$

e, portanto, $\left\|\vec{R}'(s)\right\| = 1$.

Exemplo 30: No caso da hélice circular dos exemplos 5 e 26, tem-se

$$s = s(t) = \sqrt{5}t \;\Leftrightarrow\; t = t(s) = s/\sqrt{5}$$

pelo que:

$$\vec{R}(s) = \vec{f}\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right) = 2\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{i} + 2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\vec{k}\ ,\ s \geq 0$$

Assim,

$$\vec{R}'(s) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right)\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$$

e, portanto, $\left\|\vec{R}'(s)\right\| = 1$.

Aplicação ao movimento curvilíneo

- Admita-se que a curva C representa a *trajectória* percorrida por um objecto que se movimenta no espaço, situando-se, em cada instante de tempo t, no ponto que é a extremidade do vector de posição:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in I$$

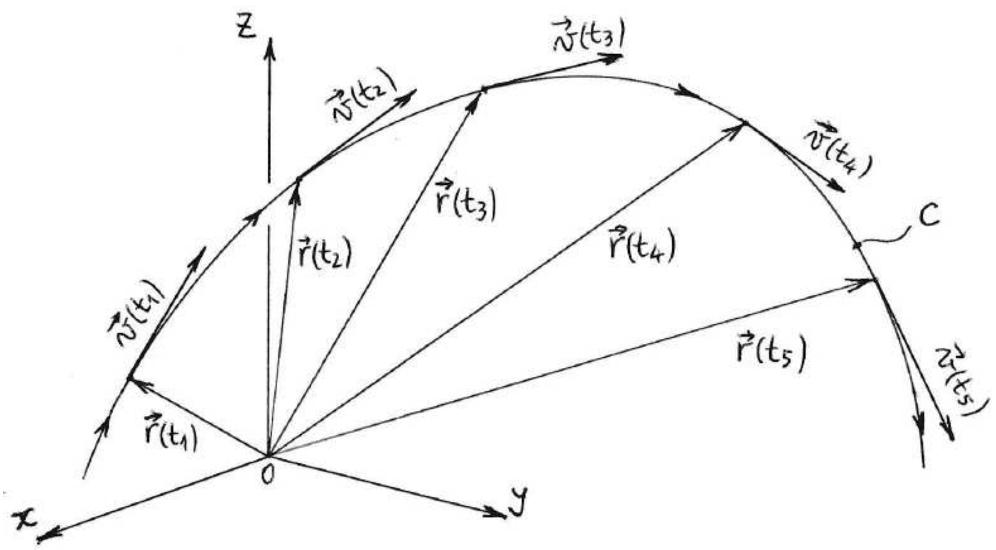
Neste caso, a função vectorial $\vec{r}(t)$ é usualmente designada por *função de posição do movimento*.

- O movimento do objecto ao longo da trajectória, C, é caracterizado, em termos cinemáticos, através das propriedades seguintes:

a) *Vector velocidade* no instante t: $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$.
É tangente à trajectória em cada ponto e aponta no sentido do movimento, sendo dado por

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$$

em que $\vec{T}(t)$ é o versor da tangente à trajectória e $v(t) = \|\vec{v}(t)\|$ é o *módulo do vector velocidade* (grandeza medida pelo velocímetro).



b) Durante o intervalo de tempo $[t_0,t]$ o objecto desloca-se, ao longo de *C*, entre os pontos $\vec{r}(t_0)$ e $\vec{r}(t)$, percorrendo o *espaço* dado por:

$$s'(t)=v(t) \;\Rightarrow\; s(t)-s(t_0)=\int_{t_0}^{t} v(u)du \;,\; t_0,t\in I$$

c) *Vector aceleração* no instante *t*: $\vec{a}(t)=\vec{v}'(t)=\vec{r}''(t)$.
Mede a variação do *vector velocidade*, $\vec{v}(t)$, podendo, de um modo geral, ser decomposto em duas componentes ortogonais:

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_T(t)+\vec{a}_N(t)$$

d) *Vector aceleração tangencial* no instante *t*: $\vec{a}_T(t)$.
Mede a variação do *módulo do vector velocidade*, $v(t)$, sendo definido por:

$$\vec{a}_T(t)=v'(t)\vec{T}(t)=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}(t)$$

Se $v'(t)=0$ o movimento é *uniforme* ($v(t)$ é constante) e, portanto, $\vec{a}_T(t)=\vec{0}$. O movimento é *acelerado* se $v'(t)>0$ ($\vec{v}(t)$ e $\vec{a}_T(t)$ são vectores paralelos e com o mesmo sentido), sendo *retardado* se $v'(t)<0$ ($\vec{v}(t)$ e $\vec{a}_T(t)$ são vectores paralelos e com sentidos opostos).

e) *Vector aceleração normal* no instante *t*: $\vec{a}_N(t)$.
Mede a variação de direcção do *vector velocidade*, $\vec{v}(t)$, sendo dado por

$$\vec{a}_N(t)=v(t)\vec{T}'(t)=v(t)\left\|\vec{T}'(t)\right\|\vec{N}(t)=\frac{ds}{dt}\left\|\vec{T}'(t)\right\|\vec{N}(t) \qquad (31)$$

em que $\vec{N}(t)$ é o versor normal principal. Esta componente só será nula se a trajectória for rectilínea, já que $\vec{T}'(t)=\vec{0}$; caso contrário, apontará, tal com o versor $\vec{N}(t)$, no sentido definido pelo lado côncavo da trajectória, sendo, também, designada por *componente centrípeta* do *vector aceleração*.

f) O *módulo do vector aceleração* $a(t) = \|\vec{a}(t)\|$ no instante t pode ser reescrito sob a forma

$$a(t) = \sqrt{a_T^2(t) + a_N^2(t)}$$

em que

$$a_T(t) = \|\vec{a}_T(t)\| = |v'(t)|$$

é o *módulo do vector aceleração tangencial* e

$$a_N(t) = \|\vec{a}_N(t)\| = v(t)\|\vec{T}'(t)\| \tag{32}$$

é o *módulo do vector aceleração normal*.
Notando que

$$v'(t) = \vec{a}(t) \cdot \vec{T}(t)$$

tem-se:

$$a_T(t) = |\vec{a}(t) \cdot \vec{T}(t)| = \frac{|\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t)|}{v(t)}$$

Por outro lado, tendo em conta que

$$\vec{T}(t) \times \vec{a}(t) = v(t)\vec{T}(t) \times \vec{T}'(t) = v(t)\|\vec{T}'(t)\|\vec{B}(t)$$

obtém-se:

$$a_N(t) = \|\vec{T}(t) \times \vec{a}(t)\| = \frac{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|}{v(t)} \tag{33}$$

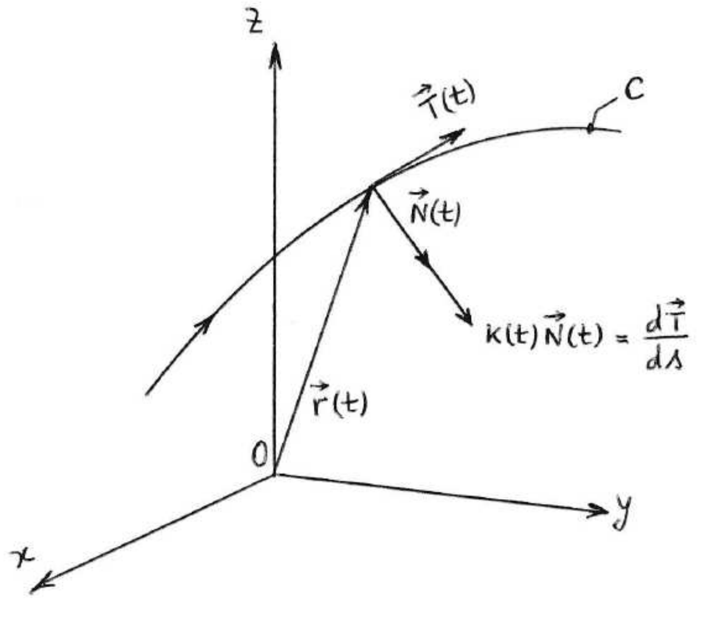
Curvatura de uma curva no espaço

- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\ ,\ t \in I$$

tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. De um modo geral, o versor da tangente, $\vec{T}(t)$, varia ao longo da curva, que se reflecte, unicamente, na mudança da sua direcção (sendo versor, a norma é constante e igual a um).

- Designa-se por *vector curvatura* da curva *C* à variação de direcção do versor da tangente por unidade do comprimento de arco, ou seja, $d\vec{T}\big/ds$.



- Chama-se *curvatura* da curva *C*, designando-se por *k*, à norma do vector curvatura, isto é,

$$k = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| \geq 0$$

Teorema 15: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|}\vec{N}(t) \tag{34}$$

$$k(t) = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

Teorema 16: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\|}{\|\vec{r}\,'(t)\|^3} \tag{35}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k(t)\vec{N}(t) = \frac{\left(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)\right) \times \vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|^4}$$

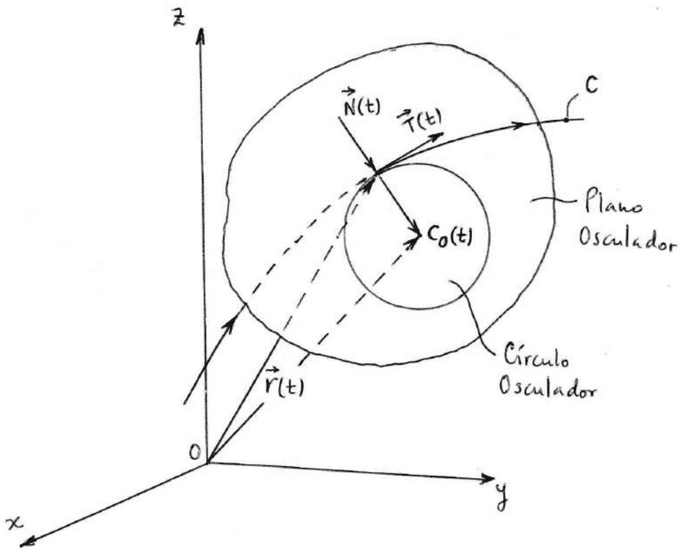
- Chama-se *raio de curvatura*, designando-se por ρ, da curva *C* ao inverso da curvatura, isto é:

$$\rho = \frac{1}{k}\ ,\ k > 0$$

- Em face do que foi exposto, é de realçar o seguinte:
  i) Se $k \to 0$, $\rho \to \infty$: a curva *C* tende para uma linha recta;
  ii) Se $k \to \infty$, $\rho \to 0$: a curva *C* tende para um ponto.

- Chama-se *círculo osculador* num ponto da curva C ao círculo situado no plano osculador, tangente à curva e com raio igual ao raio de curvatura de C nesse ponto. Trata-se do círculo que mais se ajusta à curva em cada um dos seus pontos. O centro do círculo orculador em cada ponto da curva, C_O, é o ponto definido por:

$$C_O(t) = \vec{r}(t) + \rho(t)\vec{N}(t)$$



- No caso do movimento curvilíneo, o vector aceleração normal no instante t, expresso em (31), pode ser reescrito sob a forma

$$\vec{a}_N(t) = k(t)v^2(t)\vec{N}(t) = k(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \vec{N}(t)$$

enquanto o seu módulo, definido em (32), é dado por:

$$a_N(t) = k(t)v^2(t) = k(t)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Finalmente, atendendo a (33), conclui-se que:

$$k(t) = \frac{\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\|}{v^3(t)}$$

Exemplo 31: Relativamente à circunferência dos exemplos 14 e 24 e parametrizada por

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\text{sen}(t)\vec{j} + 0\vec{k}\ ,\ t \in [0,2\pi]$$

obtém-se:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}\left(-\cos(t),-\text{sen}(t),0\right)$$

$$k(t) = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}$$

Tal como previsto, o raio de curvatura é constante em qualquer ponto da curva

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)} = a$$

e o centro do círculo osculador é coincidente com o próprio centro da circunferência:

$$C_O(t) = \vec{r}(t) + a\left(-\cos(t),-\text{sen}(t),0\right) = (0,0,0)$$

Exemplo 32: Seja a hélice circular do exemplo 5 e parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k}\ ,\ t \geq 0$$

Atendendo a (14), (17) e (18), obtém-se:

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{2}{5}\left(-\cos(t),-\text{sen}(t),0\right)$$

$$k(t) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{\left\| \vec{T}'(t) \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|} = \frac{2}{5} \;\Rightarrow\; \rho(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{5}{2}$$

$$C_O(t) = \vec{r}(t) + \frac{5}{2}\left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\right) = \frac{1}{2}\left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 2t\right)$$

Exemplo 33: Seja a hélice circular (passo variável) parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j} + t^2\vec{k} \;,\; t \geq 0$$

Recorrendo a (35), obtém-se para a curvatura e para o raio de curvatura:

$$\vec{r}'(t) = 2\left(-\text{sen}(t), \cos(t), t\right) \;\Rightarrow\; \left\| \vec{r}'(t) \right\| = 2\sqrt{1+t^2}$$

$$\vec{r}''(t) = 2\left(-\cos(t), -\text{sen}(t), 1\right)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = 4\left(\cos(t) + t\,\text{sen}(t), -t\cos(t) + \text{sen}(t), 1\right)$$

$$\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\| = 4\sqrt{\left(\cos(t) + t\,\text{sen}(t)\right)^2 + \left(-t\cos(t) + \text{sen}(t)\right)^2 + 1} =$$

$$= 4\sqrt{\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) + t^2\left(\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)\right) + 1} = 4\sqrt{2+t^2}$$

$$k(t) = \frac{\left\| \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \right\|}{\left\| \vec{r}'(t) \right\|^3} = \frac{4\sqrt{2+t^2}}{\left[2\sqrt{1+t^2}\right]^3} = \frac{\sqrt{2+t^2}}{2\left(1+t^2\right)^{3/2}}$$

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)} = \frac{2\left(1+t^2\right)^{3/2}}{\sqrt{2+t^2}}$$

Notando que

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(-\operatorname{sen}(t), \cos(t), t\right) \tag{36}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}\left(\cos(t)+t\operatorname{sen}(t), -t\cos(t)+\operatorname{sen}(t), 1\right)$$

o versor normal principal é:

$$\vec{N}(t) = \vec{B}(t)\times\vec{T}(t) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(2+t^2)}}\left(t\operatorname{sen}(t)-(1+t^2)\cos(t), -t\cos(t)-(1+t^2)\operatorname{sen}(t), 1\right)$$

Finalmente, obtém-se para o vector curvatura

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k(t)\vec{N}(t) = \frac{1}{2\left(1+t^2\right)^2}\left(t\operatorname{sen}(t)-(1+t^2)\cos(t), -t\cos(t)-(1+t^2)\operatorname{sen}(t), 1\right)$$

Convém realçar que, neste caso, não foi utilizada a expressão (34) para o cálculo do vector curvatura em virtude da dificuldade inerente à derivação do versor da tangente definido em (36).
Por exemplo, no ponto inicial da curva $\vec{r}(0) = (2,0,0)$ obtém-se:

$$k(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\Rightarrow\; \rho(0) = \frac{1}{k(0)} = \sqrt{2}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k(0)\vec{N}(0) = \frac{1}{2}(-1,0,1)$$

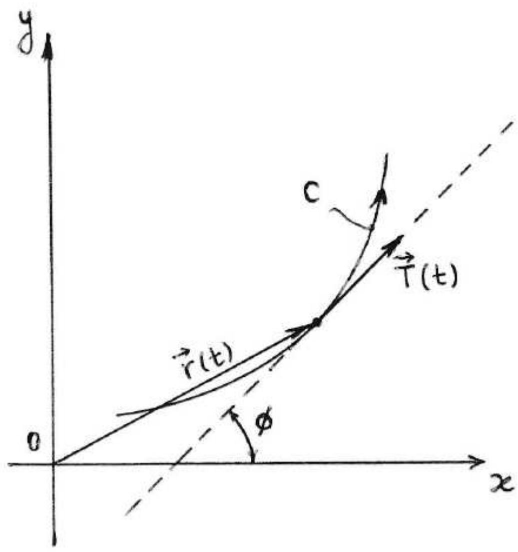
Neste ponto o centro do círculo osculador é:

$$C_O(0) = \vec{r}(0) + \rho(0)\vec{N}(0) = (2,0,0) + (-1,0,1) = (1,0,1)$$

Curvatura de uma curva plana

- No caso da curva C ser plana, o versor da tangente em qualquer ponto da curva pode ser expresso em função do ângulo, ϕ, medido em radianos, que exprime a inclinação da linha tangente à curva, ou seja:

$$\vec{T}(\phi) = \cos(\phi)\vec{i} + \text{sen}(\phi)\vec{j}$$



Neste caso, obtém-se para o vector curvatura

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = -\frac{d\phi}{ds}\text{sen}(\phi)\vec{i} + \frac{d\phi}{ds}\cos(\phi)\vec{j}$$

sendo a curvatura dada por:

$$k = \left\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|$$

Assim, conclui-se que a curvatura da curva pode ser interpretada como sendo a magnitude da variação do ângulo ϕ por unidade do comprimento de arco.

Teorema 17: Seja a curva plana diferenciável, *C*, parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \ , \ t \in I$$

tal que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, $t \in I$. Então:

$$k(t) = \frac{\left| x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) \right|}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \right)^{3/2}}$$

Teorema 18: Seja a função diferenciável $y = f(x)$, $x \in I$. A curvatura do gráfico da função é dada por:

$$k(x) = \frac{\left| f''(x) \right|}{\left(1 + [f'(x)]^2 \right)^{3/2}}$$

Torção de uma curva no espaço

- Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por

  $$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ , \ t \in I$$

  em que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Tal como o versor da tangente, também o versor binormal, $\vec{B}(t)$, pode variar ao longo da curva, variação que se reflecte, unicamente, na mudança da sua direcção (sendo versor, a norma é constante e igual a um).

- Chama-se *vector torção* da curva *C* à variação de direcção do versor binormal por unidade do comprimento de arco, ou seja, $d\vec{B}/ds$.

Teorema 19: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{B}'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

Teorema 20: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. O vector torção, $d\vec{B}/ds$, é ortogonal ao versor da tangente, $\vec{T}(t)$, e ao versor binormal, $\vec{B}(t)$, isto é, é um vector paralelo ao versor normal principal, $\vec{N}(t)$.

- Em face da propriedade anterior, é comum escrever-se o vector torção sob a forma

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau(t)\vec{N}(t) \tag{37}$$

  onde a função escalar, $\tau(t)$, definida em $\mathbb{R}$, é designada por *torção* da curva. Nestas condições: $d\vec{B}/ds$ e $\vec{N}(t)$ são vectores paralelos e com o mesmo sentido, se $\tau < 0$; são vectores paralelos e com sentidos opostos, se $\tau > 0$.

- A expressão (37) permite exprimir a torção de uma curva através do seguinte produto escalar:

$$\tau(t) = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N}(t)$$

- É óbvio que se uma curva é plana, o vector binormal é constante, pelo que o vector torção é o vector nulo, $d\vec{B}/ds = \vec{0}$, e a torção é nula, $\tau = 0$.

Exemplo 34: Seja a hélice circular do exemplo 5 e parametrizada por:

$$\vec{f}(t) = 2\cos(t)\vec{i} + 2\text{sen}(t)\vec{j} + t\vec{k} \ , \ t \geq 0$$

Atendendo a (14), (18) e (19), obtém-se:

$$\vec{B}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(\cos(t), \text{sen}(t), 0\big)$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{B}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{1}{5}\big(\cos(t), \text{sen}(t), 0\big)$$

$$\tau(t) = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N}(t) = -\frac{1}{5}\big(\cos(t), \text{sen}(t), 0\big) \cdot \big(-\cos(t), -\text{sen}(t), 0\big) =$$

$$= -\frac{1}{5}\Big(-\cos^2(t) - \text{sen}^2(t)\Big) = -\frac{1}{5}(-1) = \frac{1}{5}$$

Teorema 21: Seja a curva diferenciável, C, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então:

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \frac{\vec{T}(t) \times \vec{N}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

$$\tau(t) = -\frac{\vec{B}'(t) \cdot \vec{N}(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{B}(t) \cdot \vec{N}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

Fórmulas de Frenet-Serret

- Os versores $\vec{T}$, $\vec{N}$ e $\vec{B}$, sendo ortogonais entre si, são linearmente independentes. Assim, o conjunto $S = \{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ constitui uma base ortonormal para o espaço $\mathbb{R}^3$ e define, em cada ponto de uma curva diferenciável, um *referencial ortonormal directo*, designado por *referencial de Frenet*.

- As *fórmulas de Frenet-Serret* apresentam os vectores $d\vec{T}/ds$, $d\vec{N}/ds$ e $d\vec{B}/ds$ como combinação linear dos elementos que formam a base ortonormal $S = \{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$.

Teorema 22: Seja a curva diferenciável, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$, tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = k\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \tau\vec{B} - k\vec{T}$$

em que k e τ representam a *curvatura* e a *torção*, respectivamente.