

Nome do estudante: N.º

Informação aos estudantes: A consulta permitida inclui slides das aulas teóricas, livros e outros materiais impressos! Anotações serão permitidas apenas nestes materiais! Não serão permitidas folhas manuscritas avulsas de qualquer tipo ou acesso à Internet (tablets, portáteis, etc). Telemóveis deverão permanecer **DESLIGADOS** durante a duração do exame. Deve responder às questões em folhas separadas (uma folha para cada questão).

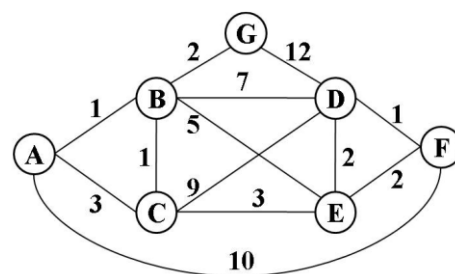
1. [4 valores] Numa biblioteca, pretende-se organizar um conjunto de n livros em prateleiras. A ordem relativa dos livros já foi determinada pelo bibliotecário e não pode ser alterada. Um livro i é caracterizado por largura $L[i]$ e altura $A[i]$. O comprimento de cada prateleira é LP . As prateleiras são ajustáveis em altura, sendo a altura de cada prateleira igual à altura do livro mais alto aí colocado. O custo de uma disposição particular é determinado pela soma das alturas de todas as prateleiras. Pretende-se determinar a disposição que minimiza este custo.

- [1,5 valor] Implemente (em C++ ou pseudo-código) uma solução para o problema, usando um algoritmo ganancioso. Discuta a otimalidade do algoritmo e indique a sua complexidade temporal. Justifique.
- [2,5 valores] Formalize uma solução para o problema, usando programação dinâmica. Implemente (em C++ ou pseudo-código) essa solução e indique a sua complexidade temporal. Justifique.

Sugestão: Resolva o problema por “backwards” (começando pela colocação do último livro). Considere $Custo[i]$ o custo de colocação dos livros $i..n$, estando i no início de uma prateleira.

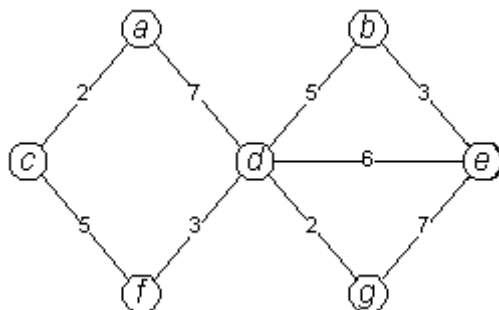
2. [3 valores] Considerando problemas de caminhos em grafos, responda às seguintes alíneas. Na descrição de algoritmos, utilize pseudo-código ou C++.

- [1,5 valores] Considere o grafo não dirigido apresentado na figura. Pretende-se determinar os caminhos mais curtos, com origem em A, gerados pela aplicação do algoritmo de Dijkstra. Apresente os valores de distância em cada vértice à medida que estes são processados. Qual o caminho mais curto de A a F?



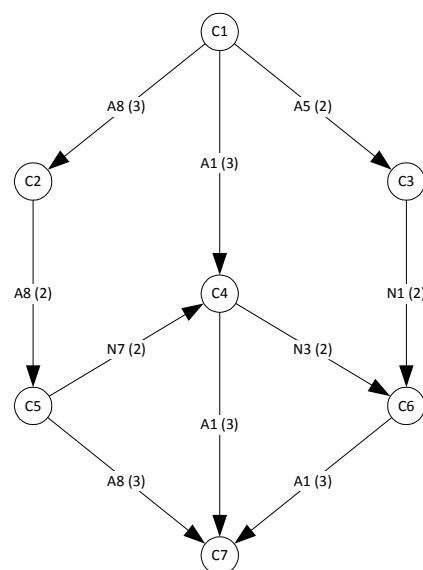
- [1,5 valores] Apresente um algoritmo eficiente que, dado um DAG (grafo dirigido e acíclico) com arestas de valor positivo e vértices v_i , v_f e v_k desse grafo, determina o caminho mais curto de v_i a v_f , passando obrigatoriamente por v_k . Sugestão: altere o algoritmo Dijkstra.

3. [3 valores] Considere o grafo pesado da figura abaixo e responda às alíneas seguintes:



- [1 valor] Indique todos os pontos de articulação do grafo, caso existam. Explique.
- [2 valores] Encontre um “caminho ótimo do Carteiro Chinês”, a começar no vértice *a*. Explique, passo a passo, o método utilizado para o cálculo deste caminho e porque é que é ótimo.

4. [3 valores] O governo de um país decidiu construir uma rede de auto-estradas a ligar as cidades C1, C2, C3, C4, C5, C6 e C7, como mostra o grafo da figura. Alguns troços da rede foram classificados como “auto-estradas” (A) e outros como “estradas nacionais” (N). Entre parenteses indica-se o número de vias do troço, que limita o número máximo de veículos que podem por ali passar - no caso das auto-estradas, cada via admite um volume horário de 2.000 veículos, enquanto as vias nas estradas nacionais apenas 1.000 veículos. Para o projeto, estimou-se um número de viagens horárias entre C1 e C7 de 18.000 veículos por hora.



- [1,5 Valores] Verifique se a rede construída é capaz de dar resposta ao número de viagens estimado para o projeto. Justifique.
- [1,5 Valores] Se o governo autorizar uma concessionária a explorar a rede com cobrança de portagem num dos troços, qual troço seria o mais rentável para a concessionária? Justifique.

5. [3 valores] O código genético utiliza 4 letras (A, C, G, T) para codificar as bases que constituem a estrutura do ADN. O gene XPTO é constituído pela seguinte sequência de bases, e respectivas frequências para as letras:

A A G G T A C C T A C C C C C C C C C C A (5 A's, 13 C's, 2 G's, 2 T's)

- a) [1,5 valores] Considerando um sistema de codificação de tamanho fixo, qual será o menor código, suficiente para representar o alfabeto? Qual o tamanho, em bits, para codificar o gene XPTO? Explique.
- b) [1,5 valores] Considerando códigos de tamanho variável, qual será o custo mínimo total de codificação para o gene XPTO? Explique detalhadamente.
6. [4 valores] Numa escola de verão em informática, vários cursos interessantes são oferecidos aos participantes, ministrados por instrutores de reputação internacional, de universidades e empresas conhecidas. Os participantes podem inscrever-se em vários desses cursos, sem qualquer limitação para o número de cursos que escolhem. Entretanto, os participantes só terão certificados dos cursos em que forem aprovados com sucesso no respectivo exame final. Considerando que todos os exames finais terão duração de 1 (uma) hora, e só serão realizados uma única vez, é necessário que estudantes inscritos em vários cursos não tenham exames sobrepostos, ou seja, marcados para a mesma hora. É possível implementar um algoritmo eficiente, para determinar o número mínimo de *slots* de 1 hora, a fim de evitar que estudantes inscritos em vários cursos tenham exames sobrepostos?

Considerando o problema exposto, responda às seguintes questões:

- a) [1,0 valores] Reformule este problema como um problema de decisão.
- b) [3,0 valores] Verifique se há uma solução eficiente para este problema, explicando os passos da sua solução.

Sugestão: Caso necessário, poderá utilizar as seguintes definições de problemas NP-completo, bem como considerar outros problemas da classe NP-completo que conheça.

Cobertura de vértices (*Vertex-Cover Problem, VCP*): Dado um grafo $G=(V, E)$, encontrar uma cobertura dos vértices de G é encontrar um subconjunto $W \subseteq V$ tal que, para toda aresta $\{i, j\} \in E$, tem-se $i \in W$ ou $j \in W$.

Coloração de grafos (*Graph coloring, GC*): Dado um grafo $G=(V, E)$, colorir o grafo G é definir rótulos (ou cores) para todos os vértices de G de forma a que não haja dois vértices $i \in V$ e $j \in V$, para toda aresta $\{i, j\} \in E$, tal que i e j compartilhem o mesmo rótulo (ou cor); ou seja, $color(i) \neq color(j)$.

Bom Exame!