

Nome do estudante: ..... N.º .....

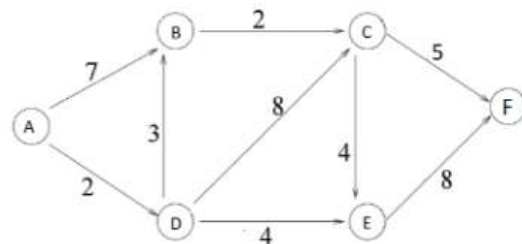
**Informação aos estudantes:** A consulta permitida inclui slides das aulas teóricas, livros e outros materiais impressos! Anotações serão permitidas apenas nestes materiais! Não serão permitidas folhas manuscritas avulsas de qualquer tipo ou acesso à Internet (tablets, portáteis, etc.) Telemóveis deverão permanecer **DESLIGADOS** durante a duração do exame. Deve responder os seguintes grupos de questões em folhas separadas (uma folha para cada grupo): {1, 2, 3} e {4, 5, 6}.

As folhas de resposta, de rascunho, assim como do enunciado devem ser todas entregues no final do exame!

1. [4 valores] O Sr. Silva possui 1000€ que quer investir em ações de *BLA*. Ele garante conhecer os valores que estas ações irão ter nos próximos  $n$  dias. O Sr. Silva pretende escolher um (e um só) dia para comprar o maior número de ações possíveis e um outro dia, subsequente, para vender todas as ações. O objetivo é maximizar o lucro. Considere *preco[]* o vetor que contém os preços das ações de *BLA* nos próximos dias, sendo *preco[i]* o preço de uma ação no dia  $i$ .

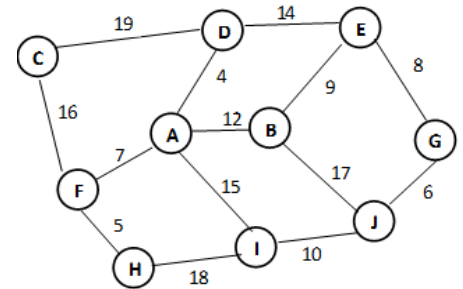
- [1,5 valor] Implemente em pseudocódigo uma solução para o problema, usando uma estratégia de divisão e conquista. Explique e indique a complexidade temporal.
- [2,5 valores] Pretende-se agora resolver o problema usando Programação Dinâmica. Formalize uma solução para o problema, apresentando a fórmula de recorrência. Implemente, em pseudocódigo, essa solução. Explique e indique a sua complexidade temporal.

2. [3 valores] O grafo seguinte representa um mapa de estradas. Os vértices identificam cidades, sendo o valor das arestas a distância entre as cidades origem e destino dessa aresta.



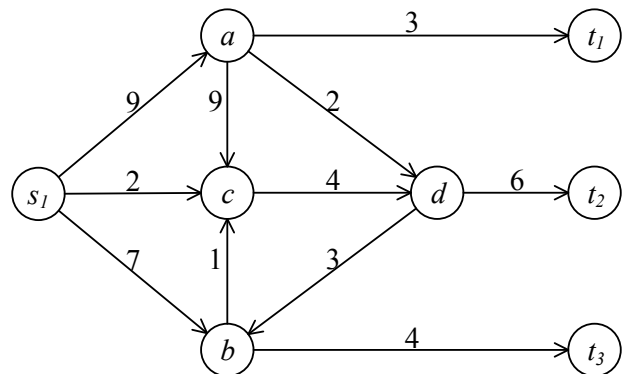
- [1,0 valor] Usando o algoritmo de Dijkstra, determine o caminho que minimiza a distância da viagem entre a cidade A e a cidade F. Apresente todos os cálculos intermédios, explicando.
- [1,0 valor] Considere que a saída de uma cidade está sujeita ao pagamento de uma taxa estipulada pelos serviços da cidade. Altere o algoritmo de Dijkstra de modo a calcular o caminho que minimiza o valor das taxas a pagar para ir da cidade A à cidade F (minimiza a soma dos valores dos vértices de um caminho e não das arestas). Explique. Identifique, neste caso, o caminho para ir da cidade A à cidade F, quando a taxa a pagar na saída das cidades A, B, C, D e E é igual a 10, 20, 30, 22, 25, respetivamente.
- [1,0 valor] Num grafo  $G$ , aplica-se o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho mais curto de um vértice  $O$  a cada um de todos os outros vértices do grafo. Se ordenar estes outros vértices por ordem crescente de distância a  $O$ , obtém uma ordenação topológica de  $G$ ? Justifique a sua resposta.

3. [3 valores] Determinada empresa possui escritórios nas cidades A, B, C, D, E e F e pretende alugar linhas de comunicação para que todos os escritórios possam comunicar entre si. A companhia *BLA* é gestora de uma rede de comunicação que cobra diferentes valores para o aluguer das linhas que ligam diferentes cidades (representada no grafo seguinte).



- [1,0 valor] Determine o conjunto de linhas de comunicação a alugar à empresa *BLA* de modo a permitir a comunicação entre todos os escritórios da empresa minimizando o custo total do aluguer. Explique.
- [1,0 valor] “A linha de comunicação *C-F* fará sempre parte da árvore de expansão mínima”. Comente a afirmação anterior relativa ao grafo da figura (sem recorrer à construção completa da árvore de expansão mínima).
- [1,0 valor] Seja *T* a árvore de expansão mínima do grafo  $G=\langle V,E \rangle$ . Um ramo da árvore *T*, com origem em *v* e destino em *u*, é o caminho de menor custo entre *v* e *u*. Comente a afirmação.

4. [3 valores] Considere uma rede de irrigação, *H*, ilustrada na figura. A rede é alimentada pela fonte *s1*, para irrigar os campos *a*, *b*, *c*, e *d*, e tem como drenos os poços *t1*, *t2* e *t3*. As capacidades dos canais de irrigação são indicadas pelos números sobre as arestas respetivas.



- [1,5 valor] Encontre o fluxo máximo através da rede, e indique, para cada canal, o fluxo respetivo? Explique passo-a-passo a sua solução.
  - [0,5 valor] Encontre um corte mínimo *s-t* na rede, indicando os dois subconjuntos de vértices resultantes deste corte.
  - [1,0 valor] Considere que o canal representado pela aresta  $\{a, d\}$ , por alguma razão, foi bloqueado. Que efeito terá esta situação no fluxo máximo da rede *H*? Justifique a sua resposta.
5. [3 valores] O vetor *f*, abaixo, apresenta o registo das ocorrências de diferentes caracteres (não numéricos) de um alfabeto num dado texto; cada posição do vetor está associada a um carácter do alfabeto – o primeiro

caracter do alfabeto terá a sua frequência indicada na primeira posição do vetor, e assim em diante. Considerando o vetor abaixo, responda às perguntas seguintes, justificando as suas respostas.

$i$	$f[0]$	$f[1]$	$f[2]$	$f[3]$	$f[4]$	$f[5]$	$f[6]$	$f[7]$	$f[8]$	$f[9]$
$f[i]$	10	0	5	3	0	2	10	5	0	5

- [0,5 valores] Considerando um sistema de codificação de tamanho fixo, qual será o menor custo de codificação para este alfabeto?
  - [1,5 valor] Construa a árvore de codificação de Huffman para o caso indicado. Considerando códigos de tamanho variável, qual será o custo mínimo total de codificação do texto?
  - [1,0 valores] Verifique se o código binário 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0 1 poderá ser um fragmento do texto em análise, considerando a codificação de Huffman resultante da alínea anterior. Qual seria uma possível sequência de caracteres? Explique.
6. [4 valores] Considere uma rede de computadores, representada por um grafo  $G$ , onde os vértices representam *routers* e as arestas representam as ligações físicas da rede. A empresa responsável pela gestão da rede pretende modernizá-la a partir da instalação de alguns novos *routers* (não todos) com funcionalidades muito sofisticadas, nomeadamente para a monitorização de incidentes nas ligações da rede. No entanto, os novos *routers* são extremamente caros, e a empresa, sem prejuízo da sua operação, deseja minimizar os gastos com a compra dos novos *routers*, determinando o número suficiente de novos *routers* a comprar, para realizar a monitorização de todas as suas ligações.

Considerando o problema exposto, responda às perguntas a seguir:

- [1,0 valores] Reformule este problema como um problema de decisão.
- [3,0 valores] Verifique se há uma solução eficiente para este problema, explicando os passos da sua solução.

Sugestão: Caso necessário, poderá utilizar as definições dos problemas NP-completo a seguir. Se desejar, poderá também considerar outros problemas da classe NP-completo, para além dos enunciados.

Cobertura de vértices (*Vertex-Cover Problem, VCP*): Dado um grafo  $G=(V, E)$ , encontrar uma cobertura dos vértices de  $G$  é encontrar um subconjunto  $W \subseteq V$  tal que, para toda aresta  $\{i, j\} \in E$ , tem-se  $i \in W$  ou  $j \in W$ .

Soma dos subconjuntos (*Subset Sum problem, SSP*): Dado um conjunto de inteiros positivos,  $S$ , e um inteiro  $k$ , o problema resume-se em encontrar um subconjunto  $S' \subseteq S$ , tal que a soma dos elementos de  $S'$  seja  $k$ .

**Bom Exame!**