Introdução aos Métodos Numéricos

Rosaldo Rossetti

Desenho de Algoritmos, L.EIC

A apresentar…

- Introdução
- Representação e análise de erros
- Resolução de equações não lineares
- Sistemas de equações não lineares
- Sistemas de equações lineares
- Outros métodos

Introdução

Alguns conceitos importantes:

- A **Análise Numérica** abrange o estudo de métodos e técnicas que permitam obter soluções aproximadas de problemas numéricos de uma forma eficiente. É por natureza uma disciplina que se situa na fronteira entre a Matemática e a Ciência de Computadores.

- Os **Métodos Numéricos** consistem nos algoritmos que levam à solução de um problema de Análise Numérica.

Introdução

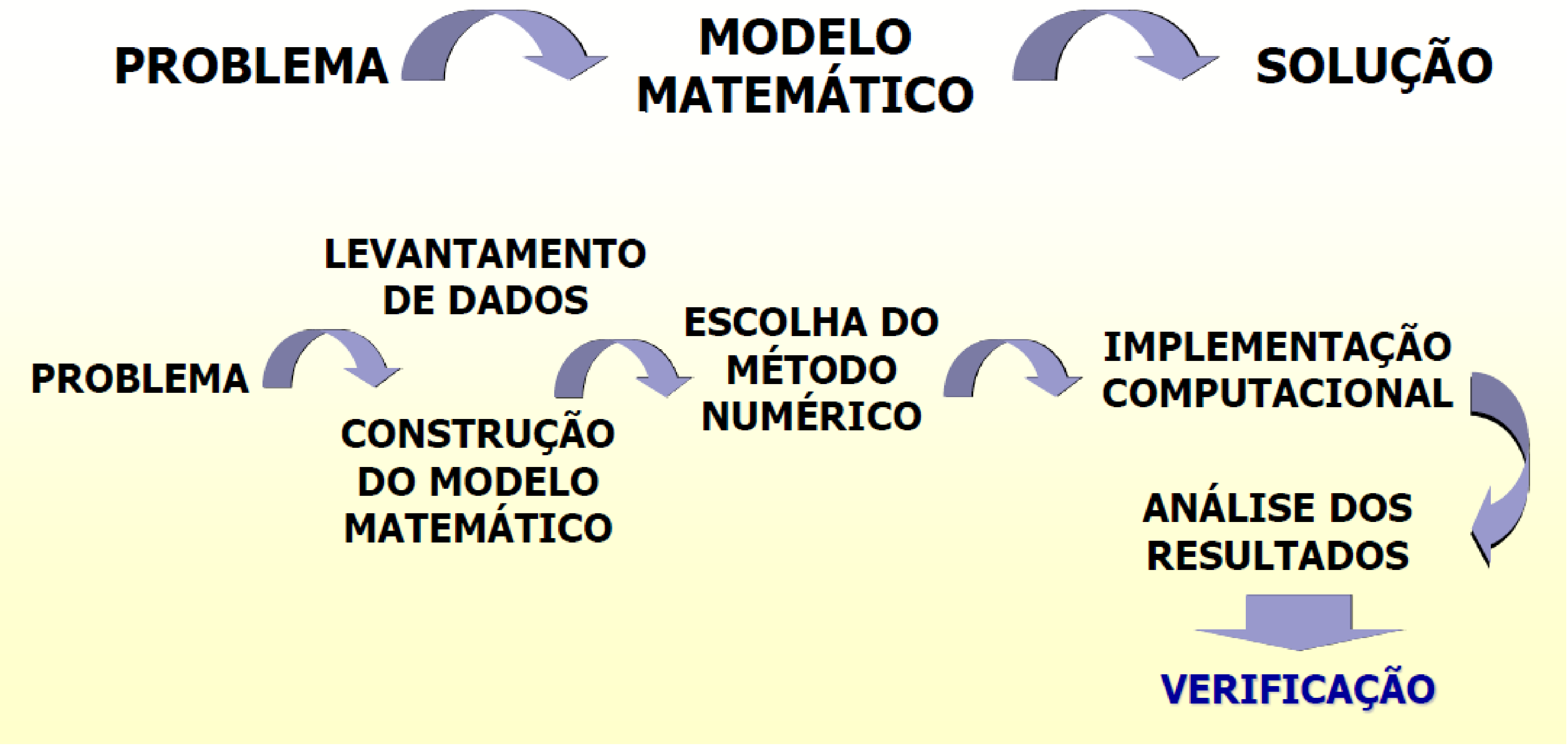
Importância dos Métodos Numéricos na Engenharia –
Exemplos de desastres atribuídos a falhas de computação numérica:

- Falha de um míssil Patriot, Guerra do Golfo, 1991
  - Problemas com arredondamentos de erros
- Explosão do foguete Ariane 5, Guiana Francesa, 1996
  - Problemas com representação numérica (64 bits / 16 bits)
- Afundamento da plataforma Sleipner A, Noruega, 1991
  - Inexatidão da análise de elementos finitos

https://www-users.cse.umn.edu/~arnold/disasters/

Introdução

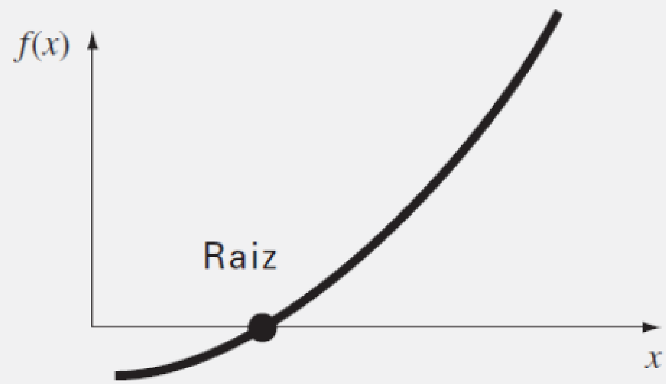
Soluções para problemas numéricos:



Introdução

Algumas aplicações dos Métodos Numéricos

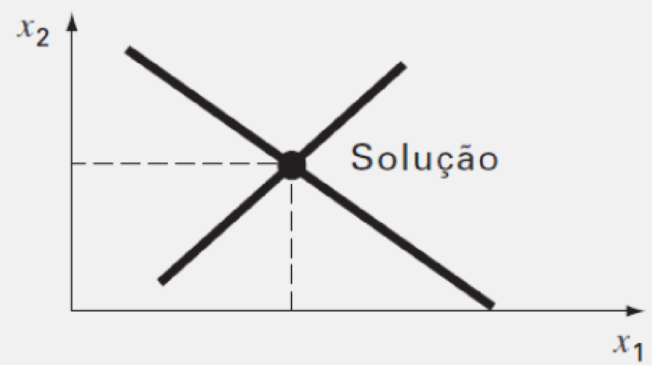
Raízes de equações
Resolva $f(x) = 0$ determinando x.



Equações algébricas lineares
Dados os a's e os c's, resolva

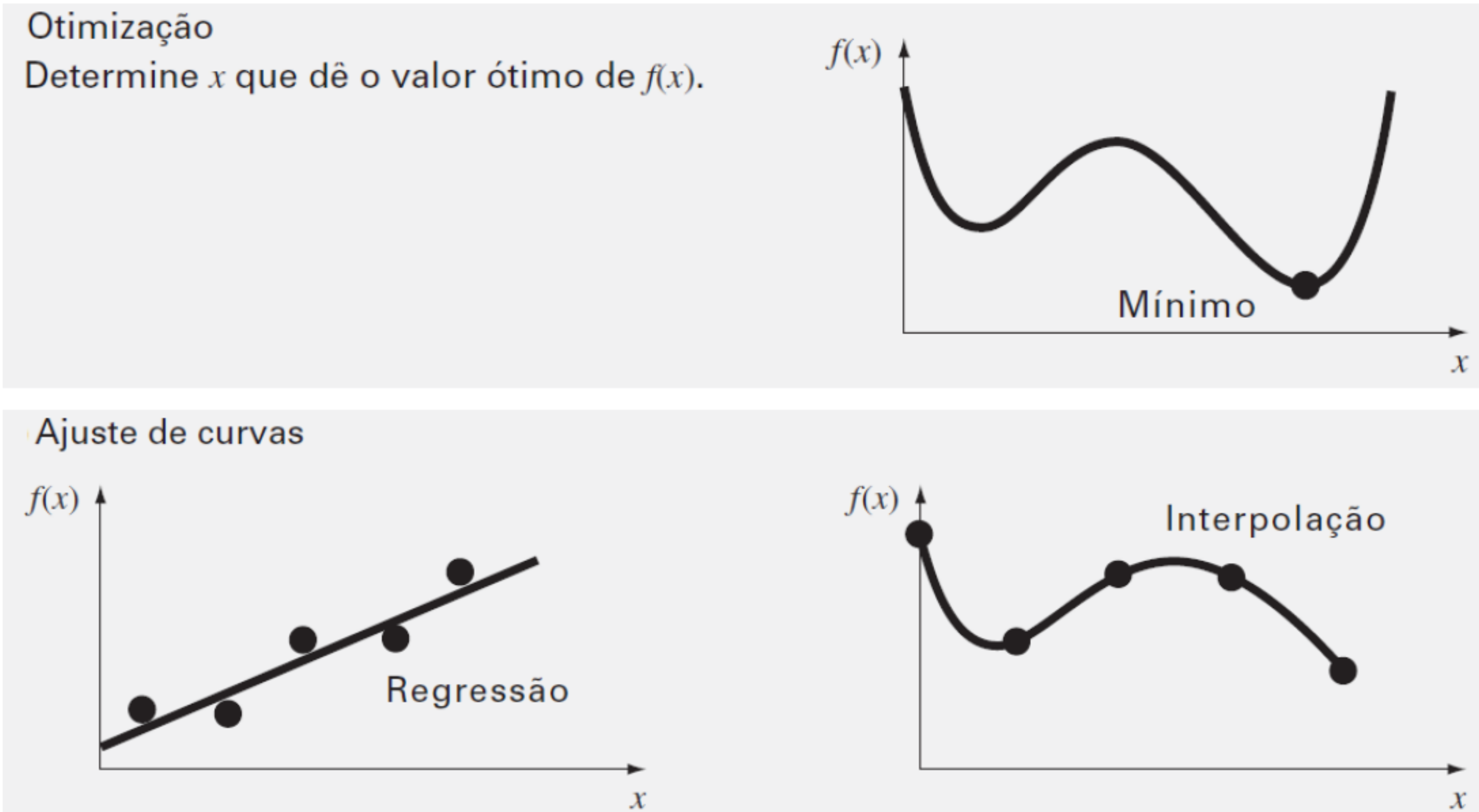
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

para determinar os x's.



Introdução

Algumas aplicações dos Métodos Numéricos



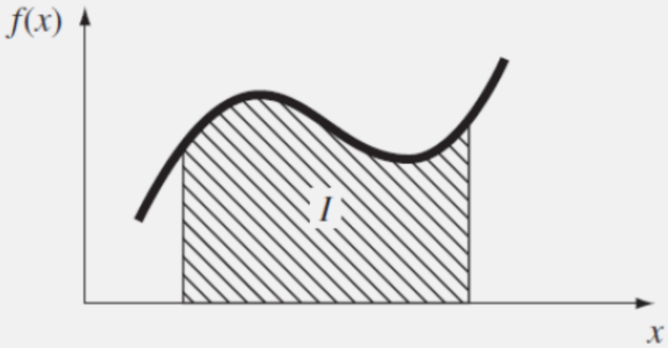
Introdução

Algumas aplicações dos Métodos Numéricos

Integração

$I = \int_a^b f(x)\, dx$

Encontre a área sob a curva.



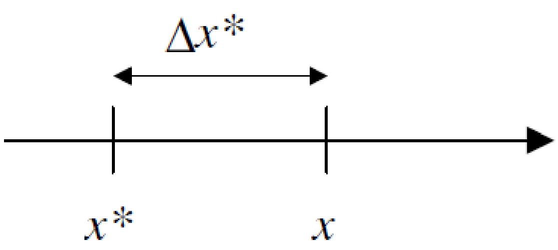
A apresentar…

- Introdução
- Representação e análise de erros
- Resolução de equações não lineares
- Sistemas de equações não lineares
- Sistemas de equações lineares
- Outros métodos

Representação e análise de erros

Valores exactos e aproximados

Valor exacto: x
Valor aproximado: x^*
Erro (de aproximação): $\Delta x^* = x - x^*$



Aproximação

- por defeito: $x^* < x \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x^* > 0$
- por excesso: $x^* > x \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x^* < 0$

Representação e análise de erros

Erro absoluto

Erro absoluto: $|\Delta x^*| = |x - x^*|$

Erro máximo absoluto: um majorante do erro absoluto

$$\varepsilon : \quad |\Delta x^*| \leq \varepsilon$$

Notação:

$$x = x^* \pm \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$$

Exemplo: $\pi = 3.14 \pm 0.002 \qquad \Leftrightarrow \qquad \pi \in [3.138, 3.142]$

Representação e análise de erros

Erro relativo

Erro relativo: $\frac{|\Delta x^*|}{|x|}$ ou aproximadamente $\frac{|\Delta x^*|}{|x^*|}$

$\longrightarrow$ exprime-se habitualmente em percentagem

Erro máximo relativo: um majorante do erro relativo

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|x|} \simeq \frac{\varepsilon}{|x^*|}$$

Notação: $x = x^* \pm (100\varepsilon')\% \;\Leftrightarrow\; x \in [x^*(1-\varepsilon'), x^*(1+\varepsilon')]$

Exemplo: $x = 2.0 \pm 5\% \quad \Leftrightarrow \quad x \in [1.9, 2.1]$

Representação e análise de erros

Notação científica

- Notação científica na base 10 de $x \in \mathbb{R}$

$$x = \pm\, d_n\, d_{n-1} \ldots d_1\, d_0\, .\, d_{-1}\, d_{-2} \ldots \times 10^{e}$$

mantissa: $d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 . d_{-1} d_{-2} d_{-3}$
expoente: $e \in \mathbb{Z}$

Dígitos da mantissa: $d_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Representação e análise de erros

Mantissa com n algarismos

E se a mantissa for $\boxed{d_1 d_2 \cdots d_n d_{n+1} d_{n+2} \cdots}$?

Truncatura

ignoram-se algarismos a partir do índice $n+1$

Arredondamento

- se $0.d_{n+1}d_{n+2}\ldots > 0.5$ soma-se uma unidade à casa n para (**arredondar para cima**)
- se $0.d_{n+1}d_{n+2}\ldots < 0.5$ mantém-se a casa n (**arredondar para baixo**)
- se $0.d_{n+1}d_{n+2}\ldots = 0.5$ arredonda-se para cima ou para baixo ficando a casa n **par** (por vezes também se arredonda para cima)

Representação e análise de erros

Notação compacta para aproximações

Como simplificar a notação $x = x^* \pm \varepsilon$?

Majorar erros absolutos por 0.5×10^n e representar a aproximação até à casa decimal 10^n.

Os algarismos da mantissa (com excepção dos zeros à esquerda) designam-se **algarismos significativos**.

Procedimento

1. majoração de ε por um número da forma 0.5×10^n
2. arredondar x^* para a casa 10^n

Representação e análise de erros

Algarismos significativos e erro relativo

- Exemplos

x^*	ε	Intervalo	Alg. significativos	ε'
2.24	0.005	$[2.235, 2.245]$	3	2.2×10^{-3}
2.240	0.0005	$[2.2395, 2.2405]$	4	2.2×10^{-4}
1.5×10^2	5	$[145, 155]$	2	3.3×10^{-2}
0.1×10^3	50	$[50, 150]$	1	5×10^{-1}
1.00×10^k	0.005×10^k	$[0.995 \times 10^k, 1.005 \times 10^k]$	3	5×10^{-3}

- Teorema

Seja $x \neq 0$. Uma aproximação de x com n algarismos significativos tem um erro relativo inferior a 5×10^{-n} .

Representação e análise de erros

Sistemas de vírgula flutuante $FP(\beta, n, m, M)$

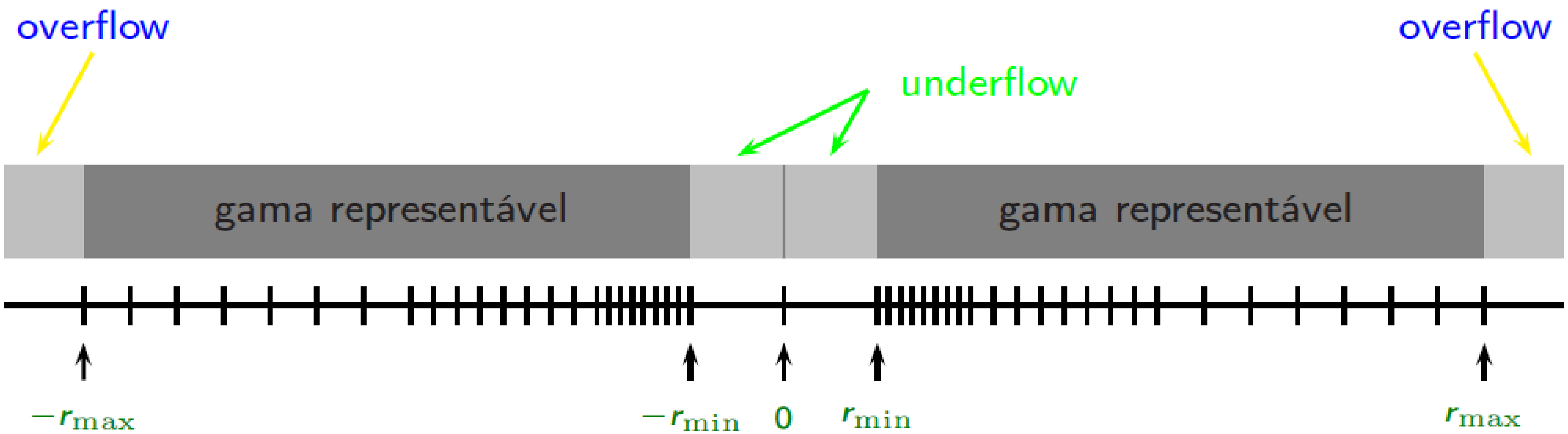
Números representáveis: $x = \pm(0.d_1 d_2 \cdots d_n) \times \beta^e$

β base de representação
n número de dígitos da mantissa (precisão)
m, M expoentes mínimo e máximo (gama representável)

Sistema normalizado: $x = 0 \ \vee \ d_1 \neq 0$

Representação e análise de erros

Vírgula flutuante: números representáveis



Representação e análise de erros

Vírgula flutuante: algumas limitações

- aproximação de números não representáveis
  $\longrightarrow$ arredondamento
  $\longrightarrow$ truncatura
  $\Rightarrow$ erros de representação

- $x, y \in \mathrm{FP} \;\not\Rightarrow\; x \circ y \in \mathrm{FP}$
  $\Rightarrow$ erros de representação

- underflow e overflow
  $\Rightarrow$ impossibilidade de representação

Representação e análise de erros

Vírgula flutuante: algumas limitações (cont.)

Versões do mesmo sistema $\mathrm{FP}(\beta, n, m, M)$ podem diferir

- aproximação de números não representáveis
- tratamento de excepções
- algoritmos de cálculo
- ...

Desvantajoso em termos de

- repetibilidade de resultados
- portabilidade de código
- validação de resultados

Norma IEEE 754

Representação e análise de erros

Aritmética em representações finitas

- ordem de realização de operações associativas pode influenciar resultado: $(a \circ b) \circ c \stackrel{?}{=} a \circ (b \circ c)$

  Ex: $1 + 0.24 + 0.14$ com 2 dígitos.

- cancelamento aditivo: $a + b$ com $a \ll b$ ou $a \gg b$

  $\longrightarrow$ problemas com somas de muitas parcelas

- cancelamento subtractivo: $a - b$ com $a \approx b$

  $\longrightarrow$ podem perder-se algarismos significativos

  $\longrightarrow$ podem conduzir a erros elevados

  $\longrightarrow$ possível minorar rearranjando cálculos

  Ex: $1.16 - 1.04$ com 2 dígitos.

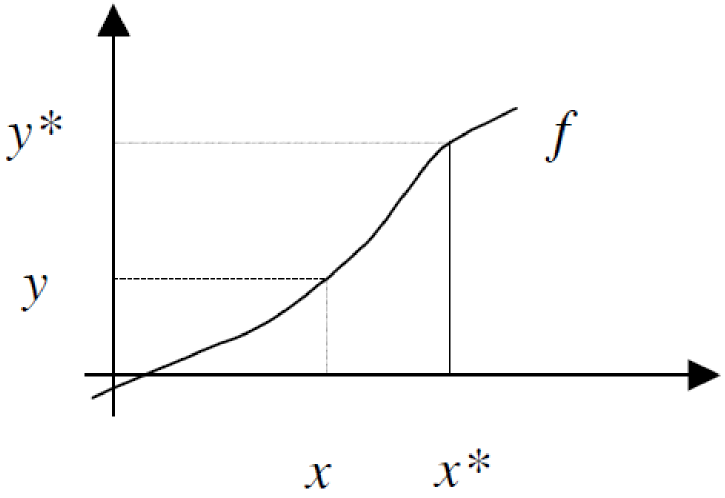
Representação e análise de erros

Propagação de erros no cálculo de $y = f(x)$

x^* valor aproximado de x. Como aproximar $y = f(x)$?

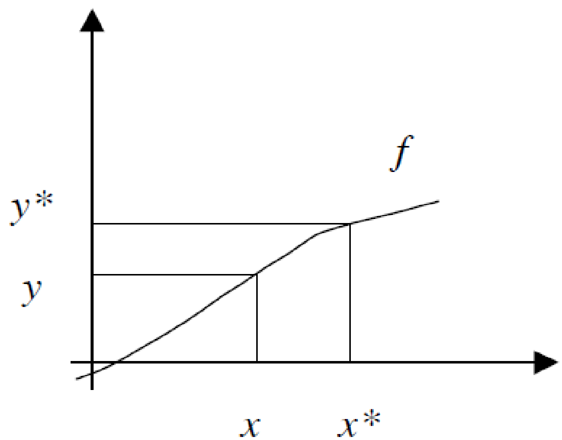
Será $\boxed{y^* = f(x^*)}$ uma boa aproximação?

f contínua: $\boxed{x^* \text{ próximo de } x} \Rightarrow \boxed{y^* \text{ próximo de } y}$

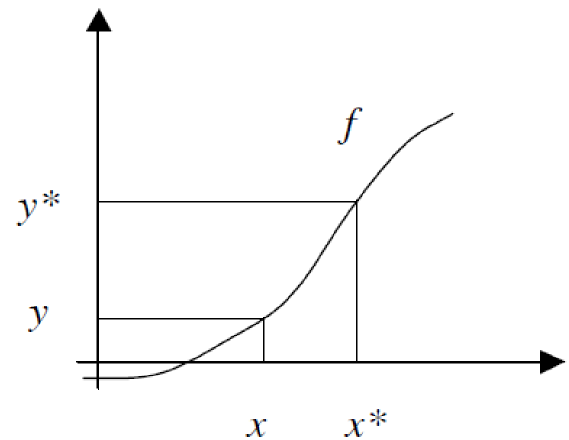


Representação e análise de erros

Estimação do erro de $y^* = f(x^*)$



f de variação *lenta*



f de variação *rápida*

$$\Delta y^* = y - y^* = f(x) - f(x^*) = f(x^* + \Delta x^*) - f(x^*)$$

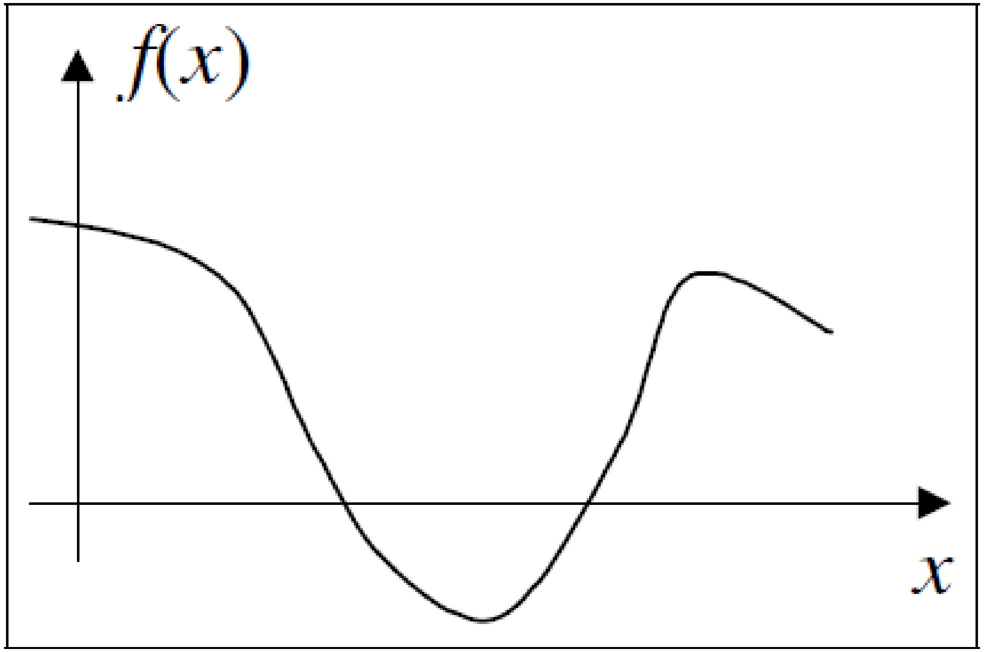
A apresentar…

- Introdução
- Representação e análise de erros
- Resolução de equações não lineares
  - Método das bissecções sucessivas
  - Método da falsa posição (regula falsi)
  - Método iterativo simples (ou do ponto fixo)
  - Método de Newton
- Sistemas de equações não lineares
- Outros métodos

Resolução de equações não lineares

Problema: como resolver equações algébricas não lineares, i.e. escritas na forma $f(x) = 0$, onde f é uma função real de variável real.

Todo valor s que anula f, i.e. tal que $f(s) = 0$, designa-se por **zero** da função f ou **solução** da equação $f(x) = 0$.



Resolução de equações não lineares

Perante $f(x) = 0$, antes da aplicação de qq método, importa saber:

- A função f tem solução, i.e. existe um real s tal que $f(s) = 0$?
- A solução é única, ou existem diferentes soluções ?
- Se houver várias soluções, quais importam determinar ?

Métodos de solução:

- Métodos **diretos** (resolução exata): ex. fórmula resolvente p/ 2º grau
- Métodos **iterativos** (resolução aproximada): importa saber propriedades gerais de f , e.g. continuidade, monotonia, diferenciabilidade, limites inferiores e superiores de derivadas, etc.

Resolução de equações não lineares

Método **iterativo** geral:

$$
\begin{array}{lccc}
\text{valor inicial} & x_0 & : & f(x_0) \neq 0 \\
1^{\text{a}} \text{ iteração} & \downarrow & & \\
 & x_1 & : & f(x_1) \neq 0 \\
2^{\text{a}} \text{ iteração} & \downarrow & & \\
 & x_2 & : & f(x_2) \neq 0 \\
 & \downarrow & & \\
 & \vdots & & \\
\text{iteração } k & \downarrow & & \\
 & x_k & : & f(x_k) \approx 0 \text{ ou } x_k \approx s
\end{array}
$$

- **Critério de paragem:** x_k próximo de s ou $f(x_k)$ próximo de 0

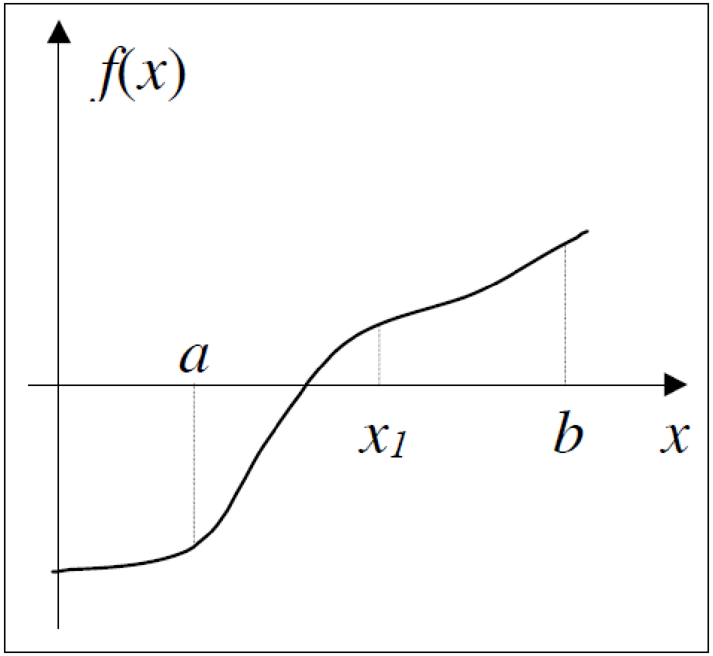
Resolução de equações não lineares

Método das bissecções sucessivas:

Descrição

Parte-se de um intervalo tal que a função tenha sinais contrários nos seus extremos.

Divide-se o intervalo a meio, escolhe-se o subintervalo onde a função tem sinais contrários nos extremos e assim sucessivamente.



Resolução de equações não lineares

Método das bissecções sucessivas:

Algoritmo:

Inicialização	$[a_0, b_0] = [a, b]$
Repetir	1. $x_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$; 2. **Se** $f(x_{n+1}) f(a_n) < 0$ **Então** $a_{n+1} = a_n;\ b_{n+1} = x_{n+1};$ **Senão** $a_{n+1} = x_{n+1};\ b_{n+1} = b_n;$
Até	*verificar critério de paragem*

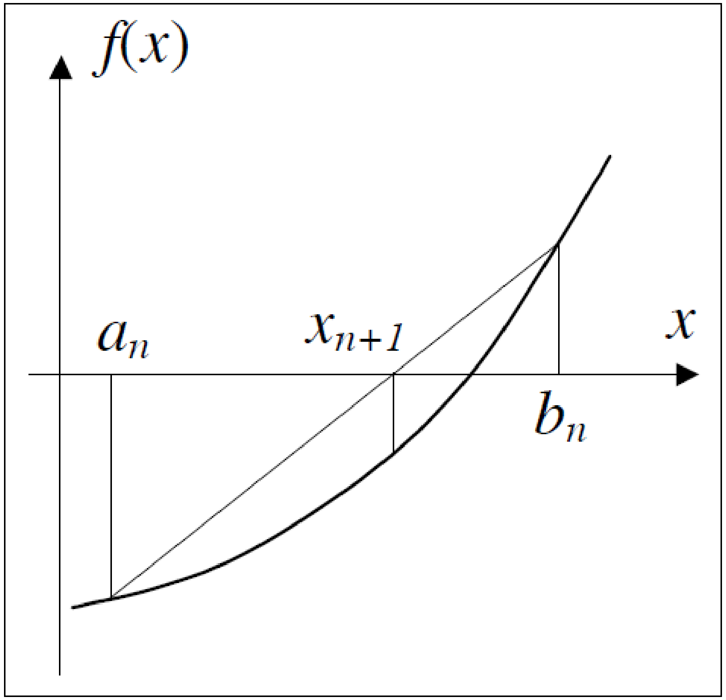
Resolução de equações não lineares

Método da falsa posição (*regula falsi*):

Semelhante ao método das bissecções sucessivas, mas com o cálculo de x_{n+1} dado por

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}}$$

Este ponto corresponde à intersecção com o eixo dos xx da recta que une os pontos $(a_n, f(a_n))$ e $(b_n, f(b_n))$.



Resolução de equações não lineares

Método da falsa posição (*regula falsi*):

Algoritmo:

Inicialização	$[a_0, b_0] = [a, b]$
Repetir	1. $x_{n+1} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$; 2. **Se** $f(x_{n+1}) f(a_n) < 0$ **Então** $a_{n+1} = a_n;\ b_{n+1} = x_{n+1}$; **Senão** $a_{n+1} = x_{n+1};\ b_{n+1} = b_n$;
Até	*verificar critério de paragem*

Resolução de equações não lineares

Método iterativo simples (ou do ponto fixo):

Para aplicar o método à resolução de uma função do tipo f(x) = 0, será necessário:

1. Reescrever $f(x) = 0$ da forma equivalente $x = F(x)$
2. Escolher uma estimativa inicial x_0
3. Gerar a sucessão $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots$

F designa-se função de recorrência

$s : F(s) = s$ designa-se ponto fixo de F

Resolução de equações não lineares

Método iterativo simples (ou do ponto fixo):

F é obtida por manipulação algébrica da equação $f(x) = 0$

Por exemplo, para $f(x) = x - e^{-x} = 0$, poder-se-ia ter:

$x = e^{-x}$, equivalente a $F(x) = e^{-x}$, ou

$x = -ln(x)$, equivalente a $F(x) = -ln(x)$, para $x > 0$

… ou seja, para uma função $f(x) = 0$ pode-se obter diferentes funções de recorrência $F(x_n)$

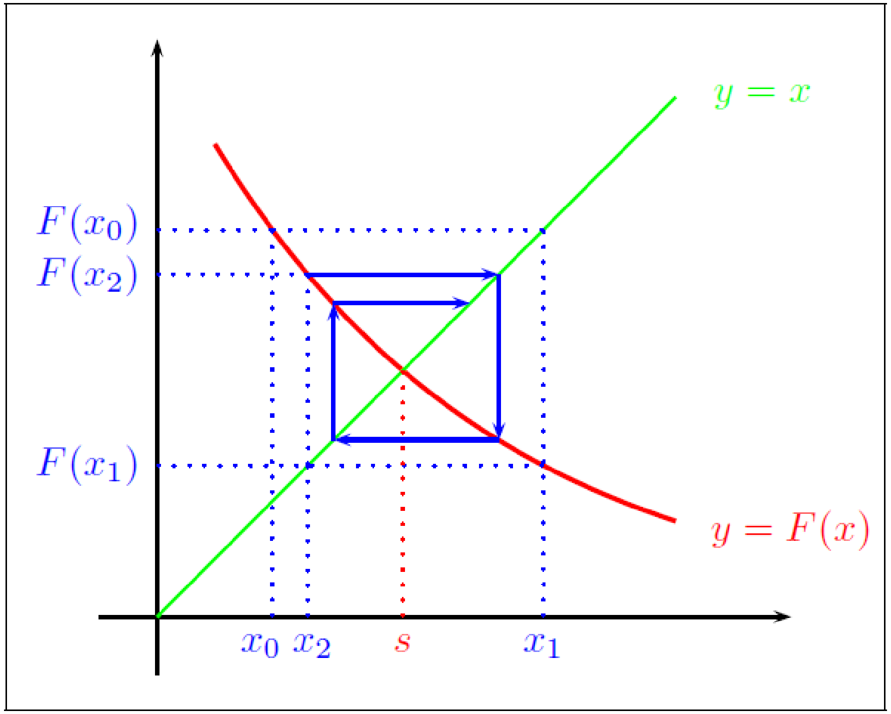
Resolução de equações não lineares

Método iterativo simples (ou do ponto fixo):

Uma vez que, por hipótese, se tem
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = F(x)$,

conclui-se que
$f(s) = 0$, pois $s = F(s)$.

Ou seja, o método iterativo simples, quando convergente, produz sucessões que convergem para zeros da função f.



Resolução de equações não lineares

Método iterativo simples (ou do ponto fixo):

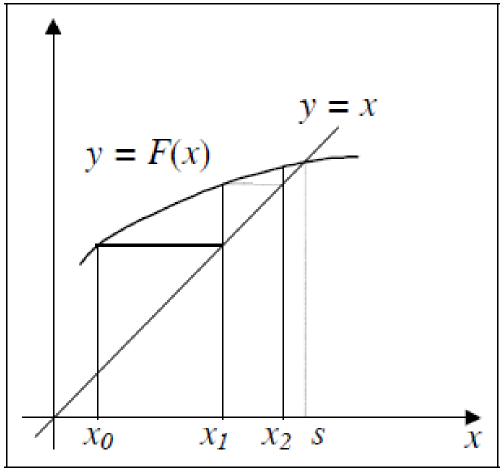
Algoritmo:

Inicialização	Escolher x_0
Repetir	$x_{n+1} = F(x_n)$
Até	*verificar critério de paragem*

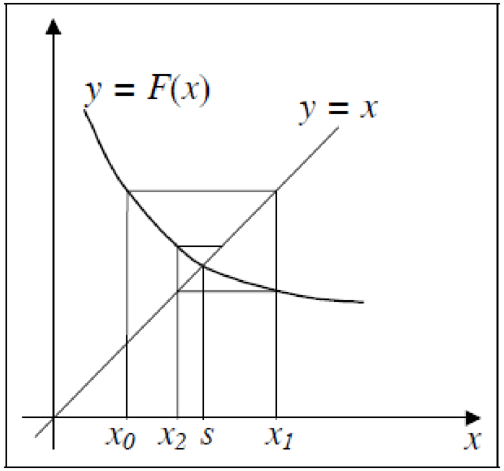
Resolução de equações não lineares

Método iterativo simples (ou do ponto fixo):

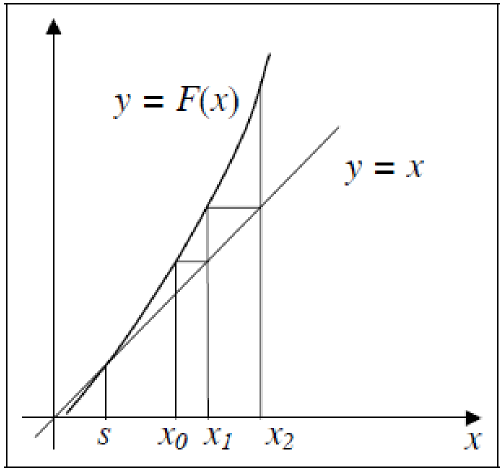
Diferentes comportamentos do método:



Convergência monótona



Convergência "alternada"



Divergência

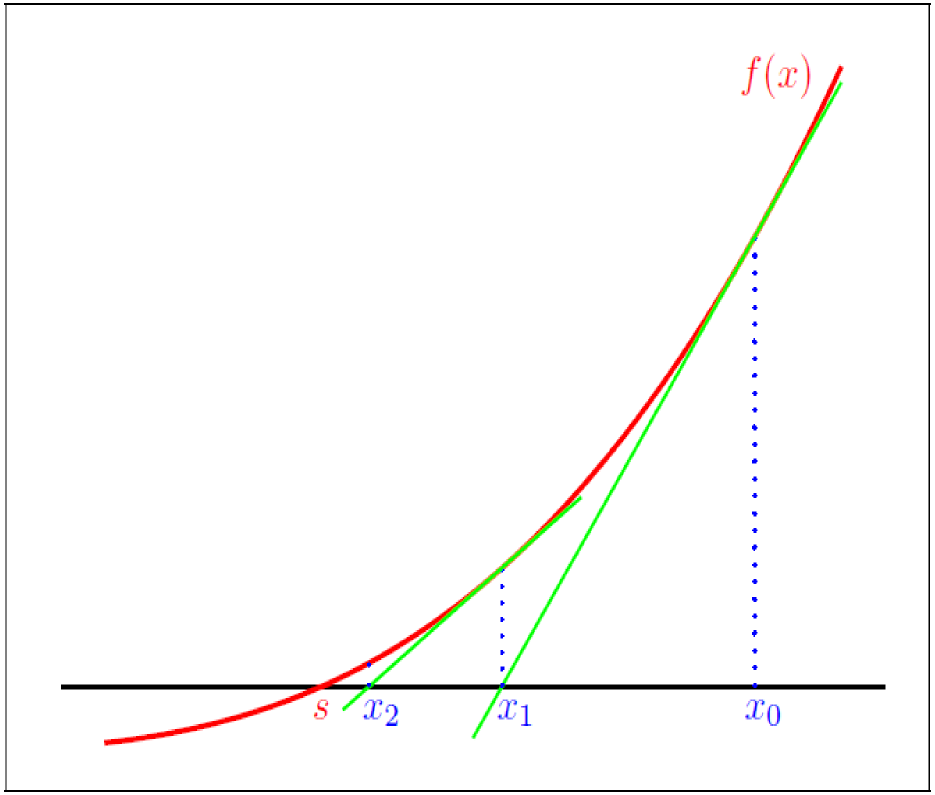
Resolução de equações não lineares

Método de Newton:

Cada novo valor da sucessão, x_{n+1}, é determinado como sendo a abcissa do ponto de intersecção com o eixo dos *xx* da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x_n, (f(x_n))$.

A expressão de recorrência será

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$



Resolução de equações não lineares

Método de Newton:

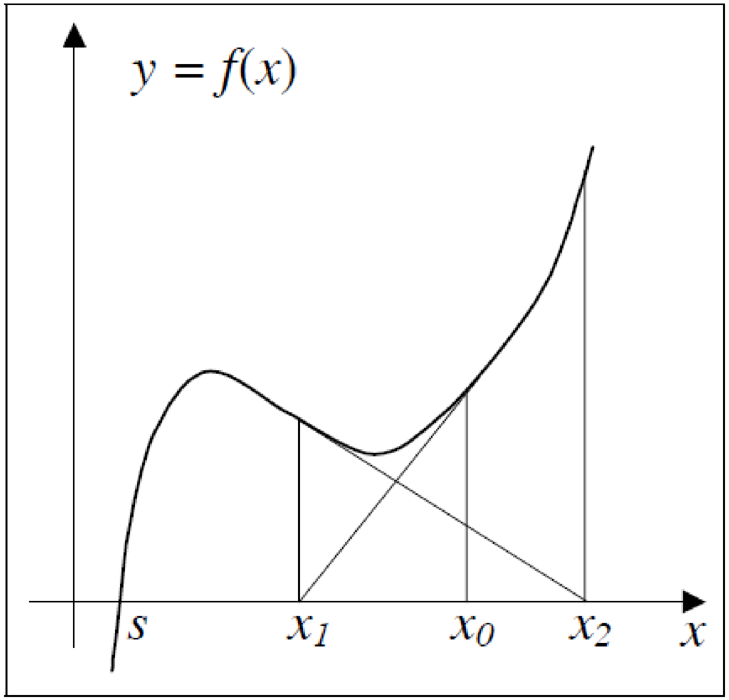
Algoritmo:

Inicialização	Escolher x_0
Repetir	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Até	*verificar critério de paragem*

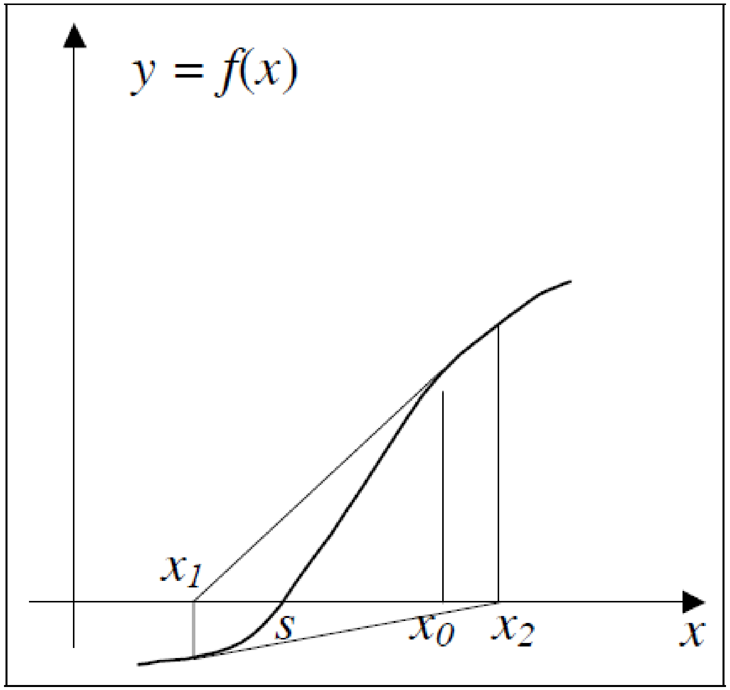
Resolução de equações não lineares

Método de Newton:

Alguns comportamentos indesejáveis do método:



Anulamento da derivada



Mudança de concavidade

A apresentar...

- Introdução
- Representação e análise de erros
- Resolução de equações não lineares
- Sistemas de equações não lineares
  - Representação
  - Método iterativo simples
  - Método de Newton
- Sistemas de equações lineares
- Outros métodos

Sistemas de equações não lineares

Representação

Um sistema de n equações nas n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

onde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

Sistemas de equações não lineares

Representação

Notação mais compacta: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$

A função $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ passa a ser definida como:

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix}$$

O sistema de equações pode então ser escrito como:

$$F(x) = 0$$

Sistemas de equações não lineares

Representação

Por exemplo, o sistema de equações

$$\begin{cases} 4x_1x_2^2 - 2x_1^2x_2 + 2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + \sqrt{x_1x_2} - 3 = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma $F(x) = 0$, definindo a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$x \mapsto \begin{bmatrix} 4x_1x_2^2 - 2x_1^2x_2 + 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + \sqrt{x_1x_2} - 3 \end{bmatrix}$$

Sistemas de equações não lineares

Método iterativo simples

Análogo ao método usado para resolução de equações não lineares.

Reescrever o sistema de equações $F(x) = 0$ na forma

$$x = G(x), \qquad G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ou seja

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Sistemas de equações não lineares

Método iterativo simples

Procedimento:

1. Escolher um ponto inicial $x_{(0)}$
2. Determinar os termos da sucessão $\{x_{(k)}\}$ pela expressão de recorrência

$$x_{(k+1)} = G(x_{(k)})$$

$x_{(k)} \to s$ tal que $s = G(s)$ (ponto fixo de G) $\Leftrightarrow$ $F(s) = 0$

Sistemas de equações não lineares

Método iterativo simples

Exemplo:

Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 4x_1 - \ln(x_1 x_2) - 8 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + \sqrt{x_1 x_2} - 3 = 0 \end{cases}$$

(a) Reescreva-o numa forma apropriada para aplicação do método iterativo simples.

(b) Efectue 11 iterações deste método partindo do ponto $(1.5, 1)$.

Sistemas de equações não lineares

Método iterativo simples

Exemplo (com 11 iterações):

$$\begin{cases} x_1 = [\ln(x_1 x_2) + 8]/4 = 0 \\ x_2 = [2x_1 + \sqrt{x_1 x_2} - 3]/4 \end{cases}$$

k	$x_{1,(k)}$	$x_{2,(k)}$	$g_1(x_{1,(k)}, x_{2,(k)})$	$g_2(x_{1,(k)}, x_{2,(k)})$
0	1.50000	1.00000	2.10137	0.30619
1	2.10137	0.30619	1.88976	0.50122
2	1.88976	0.50122	1.98643	0.43819
3	1.98643	0.43819	1.96531	0.47646
4	1.96531	0.47646	1.98357	0.47457
5	1.98357	0.47457	1.98489	0.48434
6	1.98489	0.48434	1.99015	0.48757
7	1.99015	0.48757	1.99247	0.49134
8	1.99247	0.49134	1.99469	0.49359
9	1.99469	0.49359	1.99611	0.49541
10	1.99611	0.49541	1.99721	0.49666

Sistemas de equações não lineares

Método de Newton

Igualmente análogo ao método já apresentado para a solução de quações não lineares.

Considere novamente o sistema de equações $F(x) = 0$

Considere que a matriz jacobiana $J_F(x)$ é não singular

O sistema de equações é então equivalente a:

$$J_F(x)^{-1} F(x) = 0$$

ou ainda, a:

$$x = x - [J_F(x)]^{-1} F(x)$$

Sistemas de equações não lineares

Método de Newton

$$J_F(x_{(k)}) = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array}\right]\Bigg|_{x(k)}$$

Procedimento:

Expressão de recorrência

$$x_{(k+1)} = x_{(k)} - [J_F(x_{(k)})]^{-1} F(x_{(k)}), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

$$v_{(k)} = [J_F(x_{(k)})]^{-1} F(x_{(k)})$$

Determinação de $x_{(k+1)}$

1. calcular $F(x_{(k)})$
2. calcular $J_F(x_{(k)})$
3. calcular $v_{(k)}$ resolvendo o SEL $J_F(x_{(k)})\, v_{(k)} = F(x_{(k)})$
4. calcular $x_{(k+1)} = x_{(k)} - v_{(k)}$

Sistemas de equações não lineares

Método de Newton

No caso particular de sistemas de equações em $\mathbb{R}^2$

Para o sistema de equações $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) & = 0 \end{cases}$,

a matriz jacobiana $J_F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

tem como inversa $J_F^{-1}(x_1, x_2) = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Logo

$$\begin{bmatrix} x_{1,(k+1)} \\ x_{2,(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,(k)} \\ x_{2,(k)} \end{bmatrix} - J_F^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} (x_{1,(k)}, x_{2,(k)})$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_{1,(k+1)} \\ x_{2,(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,(k)} \\ x_{2,(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} df_1 - bf_2 \\ -cf_1 + af_2 \end{bmatrix} (x_{1,(k)}, x_{2,(k)})}$$

A apresentar…

- Introdução
- Representação e análise de erros
- Resolução de equações não lineares
- Sistemas de equações não lineares
- Sistemas de equações lineares
  - Método de Gauss-Seidel
- Outros métodos

Sistemas de equações lineares

Representação

Um sistema de n equações nas n variáveis x_1, x_2, ..., x_n, pode ser escrito na forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. As componentes de ***A***, ***x*** e ***b*** são:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Sistemas de equações lineares

Método de Gauss-Seidel

Método iterativo para resolver sistemas de equações lineares: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$

Utiliza fórmula de recorrência: $L_*\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(k)}$, onde

$$A = L_* + U$$

$$L_* = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemas de equações lineares

Método de Gauss-Seidel

O sistema de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pode ser reescrito como $L_*\mathbf{x} = \mathbf{b} - U\mathbf{x}$

Isolando-se ***x*** no lado esquerdo, tem-se:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = L_*^{-1}\left(\mathbf{b} - U\mathbf{x}^{(k)}\right).$$

Tirando-se partido da forma triangular de $\boldsymbol{L_*}$, pode-se calcular $\boldsymbol{x}^{(k+1)}$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

A apresentar…

- Introdução
- Representação e análise de erros
- Resolução de equações não lineares
- Sistemas de equações não lineares
- Sistemas de equações lineares
- Outros métodos
  - Determinação de mínimos locais (Método da descida de gradiente)

Referências e mais informação

- Steven C. Chapra and Raymond Canale. 2005. *Numerical Methods for Engineers* (5th. ed.). McGraw-Hill, Inc., USA.
- Aníbal C. C. Matos. 2005. *Apontamentos de Análise Numérica*. DEEC, FEUP, Portugal.
- Fernando Fontes. 2008. *Métodos Numéricos*.[handouts] DEEC, FEUP, Portugal.
- Outras fontes na Web