

Programação Linear e Extensões

Ana Paula Tomás

LEIC - Desenho de Algoritmos
Universidade do Porto

Março 2022

Tópicos a abordar

- 1 Modelos Matemáticos para Problemas de Otimização e Decisão
- 2 Programação Inteira e Mista
- 3 Programação Linear e Ideia do Método Simplex
- 4 Aspetos Formais do Método Simplex

Minimizar moedas num troco

Exemplo 1: Coin Change

Trocar uma quantia Q usando **um número mínimo** de moedas. Existem n tipos de moedas, sendo v_k , com $1 \leq k \leq n$ os seus valores.

- Caso 1: o número de moedas de cada tipo é **ilimitado**.
- Caso 2: o número de moedas disponíveis de valor v_k é d_k , com $1 \leq k \leq n$.

Minimizar moedas num troco

Exemplo 1: Coin Change

Trocar uma quantia Q usando **um número mínimo** de moedas. Existem n tipos de moedas, sendo v_k , com $1 \leq k \leq n$ os seus valores.

- Caso 1: o número de moedas de cada tipo é **ilimitado**.
- Caso 2: o número de moedas disponíveis de valor v_k é d_k , com $1 \leq k \leq n$.

$$\text{minimizar } \sum_{k=1}^n x_k$$

sujeito a

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n v_k x_k = Q \\ x_k \in \mathbb{Z}_0^+, \text{ para } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

x_k : quantas moedas de valor v_k usa

$$\text{minimizar } \sum_{k=1}^n x_k$$

sujeito a

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n v_k x_k = Q \\ x_k \leq d_k, \text{ para } 1 \leq k \leq n \\ x_k \in \mathbb{Z}_0^+, \text{ para } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Maximizar número de intervalos sem sobreposição

Exemplo 2: Interval Scheduling

Seja \mathcal{T} um conjunto de n tarefas. A tarefa t_j tem de decorrer no intervalo $[s_j, f_j]$, ou seja, começar no instante s_j e terminar em f_j , para $1 \leq j \leq n$ (notar que $f_j \notin [s_j, f_j]$). Em cada instante, só uma tarefa pode estar a decorrer. Pretendemos **maximizar o número de tarefas realizadas**.

Maximizar número de intervalos sem sobreposição

Exemplo 2: Interval Scheduling

Seja \mathcal{T} um conjunto de n tarefas. A tarefa t_j tem de decorrer no intervalo $[s_j, f_j]$, ou seja, começar no instante s_j e terminar em f_j , para $1 \leq j \leq n$ (notar que $f_j \notin [s_j, f_j]$). Em cada instante, só uma tarefa pode estar a decorrer. Pretendemos **maximizar o número de tarefas realizadas**.

Variáveis de decisão: $x_j \in \{0, 1\}$ indica se a tarefa t_j é realizada ou não, para $1 \leq j \leq n$, sendo 1 se for e 0 se não for.

$$\text{maximizar } \sum_{j=1}^n x_j$$

sujeito a

$$\begin{cases} s_{j'}x_{j'} \geq f_jx_j \quad \vee \quad s_jx_j \geq f_{j'}x_{j'}, \text{ para todo } j' \neq j \\ x_j \in \{0, 1\}, \text{ para } 1 \leq k \leq n \end{cases} \quad (\text{não haver sobreposições})$$

Exemplo 3: Scheduling

Um projeto é constituído por um conjunto de tarefas, sendo conhecida a **duração** de cada tarefa e as **restrições de precedência** entre tarefas. Não se pode dar início a uma tarefa sem que as que a precedem estejam concluídas. Pretendemos agendar as tarefas de modo a concluir o projeto o mais cedo possível. Cada tarefa requer um certo número de **trabalhadores**. Cada trabalhador só pode estar a realizar uma tarefa em cada instante. Assuma que:

- **Caso 1:** não há restrições quanto ao número de trabalhadores a contratar.
- **Caso 2:** há restrições quanto ao número de trabalhadores a contratar.

Admita que as habilitações necessárias são idênticas para todas as tarefas.

Escalonamento de tarefas

Exemplo 3: Scheduling

Um projeto é constituído por um conjunto de tarefas, sendo conhecida a **duração** de cada tarefa e as **restrições de precedência** entre tarefas. Não se pode dar início a uma tarefa sem que as que a precedem estejam concluídas. Pretendemos agendar as tarefas de modo a concluir o projeto o mais cedo possível. Cada tarefa requer um certo número de **trabalhadores**. Cada trabalhador só pode estar a realizar uma tarefa em cada instante. Assuma que:

- **Caso 1:** não há restrições quanto ao número de trabalhadores a contratar.
- **Caso 2:** há restrições quanto ao número de trabalhadores a contratar.

Admita que as habilitações necessárias são idênticas para todas as tarefas.

Caso 1: sem partilha de recursos

Caso 2: com partilha de recursos

Exemplo: Tarefas A, B, C, D e E; A precede C; B precede C e D; C precede E.

	A	B	C	D	E
duração	1	3	4	5	2
# trabalhadores	2	3	1	1	2

Escalonamento sem partilha de recursos

Exemplo 3 - Caso 1

Dada a descrição das tarefas do projeto, as suas durações d_i , com $i \in \text{Tarefas}$, e a relação de precedência \mathcal{R} , determinar a data de conclusão mais próxima para o projeto e uma data para início de cada tarefa.

Variáveis de decisão:

- z : data de conclusão do projeto
- x_i : data de início da tarefa i , para $i \in \text{Tarefas}$

Modelo de otimização linear:

minimizar z

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i + d_i \leq x_j, \quad \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{R} \\ x_i + d_i \leq z, \quad \text{para todo } i \in \text{Tarefas} \\ z \in \mathbb{R}_0^+, \quad x_i \in \mathbb{R}_0^+, \quad \text{para todo } i \in \text{Tarefas} \end{array} \right.$$

Exemplo 4 - Programação Inteira

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas de trabalho. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Produção de mesas e cadeiras

Exemplo 4 - Programação Inteira

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas de trabalho. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

- **Variáveis de decisão**

x_M : número de mesas a produzir

x_C : número de cadeiras a produzir

- **Restrições**

- Não exceder a quantidade de madeira disponível: $30x_M + 20x_C \leq 300$;
nem o número de horas de trabalho disponíveis: $5x_M + 10x_C \leq 110$.

- Variáveis tomam valores inteiros não negativos: $x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+$

- **Objetivo**

Maximizar o valor do lucro $6x_M + 8x_C$

Exemplo 4 - Programação Inteira

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas de trabalho. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Modelo matemático

maximizar $6x_M + 8x_C$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 300 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \geq 0, \text{ inteiros} \end{cases}$$

Produção de mesas e cadeiras (cont.)

Exemplo 4 - Programação Inteira

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas de trabalho. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Modelo matemático

maximizar $6x_M + 8x_C$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 300 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \geq 0, \text{ inteiros} \end{cases}$$

Análise de dimensões

unidades de medida consistentes?

$$\frac{\text{u.m.}}{\text{mesa}} \times \text{mesa} + \frac{\text{u.m.}}{\text{cadeira}} \times \text{cadeira} = \text{u.m.}$$

$$\frac{\text{pes}}{\text{mesa}} \times \text{mesa} + \frac{\text{pes}}{\text{cadeira}} \times \text{cadeira} \leq \text{pes}$$

$$\frac{\text{horas}}{\text{mesa}} \times \text{mesa} + \frac{\text{horas}}{\text{cadeira}} \times \text{cadeira} \leq \text{horas}$$

Problema de Mochila

Exemplo 5: Knapsack linear (ou fracionário)

Uma empresa produz três tipos de produtos que vende a peso com lucros de 1400, 2100 e 2700 euros/tonelada, respetivamente. Para produzir um kilograma de cada um dos produtos são dispendidos 30', 55' e 1h10', respetivamente. Supondo que não vende mais do que 13, 5 e 3 Kg de cada um dos produtos por dia, que o tempo despendido é proporcional à quantidade produzida e que só dispõe de 8 horas de trabalho, que quantidade de cada produto deve produzir?

maximizar $1.4x_1 + 2.1x_2 + 2.7x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_1 + 55x_2 + 70x_3 \leq 480 \\ x_1 \leq 13 \\ x_2 \leq 5 \\ x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_o^+ \end{cases}$$

Problema de Mochila

Exemplo 5: Knapsack linear (ou fracionário)

Uma empresa produz três tipos de produtos que vende a peso com lucros de 1400, 2100 e 2700 euros/tonelada, respetivamente. Para produzir um kilograma de cada um dos produtos são dispendidos 30', 55' e 1h10', respetivamente. Supondo que não vende mais do que 13, 5 e 3 Kg de cada um dos produtos por dia, que o tempo despendido é proporcional à quantidade produzida e que só dispõe de 8 horas de trabalho, que quantidade de cada produto deve produzir?

maximizar $1.4x_1 + 2.1x_2 + 2.7x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_1 + 55x_2 + 70x_3 \leq 480 \\ x_1 \leq 13 \\ x_2 \leq 5 \\ x_3 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_o^+ \end{cases}$$

Knapsack linear (fracionário)

maximizar $\sum_{i=1}^n l_i x_i$

sujeito a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n t_i x_i \leq T \\ x_i \leq u_i, \text{ para } i = 1, \dots, n \\ x_i \in \mathbb{R}_o^+ \end{cases}$$

Exemplos de *knapsack problems* (booleano e inteiro)

Exemplo de problema de mochila com variáveis booleanas

Suponha que pretende transportar **cinco objetos** mas que, por qualquer razão, tem um limite de carga de 65Kg. Na tabela seguinte são dados o peso de cada objeto e o valor que lhe atribui. Quais os objetos a transportar?

peso	41	32	24	17	15
valor	85	72	61	45	37

Exemplo de problema de mochila com variáveis inteiras

Suponha que pretende transportar **objetos de cinco tipos** mas que, por qualquer razão, tem um limite de carga de 65Kg. O peso e o valor de cada tipo de objeto é dado na tabela seguinte. Quantos objetos de cada tipo deve transportar?

peso	41	32	24	17	15
valor	85	72	61	45	37

Problemas da Mochila (booleano/inteiro)

Knapsack binário (booleano)

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

sujeito a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq L \\ \forall i \quad x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

$$\text{maximizar } 85x_1 + 72x_2 + 61x_3 + 45x_4 + 37x_5$$

sujeito a

$$\begin{cases} 41x_1 + 32x_2 + 24x_3 + 17x_4 + 15x_5 \leq 65 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Knapsack inteiro

$$\text{maximizar } \sum_{i=1}^n v_i x_i$$

sujeito a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i x_i \leq L \\ \forall i \quad x_i \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

$$\text{maximizar } 85x_1 + 72x_2 + 61x_3 + 45x_4 + 37x_5$$

sujeito a

$$\begin{cases} 41x_1 + 32x_2 + 24x_3 + 17x_4 + 15x_5 \leq 65 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

Problema de Afetação (*Assignment Problem*)

Exemplo 6: Programação Inteira com variáveis booleanas

Seis turmas práticas P_1, \dots, P_6 , sem sobreposição de horário, devem ser atribuídas a seis professores A, \dots, F , ficando cada um com uma turma. Os professores ordenaram as turmas por ordem de preferência. Determinar uma atribuição que maximize globalmente as preferências (assumindo aditividade).

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A	1	2	3	4	5	6	B	3	1	5	4	6	2
C	2	1	3	5	4	6	D	6	5	4	1	2	3
E	3	2	1	4	6	5	F	1	2	3	6	4	5

Problema de Afetação (*Assignment Problem*)

Exemplo 6: Programação Inteira com variáveis booleanas

Seis turmas práticas P_1, \dots, P_6 , sem sobreposição de horário, devem ser atribuídas a seis professores A, \dots, F , ficando cada um com uma turma. Os professores ordenaram as turmas por ordem de preferência. Determinar uma atribuição que maximize globalmente as preferências (assumindo aditividade).

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A	1	2	3	4	5	6	B	3	1	5	4	6	2
C	2	1	3	5	4	6	D	6	5	4	1	2	3
E	3	2	1	4	6	5	F	1	2	3	6	4	5

Variáveis de decisão: x_{ij} indica se o professor j fica com a turma i ou não.

Dados: c_{ij} é o custo da atribuição da turma i ao professor j , n o número de professores e m o número de turmas.

Problema de Afetação (*Assignment Problem*)

Exemplo 6: Programação Inteira com variáveis booleanas

Seis turmas práticas P_1, \dots, P_6 , sem sobreposição de horário, devem ser atribuídas a seis professores A, \dots, F , ficando cada um com uma turma. Os professores ordenaram as turmas por ordem de preferência. Determinar uma atribuição que maximize globalmente as preferências (assumindo aditividade).

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A	1	2	3	4	5	6	B	3	1	5	4	6	2
C	2	1	3	5	4	6	D	6	5	4	1	2	3
E	3	2	1	4	6	5	F	1	2	3	6	4	5

Variáveis de decisão: x_{ij} indica se o professor j fica com a turma i ou não.

Dados: c_{ij} é o custo da atribuição da turma i ao professor j , n o número de professores e m o número de turmas.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \text{ sujeito a} \\ &\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & \text{para } i = 1, 2, \dots, m & (\text{turma } i \text{ é atribuída a um professor}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, & \text{para } j = 1, 2, \dots, n & (\text{professor } j \text{ fica com uma turma}) \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, & \text{para todo } (i, j) \end{array} \right. \end{aligned}$$

- 1 Modelos Matemáticos para Problemas de Otimização e Decisão
- 2 Programação Inteira e Mista**
- 3 Programação Linear e Ideia do Método Simplex
- 4 Aspetos Formais do Método Simplex

Programação linear, inteira ou mista

Prog. Linear (LP)

max/min $z = cx$
sujeito a

$$\begin{cases} Ax \# b \\ x \in (\mathbb{R}_0^+)^n \end{cases}$$

Prog. Inteira (IP)

max/min $z = cx$
sujeito a

$$\begin{cases} Ax \# b \\ x \in (\mathbb{Z}_0^+)^n \end{cases}$$

Prog. Mista (MIP)

max/min $z = c_1x_1 + c_2x_2$
sujeito a

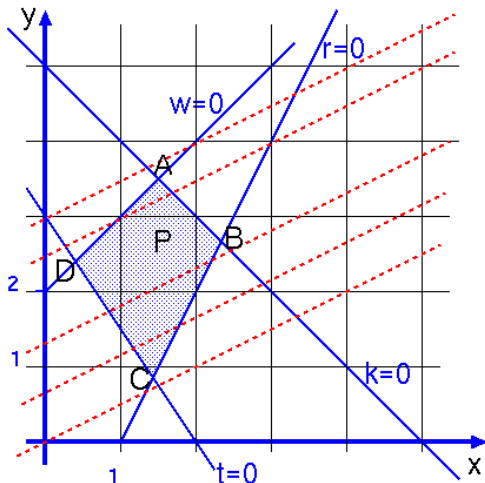
$$\begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 \# b \\ x_1 \in (\mathbb{R}_0^+)^{n_1} \\ x_2 \in (\mathbb{Z}_0^+)^{n_2} \end{cases}$$

onde $\# \in \{=, \leq, \geq\}^m$. A função objetivo é linear e as restrições são lineares:

- **Linear Programming (LP)**: variáveis reais (contínuas)
- **Integer Programming (IP)**: variáveis inteiras
IP puro: também z e as vars. de desvio em \mathbb{Z} (se necessário, multiplicar A , b e c por escalares)
- **Mixed Integer Programming (MIP)**: algumas variáveis inteiras e outras reais

Relaxação linear do problema: assume todas as variáveis com valores em \mathbb{R}_0^+ .

Interpretação Geométrica no Plano



Como seria se $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$?

minimizar $z = x - 2y$
sujeito a

$$\begin{cases} 2y + 3x \geq 6 \\ y - x \leq 2 \\ y + x \leq 5 \\ -y + 2x \leq 2 \\ x, y \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

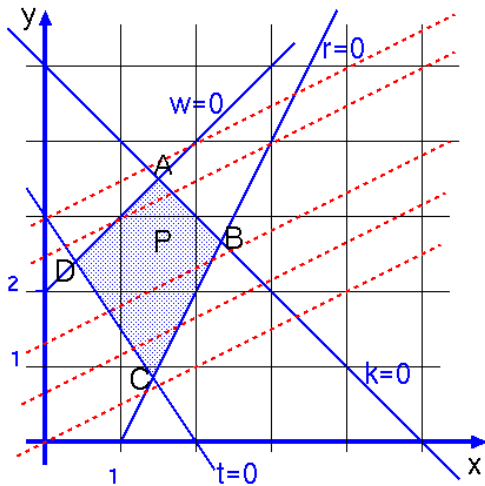
Forma normal do problema:

minimizar $z = x - 2y$
sujeito a

$$\begin{cases} 2y + 3x - t = 6 \\ y - x + w = 2 \\ y + x + k = 5 \\ -y + 2x + r = 2 \\ x, y, t, w, k, r \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

t, w, k, r variáveis de desvio

Interpretação Geométrica no Plano



Como seria se $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$?

Ótimo IP: $x = 1, y = 3$, com $z = -5$.

minimizar $z = x - 2y$

sujeito a

$$\begin{cases} 2y + 3x - t = 6 \\ y - x + w = 2 \\ y + x + k = 5 \\ -y + 2x + r = 2 \\ x, y, t, w, k, r \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

A tracejado vemos algumas **curvas de nível da função objetivo**.

z	
0	$x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$
-2	$x - 2y = -2 \Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{2}x$
-4	$x - 2y = -4 \Leftrightarrow y = 2 + \frac{1}{2}x$
...	

Ótimo LP: **vértice** $A \hookrightarrow (3/2, 7/2)$ com $z = -11/2$.

Ótimo de um problema IP e MIP / Ótimo da relaxação linear

O valor ótimo de um problema de IP ou MIP não pode ser melhor do que o valor do ótimo da sua relaxação linear. Sendo z^* o valor ótimo para o problema e z_{LP}^* o valor ótimo da sua relaxação linear, tem-se:

- $z^* \leq z_{LP}^*$, se for um problema de maximização,
- $z_{LP}^* \leq z^*$, se for um problema de minimização.

Se a solução ótima da relaxação linear satisfizer as restrições de integralidade então é solução ótima do problema.

Esta propriedade suporta o **método *branch-and-bound*** que descrevemos a seguir.

Produção de mesas e cadeiras

Uma firma pode produzir mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. O que produzir para maximizar o lucro?

Produção de mesas e cadeiras

Uma firma pode produzir mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. O que produzir para maximizar o lucro?

Variáveis de decisão

x_M : número de mesas a produzir
 x_C : número de cadeiras a produzir

maximizar $6x_M + 8x_C$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 300 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \geq 0, \text{ inteiros} \end{cases}$$

Podemos aplicar o Método Simplex para determinar uma solução ótima, **com** $x_M, x_C \in \mathbb{R}_0^+$. Se essa solução ótima tiver componentes $x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+$, então é solução ótima do problema inicial.

Produção de mesas e cadeiras

Uma firma pode produzir mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Cada mesa requer 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho. Cada cadeira requer 20 pés e 10 horas. Dispõe de 300 pés de madeira e 110 horas de trabalho. O que produzir para maximizar o lucro?

Variáveis de decisão

x_M : número de mesas a produzir
 x_C : número de cadeiras a produzir

maximizar $6x_M + 8x_C$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 300 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \geq 0, \text{ \textbf{inteiros}} \end{cases}$$

Podemos aplicar o Método Simplex para determinar uma solução ótima, **com** $x_M, x_C \in \mathbb{R}_0^+$. Se essa solução ótima tiver componentes $x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+$, então é solução ótima do problema inicial.

A solução ótima linear é $x_M = 4$ e $x_C = 9$. É inteira.

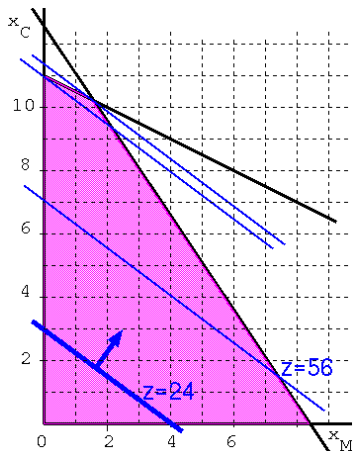
Mas, se só dispusesse de 250 pés de madeira, seria $x_M = 3/2$ e $x_C = 41/4$. O que fazer?

Produção de mesas e cadeiras (250 pés)

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?

Produção de mesas e cadeiras (250 pés)

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?



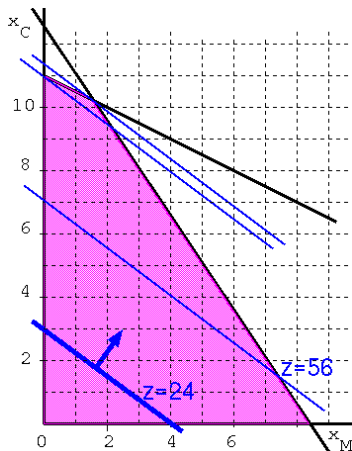
maximizar $z = 6x_M + 8x_C$

sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 250 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

Produção de mesas e cadeiras (250 pés)

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?



maximizar $z = 6x_M + 8x_C$
sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 250 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

Ótimo da relaxação linear: $(\frac{3}{2}, \frac{41}{4})$

$$\begin{aligned} \max z &= 6x_M + 8x_C \\ \text{sujeito a} \quad &\begin{cases} 3x_M + 2x_C + s_1 = 25 \\ x_M + 2x_C + s_2 = 22 \\ x_M, x_C, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases} \end{aligned}$$

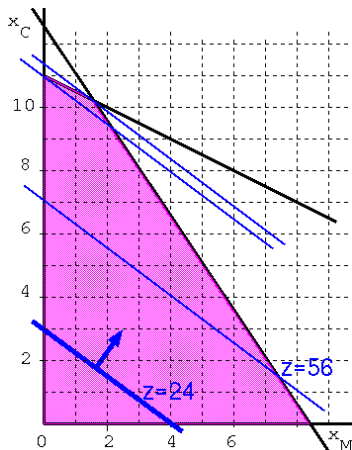
$$\max z = 91 - s_1 - 3s_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \\ x_C = \frac{41}{4} + \frac{1}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\ x_M, x_C, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases} \end{aligned}$$

Produção de mesas e cadeiras (250 pés)

Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?



maximizar $z = 6x_M + 8x_C$
sujeito a

$$\begin{cases} 30x_M + 20x_C \leq 250 \\ 5x_M + 10x_C \leq 110 \\ x_M, x_C \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$

Ótimo da relaxação linear: $(\frac{3}{2}, \frac{41}{4})$

max $z = 6x_M + 8x_C$

sujeito a

$$\begin{cases} 3x_M + 2x_C + s_1 = 25 \\ x_M + 2x_C + s_2 = 22 \\ x_M, x_C, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

max $z = 91 - s_1 - 3s_2$

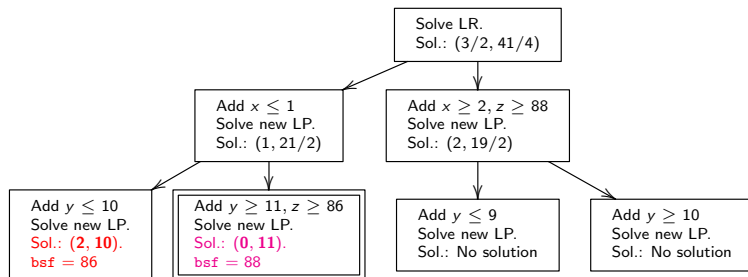
sujeito a

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \\ x_C = \frac{41}{4} + \frac{1}{4}s_1 - \frac{3}{4}s_2 \\ x_M, x_C, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

Arredondamentos? Incorreto. (2, 10) e (1, 11) não são pertencem ao espaço de soluções e (1, 10) não é solução ótima.

Pesquisa por *Branch and Bound*

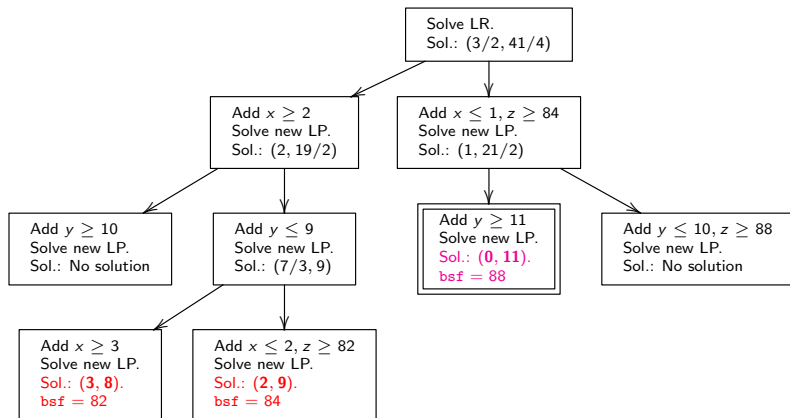
Uma firma produz mesas e cadeiras que vende com lucro de 6 u.m. e 8 u.m. Com cada mesa gasta 30 pés de madeira e 5 horas de trabalho e com cada cadeira 20 pés e 10 horas. Dispõe de **250 pés de madeira** e 110 horas de trabalho. O que produzir?



Estratégia: Sendo \mathbf{x}^* a solução ótima linear, se \mathbf{x}^* não satisfaz as restrições de integralidade, toma a primeira variável $x_i \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que o valor $x_i^* \notin \mathbb{Z}_0^+$. Explora primeiro $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$ e depois $x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1$.

Pesquisa por *Branch and Bound*

Outra estratégia: Sendo \mathbf{x}^* a solução ótima linear, se \mathbf{x}^* não satisfaz as restrições de integralidade, toma a primeira variável $x_i \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $x_i^* \notin \mathbb{Z}_0^+$. Explora primeiro $x_i \geq \lfloor x_i^* \rfloor + 1$ e depois $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$.



Problemas de Programação Inteira – *Branch-and-Bound*

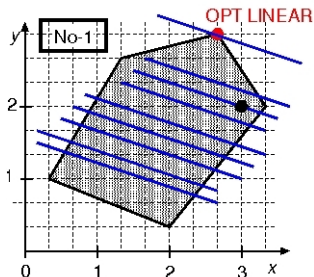
Relaxação linear: problema de programação linear que se obtém *relaxando* a restrição $x, y \in \mathbb{Z}_0^+$, que se substitui por $x, y \in \mathbb{R}_0^+$. **Método “Branch-and-Bound”:** calcula uma solução inteira ótima resolvendo uma sequência de problemas lineares.

Exemplo:

maximizar $z = x + 3y$

subjeito a

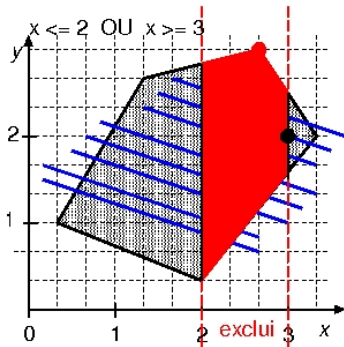
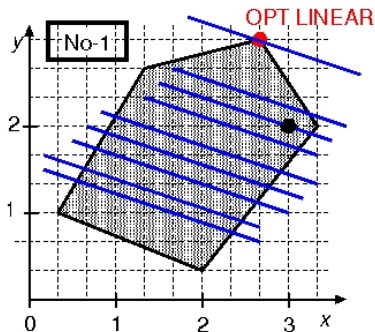
$$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{5}x + \frac{17}{5} \\ y \geq \frac{5}{4}x - \frac{13}{6} \\ y \leq -\frac{3}{2}x + 7 \\ y \leq \frac{1}{4}x + \frac{7}{3} \\ y \leq \frac{5}{3}x + \frac{4}{9} \\ x, y \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$



$z = x + 3y \Leftrightarrow y = z/3 - x/3$. A ordenada na origem $z/3$ cresce se z cresce. O ótimo linear é o vértice indicado, mas o ótimo inteiro é $(3, 2)$.

Ideia do Método “Branch-and-Bound”

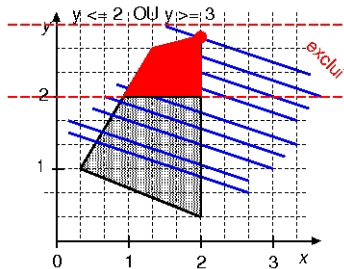
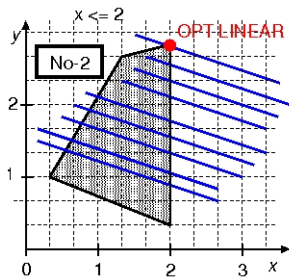
Resolução por “branch-and-bound”: A solução ótima da relaxação linear $(8/3, 3)$ tem valor de x não inteiro, sendo $2 < x < 3$. Excluimos essa solução se acrescentarmos a restrição $x \leq 2 \vee x \geq 3$, que retira a faixa a vermelho.



Nenhuma solução inteira é removida, mas partiu-se o espaço de soluções. Os dois subproblemas serão resolvidos separadamente. O valor de z da melhor solução inteira que for encontrando – **best so far (bsf)** – é usado para restringir a procura.

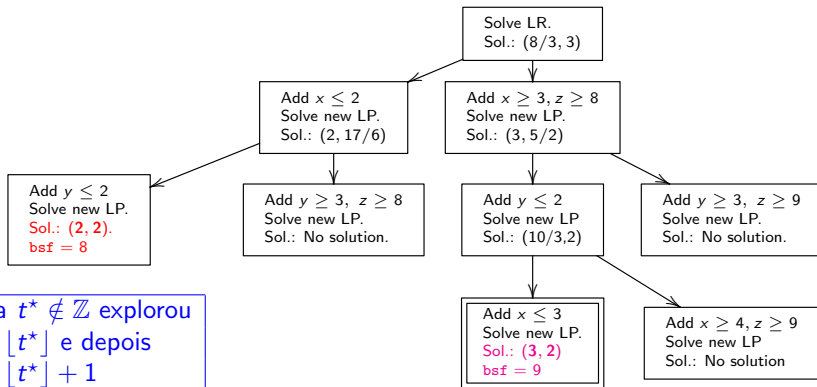
Ideia do Método “Branch-and-Bound”

Caso $x \leq 2$: a solução ótima linear é novamente não inteira, pois $2 < y < 3$.
Exclui-a criando dois novos subproblemas (filhos de **No-2**): $y \leq 2$ ou $y \geq 3$.



Ideia do Método “Branch-and-Bound”

Trata-se de um **método de pesquisa em árvore**.



Árvore de pesquisa criada em **profundidade e da esquerda para a direita**. Em geral, o tamanho da árvore depende da **escolha da variável que é usada no desdobramento**, bem como da **ordem de visita dos nós**, que pode ser determinada dinamicamente ao longo do processo, de acordo com heurísticas.

Como resolver algebricamente problemas de LP?

- 1 Modelos Matemáticos para Problemas de Otimização e Decisão
- 2 Programação Inteira e Mista
- 3 Programação Linear e Ideia do Método Simplex**
- 4 Aspectos Formais do Método Simplex

Problema de Mistura

Uma empresa produz três tipos de farinhas que vende com lucros de 27u.m., 21u.m. e 14u.m. por tonelada, respetivamente. As composições das farinhas são:

Farinha	Milho	Centeio	Trigo
I	90%	10%	0%
II	70%	20%	10%
III	50%	30%	20%

A empresa dispõe de 1800 toneladas de milho, 1000 de centeio e 600 de trigo. Toda a produção pode ser vendida e os processos de mistura para as diversas farinhas têm custo igual. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Problema de Mistura

Uma empresa produz três tipos de farinhas que vende com lucros de 27u.m., 21u.m. e 14u.m. por tonelada, respetivamente. As composições das farinhas são:

Farinha	Milho	Centeio	Trigo
I	90%	10%	0%
II	70%	20%	10%
III	50%	30%	20%

A empresa dispõe de 1800 toneladas de milho, 1000 de centeio e 600 de trigo. Toda a produção pode ser vendida e os processos de mistura para as diversas farinhas têm custo igual. Como deve ser a produção para maximizar o lucro?

Modelo matemático: x_i é a quantidade de farinha i a produzir (em toneladas).

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 \leq 1800 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \leq 1000 \\ 0.1x_2 + 0.2x_3 \leq 600 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

Problemas de Programação Linear (LP)

Hipóteses subjacentes ao modelo de programação linear:

Proporcionalidade (contribuições proporcionais), **divisibilidade** (variáveis de decisão em \mathbb{R}_0^+ ou \mathbb{Q}_0^+), **certeza** (parâmetros são constantes conhecidas), **aditividade** e **linearidade** das restrições e da função objetivo. Restrições lineares **fechadas** (operadores $=, \geq, \leq$).

Diz-se que o problema está em **forma normal** se estiver definido por um sistema de equações lineares com termo independente $\mathbf{b} \in (\mathbb{R}_0^+)^m$, isto é não negativo, e **variáveis de decisão não negativas**:

F.N. para maximização

maximize $\mathbf{c}\mathbf{x}$

subject to

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in (\mathbb{R}_0^+)^n \end{cases}$$

F.N. para minimização

minimize $\mathbf{c}\mathbf{x}$

subject to

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \in (\mathbb{R}_0^+)^n \end{cases}$$

Redução à forma normal

As relações binárias \leq e \geq são definidas em \mathbb{R} por:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \quad a + s = b$$

$$a \geq b \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \quad a - s = b$$

Usando tal definição, podemos transformar inequações em equações:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i$$

Redução à forma normal

As relações binárias \leq e \geq são definidas em \mathbb{R} por:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \quad a + s = b$$

$$a \geq b \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \quad a - s = b$$

Usando tal definição, podemos transformar inequações em equações:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i$$

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3$

subjeito a

$$\begin{cases} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 \leq 1800, \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \leq 1000, \\ \quad 0.1x_2 + 0.2x_3 \leq 600, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3$

subjeito a

$$\begin{cases} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + s_1 = 1800, \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + s_2 = 1000, \\ \quad 0.1x_2 + 0.2x_3 + s_3 = 600, \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Redução à forma normal

As relações binárias \leq e \geq são definidas em \mathbb{R} por:

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \quad a + s = b$$

$$a \geq b \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}_0^+ \quad a - s = b$$

Usando tal definição, podemos transformar inequações em equações:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \Leftrightarrow \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + s_i = b_i$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \Leftrightarrow \exists s_i \in \mathbb{R}_0^+ \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i$$

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3$

subjeito a

$$\begin{cases} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 \leq 1800, \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 \leq 1000, \\ \quad 0.1x_2 + 0.2x_3 \leq 600, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3$

subjeito a

$$\begin{cases} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + s_1 = 1800, \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + s_2 = 1000, \\ \quad 0.1x_2 + 0.2x_3 + s_3 = 600, \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

s_1, s_2, s_3 chamam-se **variáveis de desvio**

Resolução do problema pelo Método Simplex

maximizar $27x_1 + 21x_2 + 14x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

sujeito a

$$\begin{cases} 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.5x_3 + s_1 & = 1800 \\ 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + s_2 & = 1000 \\ 0.1x_2 + 0.2x_3 + s_3 & = 600 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Este sistema de equações pode ser colocado trivialmente numa **forma resolvida**:

maximizar $z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} s_1 = 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 = 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 = 600 - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Mostra que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $s_1 = 1800$, $s_2 = 1000$ e $s_3 = 600$ é solução do problema.

Essa solução, que se obtém se se **atribuir às variáveis livres o valor zero**, chama-se

solução básica do sistema de equações. Sendo **não-negativa**, chama-se **solução básica admissível**.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Os coeficientes das variáveis livres x_1 , x_2 e x_3 na expressão da função objetivo indicam que, se alguma das variáveis x_1 , x_2 ou x_3 puder tomar valores positivos no espaço de soluções, a solução básica admissível $(0, 0, 0, 1800, 1000, 600)$, com $z = 0$, não é uma solução ótima.

$$\text{maximizar } z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s_1 & = & 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 & = & 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 & = & 600 - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Designamos tais coeficientes por indicadores.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Os coeficientes das variáveis livres x_1 , x_2 e x_3 na expressão da função objetivo indicam que, se alguma das variáveis x_1 , x_2 ou x_3 puder tomar valores positivos no espaço de soluções, a solução básica admissível $(0, 0, 0, 1800, 1000, 600)$, com $z = 0$, não é uma solução ótima.

$$\text{maximizar } z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$$

sujeito a

$$\begin{cases} s_1 = 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 = 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 = 600 - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Designamos tais coeficientes por **indicadores**. Para aumentar z , podemos:

- aumentar o valor da variável livre com **indicador mais favorável** (x_1 com 27), mantendo as restantes variáveis livres com valor 0.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Os coeficientes das variáveis livres x_1 , x_2 e x_3 na expressão da função objetivo indicam que, se alguma das variáveis x_1 , x_2 ou x_3 puder tomar valores positivos no espaço de soluções, a solução básica admissível $(0, 0, 0, 1800, 1000, 600)$, com $z = 0$, não é uma solução ótima.

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3 \\ \text{sujeito a} & \\ \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 = 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 = 600 \quad \quad \quad - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array} \right. & \end{array}$$

Designamos tais coeficientes por **indicadores**. Para aumentar z , podemos:

- aumentar o valor da variável livre com **indicador mais favorável** (x_1 com 27), mantendo as restantes variáveis livres com valor 0. A nova solução terá de ser admissível, sendo da forma $(x_1, 0, 0, s_1, s_2, s_3)$ e não negativa, com $s_3 = 600$, $s_1 = 1800 - 0.9x_1 \geq 0$, $s_2 = 1000 - 0.1x_1 \geq 0$. Logo, $x_1 \leq 2000$.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Os **coeficientes das variáveis livres** x_1 , x_2 e x_3 na **expressão da função objetivo** indicam que, se alguma das variáveis x_1 , x_2 ou x_3 puder tomar valores positivos no espaço de soluções, a **solução básica admissível** $(0, 0, 0, 1800, 1000, 600)$, com $z = 0$, **não é uma solução ótima**.

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3 \\ \text{sujeito a} & \\ \left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 = 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 = 600 \quad \quad \quad - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Designamos tais coeficientes por **indicadores**. Para aumentar z , podemos:

- aumentar o valor da variável livre com **indicador mais favorável** (x_1 com **27**), mantendo as restantes variáveis livres com valor 0. A nova solução terá de ser admissível, sendo da forma $(x_1, 0, 0, s_1, s_2, s_3)$ e não negativa, com $s_3 = 600$, $s_1 = 1800 - 0.9x_1 \geq 0$, $s_2 = 1000 - 0.1x_1 \geq 0$. Logo, $x_1 \leq 2000$.
- Se **aumentarmos** x_1 **o mais possível**, $x_1 = 2000$, então $s_1 = 0$. A nova solução também é uma **solução básica**: x_1 **substituirá** s_1 **na base**.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Para trocar s_1 por x_1 na base, aplica-se *eliminação de Gauss sobre a coluna de x_1* , sendo o **pivot o coeficiente de x_1 na linha de s_1** . A equação que define z também é transformada (para que possa indicar como z varia em função das novas variáveis livres).

maximizar $z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} s_1 = 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 = 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 = 600 - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

maximizar $z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3$
sujeito a

$$\begin{cases} x_1 = 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\ s_2 = 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\ s_3 = 600 - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução do problema pelo Método Simplex

Para trocar s_1 por x_1 na base, aplica-se *eliminação de Gauss sobre a coluna de x_1* , sendo o **pivot o coeficiente de x_1 na linha de s_1** . A equação que define z também é transformada (para que possa indicar como z varia em função das novas variáveis livres).

maximizar $z = 0 + 27x_1 + 21x_2 + 14x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} s_1 = 1800 - 0.9x_1 - 0.7x_2 - 0.5x_3 \\ s_2 = 1000 - 0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.3x_3 \\ s_3 = 600 - 0.1x_2 - 0.2x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

maximizar $z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} x_1 = 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\ s_2 = 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\ s_3 = 600 - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

Os novos **indicadores** mostram que a **solução básica** $(2000, 0, 0, 0, 800, 600)$, com $z = 54000$, obtida nesta iteração é **ótima**, pois, no conjunto das soluções admissíveis, $s_1, x_2, x_3 \geq 0$, pelo que $z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3 \leq 54000$.

O método que descrevemos chama-se **Método de Simplex** (foi desenvolvido por G. Dantzig).

Resolução do problema pelo Método Simplex

Existem soluções alternativas ótimas?

maximizar $z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\ s_2 & = & 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\ s_3 & = & 600 - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Não existem soluções ótimas com $x_3 > 0$ nem com $s_1 > 0$, mas poderão existir **soluções ótimas alternativas** com $x_2 > 0$, pois o **indicador de x_2 é zero**.

Resolução do problema pelo Método Simplex

Existem soluções alternativas ótimas?

$$\text{maximizar } z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\ s_2 = 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\ s_3 = 600 - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

Não existem soluções ótimas com $x_3 > 0$ nem com $s_1 > 0$, mas poderão existir **soluções ótimas alternativas** com $x_2 > 0$, pois o **indicador de x_2 é zero**.

- Tomando $s_1 = x_3 = 0$, concluímos que, para todos os valores de $x_2 \in [0, \frac{18000}{7}]$, as soluções $(x_1, x_2, 0, 0, s_2)$, com $x_1 = 2000 - \frac{7}{9}x_2$, $s_2 = 800 - \frac{11}{90}x_2$, $s_3 = 600 - \frac{1}{10}x_2$ têm valor $z = 54000$ (isto é, são ótimos alternativos).

Resolução do problema pelo Método Simplex

Existem soluções alternativas ótimas?

$$\text{maximizar } z = 54000 - 30s_1 + 0x_2 - x_3$$

sujeito a

$$\begin{cases} x_1 = 2000 - \frac{10}{9}s_1 - \frac{7}{9}x_2 - \frac{5}{9}x_3 \\ s_2 = 800 + \frac{1}{9}s_1 - \frac{11}{90}x_2 - \frac{22}{90}x_3 \\ s_3 = 600 - \frac{1}{10}x_2 - \frac{2}{10}x_3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}$$

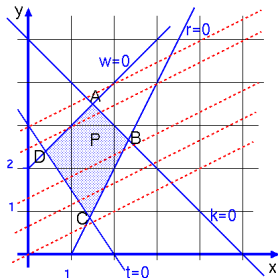
Não existem soluções ótimas com $x_3 > 0$ nem com $s_1 > 0$, mas poderão existir **soluções ótimas alternativas** com $x_2 > 0$, pois o **indicador de x_2 é zero**.

- Tomando $s_1 = x_3 = 0$, concluímos que, para todos os valores de $x_2 \in [0, \frac{18000}{7}]$, as soluções $(x_1, x_2, 0, 0, s_2)$, com $x_1 = 2000 - \frac{7}{9}x_2$, $s_2 = 800 - \frac{11}{90}x_2$, $s_3 = 600 - \frac{1}{10}x_2$ têm valor $z = 54000$ (isto é, são ótimos alternativos).
- “Farinhas”**: lucro máximo de 54000 u.m. Estratégia: produzir 2000 toneladas do tipo I, ou produzir 18000/7 do tipo II, ou simultaneamente do tipo I e II desde que produza x_2 do tipo II, com $x_2 \in]0, 18000/7[$, e $2000 - 7/9x_2$ do tipo I.

Interpretação Geométrica do Método Simplex

Propriedades dos problemas de LP

- Se o problema admitir solução ótima então **algum dos vértices do espaço de soluções é solução ótima**. Os vértices correspondem a **soluções básicas admissíveis** do sistema de equações.
- Método Simplex**: restringe a pesquisa a vértices do espaço de soluções; **parte de um vértice**; em cada iteração, **move-se (por uma aresta) para um vértice adjacente** do atual que melhore a função objetivo, se existir.



O sistema tem $\binom{6}{4} = 15$ soluções básicas mas apenas **quatro são soluções básicas admissíveis**.

$$A: w = 0 \wedge k = 0$$

$$B: r = 0 \wedge k = 0$$

$$C: r = 0 \wedge t = 0$$

$$D: w = 0 \wedge t = 0$$

Se partir de B no método Simplex, efetua apenas uma iteração, deslocando-se para A .

Aplicação do Método Simplex

Vamos ilustrar a aplicação do método Simplex, partindo do vértice C , que corresponde à solução básica com $r = t = 0$.

$$\begin{array}{l} \text{minimizar } z = x - 2y \\ \text{sujeito a} \\ \left\{ \begin{array}{l} 2y + 3x - t = 6 \\ y - x + w = 2 \\ y + x + k = 5 \\ -y + 2x + r = 2 \\ x, y, t, w, k, r \in \mathbb{R}_0^+ \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{minimizar } z = -\frac{2}{7} - \frac{8}{7}r - \frac{3}{7}t \\ \text{sujeito a} \\ \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{6}{7} + \frac{3}{7}r + \frac{2}{7}t \\ x = \frac{10}{7} - \frac{2}{7}r + \frac{1}{7}t \\ k = \frac{19}{7} - \frac{1}{7}r - \frac{3}{7}t \\ w = \frac{18}{7} - \frac{5}{7}r - \frac{1}{7}t \\ r, t, y, x, k, w \in \mathbb{R}_0^+ \end{array} \right. \end{array}$$

Aplicámos o **método de Gauss-Jordan** para resolver o sistema.

Aplicação do Método Simplex (cont.)

Conclusão nesta iteração:

$$\min z = -\frac{2}{7} - \frac{8}{7}r - \frac{3}{7}t$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{6}{7} + \frac{3}{7}r + \frac{2}{7}t \\ x = \frac{10}{7} - \frac{2}{7}r + \frac{1}{7}t \\ k = \frac{19}{7} - \frac{1}{7}r - \frac{3}{7}t \\ w = \frac{18}{7} - \frac{5}{7}r - \frac{1}{7}t \\ r, t, y, x, k, w \in \mathbb{R}_0^+ \end{array} \right.$$

- A **solução básica**, com $r = t = 0$, que corresponde ao **vértice C**, **não é ótima** pois os indicadores de r e t mostram que z pode diminuir.
- O indicador de r é o mais favorável. Aumentará r o mais possível mantendo $t = 0$.
- Para **manter a não negatividade da solução** terá $r \leq 18/5$, e se tomar $r = 18/5$ fica com $w = 0$ pois
$$\begin{aligned} x &= 10/7 - 2/7r \geq 0 \\ k &= 19/7 - 1/7r \geq 0 \\ w &= 18/7 - 5/7r \geq 0 \end{aligned}$$
- Troca w por r fazendo eliminação de Gauss na coluna de r , com pivot na linha de w . Com essa troca, passou para o vértice D .

Aplicação do Método Simplex (cont.)

$$\min z = -\frac{22}{5} + \frac{8}{5}w - \frac{1}{5}t$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}w + \frac{1}{5}t \\ x = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}w + \frac{1}{5}t \\ k = \frac{11}{5} + \frac{1}{5}w - \frac{2}{5}t \\ r = \frac{18}{5} - \frac{7}{5}w - \frac{1}{5}t \\ w, t, y, x, k, r \in \mathbb{R}_0^+ \end{array} \right.$$

Conclusão nesta iteração:

- A **solução básica**, com $w = t = 0$, que corresponde ao **vértice D**, **não é ótima** pois o indicador de t mostra que z pode diminuir.
- Para **manter a não negatividade da solução**, com $w = 0$, terá $t \leq 11/2$, e se tomar $t = 11/2$ fica com $k = 0$ pois
$$k = 11/5 - 2/5t \geq 0$$
$$r = 18/5 - 1/5t \geq 0$$
- Troca k por t fazendo eliminação de Gauss na coluna de t , com pivot na linha de k . Com essa troca, passou para o vértice A.

Aplicação do Método Simplex (cont.)

$$\min z = -\frac{11}{2} + \frac{3}{2}w + \frac{1}{2}k$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}k \\ x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2}k \\ t = \frac{11}{2} + \frac{1}{2}w - \frac{5}{2}k \\ r = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}w + \frac{1}{2}k \\ w, t, y, x, k, r \in \mathbb{R}_0^+ \end{array} \right.$$

Conclusão:

- A **solução básica**, com $w = k = 0$, que corresponde ao **vértice A**, é a **solução ótima**, pois os indicadores das variáveis livres (i.e., das não básicas) são positivos.
- Não há outras soluções ótimas. A única solução ótima do problema inicial é $y = 7/2, x = 3/2$, com $z = -11/2$.

Como resolver algebricamente problemas de LP?

- 1 Modelos Matemáticos para Problemas de Otimização e Decisão
- 2 Programação Inteira e Mista
- 3 Programação Linear e Ideia do Método Simplex
- 4 Aspectos Formais do Método Simplex

Revisão: Sistemas de Equações Lineares

Sistema de m equações lineares em n variáveis reais

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

Na **forma matricial** é representado por **$Ax = b$** , com

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A é a **matriz de coeficientes** e **b** o **termo independente**.

$(A \mid b)$ denota a **matriz completa** do sistema. .

Revisão: Sistemas de Equações Lineares

A **caraterística da matriz** A , que denotamos por $\text{car}(A)$, é o número máximo de linhas de A linearmente independentes.

Recordar que:

- O número de linhas de A linearmente independentes é igual ao número de colunas linearmente independentes;
- Logo, $\text{car}(A)$ é a dimensão do subespaço vetorial de \mathbb{R}^m gerado pelas linhas de A , que é igual à *dimensão subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelas colunas de A* .
- “ $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$?” \Leftrightarrow “ \mathbf{b} é combinação linear das colunas de \mathbf{A} ?”

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Revisão: Sistemas de Equações Lineares

A **caraterística da matriz** A , que denotamos por $car(A)$, é o número máximo de linhas de A linearmente independentes.

Recordar que:

- O número de linhas de A linearmente independentes é igual ao número de colunas linearmente independentes;
- Logo, $car(A)$ é a dimensão do subespaço vetorial de \mathbb{R}^m gerado pelas linhas de A , que é igual à *dimensão subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelas colunas de A* .
- “ $\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$?” \Leftrightarrow “ \mathbf{b} é combinação linear das colunas de \mathbf{A} ?”

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

\therefore O sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução se e só se $car(\mathbf{A}) = car(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$

Revisão: Sistemas de Equações Lineares

Caraterização da solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, supondo $\text{car}(\mathbf{A}) = m$

Sendo \mathbf{A} uma matriz $m \times n$ e assumindo que $\text{car}(\mathbf{A}) = m = \text{car}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ então

- se $m = n$, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução **única** $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
- se $m < n$, o sistema tem uma **infinitude** de soluções, podendo ser apresentado numa **forma resolvida** como $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$, onde B é uma sub-matriz $m \times m$ de \mathbf{A} com $\det(B) \neq 0$, N é a submatriz $m \times (n - m)$ formada pelas restantes colunas e x_B e x_N são as variáveis correspondentes.

Revisão: Sistemas de Equações Lineares

Caraterização da solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, supondo $\text{car}(\mathbf{A}) = m$

Sendo \mathbf{A} uma matriz $m \times n$ e assumindo que $\text{car}(\mathbf{A}) = m = \text{car}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ então

- se $m = n$, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução **única** $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
- se $m < n$, o sistema tem uma **infinitude** de soluções, podendo ser apresentado numa **forma resolvida** como $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$, onde B é uma sub-matriz $m \times m$ de \mathbf{A} com $\det(B) \neq 0$, N é a submatriz $m \times (n - m)$ formada pelas restantes colunas e x_B e x_N são as variáveis correspondentes.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N \Leftrightarrow \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}_B) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N)$$

Como $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}$ é a matriz identidade, concluímos que : $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N$

(sistema resolvido em ordem às variáveis em \mathbf{x}_B deixando livres as restantes)

Revisão: Sistemas de Equações Lineares

Caraterização da solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, supondo $\text{car}(\mathbf{A}) = m$

Sendo \mathbf{A} uma matriz $m \times n$ e assumindo que $\text{car}(\mathbf{A}) = m = \text{car}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ então

- se $m = n$, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução **única** $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.
- se $m < n$, o sistema tem uma **infinitude** de soluções, podendo ser apresentado numa **forma resolvida** como $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$, onde B é uma sub-matriz $m \times m$ de \mathbf{A} com $\det(B) \neq 0$, N é a submatriz $m \times (n - m)$ formada pelas restantes colunas e \mathbf{x}_B e \mathbf{x}_N são as variáveis correspondentes.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N \Leftrightarrow \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{x}_B) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N)$$

Como $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}$ é a matriz identidade, concluímos que : $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N})\mathbf{x}_N$

(sistema resolvido em ordem às variáveis em \mathbf{x}_B deixando livres as restantes)

A solução $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ que se obtém se fixarmos $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ chama-se **solução básica** determinada pela *base* B . (As colunas de B constituem uma base do subespaço gerado pelas colunas de \mathbf{A})

Quando alguma das variáveis \mathbf{x}_B é 0, a solução diz-se **degenerada**.

Sistemas de equações lineares

Exemplo: O sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

na forma $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N$, com $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, sendo \mathbf{B} formado pelas colunas de x_1, x_2, x_3 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_N}$$

Sistemas de equações lineares

Exemplo: O sistema de equações

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

na forma $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N$, com $\det(\mathbf{B}) \neq 0$, sendo \mathbf{B} formado pelas colunas de x_1, x_2, x_3 :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_N}$$

Se fixarmos o valor de \mathbf{x}_N , o sistema com termo independente ($\mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N$) tem solução única: $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N \Leftrightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N) \Leftrightarrow \mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 - 4x_4 \\ 2 + 7x_5 \\ 7 - 7x_4 + 4x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b} - \mathbf{N}\mathbf{x}_N}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemas de equações lineares

A matriz \mathbf{B} pode ser qualquer submatriz $m \times m$ constituída por $\text{car}(\mathbf{A}) = m$ colunas de \mathbf{A} linearmente independentes.

Exemplo (cont.):

A seguinte não seria adequada pois $\det(\mathbf{B}) = 0$ e, portanto, não existe \mathbf{B}^{-1} .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_N}$$

Mas, podia ser, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Tomando $x_2 = x_5 = 0$, iríamos obter a **solução básica** $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ para esta base.

Alguns Métodos para Problemas com Restrições Lineares

- Resolução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$
 - Eliminação de Gauss [1801]
 - Eliminação de Gauss-Jordan (Clasen [1888], Jordan [1904])
- Resolução de $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$
 - Eliminação de Fourier–Motzkin ([1827, 1936]) – não polinomial
- **LP**: Resolução de $\max \mathbf{cx}$ com $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ (ou $\min \mathbf{cx}$)
 - **Método Simplex** (ideia Fourier [1827], formulação Dantzig [1951]).
Não é polinomial mas comporta-se normalmente bem.
 - **Existência de métodos polinomiais para LP**
(não são *fortemente polinomiais* pois a complexidade depende dos coeficientes da matriz além de m e n)
 - Método dos Elipsóides (Khachiyan [1980]) – interesse teórico
 - Métodos de Ponto Interior (Karmarkar [1984]) – relevantes na prática

Existem diversas variantes do método Simplex. Nesta cadeira, é estudada apenas uma versão elementar.

Revisão: Método de Eliminação Gauss-Jordan

Exemplo:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrrrrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & & = & 3 \\ - & 2x_1 & - & 4x_2 & + & 4x_3 & & - & 7x_5 & = & 2 \\ & & 4x_2 & - & x_3 & + & 7x_4 & - & 4x_5 & = & 7 \\ & & 4x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & + & 3x_5 & = & -1 \end{array} \right.$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right]$$

O método de Gauss-Jordan aplica **transformações elementares** sobre a matriz completa para colocar o sistema em forma resolvida, garantindo a equivalência dos sistemas.

- Dividir/multiplicar uma linha por um escalar não nulo.
- Subtrair/somar a uma linha uma outra linha multiplicada por um escalar.
- Trocar duas linhas entre si.

Revisão Método de Eliminação Gauss-Jordan

Exemplo (cont):

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{eliminação na coluna } x_1]{\text{Gauss-Jordan}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right]$$

Se **pivot 1** na linha k e coluna j então, para eliminar a_{ij} , faz a substituição

$$(\text{Linha } i) \leftarrow (\text{Linha } i) - a_{ij} \times (\text{Linha } k)$$

Gauss-Jordan: elimina elementos da coluna j para as linhas $i \neq k$.

Gauss: elimina elementos nas linhas $i > k$ (troca linhas se necessário).

Revisão: Método de Eliminação Gauss-Jordan

Exemplo (cont):

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{L}_2 \text{ com L}_3]{\text{troca}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right]$$

Trocou linhas para ter elemento não nulo (i.e., **pivot**) na segunda coluna e segunda linha.

$$\begin{array}{l} \text{divide L}_2 \\ \rightarrow \\ \text{por pivot} \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1/4 & 7/4 & -1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 4 & -3 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{col. 2}]{\text{elimina}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 7/4 & -1 & 7/4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 7 & -8 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{novo pivot} \\ \text{divide e elimina} \\ \rightarrow \\ \text{col. 3} \end{array} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1/4 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/4 & -15/8 & 11/4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -7/2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Conclui-se que $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ e a última equação era **redundante**.

Revisão: Método de Eliminação Gauss-Jordan

Outro exemplo com $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ (termo independente $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ omitido)

$$\left[\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Revisão: Método de Eliminação Gauss-Jordan

Outro exemplo com $\text{car}(\mathbf{A}) = 3$ (termo independente $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ omitido)

$$\left[\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Sequência de transformações (traduzida por um produto de matrizes)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^{-1}} (\mathbf{A} | \mathbf{0}) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

para $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, pois \mathbf{B}^{-1} é a única matriz tal que $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}$ é a matriz identidade.

Método Simplex

- Qualquer problema de programação linear pode ser reduzido à **forma normal**

maximizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$

sujeito a

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$$

minimizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$

sujeito a

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$$

com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_0^+$. Como “maximizar $f(\mathbf{x})$ ” equivale a “minimizar $-f(\mathbf{x})$ ”, podemos restringir a análise a uma das formas, sem perda de generalidade.

Método Simplex

- Qualquer problema de programação linear pode ser reduzido à **forma normal**

maximizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$

sujeito a

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$$

minimizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$

sujeito a

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$$

com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_0^+$. Como “maximizar $f(\mathbf{x})$ ” equivale a “minimizar $-f(\mathbf{x})$ ”, podemos restringir a análise a uma das formas, sem perda de generalidade.

- Método Simplex**

- Calcula uma *solução básica admissível ótima*, se o problema tiver solução ótima e fornece informações adicionais sobre o espaço de soluções (por exemplo, sobre a unicidade da solução ótima);

Método Simplex

- Qualquer problema de programação linear pode ser reduzido à **forma normal**

maximizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$

sujeito a

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$$

minimizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$

sujeito a

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$$

com $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_0^+$. Como “maximizar $f(\mathbf{x})$ ” equivale a “minimizar $-f(\mathbf{x})$ ”, podemos restringir a análise a uma das formas, sem perda de generalidade.

- Método Simplex**

- Calcula uma *solução básica admissível ótima*, se o problema tiver solução ótima e fornece informações adicionais sobre o espaço de soluções (por exemplo, sobre a unicidade da solução ótima);
- Estratégia:** parte de uma solução básica admissível e, iterativamente, vai calculando uma solução básica admissível melhor do que a atual, fazendo entrar na base a variável com *indicador mais favorável*, e sair da base a variável que se anula quando a nova toma o valor máximo.

Existem alternativas à regra “indicador mais favorável”, mas não as iremos considerar.

Método Simplex – Fundamentos

Seja P o problema **maximizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$** sujeito a **$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$** , **$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$** (ou de *minimizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$*).

- Se P tem solução ótima então pelo menos uma **solução básica admissível** é ótima. Logo, se tem uma única solução ótima, essa solução é solução básica admissível.
- Se \mathbf{x}'_{opt} e \mathbf{x}''_{opt} , com $\mathbf{x}'_{opt} \neq \mathbf{x}''_{opt}$, são soluções (básicas) admissíveis ótimas, P tem uma infinidade de soluções ótimas: $(1 - \lambda)\mathbf{x}'_{opt} + \lambda\mathbf{x}''_{opt}$ é solução, para $\lambda \in [0, 1]$.
- As soluções básicas admissíveis são **vértices** do espaço de soluções.

Método Simplex – Fundamentos

Seja P o problema **maximizar** $\mathbf{c} \mathbf{x}$ **sujeito a** $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$ (ou de *minimizar* $\mathbf{c} \mathbf{x}$).

- Se P tem solução ótima então pelo menos uma **solução básica admissível** é ótima. Logo, se tem uma única solução ótima, essa solução é solução básica admissível.
- Se \mathbf{x}'_{opt} e \mathbf{x}''_{opt} , com $\mathbf{x}'_{opt} \neq \mathbf{x}''_{opt}$, são soluções (básicas) admissíveis ótimas, P tem uma infinidade de soluções ótimas: $(1 - \lambda)\mathbf{x}'_{opt} + \lambda\mathbf{x}''_{opt}$ é solução, para $\lambda \in [0, 1]$.
- As soluções básicas admissíveis são **vértices** do espaço de soluções.

Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, os pontos $(1 - \lambda)p_1 + \lambda p_2$, com $\lambda \in [0, 1]$, definem o **segmento** $[p_1 p_2]$.

Método Simplex – Fundamentos

Seja P o problema **maximizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$** sujeito a $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$ (ou de *minimizar $\mathbf{c} \mathbf{x}$*).

- Se P tem solução ótima então pelo menos uma **solução básica admissível** é ótima. Logo, se tem uma única solução ótima, essa solução é solução básica admissível.
- Se \mathbf{x}'_{opt} e \mathbf{x}''_{opt} , com $\mathbf{x}'_{opt} \neq \mathbf{x}''_{opt}$, são soluções (básicas) admissíveis ótimas, P tem uma infinidade de soluções ótimas: $(1 - \lambda)\mathbf{x}'_{opt} + \lambda\mathbf{x}''_{opt}$ é solução, para $\lambda \in [0, 1]$.
- As soluções básicas admissíveis são **vértices** do espaço de soluções.

Se $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^n$, os pontos $(1 - \lambda)p_1 + \lambda p_2$, com $\lambda \in [0, 1]$, definem o **segmento $[p_1 p_2]$** .

- As soluções de $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^+$ constituem um conjunto **convexo poliédrico**. Se \mathbf{x} e \mathbf{x}' são soluções, então $(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}'$ é solução, para todo $\lambda \in [0, 1]$.
- Um **vértice \mathbf{x}** é um **ponto extremo** do espaço de soluções S (i.e., não pertence ao interior de nenhum segmento de recta nesse espaço): $\mathbf{x} = (1 - \lambda)\mathbf{x}' + \lambda\mathbf{x}''$, para $\mathbf{x}' \in S$, $\mathbf{x}'' \in S$, $\lambda \in [0, 1]$, sse $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ ou $\mathbf{x} = \mathbf{x}''$ (ou seja, sse $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$).

$(1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$. Se $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{b}$ então $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x}' - \mathbf{x})) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}') = \mathbf{b} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{b}) = \mathbf{b}$.

Método Simplex – Fundamentos

Seja $\mathbf{A} : m \times n$, com $\text{car}(\mathbf{A}) = m$, e suponhamos que se **conhece uma solução básica admissível**. Seja \mathbf{B} a submatriz formada pelas colunas de \mathbf{A} na **base** correspondente e \mathbf{N} a matriz formada pelas restantes colunas.

$$\begin{array}{lll} \max & z & = \mathbf{c} \mathbf{x} \\ \text{subj.} & \mathbf{A} \mathbf{x} & = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} & \geq \mathbf{0} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{lll} \max & z & = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x}_N \\ \text{subj.} & \mathbf{x}_B & = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x}_N \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N & \geq \mathbf{0} \end{array}$$

- Notar que na forma resolvida $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x}_N$ pelo que

$$z = \mathbf{c} \mathbf{x} \Leftrightarrow z = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N \Leftrightarrow z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{x}_N$$

Método Simplex – Fundamentos

- Sejam \mathcal{N} e \mathcal{B} os conjuntos dos índices das colunas de \mathbf{A} em \mathbf{N} e \mathbf{B} . Sem esquecer que $\mathbf{x}_\mathbf{B}, \mathbf{x}_\mathbf{N} \geq \mathbf{0}$, é equivalente escrever:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \mathbf{c}_\mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + \sum_{j \in \mathcal{N}} (\mathbf{c}_j - \mathbf{c}_\mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j) x_j \\ \mathbf{x}_\mathbf{B} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j) \end{aligned}$$

Método Simplex – Fundamentos

- Sejam \mathcal{N} e \mathcal{B} os conjuntos dos índices das colunas de \mathbf{A} em \mathbf{N} e \mathbf{B} . Sem esquecer que $\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$, é equivalente escrever:

$$\max \quad z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} A_j) x_j$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j (\mathbf{B}^{-1} A_j)$$

- Seja α_j o vetor coluna $(\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{mj})^T$ que representa $\mathbf{B}^{-1} A_j$. Denotando $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ por z_B e o indicador $c_j - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} A_j = c_j - \mathbf{c}_B \alpha_j$ por $c_j - z_j$, fica:

$$\max \quad z = z_B + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j) x_j$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j$$

Método Simplex – Fundamentos

- Sejam \mathcal{N} e \mathcal{B} os conjuntos dos índices das colunas de \mathbf{A} em \mathbf{N} e \mathbf{B} . Sem esquecer que $\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N \geq \mathbf{0}$, é equivalente escrever:

$$\max \quad z = \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} A_j) x_j$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j (\mathbf{B}^{-1} A_j)$$

- Seja α_j o vetor coluna $(\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{mj})^T$ que representa $\mathbf{B}^{-1} A_j$. Denotando $\mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ por z_B e o indicador $c_j - \mathbf{c}_B \mathbf{B}^{-1} A_j = c_j - \mathbf{c}_B \alpha_j$ por $c_j - z_j$, fica:

$$\max \quad z = z_B + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j) x_j$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j$$

A solução básica admissível $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ com $z = z_B$ é ótima?

Método Simplex – Fundamentos

A solução básica admissível $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ com $z = z_B$ é ótima?

$$\max \quad z = z_B + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j) x_j$$

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j$$

Método Simplex – Fundamentos

A solução básica admissível $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ com $z = z_B$ é ótima?

$$\begin{array}{rcl} \max & z & = z_B + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j)x_j \\ & & \hline & \mathbf{x}_B & = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j \end{array}$$

Análise dos indicadores:

- Se $c_j - z_j \leq 0$, para todo $j \in \mathcal{N}$, então z não pode ser melhorado. Uma solução ótima é $(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) \equiv (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ e z_B é o valor ótimo para z .

Método Simplex – Fundamentos

A solução básica admissível $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ com $z = z_B$ é ótima?

$$\begin{array}{rcl} \max & z & = z_B + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j)x_j \\ & & \hline & \mathbf{x}_B & = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j \end{array}$$

Análise dos indicadores:

- Se $c_j - z_j \leq 0$, para todo $j \in \mathcal{N}$, então z não pode ser melhorado. Uma solução ótima é $(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) \equiv (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ e z_B é o valor ótimo para z .
- Se $c_j - z_j > 0$, para algum $j \in \mathcal{N}$, podemos tentar melhorar z , trocando A_j por uma coluna de \mathbf{B} .

Método Simplex – Fundamentos

A solução básica admissível $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ com $z = z_B$ é ótima?

$$\begin{array}{rcl} \max \quad z & = & z_B + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j)x_j \\ \hline \mathbf{x}_B & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j \end{array}$$

Análise dos indicadores:

- Se $c_j - z_j \leq 0$, para todo $j \in \mathcal{N}$, então z não pode ser melhorado. Uma solução ótima é $(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) \equiv (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ e z_B é o valor ótimo para z .
- Se $c_j - z_j > 0$, para algum $j \in \mathcal{N}$, podemos tentar melhorar z , trocando A_j por uma coluna de \mathbf{B} . **Convenção:** entra para a base \mathcal{B} a variável x_j com o indicador mais favorável (*LP de maximização, $c_j - z_j > 0$ máximo*).

Método Simplex – Fundamentos

A solução básica admissível $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ com $z = z_B$ é ótima?

$$\begin{array}{rcl} \max \quad z & = & z_B + \sum_{j \in \mathcal{N}} (c_j - z_j)x_j \\ \hline \mathbf{x}_B & = & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \sum_{j \in \mathcal{N}} x_j \alpha_j \end{array}$$

Análise dos indicadores:

- Se $c_j - z_j \leq 0$, para todo $j \in \mathcal{N}$, então z não pode ser melhorado. Uma solução ótima é $(\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_N) \equiv (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$ e z_B é o valor ótimo para z .
- Se $c_j - z_j > 0$, para algum $j \in \mathcal{N}$, podemos tentar melhorar z , trocando A_j por uma coluna de \mathbf{B} . **Convenção:** entra para a base \mathcal{B} a variável x_j com o indicador mais favorável (*LP de maximização, $c_j - z_j > 0$ máximo*).
Que k sai de \mathcal{B} para entrar j ?

Método Simplex – Fundamentos

Que k sai de B para entrar j ?

- A_j só pode entrar na base se existir $\alpha_{ij} \neq 0$ para algum i tal que $1 \leq i \leq m$.
- Isso terá que ser verdade senão $A_j = \mathbf{0}$ e x_j não estaria restringida pelas restrições do problema.
- Todas as variáveis x_t , com $t \in \mathcal{N} \setminus \{j\}$, mantêm valor zero. Logo, para preservar a não negatividade da solução, para todas as variáveis x_i na base B atual, terá de satisfazer

$$x_i = x_i^B - \alpha_{ij}x_j \geq 0,$$

para os novos valores de x_i e x_j , sendo x_i^B o valor de x_i em \mathbf{x}_B .

Para poder fazer a troca, é necessário que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$ (justificação à frente)

Método Simplex – Fundamentos

Como $x_i = x_i^B - \alpha_{ij}x_j \geq 0$, para os novos valores x_i e x_j , para todo $i \in \mathcal{B}$, então

$$x_j \leq \frac{x_i^B}{\alpha_{ij}}, \text{ para todo } i \in \mathcal{B}, \text{ com } \alpha_{ij} > 0$$

A **coluna A_k que sai da base** para entrar A_j pode ser qualquer uma tal que

$$\frac{x_k^B}{\alpha_{kj}} = \min \left\{ \frac{x_i^B}{\alpha_{ij}} \mid \alpha_{ij} > 0 \right\}$$

- O valor de x_k passa a ser zero e o valor de x_j passa de zero para x_k^B / α_{kj} .
 A_j ocupa o lugar de A_k na base B , sendo $\mathcal{B}' = (\mathcal{B} \setminus \{k\}) \cup \{j\}$.

Método Simplex – Fundamentos

Como $x_i = x_i^B - \alpha_{ij}x_j \geq 0$, para os novos valores x_i e x_j , para todo $i \in \mathcal{B}$, então

$$x_j \leq \frac{x_i^B}{\alpha_{ij}}, \text{ para todo } i \in \mathcal{B}, \text{ com } \alpha_{ij} > 0$$

A **coluna A_k que sai da base** para entrar A_j pode ser qualquer uma tal que

$$\frac{x_k^B}{\alpha_{kj}} = \min \left\{ \frac{x_i^B}{\alpha_{ij}} \mid \alpha_{ij} > 0 \right\}$$

- O valor de x_k passa a ser zero e o valor de x_j passa de zero para x_k^B/α_{kj} .
 A_j ocupa o lugar de A_k na base B , sendo $B' = (\mathcal{B} \setminus \{k\}) \cup \{j\}$.
- Para voltar a colocar o sistema na forma resolvida podemos aplicar **eliminação de Gauss-Jordan** na coluna de x_j com pivot na linha de x_k , isto é α_{kj} .

Para a nova solução básica admissível tem-se:

$$\begin{cases} x_j^{B'} &= x_k^B/\alpha_{kj} \\ x_i^{B'} &= x_i^B - \alpha_{ij}(x_k^B/\alpha_{kj}), \text{ com } i \in B' \setminus \{j\} \\ z_{B'} &= z_B - (z_j - c_j)(x_k^B/\alpha_{kj}) \end{cases}$$

Método Simplex – Fundamentos

Note que se $x_k \neq 0$ então $z_{B'} > z_B$ e terá uma solução melhor. Geometricamente, nesse caso, a troca de colunas corresponde a um deslocamento ao longo de uma aresta, para um vértice adjacente ao atual.

Mas, x_k pode ter que entrar para a base com valor zero, ficando $z_{B'} = z_B$.

- Nesse caso, a solução é **básica degenerada**. Tem mais componentes a zero do que devia, ou seja, mais do que $n - \text{car}(\mathbf{A})$ componentes nulas.
- A entrada de x_k na base com valor zero implica **não sair do vértice em que estava**, pois o valor da solução é o mesmo. Como alterou a base, pode conseguir sair do vértice numa iteração seguinte, usando uma aresta.
- Mas iterações com $z_{B'} = z_B$ podem criar problemas de terminação (entrada em ciclo). Existem variantes do método Simplex com regras adicionais para evitar ciclos por exemplo, a *regra de Bland* (consultar bibliografia).

Para poder fazer a troca, é necessário que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Método Simplex – Fundamentos

Para poder fazer a troca, é necessário que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Para $j \in \mathcal{N}$ fixo, $x_i = x_i^B - \alpha_{ij}x_j$, para todo $i \in \mathcal{B}$. Assim, se $\alpha_{ij} \leq 0$, para todo i , concluímos que:

Método Simplex – Fundamentos

Para poder fazer a troca, é necessário que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Para $j \in \mathcal{N}$ fixo, $x_i = x_i^B - \alpha_{ij}x_j$, para todo $i \in \mathcal{B}$. Assim, se $\alpha_{ij} \leq 0$, para todo i , concluímos que:

- O espaço das soluções admissíveis não é limitado. Existem soluções admissíveis com x_j arbitrariamente grande.

Método Simplex – Fundamentos

Para poder fazer a troca, é necessário que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Para $j \in \mathcal{N}$ fixo, $x_i = x_i^B - \alpha_{ij}x_j$, para todo $i \in \mathcal{B}$. Assim, se $\alpha_{ij} \leq 0$, para todo i , concluímos que:

- O espaço das soluções admissíveis não é limitado. Existem soluções admissíveis com x_j arbitrariamente grande.
- E, se, para além disso, $c_j - z_j > 0$, então podemos aumentar z quanto quisermos. Neste caso, não existirá solução ótima.

Método Simplex – Fundamentos

Para poder fazer a troca, é necessário que $\{i \mid \alpha_{ij} > 0\} \neq \emptyset$. **Porquê?**

Para $j \in \mathcal{N}$ fixo, $x_i = x_i^B - \alpha_{ij}x_j$, para todo $i \in \mathcal{B}$. Assim, se $\alpha_{ij} \leq 0$, para todo i , concluímos que:

- O **espaço das soluções admissíveis não é limitado**. Existem soluções admissíveis com x_j arbitrariamente grande.
- E, se, para além disso, $c_j - z_j > 0$, então podemos aumentar z quanto quisermos. Neste caso, **não existirá solução ótima**.
- No caso em que $c_j - z_j \leq 0$, embora x_j possa crescer arbitrariamente no espaço de soluções, pode continuar a ser possível maximizar z .

Espaço de soluções não limitado - o que pode acontecer?

O problema seguinte não tem solução ótima porque z não está limitado superiormente no espaço de soluções.

$$\text{maximizar } z = \frac{89}{17} + \frac{75}{17}x_3 + \frac{11}{17}s_1$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{37}{17} + \frac{1}{17}x_3 + \frac{4}{17}s_1 \\ x_2 = \frac{32}{17} + \frac{5}{17}x_3 + \frac{3}{17}s_1 \\ s_2 = \frac{80}{17} + \frac{21}{17}x_3 - \frac{1}{17}s_1 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Para $s_1 = 0$, a variável x_3 pode tomar qualquer valor em \mathbb{R}_0^+ e, como $z = \frac{89}{17} + \frac{75}{17}x_3$, então z pode tomar qualquer valor maior ou igual a $\frac{89}{17}$.

Notar que se em vez de **maximizar** z se pretendesse **minimizar** z , já existiria solução ótima (como vimos anteriormente)

Redução à forma normal – o que pode acontecer?

maximizar $z = 2x - 5y$

sujeito a

$$\begin{cases} 4y - 3x \leq 8 \\ y - 2x \leq -4 \\ 3y + 2x \geq 20 \\ 4y - x \geq 1 \\ -y + x \leq 11 \\ 3y + 2x \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

maximizar $z = 2x - 5y$

sujeito a

$$\begin{cases} 4y - 3x + s_1 = 8 \\ -y + 2x - s_2 = 4 \\ 3y + 2x - s_3 = 20 \\ 4y - x - s_4 = 1 \\ -y + x + s_5 = 11 \\ 3y + 2x + s_6 = 40 \\ x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \geq 0 \end{cases}$$

Recordar: O termo independente **b** na forma normal é não negativo. Se se tiver $b_i \leq 0$, é necessário multiplicar a restrição i por -1. No exemplo, $y - 2x \leq -4$ é transformada em $-y + 2x \geq 4$ e só depois em $-y + 2x - s_2 = 4$.

Redução à forma normal – o que pode acontecer?

maximizar $z = 2x - 5y$

sujeito a

$$\begin{cases} 4y - 3x \leq 8 \\ y - 2x \leq -4 \\ 3y + 2x \geq 20 \\ 4y - x \geq 1 \\ -y + x \leq 11 \\ 3y + 2x \leq 40 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

maximizar $z = 2x - 5y$

sujeito a

$$\begin{cases} 4y - 3x + s_1 = 8 \\ -y + 2x - s_2 = 4 \\ 3y + 2x - s_3 = 20 \\ 4y - x - s_4 = 1 \\ -y + x + s_5 = 11 \\ 3y + 2x + s_6 = 40 \\ x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 \geq 0 \end{cases}$$

Recordar: O termo independente **b** na forma normal é não negativo. Se se tiver $b_i \leq 0$, é necessário multiplicar a restrição i por -1. No exemplo, $y - 2x \leq -4$ é transformada em $-y + 2x \geq 4$ e só depois em $-y + 2x - s_2 = 4$.

Como calcular uma solução básica admissível para iniciar o Método Simplex?

Não bastaria resolver o sistema relativamente às variáveis de desvio, pois a solução básica correspondente tem $s_2, s_3, s_4 < 0$. O que fazer?

Método das duas fases

Como calcular uma solução básica admissível para iniciar o Método Simplex?

- Introduzir variáveis artificiais para ter uma matriz identidade.
- **Fase 1:** Minimizar a soma das variáveis artificiais (Método Simplex).
 - Se o valor mínimo não for zero, o sistema inicial é inconsistente.
 - Se for zero, a solução básica encontrada, projetada nas variáveis iniciais, é solução admissível do problema inicial. Será usada para otimização da função objetivo inicial na **Fase 2**.

minimizar $z' = v_1 + v_2 + v_3$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} 4y & - & 3x & + & s_1 & = & 8 \\ -y & + & 2x & - & s_2 & + & v_1 = 4 \\ 3y & + & 2x & - & s_3 & + & v_2 = 20 \\ 4y & - & x & - & s_4 & + & v_3 = 1 \\ -y & + & x & + & s_5 & = & 11 \\ 3y & + & 2x & + & s_6 & = & 40 \end{array} \right.$$
$$x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, v_1, v_2, v_3 \geq 0$$

Método das duas fases

Como calcular uma solução básica admissível para iniciar o Método Simplex?

- Introduzir variáveis artificiais para ter uma matriz identidade.
- Fase 1:** Minimizar a soma das variáveis artificiais (Método Simplex).
 - Se o valor mínimo não for zero, o sistema inicial é inconsistente.
 - Se for zero, a solução básica encontrada, projetada nas variáveis iniciais, é solução admissível do problema inicial. Será usada para otimização da função objetivo inicial na **Fase 2**.

minimizar $z' = v_1 + v_2 + v_3$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} 4y & - & 3x & + & s_1 & = & 8 \\ -y & + & 2x & - & s_2 & + & v_1 = 4 \\ 3y & + & 2x & - & s_3 & + & v_2 = 20 \\ 4y & - & x & - & s_4 & + & v_3 = 1 \\ -y & + & x & + & s_5 & = & 11 \\ 3y & + & 2x & + & s_6 & = & 40 \end{array} \right.$$
$$x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, v_1, v_2, v_3 \geq 0$$

- As variáveis v_1 , v_2 e v_3 são **artificiais**.

Não têm interpretação no problema inicial. Se alguma for positiva, a restrição correspondente é violada.

- Estas variáveis são inseridas para ter trivialmente uma solução básica admissível para iniciar o Método Simplex (na Fase 1).

Método das duas fases - Fase 1

Fase 1:

$$z' = v_1 + v_2 + v_3 = (4 + y - 2x + s_2) + (20 - 3y - 2x + s_3) + (1 - 4y + x + s_4)$$

$$\text{minimizar } z' = 25 - 6y - 3x + s_2 + s_3 + s_4$$

sujeito a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & 8 - 4y + 3x \\ v_1 & = & 4 + y - 2x + s_2 \\ v_2 & = & 20 - 3y - 2x + s_3 \\ v_3 & = & 1 - 4y + x + s_4 \\ s_5 & = & 11 + y - x \\ s_6 & = & 40 - 3y - 2x \\ x, y, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, v_1, v_2, v_3 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Na primeira iteração, y tem o indicador mais

favorável e entra para a base por troca com v_3 pois,

se aumentarmos y o mais possível, v_3 fica 0. Notar

que $y \leq \min(8/4, 20/3, 1/4, 40/3) = 1/4$. Se

$y = 1/4$ então $v_3 = 0$.

Após algumas iterações, chega-se à solução básica ótima procurada:

minimizar	z'	=	0	+	v_3	+	v_1	+	v_2						
s_1	=	21	+	$17/11 v_3$				-	$8/11 v_2$	+	$8/11 s_3$	-	$17/11 s_4$		
x	=	7	+	$3/11 v_3$				-	$4/11 v_2$	+	$4/11 s_3$	-	$3/11 s_4$		
s_2	=	8	+	$8/11 v_3$			+	v_1	-	$7/11 v_2$	+	$7/11 s_3$	-	$8/11 s_4$	
y	=	2	-	$2/11 v_3$				-	$1/11 v_2$	+	$1/11 s_3$	+	$2/11 s_4$		
s_5	=	6	-	$5/11 v_3$				+	$3/11 v_2$	-	$3/11 s_3$	+	$5/11 s_4$		
s_6	=	20						+	v_2	-	s_3				

Método das duas fases - Fase 2

Fase 2: Partindo dessa forma resolvida, retiramos v_1 , v_2 e v_3 , substituímos a função objetivo $z = 2x - 5y = 2\left(7 + \frac{4}{11}s_3 - \frac{3}{11}s_4\right) - 5\left(2 + \frac{1}{11}s_3 + \frac{2}{11}s_4\right) = 4 + \frac{3}{11}s_3 - \frac{16}{11}s_4$, e prosseguimos.

$$\max \quad z = 4 + \frac{3}{11}s_3 - \frac{16}{11}s_4$$

$$s_1 = 21 + \frac{8}{11}s_3 - \frac{17}{11}s_4$$

$$x = 7 + \frac{4}{11}s_3 - \frac{3}{11}s_4$$

$$s_2 = 8 + \frac{7}{11}s_3 - \frac{8}{11}s_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = 2 + \frac{1}{11}s_3 + \frac{2}{11}s_4$$

$$s_5 = 6 - \frac{3}{11}s_3 + \frac{5}{11}s_4$$

$$s_6 = 20 - s_3$$

$$\max \quad z = \frac{104}{11} - \frac{3}{11}s_6 - \frac{16}{11}s_4$$

$$s_1 = \frac{391}{11} - \frac{8}{11}s_6 - \frac{17}{11}s_4$$

$$x = \frac{157}{11} - \frac{4}{11}s_6 - \frac{3}{11}s_4$$

$$s_2 = \frac{228}{11} - \frac{7}{11}s_6 - \frac{8}{11}s_4$$

$$y = \frac{42}{11} - \frac{1}{11}s_6 - \frac{2}{11}s_4$$

$$s_5 = \frac{6}{11} + \frac{3}{11}s_6 + \frac{5}{11}s_4$$

$$s_3 = 20 - s_6$$

s_3 entrou para a base por troca com s_6 pois, para preservar a não negatividade da solução $s_3 \leq \min(66/3, 20) = 20$, e se $s_3 = 20$ então $s_6 = 0$. A nova solução é ótima.

Método das duas fases - Fase 2

Fase 2: Partindo dessa forma resolvida, retiramos v_1 , v_2 e v_3 , substituímos a função objetivo $z = 2x - 5y = 2\left(7 + \frac{4}{11}s_3 - \frac{3}{11}s_4\right) - 5\left(2 + \frac{1}{11}s_3 + \frac{2}{11}s_4\right) = 4 + \frac{3}{11}s_3 - \frac{16}{11}s_4$, e prosseguimos.

$$\max \quad z = 4 + \frac{3}{11}s_3 - \frac{16}{11}s_4$$

$$s_1 = 21 + \frac{8}{11}s_3 - \frac{17}{11}s_4$$

$$x = 7 + \frac{4}{11}s_3 - \frac{3}{11}s_4$$

$$s_2 = 8 + \frac{7}{11}s_3 - \frac{8}{11}s_4 \quad \Leftrightarrow$$

$$y = 2 + \frac{1}{11}s_3 + \frac{2}{11}s_4$$

$$s_5 = 6 - \frac{3}{11}s_3 + \frac{5}{11}s_4$$

$$s_6 = 20 - s_3$$

$$\max \quad z = \frac{104}{11} - \frac{3}{11}s_6 - \frac{16}{11}s_4$$

$$s_1 = \frac{391}{11} - \frac{8}{11}s_6 - \frac{17}{11}s_4$$

$$x = \frac{157}{11} - \frac{4}{11}s_6 - \frac{3}{11}s_4$$

$$s_2 = \frac{228}{11} - \frac{7}{11}s_6 - \frac{8}{11}s_4$$

$$y = \frac{42}{11} - \frac{1}{11}s_6 - \frac{2}{11}s_4$$

$$s_5 = \frac{6}{11} + \frac{3}{11}s_6 + \frac{5}{11}s_4$$

$$s_3 = 20 - s_6$$

s_3 entrou para a base por troca com s_6 pois, para preservar a não negatividade da solução $s_3 \leq \min(66/3, 20) = 20$, e se $s_3 = 20$ então $s_6 = 0$. A nova solução é ótima.

Conclusão: o problema inicial tem solução ótima única, $x = 157/11$ e $y = 42/11$.

Variáveis de Decisão Negativas ou com Domínio \mathbb{R}

- Na prática, pode interessar ter variáveis com domínio \mathbb{R} (que traduzam “lucros ou perdas”, “crescimento ou redução”, etc).
- Para reformular e reduzir à **forma normal** (ou *padrão*), se $x_j \in \mathbb{R}$ (em vez de $x_j \in \mathbb{R}_0^+$), para algum j , basta substituir cada ocorrência de x_j por $(x'_j - x''_j)$, sendo $x'_j, x''_j \in \mathbb{R}_0^+$ **novas variáveis**. Se for $x_j \in \mathbb{R}_0^-$, basta substituir por $-x''_j$.

Exemplo

maximizar $z = 2x - 5y$

sujeito a

$$\begin{cases} 4y - 3x \leq 8 \\ y - 2x \leq -4 \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

maximizar $z = 2(x' - x'') - 5y$

sujeito a

$$\begin{cases} 4y - 3(x' - x'') + s_1 = 8 \\ -y + 2(x' - x'') - s_2 = 4 \\ x', x'', y, s_1, s_2 \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}$$

e recordar que $x = x' - x''$

Propriedade: As soluções básicas não têm simultaneamente $x'_j > 0$ e $x''_j > 0$. As colunas de x_j e x'_j na matriz são dependentes. Se uma está na base, a outra está fora.