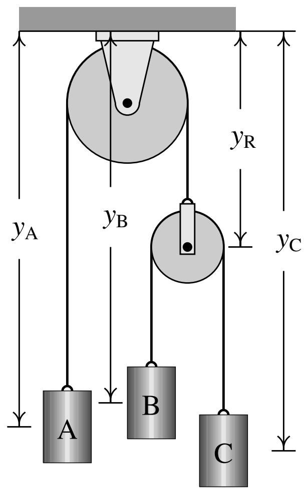
Resolução do exame de 3 de julho de 2014 Regente: Jaime Villate

Problemas

Problema 1. **Método 1**. Como o cilindro A se desloca para cima a 3 m/s, a roldana móvel no lado direito desce com a mesma velocidade. E como o cilindro C também desce, mas com velocidade de apenas 1 m/s, então a velocidade de C, relativa à roldana móvel é 2 m/s, para cima. Em relação à roldana móvel, o cilindro B desce com a mesma velocidade com que C está a subir; ou seja, a velocidade de B, relativa à roldana móvel, é 2 m/s, para baixo. E como a roldana móvel está a descer a 3 m/s, então o cilindro B tem velocidade de 5 m/s, para baixo.

Como o cilindro A acelera para baixo a 2 m/s^2, a aceleração da roldana móvel é também 2 m/s^2, mas para cima. E como a aceleração de C é 4 m/s^2, para cima, então a aceleração de C, relativa à roldana móvel é 2 m/s^2, para cima. A aceleração de B em relação à roldana móvel é então 2 m/s^2, para baixo, e a aceleração de B é 0.

Método 2. Outra forma de obter os mesmos resultados consiste em definir 4 variáveis y_A, y_B, y_C e y_R para medir as posições dos cilindros e da roldana móvel, tal como mostra a figura ao lado.



Como o cilindro A e a roldana móvel estão ligados por um fio, então

$$y_A + y_R = \text{constante}$$

e a ligação dos cilindros B e C com outro fio que passa pela roldana móvel implica:

$$(y_B - y_R) + (y_C - y_R) = \text{constante}$$

Derivando essas duas equações em ordem ao tempo, obtêm-se as relações para as velocidades:

$$\begin{cases} v_A + v_R = 0 \\ v_B + v_C - 2\,v_R = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad v_B = -2\,v_A - v_C$$

Como as distâncias y aumentam quando os objetos descem, então as velocidades para baixo são positivas e para cima são negativas. Assim sendo, as velocidades dadas no enunciado são $v_A = -3$ e $v_C = 1$ e a equação acima dá $v_B = 5$; ou seja, a velocidade do cilindro B é 5 m/s, para baixo.

Derivando novamente a relação entre as velocidades obtém-se a relação entre as acelerações:

$$a_B = -2\,a_A - a_C$$

e substituindo os valores dados, $a_A = 2$ e $a_C = -4$, obtém-se $a_B = 0$; ou seja, a aceleração do cilindro B é nula.

Problema 2. (*a*) **Método 1**. A energia potencial total do cilindro é a energia potencial de impulsão mais a energia potencial gravítica:

$$U = g\,\rho\,A\left(\frac{x^2}{2} - h\,x\right) + m\,g\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

e a força resultante e como não existem forças não conservativas, a força resultante sobre o cilindro é

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = g\,\rho\,A\,(h - x) - m\,g$$

e a equação de movimento obtém-se dividindo a força resultante pela massa

$$\ddot{x} = \frac{g\,\rho\,A}{m}\,(h - x) - g$$

Método 2. A equação de movimento também pode ser obtida aplicando a equação de Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

onde a energia cinética é a expressão $E_c = m\dot{x}^2/2$. Calculando as derivadas obtém-se:

$$m\ddot{x} + g\,\rho\,A\,(x - h) + m\,g = 0$$

que conduz à mesma equação de movimento já obtida.

As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = \frac{g\rho A}{m}(h - x) - g$$

(b) No ponto de equilíbrio,

$$\frac{g\rho A}{m}(h - x) - g = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{\mathrm{e}} = h - \frac{m}{\rho A}$$

e, substituindo os valores conhecidos (massas em gramas e distâncias em centímetros),

$$x_{\mathrm{e}} = 16 - \frac{144}{10} = 1.6\ \mathrm{cm}$$

(c) O sistema de equações de evolução é um sistema dinâmico linear e a matriz do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g\rho A}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

A soma dos valores próprios é nula ($\lambda_1 = -\lambda_2$) e o produto ($-\lambda_1^2$) é igual a $\dfrac{g\rho A}{m}$, que é positivo. Assim sendo, os dois valores próprios são:

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{g\rho A}{m}}$$

Conclui-se que o ponto de equilíbrio é um centro e as curvas de evolução são ciclos com frequência angular

$$\Omega = \sqrt{\frac{g\rho A}{m}}$$

O período de oscilação é (massas em gramas, distâncias em centímetros e tempos em segundos)

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g\rho A}} = 2\pi\sqrt{\frac{144}{980 \times 10}} = 0.762\ \mathrm{s}$$

Observe-se que o período não depende da altura h nem da forma geométrica da base do cilindro, apenas da sua área. Imagine, por exemplo, quais poderão ser os valores da massa e da área de um barco e faça uma estimativa do seu período de oscilação.

Perguntas

3. E

4. B

5. C

6. D

7. B

8. D

9. A

10. C

11. D

12. D

13. B

14. C

15. C

16. D

17. B