**Resolução do exame de 26 de junho de 2015** Regente: Jaime Villate

# Problemas

**Problema 1**. **Método 1**. Se $h_\text{A}$ e $h_\text{B}$ são as alturas dos dois cilindros, numa posição inicial, quando a roldana roda um ângulo $\theta$, no sentido anti-horário, as alturas dos cilindros são:

$$y_\text{A} = h_\text{A} - 0.05\,\theta \qquad y_\text{B} = h_\text{B} + 0.08\,\theta$$

Assim sendo, o sistema tem um único grau de liberdade, que pode ser o ângulo $\theta$. As expressões para as velocidades e acelerações dos cilindros são então:

$$v_\text{A} = -0.05\,\omega \qquad v_\text{B} = 0.08\,\omega$$
$$a_\text{A} = -0.05\,\alpha \qquad a_\text{B} = 0.08\,\alpha$$

onde $\omega = \dot{\theta}$ é a velocidade angular da roldana e $\alpha = \ddot{\theta}$ é a sua aceleração angular. A expressão para a energia cinética do sistema é:

$$E_\text{c} = \frac{0.036}{2}(-0.05\,\omega)^2 + \frac{0.024}{2}(0.08\,\omega)^2 + \frac{4.43\times 10^{-7}}{2}\,\omega^2 = 1.220215\times 10^{-4}\,\omega^2$$

E a energia potencial gravítica, ignorando termos constantes, é:

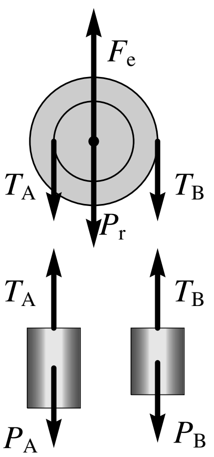
$$U = -0.036\times 9.8\times 0.05\,\theta + 0.024\times 9.8\times 0.08\,\theta = 1.176\times 10^{-3}\,\theta$$

Aplicando a equação de Lagrange, obtém-se a aceleração angular:

$$\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 2.44043\times 10^{-4}\,\alpha - 0 + 1.176\times 10^{-3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \alpha = -4.8188$$

O sinal negativo indica que a roldana acelera no sentido horário. Como tal, a aceleração do bloco A é para cima e a do bloco B é para baixo, e os seus valores absolutos são:

$$a_\text{A} = 0.05\times 4.8188 = 0.2409\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \qquad a_\text{B} = 0.08\times 4.8188 = 0.3855\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$




**Método 2**. A figura ao lado mostra os diagramas de corpo livre para a roldana e para cada um dos cilindros. Admitindo que a aceleração $a_\text{A}$ do cilindro A é para cima, então a aceleração $a_\text{B}$ do cilindro B é para baixo e a aceleração angular $\alpha$ da roldana é no sentido horário. As três equações de movimento são:

$$T_\text{A} - 0.036\times 9.8 = 0.036\,a_\text{A}$$
$$0.024\times 9.8 - T_\text{B} = 0.024\,a_\text{B}$$
$$0.08\,T_\text{B} - 0.05\,T_\text{A} = 4.43\times 10^{-7}\,\alpha$$

junto com as duas equações:

$$a_\text{A} = 0.05\,\alpha \qquad a_\text{B} = 0.08\,\alpha$$

tem-se um sistema de 5 equações lineares com 5 incógnitas, $T_\text{A}$, $T_\text{B}$, $\alpha$, $a_\text{A}$ e $a_\text{B}$. A solução desse sistema dá os mesmos valores já encontrados no método 1 para $a_\text{A}$ e $a_\text{B}$, com sinais positivos, que indica que o sentido arbitrado para as acelerações foi o correto.

**Problema 2**. Existem várias formas possíveis de resolver este problema; um método simples é o seguinte. Trata-se de um sistema linear com matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10+k & k \end{bmatrix}$$

com traço, $t$, e determinante, $d$;

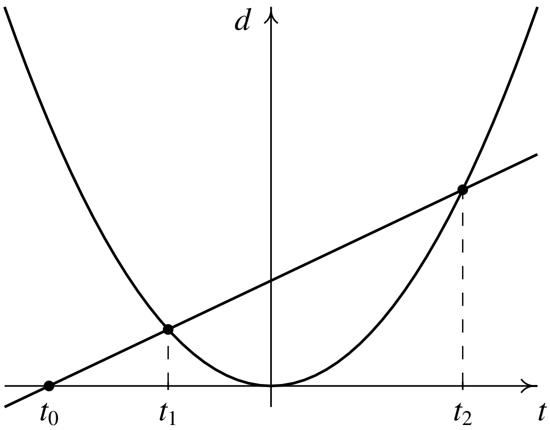
$$t = k \qquad d = k + 10$$

A relação entre o traço e o determinante é $d = t + 10$. Num plano em que o eixo das abcissas representa o traço $t$ e o eixo das ordenadas representa o determinante $d$, esta relação é uma reta com declive igual a 1, que corta o eixo das abcissas em $t_0 = -10$.

A curva que delimita a região dos focos da região dos nós é a parábola $d = t^2/4$, que corta a reta $d = t + 10$ nos dois pontos onde:

$$\frac{t^2}{2} - 2t - 20 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 2 \pm \sqrt{44} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 2 - 2\sqrt{11} \approx -4.633 \qquad t_2 = 2 + 2\sqrt{11} \approx 8.633$$

O gráfico seguinte mostra a reta e a parábola:




O ponto de equilíbrio é ponto de sela, se o traço for menor que $t_0$, nó atrativo, se o traço estiver entre $t_0$ e $t_1$, foco atrativo, se o traço estiver entre $t_1$ e 0, centro se o traço for nulo, foco repulsivo, se o traço estiver entre 0 e $t_2$ ou nó repulsivo, se o traço for maior que $t_2$. Tendo em conta que $k$ é igual ao traço, o resultado é então:

- Ponto de sela, se $k < -10$
- Nó atrativo, se $-10 < k \leq 2 - 2\sqrt{11}$
- Foco atrativo, se $2 - 2\sqrt{11} < k < 0$
- Centro, se $k = 0$
- Foco repulsivo, se $0 < k < 2 + 2\sqrt{11}$
- Nó repulsivo, se $k \geq 2 + 2\sqrt{11}$

Note-se que quando $k = -10$, o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, que não corresponde a nenhuma das categorias acima. Quando $k = 2 \pm 2\sqrt{11}$, o ponto é nó impróprio, que já foi incluído nas categorias acima.

## Perguntas

**3.** C **4.** D **5.** D **6.** D **7.** C **8.** D **9.** E **10.** D **11.** E **12.** D **13.** D **14.** E **15.** E **16.** A **17.** B