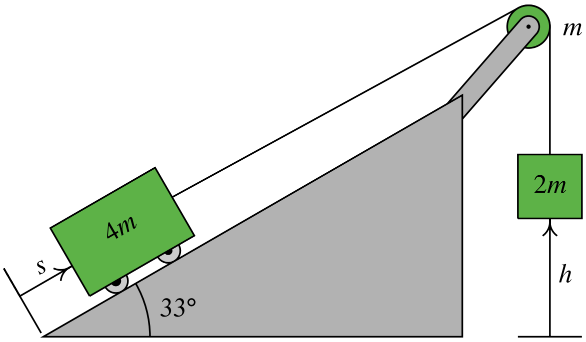
Resolução do exame de 21 de junho de 2016 Regente: Jaime Villate

Problema 1. Para descrever o movimento do sistema são necessárias três variáveis. Duas variáveis s e h, para determinar as posições do carrinho e do bloco, que podem ser definidas como mostra a figura seguinte, e um ângulo θ que determina a rotação da roldana.



Como o fio faz rodar a roldana sem deslizar nela, o ângulo que a roldana roda (no sentido dos ponteiros do relógio) está relacionado com a posição do carrinho: $\theta = s/R + \text{constante}$ e, como tal, a velocidade angular da roldana é:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

onde $v = \dot{s}$ é a velocidade do carrinho. O comprimento do fio é igual a

$$L = \text{constante} - s - h$$

e, como permanece constante, a velocidade do bloco é igual a menos a velocidade do carrinho:

$$\dot{h} = -v$$

Assim sendo, o sistema tem um único grau de liberdade, s, e uma única velocidade generalizada, v.

Resolução por mecânica de Lagrange. A expressão da energia cinética total dos três objetos é:

$$E_\text{c} = \frac{1}{2}(4m)\,\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(2m)\,\dot{h}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right)\omega^2 = 2mv^2 + mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{13}{4}mv^2$$

E a expressão da energia potencial gravítica (ignorando a da roldana que permanece constante) é:

$$U = 4mgs\,\sin(33°) + 2mgh = 4mgs\,\sin(33°) - 2mgs + \text{constante}$$

A equação de movimento obtém-se a partir da equação de Lagrange:

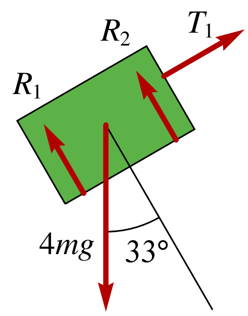
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{13}{2}ma + 4mg\,\sin(33°) - 2mg = 0$$

E a aceleração do carrinho é então,

$$a = \frac{4g}{13}\,(1 - 2\,\sin(33°)) = -0.2692\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

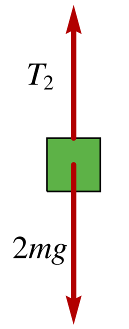
O sinal negativo indica que a aceleração é para baixo do plano inclinado (a velocidade do carrinho, v, é uma variável de estado que pode ser positiva ou negativa, ou seja, para cima ou para baixo).

Resolução por mecânica vetorial. A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do carrinho. A soma das componentes das forças normais ao plano deve ser nula e a soma das componentes das forças tangentes ao plano é igual a:



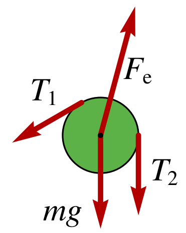
$$T_1 - 4\,m\,g\,\sin(33^\circ) = 4\,m\,a \quad\Longrightarrow\quad T_1 = 4\,m\,(a + g\,\sin(33^\circ)) \tag{1}$$

A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do bloco. Como na equação do carrinho admitiu-se que a aceleração a era para cima do plano, então a aceleração do bloco é a, para baixo, e a equação de movimento é:



$$2\,m\,g - T_2 = 2\,m\,a \quad\Longrightarrow\quad T_2 = 2\,m\,(g - a) \tag{2}$$

Na roldana atuam as tensões nos dois lados do fio, o seu peso e uma força de contato no eixo (diagrama ao lado). A soma dessas forças deve ser nula e a soma dos momentos, em relação ao eixo, é:



$$T_2\,R - T_1\,R = \left(\frac{m\,R^2}{2}\right)\alpha \quad\Longrightarrow\quad T_2 - T_1 = \frac{m}{2}a$$

Substituindo nesta expressão as equações (**??**) e (**??**), obtém-se a mesma expressão da aceleração obtida pelo método de mecânica de Lagrange.

Problema 2. Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$y^3 - 4\,x = 0 \qquad\qquad y^3 - y - 3\,x = 0$$

Subtraindo as duas equações obtém-se $y = x$, ou seja,

$$x^3 - 4\,x = x\left(x^2 - 4\right) = x\,(x+2)\,(x-2) = 0$$

Como tal, há três pontos de equilíbrio $(x,\,y)$:

$$\mathrm{P}_1 = (0,0) \qquad \mathrm{P}_2 = (2,2) \qquad \mathrm{P}_3 = (-2,-2)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -4 & 3\,y^2 \\ -3 & 3\,y^2 - 1 \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

que tem valores próprios -4 e -1 e, como tal, P_1 é um nó atrativo.

Nos pontos P_2 e P_3 obtém-se a mesma matriz para a aproximação linear,

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$$

Que tem determinante igual a -8. Conclui-se então que P_2 e P_3 são ambos pontos de sela.

(a) O sistema é autónomo, porque as expressões das equações de evolução não dependem explicitamente do tempo. (b) Não é um sistema linear, porque a matriz jacobiana não é constante. (c) Não é sistema conservativo, porque o traço da matriz jacobiana, igual a $3y^2 - 5$, não é nulo. (d) Não pode ser sistema predador presa, porque não é um sistema de duas espécias, já que $y^3 - 4x$ não se aproxima de zero quando x se aproxima de zero e $y^3 - y - 3x$ não se aproxima de zero quando y se aproxima de zero.

Perguntas

3. E

4. D

5. D

6. D

7. B

8. C

9. E

10. A

11. E

12. C

13. C

14. D

15. C

16. E

17. D

Critérios de avaliação

Problema 1

Mecânica de Lagrange.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações ________ 0.8
- Expressão para a energia cinética do sistema ________ 0.8
- Expressão para a energia potencial do sistema ________ 0.8
- Aplicação da equação de Lagrange para obter a equação de movimento ________ 0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas ________ 0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho ________ 0.4

Mecânica vetorial.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações ________ 0.8
- Diagrama de corpo libre e equação de movimento do carrinho ________ 0.8
- Diagrama de corpo libre e equação de movimento do bloco ________ 0.8
- Diagrama de corpo libre e equação de movimento da roldana ________ 0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas ________ 0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho ________ 0.4

Problema 2

- Determinação dos 3 pontos de equilíbrio ________ 0.4
- Obtenção da matriz jacobiana ________ 0.4
- Caraterização do ponto de equilíbrio na origem ________ 0.4
- Caraterização dos dois pontos de equilíbrio fora da origem ________ 0.4
- Alínea *a* ________ 0.6
- Alínea *b* ________ 0.6
- Alínea *c* ________ 0.6
- Alínea *d* ________ 0.6