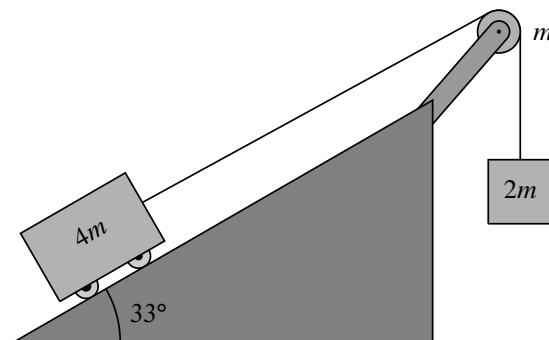


Nome: \_\_\_\_\_

**Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador.** O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

1. (4 valores) Um bloco de massa  $2m$  está pendurado por um fio vertical que está ligado no outro extremo a um carrinho de massa  $4m$ , passando por uma roldana de massa  $m$ , onde  $m = 100 \text{ g}$ . O carrinho encontra-se na superfície de um plano inclinado  $33^\circ$  em relação à horizontal e a roldana é um disco homogêneo de raio  $R$  (momento de inércia  $I_{\text{cm}} = m R^2/2$ ). A massa do fio e das rodas do carrinho são desprezáveis. O fio faz rodar a roldana, sem deslizar sobre ela. Determine o valor da aceleração do carrinho, ignorando as forças não conservativas (resistência do ar e atrito nos eixos das rodas e da roldana) e o sentido dessa aceleração (para cima ou para baixo do plano inclinado?).



2. (4 valores) Determine a posição dos pontos de equilíbrio e o tipo de cada um desses pontos, no sistema dinâmico com as seguintes equações de evolução:

$$\dot{x} = y^3 - 4x \quad \dot{y} = y^3 - y - 3x$$

Diga se o sistema corresponde ou não às seguintes categorias de sistemas: (a) autónomo, (b) linear, (c) conservativo, (d) pedador presa (todas as suas respostas devem ser argumentadas corretamente).

**PERGUNTAS.** Respostas certas, 0.8 valores, erradas,  $-0.2$ , em branco, 0.

3. O sistema de Lotka-Volterra consegue explicar muito bem a evolução de um sistema predador presa mas tem uma grande desvantagem que outros sistemas tentam corrigir. Qual é essa desvantagem?
- (A) Cada uma das populações pode aumentar indefinidamente.  
(B) Nenhuma das duas populações atinge nunca um valor constante.  
(C) Nenhuma das duas populações pode chegar a extinguir-se totalmente.  
(D) Cada uma das populações oscila indefinidamente.  
(E) Cada uma das populações pode oscilar entre um valor muito baixo e um valor muito elevado.

Resposta:

4. Determine o valor da componente normal da aceleração dum ponto, no instante em que o seu vetor velocidade é  $3\hat{i} + 6\hat{j}$  e o vetor aceleração é  $-5\hat{i} + 6\hat{j}$  (unidades SI).

- (A)  $7.6 \text{ m/s}^2$  (C)  $21.0 \text{ m/s}^2$  (E)  $48.0 \text{ m/s}^2$   
(B)  $3.13 \text{ m/s}^2$  (D)  $7.16 \text{ m/s}^2$

Resposta:

5. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado  $(x, y)$  foram transformadas para coordenadas polares  $(r, \theta)$ , obtendo-se as equações:  $\dot{\theta} = -2$   $\dot{r} = 3r - r^2$ . Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

- (A) atrativo com  $r = 2$  (D) atrativo com  $r = 3$   
(B) repulsivo com  $r = 2$  (E) repulsivo com  $r = 3$   
(C) atrativo com  $r = 0$

Resposta:

6. Um corpo de  $18 \text{ kg}$  desloca-se ao longo do eixo dos  $x$ . A força resultante sobre o corpo é conservativa, com energia potencial dada pela expressão  $3 + 5x^2$  (SI). Se o corpo passa pela origem com velocidade  $9\hat{i}$ , com que energia cinética chegará ao ponto  $x = 7 \text{ m}$ ?

- (A)  $2420.0 \text{ J}$  (C)  $145.2 \text{ J}$  (E)  $4114.0 \text{ J}$   
(B)  $1210.0 \text{ J}$  (D)  $484.0 \text{ J}$

Resposta:

7. Aplica-se uma força  $5\hat{i} + 4\hat{j}$  num ponto com vetor posição  $4\hat{i} - 1\hat{j}$  (unidades SI). Determine o módulo do momento dessa força, em relação à origem.

- (A)  $33 \text{ N}\cdot\text{m}$  (C)  $16 \text{ N}\cdot\text{m}$  (E)  $11 \text{ N}\cdot\text{m}$   
(B)  $21 \text{ N}\cdot\text{m}$  (D)  $24 \text{ N}\cdot\text{m}$

Resposta:

8. A matriz dum sistema dinâmico linear é (unidades SI):

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Como é a evolução das variáveis de estado em função do tempo?

- (A) Oscilam com período  $\pi$  e amplitude decrescente.  
(B) Oscilam com período igual a  $\pi$  e amplitude constante.  
(C) Oscilam com período  $\pi/2$  e amplitude constante.  
(D) Oscilam com período  $\pi/2$  e amplitude decrescente.  
(E) Oscilam com período  $\pi/2$  e amplitude crescente.

Resposta:

9. Uma partícula desloca-se numa trajetória circular sob a ação duma força tangencial resultante  $F_t = 3 \cos(\theta)$ , onde  $\theta$  é o ângulo medido ao longo do círculo. Qual dos valores de  $\theta$  na lista seguinte corresponde a um ponto de equilíbrio instável?

(A)  $\pi/2$  (C) 0 (E)  $3\pi/2$   
(B)  $2\pi$  (D)  $\pi$

Resposta:

10. A projeção  $x$  da aceleração duma partícula aumenta em função do tempo, de acordo com a expressão  $a_x = 3t$  (unidades SI). No instante  $t = 0$  a projeção  $x$  da velocidade é nula e a componente da posição é  $x = 4$  m. Determine a projeção  $x$  da posição em  $t = 6$  s.

(A) 112.0 m (C) 56.0 m (E) 336.0 m  
(B) 694.4 m (D) 280.0 m

Resposta:

11. Uma partícula de massa  $m$  desloca-se ao longo da curva  $y = x^2/2$ , no plano horizontal  $xy$ . Assim sendo, basta uma única variável generalizada para descrever o movimento; escolhendo a variável  $x$ , a expressão da energia cinética é  $E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} (1 + x^2)$ . Encontre a expressão para a força generalizada  $Q_x$  responsável pelo movimento da partícula.

(A)  $m\ddot{x}(1 + x^2) + 2mx\dot{x}$   
(B)  $\frac{m\ddot{x}}{2}(1 + x^2) + 1mx\dot{x}^2$   
(C)  $\frac{m\ddot{x}}{2}(1 + x^2) - 2mx^3\dot{x}^2$   
(D)  $\frac{m\ddot{x}}{2}(1 + x^2) - 2mx\dot{x}$   
(E)  $m\ddot{x}(1 + x^2) + 1mx\dot{x}^2$

Resposta:

12. O vetor velocidade do objeto 1, em função do tempo, é:  $\vec{v}_1 = (1 - 6t)\hat{i} + 8t\hat{j}$  (unidades SI) e o vetor velocidade do objeto 2, no mesmo referencial, é:  $\vec{v}_2 = 3t\hat{i} + (1 - 5t)\hat{j}$ . Determine o vetor aceleração do objeto 1 em relação ao objeto 2.

(A)  $3\hat{i} + 3\hat{j}$  (D)  $9\hat{i} + 3\hat{j}$   
(B)  $9\hat{i} - 3\hat{j}$  (E)  $-3\hat{i} + 13\hat{j}$   
(C)  $-9\hat{i} + 13\hat{j}$

Resposta:

13. Se  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ , qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies com competição?

(A)  $\dot{x} = x^2 + xy$   $\dot{y} = y^2 + xy$   
(B)  $\dot{x} = y^2 - xy$   $\dot{y} = x^2 - xy$   
(C)  $\dot{x} = x^2 - xy$   $\dot{y} = y^2 - xy$   
(D)  $\dot{x} = xy - x^2$   $\dot{y} = y^2 - x^2$   
(E)  $\dot{x} = y^2 - xy$   $\dot{y} = x^2 + xy$

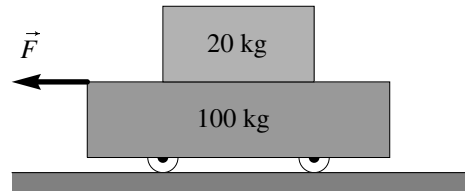
Resposta:

14. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é:  $2t^2\hat{i} + 2t^3\hat{j}$  (unidades SI). Encontre a expressão para o módulo da aceleração.

(A)  $6t^2$  (D)  $\sqrt{36t^4 + 16t^2}$   
(B)  $4t$  (E)  $6t^2 + 4t$   
(C)  $\sqrt{6t^2 + 4t}$

Resposta:

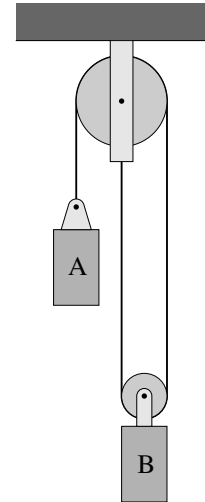
15. A força  $\vec{F}$ , com módulo de 54 N, faz acelerar os dois blocos na figura, sobre uma mesa horizontal, sem que o bloco de cima deslize em relação ao outro bloco. As forças de atrito nas rodas podem ser desprezadas. Calcule o módulo da força de atrito entre os dois blocos.



(A) 8 N (C) 9 N (E) 7 N  
(B) 5 N (D) 6 N

Resposta:

16. Na figura, a roldana fixa tem raio de 6 cm, a roldana móvel tem raio de 3 cm e o fio faz rodar as roldanas sem deslizar sobre elas. No instante em que o bloco A desce, com velocidade de valor 18 cm/s, qual o valor da velocidade angular da roldana móvel?



(A) 12 rad/s (C) 6 rad/s (E) 3 rad/s  
(B) 18 rad/s (D) 9 rad/s

Resposta:

17. A equação diferencial:

$$\ddot{x} - x^2 + x + 6 = 0$$

é equivalente a um sistema dinâmico com espaço de fase  $(x, \dot{x})$ . Qual dos pontos na lista é ponto de equilíbrio desse sistema?

(A)  $(-3, 0)$  (C)  $(1, 0)$  (E)  $(0, 0)$   
(B)  $(-1, 0)$  (D)  $(3, 0)$

Resposta:

Que tem determinante igual a  $-8$ . Conclui-se então que  $P_2$  e  $P_3$  são ambos pontos de sela.

(a) O sistema é autónomo, porque as expressões das equações de evolução não dependem explicitamente do tempo. (b) Não é um sistema linear, porque a matriz jacobiana não é constante. (c) Não é sistema conservativo, porque o traço da matriz jacobiana, igual a  $3y^2 - 5$ , não é nulo. (d) Não pode ser sistema predador presa, porque não é um sistema de duas espécies, já que  $y^3 - 4x$  não se aproxima de zero quando  $x$  se aproxima de zero e  $y^3 - y - 3x$  não se aproxima de zero quando  $y$  se aproxima de zero.

## Perguntas

3. E	6. D	9. E	12. C	15. C
4. D	7. B	10. A	13. C	16. E
5. D	8. C	11. E	14. D	17. D

# Critérios de avaliação

## Problema 1

Mecânica de Lagrange.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações .....0.8
- Expressão para a energia cinética do sistema .....0.8
- Expressão para a energia potencial do sistema .....0.8
- Aplicação da equação de Lagrange para obter a equação de movimento .....0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas .....0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho .....0.4

Mecânica vetorial.

- Determinação do grau de liberdade e relações entre as velocidades e acelerações .....0.8
- Diagrama de corpo livre e equação de movimento do carrinho .....0.8
- Diagrama de corpo livre e equação de movimento do bloco .....0.8
- Diagrama de corpo livre e equação de movimento da roldana .....0.8
- Valor da aceleração do carrinho, com unidades corretas .....0.4
- Indicação do sentido da aceleração do carrinho .....0.4

## Problema 2

- Determinação dos 3 pontos de equilíbrio .....0.4
- Obtenção da matriz jacobiana .....0.4
- Caracterização do ponto de equilíbrio na origem .....0.4
- Caracterização dos dois pontos de equilíbrio fora da origem .....0.4
- Alínea *a* .....0.6
- Alínea *b* .....0.6
- Alínea *c* .....0.6
- Alínea *d* .....0.6