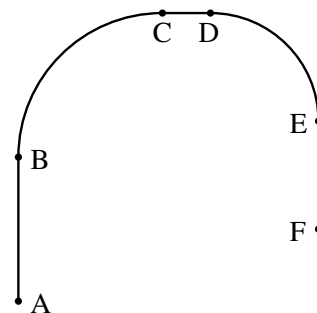


Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

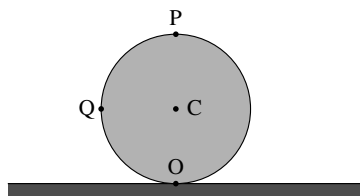
1. (4 valores) Uma partícula segue a trajetória que mostra a figura. A partícula parte do repouso em A, acelerando com aceleração constante até o ponto B; desde B até E mantém uma velocidade constante de 10 m/s e a partir de E começa a abrandar, com aceleração constante, até parar no ponto F. A distância AB é 60 cm, CD é 20 cm e EF é 45 cm; o raio do arco BC é 60 cm e o raio do arco DE é 45 cm. Calcule: (a) o módulo da aceleração da partícula em cada um dos trajetos AB, BC, CD, DE e EF; (b) a distância total percorrida e a velocidade média desde A até F.



2. (4 valores). Uma partícula com massa $m = 2$ (unidades SI), desloca-se sobre uma calha parabólica vertical. A equação da calha é $y = x^2$, onde x é medida na horizontal e y na vertical (ambas em unidades SI). Assim sendo, o movimento da partícula tem apenas um grau de liberdade. (a) Usando como variável generalizada a coordenada x , escreva a equação da energia cinética em função de x . (b) escreva a equação da energia potencial gravítica, em função de x (admita que, em unidades SI, $g = 9.8$). (c) Admita que sobre a partícula não atua nenhuma força não conservativa. Usando a equação de Lagrange, determine a equação de movimento. (d) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema, no espaço de fase, e diga que tipo de pontos de equilíbrio são (justifique a sua resposta).

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. A roda na figura tem 8 cm de raio e roda sem deslizar sobre uma superfície plana horizontal. No instante representado na figura, a velocidade do ponto de contacto O é nula e o módulo da velocidade do ponto P é 60 cm/s. Determine o módulo da velocidade do ponto Q, que está à mesma altura do centro C.



- (A) 56.6 cm/s (C) 14.1 cm/s (E) 42.4 cm/s
(B) 21.2 cm/s (D) 28.3 cm/s

Resposta:

4. O vetor velocidade de uma partícula, em função do tempo, é: $t^3 \vec{e}_x + 0.3t^2 \vec{e}_y$ (unidades SI). Em $t = 0$ a partícula parte do ponto $y = -9$ no eixo dos y . Calcule o tempo que demora até passar pelo eixo dos x .

- (A) 5.48 s (C) 3.91 s (E) 4.48 s
(B) 3.11 s (D) 7.75 s

Resposta:

5. A expressão da energia cinética de um sistema conservativo é $\frac{1}{2}(\dot{s}^2 + 2s^2)$, onde s é a posição na trajetória, e a expressão da energia potencial total é $-4s$. O sistema tem um único ponto de equilíbrio; determine o valor de s nesse ponto de equilíbrio.

- (A) -1 (C) 1 (E) 2
(B) -2 (D) 3

Resposta:

6. A velocidade de um ponto é dada pela expressão $2s^3$ em que s é a posição na trajetória. Determine a expressão para a aceleração segundo a trajetória, a_t , em função de s .

- (A) $\frac{2s^3}{t}$ (B) $2s^2$ (D) $12s^5$
(C) $2s^4$ (E) $6s^2$

Resposta:

7. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem uma curva de evolução com conjunto limite positivo num ponto P. Designando os tipos de pontos de equilíbrio assim:

1. foco atrativo. 4. nó repulsivo.
2. foco repulsivo. 5. centro.
3. nó atrativo.

Que tipo de ponto de equilíbrio pode ser o ponto P?

- (A) 2 ou 4 (C) 5 (E) 1 ou 3
(B) 1 ou 2 (D) 3 ou 4

Resposta:

8. Qual das seguintes equações poderia ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(A) $\dot{y} = x + xy^2$ (D) $\dot{y} = 2y^2 - 3y$
 (B) $\dot{y} = -5xy + 2y$ (E) $\dot{y} = 2y - 5y^2$
 (C) $\dot{y} = 6y - y^2$

Resposta: ☐

9. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano xy . Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 2r^2 + r$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(A) foco atrativo (D) ponto de sela
 (B) nó repulsivo (E) foco repulsivo
 (C) nó atrativo

Resposta: ☐

10. Lança-se um projétil desde uma janela a 5.6 m de altura, com velocidade de 14 m/s, inclinada 30° por cima da horizontal. Desprezando a resistência do ar, calcule a altura máxima atingida pelo projétil.

(A) 8.1 m (C) 13.1 m (E) 6.9 m
 (B) 10.6 m (D) 15.6 m

Resposta: ☐

11. O momento de inércia de um disco de 11 cm de raio é $5.2 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Determine o valor da força tangencial que deve ser aplicada na periferia do disco, para produzir uma aceleração angular de -6 rad/s^2 .

(A) 0.57 N (C) 0.19 N (E) 0.28 N
 (B) 1.13 N (D) 0.11 N

Resposta: ☐

12. Um bloco de massa 4 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado, partindo do ponto A com valor da velocidade igual a 7 m/s e parando completamente no ponto B. As alturas dos pontos A e B, medidas na vertical desde a base horizontal do plano, são: $h_B = 10 \text{ cm}$ e $h_A = 60 \text{ cm}$. Calcule o trabalho realizado pela força de atrito, desde A até B.

(A) -121.5 J (C) -129.4 J (E) -133.3 J
 (B) -125.4 J (D) -117.6 J

Resposta: ☐

13. O sistema dinâmico não linear:
 $\dot{x} = xy - 4x + y - 4$ $\dot{y} = xy + x - 3y - 3$
 tem um ponto de equilíbrio em $x = 3$, $y = 4$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

(A) $\dot{x} = 4y$ $\dot{y} = 5x$ (D) $\dot{x} = -4y$ $\dot{y} = 5x$
 (B) $\dot{x} = -5y$ $\dot{y} = -4x$ (E) $\dot{x} = 5y$ $\dot{y} = 4x$
 (C) $\dot{x} = 5y$ $\dot{y} = -4x$

Resposta: ☐

14. A força tangencial resultante sobre um objeto é $-s^2 + 2s + 3$, onde s é a posição na trajetória. Sabendo que o retrato de fase do sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assintoticamente do ponto $(a, 0)$, determine o valor de a .

(A) 2 (C) 3 (E) -2
 (B) -1 (D) 1

Resposta: ☐

15. Uma menina atira uma bola verticalmente para cima; a bola alcança uma altura máxima de 3 m e a seguir cai de volta até à mão da menina. Durante o percurso, a resistência do ar sobre a bola pode ser ignorada. Qual das seguintes afirmações é correta?

(A) A aceleração é para cima, enquanto a bola sobe, e para baixo na descida.
 (B) A aceleração da bola aponta sempre no mesmo sentido.
 (C) Na descida, a velocidade da bola aumenta devido a que a sua aceleração aumenta.
 (D) A bola pára a 3 m de altura porque a aceleração é menor quanto maior for a altura
 (E) A aceleração da bola é nula quando a altura é 3 m.

Resposta: ☐

16. De acordo com o critério de Bendixson, qual dos seguintes sistemas dinâmicos não pode ter nenhuma órbita fechada (ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica)?

(A) $\dot{x} = 3x + y^2$ $\dot{y} = x^2 + y^2$
 (B) $\dot{x} = 3x^2 + y^2$ $\dot{y} = x^2 - y^2$
 (C) $\dot{x} = 3x^2 + y^2$ $\dot{y} = y - yx^2$
 (D) $\dot{x} = 3x + y^2$ $\dot{y} = x^2y - y$
 (E) $\dot{x} = 3x^2 + y^2$ $\dot{y} = x^2y - y$

Resposta: ☐

17. As equações de evolução de um sistema linear são:

$$\dot{x} = -2x - y \quad \dot{y} = 2x$$

Que tipo de ponto de equilíbrio tem esse sistema?

(A) centro. (D) foco atrativo.
 (B) foco repulsivo. (E) nó repulsivo.
 (C) ponto de sela.

Resposta: ☐

(b) Arbitrando energia potencial gravítica nula em $y = 0$, A energia potencial gravítica da partícula é:

$$U_g = mgy = 19.6x^2$$

(c) A equação de Lagrange é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial U_g}{\partial x} = \ddot{x} (8x^2 + 2) + 16\dot{x}^2 x - 8\dot{x}^2 x + 39.2x = 0$$

e a equação de movimento:

$$\ddot{x} = -\frac{x(4\dot{x}^2 + 19.6)}{4x^2 + 1}$$

(d) As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = -\frac{x(4\dot{x}^2 + 19.6)}{4x^2 + 1}$$

Os pontos de equilíbrio são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} v = 0 \\ -\frac{x(4v^2 + 19.6)}{4x^2 + 1} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} v = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

A matriz jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{(16v^2 + 78.4)x^2 - 4v^2 - 19.6}{(4x^2 + 1)^2} & -\frac{8xv}{4x^2 + 1} \end{bmatrix}$$

e no ponto de equilíbrio (0, 0) é igual a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -19.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a soma dos valores próprios é nula e o produto é positivo, os dois valores próprios são imaginários e o ponto de equilíbrio é um centro. (Também é possível traçar o retrato de fase para mostrar que a origem é um centro).

Perguntas

3. E	6. D	9. E	12. D	15. B
4. E	7. E	10. A	13. A	16. D
5. B	8. B	11. E	14. B	17. D