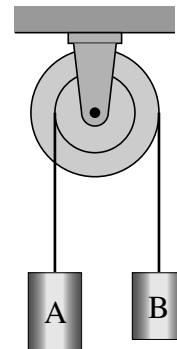


Nome: \_\_\_\_\_

**Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador.** O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

1. (4 valores) Na figura, a massa do cilindro A é 36 gramas, a massa do cilindro B é 24 gramas e o momento de inércia da roldana dupla é  $4.43 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . A roldana está formada por dois discos, de raios 5 cm e 8 cm, colados um ao outro. Cada cilindro está ligado a um fio com o extremo oposto ligado à roldana, de forma que o fio enrola-se ou desenrola-se, sem deslizar sobre a roldana, quando esta roda. Desprezando o atrito no eixo da roldana e a resistência do ar, determine os valores das acelerações de cada cilindro e diga se são para cima ou para baixo.



2. (4 valores) No sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= 10x + k(x + y)\end{aligned}$$

onde  $k$  é um parâmetro real que pode ter qualquer valor entre  $-\infty$  e  $+\infty$ , determine para quais possíveis valores de  $k$  o ponto  $(x, y) = (0, 0)$  é nó atrativo ou repulsivo, foco atrativo ou repulsivo, centro ou ponto de sela.

**PERGUNTAS.** Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Um cilindro de massa  $m$  e raio  $R$  roda sobre uma superfície plana, sem derrapar. Sabendo que o momento de inércia, em relação ao centro de massa, de um cilindro é dado pela expressão  $\frac{1}{2} m R^2$ , determine a expressão para a energia cinética, em função da velocidade  $v$  do centro de massa.
6. Um homem empurra um bloco de madeira sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco está pousado um livro. Considerando as forças seguintes:

- (A)  $\frac{1}{2} m v^2$       (C)  $\frac{3}{4} m v^2$       (E)  $m v^2$   
(B)  $\frac{1}{4} m v^2$       (D)  $\frac{3}{2} m v^2$

Resposta: ☐

1. Força de contato entre as mãos do homem e o bloco.  
2. Peso do livro.  
3. Força de atrito produzida pela superfície horizontal.

Quais dessas forças atuam sobre o bloco de madeira?

- (A) 2 e 3      (C) 1      (E) 1, 2 e 3  
(B) 1 e 2      (D) 1 e 3

Resposta: ☐

4. Um bloco de massa 4 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado, partindo do ponto A com valor da velocidade igual a 3 m/s e parando completamente no ponto B. As alturas dos pontos A e B, medidas na vertical desde a base horizontal do plano, são:  $h_B = 10 \text{ cm}$  e  $h_A = 100 \text{ cm}$ . Calcule o trabalho realizado pela força de atrito, desde A até B.

- (A) -41.5 J      (C) -37.6 J      (E) -45.4 J  
(B) -49.4 J      (D) -53.3 J

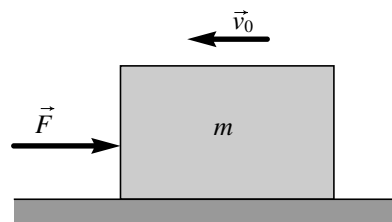
Resposta: ☐

5. O vetor posição de um ponto, em função do tempo, é dado pela expressão:  $2t^2 \hat{i} + (t^4 + 2) \hat{j}$  (unidades SI). Calcule o ângulo entre os vetores velocidade e posição, no instante  $t = 1$ .

- (A)  $23.8^\circ$       (C)  $4.5^\circ$       (E)  $18.1^\circ$   
(B)  $14.7^\circ$       (D)  $11.3^\circ$

Resposta: ☐

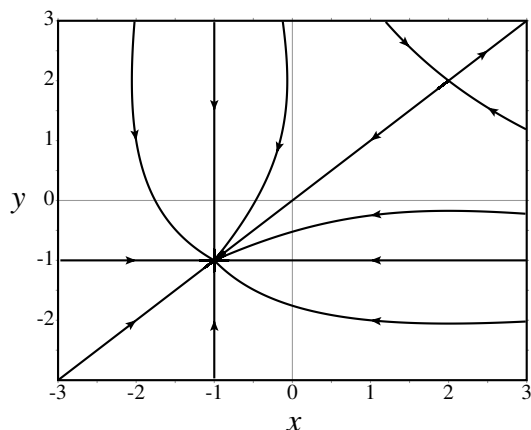
7. O bloco na figura, com massa igual a 7 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa  $\vec{F}$ , horizontal e constante, com módulo igual a 42 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.



- (A)  $24.85 \text{ m/s}^2$       (C)  $8.45 \text{ m/s}^2$       (E)  $6.0 \text{ m/s}^2$   
(B)  $59.15 \text{ m/s}^2$       (D)  $3.55 \text{ m/s}^2$

Resposta: ☐

8. A figura mostra o retrato de fase de um sistema não linear com dois pontos de equilíbrio, em  $(x, y) = (-1, -1)$  e  $(x, y) = (2, 2)$ . Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança do ponto  $(-1, -1)$ ?



- (A)  $\dot{x} = -3y$   $\dot{y} = 3x$  (D)  $\dot{x} = -3x$   $\dot{y} = -3y$   
 (B)  $\dot{x} = 3y$   $\dot{y} = -3y$  (E)  $\dot{x} = 3x$   $\dot{y} = 3y$   
 (C)  $\dot{x} = 3x$   $\dot{y} = -3y$

Resposta:

9. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano  $xy$ . Em coordenadas polares, as equações de evolução são  $\dot{\theta} = -3$ ,  $\dot{r} = r^3 + r^2 - 2r$ . Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

- (A) nó repulsivo (D) foco repulsivo  
 (B) nó atrativo (E) foco atrativo  
 (C) ponto de sela

Resposta:

10. A força tangencial resultante sobre um corpo é  $F_t = s(s+1)(s+2)(s-1)(s-2)$ . Quantos pontos de equilíbrio instável tem este sistema mecânico?

- (A) 5 (C) 2 (E) 1  
 (B) 4 (D) 3

Resposta:

11. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano  $xy$ . Em coordenadas polares, as equações de evolução são  $\dot{\theta} = -3$ ,  $\dot{r} = r^3 + 2r^2 + r$ . Quantos ciclos limite tem o sistema?

- (A) 4 (C) 3 (E) 0  
 (B) 2 (D) 1

Resposta:

12. As equações de evolução de um sistema linear são:

$$\dot{x} = -x - 4y \quad \dot{y} = 4x - y$$

Como variam  $x$  e  $y$  em função do tempo?

- (A) Oscilam com período  $\pi$  e amplitude crescente.

- (B) Oscilam com período igual a  $\pi$  e amplitude constante.  
 (C) Oscilam com período  $\pi$  e amplitude decrescente.  
 (D) Oscilam com período  $\pi/2$  e amplitude decrescente.  
 (E) Oscilam com período  $\pi/2$  e amplitude crescente.

Resposta:

13. A posição de um ponto ao longo de um percurso, em função do tempo, é dada pela expressão  $s = 30t - 5t^2$  (SI). Determine a distância percorrida pelo ponto entre  $t = 0$  e  $t = 4.5$  s.

- (A) 45 m (C) 11.25 m (E) 14.25 m  
 (B) 78.75 m (D) 56.25 m

Resposta:

14. Calcule o momento de inércia de uma esfera com raio de 2 centímetros e massa 101 gramas, que roda à volta de um eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia de uma esfera de raio  $R$  e massa  $m$  à volta do eixo que passa pelo centro é  $2mR^2/5$ .

- (A)  $1.62 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  (D)  $8.08 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$   
 (B)  $3.23 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  (E)  $5.66 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$   
 (C)  $2.89 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

Resposta:

15. Se  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ , qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies, com competição?

- (A)  $\dot{x} = x^2 + xy$   $\dot{y} = y^2 + xy$   
 (B)  $\dot{x} = xy - x^2$   $\dot{y} = y^2 - x^2$   
 (C)  $\dot{x} = y^2 - xy$   $\dot{y} = x^2 - xy$   
 (D)  $\dot{x} = y^2 - xy$   $\dot{y} = x^2 + xy$   
 (E)  $\dot{x} = x^2 - xy$   $\dot{y} = y^2 - xy$

Resposta:

16. Calcule o raio de curvatura da trajetória dum ponto, num instante em que o vetor velocidade é  $5\hat{i} + 7\hat{j}$  e o vetor aceleração é  $-2\hat{i} + 5\hat{j}$  (unidades SI).

- (A) 16.32 m (C) 25.46 m (E) 2.96 m  
 (B) 1.9 m (D) 14.15 m

Resposta:

17. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 1.8 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

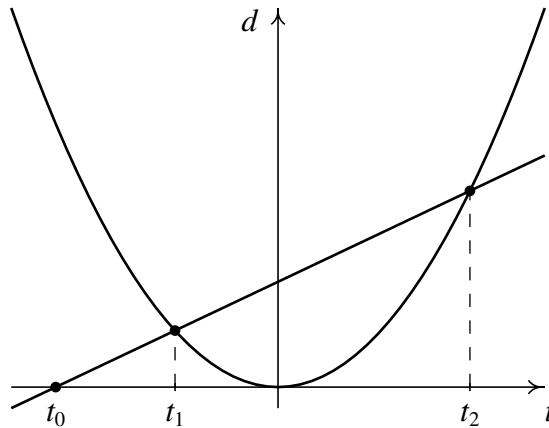
- (A) 279 rad/s<sup>2</sup> (C) 838 rad/s<sup>2</sup> (E) 182 rad/s<sup>2</sup>  
 (B) 419 rad/s<sup>2</sup> (D) 209 rad/s<sup>2</sup>

Resposta:

A curva que delimita a região dos focos da região dos nós é a parábola  $d = t^2/4$ , que corta a reta  $d = t + 10$  nos dois pontos onde:

$$\frac{t^2}{2} - 2t - 20 = 0 \implies t = 2 \pm \sqrt{44} \implies t_1 = 2 - 2\sqrt{11} \approx -4.633 \quad t_2 = 2 + 2\sqrt{11} \approx 8.633$$

O gráfico seguinte mostra a reta e a parábola:



O ponto de equilíbrio é ponto de sela, se o traço for menor que  $t_0$ , nó atrativo, se o traço estiver entre  $t_0$  e  $t_1$ , foco atrativo, se o traço estiver entre  $t_1$  e 0, centro se o traço for nulo, foco repulsivo, se o traço estiver entre 0 e  $t_2$  ou nó repulsivo, se o traço for maior que  $t_2$ . Tendo em conta que  $k$  é igual ao traço, o resultado é então:

- Ponto de sela, se  $k < -10$
- Nó atrativo, se  $-10 < k \leq 2 - 2\sqrt{11}$
- Foco atrativo, se  $2 - 2\sqrt{11} < k < 0$
- Centro, se  $k = 0$
- Foco repulsivo, se  $0 < k < 2 + 2\sqrt{11}$
- Nó repulsivo, se  $k \geq 2 + 2\sqrt{11}$

Note-se que quando  $k = -10$ , o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, que não corresponde a nenhuma das categorias acima. Quando  $k = 2 \pm 2\sqrt{11}$ , o ponto é nó impróprio, que já foi incluído nas categorias acima.

## Perguntas

- |      |      |       |       |       |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. C | 6. D | 9. E  | 12. D | 15. E |
| 4. D | 7. C | 10. D | 13. D | 16. A |
| 5. D | 8. D | 11. E | 14. E | 17. B |