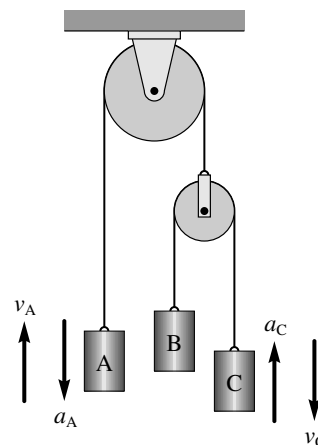


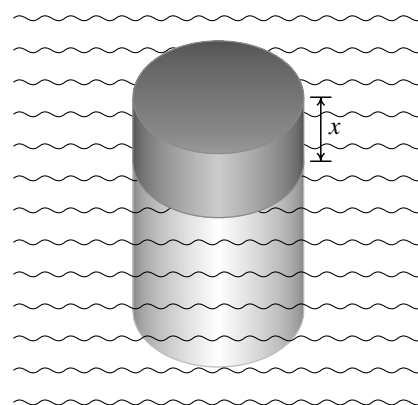
Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

1. (4 valores) Três cilindros A, B e C foram pendurados no sistema de duas roldanas que mostra a figura. Num instante, a velocidade do bloco A é $v_A = 3 \text{ m/s}$, para cima, e a sua aceleração é $a_A = 2 \text{ m/s}^2$, para baixo; no mesmo instante, a velocidade e aceleração do bloco C são: $v_C = 1 \text{ m/s}$, para baixo, $a_C = 4 \text{ m/s}^2$, para cima. Determine a velocidade e aceleração do bloco B, no mesmo instante, indicando se são para cima ou para baixo.



2. (4 valores). Um cilindro com base circular de área $A = 10 \text{ cm}^2$, altura $h = 16 \text{ cm}$ e massa $m = 144 \text{ g}$, flutua num recipiente com água, ficando em equilíbrio estável na posição que mostra a figura, com uma parte x da sua altura por fora da água. Se o cilindro é empurrado para baixo, oscila com x a variar à volta do valor de equilíbrio. A força de impulsão da água é vertical, aponta para cima e (se $0 \leq x \leq h$) é uma força conservativa com energia potencial $U_i = g \rho A \left(\frac{x^2}{2} - h x \right)$, onde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ é a aceleração da gravidade e $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ é a massa volúmica da água. Para determinar a posição de equilíbrio e o período das oscilações, ignore as forças dissipativas e use o seguinte procedimento: (a) Determine a equação de movimento e escreva as equações de evolução. (b) Encontre o valor de x no ponto de equilíbrio. (c) Determine a matriz do sistema, mostre que o ponto de equilíbrio é um centro e calcule o período de oscilação.



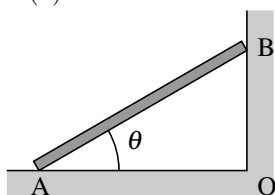
PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Um condutor viajou a 60 km/h durante 45 minutos, parou durante 15 minutos e continuou a 40 km/h durante meia hora. Calcule a velocidade média do percurso total.

(A) 65.0 km/h (C) 50.0 km/h (E) 43.3 km/h
(B) 33.3 km/h (D) 20.0 km/h

Resposta:

4. A barra na figura tem 1.5 m de comprimento e está a cair, enquanto o ponto A desliza na superfície horizontal e o ponto B desliza ao longo da parede vertical. Num instante em que o ângulo é $\theta = 25^\circ$ e a velocidade do ponto B tem valor de 3 m/s, determine o valor da velocidade angular da barra ($\dot{\theta}$).



(A) 4.29 rad/s (C) 2.0 rad/s (E) 4.73 rad/s
(B) 2.21 rad/s (D) 0.44 rad/s

Resposta:

5. A força tangencial resultante sobre uma partícula é $F_t = (s+1)(s-1)(s-3)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, em relação aos pontos de equilíbrio da partícula?

(A) $s = 1$ é instável e $s = 3$ é estável.
(B) $s = -1$ é instável e $s = 3$ é estável.
(C) $s = 1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(D) $s = -1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(E) $s = -1$ e $s = 1$ são instáveis.

Resposta:

6. Se o conjunto limite positivo de uma curva de evolução A, no espaço de fase, é um ciclo limite C, qual das afirmações é correta?

(A) A torna-se exatamente igual a C após algum tempo.
(B) Todos os pontos de C pertencem também a A.
(C) A toca o ciclo C num ponto.
(D) A aproxima-se de C, sem nunca o tocar.
(E) A afasta-se de C.

Resposta:

7. Calcule o ângulo entre a velocidade $\vec{v} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - \vec{e}_z$ e a aceleração $\vec{a} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y - 3\vec{e}_z$ de uma partícula.

(A) 115.4° (C) 110.9° (E) 50.0°
(B) 94.1° (D) 21.8°

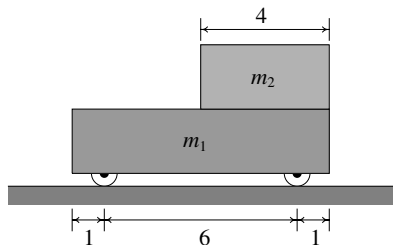
Resposta:

8. Um bloco desce um plano inclinado, deslizando com velocidade constante. Pode afirmar-se que nesse percurso:

(A) O trabalho realizado pela resultante das forças sobre o corpo é positivo.
(B) O trabalho realizado pela força gravítica é negativo.
(C) A energia cinética do corpo diminui.
(D) A energia potencial do corpo diminui.
(E) A energia mecânica do corpo mantém-se constante.

Resposta:

9. As distâncias na figura estão em centímetros. O carrinho, incluindo as rodas, tem massa $m_1 = 140$ g, distribuída uniformemente, e o bloco de cima tem massa $m_2 = 315$ g, também distribuída uniformemente. Determine o valor da reação normal total nas duas rodas do lado esquerdo.



(A) 1.201 N (C) 0.743 N (E) 1.486 N
(B) 1.543 N (D) 2.23 N

Resposta:

10. Calcule a matriz jacobiana do sistema dinâmico equivalente à seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} + 3\dot{x}x - x^2 = 0$$

no espaço de fase (x, y) .

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x - 3y & 3x \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2x - 3y & -3x \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x + 3y & 3x \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3y - 2x & 3x \end{bmatrix}$
(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x - 3y & -3x \end{bmatrix}$

Resposta:

11. A matriz de um sistema dinâmico linear é:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Que tipo de ponto de equilíbrio tem esse sistema?

(A) nó atrativo. (D) nó repulsivo.
(B) foco repulsivo. (E) foco atrativo.
(C) centro.

Resposta:

12. A aceleração tangencial de um objeto verifica a expressão $a_t = 5s^4$ (unidades SI), em que s é a posição na trajetória. Se o objeto parte do repouso na posição $s = 1$ m, determine o valor absoluto da sua velocidade na posição $s = 2$ m.

(A) 12.65 m/s (C) 5.52 m/s (E) 10.26 m/s
(B) 3.16 m/s (D) 7.87 m/s

Resposta:

13. A matriz jacobiana de um sistema não linear, num ponto P do espaço de fase (x, y) , foi armazenada na variável J no Maxima. O comando `eigenvectors(J)` produz: `[[[-1,1], [1,1]], [[1,-1]], [[1,1/3]]]` que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto P?

(A) nó atrativo. (D) foco atrativo.
(B) ponto de sela. (E) foco repulsivo.
(C) centro.

Resposta:

14. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies, presa predador?

(A) $\dot{x} = y^2 - xy$ $\dot{y} = x^2 + xy$
(B) $\dot{x} = xy - x^2$ $\dot{y} = y^2 - x^2$
(C) $\dot{x} = x^2 + xy$ $\dot{y} = y^2 - xy$
(D) $\dot{x} = x^2 - xy$ $\dot{y} = y^2 - xy$
(E) $\dot{x} = x^2 + xy$ $\dot{y} = y^2 + xy$

Resposta:

15. Um aluno empurra um bloco de massa 400 g, sobre uma mesa horizontal, com uma aceleração constante de 1.7 m/s^2 . A força que o aluno exerce é horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é 0.4, calcule o módulo da força do aluno sobre o bloco.

(A) 5.62 N (C) 2.25 N (E) 0.89 N
(B) 22.48 N (D) 4.5 N

Resposta:

16. Qual dos seguintes sistemas não pode ser caótico?

(A) Um sistema de 4 espécies.
(B) Um sistema autónomo com 3 variáveis de estado.
(C) Um pêndulo duplo (dois pêndulos, um pendurado no outro).
(D) Um sistema linear com 4 variáveis de estado.
(E) Um sistema autónomo com 4 variáveis de estado.

Resposta:

17. As expressões para as energias cinética e potencial de um sistema conservativo com dois graus de liberdade, x e θ , são: $E_c = 3\dot{x}^2 + 11\dot{\theta}^2$ e $U = -7x\theta$. Encontre a expressão para a aceleração $\ddot{\theta}$.

(A) $\frac{7}{22}x\theta$ (C) $\frac{7}{22}\theta$ (E) $\frac{7}{3}x$
(B) $\frac{7}{22}x$ (D) $\frac{7}{3}x\theta$

Resposta:

As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \quad \dot{v} = \frac{g \rho A}{m} (h - x) - g$$

(b) No ponto de equilíbrio,

$$\frac{g \rho A}{m} (h - x) - g = 0 \implies x_e = h - \frac{m}{\rho A}$$

e, substituindo os valores conhecidos (massas em gramas e distâncias em centímetros),

$$x_e = 16 - \frac{144}{10} = 1.6 \text{ cm}$$

(c) O sistema de equações de evolução é um sistema dinâmico linear e a matriz do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g \rho A}{m} & 0 \end{bmatrix}$$

A soma dos valores próprios é nula ($\lambda_1 = -\lambda_2$) e o produto ($-\lambda_1^2$) é igual a $\frac{g \rho A}{m}$, que é positivo. Assim sendo, os dois valores próprios são:

$$\lambda = \pm i \sqrt{\frac{g \rho A}{m}}$$

Conclui-se que o ponto de equilíbrio é um centro e as curvas de evolução são ciclos com frequência angular

$$\Omega = \sqrt{\frac{g \rho A}{m}}$$

O período de oscilação é (massas em gramas, distâncias em centímetros e tempos em segundos)

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g \rho A}} = 2\pi \sqrt{\frac{144}{980 \times 10}} = 0.762 \text{ s}$$

Observe-se que o período não depende da altura h nem da forma geométrica da base do cilindro, apenas da sua área. Imagine, por exemplo, quais poderão ser os valores da massa e da área de um barco e faça uma estimativa do seu período de oscilação.

Perguntas

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. E | 6. D | 9. A | 12. D | 15. C |
| 4. B | 7. B | 10. C | 13. B | 16. D |
| 5. C | 8. D | 11. D | 14. C | 17. B |