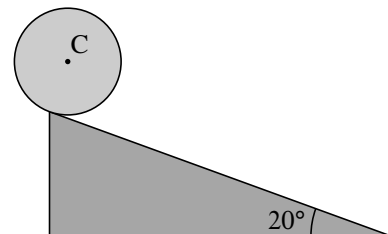


Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

1. (4 valores) Um berlinde de vidro, esférico e homogéneo, tem raio $R = 5 \text{ mm}$ e pesa 13.3 mN . O berlinde desce uma rampa muito comprida, inclinada 20° em relação à horizontal, rodando sem derrapar. A resistência do ar produz uma força igual a $\pi \rho R^2 v^2/4$, onde v é a velocidade do centro da esfera e ρ é a massa volúmica do ar, igual a 1.2 kg/m^3 ; essa força atua no sentido oposto da velocidade e à altura do centro C da esfera. Determine a expressão da aceleração do centro da esfera em função da sua velocidade v (o momento de inércia duma esfera homogénea é $I_{\text{cm}} = 2mR^2/5$). Determine a velocidade máxima que atingirá o berlinde após descer vários metros (velocidade terminal).



2. (4 valores) (a) A expressão da aceleração tangencial dum objeto é:

$$a_t = 4 - s^2 - 5\dot{s} + s\ddot{s}$$

onde s é a sua posição na trajetória. Determine os pontos de equilíbrio do sistema, no espaço de fase, e demonstre que tipo de pontos são (foco, nó, etc., atrativo ou repulsivo). (b) Ignorando os termos que dependem de \dot{s} obtém-se $a_t = 4 - s^2$, que corresponde a um sistema conservativo. Determine a expressão da energia potencial deste sistema, por unidade de massa (ou seja, admitindo $m = 1$). Trace o gráfico dessa função e com base nele identifique os pontos de equilíbrio deste sistema conservativo e explique se tem ciclos ou órbitas homoclínicas ou heteroclínicas.

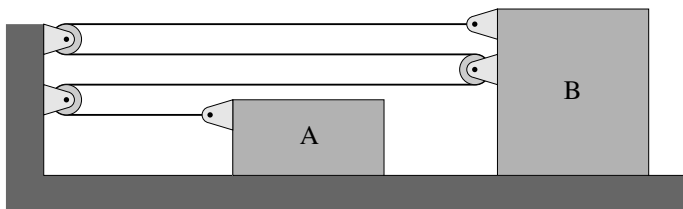
PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Um projétil é lançado desde um telhado a 5.6 m de altura, com velocidade de 12 m/s , inclinada 30° por cima da horizontal. Desprezando a resistência do ar, calcule o tempo que o projétil demora até bater no chão.

- (A) 0.93 s (C) 1.59 s (E) 2.24 s
(B) 1.84 s (D) 1.22 s

Resposta:

4. Se o bloco B se desloca para a direita com velocidade de valor v , qual é o valor da velocidade (para a esquerda) do bloco A?



- (A) $v/3$ (C) v (E) $v/2$
(B) $2v$ (D) $3v$

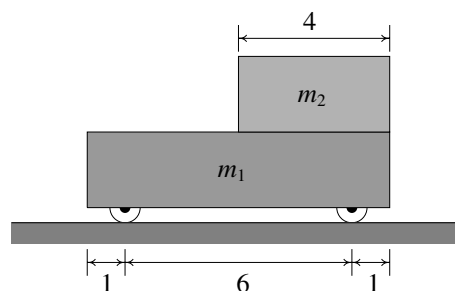
Resposta:

5. O momento de inércia dum disco homogéneo de 10 cm de raio é $5.2 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. Determine o valor da força tangencial que deve ser aplicada na periferia do disco, para produzir uma aceleração angular de -6 rad/s^2 .

- (A) 1.25 N (C) 0.62 N (E) 0.12 N
(B) 0.31 N (D) 0.21 N

Resposta:

6. As distâncias na figura são em cm e o sistema está em repouso. O carrinho, incluindo as rodas, tem massa $m_1 = 100 \text{ g}$, distribuída uniformemente, e o bloco de cima tem massa $m_2 = 315 \text{ g}$, também distribuída uniformemente. Determine o valor da reação normal total nas rodas do lado esquerdo.



- (A) 0.678 N (C) 1.005 N (E) 1.356 N
(B) 1.543 N (D) 2.034 N

Resposta:

7. A força tangencial resultante sobre uma partícula é $F_t = (s+1)(s-1)(3-s)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira, em relação aos pontos de equilíbrio da partícula?

- (A) $s = -1$ é instável e $s = 3$ é estável.
(B) $s = -1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(C) $s = -1$ e $s = 1$ são instáveis.
(D) $s = 1$ é estável e $s = 3$ é instável.
(E) $s = 1$ é instável e $s = 3$ é estável.

Resposta:

8. O sistema dinâmico não linear:

$$\dot{x} = xy - 4x + y - 4 \quad \dot{y} = xy + x - 1y - 1$$

tem um ponto de equilíbrio em $x = 1, y = 4$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

- (A) $\dot{x} = -5y \quad \dot{y} = -2x$ (D) $\dot{x} = -2y \quad \dot{y} = 5x$
 (B) $\dot{x} = 5y \quad \dot{y} = -2x$ (E) $\dot{x} = 2y \quad \dot{y} = 5x$
 (C) $\dot{x} = 5y \quad \dot{y} = 2x$

Resposta: ☐

9. Qual das seguintes equações poderia ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

- (A) $\dot{y} = 2y - 5y^2$ (D) $\dot{y} = 6y + xy$
 (B) $\dot{y} = x + xy^2$ (E) $\dot{y} = 6y - y^2$
 (C) $\dot{y} = 2y^2 - 3y$

Resposta: ☐

10. A aceleração tangencial dum objeto verifica a expressão $a_t = 3s^4$ (unidades SI), em que s é a posição na trajetória. Se o objeto parte do repouso em $s = 1$ m, determine o valor absoluto da sua velocidade em $s = 2$ m.

- (A) 6.1 m/s (C) 4.27 m/s (E) 9.8 m/s
 (B) 2.45 m/s (D) 7.95 m/s

Resposta: ☐

11. Um ciclista demora 44 s a percorrer 400 m, numa pista reta e horizontal, com velocidade uniforme. Sabendo que o raio das rodas da bicicleta é 27.2 cm e admitindo que as rodas não deslizam sobre a pista, determine o valor da velocidade angular das rodas.

- (A) 33.4 rad/s (C) 16.7 rad/s (E) 20.9 rad/s
 (B) 29.2 rad/s (D) 25.1 rad/s

Resposta: ☐

12. Coloca-se um carrinho numa rampa a uma altura inicial h e deixa-se descer livremente, a partir do repouso, chegando ao fim da rampa (altura zero) com velocidade v . Admitindo que a energia mecânica do carrinho permanece constante (forças dissipativas desprezáveis, massa das rodas desprezável, etc) desde que altura inicial na rampa deveria ser largado o carrinho para que chegasse ao fim com velocidade $3v$?

- (A) $9h$ (C) $3h$ (E) $6h$
 (B) $h/3$ (D) $h/9$

Resposta: ☐

13. As equações de evolução dum sistema linear são:

$$\dot{x} = x + 2y \quad \dot{y} = x + y$$

Que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto $(x, y) = (0, 0)$?

- (A) Ponto de sela. (D) Centro.
 (B) Foco atrativo. (E) Nó repulsivo.
 (C) Foco repulsivo.

Resposta: ☐

14. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 3.6 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

- (A) 419 rad/s² (C) 279 rad/s² (E) 838 rad/s²
 (B) 209 rad/s² (D) 182 rad/s²

Resposta: ☐

15. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy . Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 3r^2 + 2r$. Quantos ciclos limite tem o sistema?

- (A) 1 (C) 2 (E) 3
 (B) 4 (D) 0

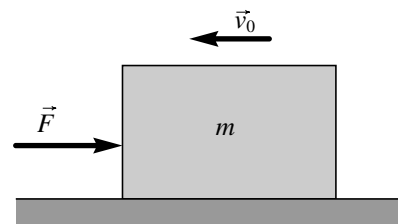
Resposta: ☐

16. As expressões das energias cinética e potencial dum sistema conservativo com dois graus de liberdade, x e θ , são: $E_c = 7\dot{x}^2 + 5\dot{\theta}^2$ e $U = -11x\theta$. Encontre a expressão da aceleração $\ddot{\theta}$.

- (A) $\frac{11}{7}x\theta$ (C) $\frac{11}{10}\theta$ (E) $\frac{11}{10}x\theta$
 (B) $\frac{11}{10}x$ (D) $\frac{11}{7}x$

Resposta: ☐

17. O bloco na figura, com massa igual a 2 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial \vec{v}_0 , sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa \vec{F} , horizontal e constante, com módulo igual a 10 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.



- (A) 5.1 m/s² (C) 2.55 m/s² (E) 14.9 m/s²
 (B) 5.8 m/s² (D) 7.45 m/s²

Resposta: ☐

No ponto P_2 , a matriz da aproximação linear é:

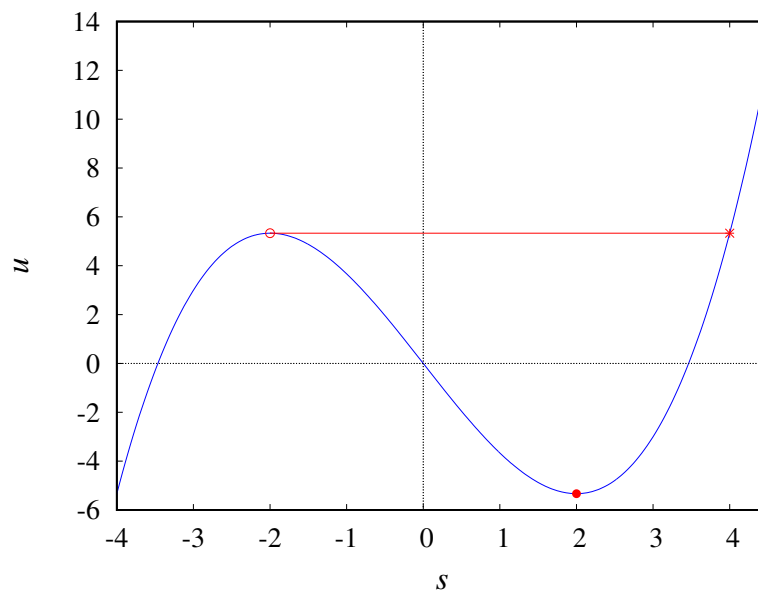
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

E a respetiva equação de valores próprios é $\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$. Conclui-se então que os valores próprios são $-3/2 \pm i\sqrt{7}/2$ e P_2 é foco atrativo.

(b) A energia potencial, por unidade de massa, obtém-se a partir da expressão:

$$u = \frac{U}{m} = - \int a_t ds = \int (s^2 - 4) ds = \frac{s^3}{3} - 4s$$

Os pontos de equilíbrio encontram-se em $s_1 = -2$ e $s_2 = 2$. O gráfico da função u , mostrando os dois pontos de equilíbrio, é o seguinte:



O ponto s_1 , máximo local, é instável (ponto de sela) e o ponto s_2 , mínimo local, é estável (centro). Existem ciclos quando a energia mecânica, por unidade de massa, estiver compreendida entre $-16/3$ e $16/3$ (valores de u em s_2 e s_1). A reta horizontal apresentada no gráfico, entre o ponto de sela e um ponto de retorno, corresponde a uma órbita homoclínica. Ou seja, este sistema não tem nenhuma órbita heteroclínica, tem uma única órbita homoclínica e infinitos ciclos: todas as curvas de evolução dentro da órbita homoclínica, no espaço de fase.

Perguntas

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. B | 6. C | 9. D | 12. A | 15. D |
| 4. D | 7. E | 10. A | 13. A | 16. B |
| 5. B | 8. E | 11. A | 14. B | 17. D |

Critérios de avaliação

Problema 1

Mecânica de Lagrange.

- Determinação do grau de liberdade e relação entre v e ω 10% (0.4)
- Expressão da energia cinética 20% (0.8)
- Expressão da energia potencial 20% (0.8)
- Expressão da força generalizada 20% (0.8)
- Aplicação da equação de Lagrange para obter a equação de movimento 10% (0.4)
- Valor da aceleração, com unidades corretas 10% (0.4)
- Obtenção da velocidade terminal 10% (0.4)

Mecânica vetorial.

- Diagrama de corpo livre 20% (0.8)
- Expressão da soma de forças tangenciais 20% (0.8)
- Expressão da soma de momentos 20% (0.8)
- Determinação da relação entre a_t e α 10% (0.4)
- Obtenção da expressão da força de atrito 10% (0.4)
- Valor da aceleração, com unidades corretas 10% (0.4)
- Obtenção da velocidade terminal 10% (0.4)

Problema 2

- Obtenção das equações de evolução 10% (0.4)
- Determinação dos 2 pontos de equilíbrio 10% (0.4)
- Obtenção da matriz jacobiana 10% (0.4)
- Caracterização do primeiro ponto de equilíbrio 10% (0.4)
- Caracterização do segundo ponto de equilíbrio 10% (0.4)
- Obtenção da expressão da energia potencial por unidade de massa 20% (0.8)
- Gráfico da energia potencial por unidade de massa 10% (0.4)
- Interpretação do gráfico (pontos de equilíbrio, ciclos e órbitas) 20% (0.8)