

Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

1. (4 valores) Uma das luas dum planeta é um corpo homogéneo e esférico de raio R . Imagine que a lua é atravessada de lado a lado por um túnel retilíneo que passa pelo seu centro, dentro do qual deixa-se cair livremente um objeto de massa m . Sabendo que a energia potencial gravítica do objeto, no interior desse túnel, é dada pela expressão

$$U = \frac{mg}{2} \left(\frac{r^2}{R} - R \right)$$

na qual r é a distância desde o centro da lua e g é a aceleração da gravidade na superfície do planeta: (a) Determine a equação de movimento (expressão da aceleração) do objeto dentro do túnel, ignorando forças dissipativas (a lua não tem atmosfera). (b) Demonstre que o objeto fica a oscilar no túnel e determine o período de oscilação no caso da lua Mimas, com raio de 198 km e $g = 6.8 \text{ cm/s}^2$. (c) Se existisse um túnel retilíneo desde o Porto até Nova Zelândia, passando pelo centro da Terra, e sabendo que o raio da Terra é 6370 km, quanto tempo demorava viajar desde o Porto até Nova Zelândia saltando nesse túnel? (admitindo que a expressão obtida para a lua homogénea e sem atmosfera fosse válida).

2. (4 valores) As equações de evolução de um sistema dinâmico de duas espécies são:

$$\dot{x} = 3x - \frac{3xy}{1+2x} \quad \dot{y} = \frac{3xy}{1+2x} - y$$

(a) Explique que tipo de sistema de duas espécies é. (b) Determine os pontos de equilíbrio do sistema e explique que tipos de pontos são. (c) Trace o retrato de fase do sistema.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. A expressão da energia cinética dum sistema conservativo é $\frac{1}{2}(\dot{s}^2 + 5s^2)$, onde s é a posição na trajetória, e a expressão da energia potencial total é 15 s. O sistema tem um único ponto de equilíbrio; determine o valor de s nesse ponto de equilíbrio.

- (A) 2 (C) 1 (E) -1
(B) -2 (D) 3

Resposta:

4. Para aumentar o momento de inércia dum corpo é necessário:

- (A) Afastar partes do corpo para mais longe do eixo.
(B) Diminuir a velocidade angular.
(C) Aumentar a aceleração angular.
(D) Compatá-lo, ocupando menor volume.
(E) Aumentar a velocidade angular.

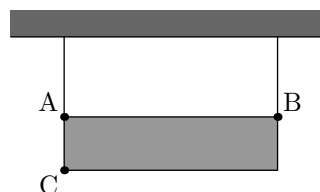
Resposta:

5. A velocidade de um corredor pode aproximar-se de $v = 7.5\sqrt{1 - 0.03s}$, na qual v é expressa em km/h e a posição na trajetória, s , é expressa em km. Sabendo que $s = 0$ em $t = 0$, determine quantos quilómetros terá percorrido o corredor ao fim de três quartos de hora.

- (A) 6.465 (C) 3.741 (E) 4.49
(B) 7.758 (D) 5.388

Resposta:

6. Para determinar a posição do seu centro de gravidade, uma barra retangular foi pendurada de dois fios verticais, ficando em repouso na posição horizontal que mostra a figura. Sabendo que a tensão no fio ligado no ponto A é 3.4 N, a tensão no fio ligado em B é 1.8 N e o comprimento da barra, desde A até B, é 30 cm, determine a distância desde a aresta AC até o centro de gravidade.



- (A) 21.6 cm (C) 12.5 cm (E) 10.4 cm
(B) 15.0 cm (D) 18.0 cm

Resposta:

7. O sistema dinâmico não linear:
 $\dot{x} = xy - 4x + y - 4 \quad \dot{y} = xy + x - 5y - 5$
tem um ponto de equilíbrio em $x = 5, y = 4$. Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança desse ponto de equilíbrio?

- (A) $\dot{x} = 5y \quad \dot{y} = -6x$ (D) $\dot{x} = -5y \quad \dot{y} = -6x$
(B) $\dot{x} = 6y \quad \dot{y} = 5x$ (E) $\dot{x} = -6y \quad \dot{y} = 5x$
(C) $\dot{x} = 5y \quad \dot{y} = 6x$

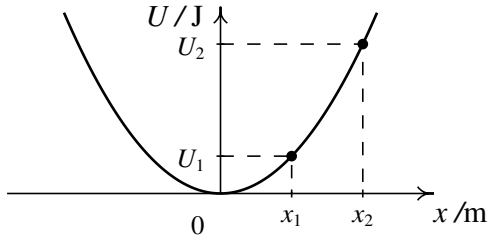
Resposta:

8. A posição dum ponto ao longo dum percurso, em função do tempo, é dada pela expressão $s = 30t - 3t^2$ (SI). Determine a distância percorrida pelo ponto entre $t = 0$ e $t = 7.5$ s.

(A) 18.75 m (C) 21.75 m (E) 75 m
(B) 93.75 m (D) 131.25 m

Resposta:

9. O gráfico da figura representa a energia potencial U , em joules, em função da posição x , em metros, duma partícula com massa igual a 9 kg; os valores no gráfico são $x_1 = 9$, $x_2 = 18$, $U_1 = 729$ e $U_2 = 2916$. Se a partícula parte do repouso na posição x_2 , com que velocidade chegará ao ponto x_1 ?



(A) 44.09 m/s (C) 22.05 m/s (E) 88.18 m/s
(B) 28.66 m/s (D) 11.02 m/s

Resposta:

10. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 3.6 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

(A) 182 rad/s² (C) 838 rad/s² (E) 279 rad/s²
(B) 209 rad/s² (D) 419 rad/s²

Resposta:

11. As equações de evolução dum sistema linear são:

$$\dot{x} = x + y \quad \dot{y} = 0.5x + y$$

Que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto $(x, y) = (0, 0)$?

(A) Ponto de sela. (D) Foco repulsivo.
(B) Foco atrativo. (E) Centro.
(C) Nó repulsivo.

Resposta:

12. Um bloco de massa 4 kg desce deslizando sobre a superfície dum plano inclinado com base $x = 6$ m e altura $y = 7$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

(A) 59.53 N (C) 12.76 N (E) 25.51 N
(B) 16.8 N (D) 39.2 N

Resposta:

13. Uma partícula de massa m desloca-se ao longo de uma curva no plano xy . Sabendo que a expressão da energia cinética da partícula é $E_c = \frac{m\dot{x}^2}{2} (1 + x^6)$, encontre a equação da curva.

(A) $y = \frac{2x^{5/2}}{5}$ (C) $y = \frac{2x^{3/2}}{3}$ (E) $y = \frac{x^5}{5}$
(B) $y = \frac{x^4}{4}$ (D) $y = \frac{x^3}{3}$

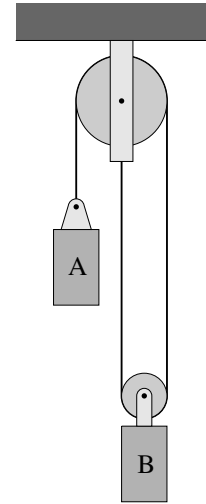
Resposta:

14. Num sistema que se desloca no eixo dos x , a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio instável?

(A) 1 (C) -1 (E) 2
(B) 3 (D) -2

Resposta:

15. No instante em que o bloco A desce com velocidade 24 cm/s, com que velocidade sobe o bloco B?



(A) 12 cm/s (C) 48 cm/s (E) 72 cm/s
(B) 24 cm/s (D) 8 cm/s

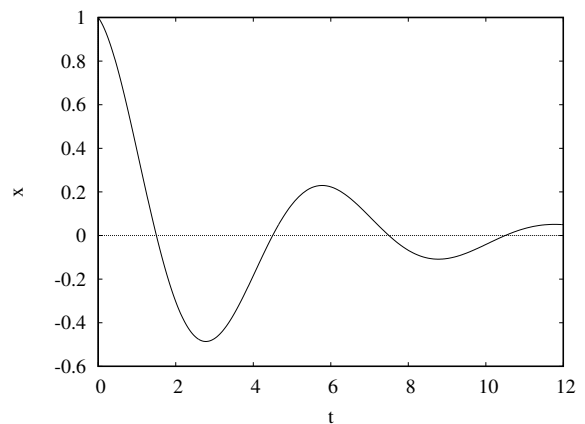
Resposta:

16. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y) foram transformadas para coordenadas polares (r, θ) , obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2$ $\dot{r} = r^2 - 3r$. Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

(A) atrativo com $r = 0$ (D) atrativo com $r = 3$
(B) repulsivo com $r = 2$ (E) repulsivo com $r = 3$
(C) atrativo com $r = 2$

Resposta:

17. O gráfico mostra uma possível solução $x(t)$ num sistema dinâmico linear com duas variáveis de estado x e y . Quais dos valores na lista poderão ser os dois valores próprios da matriz desse sistema?



(A) $\frac{1}{4} \pm i\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{1}{4} \pm i\pi$ (E) $-\frac{1}{4} \pm i\pi$
(B) $-\frac{1}{4} \pm i\frac{\pi}{2}$ (D) $-\frac{1}{4} \pm i\frac{\pi}{3}$

Resposta:

Perguntas

3. D	6. E	9. C	12. E	15. A
4. A	7. B	10. B	13. B	16. E
5. D	8. B	11. C	14. A	17. D

Crêterios de avaliação

Problema 1

- Equação de movimento _____ 0.8
- Explicação de que o sistema oscila _____ 0.8
- Obtenção da expressão do período _____ 0.8
- Cálculo do período da lua _____ 0.8
- Cálculo do tempo de viagem entre Porto e Nova Zelândia _____ 0.8

Problema 2

- Determinação do tipo de sistema _____ 0.8
- Obtenção dos dois pontos de equilíbrio _____ 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana _____ 0.4
- Valores próprios e caracterização do primeiro ponto de equilíbrio _____ 0.8
- Valores próprios e caracterização do segundo ponto de equilíbrio _____ 0.8
- Retrato de fase _____ 0.8