Problema 1. (*a*) O movimento do projétil no plano xy tem dois graus de liberdade, x e y. Como tal, há quatro variáveis de estado: x, y, v_x e v_y. As equações de evolução são as expressões das derivadas dessas variáveis, em ordem ao tempo, em qualquer ponto do espaço de fase (qualquer posição, não apenas a do ponto P, e qualquer velocidade, e não apenas $\vec{v}_o$ dada no enunciado):

$$\dot{x} = v_x \qquad \dot{y} = v_y \qquad \dot{v_x} = -9.8 \quad \text{(SI)} \qquad \dot{v_y} = 0$$

(*b*) A trajetória desde P até Q corresponde aos seguintes valores iniciais das 4 variáveis de estado (unidades SI):

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 0 \qquad v_{0x} = 35 \sin 56^\circ = 29.02 \qquad v_{0y} = 35 \cos 56^\circ = 19.57$$

Arbitrando $t = 0$ em P, e integrando a terceira equação de evolução desde P até um ponto qualquer na trajetória, obtém-se:

$$\int\limits_{29.02}^{v_x(t)} \mathrm{d}v_x = -9.8 \int\limits_0^t \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad v_x(t) = 29.02 - 9.8\,t$$

Substituindo essa expressão no lado direito da primeira equação de evolução, e integrando desde P até Q, obtém-se:

$$\int\limits_1^0 \mathrm{d}x = \int\limits_0^{t_Q} (29.02 - 9.8\,t)\,\mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad 4.9\,t_Q^2 - 29.02\,t_Q - 1 = 0$$

Como t_Q é positivo, o seu valor será a raíz positiva da equação quadrática anterior:

$$t_Q = \frac{29.02 + \sqrt{29.02^2 + 4 \times 4.9}}{2 \times 4.9} = 5.956\ \text{s}$$

(*c*) A posição ao longo da trajetória, s, verifica a seguinte equação diferencial:

$$\dot{s} = v$$

Arbitrando o sentido positivo de s de P para Q, o valor da velocidade (v) será igual ao módulo do vetor velocidade:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

A expressão para v_x em função do tempo já foi obtida na alínea anterior e a quarta equação de evolução implica que v_y permanece constante, igual ao seu valor inicial 19.57. Como tal,

$$v(t) = \sqrt{(29.02 - 9.8\,t)^2 + 19.57^2}$$

Substituindo essa expressão na equação $\dot{s} = v$ e integrando desde P até Q obtém-se a distância percorrida ao longo da trajetória:

$$d = s_Q - s_P = \int\limits_P^Q \mathrm{d}s = \int\limits_0^{5.956} \sqrt{(29.02 - 9.8\,t)^2 + 19.57^2}\,\mathrm{d}t = 151.2\ \text{m}$$

(o valor do integral foi obtido no Maxima).

Perguntas

2. E

3. D

4. E

5. E

6. C

7. C

8. D

9. C

10. A

11. A

12. B

13. A

14. C

15. A

Critérios de avaliação

Problema

- Alínea *a*, incluindo as quatro expressões das derivadas, sem usar os valores da velocidade inicial v_0 nem o valor de θ ____ 1.8
- Alínea *b* ____ 1.8
- Encontrar o integral em ordem ao tempo, desde 0 até o tempo de voo, que permite calcular a distância ao longo da trajetória ____ 2.1
- Determinar o valor numérico do integral ____ 0.3