

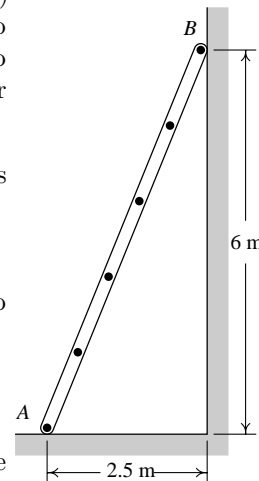
NOME: _____ LOG-IN FEUP: _____

Exame final

30 de Junho de 2009

Duração: Duas horas. Com consulta de formulário. Pode usar calculadora, mas **apenas para fazer contas** e nunca como meio de cópia ou de consulta!

- (3 valores). Uma escada (ver figura à direita) está apoiada numa superfície horizontal (ponto A) e numa parede vertical (ponto B). Entre a escada e a superfície horizontal o coeficiente de atrito estático é μ , enquanto que o atrito da escada com a parede vertical é desprezável. Admitindo que o centro de gravidade da escada se encontra a metade do seu comprimento, calcule o valor mínimo de μ , para garantir que a escada permaneça em equilíbrio estático.
- (5 valores). Uma partícula com massa igual a 1 kg desloca-se ao longo do eixo dos x . Em unidades SI, a força tangencial sobre a partícula é dada pela expressão $F = x^3 - 4x$.
 - Determine os pontos de equilíbrio do sistema.
 - Encontre as expressões para a energia potencial e a energia mecânica, em função da posição x e da velocidade v .
 - Escreva as equações de evolução e calcule a matriz jacobiana.
 - Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio do sistema.
 - Desenhe, no espaço de fase, um ciclo, uma órbita homoclínica e uma órbita heteroclínica, se existirem (se algumas das 3 não existirem, diga quais).



PERGUNTAS. Cotação: Respostas certas, 0.8, erradas, -0.2, em branco, 0. Cada pergunta tem uma única resposta. Serão avaliadas apenas as respostas que apareçam na caixa de **Resposta** (e não na folha de exame ou de rascunho).

- Uma partícula desloca-se ao longo do eixo dos x com uma aceleração que aumenta em função do tempo: $a = 7t$ (unidades SI). No instante $t = 0$, a partícula encontra-se em repouso no ponto $x = 4$ m. Calcule a posição da partícula em $t = 5$ s.
- Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem exactamente dois pontos de equilíbrio, P e Q. O ponto P é ponto de sela e o ponto Q é foco repulsivo. Qual das seguintes afirmações sobre o sistema é verdadeira?

- (A) 149.8 m (C) 929.0 m (E) 449.5 m
(B) 74.9 m (D) 374.6 m

Resposta: ☐

- Uma partícula desloca-se numa dimensão, sob a acção de uma força conservativa e uma força de atrito suficientemente fraca. Desprezando a força de atrito, o sistema tem um centro num ponto P do espaço de fase. Quando a força de atrito for tida em conta, o ponto P será:

- (A) nó repulsivo
(B) nó atractivo
(C) ponto de sela
(D) foco repulsivo
(E) foco atractivo

Resposta: ☐

- As equações de evolução de um sistema linear, de segunda ordem, são: $\ddot{x} = ax + by$ $\ddot{y} = cx + dy$ onde a, b, c e d são parâmetros reais, todos positivos excepto b que é negativo. Assim, o ponto de equilíbrio é:

- (A) atractivo (D) nó
(B) repulsivo (E) ponto de sela
(C) foco

Resposta: ☐

- (A) Podem existir ciclos.
(B) Pode existir uma órbita heteroclínica.
(C) O sistema pode ser linear.
(D) O sistema pode estar em estado de equilíbrio estável.
(E) Pode existir uma órbita homoclínica.

Resposta: ☐

- A equação de van der Pol: $\ddot{x} + 2\epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$, para qualquer valor do parâmetro positivo ϵ , tem sempre um único ponto de equilíbrio em $x = \dot{x} = 0$ e um ciclo limite atractivo. Designando o tipo de ponto de equilíbrio assim:

1. foco atractivo. 4. nó repulsivo.
2. foco repulsivo. 5. ponto de sela.
3. nó atractivo.

Que tipo de ponto de equilíbrio pode ter a equação de van der Pol?

- (A) 1 ou 2 (C) 3, 4 ou 5 (E) 1 ou 3
(B) 3 ou 4 (D) 2 ou 4

Resposta: ☐

8. As unidades J/(m·kg) (joule sobre metro vezes quilograma) podem ser usadas para medir:

(A) Energia.
(B) Aceleração.
(C) Trabalho.
(D) Velocidade.
(E) Quantidade de movimento.

Resposta: ☐

9. Um objecto desloca-se numa trajectória curva, mantendo o módulo da sua velocidade constante. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) A aceleração é tangente à trajectória.
(B) O módulo da aceleração é constante.
(C) A aceleração é nula.
(D) A aceleração é constante.
(E) A aceleração é perpendicular à trajectória.

Resposta: ☐

10. A força resultante sobre uma partícula que se desloca sobre o eixo dos y é $\vec{F} = (y - 3)(11 - y)\vec{e}_y$. Em $t = 0$ a partícula encontra-se em repouso no ponto $y = 7$. Onde se encontrará a partícula após um tempo muito elevado?

(A) Oscilando à volta de $y = 11$
(B) Oscilando à volta de $y = 3$
(C) Muito afastada, em $y \rightarrow \infty$
(D) Em $y = 11$
(E) Em $y = 3$

Resposta: ☐

11. Um sistema não linear com duas variáveis de estado tem um foco atractivo num ponto P. Quais poderão ser os dois valores próprios da matriz jacobiana no ponto P?

(A) 1 e 2 (C) 1 e -1 (E) 1+i e 1-i
(B) -1+i e -1-i (D) -1 e -2

Resposta: ☐

12. A força resultante sobre um objecto de massa 2 kg é $\vec{F} = 1\vec{e}_x + 9t\vec{e}_y$ (SI) no intervalo $0 < t < 4$ s e nula em $t > 4$ s. Sabendo que a velocidade do objecto em $t = 0$ era $1\vec{e}_x$ m/s, calcule a velocidade em $t = 6$ s.

(A) $5.0\vec{e}_x + 72.0\vec{e}_y$ (D) $3.0\vec{e}_x + 36.0\vec{e}_y$
(B) $4.0\vec{e}_x + 81.0\vec{e}_y$ (E) $4.0\vec{e}_x + 27.0\vec{e}_y$
(C) $3.0\vec{e}_x + 18.0\vec{e}_y$

Resposta: ☐

13. A matriz de um sistema linear no espaço de fase (x, y) foi armazenada na variável J, no Maxima. O comando `eigenvectors(J)` produz: `[[[-1,-2], [1,1]], [1,-1], [1,1/3]]` que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(A) ponto de sela. (D) foco atractivo.
(B) foco repulsivo. (E) centro.
(C) nó atractivo.

Resposta: ☐

14. As equações $\dot{x} = x(2 - y)$, $\dot{y} = y(2 - x)$ definem um sistema:

(A) Presa-predador.
(B) Conservativo.
(C) De duas espécies com cooperação.
(D) De duas espécies com competição.
(E) Linear.

Resposta: ☐

15. O comando

`a:rk([f,g],[y,z],[0,1],[x,0,1,0.1])`

do Maxima foi usado para resolver numericamente um sistema de equações. Qual dos comandos seguintes produz uma lista com os valores de y ?

(A) `makelist(a[2][i], i, 1, 11)`
(B) `makelist(a[3][i], i, 1, 11)`
(C) `makelist(a[i][3], i, 1, 11)`
(D) `makelist(a[i][1], i, 1, 11)`
(E) `makelist(a[i][2], i, 1, 11)`

Resposta: ☐

16. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem uma curva de evolução com conjunto limite negativo num ponto P. Em relação à lista seguinte:

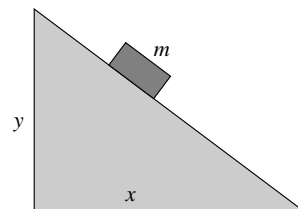
1. foco atractivo. 4. nó repulsivo.
2. foco repulsivo. 5. centro.
3. nó atractivo.

Que tipo de ponto de equilíbrio pode ser o ponto P?

(A) 1 ou 3 (C) 2 ou 4 (E) 5
(B) 3 ou 4 (D) 1 ou 2

Resposta: ☐

17. Um bloco de massa 6 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado com base $x = 5$ m e altura $y = 3$ m. Admitindo que a aceleração da gravidade é $g = 9.8$ m/s², calcule o módulo da reacção normal do plano sobre o bloco.



(A) 58.80 N (C) 49.00 N (E) 60.50 N
(B) 25.21 N (D) 50.42 N

Resposta: ☐

Perguntas

3. A	6. E	9. E	12. D	15. E
4. E	7. D	10. A	13. C	16. C
5. B	8. B	11. B	14. D	17. D