

NOME: _____ LOG-IN FEUP: _____

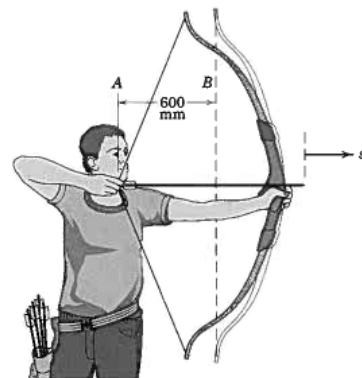
Exame de recurso

Ponto 1

22 de Julho de 2009

Duração: Duas horas. Com consulta de formulário. Pode usar calculadora, mas **apenas para fazer contas** e nunca como meio de cópia ou de consulta!

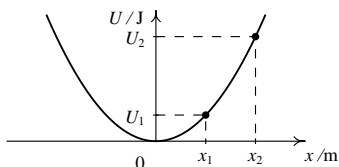
1. (3 valores). Num tiro com arco (ver figura ao lado), a aceleração da flecha diminui linearmente em função da distância, s , desde um valor máximo inicial de 4800 m/s^2 , na posição A, até zero, na posição B que se encontra 600 mm à direita de A. Calcule a velocidade com que sai disparada a flecha.



2. (5 valores). A equação de evolução dum sistema dinâmico de segunda ordem é:
- $$\ddot{x} + \dot{x}^2 + 4x^2 = 4.$$
- (a) Escreva a equação de evolução na forma de um sistema autónomo com duas variáveis de estado.
- (b) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema.
- (c) Determine a matriz jacobiana.
- (d) Caracterize cada um dos pontos de equilíbrio.
- (e) Se no instante $t = 0$ o estado do sistema for $x_0 = 1$, $\dot{x}_0 = 1$, use o método de Euler para calcular o estado em $t = 0.1$, usando um incremento de tempo $\Delta t = 0.1$.

PERGUNTAS. Cotação: Respostas certas, 0.8, erradas, -0.2, em branco, 0. Cada pergunta tem uma única resposta. Serão avaliadas apenas as respostas que apareçam na caixa de **Resposta** (e não na folha de exame ou de rascunho).

3. O gráfico da figura representa a energia potencial U , em joules, em função da posição x , em metros, de uma partícula com massa igual a 4 kg ; os valores no gráfico são $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $U_1 = 25$ e $U_2 = 100$. Se a partícula parte do repouso, na posição x_2 , com que velocidade chegará ao ponto x_1 ?



- (A) $\dot{y} = 2y - 5y^2$ (D) $\dot{y} = x + xy^2$
 (B) $\dot{y} = 6y - y^2$ (E) $\dot{y} = 2y^2 - 3y$
 (C) $\dot{y} = 2xy + 3y$

Resposta:

6. Qual das seguintes curvas de evolução é mais difícil de calcular em forma numérica?

- (A) Uma órbita heteroclínica.
 (B) Uma curva que entra num foco atrativo.
 (C) Uma recta na direcção de um vector próprio.
 (D) Uma curva que entra num nó atrativo.
 (E) Um ciclo.

Resposta:

- (A) 3.06 m/s (C) 24.49 m/s (E) 12.25 m/s
 (B) 6.12 m/s (D) 7.96 m/s

Resposta:

4. A matriz jacobiana de um sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y) , é:

$$\begin{bmatrix} y & x-1 \\ y+1 & x \end{bmatrix}$$

Sabendo que $(0, 0)$ é ponto de equilíbrio do sistema, determine que tipo de ponto é.

- (A) foco repulsivo (D) ponto de sela
 (B) nó atrativo (E) nó repulsivo
 (C) centro

Resposta:

5. Qual das seguintes equações poderia ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

7. Uma bola, movendo-se com velocidade horizontal \vec{v} , choca com uma parede vertical. Imediatamente após o choque, a bola adquire a velocidade $-\vec{v}$. Relativamente à bola, verificou-se:

- (A) Não conservação da energia cinética e conservação da componente vertical da quantidade de movimento.
 (B) Não conservação da energia cinética e não conservação da quantidade de movimento.
 (C) Não conservação da energia cinética e conservação da quantidade de movimento.
 (D) Conservação da energia cinética e conservação da quantidade de movimento.
 (E) Conservação da energia cinética e não conservação da quantidade de movimento.

Resposta:

8. As equações de evolução de um sistema linear são:

$$\dot{x} = x + 2y \quad \dot{y} = x + y$$

Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

- (A) Foco atractivo. (D) Foco repulsivo.
(B) Ponto de sela. (E) Centro.
(C) Nó repulsivo.

Resposta: ☐

9. Uma partícula desloca-se ao longo do eixo dos x de forma que a sua velocidade é dada pela expressão:

$$v(x) = b e^{-n x}$$

onde b e n são duas constantes. Qual é a expressão para a aceleração da partícula em função da posição x ?

- (A) $n b^2 e^{-n x}$ (C) $-n b e^{-n x}$ (E) $-n b^2 e^{-n x}$
(B) $-n b^2 e^{-2 n x}$ (D) $-b e^{-(n+1)x}$

Resposta: ☐

10. As equações de um sistema de duas espécies com competição são:

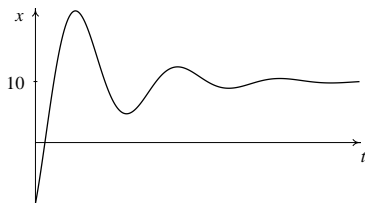
$$\dot{x} = x(2 - x - 0.5y), \quad \dot{y} = y(2 - y - 0.5x)$$

sabendo que as duas espécies coexistem em forma harmoniosa, calcule os valores de x e y após muito tempo.

- (A) $4/3$ e $4/3$ (C) 0 e 2 (E) 2 e 0
(B) $2/3$ e $2/3$ (D) 0 e 0

Resposta: ☐

11. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado x e y tem um ponto de equilíbrio no ponto $x = 10$, $y = 5$. O gráfico mostra a evolução da variável x em função de tempo. Que tipo de ponto é esse ponto de equilíbrio?



- (A) nó atractivo (D) nó repulsivo
(B) foco atractivo (E) foco repulsivo
(C) centro

Resposta: ☐

12. Um rapaz carrega uma mochila cheia de livros pendurada às costas. Considerando as forças seguintes:

1. Peso da mochila e dos livros, na vertical.
2. Força de contacto entre a mochila e as costas do rapaz, na horizontal.
3. Tensão nas fitas da mochila, com componentes horizontal e vertical.

Quais dessas forças actuam sobre o rapaz?

- (A) 1 e 3 (D) 2 e 3
(B) 1 e 2 (E) 1, 2 e 3
(C) unicamente 1

Resposta: ☐

13. De acordo com o critério de Bendixson, qual dos seguintes sistemas dinâmicos não pode ter nenhum ciclo, nem órbita homoclínica nem órbita heteroclínica?

- (A) $\dot{x} = 3xy \quad \dot{y} = 2xy$ (D) $\dot{x} = xy^2 \quad \dot{y} = -x^2y$
(B) $\dot{x} = 2xy^2 \quad \dot{y} = x^2y$ (E) $\dot{x} = -2xy \quad \dot{y} = -xy$
(C) $\dot{x} = xy \quad \dot{y} = x^3y$

Resposta: ☐

14. Considere um pêndulo ideal, sem forças de atrito. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Os valores próprios da matriz jacobiana são sempre reais.
(B) Todos os pontos de equilíbrio são centros ou pontos de sela.
(C) A variação do ângulo em função do tempo é uma função seno ou co-seno.
(D) Todas as curvas de evolução são ciclos.
(E) É um sistema linear.

Resposta: ☐

15. Na lista seguinte, qual pode ser o conjunto limite negativo de uma trajectória no espaço de fase?

- (A) nó atractivo (D) ciclo limite atractivo
(B) centro (E) ponto de sela
(C) foco atractivo

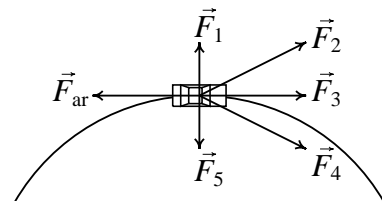
Resposta: ☐

16. Um sistema diz-se autónomo se:

- (A) O seu estado não depende do tempo
(B) Não depende de outros sistemas
(C) A sua evolução a partir dum estado inicial é igual em diferentes instantes
(D) Não tem nenhum ponto de equilíbrio instável
(E) Sobre ele não actua nenhuma força externa

Resposta: ☐

17. Um automóvel desloca-se numa curva, com velocidade de módulo constante. A figura mostra o automóvel visto de cima e a força de resistência do ar, \vec{F}_{ar} . Qual das cinco forças \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , \vec{F}_4 ou \vec{F}_5 representa melhor a força exercida pelo chão sobre o automóvel?



- (A) \vec{F}_1 (C) \vec{F}_4 (E) \vec{F}_5
(B) \vec{F}_2 (D) \vec{F}_3

Resposta: ☐

Perguntas

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. B | 6. A | 9. B | 12. D | 15. E |
| 4. C | 7. E | 10. A | 13. B | 16. C |
| 5. C | 8. B | 11. B | 14. B | 17. C |