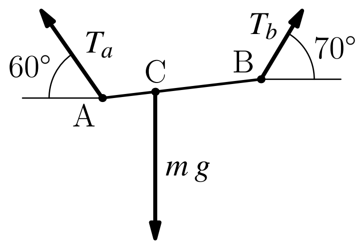
**Resolução do exame de 30 de junho de 2017** Regente: Jaime Villate

**Problema 1**. ($a$) A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre da barra. Como a barra está em equilíbrio, as somas das componentes $x$ e $y$ das três forças devem ser nulas:

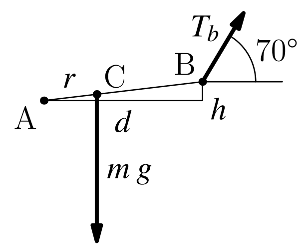



$$
\begin{aligned}
&T_a\cos(60^\circ) - T_b\cos(70^\circ) = 0\\
&T_a\sin(60^\circ) + T_b\sin(70^\circ) - m\,g = 0
\end{aligned}
$$

e a solução deste sistema é:

$$
\begin{aligned}
T_a &= \frac{m\,g\cos(70^\circ)}{\sin(60^\circ)\cos(70^\circ)+\sin(70^\circ)\cos(70^\circ)} = 27.1\ \text{N}\\
T_b &= \frac{m\,g\cos(60^\circ)}{\sin(60^\circ)\cos(70^\circ)+\sin(70^\circ)\cos(70^\circ)} = 39.7\ \text{N}
\end{aligned}
$$

($b$) A diferença de alturas entre os pontos A e B e a distância horizontal entre eles são (ver figura ao lado):




$$
h = 4\sin(60^\circ) - 3\sin(70^\circ) = 0.6450\ \text{m} \qquad d = \sqrt{6^2 - h^2} = 5.965\ \text{m}
$$

A soma dos momentos das forças em relação ao ponto A deve ser nula e, como tal,

$$
\begin{vmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ 0 & -m\,g \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & h \\ T_b\cos(70^\circ) & T_b\sin(70^\circ) \end{vmatrix} = -m\,g\,r\cos\theta + T_b\left(d\sin(70^\circ)\right) - h\cos(70^\circ) = 0
$$

na qual $r$ é a distância desde A até o centro de gravidade C e $\theta$ é o ângulo que a barra faz com a horizontal. Substituindo os valores de $m$, $g$, $T_b$ e $\cos\theta = d/6$,

$$
60.41 r = 213.55 \quad \Longrightarrow \quad r = 3.535\ \text{m}
$$

**Problema 2**. ($a$) Introduz-se a variável auxiliar $y = \dot{x}$ para tornar a equação diferencial de segunda ordem numa equação de primeira ordem. As equações de evolução do sistema dinâmico são então,

$$
\dot{x} = y \qquad \dot{y} = \left(x^2 - 3\right)y + 3x - x^3
$$

Os pontos de equilíbrio obtêm-se resolvendo o sistema das duas expressões nos lados direitos iguais a zero. No Maxima escreve-se

```
(%i1) e: [y, (x^2-3)*y+3*x-x^3]$
(%i2) p: solve(e);
```

$$
\left[\ [x=0,\ \ y=0\ ],\ \ [x=-\sqrt{3},\ \ y=0],\ \ [x=\sqrt{3},\ \ y=0]\right]
$$

Existem então 3 pontos de equilíbrio ($x$, $y$):

$$
\text{P}_1 = (0,0) \qquad \text{P}_2 = (-\sqrt{3},0) \qquad \text{P}_2 = (\sqrt{3},0)
$$

($b$) a matriz jacobiana é

```
(%i3) j: jacobian(e, [x,y]);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2xy - 3x^2 + 3 & x^2 - 3 \end{bmatrix}$$

E os valores próprios das matrizes das aproximações lineares do sistema, na vizinhança dos 3 pontos de equilíbrio, são

```
(%i4) map (eigenvalues, makelist (subst(q,j), q, p));
```

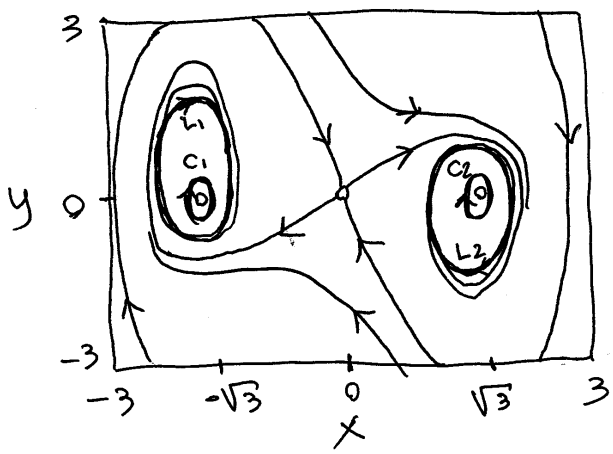
$$\left[\left[\left[-\frac{\sqrt{21}+3}{2}, \frac{\sqrt{21}-3}{2}\right], [1, 1]\right], \left[\left[-\sqrt{6}\mathrm{i}, \sqrt{6}\mathrm{i}\right], [1, 1]\right], \left[\left[-\sqrt{6}\mathrm{i}, \sqrt{6}\mathrm{i}\right], [1, 1]\right]\right]$$

Como $\sqrt{21}$ é maior que 3, $P_1$ é ponto de sela e $P_2$ e $P_3$ parecem ser são ambos centros. Os centros podem ser deformados em focos o nós, devido aos termos não lineares, mas o retrato de fase corrobora que existem ciclos na vizinhança de $P_2$ e $P_3$ e, como tal, ambos são centros.

(*c*) O retrato de fase obtém-se com o comando:

```
(%i5) plotdf (e, [x, y], [x, -3, 3], [y, -3, 3])$
```

e traçando algumas curvas de evolução. A figura seguinte mostra as curvas mais importantes:




$C_1$ e $C_2$ são dois dos ciclos que existem à volta de $P_2$ e $P_3$. As duas curvas de evolução que saem do ponto de sela aproximam-se desses ciclos mas, como não se podem cruzar com eles, conclui-se que existem dois ciclos limite, $L_1$ e $L_2$ à volta de cada um dos pontos $P_2$ e $P_3$.

(*d*) Existe um número infinito de ciclos, dentro dos dois ciclos limite $L_1$ e $L_2$ à volta de cada um dos pontos $P_2$ e $P_3$.

### Perguntas

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **3.** A | **6.** C | **9.** D | **12.** C | **15.** D |
| **4.** A | **7.** C | **10.** D | **13.** A | **16.** B |
| **5.** D | **8.** D | **11.** D | **14.** D | **17.** E |

# Critérios de avaliação

### Problema 1

- Equação da soma das componentes $x$ das forças ____ 0.6
- Equação da soma das componentes $y$ das forças ____ 0.6
- Obtenção dos valores das duas tensões ____ 0.8
- Determinação das coordenadas dos pontos A e B e ângulo da barra com a horizontal ____ 0.8
- Equação da soma dos momentos das forças ____ 0.4
- Obtenção da distância até o centro de gravidade ____ 0.8

### Problema 2

- Equações de evolução ____ 0.4
- Obtenção dos três pontos de equilíbrio ____ 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana e valores próprios ____ 0.8
- Caraterização dos três pontos de equilíbrio ____ 0.8
- Retrato de fase ____ 1.2
- Identificação dos ciclos ____ 0.4