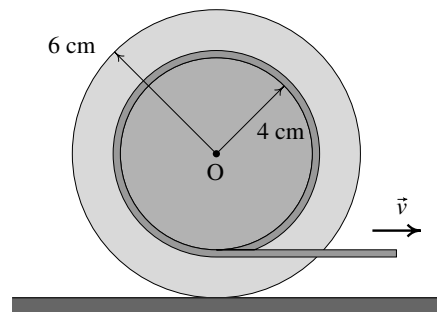


Nome: \_\_\_\_\_

**Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador.** O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros!

1. (4 valores). Um cilindro com raio de 4 cm está colado a uma roda com 6 cm de raio que se encontra sobre uma superfície horizontal plana, tal como mostra a figura. Uma corda foi enrolada à volta do cilindro e está a ser puxada horizontalmente para a direita, com velocidade constante  $\vec{v}$  de valor 2.5 cm/s. O movimento da corda faz rodar a roda sobre a superfície horizontal, sem derrapar. (a) Determine o valor da velocidade angular da roda. (b) Diga em que sentido se desloca o ponto O, no eixo da roda e do cilindro, e determine o valor da sua velocidade. (c) Determine quantos centímetros de corda são desenrolados do cilindro a cada segundo.



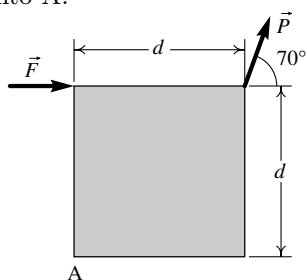
2. (4 valores). O sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = 2xy^3 - x^4 \quad \dot{y} = y^4 - 2x^3y$$

tem um único ponto de equilíbrio na origem. A matriz jacobiana nesse ponto é igual a zero e, portanto, os valores próprios (nulos) não podem ser usados para caracterizar o ponto de equilíbrio. Use o seguinte método para analisar o retrato de fase do sistema: (a) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto do eixo dos  $x$  e em qualquer ponto do eixo dos  $y$ . (b) Determine o versor na direção da velocidade de fase em qualquer ponto das duas retas  $y = x$  e  $y = -x$ . (c) Faça a mão um gráfico mostrando os versores que encontrou nas alíneas a e b, em vários pontos nos 4 quadrantes do espaço de fase, e trace algumas curvas de evolução seguindo as direções da velocidade de fase. Com base nesse gráfico, que tipo de ponto de equilíbrio julga que é a origem? (d) Diga se existem ciclos, órbitas homoclínicas ou heteroclínicas e no caso afirmativo quantas. (e) No primeiro quadrante,  $x \geq 0, y \geq 0$ , o sistema pode ser considerado um sistema de duas espécies. Diga se é um sistema com cooperação, com competição ou predador presa. Explique em palavras como será a evolução das duas populações  $x$  e  $y$  a partir de quaisquer valores iniciais  $x_0$  e  $y_0$ .

**PERGUNTAS.** Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. O quadrado na figura tem aresta  $d = 9$  cm. O módulo da força  $\vec{F}$  é 20 N e o módulo da força  $\vec{P}$  é 60 N. Determine o módulo do momento produzido por essas duas forças em relação ao ponto A.



- (A) 3.95 N·m      (C) 3.6 N·m      (E) 8.72 N·m  
(B) 1.43 N·m      (D) 7.2 N·m

Resposta:

4. A componente  $x$  da aceleração de uma partícula aumenta em função do tempo, de acordo com a expressão  $a_x = 5t$  (unidades SI). No instante  $t = 0$  a componente  $x$  da velocidade é nula e a componente da posição é  $x = 7$  m. Determine a componente  $x$  da posição em  $t = 2$  s.

- (A) 13.7 m      (C) 41.0 m      (E) 6.8 m  
(B) 84.7 m      (D) 34.2 m

Resposta:

5. Qual dos sistemas dinâmicos na lista é equivalente à equação diferencial  $2\ddot{x}x - 2x^2\dot{x} + 4x^3 = 0$ ?

- (A)  $\dot{x} = y \quad \dot{y} = 2y - 2$   
(B)  $\dot{x} = y \quad \dot{y} = 4xy - 2x$   
(C)  $\dot{x} = y \quad \dot{y} = xy - 2x^2$   
(D)  $\dot{x} = y \quad \dot{y} = 2y + x$   
(E)  $\dot{x} = y \quad \dot{y} = 2y - 2x$

Resposta:

6. O espaço de fase de um sistema dinâmico é o plano  $xy$ . Em coordenadas polares, as equações de evolução são  $\dot{\theta} = -3$ ,  $\dot{r} = r^3 - 2r^2 + r$ . Quantos ciclos limite tem o sistema?

- (A) 3      (C) 0      (E) 4  
(B) 1      (D) 2

Resposta:

7. Num sistema que se desloca no eixo dos  $x$ , a força resultante é  $x^2 + x - 2$ . Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição  $x$  dum ponto de equilíbrio estável?

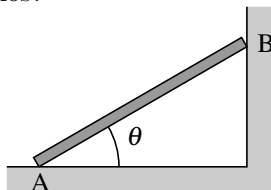
- (A) 1      (C) 2      (E) 3  
(B) -1      (D) -2

Resposta:

8. Um ponto num objeto descreve numa trajetória curva, com raio constante. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?
- (A) A aceleração angular é constante.  
 (B) A velocidade angular é constante.  
 (C) O módulo da velocidade é diretamente proporcional à velocidade angular.  
 (D) A aceleração normal é constante.  
 (E) O módulo da aceleração é diretamente proporcional à aceleração angular.

Resposta: ☐

9. A figura mostra uma barra reta com comprimento  $L$  que está a cair; enquanto a barra cai, o extremo A desliza na superfície horizontal e o extremo B desliza sobre a parede vertical. Qual é a relação entre os valores das velocidades dos dois extremos?



- (A)  $v_A = v_B \tan \theta$  (D)  $v_A = v_B \sin \theta$   
 (B)  $v_A = 2 v_B$  (E)  $v_A = v_B$   
 (C)  $v_A = v_B \cos \theta$

Resposta: ☐

10. Um bloco de massa 2 kg desce deslizando sobre a superfície de um plano inclinado com base  $x = 8$  m e altura  $y = 4$  m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

- (A) 19.6 N (C) 17.53 N (E) 8.77 N  
 (B) 10.87 N (D) 4.93 N

Resposta: ☐

11. Quais são as componentes da velocidade de fase do sistema conservativo com energia potencial  $U(x) = 3e^x$  e massa  $m = 3$ ?

- (A)  $v \vec{e}_x + e^{-x} \vec{e}_y$  (D)  $v \vec{e}_x - x \vec{e}_y$   
 (B)  $v \vec{e}_x - e^{-x} \vec{e}_y$  (E)  $v \vec{e}_x + e^x \vec{e}_y$   
 (C)  $v \vec{e}_x - e^x \vec{e}_y$

Resposta: ☐

12. A velocidade de uma partícula, em função do tempo, é:  $2t^2 \vec{e}_x + t^4 \vec{e}_y$  (unidades SI). Encontre a expressão para o módulo da aceleração.

- (A)  $4t^3 + 4t$  (D)  $4t$   
 (B)  $\sqrt{16t^6 + 16t^2}$  (E)  $4t^3$   
 (C)  $\sqrt{4t^3 + 4t}$

Resposta: ☐

13. Em qual dos seguintes sistemas dinâmicos o critério de Bendixson permite concluir que não pode existir nenhum ciclo, órbita homoclínica ou órbita heteroclínica?

- (A)  $\dot{x} = 3xy$   $\dot{y} = 2xy$  (D)  $\dot{x} = xy^2$   $\dot{y} = -x^2y$   
 (B)  $\dot{x} = -2xy$   $\dot{y} = -xy$  (E)  $\dot{x} = xy$   $\dot{y} = x^3y$   
 (C)  $\dot{x} = 2xy^2$   $\dot{y} = x^2y$

Resposta: ☐

14. A energia mecânica de um corpo celeste em órbita à volta do Sol pode ser considerada constante e é dada pela expressão

$$E_m = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{4\pi^2 m}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

onde  $m$  é a massa do corpo,  $x$  e  $y$  as suas coordenadas no plano da órbita com origem no Sol, as distâncias são medidas em unidades astronómicas e o tempo em anos. Encontre a expressão da componente  $y$  da aceleração ( $\ddot{y}$ ).

- (A)  $\ddot{y} = -\frac{4\pi^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$  (D)  $\ddot{y} = -\frac{4\pi^2 xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$   
 (B)  $\ddot{y} = \frac{4\pi^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$  (E)  $\ddot{y} = \frac{4\pi^2 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$   
 (C)  $\ddot{y} = -\frac{4\pi^2 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

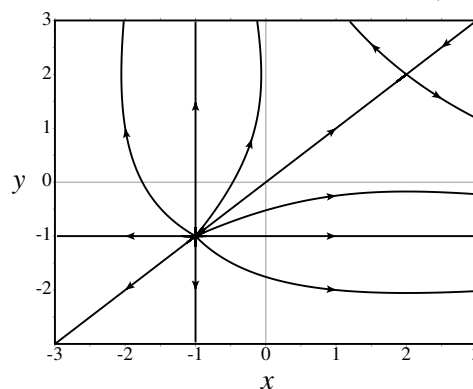
Resposta: ☐

15. Quando um cilindro com massa 135 g é pendurado de uma mola vertical, fica em equilíbrio a uma altura de 10 cm. Se o cilindro for substituído por outro com massa de 139 g, ficará em equilíbrio a uma altura de 7 cm. Calcule a constante elástica da mola.

- (A) 2613 mN/m (C) 1307 mN/m (E) 653 mN/m  
 (B) 133 mN/m (D) 261 mN/m

Resposta: ☐

16. A figura mostra o retrato de fase de um sistema não linear com dois pontos de equilíbrio, em  $(x, y) = (-1, -1)$  e  $(x, y) = (2, 2)$ . Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança do ponto  $(-1, -1)$ ?



- (A)  $\dot{x} = 3x$   $\dot{y} = -3y$  (D)  $\dot{x} = 3y$   $\dot{y} = -3y$   
 (B)  $\dot{x} = -3y$   $\dot{y} = 3x$  (E)  $\dot{x} = -3x$   $\dot{y} = -3y$   
 (C)  $\dot{x} = 3x$   $\dot{y} = 3y$

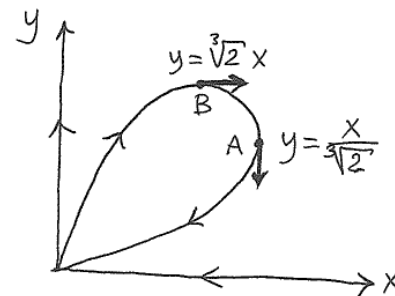
Resposta: ☐

17. Numa máquina de Atwood, com dois cilindros de 200 e 500 gramas e roldana com 600 gramas, a expressão para a energia mecânica total é:  $0.5v^2 - 0.3gy$ , em unidades SI, onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $y$  é a distância que o cilindro mais pesado desce e  $v$  a velocidade com que esse cilindro desce. Calcule o valor da aceleração dos cilindros, em unidades SI, admitindo conservação da energia mecânica.

- (A) 5.88 (C) 16.33 (E) 32.67  
 (B) 9.8 (D) 2.94

Resposta: ☐

Quando os números iniciais de predadores e presas não sejam nulos, as duas populações evoluirão seguindo uma órbita homoclínica. O ponto A em que a população de predadores atinge o seu valor máximo é quando a componente  $x$  da velocidade de fase é nula, ou seja,  $y = x/\sqrt[3]{2}$ . O ponto B onde a população de presas atinge o seu valor máximo é quando a componente  $y$  da velocidade de fase é nula, ou seja,  $y = \sqrt[3]{2}x$ . Assim sendo, existem 3 casos diferentes: (i) Se  $y_0 > \sqrt[3]{2}x_0$ , os números de predadores e presas aumentam, até um instante  $t_B$  em que o número de presas começa a diminuir; num instante posterior  $t_A$ , o número de predadores também começa a diminuir e finalmente as duas populações serão extintas. (ii) Se  $x_0/\sqrt[3]{2} < y_0 \leq \sqrt[3]{2}x_0$ , o número de presas diminui e o número de predadores aumenta, até um instante  $t_A$  em que o número de predadores também começa a diminuir e as duas populações serão extintas. (iii) Se  $0 < y_0 \leq x_0/\sqrt[3]{2}$ , as duas populações diminuem até se extinguirem totalmente.



## Perguntas

- |      |      |       |       |       |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. B | 6. B | 9. A  | 12. B | 15. C |
| 4. A | 7. D | 10. C | 13. C | 16. C |
| 5. C | 8. C | 11. C | 14. A | 17. D |