Problemas

1. (*a*) No trajeto AB,

$$a_\text{t} = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s} \quad\Longrightarrow\quad a_\text{t}\int_0^{0.6} \mathrm{d}\,s = \int_0^{10} v\,\mathrm{d}\,v \quad\Longrightarrow\quad a_\text{t} = 83.33\ \text{m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 83.33 m/s^2. No trajeto EF,

$$a_\text{t} = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s} \quad\Longrightarrow\quad a_\text{t}\int_0^{0.45} \mathrm{d}\,s = \int_{10}^{0} v\,\mathrm{d}\,v \quad\Longrightarrow\quad a_\text{t} = -111.11\ \text{m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 111.11 m/s^2. No trajeto CD, o módulo da aceleração é nulo, porque o movimento é retilíneo e uniforme. No trajeto BC, a aceleração tem unicamente componente normal:

$$a_\text{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{0.6} = 166.67\ \text{m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 166.67 m/s^2. No trajeto DE, a aceleração também tem unicamente componente normal:

$$a_\text{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{10^2}{0.45} = 222.22\ \text{m/s}^2$$

o módulo da aceleração é 222.22 m/s^2.

(*b*) A distância total percorrida é a soma dos três segmentos AB, CD e EF, mais os dois arcos BC e DE, ambos com ângulo de $\pi/2$ radianos:

$$d = 0.6 + 0.2 + 0.45 + \frac{\pi}{2}\,(0.6 + 0.45) = 2.90\ \text{m}$$

O tempo que a partícula demora a percorrer o trajeto BCDE é:

$$t_1 = \frac{0.2 + \dfrac{\pi}{2}\,(0.6 + 0.45)}{10} = 0.185\ \text{s}$$

Para calcular o tempo que demora no trajeto AB, integra-se uma equação de movimento

$$a_\text{t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \quad\Longrightarrow\quad t_2 = \frac{1}{a_\text{t}}\int_0^{10} \mathrm{d}\,v = \frac{10}{83.33} = 0.120\ \text{s}$$

e usa-se o mesmo procedimento para calcular o tempo que demora no trajeto EF:

$$a_\text{t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \quad\Longrightarrow\quad t_3 = \frac{1}{a_\text{t}}\int_{10}^{0} \mathrm{d}\,v = \frac{10}{111.11} = 0.090\ \text{s}$$

A velocidade média é igual à distância percorrida dividida pelo tempo que demorou:

$$v_m = \frac{d}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{2.90}{0.185 + 0.120 + 0.090} = 7.34\ \text{m/s}$$

2. (*a*) A relação entre $\dot{y}$ e $\dot{x}$ encontra-se derivando a equação da calha $y = x^2$

$$\dot{y} = 2\,x\,\dot{x}$$

Em função da coordenada generalizada x e da velocidade generalizada $\dot{x}$, a energia cinética da partícula é

$$E_\text{c} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) = \dot{x}^2\left(4\,x^2 + 1\right)$$

(b) Arbitrando energia potencial gravítica nula em $y=0$, A energia potencial gravítica da partícula é:

$$U_\mathrm{g} = m\,g\,y = 19.6x^2$$

(c) A equação de Lagrange é:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial x} + \frac{\partial U_\mathrm{g}}{\partial x} = \ddot{x}\left(8x^2+2\right) + 16\dot{x}^2 x - 8\dot{x}^2 x + 39.2x = 0$$

e a equação de movimento:

$$\ddot{x} = -\frac{x\left(4\dot{x}^2+19.6\right)}{4x^2+1}$$

(d) As equações de evolução são:

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = -\frac{x\left(4\dot{x}^2+19.6\right)}{4x^2+1}$$

Os pontos de equilíbrio são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} v = 0 \\ -\dfrac{x\left(4v^2+19.6\right)}{4x^2+1} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} v = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

A matriz jacobiana é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\left(16v^2+78.4\right)x^2 - 4v^2 - 19.6}{\left(4x^2+1\right)^2} & -\dfrac{8xv}{4x^2+1} \end{bmatrix}$$

e no ponto de equilíbrio (0, 0) é igual a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -19.6 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a soma dos valores próprios é nula e o produto é positivo, os dois valores próprios são imaginários e o ponto de equilíbrio é um centro. (Também é possível traçar o retrato de fase para mostrar que a origem é um centro).

Perguntas

3. E

4. E

5. B

6. D

7. E

8. B

9. E

10. A

11. E

12. D

13. A

14. B

15. B

16. D

17. D