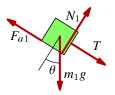
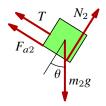
Regente: Jaime Villate

FEUP - MIEIC

Resolução do exame de 27 de junho de 2018

Problema 1. A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre dos dois blocos





T é a tensão na corda, N_1 e N_2 as reações normais e F_{a1} e F_{a1} as forças de atrito.

(a) Como os blocos estão em repouso, as somas das componentes das forças tangentes e perpendiculares ao plano inclinado são:

$$\begin{cases} m_1 g \sin \theta + T - F_{a1} = 0 \\ N_1 - m_1 g \cos \theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 g \sin \theta - T - F_{a2} = 0 \\ N_2 - m_2 g \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Como o coeficiente de atrito estático do plano com o bloco 2 é menor do que o com o bloco 1, se os blocos não estivessem ligados pela corda, o bloco 2 começava a deslizar a um ângulo menor do que o bloco 1. A tensão na corda permite que o ângulo possa ser maior do que o ângulo ao qual o bloco 2 começava a deslizar e o conjunto só começará a deslizar quando as forças de atrito estático sejam máximas nos dois blocos. Como tal, $F_{a1} = \mu_{e1} N_1$ e $F_{a1} = \mu_{e1} N_1$ e as equações anteriores conduzem a

$$m_1 g \sin \theta + T - \mu_{1e} m_1 g \cos \theta = 0$$
 $m_2 g \sin \theta - T - \mu_{2e} m_2 g \cos \theta = 0$

Somando essas duas equações elimina-se a tensão, e dividindo por $g\cos\theta$ encontra-se uma expressão para a tangente do ângulo máximo

$$\tan \theta = \frac{\mu_{1e} \, m_1 + \mu_{2e} \, m_2}{m_1 + m_2}$$

Substituindo os valores dados, obtém-se o ângulo máximo:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.35 + 0.25 \times 2}{1 + 2}\right) = 15.8^{\circ}$$

(b) As forças de atrito são atrito cinético e a aceleração a dos dois blocos é a mesma. Como tal, as componentes tangencial e perpendicular das forças resultantes nos dois blocos são:

$$\begin{cases} m_1 g \sin \theta + T - \mu_{1c} N_1 = m_1 a \\ N_1 - m_1 g \cos \theta = 0 \end{cases} \begin{cases} m_2 g \sin \theta - T - \mu_{2c} N_2 = m_2 a \\ N_2 - m_2 g \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$m_1 g \sin \theta + T - \mu_{1c} m_1 g \cos \theta = m_1 a$$
 $m_2 g \sin \theta - T - \mu_{2c} m_2 g \cos \theta = m_2 a$

Multiplicando a primeira equação por m_2 , a segunda por m_1 , e igualando as duas expressões obtém-se

$$m_1 m_2 g \sin \theta + m_2 T - \mu_{1c} m_1 m_2 g \cos \theta = m_2 m_1 g \sin \theta - m_1 T - \mu_{2c} m_1 m_2 g \cos \theta$$

E a tensão no fio é

$$T = \frac{m_1 m_2 g (\mu_{1c} - \mu_{2c}) \cos \theta}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 9.8 (0.28 - 0.2) \cos 20^{\circ}}{1 + 2} = 0.491 \text{ N}$$

Observe-se que se μ_{1c} não fosse maior que μ_{2c} , a corda não permanecia esticada e aparecia uma força de contacto entre os dois blocos.

Problema 2. Definindo a função y, igual à derivada de x, as equações de evolução do sistema são:

$$\dot{x} = y \qquad \qquad \dot{y} = x^3 - x - (a+x)y$$

Os pontos de equilíbrio são as soluções das equações

$$y = 0$$
 $x^3 - x - (a + x)y = x(x^2 - 1) = 0$

Como tal, há três pontos de equilíbrio (x, y):

$$P_1 = (0,0)$$
 $P_2 = (1,0)$ $P_3 = (-1,0)$

Derivando os lados direitos das equações de evolução, em ordem a x e a y, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 3x^2 - y - 1 & -x - a \end{bmatrix}$$

No ponto P₁, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$$

que tem traço -a e determinante igual a 1. Como tal, se a for positiva, P_1 é um ponto de equilíbrio estável e se a for negativa, esse ponto é instável. Será nó quando $|a| \ge 2$ (determinante menor que o traço ao quadrado sobre 4) ou foco quando |a| < 2.

As matrizes das aproximações lineares próximo dos pontos P_2 e P_3 são

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 - a \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 - a \end{bmatrix}$$

ambas com determinante igual a -2. Como tal, P_2 e P_3 são ambos pontos de sela, independentemente do valor de a.

Se a < 0, como todos os pontos de equilíbrio são instáveis, a corrente aumenta indefinidamente, que não é fisicamente possível. Se a > 0, como a origem é ponto de equilíbrio atrativo, para alguns valores iniciais da corrente e da sua derivada, a corrente aproximar-se-á de 0, que é fatível, mas para alguns valores iniciais a corrente também aumenta indefinidamente.

Perguntas

 3. E
 6. B
 9. C
 12. B
 15. C

 4. C
 7. C
 10. C
 13. A
 16. A

5. C **8.** A **11.** C **14.** C **17.** D

Cotações

Problema 1

• Diagramas de corpo livre e equações das somas das forças na alínea <i>a</i>	1.2
Resolução das equações para encontrar o ângulo máximo	0.8
• Equações das somas das forças na alínea b	1.2
Resolução das equações para encontrar a tensão	0.8
Problema 2	
Obtenção das equações de evolução	0.8
Determinação dos 3 pontos de equilíbrio	0.8
Obtenção da matriz jacobiana	0.4
Obtenção das 3 matrizes das aproximações lineares	0.8
Caraterização dos pontos de equilíbrio	0.8
Interpretação dos resultados	0.4