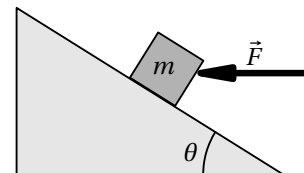


Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

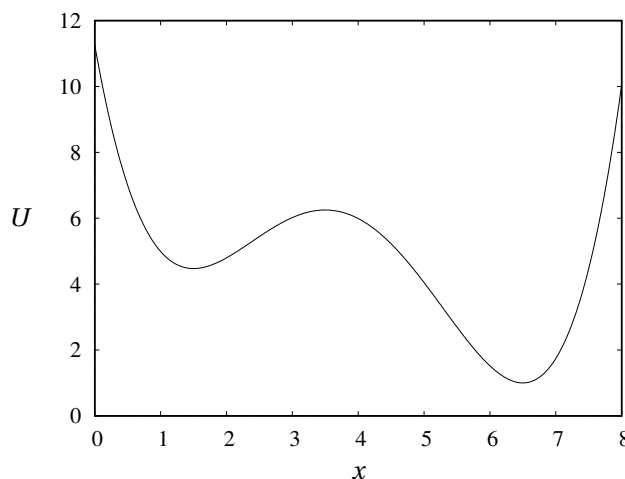
1. (4 valores) Um bloco de massa $m = 1.5 \text{ kg}$ encontra-se na superfície de um plano inclinado, que faz um ângulo $\theta = 28^\circ$ com a horizontal. Entre o bloco e o plano inclinado o coeficiente de atrito estático é 0.3 e o coeficiente de atrito cinético é 0.2. Sobre o bloco atua uma força externa \vec{F} , horizontal, tal como mostra a figura. (a) Quando o módulo da força for $F = 10 \text{ N}$, o bloco permanece em repouso; determine o valor da força de atrito entre o bloco e o plano. (b) Se a força aumenta para $F = 15 \text{ N}$, o bloco acelera para cima do plano; determine o valor da aceleração.



2. (4 valores) A função hamiltoniana de um sistema conservativo é:

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + U(x)$$

onde $U(x)$ é a função representada no gráfico à direita. (a) Determine a posição dos pontos de equilíbrio no plano xy . (b) Trace o retrato de fase aproximado, no plano xy , mostrando os pontos de equilíbrio e as curvas de evolução que considere mais importantes. (c) Se no instante $t = 0$ o estado do sistema for $(x, y) = (5, -1)$, explique como será a evolução do sistema em $t > 0$.



PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. O vetor posição dum ponto, em função do tempo, é dado pela expressão: $2t^4 \hat{i} + (t^2 + 2) \hat{j}$ (unidades SI). Calcule o ângulo entre os vetores velocidade e posição, no instante $t = 1$.

- (A) 88.8° (C) 16.9° (E) 67.6°
(B) 42.3° (D) 55.0°

Resposta:

4. A expressão da energia cinética dum sistema conservativo é $\frac{1}{2}(s^2 + 3s^2)$, onde s é a posição na trajetória, e a expressão da energia potencial total é $9s$. O sistema tem um único ponto de equilíbrio; determine o valor de s nesse ponto de equilíbrio.

- (A) -1 (C) -2 (E) 1
(B) 2 (D) 3

Resposta:

5. As equações de evolução dum sistema linear são:

$$\dot{x} = x - 2y \quad \dot{y} = 2x + y$$

Como variam x e y em função do tempo?

- (A) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude crescente.
(B) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude constante.
(C) Oscilam com período igual a π e amplitude constante.
(D) Oscilam com período π e amplitude crescente.
(E) Oscilam com período $\pi/2$ e amplitude decrescente.

Resposta:

6. A força resultante sobre um objeto de massa 2 kg é $\vec{F} = 2\hat{i} + 7t\hat{j}$ (SI). Se a velocidade do objeto em $t = 0$ for $5\hat{i} + 6\hat{j} \text{ m/s}$, calcule a velocidade em $t = 7 \text{ s}$.

- (A) $12.0\hat{i} + 30.5\hat{j}$ (D) $12.0\hat{i} + 85.8\hat{j}$
(B) $7.0\hat{i} + 85.8\hat{j}$ (E) $19.0\hat{i} + 177.5\hat{j}$
(C) $12.0\hat{i} + 91.8\hat{j}$

Resposta:

7. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy . Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 3r^2 + 2r$. Quantos ciclos limite tem o sistema?

- (A) 1 (C) 2 (E) 0
(B) 4 (D) 3

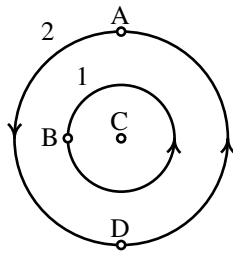
Resposta:

8. A matriz jacobiana dum sistema não linear, num ponto de equilíbrio P no plano de fase (x, y) , encontra-se na variável J do Maxima. O comando `eigenvectors(J)` produz: `[[[-1, -2], [1, 1]], [[1, -1], [1, 1/3]]]` que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto P?

- (A) ponto de sela. (D) nó atrativo.
(B) centro. (E) foco atrativo.
(C) foco repulsivo.

Resposta:

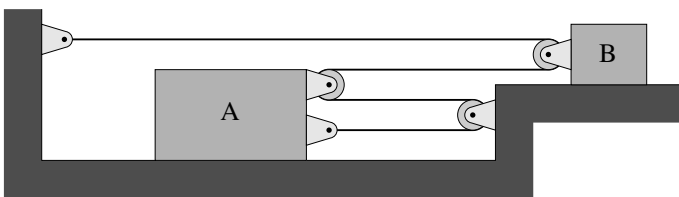
9. A figura mostra o retrato de fase dum sistema dinâmico com duas variáveis de estado e 4 pontos de equilíbrio: A, B, C e D. Que tipo de curva de evolução é a circunferência número 2?



- (A) Isoclina. (D) Ciclo.
(B) Nulclina. (E) Órbita heteroclínica.
(C) Órbita homoclínica.

Resposta:

10. O bloco B move-se para a direita com velocidade de valor constante 210 mm/s. Calcule o valor absoluto da velocidade do bloco A.



- (A) 105 mm/s (C) 210 mm/s (E) 315 mm/s
(B) 70 mm/s (D) 140 mm/s

Resposta:

11. Quando um avião acelera desde o repouso, na pista de decolagem, a expressão da sua aceleração tangencial é $2.5 - 2.5 \times 10^{-5} v^2$ (em unidades SI), onde v é o valor da velocidade do avião. Para conseguir levantar voo, a velocidade mínima do avião no fim da pista deve ser de 250 km/h. Determine o comprimento mínimo, em metros, que deverá ter a pista de decolagem.

- (A) 612 (C) 701 (E) 820
(B) 989 (D) 1251

Resposta:

12. Qual das seguintes equações poderá ser uma das equações de evolução num sistema de duas espécies?

- (A) $\dot{y} = y^3 - 3x \sin x$ (D) $\dot{y} = x\sqrt{y-x} + xy^2$
(B) $\dot{y} = y^3 + 3xy \sin x$ (E) $\dot{y} = 2xy^2 - x \cos y$
(C) $\dot{y} = x\sqrt{y+1} - 5yx^2$

Resposta:

13. As equações de evolução dum sistema linear, são:

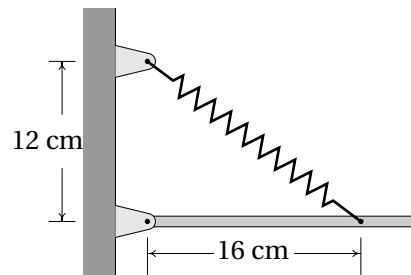
$$\dot{x} = ax + y \quad \dot{y} = x + a(x + y)$$

onde a está no intervalo $a < -1$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem do espaço de fase?

- (A) nó atrativo (C) nó repulsivo (E) foco repulsivo
(B) foco atrativo (D) ponto de sela

Resposta:

14. A barra na figura é homogênea, com 20 cm de comprimento e massa igual a 50 gramas. Se na posição inicial, no lado esquerdo da figura, a barra for largada do repouso na posição horizontal, rodará descendo até a posição vertical, no lado direito da figura. Usa-se uma mola de 15 cm (quando não está nem comprida nem esticada) e com constante elástica que faz com que quando a barra desça fique novamente em repouso na posição vertical. Determine a constante elástica da mola.



- (A) 2.72 N/m (C) 4.08 N/m (E) 8.17 N/m
(B) 6.81 N/m (D) 5.44 N/m

Resposta:

15. Calcule o momento de inércia de uma esfera homogênea com 2 centímetros de raio e massa igual a 101 gramas, que roda à volta dum eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia de uma esfera de raio R e massa m à volta do eixo que passa pelo centro é $\frac{2}{5} m R^2$.

- (A) $3.23 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ (D) $2.89 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
(B) $8.08 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ (E) $5.66 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
(C) $1.62 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

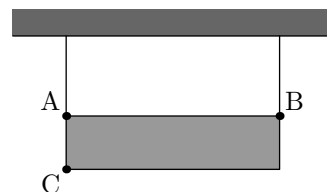
Resposta:

16. Um jogador de golfe lança a sua bola com uma velocidade inicial de 53 m/s, fazendo um ângulo de 25° com a horizontal. Desprezando a resistência do ar, determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola, no ponto inicial onde esta foi lançada.

- (A) 183.0 m (C) 316.3 m (E) 263.6 m
(B) 219.6 m (D) 152.5 m

Resposta:

17. Para determinar a posição do seu centro de gravidade, uma barra retangular foi pendurada de dois fios verticais, ficando em repouso na posição horizontal que mostra a figura. Sabendo que a tensão no fio ligado no ponto A é 2.2 N, a tensão no fio ligado em B é 3.1 N e o comprimento da barra, desde A até B, é 30 cm, determine a distância desde a aresta AC até o centro de gravidade.

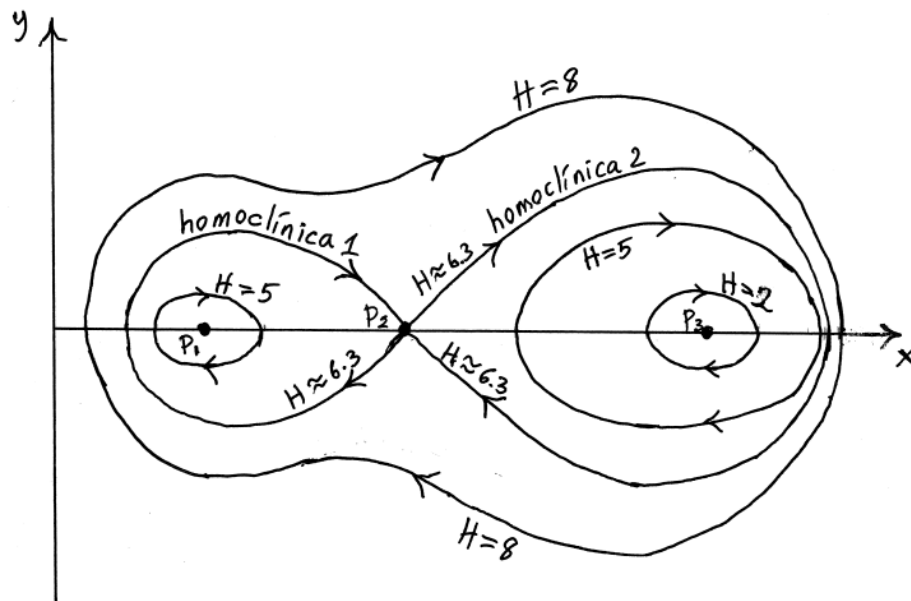


- (A) 8.4 cm (C) 12.2 cm (E) 14.6 cm
(B) 17.5 cm (D) 10.1 cm

Resposta:

usar $H = 5$, que conduz a dois ciclos diferentes, um à volta de P_1 e outro à volta de P_3 . (iii) $H \approx 6.3$, que conduz a duas órbitas homoclínicas, uma à volta de P_1 e outra à volta de P_3 . (iv) $H > 6.3$, que conduz a ciclos que contornam os 3 pontos de equilíbrio (mostra-se o caso $H = 8$).

O retrato de fase é o sumário desses resultados:



(c) $H(5, -1) \approx 1/2 + 4 = 4.5$, que se encontra na região onde há ciclos em torno do ponto P_3 . O sistema oscila em torno desse ponto. O valor inicial negativo de y implica que x diminui e y aumenta, até um instante em que $x \approx 4.5$ e $y = 0$. A partir desse instante, x e y aumentam, até um instante em que $x = 6.5$ e y atinge o valor máximo $y = \sqrt{2(4.5 - 1)} \approx 2.6$; a seguir, x continua a aumentar mas y diminui, até um instante em que $x \approx 7.5$ e $y = 0$. Depois, x e y diminuem até $x = 6.5$, $y = -2.6$ (valor mínimo de y). A seguir, x continua a diminuir mas y aumenta, até voltar ao estado inicial do sistema: $x = 5$, $y = -1$. O mesmo ciclo repete-se indefinidamente.

Perguntas

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. B | 6. C | 9. E | 12. B | 15. E |
| 4. D | 7. E | 10. D | 13. B | 16. C |
| 5. D | 8. D | 11. B | 14. B | 17. B |

Cotações

Problema 1

- Diagrama de corpo livre incluindo ângulos e eixos 0.8
- Expressão da soma das componentes das forças paralelas ao plano (a) 0.8
- Obtenção da força de atrito, indicando as unidades 0.2
- Relação entre força de atrito cinético e reação normal (b) 0.4
- Expressão da soma das componentes das forças paralelas ao plano (b) 0.8
- Expressão da soma das componentes das forças perpendiculares ao plano (b) 0.8
- Obtenção da aceleração, indicando as unidades 0.2

Problema 2

- Obtenção dos 3 pontos de equilíbrio 0.8
- Retrato de fase mostrando os eixos x e y , os 3 pontos de equilíbrio e as curvas importantes (órbitas homoclínicas/heteroclínicas, ciclos, curvas abertas) com setas que indiquem o sentido em que o sistema evolui 2.4
- Explicação da evolução do sistema para $t > 0$ na alínea c 0.8