Resolução do Exame do dia 2 de julho de 2012

Problemas

1. (*a*) A velocidade angular inicial, no instante em que se aplicam os travões, obtém-se dividindo o ângulo correspondente a dez voltas pelo tempo que a roda demorou a dar essas dez voltas:

$$\omega_0 = \frac{10\times 2\pi}{8.2} = 7.662\ \mathrm{s}^{-1}$$

e a velocidade angular final é 0. Como a aceleração angular α é constante,

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-7.662}{2.9} = -2.642\ \mathrm{s}^{-2}$$

(*b*) O ângulo percorrido pela roda durante os 2.9 segundos da travagem determina-se integrando uma das equações de movimento:

$$\alpha = \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \quad\Longrightarrow\quad \int_0^\theta -2.642\,\mathrm{d}\theta = \int_{7.662}^0 \omega\,\mathrm{d}\omega \quad\Longrightarrow\quad -2.642\,\theta = -\frac{7.662^2}{2} \quad\Longrightarrow\quad \theta = 11.11$$

que corresponde a $11.11/(2\pi) = 1.8$ voltas.

(*c*) O momento produzido pela força $\vec{F}$ é igual ao momento de inércia da roda, vezes a sua aceleração angular:

$$-F\,r = I_0\,\alpha \quad\Longrightarrow\quad -0.271\,F = -0.135\times 2.64 \quad\Longrightarrow\quad F = 1.32\ \mathrm{N}$$

2. (*a*)

$$\dot{x} = \frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial v} = \frac{m\,v}{m} = v$$
$$\dot{v} = -\frac{1}{m}\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{m}\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{20}{3\,x^2} - \frac{5}{3}$$

(*b*) Os pontos de equilíbrio são as soluções do sistema:

$$v = 0$$
$$\frac{20}{3\,x^2} - \frac{5}{3} = 0 \quad\Longrightarrow\quad x^2 = 4 \quad\Longrightarrow\quad x = \pm 2$$

ou seja, há dois pontos de equilíbrio: $(x,v) = (2,0)$ e $(x,v) = (-2,0)$.

(*c*) A matriz jacobiana do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial v} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{20}{3\,x^2}-\dfrac{5}{3}\right) & \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{20}{3\,x^2}-\dfrac{5}{3}\right)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{40}{3\,x^3} & 0 \end{bmatrix}$$

(*d*) O traço da matriz jacobiana é nulo e o determinante é $40/(3\,x^3)$. No ponto de equilíbrio com $x = 2$, o determinante é $5/3$ e os valores próprios da matriz jacobiana são:

$$\lambda = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

assim sendo, o ponto em $(x,v) = (2,0)$ é um centro e existem ciclos na vizinhança desse ponto, com frequência:

$$f = \frac{|\lambda|}{2\,\pi} = \frac{\sqrt{5/3}}{2\,\pi} \approx 0.205\ \mathrm{Hz}$$

Perguntas

3. E

4. E

5. E

6. B

7. D

8. E

9. E

10. C

11. A

12. A

13. B

14. A

15. A

16. D

17. A