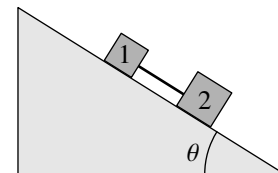


Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

1. (4 valores) Na figura, o bloco 1 tem massa $m_1 = 1 \text{ kg}$ e o bloco 2 tem massa $m_2 = 2 \text{ kg}$. Os dois blocos estão ligados por uma corda paralela à superfície do plano inclinado. Entre o bloco 1 e o plano inclinado, o coeficiente de atrito estático é $\mu_{1e} = 0.35$ e o coeficiente de atrito cinético $\mu_{1c} = 0.28$. Entre o bloco 2 e o plano inclinado, o coeficiente de atrito estático é $\mu_{2e} = 0.25$ e o coeficiente de atrito cinético $\mu_{2c} = 0.20$. (a) Encontre o ângulo θ máximo que o plano pode ser inclinado, permanecendo os dois blocos em repouso. (b) Quando o plano se inclina um ângulo $\theta = 20^\circ$, os dois blocos deslizam para baixo do plano; determine o valor da tensão na corda nesse caso.



2. (4 valores) A corrente num circuito elétrico é uma função contínua do tempo, $x(t)$, que verifica a seguinte equação diferencial:

$$\ddot{x} + x - x^3 + (a + x)\dot{x} = 0$$

onde a é um parâmetro real. Analise a equação como sistema dinâmico, nos dois casos $a < 0$ e $a > 0$. Em cada caso identifique os pontos de equilíbrio, determine de que tipo são e com base nesses resultados interprete o comportamento físico do circuito.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Lança-se um projétil desde uma janela a 3.4 m de altura, com velocidade de 10 m/s, inclinada 30° por cima da horizontal. Desprezando a resistência do ar, calcule a altura máxima atingida pelo projétil.

- (A) 7.2 m (C) 4.0 m (E) 4.7 m
(B) 6.0 m (D) 8.5 m

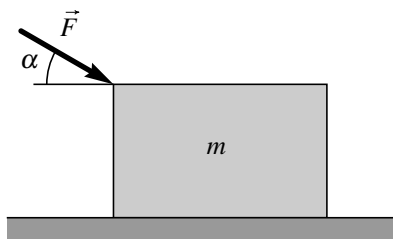
Resposta:

4. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem um único ponto de equilíbrio na origem e um ciclo limite. Qual poderá ser a matriz jacobiana do sistema na origem?

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
(B) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Resposta:

5. Um bloco com massa $m = 6 \text{ kg}$ encontra-se sobre a superfície de uma mesa horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa \vec{F} , com módulo de 30 N e direção que faz um ângulo $\alpha = 40^\circ$ com a horizontal, tal como mostra a figura. Calcule o módulo da reação normal entre o bloco e a mesa.



- (A) 69.06 N (C) 78.08 N (E) 58.8 N
(B) 48.54 N (D) 39.52 N

Resposta:

6. Calcule o momento de inércia de uma esfera homogênea com 1 centímetro de raio e massa igual a 21 gramas, que roda à volta dum eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia duma esfera de raio R e massa m à volta do eixo que passa pelo centro é $2mR^2/5$.

- (A) $4.20 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ (D) $8.40 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
(B) $2.94 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ (E) $1.68 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
(C) $1.50 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

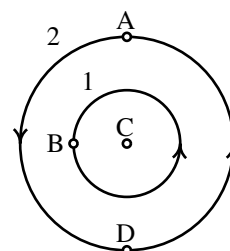
Resposta:

7. Quando se liga um PC, o disco rígido demora 3.6 s, a partir do repouso, até alcançar a velocidade normal de operação de 7200 rotações por minuto. Admitindo aceleração angular constante durante esse intervalo, determine o valor da aceleração angular

- (A) 279 rad/s² (C) 209 rad/s² (E) 838 rad/s²
(B) 419 rad/s² (D) 182 rad/s²

Resposta:

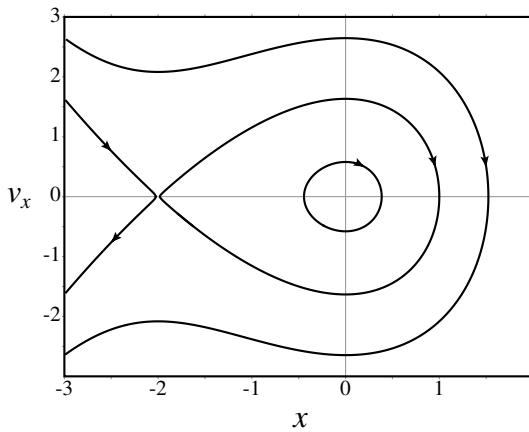
8. A figura mostra o retrato de fase dum sistema dinâmico com duas variáveis de estado e 4 pontos de equilíbrio: A, B, C e D. Que tipo de curva de evolução é a circunferência número 2?



- (A) Órbita heteroclínica. (D) Nulclina.
(B) Órbita homoclínica. (E) Isoclina.
(C) Ciclo.

Resposta:

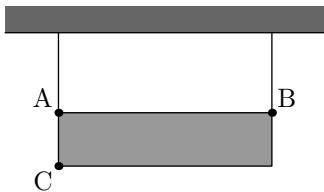
9. A figura mostra o retrato de fase dum sistema conservativo com um único grau de liberdade, x . Qual das expressões na lista é a expressão correta para a aceleração a_x ?



- (A) $-2x + x^2$ (D) $2x - x^2$
 (B) $x - x^2$ (E) $2x + x^2$
 (C) $-2x - x^2$

Resposta:

10. Para determinar a posição do seu centro de gravidade, uma barra retangular foi pendurada de dois fios verticais, ficando em repouso na posição horizontal que mostra a figura. Sabendo que a tensão no fio ligado no ponto A é 3.4 N, a tensão no fio ligado em B é 1.8 N e o comprimento da barra, desde A até B, é 30 cm, determine a distância desde a aresta AC até o centro de gravidade.



- (A) 15.0 cm (C) 10.4 cm (E) 21.6 cm
 (B) 12.5 cm (D) 18.0 cm

Resposta:

11. Uma partícula desloca-se ao longo duma calha circular com aceleração angular a aumentar em função do tempo, de acordo com a expressão $\alpha = 8t$ (unidades SI). No instante $t = 0$, a partícula encontra-se em repouso na posição em que o ângulo θ é igual a 0. Calcule o valor do ângulo, em radianos, em $t = 2.5$ s.
- (A) 10.42 (C) 20.83 (E) 62.5
 (B) 52.08 (D) 129.17

Resposta:

12. Quando uma partícula passa por um ponto P, a sua velocidade é $7\hat{i} + 2\hat{j}$ (SI) e a força resultante é $6\hat{i} + 6\hat{j}$ (SI). Calcule o valor da componente tangencial da força resultante nesse ponto.
- (A) 54 N (C) 8.49 N (E) 53 N
 (B) 7.42 N (D) 0 N

Resposta:

13. Quando um avião acelera desde o repouso, na pista de decolagem, a expressão da sua aceleração tangencial é $3.5 - 3 \times 10^{-5}v^2$ (em unidades SI), onde v é o valor da velocidade do avião. Para conseguir levantar voo, a velocidade mínima do avião no fim da

pista deve ser de 250 km/h. Determine o comprimento mínimo, em metros, que deverá ter a pista de decolagem.

- (A) 704 (C) 827 (E) 999
 (B) 614 (D) 1260

Resposta:

14. As equações de evolução de dois sistemas dinâmicos são:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - y \\ \dot{y} = 3x - y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Nenhum dos dois é linear.
 (B) Ambos são conservativos.
 (C) O 1º é conservativo e o 2º não é conservativo.
 (D) Nenhum dos dois é conservativo.
 (E) O 1º não é conservativo e o 2º é conservativo.

Resposta:

15. O sistema de Lotka-Volterra consegue explicar muito bem a evolução dum sistema predador presa mas tem uma grande desvantagem que outros sistemas tentam corrigir. Qual é essa desvantagem?

- (A) Nenhuma das duas populações pode chegar a extinguir-se totalmente.
 (B) Cada uma das populações pode aumentar indefinidamente.
 (C) Cada uma das populações pode oscilar entre um valor muito baixo e um valor muito elevado.
 (D) Nenhuma das duas populações atinge nunca um valor constante.
 (E) Cada uma das populações oscila indefinidamente.

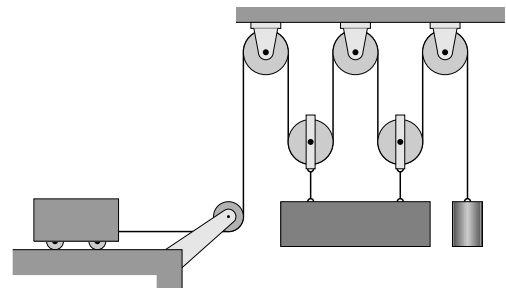
Resposta:

16. A expressão da energia cinética dum sistema conservativo é $\frac{1}{2}(\dot{s}^2 + 5s^2)$, onde s é a posição na trajetória, e a expressão da energia potencial total é $-10s$. O sistema tem um único ponto de equilíbrio; determine o valor de s nesse ponto de equilíbrio.

- (A) -2 (C) 1 (E) 3
 (B) 2 (D) -1

Resposta:

17. No sistema da figura, a barra permanece sempre horizontal. Determine a velocidade da barra num instante em que a velocidade do carrinho é 50 m/s, para a esquerda, e a velocidade do cilindro é 10 m/s, para cima.



- (A) 12 m/s (C) 15 m/s (E) 8 m/s
 (B) 9 m/s (D) 10 m/s

Resposta:

E a tensão no fio é

$$T = \frac{m_1 m_2 g (\mu_{1c} - \mu_{2c}) \cos \theta}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 9.8 (0.28 - 0.2) \cos 20^\circ}{1 + 2} = 0.491 \text{ N}$$

Observe-se que se μ_{1c} não fosse maior que μ_{2c} , a corda não permanecia esticada e aparecia uma força de contacto entre os dois blocos.

Problema 2. Definindo a função y , igual à derivada de x , as equações de evolução do sistema são:

$$\dot{x} = y \quad \dot{y} = x^3 - x - (a + x)y$$

Os pontos de equilíbrio são as soluções das equações

$$y = 0 \quad x^3 - x - (a + x)y = x(x^2 - 1) = 0$$

Como tal, há três pontos de equilíbrio (x, y) :

$$P_1 = (0, 0) \quad P_2 = (1, 0) \quad P_3 = (-1, 0)$$

Derivando os lados direitos das equações de evolução, em ordem a x e a y , obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 - y - 1 & -x - a \end{bmatrix}$$

No ponto P_1 , a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$$

que tem traço $-a$ e determinante igual a 1. Como tal, se a for positiva, P_1 é um ponto de equilíbrio estável e se a for negativa, esse ponto é instável. Será nó quando $|a| \geq 2$ (determinante menor que o traço ao quadrado sobre 4) ou foco quando $|a| < 2$.

As matrizes das aproximações lineares próximo dos pontos P_2 e P_3 são

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 - a \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 - a \end{bmatrix}$$

ambas com determinante igual a -2 . Como tal, P_2 e P_3 são ambos pontos de sela, independentemente do valor de a .

Se $a < 0$, como todos os pontos de equilíbrio são instáveis, a corrente aumenta indefinidamente, que não é fisicamente possível. Se $a > 0$, como a origem é ponto de equilíbrio atrativo, para alguns valores iniciais da corrente e da sua derivada, a corrente aproximar-se-á de 0, que é fatível, mas para alguns valores iniciais a corrente também aumenta indefinidamente.

Perguntas

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. E | 6. B | 9. C | 12. B | 15. C |
| 4. C | 7. C | 10. C | 13. A | 16. A |
| 5. C | 8. A | 11. C | 14. C | 17. D |

Cotações

Problema 1

- Diagramas de corpo livre e equações das somas das forças na alínea a 1.2
- Resolução das equações para encontrar o ângulo máximo0.8
- Equações das somas das forças na alínea b 1.2
- Resolução das equações para encontrar a tensão0.8

Problema 2

- Obtenção das equações de evolução0.8
- Determinação dos 3 pontos de equilíbrio0.8
- Obtenção da matriz jacobiana0.4
- Obtenção das 3 matrizes das aproximações lineares0.8
- Caracterização dos pontos de equilíbrio0.8
- Interpretação dos resultados0.4