

NOME: \_\_\_\_\_ LOG-IN FEUP: \_\_\_\_\_

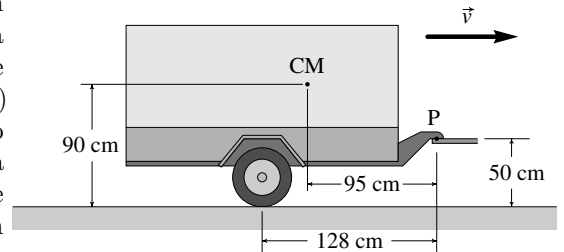
Exame final

Ponto 1

29 de Junho de 2010

**Duração:** Duas horas. Com consulta de formulário e utilização de meios de cálculo. Note que os meios de cálculo não pode ser usados como meios de comunicação ou de consulta da matéria! A violação desta regra implica exclusão imediata. Use  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  para a aceleração da gravidade.

1. (4 valores). O reboque apresentado na figura, com massa total de 750 kg, está ligado no ponto P a uma trela que sai da parte posterior de um automóvel. O reboque tem dois pneus idênticos, que neste problema podem ser considerados como um só, com uma única reacção normal e força de atrito desprezável; a resistência do ar também será desprezada. (a) Calcule a reacção normal nos pneus e a força vertical no ponto P, quando a velocidade for constante. (b) Quando a velocidade estiver a mudar, a força em P terá uma componente horizontal, para além da componente vertical; escreva as equações que teria que resolver para determinar, em função da aceleração  $a$ , o valor da reacção normal nos pneus e ambas as componentes da força em P (não se pretende que resolva estas equações; apenas que as escreva).



2. (4 valores). As equações de evolução de um sistema dinâmico são:

$$\dot{x} = y^2 + 3y - 10 \quad \dot{y} = xy + x + 12$$

- (a) Encontre os pontos de equilíbrio do sistema. (b) Determine a matriz jacobiana. (c) Calcule os valores próprios da matriz jacobiana em cada ponto de equilíbrio. (d) Diga que tipo de ponto é cada um dos pontos de equilíbrio.

**PERGUNTAS.** Cotação: Respostas certas, 0.8, erradas, -0.2, em branco, 0. Cada pergunta tem uma única resposta. Serão avaliadas apenas as respostas que apareçam na caixa de **Resposta** (e não na folha de exame ou de rascunho).

3. Na lista seguinte, qual pode ser o conjunto limite negativo de uma trajectória no espaço de fase?

- (A) centro  
(B) ponto de sela  
(C) ciclo limite atractivo  
(D) nó atractivo  
(E) foco atractivo

Resposta: ☐

4. Qual das seguintes é uma característica dos sistemas caóticos?

- (A) Não é possível prever a trajectória exacta do sistema.  
(B) Têm 3 ou mais pontos de equilíbrio.  
(C) O sistema não é autónomo  
(D) Pequenas variações nas condições iniciais produzem soluções muito diferentes.  
(E) As equações do sistema são aleatórias.

Resposta: ☐

5. Uma partícula desloca-se ao longo do eixo dos  $x$  de forma que a sua velocidade é dada pela expressão:

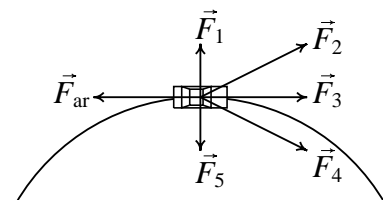
$$v(x) = b e^{-n x}$$

onde  $b$  e  $n$  são duas constantes. Qual é a expressão para a aceleração da partícula em função da posição  $x$ ?

- (A)  $-n b e^{-n x}$  (C)  $-b e^{-(n+1)x}$  (E)  $n b^2 e^{-n x}$   
(B)  $-n b^2 e^{-n x}$  (D)  $-n b^2 e^{-2 n x}$

Resposta: ☐

6. Um automóvel desloca-se numa curva, com velocidade de módulo constante. A figura mostra o automóvel visto de cima e a força de resistência do ar,  $\vec{F}_{\text{ar}}$ . Qual das cinco forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ ,  $\vec{F}_4$  ou  $\vec{F}_5$  representa melhor a força exercida pelo chão sobre o automóvel?



- (A)  $\vec{F}_5$  (C)  $\vec{F}_1$  (E)  $\vec{F}_3$   
(B)  $\vec{F}_2$  (D)  $\vec{F}_4$

Resposta: ☐

7. Num sistema conservativo, com variáveis de estado  $(x, v)$ , a velocidade de fase no ponto  $(8, 4)$  do espaço de fase tem componentes  $(4, 3)$ . Indique as componentes da velocidade de fase no ponto  $(8, -4)$  do espaço de fase.

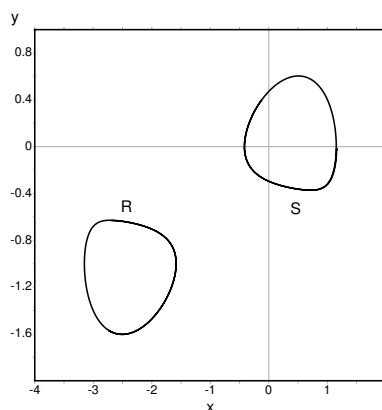
- (A)  $(-4, 3)$  (C)  $(4, -3)$  (E)  $(4, 3)$   
(B)  $(3, 4)$  (D)  $(-4, -3)$

Resposta: ☐

8. O sistema com equações de evolução:

$$\dot{x} = -y - y^2 \quad \dot{y} = 0.5x - 0.2y + xy - 1.2y^2$$

tem unicamente dois pontos de equilíbrio: um foco atractivo em  $(0,0)$  e um foco repulsivo em  $(-2, -1)$ . O sistema tem dois ciclos, representados pelas letras R e S na figura seguinte; qual das afirmações é correcta?



- (A) Nem R nem S podem ser ciclos limite.  
 (B) R é ciclo limite atractivo e S é ciclo limite repulsivo.  
 (C) R e S são ciclos limite atractivos.  
 (D) R é ciclo limite repulsivo e S é ciclo limite atractivo.  
 (E) R e S são ciclos limite repulsivos.

Resposta: ☐

9. Um corpo de 12 kg desloca-se ao longo do eixo dos  $x$ . A força resultante sobre o corpo é conservativa, com energia potencial dada pela expressão  $5 + 2x^2$  (SI). Se o corpo passa pela origem com velocidade  $5\vec{e}_x$ , com que energia cinética chegará ao ponto  $x = 2$  m?

- (A) 355 J (C) 1207 J (E) 710 J  
 (B) 42 J (D) 142 J

Resposta: ☐

10. As equações de um sistema dinâmico com variáveis de estado  $(x, y)$  foram transformadas para coordenadas polares  $(r, \theta)$ , obtendo-se as equações:

$$\dot{\theta} = -2 \quad \dot{r} = 3r - r^2$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Existe um ciclo limite atractivo em  $r = 3$   
 (B) Existe um ciclo limite repulsivo em  $r = 2$   
 (C) Existe um ciclo limite atractivo em  $r = 0$   
 (D) Existe um ciclo limite atractivo em  $r = 2$   
 (E) Existe um ciclo limite repulsivo em  $r = 3$

Resposta: ☐

11. As equações de evolução de um sistema linear são:

$$\dot{x} = x + 2y \quad \dot{y} = x + y$$

Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

- (A) Centro. (D) Nó repulsivo.  
 (B) Foco atractivo. (E) Ponto de sela.  
 (C) Foco repulsivo.

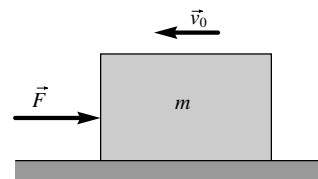
Resposta: ☐

12. A matriz jacobiana de um sistema não linear, num ponto P do espaço de fase  $(x, y)$ , foi armazenada na variável J, no Maxima. O comando `eigenvectors(J)` produz: `[[[-1,1], [1,1]], [[1,-1]], [[1,1/3]]]` que tipo de ponto de equilíbrio é o ponto P?

- (A) centro. (D) foco atractivo.  
 (B) ponto de sela. (E) nó atractivo.  
 (C) foco repulsivo.

Resposta: ☐

13. O bloco na figura, com massa igual a 3 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco actua uma força externa  $\vec{F}$ , horizontal e constante, com módulo igual a 24 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.



- (A) 10.45 m/s<sup>2</sup> (C) 31.35 m/s<sup>2</sup> (E) 8.00 m/s<sup>2</sup>  
 (B) 16.65 m/s<sup>2</sup> (D) 5.55 m/s<sup>2</sup>

Resposta: ☐

14. A força resultante sobre um objecto de massa 2 kg é  $\vec{F} = 6\vec{e}_x + 4t\vec{e}_y$  (SI). Se a velocidade do objecto em  $t = 0$  for  $6\vec{e}_x + 7\vec{e}_y$  m/s, calcule a velocidade em  $t = 2$  s.

- (A)  $18.0\vec{e}_x + 15.0\vec{e}_y$  (D)  $6.0\vec{e}_x + 4.0\vec{e}_y$   
 (B)  $12.0\vec{e}_x + 4.0\vec{e}_y$  (E)  $12.0\vec{e}_x + 11.0\vec{e}_y$   
 (C)  $12.0\vec{e}_x + 11.0\vec{e}_y$

Resposta: ☐

15. Se o conjunto limite positivo de uma trajectória A no espaço de fase for um ciclo limite C, qual das afirmações será correcta?

- (A) A afasta-se de C.  
 (B) Todos os pontos de C também pertencem a A.  
 (C) A aproxima-se de C, sem nunca o tocar.  
 (D) A torna-se exactamente igual a C após algum tempo.  
 (E) A toca o ciclo C num ponto.

Resposta: ☐

16. O comando

`a:rk([f,g],[y,z],[0,1],[x,0,1,0.1])`

do Maxima foi usado para resolver numericamente um sistema de equações. Qual dos comandos seguintes produz uma lista com os valores de z?

- (A) `makelist(a[1][i],i,1,11)`  
 (B) `makelist(a[3][i],i,1,11)`  
 (C) `makelist(a[i][2],i,1,11)`  
 (D) `makelist(a[i][1],i,1,11)`  
 (E) `makelist(a[i][3],i,1,11)`

Resposta: ☐

17. Um homem empurra um bloco de madeira sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco está pousado um livro. Considerando as forças seguintes:

- Força de contacto entre as mãos do homem e o bloco.
- Peso do livro.
- Força de atrito produzida pela superfície horizontal.

Quais dessas forças actuam sobre o bloco de madeira?

- (A) 1 e 2 (C) 1 e 3 (E) 1, 2 e 3  
 (B) 1 (D) 2 e 3

Resposta: ☐

(a) Nos pontos de equilíbrio, as duas componentes da velocidade de fase deverão ser nulas:

$$\begin{aligned}y^2 + 3y - 10 &= 0 &\Rightarrow & (y+5)(y-2) = 0 \\xy + x + 12 &= 0\end{aligned}$$

A primeira equação tem duas soluções:  $y = -5$  e  $y = 2$ . Substituindo  $y = -5$  na segunda equação obtém-se  $x = 3$  e substituindo  $y = 2$  obtém-se  $x = -4$ . Consequentemente, existem unicamente dois pontos de equilíbrio:

$$P_1 = (3, -5) \quad P_2 = (-4, 2)$$

(b) A matriz jacobiana do sistema é:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial(y^2 + 3y - 10)}{\partial x} & \frac{\partial(y^2 + 3y - 10)}{\partial y} \\ \frac{\partial(xy + x + 12)}{\partial x} & \frac{\partial(xy + x + 12)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2y + 3 \\ y + 1 & x \end{bmatrix}$$

(c) Substituindo as coordenadas de  $P_1$  na matriz jacobiana obtemos:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, a soma e o produto dos valores próprios nesse ponto são:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 + 3 = 3 \quad \lambda_1 \lambda_2 = 0 \times 3 - (-7) \times (-4) = -28$$

portanto, os valores próprios em  $P_1$  são 7 e  $-4$ .

Substituindo as coordenadas de  $P_2$  na matriz jacobiana obtemos:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Assim, a soma e o produto dos valores próprios nesse ponto são:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0 - 4 = -4 \quad \lambda_1 \lambda_2 = 0 \times (-4) - 7 \times 3 = -21$$

portanto, os valores próprios em  $P_2$  são 3 e  $-7$ .

(d) Como nos dois pontos de equilíbrio os valores próprios são reais e com sinais opostos, os dois pontos são pontos de sela.

## Perguntas

3. B	6. D	9. D	12. B	15. C
4. D	7. A	10. A	13. A	16. E
5. D	8. B	11. E	14. C ou E	17. C