**Resolução do exame de 27 de junho de 2018** Regente: Jaime Villate

**Problema 1**. A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre dos dois blocos


$T$ é a tensão na corda, $N_1$ e $N_2$ as reações normais e $F_{a1}$ e $F_{a1}$ as forças de atrito.

($a$) Como os blocos estão em repouso, as somas das componentes das forças tangentes e perpendiculares ao plano inclinado são:

$$\begin{cases} m_1\, g \sin\theta + T - F_{a1} = 0 \\ N_1 - m_1\, g \cos\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2\, g\, \sin\theta - T - F_{a2} = 0 \\ N_2 - m_2\, g \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Como o coeficiente de atrito estático do plano com o bloco 2 é menor do que o com o bloco 1, se os blocos não estivessem ligados pela corda, o bloco 2 começava a deslizar a um ângulo menor do que o bloco 1. A tensão na corda permite que o ângulo possa ser maior do que o ângulo ao qual o bloco 2 começava a deslizar e o conjunto só começará a deslizar quando as forças de atrito estático sejam máximas nos dois blocos. Como tal, $F_{a1} = \mu_{e1} N_1$ e $F_{a1} = \mu_{e1} N_1$ e as equações anteriores conduzem a

$$m_1\, g \sin\theta + T - \mu_{1e}\, m_1\, g \cos\theta = 0 \qquad m_2\, g \sin\theta - T - \mu_{2e}\, m_2\, g \cos\theta = 0$$

Somando essas duas equações elimina-se a tensão, e dividindo por $g \cos\theta$ encontra-se uma expressão para a tangente do ângulo máximo

$$\tan\theta = \frac{\mu_{1e}\, m_1 + \mu_{2e}\, m_2}{m_1 + m_2}$$

Substituindo os valores dados, obtém-se o ângulo máximo:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0.35 + 0.25 \times 2}{1 + 2}\right) = 15.8^\circ$$

($b$) As forças de atrito são atrito cinético e a aceleração $a$ dos dois blocos é a mesma. Como tal, as componentes tangencial e perpendicular das forças resultantes nos dois blocos são:

$$\begin{cases} m_1\, g \sin\theta + T - \mu_{1c}\, N_1 = m_1\, a \\ N_1 - m_1\, g \cos\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 g\, \sin\theta - T - \mu_{2c}\, N_2 = m_2\, a \\ N_2 - m_2\, g \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Ou seja,

$$m_1\, g \sin\theta + T - \mu_{1c}\, m_1\, g \cos\theta = m_1\, a \qquad m_2\, g\, \sin\theta - T - \mu_{2c}\, m_2\, g \cos\theta = m_2\, a$$

Multiplicando a primeira equação por $m_2$, a segunda por $m_1$, e igualando as duas expressões obtém-se

$$m_1\, m_2\, g \sin\theta + m_2\, T - \mu_{1c}\, m_1\, m_2\, g \cos\theta = m_2\, m_1\, g\, \sin\theta - m_1\, T - \mu_{2c}\, m_1\, m_2\, g \cos\theta$$

E a tensão no fio é

$$T = \frac{m_1\, m_2\, g\, (\mu_{1c} - \mu_{2c}) \cos\theta}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 9.8\, (0.28 - 0.2) \cos 20^\circ}{1 + 2} = 0.491 \text{ N}$$

Observe-se que se $\mu_{1c}$ não fosse maior que $\mu_{2c}$, a corda não permanecia esticada e aparecia uma força de contacto entre os dois blocos.

**Problema 2**. Definindo a função $y$, igual à derivada de $x$, as equações de evolução do sistema são:

$$\dot{x} = y \qquad\qquad \dot{y} = x^3 - x - (a + x)\, y$$

Os pontos de equilíbrio são as soluções das equações

$$y = 0 \qquad x^3 - x - (a + x)\, y = x \left(x^2 - 1\right) = 0$$

Como tal, há três pontos de equilíbrio $(x,\, y)$:

$$\mathrm{P}_1 = (0, 0) \qquad\qquad \mathrm{P}_2 = (1, 0) \qquad \mathrm{P}_3 = (-1, 0)$$

Derivando os lados direitos das equações de evolução, em ordem a $x$ e a $y$, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3\, x^2 - y - 1 & -x - a \end{bmatrix}$$

No ponto $\mathrm{P}_1$, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}$$

que tem traço $-a$ e determinante igual a 1. Como tal, se $a$ for positiva, $\mathrm{P}_1$ é um ponto de equilíbrio estável e se $a$ for negativa, esse ponto é instável. Será nó quando $|a| \geq 2$ (determinante menor que o traço ao quadrado sobre 4) ou foco quando $|a| < 2$.

As matrizes das aproximações lineares próximo dos pontos $\mathrm{P}_2$ e $\mathrm{P}_3$ são

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 - a \end{bmatrix} \qquad\qquad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 - a \end{bmatrix}$$

ambas com determinante igual a $-2$. Como tal, $\mathrm{P}_2$ e $\mathrm{P}_3$ são ambos pontos de sela, independentemente do valor de $a$.

Se $a < 0$, como todos os pontos de equilíbrio são instáveis, a corrente aumenta indefinidamente, que não é fisicamente possível. Se $a > 0$, como a origem é ponto de equilíbrio atrativo, para alguns valores iniciais da corrente e da sua derivada, a corrente aproximar-se-á de 0, que é fatível, mas para alguns valores iniciais a corrente também aumenta indefinidamente.

## Perguntas

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **3.** E | **6.** B | **9.** C | **12.** B | **15.** C |
| **4.** C | **7.** C | **10.** C | **13.** A | **16.** A |
| **5.** C | **8.** A | **11.** C | **14.** C | **17.** D |

# Cotações

## Problema 1

- Diagramas de corpo livre e equações das somas das forças na alínea *a* ____ 1.2
- Resolução das equações para encontrar o ângulo máximo ____ 0.8
- Equações das somas das forças na alínea *b* ____ 1.2
- Resolução das equações para encontrar a tensão ____ 0.8

## Problema 2

- Obtenção das equações de evolução ____ 0.8
- Determinação dos 3 pontos de equilíbrio ____ 0.8
- Obtenção da matriz jacobiana ____ 0.4
- Obtenção das 3 matrizes das aproximações lineares ____ 0.8
- Caraterização dos pontos de equilíbrio ____ 0.8
- Interpretação dos resultados ____ 0.4