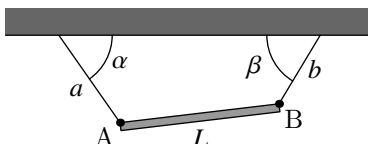


Nome: \_\_\_\_\_

**Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador.** O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

1. (4 valores) Uma barra reta, não homogênea e muito estreita, de comprimento  $L = 6 \text{ m}$  e massa  $m = 6.2 \text{ kg}$ , foi pendurada dum teto horizontal, por meio de duas cordas de comprimentos  $a = 4 \text{ m}$  e  $b = 3 \text{ m}$ , ligadas nos dois extremos A e B da barra, tal como mostra a figura. A barra fica em equilíbrio quando os ângulos entre as cordas e o teto são  $\alpha = 60^\circ$  e  $\beta = 70^\circ$ . (a) Determine os valores das tensões nas duas cordas quando a barra está nessa posição de equilíbrio. (b) Determine a distância desde o centro de gravidade da barra até o ponto A.



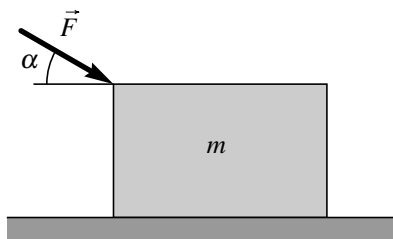
2. (4 valores) A equação de movimento  $\ddot{x} + (3 - x^2) \dot{x} - 3x + x^3 = 0$  pode ser escrita como sistema dinâmico no plano  $xy$ . (a) Determine a posição dos pontos de equilíbrio no plano  $xy$ . (b) Explique de que tipo é cada um dos pontos de equilíbrio. (c) Trace o retrato de fase do sistema. (d) Diga se o sistema tem ciclos (soluções periódicas) e em que regiões do plano  $xy$ .

**PERGUNTAS.** Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Qual das seguintes equações poderia ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?
- (A)  $\dot{y} = -5xy + 2y$  (D)  $\dot{y} = 6y - y^2$   
 (B)  $\dot{y} = 2y^2 - 3y$  (E)  $\dot{y} = 2y - 5y^2$   
 (C)  $\dot{y} = x + xy^2$

Resposta: ☐

4. Um bloco com massa  $m = 5 \text{ kg}$  encontra-se sobre a superfície de uma mesa horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa  $\vec{F}$ , com módulo de  $80 \text{ N}$  e direção que faz um ângulo  $\alpha = 20^\circ$  com a horizontal, tal como mostra a figura. Calcule o módulo da reação normal entre o bloco e a mesa.



- (A) 76.36 N (C) 21.64 N (E) 2.42 N  
 (B) 100.42 N (D) 49.0 N

Resposta: ☐

5. A força tangencial resultante sobre um objeto é  $s^2 - s - 2$ , onde  $s$  é a posição na trajetória. Sabendo que o retrato de fase do sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assintoticamente do ponto  $(a, 0)$ , determine o valor de  $a$ .

- (A) -1 (C) 3 (E) -2  
 (B) 1 (D) 2

Resposta: ☐

6. Um jogador de golfe lança a sua bola com uma velocidade inicial de  $36 \text{ m/s}$ , fazendo um ângulo de  $25^\circ$  com a horizontal. Desprezando a resistência do ar, determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola, no ponto inicial onde esta foi lançada.

- (A) 210.1 m (C) 145.9 m (E) 121.6 m  
 (B) 252.1 m (D) 175.1 m

Resposta: ☐

7. Calcule o momento de inércia duma esfera com raio de 1 centímetro e massa 17 gramas, que roda à volta dum eixo tangente à superfície da esfera, sabendo que o momento de inércia duma esfera de raio  $R$  e massa  $m$  à volta do eixo que passa pelo centro é  $2mR^2/5$ .

- (A)  $6.80 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  (D)  $1.21 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$   
 (B)  $1.36 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  (E)  $3.40 \times 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$   
 (C)  $2.38 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

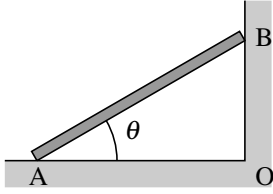
Resposta: ☐

8. Coloca-se um carrinho numa rampa a uma altura inicial  $h$  e deixa-se descer livremente, a partir do repouso, chegando ao fim da rampa (altura zero) com velocidade  $v$ . Admitindo que a energia mecânica do carrinho permanece constante (forças dissipativas desprezáveis, massa das rodas desprezável, etc) desde que altura inicial na rampa deveria ser largado o carrinho para que chegasse ao fim com velocidade  $v/3$ ?

- (A)  $6h$  (C)  $9h$  (E)  $3h$   
 (B)  $h/3$  (D)  $h/9$

Resposta: ☐

9. A figura mostra uma barra reta com comprimento  $L$  que está a cair; enquanto a barra cai, o extremo A desliza na superfície horizontal e o extremo B desliza sobre a parede vertical. Qual é a relação entre os valores das velocidades dos dois extremos? ( $x_A$  e  $y_B$  medidos a partir de O)



- (A)  $v_A = -v_B \cos \theta$  (D)  $v_A = -v_B \tan \theta$   
 (B)  $v_A = -2 v_B$  (E)  $v_A = -v_B \sin \theta$   
 (C)  $v_A = -v_B$

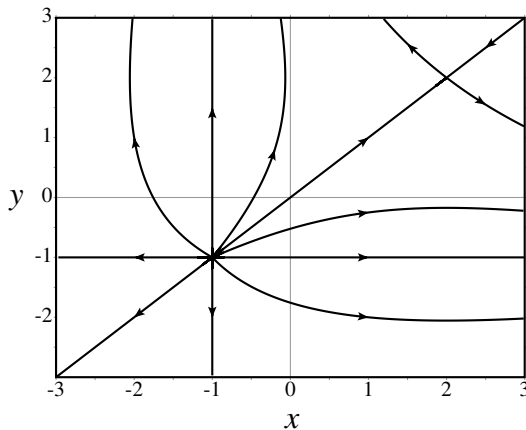
Resposta:

10. O vetor velocidade duma partícula, em função do tempo, é:  $2t^2 \hat{i} + 0.4t^2 \hat{j}$  (unidades SI). Em  $t = 0$  a partícula parte do ponto  $y = -7$  no eixo dos  $y$ . Calcule o tempo que demora até passar pelo eixo dos  $x$ .

- (A) 3.27 s (C) 5.92 s (E) 2.6 s  
 (B) 4.18 s (D) 3.74 s

Resposta:

11. A figura mostra o retrato de fase dum sistema não linear com dois pontos de equilíbrio, em  $(x, y) = (-1, -1)$  e  $(x, y) = (2, 2)$ . Qual é o sistema linear que aproxima o sistema não linear na vizinhança do ponto  $(-1, -1)$ ?



- (A)  $\dot{x} = 3x \quad \dot{y} = -3y$  (D)  $\dot{x} = 3x \quad \dot{y} = 3y$   
 (B)  $\dot{x} = -3x \quad \dot{y} = -3y$  (E)  $\dot{x} = 3y \quad \dot{y} = -3x$   
 (C)  $\dot{x} = -3y \quad \dot{y} = 3x$

Resposta:

12. A trajetória de uma partícula na qual atua uma força central é sempre plana e pode ser descrita em coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ . As expressões da energia cinética e da energia potencial central em questão são:

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \quad U = kr^5$$

onde  $m$  é a massa do corpo e  $k$  uma constante. Encontre a equação de movimento para  $\ddot{r}$

- (A)  $r^2 \ddot{\theta} - \frac{5kr^4}{m}$  (D)  $r^2 \ddot{\theta} - \frac{5kr^4}{m}$   
 (B)  $r \ddot{\theta} - \frac{5kr^4}{m}$  (E)  $r \ddot{\theta} - \frac{5kr^4}{m}$   
 (C)  $r \ddot{\theta} - \frac{5kr^4}{m}$

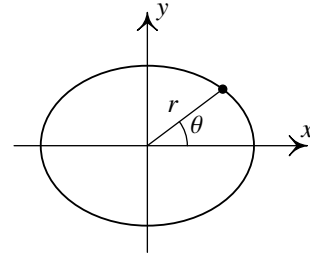
Resposta:

13. Partindo da origem na sua trajetória e sem velocidade inicial, uma partícula fica sujeita à aceleração tangencial  $2\sqrt{v^2 + 5}$ , em unidades SI, onde  $v$  é o valor da velocidade. Determine a posição da partícula na trajetória quando  $v = 30$  m/s.

- (A) 13.8 m (C) 9.6 m (E) 16.6 m  
 (B) 19.9 m (D) 11.5 m

Resposta:

14. Uma partícula desloca-se ao longo de uma elipse no plano  $xy$ . As coordenadas cartesianas da partícula são  $x$  e  $y$  e as suas coordenadas polares são  $r$  e  $\theta$ . Na lista seguinte, quais são as possíveis variáveis que podem ser usadas para descrever os graus de liberdade do sistema?



- (A) Duas variáveis  $(x, y)$  ou  $(r, \theta)$ .  
 (B) As duas variáveis  $r$  e  $\theta$ .  
 (C) Uma única variável  $x$  ou  $y$ .  
 (D) Uma única variável  $x, y$  ou  $\theta$ .  
 (E) As duas variáveis  $x$  e  $y$ .

Resposta:

15. As equações de evolução dum sistema linear são:

$$\dot{x} = -2x - y \quad \dot{y} = 2x$$

Que tipo de ponto de equilíbrio tem esse sistema?

- (A) foco repulsivo. (D) foco atrativo.  
 (B) nó repulsivo. (E) ponto de sela.  
 (C) centro.

Resposta:

16. Um objeto descreve uma trajetória circular de raio 1 m; a velocidade aumenta em função do tempo  $t$ , de acordo com a expressão  $v = 4t^2$  (unidades SI). Determine a expressão para o módulo da aceleração.

- (A)  $\sqrt{16t^4 + 8t}$  (D)  $4t^2 + 8t$   
 (B)  $\sqrt{256t^8 + 64t^2}$  (E)  $8t$   
 (C)  $\sqrt{16t^4 + 64t^2}$

Resposta:

17. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano  $xy$ . Em coordenadas polares, as equações de evolução são  $\dot{\theta} = -3$ ,  $\dot{r} = -r^3 + 2r^2 - r$ . Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

- (A) foco repulsivo (D) ponto de sela  
 (B) nó repulsivo (E) foco atrativo  
 (C) nó atrativo

Resposta:

## Perguntas

3. A	6. C	9. D	12. C	15. D
4. A	7. C	10. D	13. A	16. B
5. D	8. D	11. D	14. D	17. E

## Critérios de avaliação

### Problema 1

- Equação da soma das componentes  $x$  das forças ..... 0.6
- Equação da soma das componentes  $y$  das forças ..... 0.6
- Obtenção dos valores das duas tensões ..... 0.8
- Determinação das coordenadas dos pontos A e B e ângulo da barra com a horizontal ..... 0.8
- Equação da soma dos momentos das forças ..... 0.4
- Obtenção da distância até o centro de gravidade ..... 0.8

### Problema 2

- Equações de evolução ..... 0.4
- Obtenção dos três pontos de equilíbrio ..... 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana e valores próprios ..... 0.8
- Caracterização dos três pontos de equilíbrio ..... 0.8
- Retrato de fase ..... 1.2
- Identificação dos ciclos ..... 0.4