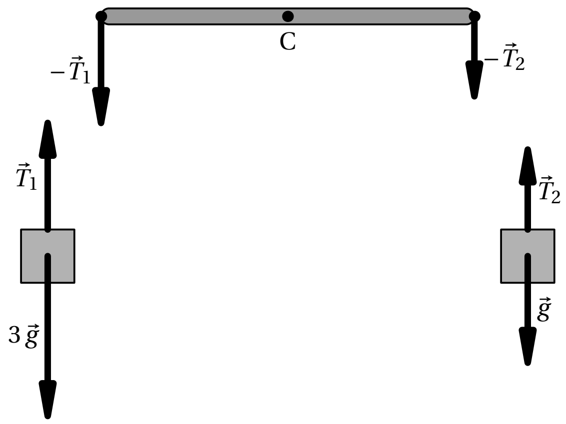
Resolução do exame de 18 de junho de 2019 Regente: Jaime Villate

Problema 1. Mostra-se a a resolução por dois métodos diferentes: mecânica vetorial e mecânica lagrangiana.

(*a*) *Mecânica vetorial.* É necessário separar o sistema em 3 corpos rígidos (blocos e barra), porque o movimento de cada um deles é diferente: a barra roda, sem se deslocar e os blocos deslocam-se sem rodar.

A figura seguinte mostra os diagramas de corpo livre de cada um dos três corpos. No caso da barra, por ter movimento de rotação em torno de um eixo fixo, não há necessidade de indicar as forças que atuam no eixo.



A barra terá aceleração angular α no sentido contrário aos ponteiros do relógio. A aceleração do bloco do lado esquerdo será $a = \alpha(L/2)$, para baixo, e o bloco do lado direito terá a mesma aceleração a, mas para cima. Como tal, as equações de movimento dos 3 corpos são as seguintes:

$$3\,g - T_1 = 3\,a$$
$$T_2 - g = a$$
$$T_1\left(\frac{L}{2}\right) - T_2\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{12}\,m\,L^2\,\alpha$$

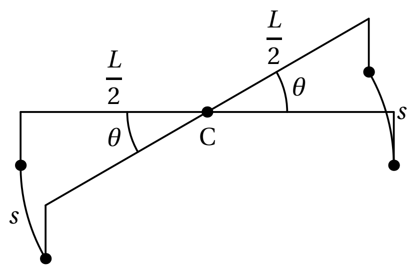
As duas primeiras equações permitem encontrar as tensões nos cabos, em função da aceleração:

$$T_1 = 3\,(g - a) \qquad T_2 = g + a$$

Na terceira equação, substitui-se $\alpha = 2\,a/L$ e, a seguir, as expressões encontradas para as tensões:

$$T_1 - T_2 = \frac{m\,a}{3} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{2\,g}{4 + \frac{m}{3}} = 4.23\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

(*b*) *Mecânica lagrangiana.* Considera-se o movimento do sistema completo. A barra rodará um ângulo θ, enquanto os blocos descreverão dois arcos de círculo, ambos com o mesmo comprimento $s = \theta\,L/2$, tal como mostra a figura seguinte.



Como tal, o sistema tem um único grau de liberdade: basta usar $\theta(t)$ ou $s(t)$ para descrever o movimento de todo o sistema. Escolhendo s, as duas variáveis de estado serão s e $v = \dot{s}$, e existirá uma única equação de Lagrange.

O movimento de cada um dos blocos é de translação, num círculo com raio $L/2$, com velocidade $v = \dot{s}$. O movimento da barra é rotação com velocidade angular $\omega = v/(L/2)$. Como tal, a energia cinética do sistema, em função da variável de estado v, é:

$$E_\text{c} = \frac{3\,v^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\,m\,L^2\right)\left(\frac{2\,v}{L}\right)^2 = \left(2 + \frac{m}{6}\right) v^2$$

A energia potencial, usando como posição de energia nula a posição horizontal da barra, é o peso do bloco da direita, vezes a altura que sobe quando a barra roda o ângulo $\theta = s/(L/2)$, menos o peso do bloco da esquerda, vezes a altura que desce quando a barra roda. Em função da variável de estado s, a energia potencial é:

$$U = g\left(\frac{L}{2}\right)\sin\left(\frac{2\,s}{L}\right) - 3\,g\left(\frac{L}{2}\right)\sin\left(\frac{2\,s}{L}\right) = -g\,L\sin\left(\frac{2\,s}{L}\right)$$

A aceleração tangencial dos blocos, $a = \dot{v}$, obtém-se aplicando a equação de Lagrange para sistemas conservativos com um único grau de liberdade s:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \left(4 + \frac{m}{3}\right) a - 2\,g\cos\left(\frac{2\,s}{L}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{2\,g}{4 + \frac{m}{3}}\cos\left(\frac{2\,s}{L}\right)$$

Substituindo a massa da barra e $s = 0$ (posição horizontal), obtém-se $a = 4.23\ \text{m/s}^2$.

Problema 2. Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$\begin{cases} x\left(1 - y^2\right) = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x = 0, \vee, y = 1, \vee, y = -1 \\ y = -x \end{cases}$$

que conduzem a três pontos de equilíbrio no plano $x\,y$:

$$\mathrm{P}_1 = (0,0) \qquad \mathrm{P}_2 = (-1,1) \qquad \mathrm{P}_3 = (1,-1)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, em ordem a x e a y, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 - y^2 & -2\,x\,y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a soma dos valores próprios é 2 e o seu produto 1, ou seja, os dois valores próprios são iguais a 1. Como tal, P_1 é nó impróprio repulsivo. Os vetores próprios obtêm-se resolvendo o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad x = 0$$

Qualquer vetor no eixo dos y é vetor próprio.

Nos pontos P_2 e P_3, a matriz da aproximação linear é a mesma:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A equação dos valores próprios é:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Há dois valores próprios, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. Como tal, os pontos P_2 e P_3 são pontos de sela.

Os vetores próprios correspondentes a $\lambda_1 = 2$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = x$$

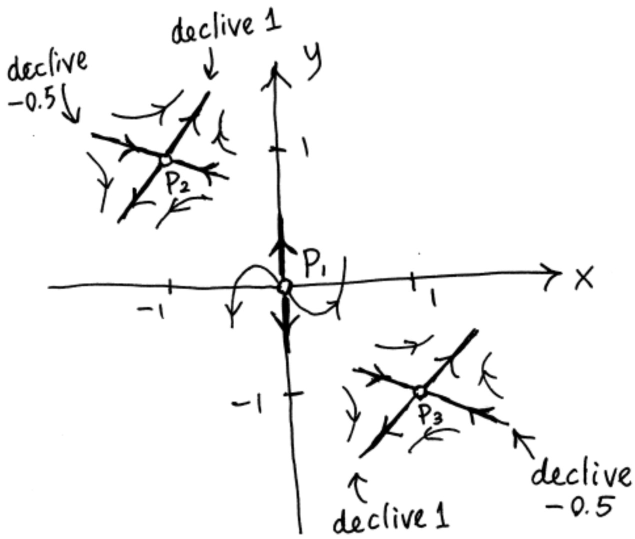
os vetores próprios estão na reta com declive +1, que passa pelo ponto de equilíbrio (P_2 ou P_3).

Os vetores próprios correspondentes a $\lambda_2 = -1$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{x}{2}$$

os vetores próprios estão na reta com declive −0.5, que passa pelo ponto de equilíbrio (P_2 ou P_3).

A partir dos valores e vetores próprios obtidos, conclui-se que na vizinhança de P_1 há duas curvas de evolução retas que se saem do ponto, na direção do eixo dos y; as restantes curvas de evolução que saem do ponto são todas curvas. Nos pontos P_2 e P_3, há duas curvas de evolução que saem do ponto de equilíbrio, com declive igual a 1, e outras duas curvas de evolução retas, que terminam no ponto de equilíbrio, com declive -0.5. A figura seguinte mostra esses resultados:



Perguntas

3. C	**6.** B	**9.** C	**12.** C	**15.** B
4. D	**7.** C	**10.** B	**13.** E	**16.** A
5. D	**8.** C	**11.** B	**14.** B	**17.** C

Cotações

Problema 1

(a) Mecânica vetorial.

- Diagrama de corpo livre / equação de movimento do bloco 1 ________ 0.8
- Diagrama de corpo livre / equação de movimento do bloco 2 ________ 0.8
- Diagrama de corpo livre / equação de movimento da barra ________ 0.8
- Indicar que as acelerações dos blocos têm o mesmo valor absoluto ________ 0.6
- Relação entre a aceleração dos blocos e a aceleração angular da barra ________ 0.6
- Resolução das 3 equações de movimento ________ 0.4

(b) Mecânica lagrangiana.

- Indicar que as velocidades dos blocos têm o mesmo valor absoluto ________ 0.4
- Relação entre a velocidade dos blocos e a velocidade angular da barra ________ 0.4
- Energia cinética do sistema, em função das variáveis de estado ________ 1.2
- Energia potencial do sistema, em função das variáveis de estado ________ 1.2
- Aplicação da equação de Lagrange ________ 0.4
- Resolução para obter o valor da aceleração ________ 0.4

Problema 2

- Obtenção dos 3 pontos de equilíbrio ________ 0.4
- Matriz jacobiana ________ 0.4
- Matrizes das aproximações lineares ________ 0.4
- Valores / vetores próprios do ponto na origem ________ 0.6
- Valores / vetores próprios dos outros dois pontos ________ 0.6
- Classificação correta dos 3 pontos ________ 0.8
- Gráfico ________ 0.8