1. Cinemática

$v=\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}$ $a_t=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}$ $a_t=v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s}$ $a_m=\frac{v}{t}$

Evitar usar

$\boxed{x=x_o+v_ot+\frac{1}{2}a_tt^2 \quad v=v_o+at}$

$V_m=\frac{v_1\Delta t_1+\ldots+v_n\Delta t_n}{\Delta t_{total}}$

$v_x=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}$ $a_x=\frac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,t}$ $a_x=v_x\,\frac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,x}$ $a_n=\frac{v^2}{R}$

Também válido para y, z

2. Cinemática vetorial

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a\,b\,\cos\theta=a_x\,b_x+a_y\,b_y+a_z\,b_z$ $a=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ $\vec{r}=x\,\hat{\imath}+y\,\hat{\jmath}+z\,\hat{k}$

$a+b=(a_x+b_x)i+(a_y+b_y)j+(a_z+b_z)k$ $a=\sqrt{a_x^{\,2}+a_y^{\,2}+a_z^{\,2}}$ $r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k$

$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta r}{\Delta t}\right)=x_i+y_j+z_k$ $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ $a=v_xi+v_yj+v_zk=x_i+y_j+z_k$

$\vec{v}\,'=\vec{v}+\vec{v}\,'_O$

$a\cdot dr=v\cdot dv$ $\vec{r}=\vec{r}_0+\int_0^t\vec{v}\,\mathrm{d}\,t$ $\vec{v}=\vec{v}_0+\int_0^t\vec{a}\,\mathrm{d}\,t$ $\vec{r}\,'=\vec{r}+\vec{r}\,'_O$ $\vec{a}\,'=\vec{a}+\vec{a}\,'_O$

$a=\dot{s}\,e_t+s\cdot\frac{d\,e_t}{dt}=\dot{s}\,e_t+s\,\dot{\theta}\,e_n$ $\theta_{ab}=\arccos(a\angle b)$ $\omega=\frac{v_{ab}}{d_{ab}}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{f}$

3. Movimento curvilíneo

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ $\vec{a}\times b=a\,b\,\sin\theta\,\hat{n}=\begin{vmatrix}\hat{\imath}&\hat{\jmath}&\hat{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$ $\vec{v}=\dot{s}\,\hat{e}_t$ $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$ $\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\,\hat{e}_t=\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{e}_t$

$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\,\hat{\imath}+A_y\,\hat{\jmath}+A_z\,\hat{k})\times(B_x\,\hat{\imath}+B_y\,\hat{\jmath}+B_z\,\hat{k})$

$=(A_y\,B_z-A_z\,B_y)\,\hat{\imath}+(A_z\,B_x-A_x\,B_z)\,\hat{\jmath}+(A_x\,B_y-A_y\,B_x)\,\hat{k}$ $a^2=a_t^2+a_n^2$

$\vec{a}=\dot{v}\,\hat{e}_t+\frac{v^2}{R}\,\hat{e}_n$ $\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}=\ddot{s}\,\hat{e}_t+\dot{s}\,\frac{\mathrm{d}\,\hat{e}_t}{\mathrm{d}\,t}$ $\vec{a}=\ddot{s}\,\hat{e}_t+\dot{s}\,\dot{\theta}\,\hat{e}_n$ $a_n=\dot{s}\,\dot{\theta}$

$\dot{\theta}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{R\,\Delta t}=\frac{\dot{s}}{R}$ $s=R\theta$ $v=R\omega$ $a_t=R\alpha$ $a_n=R\omega^2=v\omega$

$\omega=\dot{\theta}$ $\alpha=\dot{\omega}$ $\alpha=\omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$ $a_t=R\,\alpha$ $\vec{v}=R\,\omega\,\hat{e}_\theta$ $\vec{a}=R\,\alpha\,\hat{e}_\theta-R\,\omega^2\,\hat{R}$

$\vec{a}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ $|\omega\times r|=R|\omega|$ $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$ $\omega=\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t}$ $\vec{\omega}=\omega\,\hat{e}_{\mathrm{axis}}$

$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

4. Mecânica vetorial

$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\mathrm{d}\,t=\vec{p}_2-\vec{p}_1$ $\vec{p}=m\,\vec{v}$ $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=m\,\vec{a}$ $\vec{P}=m\,\vec{g}$ $F_e\le\mu_e\,R_n$

$\vec{a}=a_t\,\vec{e}_t+a_n\,\vec{e}_n$ $\vec{F}=F_t\,\vec{e}_t+F_n\,\vec{e}_n$ $F_t=m\,a_t$ e $F_n=m\,a_n$ $F_c=\mu_c\,R_n$

$\vec{F}_c=\begin{cases}\vec{0} & v=0\\ -\frac{\mu_c\,R_n}{|v|}\,\vec{v} & v\neq 0\end{cases}$ $F=\frac{dp}{dt}$ $N_R=r\,v\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$ $F_f=6\,\pi\,\eta\,r\,v\quad(N_R<1)$

$F_r=\frac{1}{2}\,C_D\,\rho\,A\,v^2$ $F_f=\frac{\pi}{4}\,\rho\,r^2\,v^2\quad(N_R>10^3)$

5. Dinâmica dos corpos rígidos

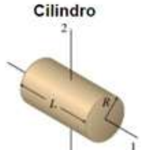
$M_O=F\,b$ $\vec{M}_O=\vec{r}\times\vec{F}$ $M_z=\begin{vmatrix}x&y\\F_x&F_y\end{vmatrix}$ Ponto onde é aplicada a força F

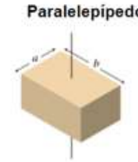
M>0 -> sentido horário $M_o=F\,r\,\sin\theta$

$\vec{r}_{cm}=\frac{1}{m}\int\vec{r}\,\mathrm{d}\,m$ $\vec{v}_{cm}=\frac{1}{m}\int\vec{v}\,\mathrm{d}\,m$ $\vec{a}_{cm}=\frac{1}{m}\int\vec{a}\,\mathrm{d}\,m$ $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=m\,\vec{a}_{cm}$ $\sum_{i=1}^{n}M_{z,i}=I_z\,\alpha$

$I_z=\int R^2\,\mathrm{d}\,m=I_{cm}+m\,d^2$

Esfera **Cilindro** **Paralelepípedo**





$m=\int\mathrm{d}m$ $\mathrm{d}\vec{f}=\vec{a}\,\mathrm{d}m$

$\int\mathrm{d}\vec{f}=m\,\vec{a}_{cm}$ $\int\vec{g}\,\mathrm{d}m=m\,\vec{a}_{cm}$

$\mathrm{d}\vec{f}=\left(R\,\alpha\,\hat{e}_\theta-R\,\omega^2\,\hat{R}\right)\mathrm{d}m$

$\mathrm{d}\vec{M}_z=(R\,\hat{R})\times\mathrm{d}\vec{f}=R^2\,\alpha\,\hat{k}\,\mathrm{d}m$

$\int\mathrm{d}M_z=\alpha\int R^2\,\mathrm{d}m$ Eixo 1: $\frac{1}{2}\,m\,R^2$

$F_1\,b_1=F_2\,b_2$ $M_o=r\times df$ $\frac{2}{5}\,m\,R^2$ Eixo 2: $\frac{1}{12}\,m\,(3\,R^2+L^2)$ $\frac{1}{12}\,m\,(a^2+b^2)$

6. Trabalho e energia

$W_{12}=\int_{s_1}^{s_2}F_t\,\mathrm{d}\,s$ $W_{12}=E_c(2)-E_c(1)$ $E_c=\frac{1}{2}\,m\,v_{cm}^2+\frac{1}{2}\,I_{cm}\,\omega^2$ $U=-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$

$W_{12}=U(1)-U(2)$ $U_g=m\,g\,z$ $U_e=\frac{1}{2}\,k\,s^2$ $E_m=E_c+U$ $\int_s^{s_2}F_t^{nc}\,\mathrm{d}\,s=E_m(2)-E_m(1)$

$\Omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=2\,\pi\,f$ $s=A\,\sin(\Omega\,t+\phi_0)$ $E_m=\frac{1}{2}\,m\,v^2+\frac{1}{2}\,k\,s^2$ $\int_{s_1}^{s_2}F_t\,\mathrm{d}\,s=\frac{1}{2}\,m\,v_2^2-\frac{1}{2}\,m\,v_1^2$

$\vec{F}\cdot(\mathrm{d}\,s\,\vec{e}_t)=m\,\vec{a}\cdot(\mathrm{d}\,s\,\vec{e}_t)\implies F_t\,\mathrm{d}\,s=m\,a_t\,\mathrm{d}\,s$ $E_c=\frac{1}{2}\,m\,v^2$ $\mathrm{d}\,\vec{r}=\mathrm{d}\,x\,\hat{\imath}+\mathrm{d}\,y\,\hat{\jmath}+\mathrm{d}\,z\,\hat{k}$

$|F_e|=k\,s$ $\vec{F}_e\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}=-k\,s\,\hat{e}_s\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}=-k\,s\,\mathrm{d}\,s$ $\vec{F}_c=f(r)\,\hat{r}$ $U_c=-\int_\infty^r f(r)\,\mathrm{d}\,r$

$\int_{s_1}^{s_2}F_t^c\,\mathrm{d}\,s=U(s_1)-U(s_2)$ $F_t^c=-\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s}$ $E_m=\frac{1}{2}\,k\,A^2$ $a_t=-\frac{k}{m}\,s$ $v=\pm\sqrt{\frac{k}{m}\,(A^2-s^2)}$

$E_c=\frac{1}{2}\int v^2\,\mathrm{d}\,m$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial v_x}\right)=F_x$

- força que só depende de r chama-se conservativa se integral linha $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}=U(\vec{r}_1)-U(\vec{r}_2)$ dá o mesmo resultado para qualquer percurso;

$W_{Fc}a,b$ = *dimunuição de U*

$W_{Fnc}a,b$ = *aumento de* E_m $W_{Fa}=\Delta E_m$ $I=\int_{t1}^{t2}F\,dt$ $W_{Fconst}=F.\Delta s=F^*\Delta s^*\cos(\alpha)$

- trabalho força resultante = aumento energia cinética;
- no ponto de equilíbrio força conservativa=0
- força perpendicular à trajetória não realiza trabalho;

7. Sistemas dinâmicos

$\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)$ $\dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)$ $\vec{u}=f_1(x_1,x_2)\,\hat{e}_1+f_2(x_1,x_2)\,\hat{e}_2$ $\ddot{x}=f(x,\dot{x})$ $y=\dot{x}$

$\vec{u}=y\,\hat{\imath}+f(x,y)\,\hat{\jmath}$ $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=0$ $f_1=\frac{\partial H}{\partial x_2}$ $f_2=-\frac{\partial H}{\partial x_1}$ $H(s,v)=\frac{E_c(v)+U(s)}{m}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}H(x_1,x_2)=\frac{\partial H}{\partial x_1}\,\frac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,t}+\frac{\partial H}{\partial x_2}\,\frac{\mathrm{d}\,x_2}{\mathrm{d}\,t}=0$

- equilíbrio estável: se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, sistema regressa ao estado inicial; (zeros de positivo para negativo)
- equilíbrio instável: se o estado inicial do sistema estiver próximo desses pontos, sistema afasta se do estado inicial;
- duas curvas de evolução nunca se podem cruzar em nenhum ponto do domínio das funções f1 e f2;

Ponto de equilíbrio: $\vec{u}=\vec{0}$ (estável ou instável) (nos pontos de interseção das curvas) (origem do espaço fase é sempre ponto de equilíbrio)

Ciclo: curva fechada no espaço de fase.(corresponde a uma oscilação periódica)

Órbita homoclínica: começa e termina no mesmo ponto de equilíbrio instável. (corresponde a uma oscilação não periódica)

Órbita heteroclínica: liga vários pontos de equilíbrio instável.(formada por n curvas de evolução e n pontos de equilíbrio)

Nulcliana: curva onde derivada temporal de x1 ou x2 é nula

Equilíbrio estático: força resultante em x e velocidade são nulas (objeto em repouso)

Sistema autónomo: sempre regido pelas mesmas leis físicas

Velocidade de fase: deslocamento do estado do sistema no espaço fase

Campo de direções: gráfico que mostra a direção da velocidade de fase em vários pontos do sistema de fase

Retrato de fase: gráfico mostrando várias curvas de evolução

-num sistema mecânico conservativo, os pontos de equilíbrio estável são todos os mínimos locais de energia Potencial e os pontos de equilíbrio instável são todos os máximos locais de energia potencial

8. Mecânica lagrangiana

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}=Q_j$ num sistema conservativo, Q=0 $Q_j=\sum_i\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j}-\lambda\,\frac{\partial f}{\partial q_j}=Q_j$ $\lambda\,\frac{\partial f}{\partial q_j}$ = força de ligação$_j$

11. Ciclos limite e dinâmica populacional

Ciclo limite: Ciclo isolado no espaço de fase.

Sistemas de duas espécies: $\dot{x}=f(x,y)$ $\dot{y}=g(x,y)$ $\lim_{x\to 0}f(x,y)=0$ $\lim_{y\to 0}g(x,y)=0$

$\ddot{x}+2\varepsilon(x^2-1)\dot{x}+x=0$

$\dot{y}=-x-2\varepsilon(x^2-1)y$ $\mathbf{J}(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}&\frac{\partial f}{\partial y}\\\frac{\partial g}{\partial x}&\frac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}$

se ambas >0, sistemas em cooperação
se ambas<0, sistemas em competição
se têm sinais opostos, sistema predador-presa

$\dot{x}=x\,(a-b\,x)$ $x(t)=x_0\,e^{a\,t}$

$\frac{\dot{x}}{x}=T_n-T_m+T_i-T_e$

9. Sistemas lineares

$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}=\mathbf{A}\,\vec{r}$ $\vec{r}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$

$a_t=C_1\,s+C_2\,v$

$\begin{bmatrix}\dot{x}\\\ddot{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\C_1&C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\\dot{x}\end{bmatrix}$

Valores próprios: $\lambda^2-\mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\lambda+\det(\mathbf{A})=0$

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Estabilidade
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio repulsivo	instável
1 real, negativo	nó impróprio atrativo	estável

Máxima

```
integrate(expressão,d?,min,max) ratsimp(%)      batchfiles, gistfile1.matlab(copier e colar
diff(expressão,variável)                         *exp(expoente)    %pi    cos   sin   tan
solve(expressão)                                 plotdf([f1,f2],[x,y],[x,x1,x2],[y,y1,y2])
solve([eq1,..eqn],[var1,…varn])                  plot2d([expressão],[x,min,max],[y,min,max])
float(%)               subst(valor, expressão)   EquilPoints([dx,dy],[x,y])
eigenvectors(matrix([ ],[ ]))  (devolve valores propios, multiplicidade, vetores propios)
```

expand([eq1,eq2]) plotdf(... [trajectory_at, x, y],[direction,foward])
coefmatrix([eq1,eq2],[T1,T2])]) gradef(v2,t,a2) (derivada de v2 em t é a2)
jacobian([eq1,eq2],[x1,x2])