Resolução do exame de 16 de junho de 2017 Regente: Jaime Villate

Problema 1. (*a*) **Método 1**. Como o potencial depende apenas da distância até o centro, a força resultante é na direção radial e com componente:

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -\frac{m\,g\,r}{R}$$

e a expressão para a aceleração é:

$$a = \ddot{r} = \frac{F}{m} = -\frac{g\,r}{R}$$

Método 2. A expressão da energia cinética é:

$$E_\mathrm{c} = \frac{m}{2}\dot{r}^2$$

Aplicando a equação de Laplace, para sistemas conservativos com um único grau de liberdade r,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial r} = m\,\ddot{r} + \frac{m\,g\,r}{R} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{r} = -\frac{g\,r}{R}$$

(*b*) A equação de movimento obtida também é válida considerando r na direção radial, mas com sinais diferentes nos segmentos do túnel aos dois lados do centro, onde $r = 0$.

Método 1. As equações de evolução do sistema são:

$$\dot{r} = v \qquad \dot{v} = -\frac{g\,r}{R}$$

Que é um sistema linear e, como tal, com um único ponto de equilíbrio em $r = v = 0$. A matriz do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{R} & 0 \end{bmatrix}$$

Com valores próprios,

$$\lambda = \pm\mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Conclui-se então que todos os possíveis movimentos, dentro do túnel onde a equação de movimento obtida é válida, são oscilações harmónicas com frequência angular:

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

O período de oscilação é,

$$T = \frac{2\,\pi}{\Omega} = 2\,\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Substituindo os valores dados para a lua Mimas, em unidades SI,

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{1.98\times 10^5}{6.8\times 10^{-2}}} = 10722\ \mathrm{s} = 2\mathrm{h}\ 58\mathrm{m}\ 42\mathrm{s}$$

Método 1. A energia mecânica E_m é igual à energia potencial U nos dois pontos de retorno:

$$r = \pm\sqrt{R^2 + \frac{2E_\mathrm{m}R}{mg}} = \pm A$$

e, como tal, o objeto oscila na região $-A \le r \le A$. A expressão da energia mecânica, constante, é:

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{mg}{2}\left(\frac{r^2}{R} - R\right) = E_\mathrm{m} = \frac{mg}{2R}\left(A^2 - R^2\right)$$

Quando o objeto se desloca na direção positiva de r, a expressão da velocidade é então:

$$v = \sqrt{\frac{g}{R}\left(A^2 - r^2\right)} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

Separando variáveis e integrando r desde $-A$ até A, que corresponde a meio período de oscilação $T/2$, obtém-se:

$$\int\limits_0^{T/2} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int\limits_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{(A^2 - r^2)}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad \Longrightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

(c) O tempo para atravessar o túnel é igual a metade do período de oscilação:

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \pi\sqrt{\frac{6.37\times 10^6}{9.8}} = 2533\ \mathrm{s} = 42\ \mathrm{m}$$

Problema 2. (a) Na primeira equação de evolução, como as variáveis são positivas, é claro que o termo que depende de y é negativo e aumenta quando y aumenta. Como tal, conclui-se que a espécie y faz diminuir a população x.

Na segunda equação, já não é evidente se o aumento de x faz aumentar ou diminuir a população y, porque o termo y aparece tanto no numerador como no denominador. É necessário calcular a derivada da expressão:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}x} = \frac{3y}{1+2x} - \frac{6xy}{(1+2x)^2} = \frac{3y}{(1+2x)^2}$$

Agora sim é claro que esta expressão é sempre positiva para qualquer valor da população x e, como tal, a espécie x faz aumentar a população y. Trata-se de um sistema predador presa, no qual x são as presas e y os predadores.

(b) Os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$\begin{cases} 3x - \dfrac{3xy}{1+2x} = 0 \\ \dfrac{3xy}{1+2x} - y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x(2x - y + 1) = 0 \\ y(x-1) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação tem duas soluções, $y = 0$ e $x = 1$. Com $y = 0$, a primeira equação tem uma única solução, $x = 0$ (x não pode ser negativa); e com $x = 1$, a solução de primeira equação é $y = 3$. Como tal, há dois pontos de equilíbrio $(x,\, y)$:

$$\mathrm{P}_1 = (0,0) \qquad\qquad \mathrm{P}_2 = (1,3)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 - \dfrac{3y}{(1+2x)^2} & \dfrac{3x}{1+2x} \\ \dfrac{3y}{(1+2x)^2} & \dfrac{x-1}{1+2x} \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

com valores próprios 3 e -1 , ou seja, P_1 é ponto de sela.

No ponto P_2, a matriz da aproximação linear é:

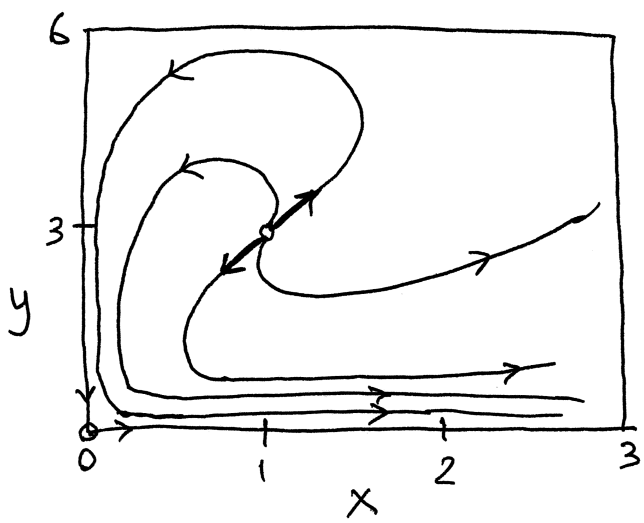
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A equação dos valores próprios é $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$, com apenas uma raiz, $\lambda = 1$. Conclui-se então que P_2 é nó impróprio repulsivo.

(c) O retrato de fase pode ser obtido no Maxima com o comando:

```
plotdf ([3*x-3*x*y/(1+2*x),3*x*y/(1+2*x)-y],[x,y],[x,0,3],[y,0,6]);
```

E é representado na seguinte figura:



É importante identificar os dois eixos, mostrar as coordenadas dos pontos de equilíbrio, ter em conta que unicamente interessa o primeiro quadrante do espaço de fase e as linhas de evolução num sistema de duas espécies nunca podem atravessar nenhum dos dois eixos.

Perguntas

3. D	**6.** E	**9.** C	**12.** E	**15.** A
4. A	**7.** B	**10.** B	**13.** B	**16.** E
5. D	**8.** B	**11.** C	**14.** A	**17.** D

Critérios de avaliação

Problema 1

- Equação de movimento ______ 0.8
- Explicação de que o sistema oscila ______ 0.8
- Obtenção da expressão do período ______ 0.8
- Cálculo do período da lua ______ 0.8
- Cálculo do tempo de viagem entre Porto e Nova Zelândia ______ 0.8

Problema 2

- Determinação do tipo de sistema ______ 0.8
- Obtenção dos dois pontos de equilíbrio ______ 0.4
- Cálculo da matriz jacobiana ______ 0.4
- Valores próprios e caraterização do primeiro ponto de equilíbrio ______ 0.8
- Valores próprios e caraterização do segundo ponto de equilíbrio ______ 0.8
- Retrato de fase ______ 0.8