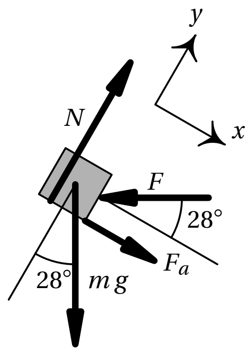
Resolução do exame de 1 de julho de 2019 Regente: Jaime Villate



Problema 1. O gráfico à direita mostra o diagrama de corpo livre do bloco e uma forma possível de definir os eixos x e y. O sentido indicado na figura para a força de atrito, F_a, é o que terá na alínea *b*, quando for atrito cinético, oposto ao sentido do movimento do bloco. Na alínea *a*, em que o atrito é estático, poderá ter esse sentido ou o sentido oposto (nesse segundo caso, o valor obtido para F_a será negativo).

(a) Uma das condições de equilíbrio é que a componente x da força resultante seja nula, que traduz-se na seguinte equação:

$$F_a + m\,g \sin 28^\circ - F \cos 28^\circ = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_a = 10 \cos 28^\circ - 14.7 \sin 28^\circ = 1.928\ \text{N}$$

O sinal positivo indica que a força de atrito sim é no sentido indicado na figura.

(b) A força de atrito, F_a, corresponde a atrito cinético e, como tal,

$$F_a = \mu_c\, N = 0.2\ N$$

A componente y da força resultante deverá ser nula, e a componente x deverá ser igual a menos a massa vezes a aceleração:

$$\begin{cases} N - 15 \sin 28^\circ - 14.7 \cos 28^\circ = 0 \\ 0.2\ N + 14.7 \sin 28^\circ - 15 \cos 28^\circ = -1.5\, a \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} N = 20.02\ \text{N} \\ a = 1.559\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

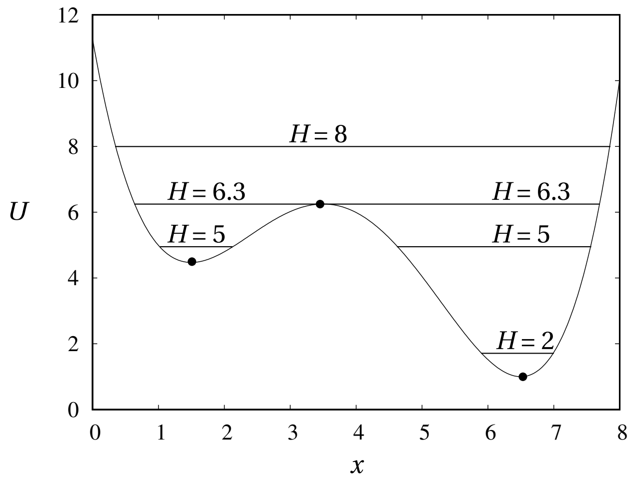
Problema 2. As equações de evolução do sistema são obtidas a partir das equações de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = y \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$$

Ou, em vez de usarmos as equações de Hamilton, podemos considerar que o sistema é uma partícula de massa igual a 1, que se desloca no eixo dos x, sob a ação da energia potencial $U(x)$, com velocidade $y = \dot{x}$. A função hamiltoniana é a energia mecânica dessa partícula.

(a) Há três pontos de equilíbrio, onde a derivada de U é nula: dois mínimos locais em $x \approx 1.5$ e $x \approx 6.5$, e um máximo local em $x \approx 3.5$, indicados na figura ao lado com três círculos. A primeira equação de evolução implica que nos pontos de equilíbrio $y = 0$. As coordenadas (x,y) dos 3 pontos de equilíbrio são então:

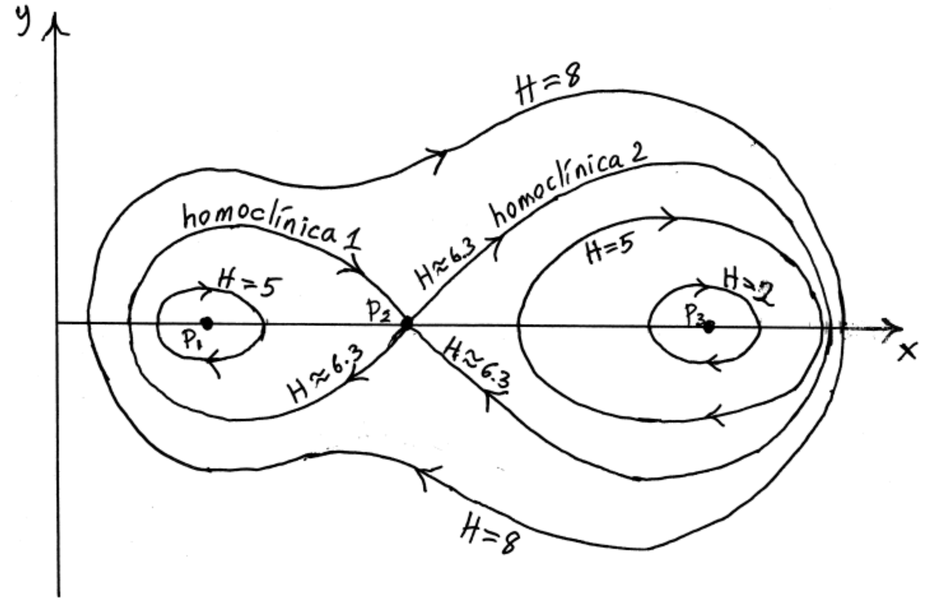
$$\text{P}_1 = (1.5, 0) \qquad \text{P}_2 = (3.5, 0) \qquad \text{P}_3 = (6.5, 0)$$



(b) As barras horizontais na figura mostram onde poderá estar o sistema para diferentes valores de H. Há 4 casos diferentes:

(i) H maior que o valor de H no ponto P_3 (igual a $U(6.5) \approx 1$, porque $y = 0$) e menor que o valor de H no ponto P_1 ($U(1.5) \approx 4.3$); optamos por usar $H = 2$ que, como mostra o gráfico, corresponde a um ciclo à volta de P_3. (ii) H maior que 4.3 e menor que o valor de H no ponto P_2 ($U(3.5) \approx 6.3$); optamos por usar $H = 5$, que conduz a dois ciclos diferentes, um à volta de P_1 e outro à volta de P_3. (iii) $H \approx 6.3$, que conduz a duas órbitas homoclínicas, uma à volta de P_1 e outra à volta de P_3. (iv) $H > 6.3$, que conduz a ciclos que contornam os 3 pontos de equilíbrio (mostra-se o caso $H = 8$).

O retrato de fase é o sumário desses resultados:



(c) $H(5,-1) \approx 1/2 + 4 = 4.5$, que se encontra na região onde há ciclos em torno do ponto P_3. O sistema oscila em torno desse ponto. O valor inicial negativo de y implica que x diminui e y aumenta, até um instante em que $x \approx 4.5$ e $y = 0$. A partir desse instante, x e y aumentam, até um instante em que $x = 6.5$ e y atinge o valor máximo $y = \sqrt{2(4.5-1)} \approx 2.6$; a seguir, x continua a aumentar mas y diminui, até um instante em que $x \approx 7.5$ e $y = 0$. Depois, x e y diminuem até $x = 6.5$, $y = -2.6$ (valor mínimo de y). A seguir, x continua a diminuir mas y aumenta, até voltar ao estado inicial do sistema: $x = 5$, $y = -1$. O mesmo ciclo repete-se indefinidamente.

Perguntas

3. B	**6.** C	**9.** E	**12.** B	**15.** E
4. D	**7.** E	**10.** D	**13.** B	**16.** C
5. D	**8.** D	**11.** B	**14.** B	**17.** B

Cotações

Problema 1

- Diagrama de corpo livre incluindo ângulos e eixos ________ 0.8
- Expressão da soma das componentes das forças paralelas ao plano (a) ________ 0.8
- Obtenção da força de atrito, indicando as unidades ________ 0.2
- Relação entre força de atrito cinético e reação normal (b) ________ 0.4
- Expressão da soma das componentes das forças paralelas ao plano (b) ________ 0.8
- Expressão da soma das componentes das forças perpendiculares ao plano (b) ________ 0.8
- Obtenção da aceleração, indicando as unidades ________ 0.2

Problema 2

- Obtenção dos 3 pontos de equilíbrio ________ 0.8
- Retrato de fase mostrando os eixos x e y, os 3 pontos de equilíbrio e as curvas importantes (órbitas homoclínicas/heteroclínicas, ciclos, curvas abertas) com setas que indiquem o sentido em que o sistema evolui ________ 2.4
- Explicação da evolução do sistema para $t > 0$ na alínea c ________ 0.8