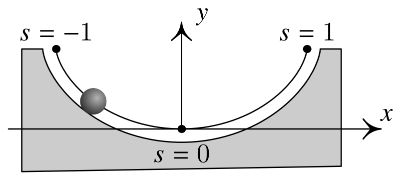
Nome:____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8$ m/s^2.

1. (4 valores) Uma esfera homogénea de massa m, raio r e momento de inércia, em relação ao seu centro, $I = \frac{2}{5}\,m\,r^2$, roda sem deslizar numa calha no plano vertical xy, de forma que o centro da esfera descreve uma trajetória com forma de cicloide de 2 m de comprimento, tal como mostra a figura. Como tal, a altura y do centro da esfera é dada pela expressão $y = \frac{1}{2}\,s^2$, em que s é o comprimento de arco ao longo da trajetória, com $s = \pm 1$ nos dois extremos e $s = 0$ no ponto meio (y e s em metros). O sistema de eixos tem x horizontal, y vertical e origem no ponto meio da trajetória.



(a) Encontre as expressões da energia potencial da esfera, em função de s, e da energia cinética em função de $\dot{s}$. (b) Encontre a equação de movimento para a aceleração $\ddot{s}$ da esfera, desprezando a resistência do ar. (c) Mostre que se trata de um sistema dinâmico linear e diga de que tipo é o ponto de equilíbrio. (d) Explique como será o movimento da esfera quando for largada do repouso numa posição qualquer s diferente de zero. (e) Determine o tempo que demorará a esfera, largada do repouso em $s \neq 0$, até chegar ao ponto mais baixo, $s = 0$ (observe-se que esse tempo é o mesmo qualquer que for o valor inicial $s \neq 0$).

2. (4 valores) A curvatura de qualquer função $y = f(x)$ pode ser determinada resolvendo um problema de cinemática. Considere-se, por exemplo, a trajetória $y = \cos(x)$. Admitindo uma partícula que se desloca ao longo dessa trajetória, com componente x da velocidade $v_x = 1$, conclui-se então que $x = t$. (a) Escreva a expressão do vetor posição da partícula em função de t e encontre as expressões para os vetores velocidade e aceleração. (b) Determine a expressão da aceleração tangencial, derivando o valor da velocidade, v, em ordem ao tempo. (c) Determine a expressão da aceleração normal. (d) Encontre a expressão do raio de curvatura e substitua $t = x$ para obter a expressão em função de x.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, −0.2, em branco, 0.

3. Num objeto com massa de 0.4 kg atuam unicamente duas forças externas: $2\,\hat{\imath} - 6\,\hat{\jmath}$ e $8\,\hat{\imath} + 10\,\hat{\jmath}$ (ambas em newtons). Determine o módulo da aceleração do centro de massa do objeto.

(A) 26.9 m/s^2 **(C)** 35.0 m/s^2 **(E)** 53.9 m/s^2
(B) 23.3 m/s^2 **(D)** 18.0 m/s^2

Resposta: ☐

4. Num sistema que se desloca no eixo dos x, a força resultante é $x^2 + x - 2$. Na lista seguinte, qual dos valores corresponde à posição x dum ponto de equilíbrio estável?

(A) 3 **(C)** -1 **(E)** -2
(B) 2 **(D)** 1

Resposta: ☐

5. O vetor posição dum ponto, em função do tempo, é dado pela expressão: $3\,t^3\,\hat{\imath} + (t^2 + 2)\,\hat{\jmath}$ (unidades SI). Calcule o ângulo entre os vetores velocidade e posição, no instante $t = 1$.

(A) 68.2° **(C)** 13.0° **(E)** 32.5°
(B) 52.0° **(D)** 42.2°

Resposta: ☐

6. As equações de evolução dum sistema linear, são:
$\dot{x} = a\,x + y \qquad \dot{y} = x + a\,(x + y)$
onde a está no intervalo $a > (1 + \sqrt{5})/2$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem do espaço de fase?

(A) foco repulsivo **(C)** foco atrativo **(E)** ponto de sela
(B) nó atrativo **(D)** nó repulsivo

Resposta: ☐

7. Um ciclista demora 39 s a percorrer 350 m, numa pista reta e horizontal, com velocidade uniforme. Sabendo que o raio das rodas da bicicleta é 26.8 cm e admitindo que as rodas não deslizam sobre a pista, determine o valor da velocidade angular das rodas.

(A) 28.7 rad/s **(C)** 19.1 rad/s **(E)** 38.3 rad/s
(B) 33.5 rad/s **(D)** 23.9 rad/s

Resposta: ☐

8. Um sistema não linear tem um centro no ponto P. Qual das afirmações seguintes, acerca da matriz jacobiana no ponto P, é verdadeira?

(A) o traço é positivo
(B) o determinante é negativo
(C) o determinante é nulo
(D) o traço é negativo
(E) o traço é nulo.

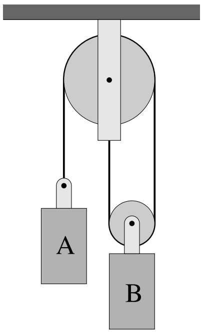
Resposta: ☐

9. A velocidade de um corredor pode aproximar-se de $v = 7.5\sqrt{1 - 0.03\,s}$, na qual v é expressa em km/h e a posição na trajetória, s, é expressa em km. Sabendo que $s = 0$ em $t = 0$, determine quantos quilómetros terá percorrido o corredor ao fim de três quartos de hora.

(A) 3.741 **(C)** 5.388 **(E)** 4.49
(B) 6.465 **(D)** 7.758

Resposta: ☐

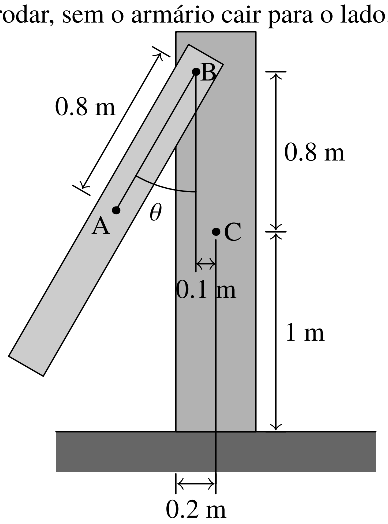
10. No instante em que o bloco A desce com velocidade 12 cm/s, com que velocidade sobe o bloco B?



(**A**) 12 cm/s (**C**) 6 cm/s (**E**) 36 cm/s
(**B**) 24 cm/s (**D**) 4 cm/s

Resposta: ☐

11. Um carpinteiro está a construir um armário formado por uma caixa vertical de 2 m de altura e massa de 15 kg, com centro de massa no ponto C indicado na figura. O armário tem uma barra com massa de 6 kg, ligado a um eixo horizontal no ponto B, 0.1 m à esquerda e 0.8 m por cima do ponto C, que lhe permite rodar um ângulo θ em relação à vertical. O centro de massa da barra é o ponto A. Determine o valor máximo do ângulo θ que a barra pode rodar, sem o armário cair para o lado.



(**A**) 73.4° (**C**) 38.7° (**E**) 48.6°
(**B**) 61.0° (**D**) 52.3°

Resposta: ☐

12. O espaço de fase dum sistema dinâmico é o plano xy. Em coordenadas polares, as equações de evolução são $\dot{\theta} = -3$, $\dot{r} = r^3 + 2r^2 + r$. Que tipo de ponto de equilíbrio é a origem?

(**A**) nó atrativo
(**B**) foco atrativo
(**C**) foco repulsivo
(**D**) ponto de sela
(**E**) nó repulsivo

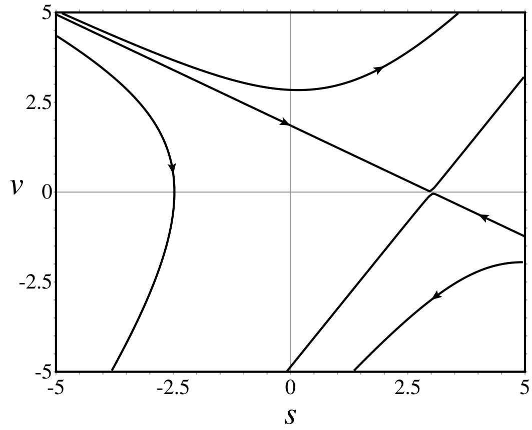
Resposta: ☐

13. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, qual dos seguintes sistemas é um sistema de duas espécies com competição?

(**A**) $\dot{x} = x^2 - x\,y \quad \dot{y} = y^2 - x\,y$
(**B**) $\dot{x} = x\,y - x^2 \quad \dot{y} = y^2 - x^2$
(**C**) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 + x\,y$
(**D**) $\dot{x} = y^2 - x\,y \quad \dot{y} = x^2 - x\,y$
(**E**) $\dot{x} = x^2 + x\,y \quad \dot{y} = y^2 + x\,y$

Resposta: ☐

14. A figura mostra o retrato de fase duma partícula, em que s é a posição na trajetória e v a velocidade. Existe um único ponto de equilíbrio em $s = 3$. Qual das seguintes afirmações é correta?



(**A**) Existem ciclos.
(**B**) Existe uma órbita heteroclínica.
(**C**) Existe uma órbita homoclínica.
(**D**) O ponto de equilíbrio é estável
(**E**) O ponto de equilíbrio é instável.

Resposta: ☐

15. Um corpo de 18 kg desloca-se ao longo do eixo dos x. A força resultante sobre o corpo é conservativa, com energia potencial dada pela expressão $1 + 7\,x^2$ (SI). Se o corpo passa pela origem com velocidade $8\,\hat{\imath}$, com que energia cinética chegará ao ponto $x = 5$ m?

(**A**) 2005.0 J (**C**) 3408.5 J (**E**) 401.0 J
(**B**) 1002.5 J (**D**) 120.3 J

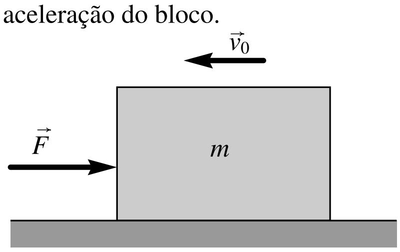
Resposta: ☐

16. Um sistema de pesos e roldanas, conservativo, tem um único grau de liberdade y. A energia cinética é dada pela expressão $5\,m\,\dot{y}^2$ e a energia potencial é: $U = -6\,m\,g\,y$, onde g é a aceleração da gravidade e m é um parâmetro com unidades de massa. Determine o valor da aceleração $\ddot{y}$.

(**A**) $\frac{6}{5}\,g$ (**C**) $\frac{12}{5}\,g$ (**E**) $\frac{3}{5}\,g$
(**B**) $\frac{18}{5}\,g$ (**D**) $\frac{2}{5}\,g$

Resposta: ☐

17. O bloco na figura, com massa igual a 6 kg, desloca-se para a esquerda, com velocidade inicial $\vec{v}_0$, sobre uma superfície horizontal. Sobre o bloco atua uma força externa $\vec{F}$, horizontal e constante, com módulo igual a 30 N. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é igual a 0.25. Calcule o módulo da aceleração do bloco.



(**A**) 7.45 m/s^2 (**C**) 15.3 m/s^2 (**E**) 2.55 m/s^2
(**B**) 44.7 m/s^2 (**D**) 5.0 m/s^2

Resposta: ☐

Problema 2. (a) O vetor posição dos pontos no plano xy é $x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$. Em particular, nos pontos da trajetória, $x = t$, $y = \cos(t)$ e o vetor posição é:

$$\vec{r} = t\,\hat{\imath} + \cos(t)\,\hat{\jmath}$$

Os vetores velocidade e aceleração são:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \hat{\imath} - \sin(t)\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = -\cos(t)\,\hat{\jmath}$$

(b) A expressão do valor da velocidade é,

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{1+\sin^2(t)}$$

e a aceleração tangencial é

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\sin(t)\,\cos(t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}$$

(c) A aceleração normal é

$$a_\mathrm{n} = \sqrt{a^2 - a_\mathrm{t}^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} - a_\mathrm{t}^2} = \sqrt{\cos^2(t) - \frac{\sin^2(t)\,\cos^2(t)}{1+\sin^2(t)}} = \sqrt{\frac{\cos^2(t)}{1+\sin^2(t)}} = \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}$$

(d) O raio de curvatura é

$$R = \frac{v^2}{a_\mathrm{n}} = \left(1+\sin^2(t)\right)\left(\frac{\sqrt{1+\sin^2(t)}}{|\cos(t)|}\right)$$

Simplificando e substituindo t por x, obtém-se a expressão do raio de curvatura da função $\cos(x)$

$$R = \frac{\left(1+\sin^2(x)\right)^{3/2}}{|\cos(x)|}$$

Perguntas

3. A **4.** E **5.** E **6.** D **7.** B **8.** E **9.** C **10.** C **11.** E **12.** C **13.** A **14.** E **15.** E **16.** E **17.** A

Cotações

Problema 1

- Alínea *a* ____________________ 0.8
- Alínea *b* ____________________ 0.8
- Alínea *c* ____________________ 0.8
- Alínea *d* ____________________ 0.8
- Alínea *e* ____________________ 0.8

Problema 2

- Alínea *a* ____________________ 1.2
- Alínea *b* ____________________ 0.8
- Alínea *c* ____________________ 0.8
- Alínea *d* ____________________ 1.2