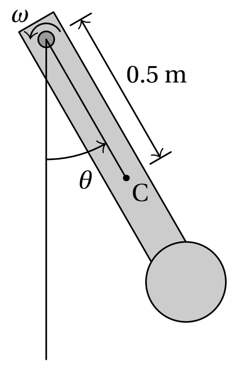
Duração: 90 minutos. Prova com consulta de formulário, em folha A4, e uso de dispositivo de cálculo, apenas para fazer contas e não para consultar apontamentos, exames anteriores ou formulários. O dispositivo não pode estar ligado à rede e só pode executar um programa de cada vez. Use $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

Nome:____

1. (6 valores) O pêndulo na figura, com massa de 520 gramas, pode oscilar num plano vertical à volta dum eixo horizontal que roda com velocidade angular ω constante, no sentido contrário aos ponteiros do relógio, sem se deslocar. θ é o ângulo que o segmento desde o centro do eixo até o centro de massa C do pêndulo faz com a vertical. O centro de massa C do pêndulo está a 0.5 m do centro do eixo e o raio de giração do pêndulo, em torno dum eixo perpendicular à folha e passando por C, é igual a 0.32 m. O atrito cinético entre o eixo e o pêndulo produz um binário sobre o pêndulo; admita que esse binário é constante, igual a 1077 mN·m. Desprezando a resistência do ar: (a) Encontre a equação de movimento correspondente a θ (expressão de $\ddot{\theta}$ em função das variáveis de estado) (b) Encontre todos os pontos de equilíbrio no espaço de fase. (c) Determine que tipo de pontos são esses pontos de equilíbrio.



PERGUNTAS. Respostas certas, 1 valor, erradas, −0.25, em branco, 0. Indique as respostas neste enunciado e não na folha de exame.

2. Calcule a distância que um objeto percorre ao longo da sua trajetória entre $t = 0$ e $t = 1.5$ s, sabendo que a sua posição na trajetória verifica a expressão $s = 14\,t - 7\,t^2$ (unidades SI).

(A) 12.25 m **(C)** 4.75 m **(E)** 7 m
(B) 8.75 m **(D)** 1.75 m

Resposta: ☐

3. Uma partícula de massa m, em movimento num plano, tem dois graus de liberdade. As duas componentes da força generalizada resultante são as componentes do vetor $m\vec{a}$ no sistema de coordenadas usado. Se forem usadas coordenadas cartesianas x e y, essas componentes são então $m\,a_x$ e $m\,a_y$ e as duas equações de Lagrange (observe que $E_c = m\,v^2/2$ e $U = 0$) conduzem às expressões das componentes cartesianas da aceleração, $a_x = \ddot{x}$ e $a_y = \ddot{y}$. Em coordenadas polares as componentes da força generalizada são $m\,a_r$ e $m\,a_\theta$; use as equações de Lagrange para encontrar as expressões das componentes polares da aceleração:

(A) $a_r = \ddot{r} + r\dot{\theta}^2,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$
(B) $a_r = \ddot{r} + r\dot{\theta},\ a_\theta = r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$
(C) $a_r = \ddot{r} + r\dot{\theta}^2,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
(D) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta},\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$
(E) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

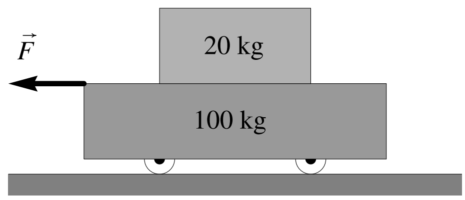
Resposta: ☐

4. O movimento duma partícula é circular uniforme, com centro no ponto $1.5\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} - \hat{k}$. Quando a partícula passa pelo ponto $4\,\hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}$, o seu vetor velocidade é $2\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 5\,\hat{k}$ (todos os dados em unidades SI). Determine o módulo da aceleração da partícula em unidades SI.

(A) 9.3 **(C)** 1.5 **(E)** 2.8
(B) 84.0 **(D)** 1.9

Resposta: ☐

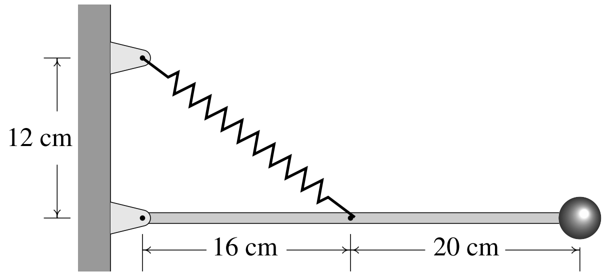
5. Os dois blocos na figura aceleram sobre a mesa horizontal, sem que o bloco de cima deslize em relação ao de baixo, devido à açao da força horizontal $\vec{F}$ com módulo de 54 N. A resistência do ar, as massas das rodas e as forças de atrito nelas podem ser desprezadas. Determine o módulo da força de atrito entre as superfícies dos blocos.



(A) 6 N **(C)** 9 N **(E)** 7 N
(B) 8 N **(D)** 5 N

Resposta: ☐

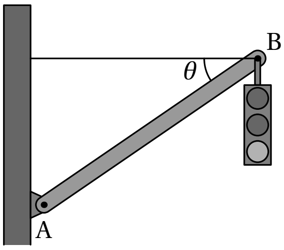
6. A mola elástica na figura é usada para manter a barra estática na posição horizontal. O comprimento da mola, quando não está comprimida nem esticada, é 13 cm. A barra tem massa 15 gramas, com centro de massa no ponto onde está ligada a mola, e a esfera homogénea tem massa igual a 64 gramas. Determine a constante elástica da mola.



(A) 48.2 N/m **(C)** 22.3 N/m **(E)** 92.8 N/m
(B) 37.1 N/m **(D)** 66.8 N/m

Resposta: ☐

7. O semáforo na figura, com massa total de 52 kg, está pendurado no ponto B duma barra homogénea com massa de 1.6 kg e comprimento (desde A até B) igual a 1.8 m. O ponto A da barra está ligado a um pino, num suporte fixo num poste vertical, que permite que a barra rode para cima ou para baixo, enquanto o ponto A permanece fixo. O cabo que liga o poste ao ponto B da barra está na posição horizontal e o ângulo θ é igual a 32°. Determine o valor da tensão no cabo.



(A) 828.1 N **(B)** 749.7 N **(C)** 451.7 N **(D)** 545.8 N **(E)** 655.6 N

Resposta: ☐

8. Determine o tempo que demora até descer a altura zero uma esfera metálica lançada desde a altura inicial 2.5 m, com velocidade inicial 14 m/s, inclinada 30° por cima da horizontal (resistência do ar desprezável).

(A) 1.59 s **(B)** 1.72 s **(C)** 0.36 s **(D)** 1.43 s **(E)** 1.95 s

Resposta: ☐

9. Num rio habitam crocodilos, sapos e peixes. Os crocodilos alimentam-se de sapos e de peixes e os sapos alimentam-se de peixes. As equações do sistema são:
$\dot{x} = x(2+x-y-z)$ $\quad \dot{y} = y(2+x-y-z)$
$\dot{z} = z(2+x+y-z)$
Qual das espécies representa cada uma das variáveis?

(A) x são sapos, y crocodilos e z peixes.

(B) x são crocodilos, y peixes e z sapos.

(C) x são peixes, y sapos e z crocodilos.

(D) x são crocodilos, y sapos e z peixes.

(E) x são sapos, y peixes e z crocodilos.

Resposta: ☐

10. A equação de van der Pol: $\ddot{x} + 2\varepsilon(x^2-1)\dot{x} + x = 0$, onde ε pode ser qualquer número real positivo, tem um único ponto de equilíbrio em $x = \dot{x} = 0$ e um ciclo limite atrativo. Na seguinte lista:

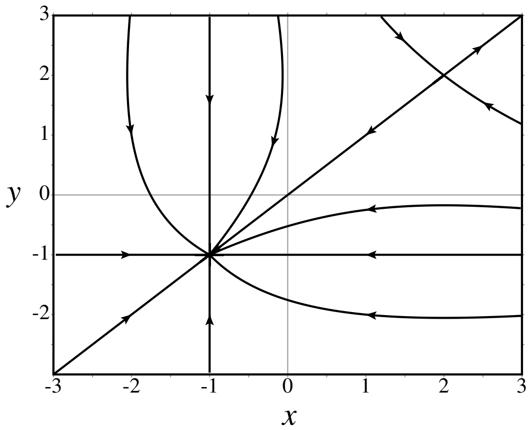
1. foco atrativo.
2. foco repulsivo.
3. nó atrativo.
4. nó repulsivo.
5. ponto de sela.

Quais desses 5 tipos de pontos poderá ser o ponto de equilíbrio na equação de van der Pol?

(A) 1 ou 3 **(B)** 3 ou 4 **(C)** 3, 4 ou 5 **(D)** 2 ou 4 **(E)** 1 ou 2

Resposta: ☐

11. Um sistema não linear tem apenas dois pontos de equilíbrio, em $(x,y) = (-1,-1)$ e $(x,y) = (2,2)$, e a figura mostra o retrato de fase. Qual dos sistemas lineares na lista é uma boa aproximação na vizinhança do ponto $(-1,-1)$?



(A) $\dot{x} = 3\,y \quad \dot{y} = -3\,y$

(B) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = 3\,y$

(C) $\dot{x} = 3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$

(D) $\dot{x} = -3\,y \quad \dot{y} = 3\,x$

(E) $\dot{x} = -3\,x \quad \dot{y} = -3\,y$

Resposta: ☐

12. Na lista seguinte, quais poderão ser os dois valores próprios dum oscilador harmónico com amortecimento fraco?

(A) -1 e -2 **(B)** $1-\text{i}$ e $1+\text{i}$ **(C)** $-1-\text{i}$ e $-1+\text{i}$ **(D)** i e $-\text{i}$ **(E)** 1 e 2

Resposta: ☐

13. A matriz dum sistema dinâmico linear tem traço T e determinante D. A origem do espaço de fase é um nó repulsivo. Qual das seguintes afirmações é verrdadeira?

(A) $D < 0$ **(B)** $D = 0$ **(C)** $T < 0$ **(D)** $T > 0$ **(E)** $T = 0$

Resposta: ☐

14. A aceleração tangencial dum sistema em função da sua posição na trajetória, s, é dada pela expressão $a_t = (s+1)(s-1)(3-s)$. Qual das seguintes afirmações sobre os pontos de equilíbrio desse sistema é verdadeira?

(A) $s = -1$ é estável e $s = 3$ é instável.

(B) $s = 1$ é estável e $s = 3$ é instável.

(C) $s = -1$ é instável e $s = 3$ é estável.

(D) $s = 1$ é instável e $s = 3$ é estável.

(E) $s = -1$ e $s = 1$ são instáveis.

Resposta: ☐

15. A força de resistência dum fluido sobre um corpo depende de todos os fatores indicados na lista, excepto um. Identifique o fator do qual não depende essa força.

(A) Massa volúmica do fluido.

(B) Tamanho do corpo.

(C) Peso do corpo.

(D) Velocidade do corpo.

(E) Forma geométrica do corpo.

Resposta: ☐

Problema 1. (*a*) Pode usar-se a lei do movimento de um corpo rígido em rotação à volta dum eixo fixo: momento de inércia vezes aceleração angular igual ao momento resultante em relação ao eixo. O momento de inércia em relação ao eixo determina-se usando o teorema dos eixos paralelos

$$I_{\text{eixo}} = 0.520 \times 0.32^2 + 0.520 \times 0.5^2 = 0.1832\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

E a equação de movimento é (SI):

$$0.1832\,\ddot{\theta} = 1.077 - 0.520 \times 9.8 \times 0.5 \sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} = 5.877 - 13.90 \sin\theta$$

(*b*) As equações de evolução são

$$\dot{\theta} = \omega \qquad\qquad \dot{\omega} = 5.877 - 13.90 \sin\theta$$

E os pontos de equilíbrio são as soluções de:

$$\omega = 0 \qquad\qquad \sin\theta = \frac{5.877}{13.90} = 0.4227$$

Existem dois ângulos entre 0 e 360° com seno igual a 4227; 25° e 155°. Como tal, os pontos de equilíbrio são os pontos com $\omega = 0$ e θ igual a $25° + 360°\,n$ ou $155° + 360°\,n$, em que n é qualquer inteiro, positivo, negativo ou zero.

(*c*) A matriz jacobiana do sistema é:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -13.90\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$

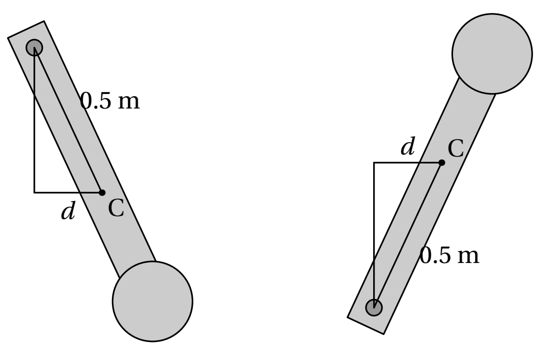
com traço nulo e determinante igual a $13.90\cos\theta$. Nos pontos de equilíbrio com $\theta = 25° + 360°\,n$, no primeiro quadrante, o cosseno é positivo e o determinante também. Esses pontos são então centros.

Nos pontos de equilíbrio com $\theta = 155° + 360°\,n$, no segundo quadrante, o cosseno é negativo e o determinante também. Esses pontos são então pontos de sela.

Comentário: As alíneas b e c podem ser resolvidas sem saber a equação de movimento. Para que o pêndulo fique em equilíbrio, o peso deverá produzir momento igual e oposto ao momento $M =$ 1077 mN·m; como tal, o braço do peso deverá ser igual a:

$$d = \frac{1.077}{0.520 \times 9.8} = 0.2113\ \text{m}$$

Para que o momento do peso seja no sentido dos ponteiros do relógio, o pêndulo deverá estar em alguma das duas posições representadas no seguinte diagrama.



No primeiro caso, se a distância de C até a vertical diminuir, o momento do peso fica menor que M e pêndulo roda no sentido contrário aos ponteiros do relógio, regressando à posição de equilíbrio. Se essa distância aumentar, o momento do peso aumenta e o pêndulo roda nos sentido dos ponteiros do relógio, regressando à posição de equilíbrio; como tal, esse primeiro ponto é ponto de equilíbrio estável.

No segundo caso, se a distância de C até a vertical diminuir, o momento do peso fica menor que M e pêndulo roda no sentido contrário aos ponteiros do relógio, afastando-se da posição de equilíbrio; se essa distância aumentar, o momento do peso aumenta e o pêndulo roda nos sentido dos ponteiros do relógio, afastando-se da posição de equilíbrio; como tal, esse segundo ponto é ponto de equilíbrio instável.

Perguntas

2. B

3. E

4. A

5. C

6. B

7. A

8. B

9. C

10. D

11. E

12. C

13. D

14. D

15. C