FEUP - MIEIC   FÍSICA 1 - EIC0010 - 2017/2018

Resolução do exame de 12 de junho de 2018   Regente: Jaime Villate

Problema 1. (*a*) Como a esfera é homogénea, o seu centro é o centro de massa e:

$$v_{\text{cm}} = \dot{s} \qquad\qquad I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}\, m\, r^2$$

A energia cinética da esfera é:

$$E_{\text{c}} = \frac{m}{2}\,\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\, m\, r^2\right)\omega^2$$

e como roda sem deslizar, a sua velocidade angular é $\omega = \dot{s}/r$ e, como tal,

$$E_{\text{c}} = \frac{m}{2}\,\dot{s}^2 + \frac{m\, r^2}{5}\left(\frac{\dot{s}}{r}\right)^2 = \frac{7}{10}\, m\, \dot{s}^2$$

A energia potencial gravítica é:

$$U = m\, g\, y = \frac{m\, g}{2} s^2$$

(*b*) A equação de movimento obtém-se aplicando a equação de Lagrange para sistemas conservativos com um único grau de liberdade s:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_{\text{c}}}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial E_{\text{c}}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{7\, m}{5}\,\ddot{s} + m\, g\, s = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{s} = -\frac{5\, g}{7}\, s = -7\, s \quad \text{(SI)}$$

(*c*) As equações de evolução, em função das variáveis de estado s e v, são então,

$$\dot{s} = v \qquad \dot{v} = -7\, s$$

Que é um sistema linear, porque os lados direitos são combinações lineares das duas variáveis de estado, e a matriz do sistema é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$$

O traço nulo implica que os dois valores próprios diferem apenas no sinal: $\lambda_1 = -\lambda_2$. O produto dos valores próprios é igual ao determinante da matriz:

$$\lambda_1\, \lambda_2 = -\lambda_1^2 = 7 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{7}$$

Conclui-se então que o ponto de equilíbrio, $s = \dot{s} = 0$, é um centro.

(*d*) Todos os possíveis movimentos da esfera na calha são oscilações harmónicas com frequência angular $\Omega = \sqrt{7}$ Hz. Se a esfera parte do repouso em $s_0 \neq 0$, oscilará entre as posições s_0 e $-s_0$ na calha. Na realidade, a resistência do ar faz com que a cada oscilação os valores máximos e mínimos de s se aproximem de zero e a esfera acabará em repouso em $s = 0$.

(*e*) O período de oscilação, em segundos, é,

$$T = \frac{2\,\pi}{\Omega} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{7}}$$

O tempo que demora a descer desde s_0 até $s = 0$ é a quarta parte do período:

$$t = \frac{\pi}{2\sqrt{7}} \approx 0.594 \text{ s}$$

2º método. O problema pode também ser resolvido usando a expressão da energia mecânica,

$$E_\text{m} = E_\text{c} + U = \frac{7}{10}\, m\,\dot{s}^2 + \frac{m\,g}{2} s^2$$

(b) Ignorando a resistência do ar, essa energia permanece constante e, como tal, a sua derivada em ordem ao tempo é nula:

$$\frac{\mathrm{d}\,E_\text{m}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{7}{5}\, m\,\dot{s}\,\ddot{s} + m\,g\,s\,\dot{s} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \ddot{s} = -\frac{5\,g}{7}\, s$$

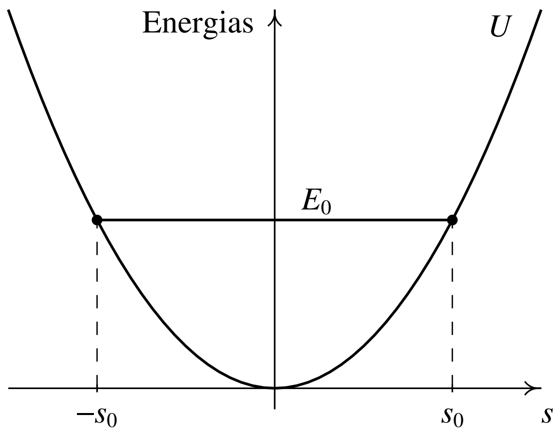
(usou-se o facto de que $\dot{s}$ deve ser contínua, ou seja, o resultado quando $\dot{s} = 0$ deve ser o mesmo que no limite $\dot{s} \to 0$).

(c) O sistema é linear porque a expressão para $\ddot{s}$ é combinação linear das variáveis de estado s e $\dot{s}$. Nos sistemas conservativos os mínimos locais da energia potencial são centros. Como U tem um mínimo local em $s = 0$, esse ponto de equilíbrio é um centro.

(d) A energia mecânica da esfera largada do repouso em s_0 é:

$$E_0 = \frac{m\,g}{2}\, s_0^2$$

O seguinte gráfico mostra a energia mecânica E_0 (segmento horizontal) e a energia potencial (parábola)



A esfera desloca-se no sentido negativo de s até chegar ao ponto $-s_0$, onde o movimento passa a ser no sentido positivo de s; quando a esfera regressa até o ponto s_0, o sentido do movimento muda novamente e repete-se o mesmo movimento indefinidamente: oscilação entre $-s_0$ e s_0.

(e) Em qualquer posição s, entre $-s_0$ e s_0, a energia mecânica é igual à energia inicial E_0

$$\frac{7}{10}\, m\,\dot{s}^2 + \frac{m\,g}{2} s^2 = \frac{m\,g}{2}\, s_0^2$$

Como tal, a expressão da velocidade em função da posição na trajetória é (unidades SI):

$$\dot{s} = \sqrt{7\left(s_0^2 - s^2\right)}$$

Separando variáveis e integrando s desde s_0 até 0, obtém-se o tempo pedido:

$$\sqrt{7}\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{s_0}^0 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2} \quad\Longrightarrow\quad t \approx 0.594\,\text{s}$$

3º método. Outra forma de resolver o problema consiste em observar que a energia cinética é igual à energia cinética de uma partícula pontual com massa $7\,m/5$. (*b*) A componente tangencial da força resultante nessa partícula é:

$$F_\text{t} = -\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s} = -m\,g\,s$$

e a aceleração tangencial é então:

$$\ddot{s} = \frac{F_\text{t}}{\frac{7}{5}\,m} = -\frac{m\,g\,s}{\frac{7}{5}\,m} = -\frac{5\,g}{7}\,s$$

(*c*) Como a equação diferencial anterior é linear, corresponde a um sistema dinâmico linear. A aceleração tangencial também pode escrever-se assim (unidades SI):

$$v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s} = -7\,s$$

Separando variáveis e integrando desde a posição inicial s_0, onde $v_0 = 0$, até uma posição qualquer, com velocidade v, obtém-se a expressão da velocidade em função de s:

$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v = -7\int_{s_0}^s s\,\mathrm{d}s \quad\Longrightarrow\quad v = \sqrt{7\left(s_0^2 - s^2\right)} = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}$$

Separando variáveis novamente e integrando desde $t = 0$, na posição inicial s_0, até uma posição qualquer s no instante t,

$$\sqrt{7}\int_0^t \mathrm{d}t = \int_{s_0}^s \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{s}{s_0}\right) \quad\Longrightarrow\quad s = s_0\,\cos(\sqrt{7}\,t)$$

A posição s oscila entre $-s_0$ e s_0, ou seja, o ponto de equilíbrio é um centro.

(*d*) A expressão obtida para s em função do tempo mostra que a esfera oscila entre $-s_0$ e s_0.

(*e*) A frequência angular da função $s_0\,\cos(\sqrt{7}\,t)$ é $\sqrt{7}$. O tempo que a esfera demora desde s_0 até $s = 0$ é um quarto do período, ou seja,

$$t = \frac{1}{4}\left(\frac{2\,\pi}{\sqrt{7}}\right) \approx 0.594\,\text{s}$$

Comentários sobre o problema 1.

Este problema está relacionado com um problema famoso da mecânica clássica, proposto por Johann Bernoulli em 1696, chamado *problema da braquistócrona*, que consiste em encontrar a trajetória descrita por um corpo sujeito apenas à força da gravidade que vai dum ponto a outro com menor altura, no menor tempo possível.

A derivada de y em ordem ao tempo é $\dot{y} = s\,\dot{s}$. A equação $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ implica $\dot{x}^2 = \left(1 - s^2\right)\,\dot{s}^2$, que conduz à expressão de x em função de s:

$$x = \int\sqrt{1 - s^2}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\sin^{-1}(s) + \frac{s}{2}\sqrt{1 - s^2}$$

Substituindo o comprimento de arco s pelo parâmetro $\phi = \sin^{-1}(s)$, obtém-se a representação paramétrica mais habitual da cicloide:

$$x = \frac{\phi}{2} + \frac{\sin(2\,\phi)}{4} \qquad\qquad y = \frac{1 - \cos(2\,\phi)}{4}$$

Problema 2. (a) O vetor posição dos pontos no plano xy é $x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$. Em particular, nos pontos da trajetória, $x = t$, $y = \cos(t)$ e o vetor posição é:

$$\vec{r} = t\,\hat{\imath} + \cos(t)\,\hat{\jmath}$$

Os vetores velocidade e aceleração são:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \hat{\imath} - \sin(t)\,\hat{\jmath}$$
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t} = -\cos(t)\,\hat{\jmath}$$

(b) A expressão do valor da velocidade é,

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{1+\sin^2(t)}$$

e a aceleração tangencial é

$$a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\sin(t)\,\cos(t)}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}$$

(c) A aceleração normal é

$$a_\mathrm{n} = \sqrt{a^2 - a_\mathrm{t}^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a} - a_\mathrm{t}^2} = \sqrt{\cos^2(t) - \frac{\sin^2(t)\,\cos^2(t)}{1+\sin^2(t)}} = \sqrt{\frac{\cos^2(t)}{1+\sin^2(t)}} = \frac{|\cos(t)|}{\sqrt{1+\sin^2(t)}}$$

(d) O raio de curvatura é

$$R = \frac{v^2}{a_\mathrm{n}} = \left(1+\sin^2(t)\right)\left(\frac{\sqrt{1+\sin^2(t)}}{|\cos(t)|}\right)$$

Simplificando e substituindo t por x, obtém-se a expressão do raio de curvatura da função $\cos(x)$

$$R = \frac{\left(1+\sin^2(x)\right)^{3/2}}{|\cos(x)|}$$

Perguntas

3. A	**6.** D	**9.** C	**12.** C	**15.** E
4. E	**7.** B	**10.** C	**13.** A	**16.** E
5. E	**8.** E	**11.** E	**14.** E	**17.** A

Cotações

Problema 1

- Alínea *a* ______ 0.8
- Alínea *b* ______ 0.8
- Alínea *c* ______ 0.8
- Alínea *d* ______ 0.8
- Alínea *e* ______ 0.8

Problema 2

- Alínea *a* ______ 1.2
- Alínea *b* ______ 0.8
- Alínea *c* ______ 0.8
- Alínea *d* ______ 1.2