Exercícios Resolvidos de Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

1. Cinemática

Problema 3

A expressão da aceleração tangencial de um objeto é $a_\text{t} = -4$ m/s^2. Se em $t = 0$, $v = +24$ m/s e a posição na trajetória é $s = 0$, determine a velocidade e a posição em $t = 8$ s e a distância total percorrida, ao longo da trajetória, entre $t = 0$ e $t = 8$ s.

Para calcular a velocidade em $t = 8$, substitui-se a expressão da aceleração constante na equação que relaciona a aceleração com a velocidade e o tempo

$$-4 = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}$$

Separando variáveis e integrando, encontra-se a velocidade em $t = 8$

$$-4\int_0^8 \mathrm{d}\,t = \int_{24}^{v} \mathrm{d}\,v' \quad\Longrightarrow\quad v = -8$$

Para calcular a posição final, substitui-se a expressão da aceleração constante na equação que relaciona a aceleração com a velocidade e a posição

$$-4 = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s}$$

Separando variáveis e integrando,

$$-4\int_0^s \mathrm{d}\,s' = \int_{24}^{-8} v\,\mathrm{d}\,v \quad\Longrightarrow\quad s = 64$$

O valor negativo da velocidade final quer dizer que o objeto deslocou-se até um ponto onde parou e em $t = 8$ está de regresso na direção da origem. Para calcular a distância total percorrida é necessário determinar a posição do ponto onde parou

$$-4\int_0^s \mathrm{d}\,s' = \int_{24}^{0} v\,\mathrm{d}\,v \quad\Longrightarrow\quad s = 72$$

Como tal, o objeto deslocou-se desde $s = 0$ até $s = 72$ m e depois deslocou-se outros 8 metros até $x = 64$ m. A distância total percorrida foi então 80 m.

Problema 4

Em $t_i = 0$, um objeto encontra-se em repouso na posição $s_i = 5$ cm num percurso. A partir desse instante o objeto começa a deslocar-se no sentido positivo de s , parando novamente num instante t_1 . A expressão da aceleração tangencial, entre t_i e t_1 , é: $a_\text{t} = 9 - 3\,t^2$, onde o tempo mede-se em segundos e a aceleração em cm/s^2. Determine: (*a*) O instante t_1 em que o objeto volta a parar. (*b*) A posição no percurso nesse instante.

Topo

A expressão dada para a aceleração tangencial em função do tempo pode ser substituída na equação cinemática $a_t = \dot{v}$, conduzindo a uma equação diferencial de variáveis separáveis:

$$9 - 3\,t^2 = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}$$

com variáveis v e t . Separando as variáveis, integrando t desde 0 até t_1 e integrando v desde zero até zero novamente, obtém-se a seguinte expressão

$$\int_0^{t_1} \left(9 - 3\,t^2\right) \mathrm{d}\,t = \int_0^0 \mathrm{d}\,v$$

que pode ser resolvida no Maxima

```
(%i1) integrate(9-3*t^2, t, 0, t1) = integrate(1, v, 0, 0);
```

(%o1) $9\,t_1 - t_1^3 = 0$

```
(%i2) solve(%);
```

(%o2) $[\,t_1 = -3,\ t_1 = 3,\ t_1 = 0\,]$

O objeto volta a parar então em $t_1 = 3$ s.

Para calcular a posição em função do tempo, é necessário saber a expressão da velocidade em função do tempo, que pode ser obtida separando variáveis novamente na equação $a_t = \dot{v}$, mas deixando os limites superiores como variáveis t e v .

$$\int_0^{t} \left(9 - 3\,t'^2\right) \mathrm{d}\,t' = \int_0^{v} \mathrm{d}\,v'$$

E resolvendo os integrais encontra-se a expressão de v em função de t

```
(%i3) integrate(9-3*t^2, t, 0, t) = integrate(1, v, 0, v);
```

(%o3) $9\,t - t^3 = v$

Substitui-se essa expressão na equação cinemática $v = \dot{s}$, conduzindo a uma equação de variáveis separáveis:

$$9\,t - t^3 = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}$$

Separando variáveis, integrando t desde $t_0 = 0$ até $t_1 = 3$ e s desde a posição inicial $s_0 = 5$ até a posição final s_1 obtém-se

$$\int_0^{3} \left(9\,t - t^3\right) \mathrm{d}\,t = \int_5^{s_1} \mathrm{d}\,s$$

E o valor de s_1 determina-se resolvendo os integrais

```
(%i4) integrate (lhs(%), t, 0, 3) = integrate(1, s, 5, s1);
```

(%o4) $\dfrac{81}{4} = s_1 - 5$

```
(%i5) solve(%);
```

(%o5) $\left[s_1 = \dfrac{101}{4}\right]$

A posição final do objeto é $s_1 = 25.25$ cm.

Problema 7

A expressão da aceleração tangencial de um objeto que oscila numa calha é $a_\mathrm{t} = -k\,s$, onde k é uma constante positiva. Determine:

(a) O valor de k para que a velocidade seja $v = 15$ m/s em $s = 0$ e $v = 0$ em $s = 3$ m.

(b) A velocidade do objeto em $s = 2$ m.

A expressão da aceleração tangencial permite resolver a seguinte equação

$$-k\,s = v\,\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s}$$

Separando variáveis e integrando entre os dois valores de s e de v dados, obtém-se o valor da constante k (unidades SI)

$$\int\limits_0^3 -k\,s\,\mathrm{d}\,s = \int\limits_{15}^0 v\,\mathrm{d}\,v$$
$$-9\,k = -225 \implies k = 25$$

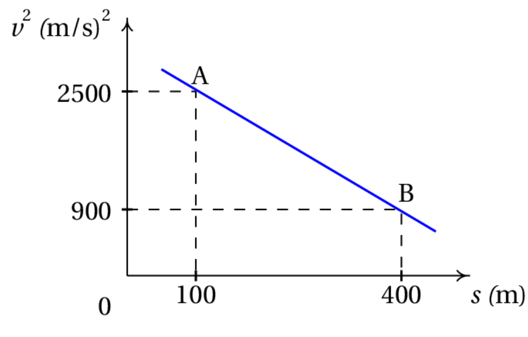
Para calcular a velocidade em $s = 2$, resolvem-se os mesmos integrais, mas agora o valor de k é conhecido e a variable desconhecida é a velocidade em $s = 2$

$$\int\limits_0^2 -25\,s\,\mathrm{d}\,s = \int\limits_{15}^{v} v'\,\mathrm{d}\,v'$$
$$-100 = v^2 - 225 \implies v = \pm 11.18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Os valores positivos e negativos de v são devidos a que, como a partícula oscila, passa muitas vezes por $s = 2$, umas vezes no sentido positivo e outras vezes no sentido negativo.

Problema 9

O quadrado da velocidade v de um objeto diminui linearmente em função da posição na sua trajetória, s , tal como se mostra no gráfico. Calcule a distância percorrida durante os dois últimos segundos antes do objeto chegar ao ponto B.



Encontra-se a equação da reta, usando os dois pontos dados no gráfico e tendo em conta que a variável no eixo das abcissas é s e a variável no eixo das ordenadas é v^2

$$v^2 - 900 = \left(\frac{900 - 2500}{400 - 100}\right)(s - 400)$$
$$v^2 = \frac{9100}{3} - \frac{16}{3}s$$

Como o enunciado diz que a velocidade diminui, então o objeto desloca-se de A para B e a sua velocidade é positiva. A expressão para v em ordem a s é então a raiz positiva do lado direito na equação anterior:

$$v = \sqrt{\frac{9100 - 16\,s}{3}}$$

Substituindo na equação $v = \dot{s}$, obtém-se uma equação diferencial de variáveis separáveis

$$\sqrt{\frac{9100-16\,s}{3}}=\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}$$

Para separar variáveis, a expressão no lado esquerdo passa a dividir ao lado direito:

$$\mathrm{d}\,t=\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}\,s}{\sqrt{9100-16\,s}}$$

Dois segundos antes de chegar ao ponto B, o objeto encontra-se num outro ponto C, onde podemos arbitrar t igual a zero. Como tal, a variável t será integrada desde 0 até 2 e a variável s desde s_C até 400

```
(%i6) integrate (1,t,0,2) = integrate (sqrt(3)/sqrt(9100-16*s),s,sC,400);
Is sC - 400 positive, negative or zero?


neg;
```

(%o6) $2=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{9100-16\,sC}}{8}-\frac{5\times 3^{3/2}}{4}\right)$

```
(%i7) float (solve (%));
```

(%o7) $[sC=334.7]$

A distância percorrida nos últimos dois segundos antes de chegar a B, é $s_B - s_C$. O resultado %o7 pode substituir-se nessa expressão para obter a distância

```
(%i8) subst (%, 400-sC);
```

(%o8) 65.33

A resposta é 65.33 m.