

**Duração: 90 minutos.** Prova com consulta de formulário, em folha A4, e uso de dispositivo de cálculo, apenas para fazer contas e não para consultar apontamentos, exames anteriores ou formulários. O dispositivo não pode estar ligado à rede e só pode executar um programa de cada vez. Use  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

**Li e compreendi o texto acima:**

1. (6 valores) Um objeto com massa de 500 gramas desloca-se ao longo de uma trajetória conhecida. A força resultante sobre o objeto é conservativa e a expressão para a energia potencial total é (unidades SI):

$$U = 4s^2 - 8s + 20$$

Onde  $s$  é a posição na trajetória. (a) Escreva as equações de evolução do sistema. (b) Determine a matriz jacobiana do sistema. Se num instante inicial o objeto se encontrar em  $s = 0$ , com velocidade de valor  $v = 4\sqrt{3} \text{ m/s}$ , começará a oscilar; determine: (c) o valor máximo da velocidade nessa oscilação e (d) os valores mínimo e máximo de  $s$  nessa oscilação.

**PERGUNTAS.** Respostas certas, 1 valor; erradas, -0.25, em branco, 0. Indique as respostas neste enunciado e não na folha de exame.

2. Numa partícula que se desloca no plano  $xy$  atua unicamente uma força conservativa. Em coordenadas polares  $r$  e  $\theta$ , as expressões da energia cinética e da energia potencial da partícula são:

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \quad U = kr^5$$

onde  $m$  é a massa da partícula e  $k$  uma constante. Determine a equação de movimento para  $\ddot{r}$

- (A)  $r\ddot{\theta}^2 - \frac{5kr^4}{m}$  (D)  $r\ddot{\theta} + \frac{5kr^4}{m}$   
(B)  $r^2\ddot{\theta}^2 + \frac{5kr^4}{m}$  (E)  $r^2\ddot{\theta}^2 - \frac{5kr^4}{m}$   
(C)  $r\ddot{\theta} + \frac{5kr^4}{m}$

Resposta: ☐

3. A projeção  $x$  da aceleração duma partícula aumenta em função do tempo, de acordo com a expressão  $a_x = 8t$  (unidades SI). No instante  $t = 0$  a projeção  $x$  da velocidade é nula e a componente da posição é  $x = 2 \text{ m}$ . Determine a projeção  $x$  da posição em  $t = 4 \text{ s}$ .

- (A) 541.5 m (C) 218.3 m (E) 87.3 m  
(B) 43.7 m (D) 262.0 m

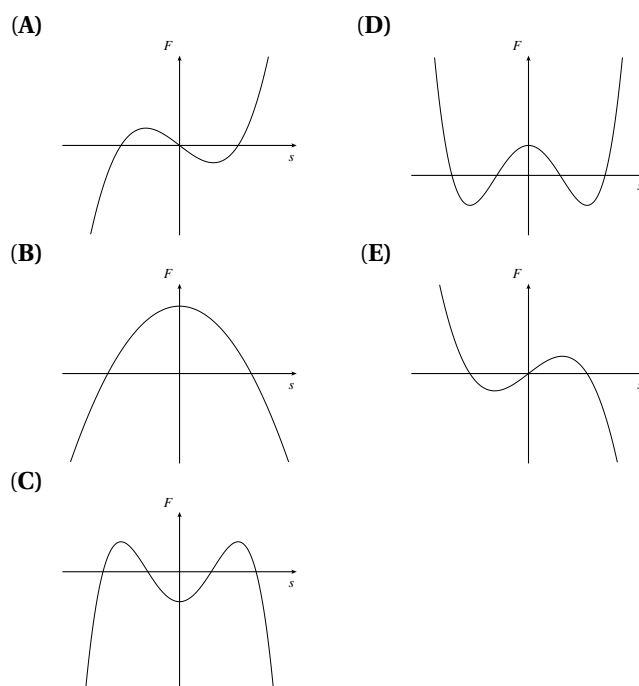
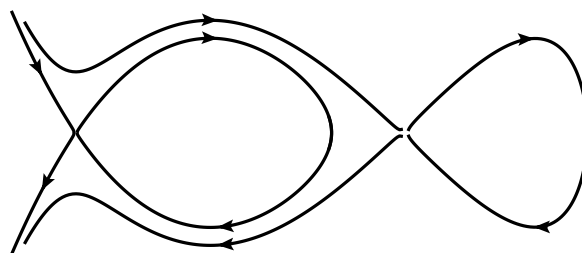
Resposta: ☐

4. Duas esferas homogêneas idênticas, cada uma com raio  $R$  e massa  $m$ , estão coladas uma à outra. O momento de inércia de cada esfera rodando à volta dum eixo que passa pelo seu centro é  $\frac{2}{5}mR^2$ . Encontre a expressão do momento de inércia do sistema das duas esferas, rodando à volta de um eixo que passa pelo centro de uma das esferas e é perpendicular ao segmento entre os centros das esferas.

- (A)  $\frac{14}{5}mR^2$  (C)  $\frac{24}{5}mR^2$  (E)  $\frac{18}{5}mR^2$   
(B)  $\frac{9}{5}mR^2$  (D)  $\frac{22}{5}mR^2$

Resposta: ☐

5. A figura mostra o retrato de fase, no espaço de fase  $(s, v)$ , dum sistema mecânico com força resultante conservativa. Qual dos gráficos na lista poderá representar a força tangencial resultante,  $F$ , em função de  $s$ ?



Resposta: ☐

6. A equação de movimento de uma partícula que se desloca no plano  $xy$  é  $\vec{a} = 4\vec{r} - 5\vec{v}$ , onde  $\vec{a}$  é o vetor aceleração,  $\vec{r}$  é o vetor posição e  $\vec{v}$  é o vetor velocidade. Determine o traço da matriz jacobiana desse sistema.

(A) 8 (C) -5 (E) 9  
(B) -10 (D) -18

Resposta:

7. Qual das equações na lista é equivalente a um sistema dinâmico linear?

(A)  $x\ddot{x} + 2x\dot{x} = 7$  (D)  $x\ddot{x} + 4x\dot{x} = 5x^2$   
(B)  $x\ddot{x} + 3x^2\dot{x} = 8x^2$  (E)  $\ddot{x} + 3\dot{x} = 2x^2$   
(C)  $\ddot{x} + 4x\dot{x} = 8x$

Resposta:

8. Calcule o raio de curvatura da trajetória dum ponto, num instante em que o vetor velocidade é  $4\hat{i} + 7\hat{j}$  e o vetor aceleração é  $-5\hat{i} + 6\hat{j}$  (unidades SI).

(A) 23.82 m (C) 8.88 m (E) 8.45 m  
(B) 2.95 m (D) 1.1 m

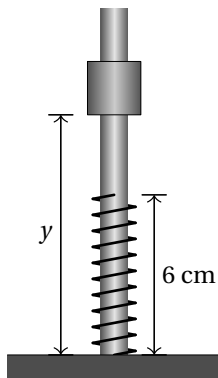
Resposta:

9. Se  $\vec{a}$  for um vetor e  $k$  um número qualquer, diferente de zero, qual das seguintes conclusões é sempre verdadeira?

(A) O sentido de  $k\vec{a}$  é o mesmo de  $\vec{a}$ .  
(B) O módulo de  $k\vec{a}$  é maior que o módulo de  $\vec{a}$ .  
(C) A direção de  $k\vec{a}$  é a mesma de  $\vec{a}$ .  
(D)  $k\vec{a}$  é um escalar (igual em qualquer referencial).  
(E) O módulo de  $k\vec{a}$  é igual a  $k$  vezes o módulo de  $\vec{a}$ .

Resposta:

10. Um cilindro com massa de 50 gramas pode deslizar ao longo duma haste metálica vertical. O cilindro parte do repouso na posição  $y = 9$  cm, cai livremente e logo comprime a mola de 6 cm até parar. A constante elástica da mola é 61 N/m. No sistema ideal, ignorando o atrito do cilindro com a haste e a resistência do ar, determine o valor mínimo de  $y$  quando o cilindro para.



(A) 2.35 cm (C) 1.94 cm (E) 2.86 cm  
(B) 3.21 cm (D) 3.97 cm

Resposta:

11. Um sistema dinâmico com duas variáveis de estado tem um único ponto de equilíbrio na origem e um ciclo limite. Qual poderá ser a matriz jacobiana do sistema na origem?

(A)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  (C)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  (E)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$   
(B)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  (D)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

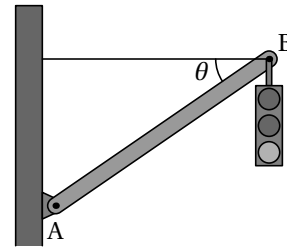
Resposta:

12. O vetor velocidade dum objeto, em função do tempo, é:  $\vec{v} = 2t^2\hat{i} + 3e^{-2t}\hat{j}$  (unidades SI). Determine o vetor deslocamento entre  $t = 1$  e  $t = 2$ .

(A)  $4.7\hat{i} + 0.18\hat{j}$  (D)  $0.67\hat{i} - 0.2\hat{j}$   
(B)  $0.67\hat{i} + 1.3\hat{j}$  (E)  $5.3\hat{i} - 0.027\hat{j}$   
(C)  $5.3\hat{i} + 1.5\hat{j}$

Resposta:

13. O semáforo na figura, com massa total de 41 kg, está pendurado no ponto B duma barra homogênea com massa de 2.1 kg e comprimento (desde A até B) igual a 1.8 m. O ponto A da barra está ligado a um pino, num suporte fixo num poste vertical, que permite que a barra rode para cima ou para baixo, enquanto o ponto A permanece fixo. O cabo que liga o poste ao ponto B da barra está na posição horizontal e o ângulo  $\theta$  é igual a  $35^\circ$ . Determine o valor da tensão no cabo.



(A) 742.5 N (C) 588.5 N (E) 406.6 N  
(B) 490.6 N (D) 672.5 N

Resposta:

14. As populações de coelhos (presas) e rapozas (predadores) numa região são bem explicadas pelo seguinte sistema predador-presca:

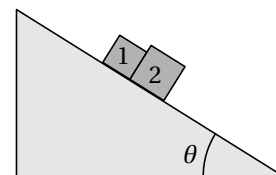
$$\dot{x} = 2xy - 800x \quad \dot{y} = 750y - 3xy$$

Quais deverão ser as populações iniciais de coelhos e rapozas para que as duas populações permaneçam constantes sem oscilar?

(A) 400 rapozas e 250 coelhos.  
(B) 800 rapozas e 750 coelhos.  
(C) 250 rapozas e 400 coelhos.  
(D) 0 rapozas e 250 coelhos.  
(E) 400 rapozas e 0 coelhos.

Resposta:

15. A inclinação do plano inclinado na figura é  $\theta = 32^\circ$  em relação à horizontal. O bloco 1 tem massa  $m_1 = 1$  kg e coeficiente de atrito cinético com o plano inclinado igual a 0.3. O bloco 2 tem massa  $m_2 = 2$  kg e coeficiente de atrito cinético com o plano inclinado igual a 0.4. Determine a aceleração dos blocos.



(A)  $1.3 \text{ m/s}^2$  (C)  $0.5 \text{ m/s}^2$  (E)  $3.0 \text{ m/s}^2$   
(B)  $3.8 \text{ m/s}^2$  (D)  $2.1 \text{ m/s}^2$

Resposta:

## Perguntas

2. A	5. C	8. C	11. C	14. C
3. E	6. B	9. C	12. A	15. D
4. C	7. D	10. E	13. C	

## Critérios de avaliação

### Problema

- Cada alínea vale 1.5 valores. Se usar o método gráfico para resolver as alíneas *c* e *d*, deverá ficar claro qual foi o gráfico que traçou e o erro na medição dos valores não poderá ser muito elevado.