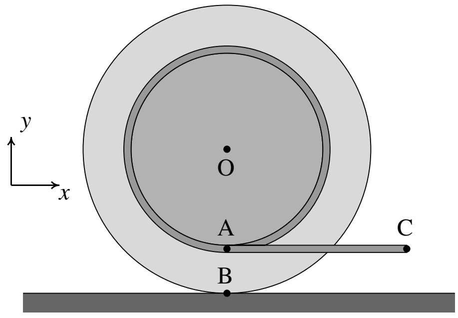
Resolução do exame de 4 de julho de 2013 Regente: Jaime Villate

Problemas

1. (a) Como a roda não derrapa, a velocidade do ponto B é nula. Escolhendo o sistema de eixos indicado na figura, e distâncias em centímetros, a velocidade do ponto A será:

$$\vec{v}_\text{A} = -d_\text{AB}\,\omega\,\vec{e}_x = -2\,\omega\,\vec{e}_x$$



onde ω é a velocidade angular da roda, positiva no sentido anti horário ou negativa no sentido horário. Como a velocidade do ponto A é igual à velocidade do ponto C, que é $2.5\,\vec{e}_x$, a velocidade angular é:

$$\omega = \frac{2.5}{-2} = -1.25 \text{ s}^{-1}$$

o sinal negativo indica que a velocidade angular é no sentido horário.

(b) Como a velocidade angular da roda é no sentido horário, o ponto O desloca-se para a direita. O valor da sua velocidade é:

$$v_\text{O} = d_\text{OB}\,\omega = 7.5 \text{ cm/s}$$

(c) A velocidade do ponto C, em relação ao ponto O, é:

$$\vec{v}_\text{C/O} = \vec{v}_\text{C} - \vec{v}_\text{O} = 2.5\,\vec{e}_x - 7.5\,\vec{e}_x = -5\,\vec{e}_x$$

o sentido dessa velocidade, no sentido negativo do eixo dos x, indica que os pontos O e C estão a aproximarem-se e o fio não está a desenrolar-se mas sim a enrolar-se ainda mais: cada segundo enrolam-se mais 5 cm de fio.

2. (a) No eixo dos x, y é igual a zero e a velocidade de fase será,

$$\vec{u} = -x^4\,\vec{e}_x \quad\Longrightarrow\quad \vec{e}_u = -\vec{e}_x$$

No eixo dos y, x é igual a zero e a velocidade de fase será,

$$\vec{u} = y^4\,\vec{e}_y \quad\Longrightarrow\quad \vec{e}_u = \vec{e}_y$$

(b) Na reta $y = x$, a velocidade de fase é,

$$\vec{u} = x^4\,\vec{e}_x - x^4\,\vec{e}_y$$

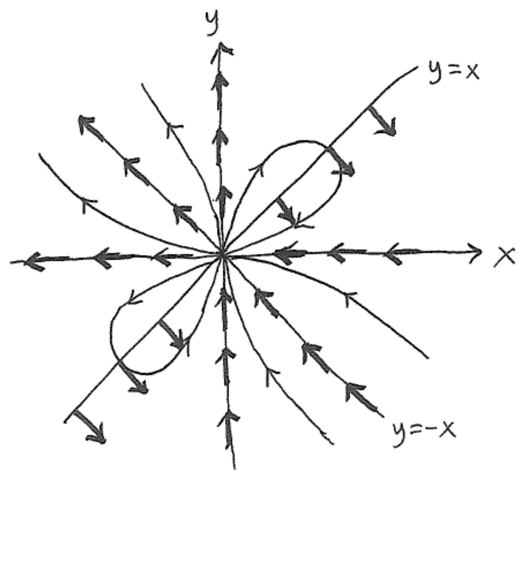
o seu módulo é $\sqrt{2}x^4$ e o versor que define a sua direção é,

$$\vec{e}_u = \frac{x^4\,\vec{e}_x - x^4\,\vec{e}_y}{\sqrt{2}x^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

Na reta $y = -x$,

$$\vec{u} = -3x^4\,\vec{e}_x + 3x^4\,\vec{e}_y \quad\Longrightarrow\quad \vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

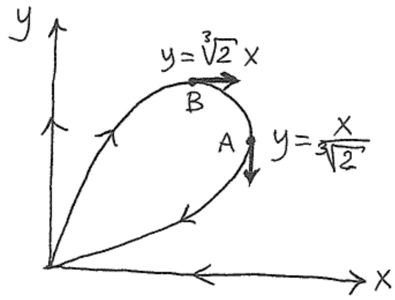
(c) A figura mostra os versores encontrados nas duas alíneas anteriores e algumas curvas de evolução. Como há curvas que se aproximam da origem e curvas que se afastam dele, a origem é um ponto de sela.



(d) Não existem ciclos nem órbitas heteroclínicas. Existe um número infinito de órbitas homoclínicas: todas as curvas de evolução no primeiro e terceiro quadrantes são órbitas homoclínicas.

(e) A população y faz aumentar a taxa de crescimento $\dot{x}$ da população x e a população x faz diminuir a taxa de crescimento $\dot{y}$ da população y. Assim sendo, trata-se de um sistema predador presa, em que x são os predadores e y as presas. Se o número inicial de predadores, x_0, for nulo, o número de presas aumentará ilimitadamente. Se o número inicial de presas, y_0, for nulo, o número de predadores diminuirá até zero.

Quando os números iniciais de predadores e presas não sejam nulos, as duas populações evoluirão seguindo uma órbita homoclínica. O ponto A em que a população de predadores atinge o seu valor máximo é quando a componente x da velocidade de fase é nula, ou seja, $y = x/\sqrt[3]{2}$. O ponto B onde a população de presas atinge o seu valor máximo é quando a componente y da velocidade de fase é nula, ou seja, $y = \sqrt[3]{2}x$. Assim sendo, existem 3 casos diferentes: (*i*) Se $y_0 > \sqrt[3]{2}x_0$, os números de predadores e presas aumentam, até um instante t_B em que o número de presas começa a diminuir; num instante posterior t_A, o número de predadores também começa a diminuir e finalmente as duas populações serão extintas. (*ii*) Se $x_0/\sqrt[3]{2} < y_0 \leq \sqrt[3]{2}x_0$, o número de presas diminui e o número de predadores aumenta, até um instante t_A em que o número de predadores também começa a diminuir e as duas populações serão extintas. (*iii*) Se $0 < y_0 \leq x_0/\sqrt[3]{2}$, as duas populações diminuem até se extinguirem totalmente.



Perguntas

3. B
4. A
5. C
6. B
7. D
8. C
9. A
10. C
11. C
12. B
13. C
14. A
15. C
16. C
17. D