

**Problema 1.** (a) Mostra-se a a resolução por três métodos diferentes. (i) *Mecânica newtoniana*:

$$a = \frac{F}{m} = -2 \int U ds = 16 - 16s$$

E as equações de evolução são:

$$\dot{s} = v \quad \dot{v} = 16 - 16s$$

(ii) *Mecânica lagrangiana*:

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \frac{v^2}{4}$$

Equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial v} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\dot{v}}{2} + 8s - 8 = 0 \implies \dot{v} = 16 - 16s$$

Essa é uma das equações de movimento. A outra é a definição de  $v$ :  $\dot{s} = v$ .

(i) *Mecânica hamiltoniana*: A função hamiltoniana de uma partícula com um único grau de liberdade e força resultante conservativa é a energia mecânica por unidade de massa:

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{U}{m} = \frac{v^2}{2} + 8s^2 - 16s + 40$$

E as equações de movimento são as equações de Hamilton:

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial v} = v \quad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial s} = 16 - 16s$$

(b) Derivando os dois lados direitos das equações de evolução, em ordem a  $s$  e a  $v$ , obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe-se que se trata de um sistema linear, com um único ponto de equilíbrio, neste caso um centro, já que a energia potencial quadrática corresponde a um oscilador harmónico simples.

(c) A energia mecânica, constante, é igual à soma das energias cinética e potencial no instante inicial:

$$E_m = \frac{v_0^2}{4} + U(0) = 12 + 20 = 32 \text{ J}$$

O valor da velocidade e, portanto, a energia cinética, será máxima quando a energia potencial for mínima.  $U$  tem um mínimo no ponto de equilíbrio do sistema, onde  $\dot{v} = 0$ , ou seja,  $s = 1$ . Como tal,

$$\frac{v_{\text{máx}}^2}{4} + U(1) = 32 \implies v_{\text{máx}} = \sqrt{4(32 - 16)} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(d) Os valores máximo e mínimo de  $s$  são os *pontos de retorno*, onde a velocidade e a energia cinética são nulas, ou seja,  $E_m - U = 0$ . Como tal,

$$12 - 4s^2 + 8s = 0 \implies s^2 - 2s - 3 = (s - 3)(s + 1) = 0$$

O valor mínimo da posição na trajetória é  $s_{\text{mín}} = -1 \text{ m}$ , e o valor máximo  $s_{\text{máx}} = 3 \text{ m}$  (Também é possível traçar a curva de evolução usando o programa *plotdf*, e determinar as respostas das alíneas *c* e *d* com precisão).

## Perguntas

2. A	5. C	8. C	11. C	14. C
3. E	6. B	9. C	12. A	15. D
4. C	7. D	10. E	13. C	

## Crêterios de avaliação

### Problema

- Cada alínea vale 1.5 valores. Se usar o método gráfico para resolver as alíneas *c* e *d*, deverá ficar claro qual foi o gráfico que traçou e o erro na medição dos valores não poderá ser muito elevado.