Resolução do Exame do dia 11 de junho de 2012

Problemas

1. Para obter o valor de t_1, em que a partícula passa pelo eixo dos x, basta igualar a expressão de y a zero e resolver:

$$4 - 3\,t_1^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad t_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(a raiz negativa não interessa, porque estamos interessados em $t > 0$). A seguir, podemos derivar as duas expressões dadas para obter mais informação sobre o movimento:

$$v_y = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = -6\,t \qquad\qquad a_y = \frac{\mathrm{d}\,v_y}{\mathrm{d}\,t} = -6$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,t} = -1.2\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -1.2\,v_x = 1.44\,x - 3.6$$

Assim, para poder calcular os valores numéricos dos vetores velocidade e aceleração será preciso também calcular o valor de x_1 no instante $t_1 = 2\sqrt{3}/3$. Isso deverá ser feito por resolução de uma equação diferencial e será preciso saber valores iniciais; podemos ver que no instante inicial $t_0 = 0$, como $x_0 = 0$, então $v_{x0} = 3$. Mostraremos 3 métodos diferentes de obter os valores de v_{x1} e a_{x1}.

Método 1. Integração da expressão para v_x.

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = 3 - 1.2\,x \implies \int_0^{x_1} \frac{\mathrm{d}\,x}{3 - 1.2\,x} = \int_0^{2\sqrt{3}/3} \mathrm{d}\,t \implies -\frac{1}{1.2}\ln\left(\frac{3 - 1.2\,x_1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \implies x_1 = 2.5\left(1 - \mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}\right)$$

e, substituindo nas expressões para v_x e a_x, temos:

$$v_{x_1} = 3\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}} \qquad\qquad a_{x1} = -3.6\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}$$

Método 2. Integração da expressão para a_x.

$$\frac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,t} = -1.2\,v_x \implies \int_3^{v_{x1}} \frac{\mathrm{d}\,v_x}{v_x} = -1.2\int_0^{2\sqrt{3}/3} \mathrm{d}\,t \implies \ln\left(\frac{v_{x1}}{3}\right) = -0.8\sqrt{3} \implies v_{x1} = 3\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}} \quad a_{x1} = -3.6\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}$$

Método 3. Integração numérica. Usando três algarismos significativos, $t_1 = 2\sqrt{3}/3 \approx 1.15$; assim, usaremos os seguintes comandos do Maxima:

```
(%i1) fpprintprec: 3\$

(%i2) last (rk ([vx,-1.2*vx],[x,vx],[0,3],[t,0,1.155,0.01]));
(%o2)                  [1.15, 1.87, .755]
(%i3) -1.2*%[3];
(%o3)                             - .906
```

Finalmente, podemos escrever a resposta:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.15(\mathrm{s})$$

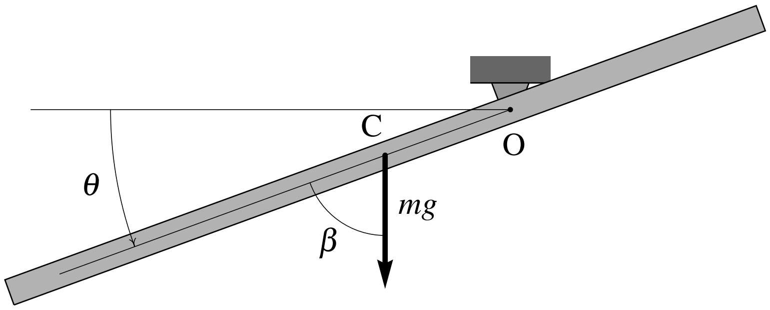
$$\vec{v}_1 = 3\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}\,\vec{e}_x - 4\sqrt{3}\,\vec{e}_y \approx (0.750\,\vec{e}_x - 6.93\,\vec{e}_y)\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{a}_1 = -3.6\,\mathrm{e}^{-0.8\sqrt{3}}\,\vec{e}_x - 6\,\vec{e}_y \approx (-0.901\,\vec{e}_x - 6\,\vec{e}_y)\ \mathrm{m/s^2}$$

2. (a) O momento de inércia em relação a O calcula-se usando o **teorema dos eixos paralelos**. Se d for a distância CO:

$$I_\mathrm{O} = \frac{m\,L^2}{12} + m\,d^2 = \frac{0.04 \times 0.5^2}{12} + 0.04 \times 0.08^2 = 1.089 \times 10^{-3}\ \left(\mathrm{kg \cdot m^2}\right)$$

(b) **Método 1**. (Tal como no exemplo 2 da aula teórica número 12) As variáveis de estado serão o ângulo θ e a velocidade angular ω. As equações de evolução são as expressões das derivadas dessas duas variáveis, em função das próprias variáveis de estado. A derivada $\dot\omega$ é a aceleração angular; para calculá-la, em função de θ, começamos por desenhar o diagrama de corpo livre para um ângulo qualquer:



As forças que atuam no ponto O não foram representadas, porque trata-se de um movimento de rotação com eixo fixo e as forças no eixo não produzem momento em relação ao eixo. O momento resultante, em relação a O, será apenas o momento do peso e, portanto:

$$m\,g\,d\,\sin\beta = I_\mathrm{O}\,\alpha$$

Como o ângulo β é igual a $\pi/2-\theta$, então $\sin\beta=\cos\theta$. Substituindo os valores conhecidos obtemos:

$$\alpha = \frac{0.04\times 9.8\times 0.08}{1.089\times 10^{-3}}\cos\theta = 28.79\,\cos\theta$$

Assim, as equações de evolução são as seguintes:

$$\dot\theta=\omega \qquad\qquad \dot\omega = 28.79\,\cos\theta$$

Método 2. As expressões da energia cinética e potencial, em função da coordenada generalizada θ e da velocidade generalizada $\dot\theta=\omega$ são:

$$E_\mathrm{c}=\frac{1}{2}I_\mathrm{O}\,\omega^2 \qquad\qquad U=-m\,g\,d\sin\theta$$

como o sistema é conservativo, a equação de Lagrange é

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial\omega}\right)-\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial\theta}+\frac{\partial U}{\partial\theta}=0$$

que conduz à equação

$$I_\mathrm{O}\,\dot\omega - m\,g\,d\cos\theta=0$$

ou seja, as equações de evolução são

$$\dot\theta=\omega \qquad\qquad \dot\omega=\frac{m\,g\,d}{I_\mathrm{O}}\cos\theta = 28.79\,\cos\theta$$

(c) **Método 1**. Como se trata de um sistema conservativo, os pontos de equilíbrio terão todos $\omega=0$ e θ corresponderá aos pontos em que a energia potencial for máxima ou mínima. Como vimos na alínea anterior, a energia potencial é $-m\,g\,d\sin\theta$. Restringindo o ângulo θ ao intervalo $[0,\ 2\,\pi[$, a função $-\sin\theta$ tem um mínimo local (centro) em $\theta=\pi/2$ e um máximo local (ponto de sela) em $\theta=3\pi/2$.

Método 2. Os pontos de equilíbrio são os pontos do espaço de fase em que as derivadas das duas variáveis de estado são nulas: $\omega=0$ e $28.79\,\cos\theta=0$. Restringindo o ângulo θ ao intervalo $[0,\ 2\,\pi[$, temos dois pontos de equilíbrio: $(\theta,\omega)=(\pi/2,0)$ e $(\theta,\omega)=(3\,\pi/2,0)$.

A matriz jacobiana do sistema é:

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\omega}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\omega}{\partial\omega}\\[2ex] \dfrac{\partial\,(28.79\,\cos\theta)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\,(28.79\,\cos\theta)}{\partial\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -28.79\,\sin\theta & 0\end{bmatrix}$$

e a equação dos valores próprios é:

$$\lambda^2+28.79\,\sin\theta=0 \qquad\qquad \lambda=\pm\sqrt{-28.79\,\sin\theta}$$

No ponto em $\theta=\pi/2$, o seno é igual a 1 e, portanto, os valores próprios são imaginários e o ponto é um centro. No ponto $\theta=3\,\pi/2$, o seno é igual a -1, os valores próprios são reais com sinais opostos e trata-se de um ponto de sela.

Método 3. Como não era pedida nenhuma demonstração matemática, basta justificar que a barra pode ser mantida em repouso, durante muito tempo, nas posições $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$. No primeiro caso, é um equilíbrio estável porque a barra terá uma tendência a regressar para esse ponto; no segundo caso é um ponto de equilíbrio instável, porque um pequeno impulso faz descer a barra, afastando-se do ponto de equilíbrio.

Perguntas

3. C
4. B
5. D
6. B
7. B
8. C
9. C
10. E
11. C
12. D
13. C
14. B
15. A
16. C
17. E