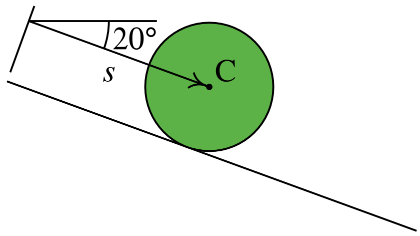
Resolução do exame de 12 de julho de 2016 Regente: Jaime Villate

Problema 1. Para descrever o movimento do centro C do berlinde basta uma variável, s, que pode ser a distância desde o topo do plano inclinado:



Como o berlinde roda sem derrapar, a sua velocidade angular ω é no sentido dos ponteiros do relógio e com valor igual à velocidade do seu centro, $v = \dot{s}$, dividida pelo raio R:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

O sistema tem então um único grau de liberdade, s, e uma única velocidade generalizada, v.

Resolução por mecânica de Lagrange. A expressão da energia cinética do berlinde é:

$$E_\text{c} = \frac{m}{2}v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\,m\,R^2}{5}\right)\omega^2 = \frac{7\,m}{10}v^2$$

E a expressão da energia potencial gravítica (arbitrando 0 quando $s = 0$) é:

$$U = -m\,g\,s\,\sin(20^\circ)$$

A expressão da força de resistência do ar é:

$$\vec{F}_\text{r} = -\frac{\pi}{4}\rho\,R^2\,v^2\,\hat{e}_\text{t}$$

onde $\hat{e}_\text{t}$ é o versor tangencial, no sentido em que s aumenta. O ponto de aplicação dessa força pode ser considerado igual à posição do centro C do berlinde, que em função do grau de liberdade é igual a:

$$\vec{r}_\text{C} = s\,\hat{e}_\text{t}$$

Como tal, a força generalizada é então:

$$Q = \vec{F}_\text{r}\cdot\frac{\partial\vec{r}_\text{C}}{\partial s} = \left(-\frac{\pi}{4}\rho\,R^2\,v^2\,\hat{e}_\text{t}\right)\cdot\hat{e}_\text{t} = -\frac{\pi}{4}\rho\,R^2\,v^2$$

E a equação de Laplace é:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_\text{c}}{\partial v}\right) - \frac{\partial E_\text{c}}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial s} = Q \quad\Longrightarrow\quad \frac{7\,m}{5}a_\text{t} - m\,g\,\sin(20^\circ) = -\frac{\pi}{4}\rho\,R^2\,v^2$$

A expressão da aceleração do berlinde é então,

$$a_\text{t} = \frac{5\,g}{7}\sin(20^\circ) - \frac{5\,\pi\,\rho\,R^2}{28\,m}v^2$$

E substituindo os valores (em unidades SI) de g = 9.8, da massa m = 0.0133/9.8, do raio R = 0.005 e da massa volúmica do ar, ρ = 1.2, obtém-se a expressão

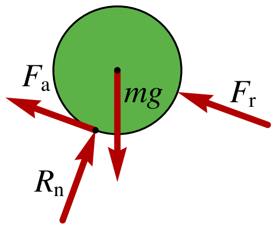
$$a_t = 2.394 - 1.240 \times 10^{-2}\, v^2$$

Como tal, a velocidade terminal (quando a aceleração tangencial for nula) é igual a:

$$v = \sqrt{\frac{2.394}{1.240 \times 10^{-2}}} = 13.9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Quando a velocidade do centro do berlinde é menor que a velocidade terminal, a aceleração tangencial é positiva e a velocidade aumenta. Se a velocidade fosse maior do que a velocidade terminal, a aceleração tangencial seria negativa e a velocidade diminuiria. Após um percurso suficientemente comprido, a velocidade do centro do berlinde atingirá sempre um valor igual à velocidade terminal.

Resolução por mecânica vetorial. A figura ao lado mostra o diagrama de corpo livre do berlinde, onde R_n é a reação normal, F_a a força de atrito estático e $F_r = \pi\,\rho\,R^2\,v^2/4$ a força de resistência do ar. A expressão da soma das componentes das forças, na direção tangencial, é:



$$m\,g\,\sin(20°) - F_a - \frac{\pi}{4}\,\rho\,R^2\,v^2 = m\,a_t$$

A única força que produz momento em relação ao centro de massa, no sentido dos ponteiros do relógio, é a força de atrito estático. Como tal, a expressão da soma dos momentos em relação ao centro de massa é:

$$F_a R = \left(\frac{2\,m\,R^2}{5}\right)\alpha \quad\Longrightarrow\quad F_a = \frac{2}{5}\,m\,R\,\alpha$$

Substituindo esta última expressão na equação anterior, e tendo em conta que como o berlinde não roda então $R\,\alpha = a_t$, obtém-se a mesma expressão da aceleração já obtida pelo método de mecânica de Lagrange.

Problema 2. (a) As equações de evolução são o seguinte sistema de equações:

$$\dot{s} = v \qquad\qquad \dot{v} = 4 - s^2 - 5\,v + s\,v$$

E os pontos de equilíbrio são as soluções das duas equações:

$$v = 0 \qquad\qquad 4 - s^2 = 0$$

Como tal, há dois pontos de equilíbrio (s, v):

$$\text{P}_1 = (-2, 0) \qquad\qquad \text{P}_2 = (2, 0)$$

Derivando as duas expressões das equações de evolução, obtém-se a matriz jacobiana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\,s & -5 + s \end{bmatrix}$$

No ponto P_1, a matriz da aproximação linear é então,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$$

que tem determinante igual a -4, ou seja, P_1 é ponto de sela.

No ponto P_2, a matriz da aproximação linear é:

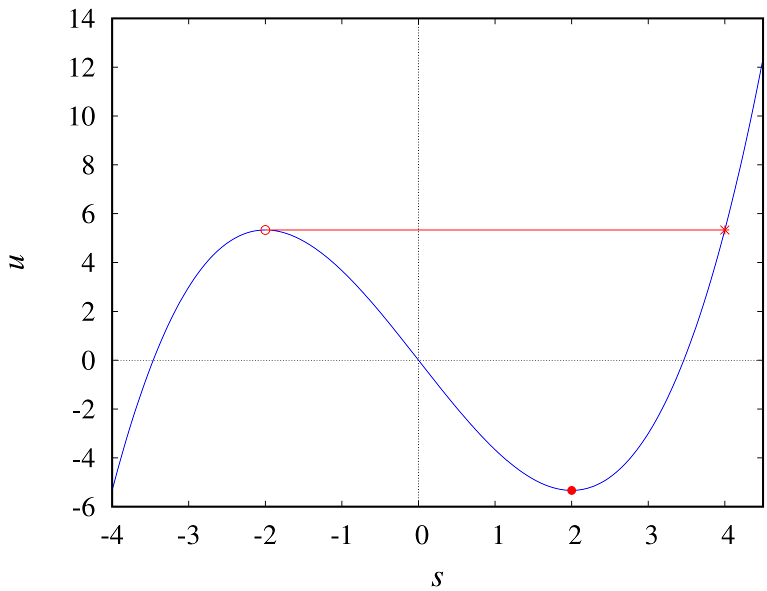
$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

E a respetiva equação de valores próprios é $\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$. Conclui-se então que os valores próprios são $-3/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{7}/2$e P_2 é foco atrativo.

(b) A energia potencial, por unidade de massa, obtém-se a partir da expressão:

$$u = \frac{U}{m} = -\int a_\mathrm{t}\,\mathrm{d}s = \int \left(s^2 - 4\right)\,\mathrm{d}s = \frac{s^3}{3} - 4\,s$$

Os pontos de equilíbrio encontram-se em $s_1 = -2$ e $s_2 = 2$. O gráfico da função u, mostrando os dois pontos de equilíbrio, é o seguinte:



O ponto s_1, máximo local, é instável (ponto de sela) e o ponto s_2, mínimo local, é estável (centro). Existem ciclos quando a energia mecânica, por unidade de massa, estiver compreendida entre -16/3 e 16/3 (valores de u em s_2 e s_1). A reta horizontal apresentada no gráfico, entre o ponto de sela e um ponto de retorno, corresponde a uma órbita homoclínica. Ou seja, este sistema não tem nenhuma órbita heteroclínica, tem uma única órbita homoclínica e infinitos ciclos: todas as curvas de evolução dentro da órbita homoclínica, no espaço de fase.

Perguntas

3. B

4. D

5. B

6. C

7. E

8. E

9. D

10. A

11. A

12. A

13. A

14. B

15. D

16. B

17. D

Critérios de avaliação

Problema 1

Mecânica de Lagrange.

- Determinação do grau de liberdade e relação entre v e ω ———— 10% (0.4)
- Expressão da energia cinética ———— 20% (0.8)
- Expressão da energia potencial ———— 20% (0.8)
- Expressão da força generalizada ———— 20% (0.8)
- Aplicação da equação de Lagrange para obter a equação de movimento ———— 10% (0.4)
- Valor da aceleração, com unidades corretas ———— 10% (0.4)
- Obtenção da velocidade terminal ———— 10% (0.4)

Mecânica vetorial.

- Diagrama de corpo livre ———— 20% (0.8)
- Expressão da soma de forças tangenciais ———— 20% (0.8)
- Expressão da soma de momentos ———— 20% (0.8)
- Determinação da relação entre a_t e α ———— 10% (0.4)
- Obtenção da expressão da força de atrito ———— 10% (0.4)
- Valor da aceleração, com unidades corretas ———— 10% (0.4)
- Obtenção da velocidade terminal ———— 10% (0.4)

Problema 2

- Obtenção das equações de evolução ———— 10% (0.4)
- Determinação dos 2 pontos de equilíbrio ———— 10% (0.4)
- Obtenção da matriz jacobiana ———— 10% (0.4)
- Caraterização do primeiro ponto de equilíbrio ———— 10% (0.4)
- Caraterização do segundo ponto de equilíbrio ———— 10% (0.4)
- Obtenção da expressão da energia potencial por unidade de massa ———— 20% (0.8)
- Gráfico da energia potencial por unidade de massa ———— 10% (0.4)
- Interpretação do gráfico (pontos de equilíbrio, ciclos e órbitas) ———— 20% (0.8)