Dinâmica e Sistemas Dinâmicos - Formulário

1. Cinemática

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \bar{a}_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a_t = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$$

2. Cinemática vetorial

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \text{(ou } y \text{ ou } z\text{)} \qquad a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \quad \text{(ou } y \text{ ou } z\text{)} \qquad a_x = v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} \quad \text{(ou } y \text{ ou } z\text{)}$$

$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k} \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_i + \int_{t_i}^{t} \vec{v}(t')\,\mathrm{d}t' \qquad \vec{v} = \vec{v}_i + \int_{t_i}^{t} \vec{a}(t')\,\mathrm{d}t'$$

Movimento relativo:

$$\vec{r}_{\mathrm{P}} = \vec{r}_{\mathrm{P/Q}} + \vec{r}_{\mathrm{Q}} \qquad \vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{P/Q}} + \vec{v}_{\mathrm{Q}} \qquad \vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{P/Q}} + \vec{a}_{\mathrm{Q}}$$

Produto escalar:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\theta \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z \qquad a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

3. Movimento curvilíneo

$$\vec{v} = \dot{s}\,\hat{e}_t \qquad \vec{a} = \dot{v}\,\hat{e}_t + \frac{v^2}{R}\,\hat{e}_n \qquad a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

Movimento circular:

$$s = R\,\theta \qquad v = R\,\omega \qquad a_t = R\,\alpha$$

Produto vetorial:

$$\vec{a}\times\vec{b} = a\,b\sin\theta\,\hat{n} \qquad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

Rotação dos corpos rígidos:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \qquad \vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}$$

Topo

Rotação plana:

$$v_{\text{b/a}} = R_{\text{b/a}}\,\omega$$

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_{\text{eixo}}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\,t}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\,t}$$

$$\alpha = \omega\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

4. Mecânica vetorial

$$\vec{p} = m\,\vec{v}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\,t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

$$\vec{F} = m\,\vec{a}$$

$$\vec{P} = m\,\vec{g}$$

$$F_{\text{e}} \le \mu_{\text{e}}\,R_{\text{n}}$$

$$F_{\text{c}} = \mu_{\text{c}}\,R_{\text{n}}$$

Esfera num fluido:

$$N_{\text{R}} = r\,v\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$$

$$F_{\text{f}} = 6\pi\,\eta\,r\,v \qquad (N_{\text{R}} < 1)$$

$$F_{\text{f}} = \frac{\pi}{4}\,\rho\,r^2\,v^2 \qquad (N_{\text{R}} > 10^3)$$

5. Dinâmica dos corpos rígidos

$$M_{\text{o}} = F\,b$$

$$\vec{M}_{\text{o}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_z = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,\mathrm{d}\,m$$

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{m}\int \vec{v}\,\mathrm{d}\,m$$

$$\vec{a}_{\text{cm}} = \frac{1}{m}\int \vec{a}\,\mathrm{d}\,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\,\vec{a}_{\text{cm}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{z,i} = I_z\,\alpha$$

$$I_z = \int R^2\,\mathrm{d}\,m$$

6. Trabalho e energia

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_{\text{t}}\,\mathrm{d}\,s$$

$$W_{12} = E_{\text{c}}(2) - E_{\text{c}}(1)$$

$$E_{\text{c}} = \frac{1}{2}m\,v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\,\omega^2$$

$$W_{12} = U(1) - U(2)$$

$$U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$$

$$U_{\text{g}} = m\,g\,z$$

$$U_{\text{e}} = \tfrac{1}{2}k\,s^2$$

$$E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + U$$

$$\int_{s_1}^{s_2} F_{\text{t}}^{\text{nc}}\,\mathrm{d}\,s = E_{\text{m}}(2) - E_{\text{m}}(1)$$

Oscilador harmónico simples:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\,f$$

$$s = A\,\sin(\Omega\,t + \phi_0)$$

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}k\,s^2$$

7. Sistemas dinâmicos

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$$

$$\vec{u} = f_1(x_1, x_2)\,\hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\hat{e}_2$$

Equações diferenciais de segunda ordem:

$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ $\qquad$ $y = \dot{x}$ $\qquad$ $\vec{u} = y\,\hat{\imath} + f(x, y)\,\hat{\jmath}$

Sistemas conservativos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \qquad f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \qquad f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

Evolução: H = constante

8. Mecânica lagrangiana

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \qquad Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Multiplicadores de Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j$$

$\lambda\,\dfrac{\partial f}{\partial q_j}$ = componente j da força/momento de ligação

9. Sistemas lineares

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{A}\,\vec{r} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$$

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Tipo de equilíbrio
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio repulsivo	instável
1 real, negativo	nó impróprio atrativo	estável

10. Sistemas não lineares

$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ $\qquad$ $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ $\qquad$ (f_1 e f_2 funções contínuas)

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Pêndulo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \qquad l = \frac{r_\text{g}^2}{r_\text{cm}}$$

11. Ciclos limite e dinâmica populacional

Sistemas de duas espécies:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \qquad \lim_{x_1 \to 0} f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$\lim_{x_2 \to 0} f_2(x_1, x_2) = 0$$

Sistema com cooperação: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ positivas.

Sistema com competição: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ negativas.

Sistema predador presa: $\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ com sinais opostos.
