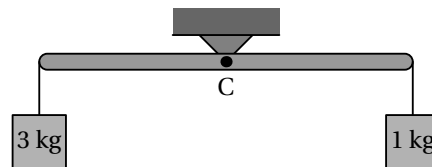


Nome: _____

Duração 2 horas. Prova com consulta de formulário e uso de computador. O formulário pode ocupar apenas uma folha A4 (frente e verso) e o computador pode ser usado unicamente para realizar cálculos e não para consultar apontamentos ou comunicar com outros! Use $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

1. (4 valores) A barra na figura, com massa $m = 1.9 \text{ kg}$ e comprimento $L = 0.85 \text{ m}$, pode rodar à volta dum eixo horizontal fixo que passa pelo seu centro de massa C, no ponto meio da barra. Dois blocos de 3 kg e 1 kg foram pendurados nos dois extremos da barra, por meio de fios de massa desprezável em comparação com as massas dos blocos. Sabendo que o momento de inércia da barra, em relação ao eixo no centro de massa C, é dado pela expressão $\frac{1}{12} m L^2$, e desprezando a resistência do ar e o atrito no eixo, determine as acelerações dos dois blocos, no instante em que a barra está na posição horizontal.



2. (4 valores) Determine os pontos de equilíbrio do sistema dinâmico com equações de evolução:

$$\dot{x} = x(1 - y^2) \quad \dot{y} = x + y$$

Encontre a matriz da aproximação linear na vizinhança de cada um desses pontos, e os seus valores próprios e vetores próprios (caso existam no plano real xy). Com base nos valores próprios, indique que tipo de ponto é cada um dos pontos de equilíbrio. Mostre os pontos de equilíbrio no plano real xy e com base nos vetores próprios obtidos, trace algumas curvas de evolução na vizinhança de cada um desses pontos.

PERGUNTAS. Respostas certas, 0.8 valores, erradas, -0.2, em branco, 0.

3. Um avião está a voar com velocidade de valor 900 km/h, em relação ao ar. Nesse instante, o valor da velocidade do vento é de 50 km/h. Qual dos valores na lista poderá ser o valor da velocidade do avião em relação à terra?

- (A) 331 J (C) 382 J (E) 191 J
(B) 764 J (D) 662 J

- (A) 825.0 km/h (C) 925 km/h (E) 1000 km/h
(B) 975.0 km/h (D) 800 km/h

Resposta:

4. As equações dum sistema dinâmico com variáveis de estado (x, y) foram transformadas para coordenadas polares (r, θ) , obtendo-se as equações: $\dot{\theta} = -2$ $\dot{r} = r^2 - 3r$. Como tal, conclui-se que o sistema tem um ciclo limite:

- (A) atrativo com $r = 2$ (D) repulsivo com $r = 3$
(B) atrativo com $r = 0$ (E) atrativo com $r = 3$
(C) repulsivo com $r = 2$

Resposta:

5. A força tangencial resultante sobre um objeto é $-s^2 + s + 6$, onde s é a posição na trajetória. Sabendo que o retrato de fase do sistema tem uma órbita homoclínica que se aproxima assintoticamente do ponto $(a, 0)$, determine o valor de a .

- (A) 3 (C) 2 (E) 1
(B) -1 (D) -2

Resposta:

6. Para subir uma caixa com massa de 65 kg, desde o chão até um camião com altura 120 cm, um homem empurra a caixa sobre cilindros (para reduzir o atrito) ao longo duma rampa inclinada 30° em relação à horizontal. Determine o trabalho mínimo (quando o atrito e a resistência do ar são desprezáveis) que deverá realizar o homem para subir a caixa ao camião.

7. As equações de evolução de dois sistemas dinâmicos são:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - y \\ \dot{y} = 3x - y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 3x - 2y \end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) O 1º é conservativo e o 2º não é conservativo.
(B) Nenhum dos dois é linear.
(C) Ambos são conservativos.
(D) O 1º não é conservativo e o 2º é conservativo.
(E) Nenhum dos dois é conservativo.

Resposta:

8. Determine o módulo da aceleração da Terra à volta do Sol, sabendo que a distância média entre o Sol e a Terra é $1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ e que a Terra demora 365.25 dias a completar uma volta em torno do Sol (admita uma órbita circular).

- (A) 3.43 m/s^2 (D) $4.44 \times 10^7 \text{ m/s}^2$
(B) $2.99 \times 10^4 \text{ m/s}^2$ (E) $2.64 \times 10^{-25} \text{ m/s}^2$
(C) $5.95 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$

Resposta:

9. A equação diferencial:

$$\ddot{x} - x^2 + x + 6 = 0$$

é equivalente a um sistema dinâmico com espaço de fase (x, \dot{x}) . Qual dos pontos na lista é ponto de equilíbrio desse sistema?

- (A) (0, 0) (C) (3, 0) (E) (-3, 0)
(B) (1, 0) (D) (-1, 0)

Resposta:

10. Um ciclista demora 22 s a percorrer 200 m, numa pista reta e horizontal, com velocidade uniforme. Sabendo que o raio das rodas da bicicleta é 27.8 cm e admitindo que as rodas não deslizam sobre a pista, determine o valor da velocidade angular das rodas.

(A) 49.1 rad/s (C) 65.4 rad/s (E) 40.9 rad/s
(B) 32.7 rad/s (D) 57.2 rad/s

Resposta:

11. O vetor velocidade do objeto 1, em função do tempo, é: $\vec{v}_1 = (1 - 2t)\hat{i} + 8t\hat{j}$ (unidades SI) e o vetor velocidade do objeto 2, no mesmo referencial, é: $\vec{v}_2 = 5t\hat{i} + (1 - 9t)\hat{j}$. Determine o vetor aceleração do objeto 1 em relação ao objeto 2.

(A) $7\hat{i} + 1\hat{j}$ (D) $-3\hat{i} - 1\hat{j}$
(B) $-7\hat{i} + 17\hat{j}$ (E) $7\hat{i} - 1\hat{j}$
(C) $3\hat{i} + 17\hat{j}$

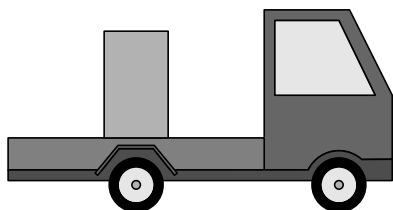
Resposta:

12. Qual das seguintes afirmações, acerca da origem no espaço de fase num sistema dinâmico de duas espécies, é correta?

(A) É sempre ponto de equilíbrio instável.
(B) É sempre ponto de equilíbrio estável.
(C) É sempre ponto de equilíbrio, de qualquer tipo.
(D) Pode não ser ponto de equilíbrio.
(E) É sempre ponto de equilíbrio, do tipo sela.

Resposta:

13. Um camião transporta uma caixa retangular homogênea, com 60 cm de largura na base e 90 cm de altura. Quando o camião acelera, numa estrada horizontal, existe suficiente atrito entre a superfície do camião e a caixa evitando que a caixa derrape sobre a superfície, mas a aceleração não pode ser maior do que um valor máximo, para evitar que a caixa rode. Determine esse valor máximo da aceleração do camião.



(A) 4.20 m/s² (C) 3.92 m/s² (E) 6.53 m/s²
(B) 7.35 m/s² (D) 5.88 m/s²

Resposta:

14. Um projétil lançado verticalmente para cima atinge uma altura h máxima, que depende da velocidade inicial com que foi lançado, antes de voltar a cair. Se a velocidade for muito elevada, a altura pode atingir valores elevados, onde a aceleração da gravidade já não é a constante g mas é dada pela expressão:

$$\frac{gR^2}{(R+h)^2}$$

onde $R = 6.4 \times 10^6$ m é o raio da Terra. Desprezando a resistência do ar, determine o valor mínimo que deverá ter a velocidade inicial, para o objeto atingir uma altura máxima infinita; ou seja, fugir ao campo gravítico da Terra.

(A) 2.2×10^3 m/s (C) 3.7×10^3 m/s (E) 100.8×10^3 m/s
(B) 11.2×10^3 m/s (D) 56.0×10^3 m/s

Resposta:

15. Um bloco de massa 1 kg desce deslizando sobre a superfície dum plano inclinado com base $x = 5$ m e altura $y = 3$ m. Calcule o módulo da reação normal do plano sobre o bloco.

(A) 9.8 N (C) 10.08 N (E) 4.2 N
(B) 8.4 N (D) 8.17 N

Resposta:

16. A trajetória de uma partícula na qual atua uma força central é sempre plana e pode ser descrita em coordenadas polares r e θ . As expressões da energia cinética e da energia potencial central em questão são:

$$E_c = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) \quad U = kr^4$$

onde m é a massa do corpo e k uma constante. Encontre a equação de movimento para \ddot{r}

(A) $r\ddot{\theta}^2 - \frac{4kr^3}{m}$ (D) $r^2\ddot{\theta}^2 - \frac{4kr^3}{m}$
(B) $r\ddot{\theta} + \frac{4kr^3}{m}$ (E) $r^2\ddot{\theta}^2 + \frac{4kr^3}{m}$
(C) $r\ddot{\theta} + \frac{4kr^3}{m}$

Resposta:

17. Qual das seguintes equações poderá ser uma das equações de evolução num sistema predador presa?

(A) $\dot{y} = 2y^2 - 3y$ (D) $\dot{y} = 6y - y^2$
(B) $\dot{y} = 2y - 5y^2$ (E) $\dot{y} = x + xy^2$
(C) $\dot{y} = -5xy + 2y$

Resposta:

A equação dos valores próprios é:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Há dois valores próprios, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. Como tal, os pontos P_2 e P_3 são pontos de sela.

Os vetores próprios correspondentes a $\lambda_1 = 2$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies y = x$$

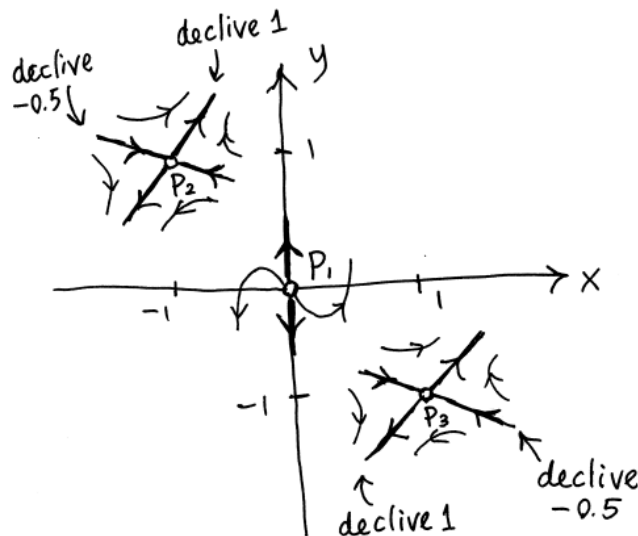
os vetores próprios estão na reta com declive +1, que passa pelo ponto de equilíbrio (P_2 ou P_3).

Os vetores próprios correspondentes a $\lambda_2 = -1$ são as soluções do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies y = -\frac{x}{2}$$

os vetores próprios estão na reta com declive -0.5 , que passa pelo ponto de equilíbrio (P_2 ou P_3).

A partir dos valores e vetores próprios obtidos, conclui-se que na vizinhança de P_1 há duas curvas de evolução retas que se saem do ponto, na direção do eixo dos y ; as restantes curvas de evolução que saem do ponto são todas curvas. Nos pontos P_2 e P_3 , há duas curvas de evolução que saem do ponto de equilíbrio, com declive igual a 1, e outras duas curvas de evolução retas, que terminam no ponto de equilíbrio, com declive -0.5 . A figura seguinte mostra esses resultados:



Perguntas

- | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|
| 3. C | 6. B | 9. C | 12. C | 15. B |
| 4. D | 7. C | 10. B | 13. E | 16. A |
| 5. D | 8. C | 11. B | 14. B | 17. C |

Cotações

Problema 1

(a) Mecânica vetorial.

- Diagrama de corpo livre /equação de movimento do bloco 10.8
- Diagrama de corpo livre /equação de movimento do bloco 20.8
- Diagrama de corpo livre /equação de movimento da barra0.8
- Indicar que as acelerações dos blocos têm o mesmo valor absoluto0.6
- Relação entre a aceleração dos blocos e a aceleração angular da barra0.6
- Resolução das 3 equações de movimento0.4

(b) Mecânica lagrangiana.

- Indicar que as velocidades dos blocos têm o mesmo valor absoluto0.4
- Relação entre a velocidade dos blocos e a velocidade angular da barra0.4
- Energia cinética do sistema, em função das variáveis de estado1.2
- Energia potencial do sistema, em função das variáveis de estado1.2
- Aplicação da equação de Lagrange0.4
- Resolução para obter o valor da aceleração0.4

Problema 2

- Obtenção dos 3 pontos de equilíbrio0.4
- Matriz jacobiana0.4
- Matrizes das aproximações lineares0.4
- Valores / vetores próprios do ponto na origem0.6
- Valores / vetores próprios dos outros dois pontos0.6
- Classificação correta dos 3 pontos0.8
- Gráfico0.8