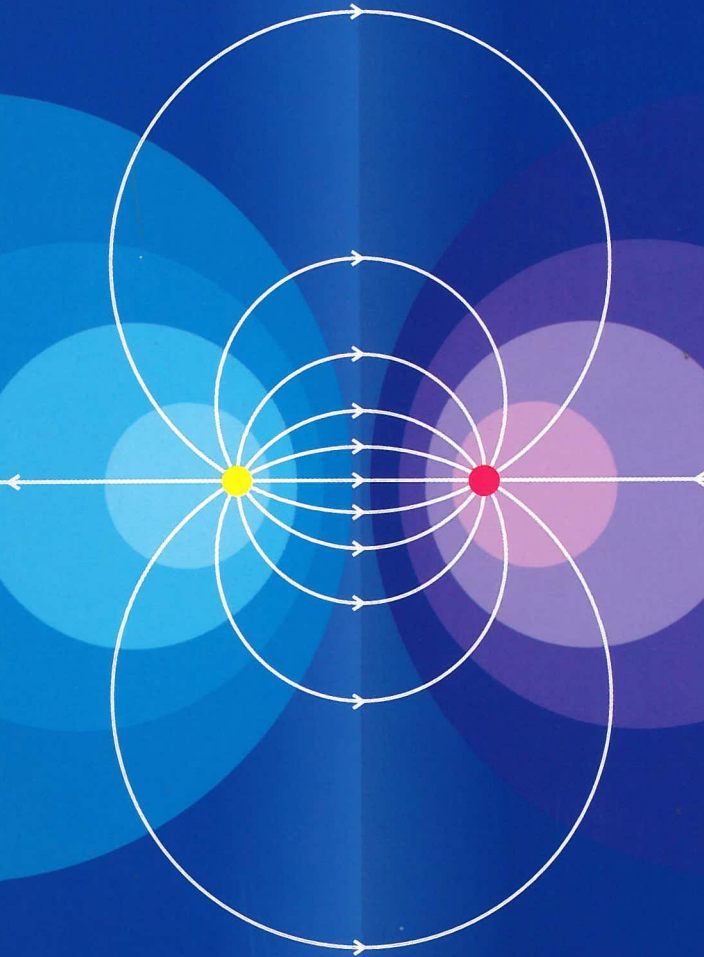
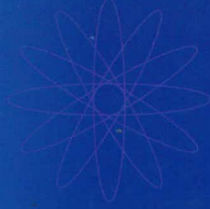
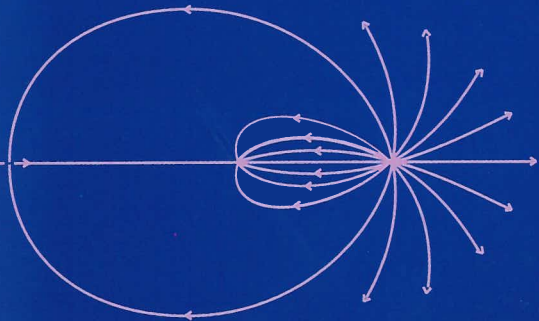


electromagnetismo



Jaime E. Villate

Mc
Graw
Hill



Electromagnetismo

Electromagnetismo

Jaime E. Villate
Faculdade de Engenharia
Universidade do Porto

McGraw-Hill

LISBOA • MADRID CIUDAD DE MÉXICO • RIO DE JANEIRO • NEW YORK • SANTAFÉ DE BOGOTÁ
LIMA • SAN JOSÉ • SAN JUAN • BUENOS AIRES • SANTIAGO • CIUDAD DE GUATEMALA
BANGKOK • LONDON • NEW DELHI • SYDNEY • TAIPEI • MONTRÉAL • SEOUL • MILANO
SINGAPORE • MALAYSIA • TORONTO • PHILLIPINES • HONG KONG

Electromagnetismo

Copyright © 1999 da Editora McGRAW-HILL de Portugal, L.^{da}

Todos os direitos reservados pela
Editora McGraw-Hill de Portugal, L.^{da}
Estrada de Alfragide, Edifícios Mirante, Bloco A-1
Alfragide – 2724 - 512 AMADORA
Tel. (351-1) 472 85 00 Fax (351-1) 471 89 81
E-mail: mcgraw.hillport@mail.telepac.pt

Nenhuma parte desta publicação poderá ser reproduzida, guardada pelo sistema «retrieval» ou transmitida por qualquer modo ou por qualquer outro meio, seja electrónico, mecânico, de fotocópia, de gravação ou outros, sem prévia autorização, por escrito, da Editora.

Depósito Legal: 131049/99
ISBN: 972-773-010-8
1E1P03091M01T0

Março de 1999

Coordenação Editorial: Susana Calhau
Coordenação de Produção: Sofia Marques
Figuras de abertura de capítulo: Jaime Villate
Capa: Cláudia Gigliotti
Impressão: Tipografia Lousanense, L.^{da}

Impresso em Portugal – Printed in Portugal

Índice geral

Prefácio	ix
Lista de símbolos e notações	xiii
1 Campo eléctrico	2
1.1 Força e carga eléctricas	3
1.2 Lei de Coulomb	7
1.3 Campo eléctrico	13
1.4 Linhas de campo eléctrico	15
1.5 Distribuições contínuas de carga	18
1.5.1 Distribuições lineares de carga	19
1.5.2 Distribuições superficiais de carga	21
1.5.3 Distribuição volúmica de carga	24
Problemas	25
2 Sistemas com simetria e condutores	28
2.1 Fluxo eléctrico	29
2.2 Lei de Gauss	35
2.3 Condutores em equilíbrio electrostático	42
2.3.1 Carga por indução	42
2.3.2 Carga e campo num condutor em equilíbrio	43
Problemas	46
3 Potencial eléctrico	50
3.1 Trabalho e energia	51
3.2 Diferença de potencial electrostático	53
3.3 Gradiente do potencial	55
3.4 Superfícies equipotenciais	61
3.5 Cálculo do potencial eléctrico	64
3.6 Potencial e carga nos condutores	69
Problemas	71

4	Equações fundamentais da electrostática	76
4.1	Limitações da lei de Coulomb	77
4.2	Divergência	78
4.3	Teorema da divergência	81
4.4	Rotacional	82
4.5	Teorema de Stokes	85
4.6	Equação de Poisson	86
	Problemas	90
5	Capacidade e energia electrostática	92
5.1	Capacidade eléctrica	93
5.2	Condensadores	94
5.2.1	Condensador de placas planas paralelas	95
5.2.2	Condensador esférico	97
5.2.3	Condensador cilíndrico	98
5.3	Energia electrostática	99
5.4	Energia armazenada num condensador	101
5.5	Dieléctricos	103
5.6	Campo eléctrico dentro da matéria	105
	Problemas	108
6	Corrente eléctrica	110
6.1	Densidade de corrente	113
6.2	Resistência e lei de Ohm	117
6.3	Resistência e temperatura	119
6.4	Supercondutividade	121
6.5	Energia dissipada num condutor	123
6.6	Fontes de força electromotriz	124
	Problemas	126
7	Circuitos eléctricos I	128
7.1	Circuitos equivalentes	131
7.2	Associação de resistências e condensadores	132
7.3	Energia nos circuitos	137
7.4	Regras de Kirchhoff	138
7.5	Circuito RC	142
7.6	Circuito RC com fonte	144
7.7	Amperímetros, voltímetros e ohmímetros	146
	Problemas	148

8	Campo magnético	152
8.1	Campo de indução magnética	154
8.2	Força magnética sobre um condutor com corrente	156
8.3	Espiras e bobinas	157
8.4	Movimento de partículas dentro do campo magnético	159
8.5	Aplicações dos campos eléctrico e magnético	163
8.5.1	Filtro de velocidades	164
8.5.2	Tubo de raios catódicos	165
8.5.3	Espectrómetro de massa	166
8.5.4	Galvanómetro	167
	Problemas	167
9	Magnetostática	170
9.1	Lei de Biot-Savart	171
9.2	Força magnética entre fios com corrente	174
9.3	Lei de Ampère	177
9.4	Linhas de indução magnética	180
9.5	Solenóides	182
9.6	Equações fundamentais da magnetostática	184
9.7	Campo magnético dentro da matéria	185
	Problemas	187
10	Indução electromagnética	190
10.1	Lei de Faraday	192
10.2	Gerador de corrente alternada	193
10.3	Indução em condutores em movimento	195
10.4	Gerador de Faraday	198
10.5	Campo eléctrico em referenciais em movimento	199
10.6	Forma geral da lei de Faraday	201
10.7	Auto-indução	204
	Problemas	207
11	Circuitos eléctricos II	210
11.1	Série de Fourier	212
11.2	Fasores	215
11.3	Impedância	216
11.4	Associações de resistências, condensadores e indutores	219
11.5	Potência média	222
11.6	Ressonância	224
11.7	Transformada de Laplace	226
11.8	Resposta transitória do circuito <i>LCR</i>	229
11.8.1	Raízes reais diferentes	230

11.8.2	Raízes iguais	231
11.8.3	Raízes complexas	232
	Problemas	233
12	Electrodinâmica	236
12.1	Corrente de deslocamento	237
12.2	Equações de Maxwell	241
12.3	Transformação de Galileu do campo electromagnético	243
12.4	Energia do campo electromagnético	248
12.5	Potencial vectorial	250
	Problemas	252
13	Ondas electromagnéticas e luz	254
13.1	Ondas electromagnéticas	256
13.2	Equação de onda electromagnética	257
13.3	Ondas planas	258
13.4	Ondas harmónicas	261
13.5	Ondas esféricas	266
13.6	Intensidade das ondas electromagnéticas	267
13.7	Espectro electromagnético	269
13.8	Ondas electromagnéticas em meios materiais	271
	Problemas	273
	Respostas aos problemas	277
	Apêndice A Análise vectorial	287
A.1	Vectores	287
A.2	Curvas, superfícies e volumes	288
A.3	Coordenadas cilíndricas e esféricas	289
A.4	Operadores vectoriais	291
	Apêndice B Unidades SI e constantes	293
	Bibliografia	297
	Índice remissivo	301

Prefácio

O electromagnetismo é uma área da física muito rica em fenómenos e aplicações tecnológicas. É também uma disciplina com um elevado conteúdo de análise vectorial em três dimensões; de facto, grande parte da análise vectorial teve a sua origem no estudo dos fenómenos electromagnéticos. Este livro foi escrito durante seis anos nos quais leccionei Electromagnetismo a alunos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

A motivação principal para escrever este livro foi a dificuldade em encontrar textos em língua portuguesa, que se adaptassem aos objectivos da disciplina e ao nível dos nossos alunos. Existem muitas traduções de livros que fazem parte de um curso introdutório de física para o 1º ano de Engenharia, os quais dão bastante ênfase aos fenómenos e às aplicações tecnológicas, mas, por serem orientados a alunos sem conhecimentos de cálculo, dão menos importância à estrutura matemática do electromagnetismo. Por outro lado, os livros com um nível matemático mais avançado¹ pressupõem que o aluno esteja familiarizado com a fenomenologia da electricidade e do magnetismo. Este livro está orientado para alunos de nível intermédio que não tenham conhecimentos prévios de electromagnetismo, mas que estejam preparados para abordar o estudo da análise vectorial.

O electromagnetismo pode ser sintetizado nas Equações de Maxwell e por isso alguns autores preferem começar por enunciar claramente estas equações e passar a desenvolver as suas aplicações. Pessoalmente, considero mais didáctico um enfoque que tente seguir a ordem histórica do desenvolvimento da teoria electromagnética, começando pelos aspectos mais fenomenológicos antes de introduzir as Equações de Maxwell. Podia argumentar-se que é sempre melhor usar as técnicas mais modernas e eficazes disponíveis e arrumar as técnicas antigas; mas, sob essa perspectiva, as Equações de Maxwell também não seriam o ponto de partida, mas sim o chamado princípio de *gauge*, que conduz elegantemente às Equações de Maxwell. Provavelmente chegará o dia em que os campos quânticos serão parte da experiência quotidiana do estudante e serão esquecidos os conceitos de força e de massa; nessa altura o electromagnetismo será deslocado para o currículo de história e as teorias *gauge* entrarão no primeiro ano dos cursos de Física e de Engenharia. Mas a

¹Ver Brito, L., Fiolhais, M. e C. Providência. *Campo Electromagnético*, McGraw-Hill, Lisboa, 1999.

realidade actual é outra, e faz mais sentido começar por falar de forças e massas antes de passar aos campos e à sua quantização.

Alguns tópicos matemáticos que são comuns a outras disciplinas costumam ser deixados para as disciplinas de Matemática ou serem separados num capítulo introdutório antes de abordar os aspectos fenomenológicos; na minha opinião, quando o aluno aborda o estudo de uma série de fenómenos novos e aprende novos conceitos, é a melhor altura para serem introduzidas as técnicas matemáticas relevantes. Assim, ao longo dos capítulos são apresentados vários temas de análise vectorial e de equações diferenciais. Provavelmente, a forma como estes temas são apresentados não está à altura do rigor exigido numa disciplina de matemática e com certeza os temas tratados são só uma mínima parte da matéria dessas disciplinas; mas o objectivo é interessar o aluno e tentar seguir o processo epistemológico que partindo da fenomenologia chega aos conceitos abstractos.

A história da ciência é um tema complexo que está para além dos objectivos deste livro, mas é fundamental como fio condutor para seguir o processo de abstracção do qual temos estado a falar. Assim, mesmo correndo o risco de apresentar uma imagem um pouco atrofiada da evolução do pensamento científico, é feito um esforço no sentido de manter a perspectiva histórica do desenvolvimento da teoria electromagnética.

Os Capítulos 1, 2, 3 e 5 constituem os conhecimentos básicos de electrostática como são apresentados na maior parte dos textos introdutórios. O Capítulo 4 introduz os conceitos de divergência e rotacional e a forma diferencial das equações básicas da electrostática. Os Capítulos 6 e 7 tratam da electricidade e fazem uma introdução aos circuitos de corrente contínua. Nos Capítulos 8 e 9 apresentam-se os conceitos básicos da magnetostática e o Capítulo 10 introduz a lei de Faraday da indução electromagnética. Os circuitos de corrente alternada são estudados no Capítulo 11 e os últimos dois capítulos são uma introdução à electrodinâmica e às ondas electromagnéticas.

A matéria tratada é um pouco extensa para uma disciplina semestral, e há algumas secções que não costumam ser leccionadas na nossa Faculdade. Considero, no entanto, importante incluir algum material adicional de forma a permitir alguma flexibilidade na adaptação desta obra em diferentes licenciaturas e em diferentes escolas. Além disso, considero que um texto como este deverá servir também como referência para o estudante ao longo do seu estudo e trabalho futuro, e por isso não deve estar limitado ao programa leccionado. Em todos os capítulos apresentam-se exemplos resolvidos e exercícios propostos cujas respostas aparecem no fim do livro.

Agradeço ao colega Paulo Araújo Sá, cujos apontamentos de Teoria da Electricidade e troca de experiências no ensino da electricidade e do magnetismo me serviram de referência. Agradeço também a Bernardo Almeida que leccionou comigo esta disciplina durante alguns anos. O Problema 2 do Capítulo 8 foi gentilmente cedido por Fátima Pinheiro e Fátima Mota, da Comissão Nacional das Provas de Acesso ao Ensino Superior. São muitos os meus alunos que estudaram cuidadosamente estes apontamentos, identificando várias gralhas; a todos eles estendo o meu cordial agradecimento.

Este livro foi produzido num computador pessoal, com programas do tipo *Freeware* e o sistema operativo *Linux*, desenvolvido por milhares de voluntários. O texto foi com-

posto e paginado em *Latex*. Cada uma das figuras é um pequeno programa na linguagem *Ghostscript*, com excepção dos retratos dos pioneiros do electromagnetismo, os quais foram digitalizados a partir de desenhos originais do autor, baseados em fotografias encontradas na Internet. O autor agradecerá qualquer sugestão ou comentário sobre esta obra. Convido os leitores a visitarem a página *www* da disciplina de Electromagnetismo, leccionada na nossa Faculdade, que pode ser consultada no endereço:
<http://www.fe.up.pt/deqwww/electromagnetismo/>

Jaime E. Villate
E-mail: villate@fe.up.pt
Porto, Fevereiro de 1999

Lista de símbolos e notações

$ABC \dots$	pontos no espaço, superfícies e sólidos
$ABC \dots abc \dots$	unidades
$\mathbf{ABC} \dots \mathbf{abc} \dots$	vectores
$ABC \dots abc \dots$	escalares
\cdot	produto escalar (entre escalares ou vectores)
\times	produto vectorial (entre vectores)
$\frac{d}{dx}$	derivada ordinária
$\frac{\partial}{\partial x}$	derivada parcial
f'	derivada de uma função de uma variável
\dot{f}	derivada de f em ordem ao tempo
\tilde{f}	transformada de Fourier de f
\hat{f}	transformada de Laplace de f
\bar{f}	valor médio de f
f_{ef}	valor eficaz da função periódica f
∇	operador nabla
$\nabla \cdot$	divergência
$\nabla \times$	rotacional
\mathbf{A}	potencial vectorial
A	área de uma superfície
A	ampere (unidade de corrente eléctrica)
\mathbf{B}	campo de indução magnética
C	capacidade eléctrica
C	coulomb (unidade de carga)
c	velocidade da luz
\mathbf{D}	deslocamento eléctrico
dA	elemento diferencial de superfície
$d\mathbf{A}$	vector diferencial de área
$d\mathbf{r}$	deslocamento infinitesimal vectorial
$d\mathbf{r}_u$	deslocamento parcial, quando só o parâmetro u aumenta

ds	elemento diferencial de percurso
dV	elemento diferencial de volume
\mathbf{E}	campo eléctrico
\mathcal{E}	força electromotriz
E_k	energia cinética
E_p	energia potencial
\mathbf{e}_a	versor (vector unitário) na direcção do vector \mathbf{a}
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$	versores nas direcções radial, azimutal e zenital
$\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b$	versores tangencial, normal e binormal
\mathbf{e}_p	versor de polarização de uma onda plana
e	carga elementar
e	número de Euler (base do logaritmo natural)
eV	electrão-volt (unidade de energia)
\mathbf{F}	força
F	farad (unidade de capacidade)
f	frequência
G	gauss (unidade alternativa de indução magnética)
\mathbf{H}	campo magnético
H	henry (unidade de indutância)
h_i	factores de escala
I	intensidade da corrente eléctrica; intensidade de uma onda
I_C	corrente através de uma curva fechada C
I_d	corrente de deslocamento
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	versores nas direcções dos eixos x, y e z
i	número imaginário $\sqrt{-1}$
\mathbf{J}	densidade de corrente eléctrica
\mathbf{J}_0	densidade de corrente livre (sem incluir correntes nos átomos)
J	joule (unidade de energia)
K	constante dieléctrica
\mathbf{k}	vector de propagação de uma onda
k	constante de Coulomb; número de onda angular
k_m	constante magnética
L	indutância
\mathcal{L}	transformada de Laplace
\mathbf{M}	momento de uma força
M	coeficiente de indução
\mathbf{m}	momento magnético
m	massa
m	metro (unidade de comprimento)
P	potência
Q	factor de qualidade num circuito LCR
q	carga

q_{int}	carga no interior de uma superfície fechada
R	resistência eléctrica
R, θ, z	coordenadas cilíndricas
r, θ, ϕ	coordenadas esféricas
\mathbf{r}	vector posição
\mathbf{S}	vector de Poynting
s	segundo (unidade de tempo)
\mathbf{T}	momento de um binário
T	período de uma onda harmónica
T_c	temperatura crítica
T	tesla (unidade de indução magnética)
t	tempo
t_c	constante de tempo
U	energia potencial electrostática
u	energia potencial volúmica
V	potencial electrostático
V	volt (unidade de potencial electrostático)
v	velocidade
W	trabalho
W	watt (unidade de potência)
X	reactância
x, y, z	coordenadas cartesianas
Y	admitância
Z	impedância
α	coeficiente de temperatura
β	velocidade relativa à velocidade da luz
γ	factor de dilatação de Lorentz
ϵ	permitividade
ϵ_0	permitividade do vazio
λ	carga linear; comprimento de onda
μ_e	mobilidade eléctrica
μ	permeabilidade
μ_0	permeabilidade do vazio
ρ	carga volúmica
ρ_0	carga volúmica livre (sem incluir polarização dos átomos)
ϱ	resistividade
σ	carga superficial; condutividade
Φ	fluxo do campo de indução magnética
Φ_e	fluxo energético de uma onda
ϕ	densidade de fluxo energético
φ	fase de uma onda harmónica ou de um número complexo
φ_0	fase inicial

χ_e	susceptibilidade eléctrica
χ_m	susceptibilidade magnética
Ψ	fluxo do campo eléctrico
Ω	ângulo sólido; e também ohm (unidade de resistência)
ω	frequência angular

Electromagnetismo

Conceitos básicos

- Carga elementar
- Lei de Coulomb
- Campo eléctrico
- Linhas de campo eléctrico
- Carga linear, superficial e volúmica

Benjamin Franklin



(1706-1790)

Jornalista e político norte-americano, foi um dos autores da constituição dos Estados Unidos da América. Franklin foi um autodidacta aprendendo os fundamentos da física pelas obras de Newton. Tarde, perto dos 40 anos, interessou-se pela investigação dos fenómenos electrostáticos, reformulando a análise experimental que até aí não tinha sido mais que a observação de um conjunto de fenómenos, alguns dos quais já conhecidos dos gregos. Em 1751, Franklin publicou uma obra — *Experiências e Observações sobre a Electricidade, Realizadas em Filadélfia* — obra essa pioneira no estudo sistemático dos fenómenos electrostáticos. A par de uma nova teoria da electricidade apresentou novas evidências experimentais. Observou que o material usado para carregar por fricção recebe uma carga igual e oposta à do objecto carregado, concluindo que existia um único fluido eléctrico e não dois como até então era admitido.

Capítulo 1

Campo eléctrico

No fim do século XIX parecia que todos os problemas fundamentais da física já tinham sido resolvidos, com excepção de duas experiências que pareciam não ter uma explicação satisfatória: a medição da velocidade absoluta da Terra através da medição da velocidade da luz, e o espectro de radiação do corpo negro. Estas duas «anomalias» da física clássica dariam origem à teoria da relatividade e à física quântica.

Esse sentimento, de já se saber interpretar os problemas mais importantes da física, devia-se principalmente ao triunfo das equações de Maxwell que sintetizavam a teoria electromagnética, constituíam a base física da óptica e proporcionavam o ponto de partida para o estudo da estrutura interna da matéria e das reacções químicas. O tema deste livro é o desenvolvimento da teoria electromagnética, desde a sua «infância» até à síntese de Maxwell e dos seus seguidores. É um período curto na história da humanidade — a maior parte da teoria que vamos apresentar foi desenvolvida durante umas poucas décadas do século XIX — mas um dos mais importantes na história do pensamento científico.

1.1 Força e carga eléctricas

Antes da era cristã, os gregos já conheciam as forças que actuam à distância entre objectos electrizados por fricção. No século VII a. C., Tales de Mileto descreveu como uma barra de âmbar esfregada com um pano atraía pequenos pedaços de penas. *Eléktron*, que em grego significa âmbar, deu origem à palavra **electricidade**. A força entre objectos electrizados é chamada força electrostática.

Outra força que actua à distância, e também já conhecida pelos gregos, é a força magnética entre ímanes. As forças eléctrica e magnética eram confundidas na antiguidade, até que, no século XVI, o inglês William Gilbert demonstrou as suas diferenças, dando-lhes os nomes eléctrica e magnética usados actualmente. No capítulo sobre o campo magnético (Capítulo 8) falaremos mais sobre o trabalho de Gilbert.

Um grande avanço no estudo da força eléctrica foi feito no século XVIII por vários investigadores. Stephen Gray descobriu que a «virtude eléctrica» podia ser conduzida como um fluido através de alguns corpos, especialmente metais, chamados **condutores**. Uma barra de âmbar, electrizada por fricção, não atrai objectos que estejam muito afastados dela; no entanto, se a barra for posta em contacto com outra barra de material condutor, que esteja perto dos objectos afastados, estes serão atraídos. Os materiais que podem ser facilmente electrizados por fricção correspondem a outro tipo de materiais (os **isolantes**) que, por não conduzirem o fluido eléctrico, mantêm o seu estado de electrização.

O vidro, electrizado por fricção com um pano de seda, atrai o âmbar, electrizado com uma pele de animal. Charles du Fay descobriu que qualquer outro objecto electrizado ou era atraído pelo vidro electrizado com seda e repelido pelo âmbar electrizado com pele, ou atraído pelo âmbar e repelido pelo vidro. Du Fay concluiu que existem dois tipos de fluidos eléctricos: o «fluido vítreo» (igual ao que existe no vidro electrizado com seda) e o «fluido resinoso» (como o que existe no âmbar electrizado com pele). Corpos electrizados com o mesmo fluido repelem-se, enquanto que corpos com fluidos opostos se atraem.

O americano Benjamin Franklin observou que tanto o objecto electrizado por fricção como o material usado para friccionar adquiriam fluidos eléctricos opostos e da mesma grandeza (Figura 1.1). Esta observação levou-o a sugerir a existência de um único fluido

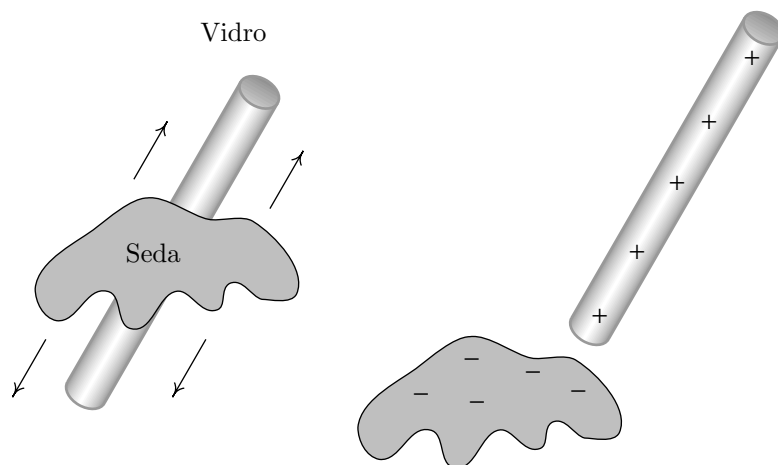


Figura 1.1: Barra de vidro electrizada por fricção com seda. O vidro e a seda adquirem carga positiva e negativa da mesma intensidade.

eléctrico. Segundo Franklin, todos os objectos no seu estado natural contêm uma dada quantidade de fluido eléctrico. O friccionamento faz com que parte do fluido seja transferido ficando um dos objectos com um excesso de fluido (carga positiva) e o outro com uma falta de fluido (carga negativa).

Não podendo detectar o fluxo de fluido eléctrico, Franklin assumiu que no vidro esfregado com seda o fluido passa da seda para o vidro; assim, a electricidade vítrea corresponderia à carga positiva, e a electricidade resinosa à carga negativa. Hoje em dia sabemos que o fluido eléctrico corresponde a um fluxo de electrões entre os corpos. O electrão foi a primeira partícula elementar descoberta (J. J. Thomson, 1897). Quando o vidro é friccionado com seda, alguns electrões passam do vidro para a seda. Segundo a convenção adoptada por Franklin, os electrões transportam carga negativa. Em geral, sempre que dois objectos entram em contacto, pode existir uma transferência de electrões entre eles. Os materiais podem ser classificados na chamada **série triboeléctrica** na qual os materiais no topo da lista são os que têm uma maior tendência a perder electrões, ficando com carga positiva.

A Tabela 1.1 mostra a série triboeléctrica para alguns materiais. Por exemplo, o âmbar encontra-se abaixo da pele de coelho e da seda; isto quer dizer que o âmbar poderá ser electrizado negativamente por fricção com seda ou com pele de coelho. O friccionamento com pele de coelho produzirá uma carga maior do que o friccionamento com seda, já que

Tabela 1.1: Série triboeléctrica.

Amianto
Pele de Coelho
Vidro
Lã
Chumbo
Seda
Alumínio
Papel
Algodão
Madeira
Âmbar
Níquel, Cobre
Borracha
Estanho, Prata
Acetato
Esferovite
PVC

Fonte: Hecht, E. *Physics*, Brooks-Cole, Califórnia, 1994, pág. 591.

a pele de coelho está mais afastada do âmbar na série triboeléctrica. O vidro é carregado positivamente por fricção com seda, mas pode ser carregado negativamente esfregando com pele de coelho. O acetato e o esferovite encontram-se no fim da série, o que significa que são facilmente electrizados com carga negativa.

No início do século XX desenvolveu-se o modelo atómico segundo o qual os átomos são constituídos por um núcleo com carga positiva e electrões à sua volta (Figura 1.2). Cada elemento é caracterizado por um **número atómico**, o número de cargas elementares positivas (protões) no núcleo. Normalmente, os átomos têm um número de electrões igual ao número atómico, isto é, carga total igual a zero. A carga total pode ser alterada quando entre dois átomos em contacto houver transferência de electrões: o átomo com excesso de electrões adquire carga negativa, enquanto que a carga do átomo com défice de electrões é positiva.

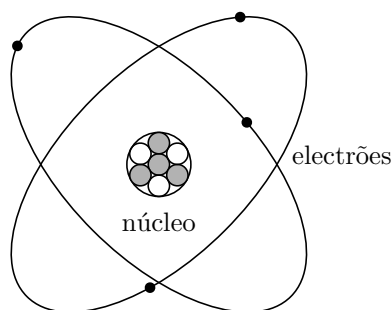


Figura 1.2: Átomo de berílio com 4 protões (círculos cinzentos), 3 neutrões (círculos brancos) no núcleo e 4 electrões (círculos pretos) à volta do núcleo sendo a carga total igual a zero.

A força eléctrica entre núcleo e electrões é responsável pela estrutura dos átomos e pelas suas diferentes propriedades físicas. A física atómica consegue explicar por que alguns electrões em alguns átomos são mais facilmente transferidos para outros átomos. No entanto para entender a física atómica é preciso re-treinar o nosso sentido comum; as leis do movimento das partículas «dentro» dos átomos são as leis da mecânica quântica, diferentes das leis da mecânica clássica que controlam o movimento dos objectos macroscópicos e às quais o nosso sentido comum está habituado.

A carga eléctrica tem duas propriedades bastante importantes:

1. **Conservação da carga.** Não é possível criar ou destruir carga eléctrica, simplesmente transferi-la. Esta propriedade é uma consequência da conservação do número de partículas. É possível criar ou destruir partículas em colisões com energias muito elevadas, mas, sempre que se cria ou destrói uma partícula com carga, também se cria ou destrói a sua **antipartícula**, com carga igual e oposta. A diferença entre o número de partículas e antipartículas e a carga total permanece constante.

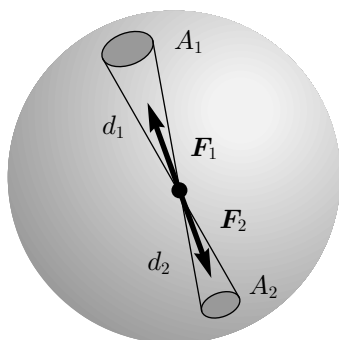
2. **Quantificação da carga.** Qualquer carga eléctrica, seja positiva ou negativa, é sempre um múltiplo inteiro da carga elementar e :

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}.$$

A unidade de carga C é o **coulomb** que será definido na próxima secção. A quantificação da carga é devida ao facto da carga eléctrica não ser transferida na forma de um fluido — como se pensava antes do século XX — mas por meio de partículas elementares, todas elas com cargas fixas. O electrão tem sempre uma carga $-e$, sendo a carga do protão $+e$.

1.2 Lei de Coulomb

Entre as muitas experiências de electrostática feitas por Franklin em Filadélfia, conta-se uma na qual introduziu pequenas bolinhas de cortiça dentro de uma taça metálica que tinha sido previamente isolada da mesa onde se encontrava, e carregada electricamente. Franklin observou que as bolinhas de cortiça não sentiam a acção da força eléctrica dentro da taça, ao contrário do que acontecia fora dela. Joseph Priestley conseguiu explicar este fenómeno ao admitir que a força eléctrica depende do inverso do quadrado da distância: se imaginarmos uma esfera oca carregada uniformemente, em qualquer ponto P dentro dela, a força exercida por um pequeno elemento da esfera é anulada pelo elemento que se encontrar no lado oposto, já que as áreas, e portanto as cargas, dos dois elementos são directamente proporcionais aos quadrados das distâncias ao ponto P, enquanto que a intensidade da força diminui proporcionalmente aos quadrados das distâncias. Obtém-se assim duas forças iguais e de sentidos opostos, como se mostra na Figura 1.3.



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

$$F \propto \frac{A}{d^2}$$

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

Figura 1.3: No interior de uma esfera oca uniformemente carregada, as forças produzidas por elementos de superfície em lados opostos são iguais e de sentidos contrários.

Charles Coulomb corroborou experimentalmente esta dependência. A força electrostá-

tica entre duas cargas pontuais é dada pela chamada lei de Coulomb: a força entre duas cargas pontuais tem a mesma direcção da linha que une as cargas, sendo repulsiva se as cargas tiverem o mesmo sinal, ou atractiva no caso contrário. A grandeza da força é directamente proporcional às grandezas das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Em termos matemáticos podemos escrever a lei de Coulomb em forma vectorial por meio da equação

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}^2} \mathbf{e}_{12}}. \quad (1.1)$$

O vector \mathbf{F}_{12} é a força que a partícula 1 exerce sobre a partícula 2; o **versor** \mathbf{e}_{12} é um vector de módulo unitário, no sentido do ponto 1 ao ponto 2, r_{12} é a distância entre os dois pontos, e q_1 e q_2 são os valores das duas cargas (Figura 1.4).

O leitor deverá prestar especial atenção à notação usada neste livro: os vectores são representados por letras em itálico e negrito, por exemplo \mathbf{F} , e o seu módulo por meio da mesma letra apenas em itálico (F no exemplo anterior); quando um vector tem dois índices, o primeiro indica a origem ou a causa, e o segundo o destino ou receptor, por exemplo a força que a partícula número 4 exerce sobre a partícula número 2 é representada por \mathbf{F}_{42} . É importante ter sempre em mente a diferença entre vectores (posição, força, etc.) e escalares (módulo de um vector, distância, tempo, temperatura, etc.). Os versores são vectores unitários adimensionais, usados para definir direcções e sentidos no espaço e serão indicados por meio da letra \mathbf{e} , com índices que especifiquem a direcção e o sentido; por exemplo o versor que define a direcção e o sentido de um vector \mathbf{A} é

$$\mathbf{e}_A = \frac{\mathbf{A}}{A}. \quad (1.2)$$

Quando se escreve à mão é difícil usar letras em negrito, mas é conveniente distinguir claramente os vectores usando, por exemplo, a notação \vec{A} para os vectores, e \hat{e}_A para o respectivo versor.

Regressando à lei de Coulomb na forma vectorial, quando as duas cargas tiverem o mesmo sinal, a força \mathbf{F}_{12} terá o sentido de \mathbf{e}_{12} (repulsiva); se os sinais forem opostos, a

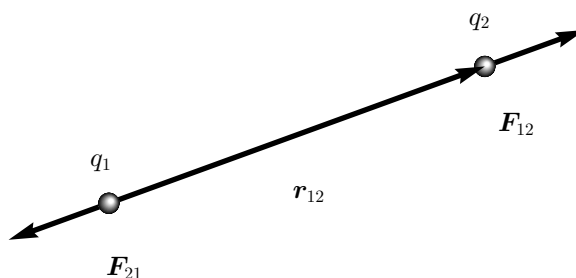


Figura 1.4: Força entre cargas pontuais, neste caso do mesmo sinal.

força terá o sentido contrário a \mathbf{e}_{12} (atractiva).

A forma vectorial da lei de Coulomb é particularmente útil em três dimensões. Em duas dimensões é geralmente mais fácil usar a forma escalar

$$F_{12} = \frac{k q_1 q_2}{r_{12}^2}, \quad (1.3)$$

sem nos preocuparmos com os sinais das cargas, e obter as componentes geometricamente, como veremos nos exemplos que se seguem.

A constante de proporcionalidade k , chamada **constante de Coulomb**, é obtida experimentalmente. Neste livro usaremos o sistema internacional de unidades (SI) no qual as cargas são medidas em coulombs (C), as distâncias em metros (m), e as forças em newtons (N). O valor da constante de Coulomb, em unidades SI é

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}. \quad (1.4)$$

Também podemos interpretar k como a constante que define a unidade SI de carga: uma carga de 1 C é uma carga tal que a força electrostática entre duas cargas de 1 C, distanciadas de 1 m, é igual a $9 \cdot 10^9$ N.

Exemplo 1.1

Três partículas com cargas de 3 nC, 5 nC e -8 nC encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de 4 mm de lado (Figura 1.5). Calcule a força total sobre a partícula de carga negativa.

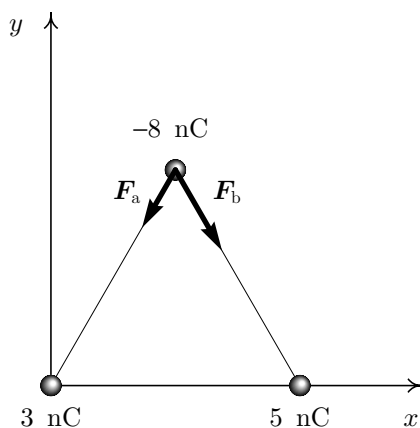


Figura 1.5: Três cargas nos vértices de um triângulo equilátero.

Primeiro, o que convém fazer é calcular o valor da constante electrostática nas unidades

que vamos usar:

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{10^3 \text{ mN}(10^6 \text{ mm}^2)}{10^{18} \text{ nC}^2} = 9 \frac{\text{mN} \cdot \text{mm}^2}{\text{nC}^2};$$

isto implica que, se medirmos as cargas em nC e as distâncias em mm, e usarmos o valor de 9 para a constante k , as forças calculadas pela lei de Coulomb serão dadas em mN.

A seguir escolhemos um sistema de eixos coordenados como se mostra na Figura 1.5. Existem duas forças actuando sobre a partícula de carga -8 nC , produzidas pelas cargas de 3 nC e 5 nC . Os módulos das duas forças são

$$F_a = \frac{9 \cdot 3 \cdot 8}{4^2} \text{ mN} = 13,5 \text{ mN},$$

$$F_b = \frac{9 \cdot 5 \cdot 8}{4^2} \text{ mN} = 22,5 \text{ mN}.$$

As duas forças são atractivas e formam um ângulo de 30° com a vertical. Portanto, as componentes da força resultante são

$$F_x = F_b \sin 30^\circ - F_a \sin 30^\circ = 4,5 \text{ mN},$$

$$F_y = -F_b \cos 30^\circ - F_a \cos 30^\circ = -18\sqrt{3} \text{ mN}. \quad \blacksquare$$

Na resolução deste exemplo não usámos a forma vectorial da lei de Coulomb, devido à simplicidade do problema. Em problemas mais complicados é conveniente usar a Equação (1.1), como veremos no seguinte exemplo.

Exemplo 1.2

Quatro cargas pontuais $q_1 = -12 \text{ nC}$, $q_2 = -5 \text{ nC}$, $q_3 = 9 \text{ nC}$ e $q_4 = 27 \text{ nC}$ encontram-se nos vértices de um tetraedro regular de aresta $d = 21 \text{ cm}$, sobre o plano xy (Figura 1.6). Calcule a força resultante sobre a carga q_4 .

Começamos por escolher um sistema de eixos. Podemos escolher a origem como o ponto onde se encontra uma das cargas, por exemplo q_3 , e o eixo y na direcção da carga q_2 , logo

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = d \mathbf{j}.$$

O eixo x pode ser definido de forma a ter a carga q_1 no plano xy (Figura 1.6) e assim a posição da carga q_1 será

$$\mathbf{r}_1 = d(\cos 30^\circ \mathbf{i} + \sin 30^\circ \mathbf{j}) = \frac{d}{2}(\sqrt{3} \mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

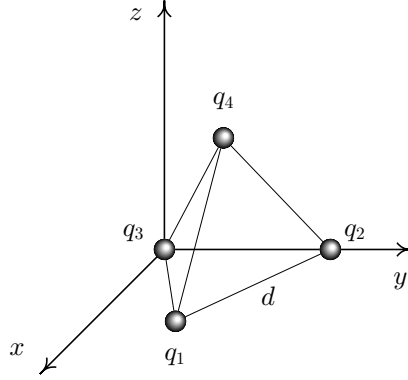


Figura 1.6: Quatro cargas nos vértices de um tetraedro.

Na Figura 1.6 vemos que a coordenada y do vector \mathbf{r}_4 é a mesma do vector \mathbf{r}_1 , enquanto que a coordenada x é um terço da coordenada de \mathbf{r}_1 , já que num triângulo equilátero as bissetrizes interceptam-se a um terço da altura do triângulo:

$$\mathbf{r}_4 = d \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} \right) + z_4 \mathbf{k} .$$

Para calcular a altura do tetraedro (z_4), calculamos o módulo de \mathbf{r}_4 , o qual deverá ser igual a d ; assim, temos:

$$d^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) + z_4^2 = d^2 \quad \Longleftrightarrow \quad z_4 = \frac{\sqrt{6}d}{3} .$$

Agora já podemos calcular a posição da partícula 4 relativa às outras três, subtraindo a \mathbf{r}_4 a posição de cada uma das partículas 1, 2 e 3. Os respectivos versores obtêm-se dividindo por d , já que as arestas do tetraedro são todas iguais a d :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{14} &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{i} + \frac{\sqrt{6}}{3} \mathbf{k} \right) , \\ \mathbf{e}_{24} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{6}}{3} \mathbf{k} \right) , \\ \mathbf{e}_{34} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \frac{\sqrt{6}}{3} \mathbf{k} \right) . \end{aligned}$$

A força resultante sobre a partícula 4 calcula-se aplicando a Equação (1.1), considerando a força que cada uma das partículas exerce sobre a partícula 4:

$$\mathbf{F}_4 = \frac{kq_4}{d^2} (q_1 \mathbf{e}_{14} + q_2 \mathbf{e}_{24} + q_3 \mathbf{e}_{34}) .$$

Como a aresta do tetraedro é dada em centímetros, convém usar a constante k nas unidades seguintes:

$$k = 90 \frac{\mu\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{nC}^2}.$$

O valor que obtemos para a força é

$$\mathbf{F}_4 = 5,51 \left(\frac{14\sqrt{3}}{3} \mathbf{i} + 7 \mathbf{j} - \frac{8\sqrt{6}}{3} \mathbf{k} \right) \mu\text{N}. \quad \blacksquare$$

Para obter uma estimativa da ordem de grandeza das cargas electrostáticas obtidas por fricção vamos usar o resultado de uma experiência simples: uma lâmina de acetato é facilmente electrizada por fricção; se aproximarmos o acetato a pequenos pedaços de papel, estes ascendem colando-se ao acetato¹. Os pedaços de papel, que não têm carga total, são atraídos pelo acetato devido ao fenómeno de indução electrostática do qual falaremos no Capítulo 2. Por enquanto, e como estamos só a fazer uma estimativa de ordens de grandeza, vamos admitir que cada pedaço de papel é uma carga pontual q_1 , atraída pela carga q_2 do acetato, a qual tem sinal oposto mas a mesma ordem de grandeza:

$$|q_1| \approx |q_2| = q.$$

Quando o acetato está suficientemente perto para que o papel ascenda, a força electrostática entre o acetato e o papel iguala o peso do papel:

$$mg = \frac{kq^2}{d^2}. \quad (1.5)$$

Para fazer uma estimativa do peso dos pedaços de papel, admitamos que estamos a usar pedaços quadrados com 0,5 cm de lado, de papel do tipo usado normalmente para fotocópias (isto é, 80 g/m²) e a distância d entre o papel e o acetato é da ordem de grandeza de 1 cm:

$$m = (0,005 \text{ m})^2 \cdot 80 \frac{\text{g}}{\text{m}^2} = 0,002 \text{ g};$$

substituindo na Equação (1.5), obtemos

$$2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 q^2}{10^{-4}} \frac{\text{N}}{\text{C}^2}$$

e a carga q é aproximadamente igual a

$$q \approx 0,5 \text{ nC}.$$

¹Alguns pedaços de papel não permanecem colados, mas saltam bruscamente depois de entrar em contacto com o acetato devido a parte da carga do acetato ter sido transferida para o papel.

Assim, as cargas obtidas em experiências de electrificação por fricção costumam ser da ordem dos nanocoulombs ($1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C}$). Usando o valor da carga elementar dado na secção anterior, vemos que o número de electrões correspondentes a um nanocoulomb é

$$n = \frac{10^{-9}}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 6,242 \cdot 10^9 .$$

Portanto, embora a carga de um objecto só possa aumentar em múltiplos inteiros da carga elementar e , as cargas transferidas em experiências típicas de carga por fricção são tão elevadas que nos permitem admitir aumentos ou diminuições contínuas da carga. Se tivéssemos cargas de várias ordens de grandeza menores do que o nanocoulomb, a aproximação de continuidade já não seria válida.

Existe um método experimental para produzir e medir cargas muito pequenas: a famosa experiência da gota de óleo realizada por Robert Millikan em 1913. As pequenas gotas de óleo produzidas por um pulverizador têm uma carga pequena. Millikan calculou a carga de várias gotas determinando as variações da velocidade limite de queda livre quando é introduzida uma força eléctrica externa, e constatou que as cargas eram todas múltiplos de uma carga elementar e . O valor de e anunciado por Millikan foi de $1,592 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, o qual está bastante perto do valor aceite actualmente ($e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

1.3 Campo eléctrico

Vamos agora interpretar a força electrostática entre duas cargas pontuais de uma forma um pouco diferente. Uma carga Q modifica o espaço à sua volta (Figura 1.7) produzindo um **campo eléctrico**. O campo eléctrico em qualquer ponto P é um vector \mathbf{E} que pode ser medido por meio de uma carga de prova q_0 ; o campo eléctrico produzido pela carga Q , no ponto P , define-se como a força que actua na carga de prova, dividida pelo valor da carga de prova (Equação 1.6).

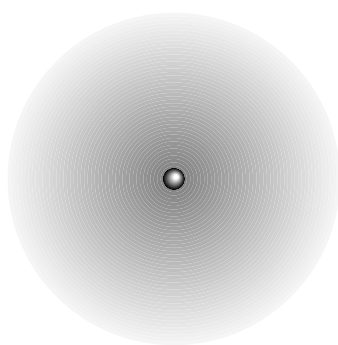


Figura 1.7: Uma carga pontual modifica o espaço à sua volta, produzindo um campo eléctrico que pode ser detectado com uma carga de prova.

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0}}. \quad (1.6)$$

A lei de Coulomb implica que o campo eléctrico \mathbf{E} num ponto depende apenas da carga que o produz (Q) e da posição do ponto (\mathbf{r}), relativa à carga Q :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{kQ}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (1.7)$$

Esta expressão é válida apenas para cargas pontuais, enquanto que a Equação (1.6) é a definição geral de campo eléctrico, em qualquer situação em que exista força electrostática, seja qual for a causa dessa força. Uma vez conhecido o campo eléctrico num ponto P, a força que actua sobre qualquer carga q colocada no ponto P é dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (1.8)$$

Para calcular o campo eléctrico devido a um sistema de cargas pontuais (q_1, \dots, q_n), num ponto P, calculamos a força exercida por cada carga, sobre uma carga pontual q_0 no ponto P (Figura 1.8), e obtemos a resultante dessas forças:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i q_0}{r_i^2} \mathbf{e}_i, \quad (1.9)$$

onde \mathbf{r}_i é o vector que une a carga q_i ao ponto P e \mathbf{e}_i o respectivo versor. O campo obtém-se dividindo pela carga de prova q_0 :

$$\boxed{\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{k q_i}{r_i^2} \mathbf{e}_i}. \quad (1.10)$$

Do ponto de vista matemático o campo parece desnecessário, já que a força electrostá-

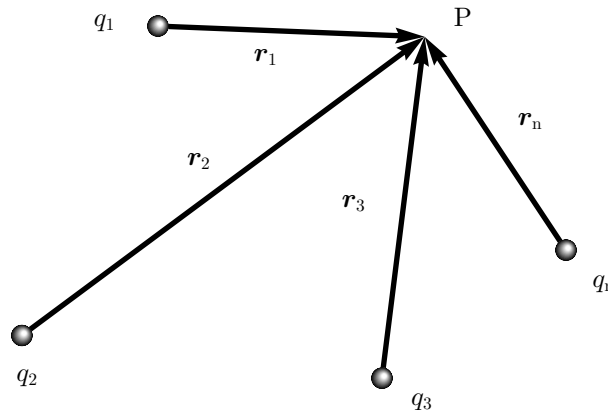


Figura 1.8: Sistema de n cargas pontuais.

tica pode ser calculada directamente, sem ter que se calcular o campo. Mas do ponto de vista físico, este constitui uma concepção bastante diferente da interacção entre partículas e deu origem a um debate que marcou a física do século XIX. Alguns cientistas defendiam a ideia de forças electrostáticas e gravitacionais que actuam à distância, enquanto que outros acreditavam na necessidade de um agente (o éter) que, ao ser perturbado por uma carga, transportaria essa perturbação até outros pontos. A teoria do éter foi abolida na física contemporânea, mas a concepção do campo como perturbação do espaço prevaleceu em relação à ideia de interacção à distância; de facto, hoje em dia o conceito de força desapareceu na física quântica e o principal objecto de estudo são os campos. Está provado que a acção de uma partícula sobre outra não aparece instantaneamente, mas propaga-se desde uma partícula até a outra à velocidade da luz. Se, por exemplo, neste instante uma grande quantidade de carga negativa saísse do Sol, ficando este com carga total positiva, as forças produzidas por essas cargas só seriam detectadas na Terra 8,5 min depois, isto é, o tempo que o campo demora a deslocar-se até à Terra, à velocidade da luz.

Exemplo 1.3

A força sobre uma carga de prova de 5 nC, num determinado ponto é igual a $2 \cdot 10^{-4}$ N e tem a direcção do eixo dos x . Calcule o campo eléctrico nesse ponto. Qual seria a força sobre um electrão no mesmo ponto?

A partir da força calculamos o campo

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \text{ N}}{5 \text{ nC}} \mathbf{i} = (4 \cdot 10^4 \text{ i}) \frac{\text{N}}{\text{C}}.$$

A força sobre um electrão no mesmo ponto seria

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} = (-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4 \cdot 10^4 \text{ i}) \frac{\text{N}}{\text{C}} = (-6,4 \cdot 10^{-15} \text{ i}) \text{ N}. \quad \blacksquare$$

1.4 Linhas de campo eléctrico

As linhas de campo eléctrico são uma família de curvas contínuas que preenchem o espaço, de tal forma que a tangente, em cada ponto de cada linha, aponta na direcção do campo eléctrico nesse ponto. Cada linha de campo está orientada no sentido do campo eléctrico. Também é costume chamar-lhes linhas de força eléctrica, já que a força sobre uma carga positiva tem a mesma direcção do campo. O sentido das linhas de campo eléctrico é sempre das cargas positivas para as cargas negativas (Figura 1.9). Nenhuma linha de campo eléctrico pode ser fechada devido ao facto de o campo eléctrico ser um campo conservativo, como veremos no capítulo do potencial eléctrico (Capítulo 3).

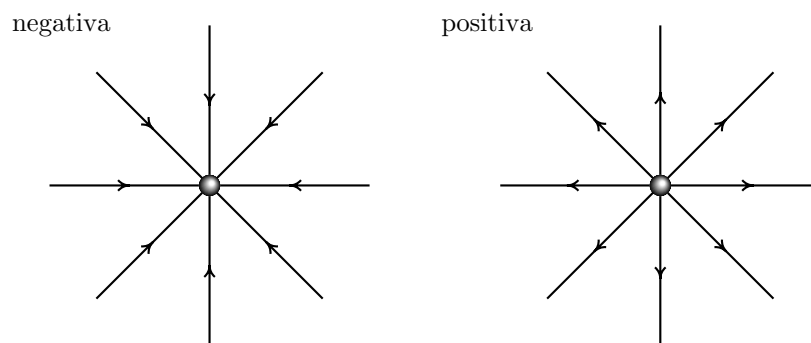


Figura 1.9: Linhas de campo eléctrico de cargas pontuais negativa e positiva isoladas.

Nos pontos onde o campo eléctrico se anula podem começar ou terminar linhas de campo. As linhas de campo nunca se cruzam, pois no ponto onde se cruzassem a direcção do campo seria indefinida; nos pontos onde o campo se anula pode parecer que há linhas a cruzarem-se mas realmente as linhas não tocam o ponto de campo nulo.

Um desenho das linhas de campo é muito útil no estudo do campo e dos seus efeitos sobre partículas carregadas. É possível escrever uma equação diferencial cujas soluções particulares são as linhas de campo, mas, no caso de um sistema de cargas pontuais, podemos obter uma boa aproximação sem ter que resolver equações, usando o método seguinte: em cada carga desenha-se um número de linhas proporcional à carga, uniformemente espaçadas e a começarem ou a terminarem consoante a carga for positiva ou negativa, respectivamente.

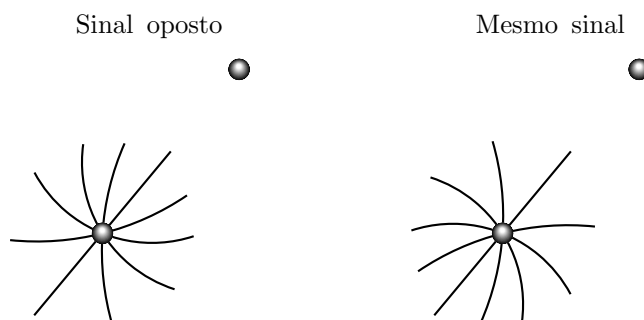


Figura 1.10: As linhas de campo eléctrico de uma carga pontual juntam-se perto de cargas de sinal oposto, e afastam-se na presença de cargas do mesmo sinal.

As linhas terão que se curvar na presença de outra carga vizinha, como se mostra na Figura 1.10: quando a outra carga é do mesmo sinal, as linhas afastam-se da direcção da outra carga juntando-se na direcção oposta. Se a carga vizinha é de sinal contrário, as linhas de campo juntam-se na direcção da carga vizinha e afastam-se na direcção oposta. A seguir, encontram-se os pontos onde o campo é nulo, nos quais deverão entrar e sair o mesmo número de linhas de campo. Finalmente, unem-se as linhas que saem e entram nas cargas e nos pontos de campo nulo, evitando cruzamentos entre linhas. Algumas linhas de campo eléctrico são abertas, estendendo-se até infinito em todas as direcções; o número de linhas abertas é proporcional à carga total do sistema.

Exemplo 1.4

Desenhe as linhas de campo eléctrico de um sistema de duas cargas de 9 nC e -4 nC.

Vamos desenhar duas linhas por cada nanocoulomb, de maneira que deverão sair 18 linhas da carga de 9 nC e entrar 8 linhas na carga de -4 nC (Figura 1.11). As distâncias entre cada carga e o ponto de campo nulo, estão na relação $2/3$ (raiz quadrada da relação entre as cargas).

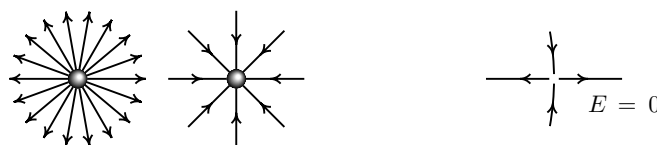


Figura 1.11: Cargas de 9 nC e -4 nC.

Finalmente, unem-se as linhas das duas cargas tendo em conta as regras que enunciámos acima: as linhas não se podem cruzar, as linhas curvam-se na direcção da carga oposta, e 10 linhas deverão ficar abertas, já que a carga total é $9 \text{ nC} - 4 \text{ nC} = 5 \text{ nC}$ (Figura 1.12). Visto de longe, o sistema assemelha-se a uma carga pontual de 5 nC com 10 linhas de campo distribuídas uniformemente.

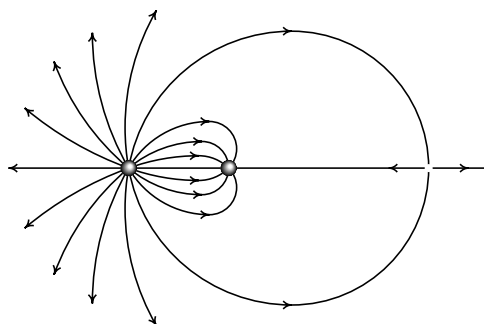


Figura 1.12: Campo eléctrico de duas cargas de 9 nC e -4 nC. ■

A Figura 1.13 mostra outros exemplos. Se as duas cargas têm o mesmo sinal, o ponto

de campo nulo está entre as duas cargas; o único sistema de duas cargas no qual não existe nenhum ponto de campo nulo é o chamado **dipolo** eléctrico, formado por duas cargas iguais e de sinais opostos. Para sistemas de n cargas pontuais segue-se o mesmo procedimento.

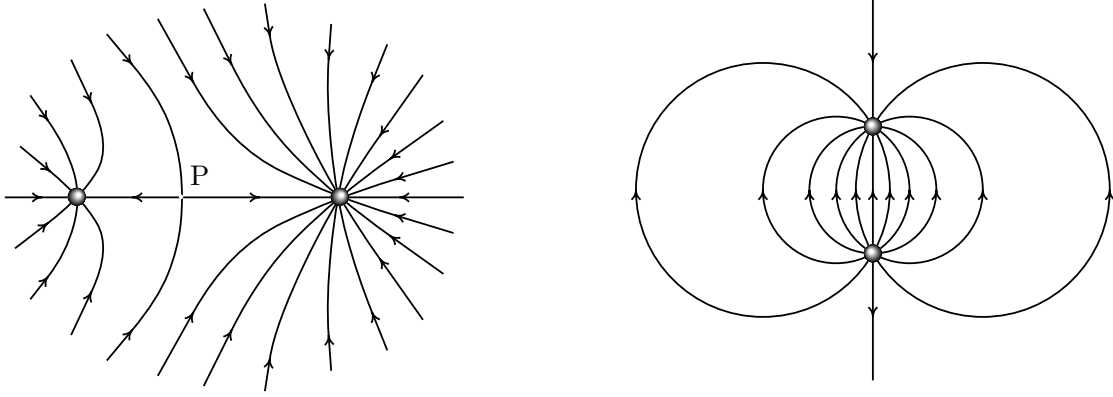


Figura 1.13: À esquerda, um sistema de duas cargas de -4 nC e -9 nC e à direita, um dipolo eléctrico formado por duas cargas $+q$ e $-q$, separadas por uma pequena distância.

Por cada par de cargas cuja soma não seja zero, existe um ponto de campo nulo onde entrarão e sairão linhas alternadamente. As linhas de campo eléctrico dão também alguma ideia da grandeza relativa do campo eléctrico. O campo é mais forte onde a densidade de linhas for maior e mais fraco onde as linhas estiverem mais distanciadas.

Nos exemplos anteriores, a relação entre cargas é uma relação de números inteiros. Se a relação entre as cargas não for uma relação entre números inteiros, será preciso usar números próximos que estejam em proporção de números inteiros.

1.5 Distribuições contínuas de carga

Para calcular o campo eléctrico de uma carga distribuída continuamente dentro de um certo volume V , divide-se o volume em n pequenos elementos de forma a estes poderem ser considerados cargas pontuais. Aplicando a Equação (1.10) ao sistema de cargas, obtemos uma expressão aproximada para o campo eléctrico:

$$\mathbf{E} \approx \sum_{i=1}^n k \frac{\Delta Q_i}{r_i^2} \mathbf{e}_i, \quad (1.11)$$

em que ΔQ_i é a carga dentro do elemento número i . O vector \mathbf{i} é o vector que une o ponto onde se encontra a carga ΔQ_i ao ponto onde se pretende calcular o campo (Figura 1.14).

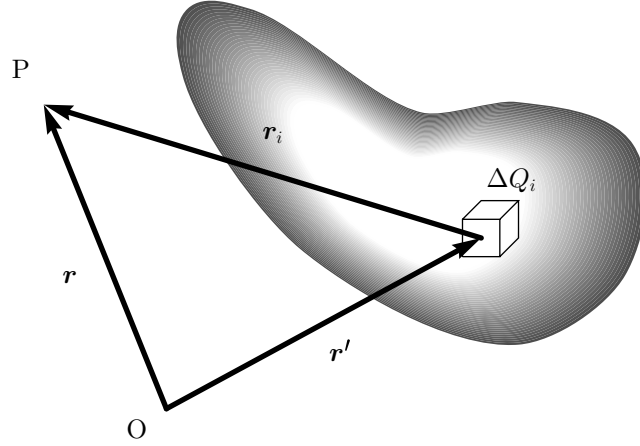


Figura 1.14: Distribuição contínua de carga, dividida em pequenos elementos de forma a calcular o campo total no ponto P.

A aproximação torna-se exacta no limite $n \rightarrow \infty$, de forma a aproximar todos os elementos a cargas pontuais:

$$\mathbf{E} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{k \Delta Q_i}{r_i^2} \mathbf{e}_i. \quad (1.12)$$

Esta série infinita será um integral de linha, de superfície ou de volume, conforme a carga estiver distribuída numa curva, superfície ou volume, respectivamente.

1.5.1 Distribuições lineares de carga

No caso de cargas distribuídas ao longo de um fio, a carga diferencial dQ' no ponto \mathbf{r}' calcula-se a partir da **carga linear** λ :

$$dQ' = \lambda(\mathbf{r}') ds', \quad (1.13)$$

onde ds' é o comprimento infinitesimal ao longo do percurso onde a carga está distribuída, e $\lambda(\mathbf{r}')$ é a carga por unidade de comprimento no ponto \mathbf{r}' (Figura 1.15). Um percurso contínuo pode ser sempre definido por uma família de vectores \mathbf{r}' que dependem de um único parâmetro u que pode ser, por exemplo, um ângulo, um comprimento ou um intervalo de tempo; $d\mathbf{r}'$ é a variação do vector \mathbf{r}' devida a um aumento infinitesimal do parâmetro u e é sempre tangente ao percurso. O elemento de percurso ds' é igual ao módulo do vector \mathbf{r}' . O integral do campo eléctrico reduz-se a um integral de linha:

$$\boxed{\mathbf{E} \approx k \int_L \lambda(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds'}. \quad (1.14)$$

A aproximação será mais exacta quanto menor for a secção transversal do fio. Realmente existem muitos percursos possíveis dentro do fio, sendo preciso escolher um percurso médio para calcular o integral de linha.

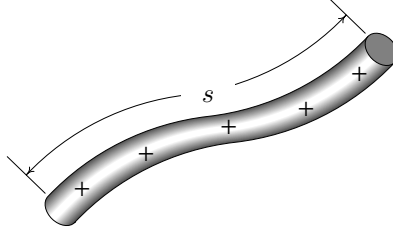


Figura 1.15: Um fio com carga linear λ e comprimento s .

Exemplo 1.5

Um anel circular de raio a , tem uma carga total Q distribuída uniformemente. Calcule o campo eléctrico ao longo do eixo do anel.

A carga linear é

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a}.$$

Definindo como eixo x o eixo do anel e o eixo y sobre o plano do anel, e usando as coordenadas polares definidas na Figura 1.16, os pontos sobre o anel são representados pela equação paramétrica

$$\mathbf{r}' = a \cos \phi \mathbf{i} + a \sin \phi \mathbf{j},$$

com $0 < \phi < 2\pi$ (o parâmetro ϕ será a variável de integração). O elemento de percurso num círculo de raio a é igual a

$$ds = a \, d\phi,$$

mas se não soubéssemos este resultado, podíamos calcular $d\mathbf{r}'$ e logo o seu módulo. O deslocamento devido a um aumento infinitesimal $d\phi$ é dado por

$$d\mathbf{r}' = (-a \sin \phi \mathbf{i} + a \cos \phi \mathbf{j}) \, d\phi,$$

e, por tanto, o seu módulo é $ds = a \, d\phi$.

O vector que une um qualquer ponto do anel ao ponto P é

$$\begin{aligned} \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= x \mathbf{i} - a \cos \phi \mathbf{j} - a \sin \phi \mathbf{k} \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 &= [(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^{3/2} = (x^2 + a^2)^{3/2}, \end{aligned}$$

e substituindo na Equação (1.14) obtemos

$$\mathbf{E} = \frac{kQ}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} (x \mathbf{i} - a \cos \phi \mathbf{j} - a \sin \phi \mathbf{k}) \, d\phi.$$

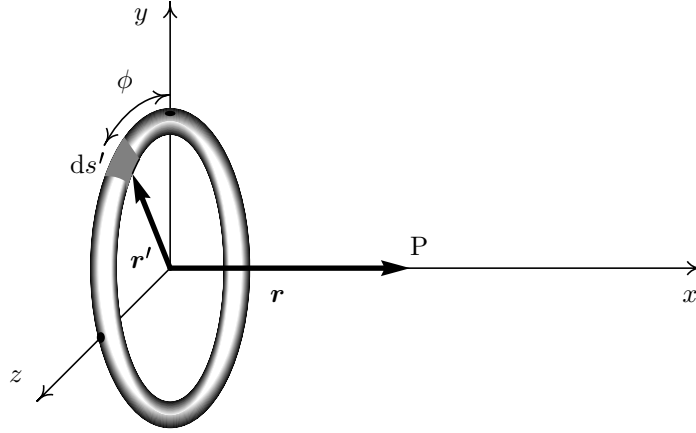


Figura 1.16: Sistema de coordenadas usado para calcular o campo eléctrico devido a um anel.

Os integrais do seno e do co-seno entre 0 e 2π são nulos e, portanto, o campo na direcção do eixo do anel é

$$\mathbf{E} = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \mathbf{i} . \quad \blacksquare \quad (1.15)$$

1.5.2 Distribuições superficiais de carga

Quando a carga está distribuída continuamente numa lâmina fina (Figura 1.17), o integral do campo pode reduzir-se a um integral de superfície. Nesse caso, a carga infinitesimal dQ' à volta do ponto \mathbf{r}' será dada em função da **carga superficial** σ :

$$dQ' = \sigma(\mathbf{r}') dA' , \quad (1.16)$$

onde dA' é o elemento diferencial de área no ponto \mathbf{r}' . O integral que define o campo eléctrico será, assim, um integral de superfície, sobre a superfície S onde existir carga:

$$\boxed{\mathbf{E} = k \iint_S \sigma(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dA' .} \quad (1.17)$$

O integral é um integral em duas dimensões, correspondentes aos dois parâmetros que forem usados para definir a superfície S. A superfície é definida por uma família de vectores \mathbf{r}' que dependem de dois parâmetros contínuos (u, v) ; o elemento de superfície dA' é igual à área da fronteira da região varrida pelo vector \mathbf{r}' quando os dois parâmetros variam dentro do rectângulo com vértices em (u, v) , $(u, v + dv)$, $(u + du, v)$ e $(u + du, v + dv)$. No próximo capítulo voltaremos a este ponto e veremos como calcular dA em geral; por

enquanto só consideraremos superfícies planas ou esféricas nas quais seja óbvio o valor de dA . Se a superfície for plana, definem-se os eixos x e y sobre ela e o elemento diferencial de área será $dx dy$; por vezes será melhor trabalhar em coordenadas polares R e θ , como veremos no Exemplo 1.6.

O integral de superfície para o campo é uma aproximação pelo facto de estarmos a admitir que existe carga apenas na superfície, quando na realidade a carga está distribuída numa pequena camada perto da superfície (Figura 1.17). A aproximação será mais exacta quanto mais fina for a camada onde existe carga.

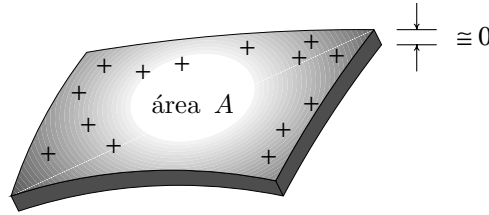


Figura 1.17: Uma distribuição superficial de carga sobre uma área A .

Exemplo 1.6

Calcule o campo eléctrico ao longo do eixo de um disco plano, de raio a e com carga Q distribuída uniformemente sobre a sua superfície.

Como a carga está distribuída uniformemente sobre a área πa^2 do disco, a carga superficial é

$$\sigma = \frac{Q}{\pi a^2}.$$

Os pontos do disco definem-se facilmente em coordenadas polares; escolhemos o eixo x sobre o disco, com origem no centro deste, e o eixo z sobre o eixo do disco. A Figura 1.18 mostra as coordenadas polares R e θ ; o disco é formado pelos pontos de coordenada $R \leq a$. Quando R e θ são aumentados em dR e $d\theta$, obtém-se a área infinitesimal dA (a cinzento na Figura 1.18); se dR e $d\theta$ são suficientemente pequenos, dA é aproximadamente um rectângulo de lados dR e $R d\theta$. Assim, no limite em que dA se aproxima de zero

$$\boxed{dA = R dR d\theta}. \quad (1.18)$$

O vector posição de um ponto P sobre o eixo do disco, a uma distância z , é

$$\mathbf{r} = z \mathbf{k}$$

e a posição de um ponto qualquer do disco é

$$\mathbf{r}' = R \cos \theta \mathbf{i} + R \sin \theta \mathbf{j}.$$

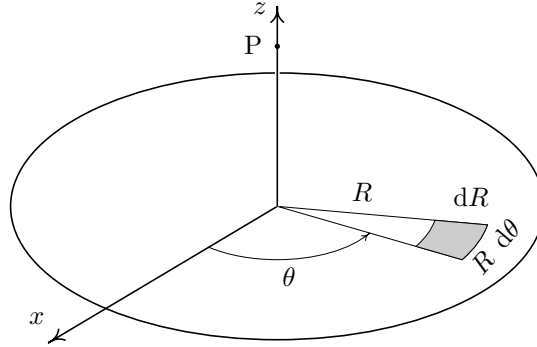


Figura 1.18: Coordenadas polares usadas para calcular o campo devido a um disco.

Substituindo na Equação (1.17) temos

$$\mathbf{E} = \frac{kQ}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{z \mathbf{k} - R \cos \theta \mathbf{i} - R \sin \theta \mathbf{j}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R dR d\theta.$$

Calculando primeiro os integrais em θ , temos que os integrais do seno e do co-seno entre 0 e 2π são nulos e o integral do termo que não depende de θ é igual a 2π , logo

$$\mathbf{E} = \frac{2kQ}{a^2} \int_0^a \frac{zR \mathbf{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dR.$$

A distância z é constante dentro do integral, e a primitiva é

$$z(R^2 + z^2)^{-1/2}.$$

Assim, o resultado final é

$$\mathbf{E} = \frac{2kQ}{a^2} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) \mathbf{k}. \quad (1.19)$$

A fracção $z/|z|$ é igual a 1 ou -1 consoante z for positiva ou negativa, respectivamente. ■

1.5.3 Distribuição volúmica de carga

No caso mais geral, a carga encontra-se distribuída dentro de um volume. As linhas de campo de uma distribuição volúmica de carga não são tão fáceis de representar como no caso de cargas pontuais. Na Figura 1.19 representam-se as linhas de campo de uma esfera sólida com carga distribuída uniformemente dentro do seu volume. Nos pontos mais

afastados do centro sai um maior número de linhas de campo, pois a carga total acumulada aumenta à medida que o raio aumenta.

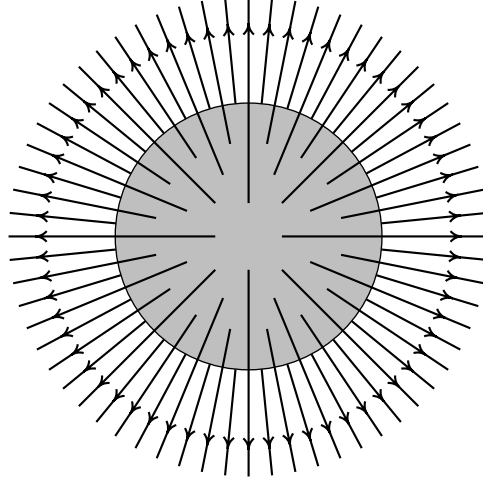


Figura 1.19: Linhas de campo de uma esfera sólida com carga distribuída uniformemente dentro do seu volume.

Se \mathbf{r}' for o vector posição de um ponto qualquer dentro do volume onde está distribuída a carga e \mathbf{r} for a posição do ponto onde o campo vai ser calculado, o vector \mathbf{r}_i na Equação (1.12) será $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ (ver Figura 1.14), e o campo eléctrico é dado por

$$\mathbf{E} = \iiint_V \frac{k (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dQ' ; \quad (1.20)$$

onde a carga dQ' é a carga dentro de um volume infinitesimal dV' à volta do ponto na posição \mathbf{r}' , e pode ser calculada em função da **carga volúmica**² ρ

$$dQ' = \rho(\mathbf{r}') dV' . \quad (1.21)$$

O campo \mathbf{E} na posição \mathbf{r} é definido pelo integral de volume

$$\boxed{\mathbf{E} = k \iiint_V \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' .} \quad (1.22)$$

O elemento diferencial de volume, dV' , é o elemento obtido ao aumentar infinitesimalmente cada uma das três coordenadas que definem o vector \mathbf{r}' . Por exemplo, em

²O leitor deverá resistir à tentação de escrever a Equação (1.21) na forma $\rho = dQ'/dV'$, a qual não faz sentido; a carga volúmica é uma distribuição no espaço tridimensional e não uma função de uma «variável» real V' .

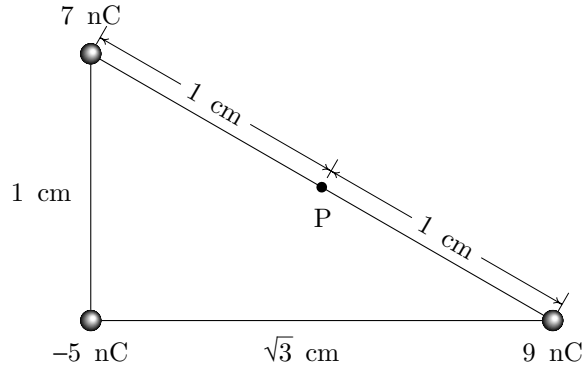
coordenadas rectangulares $dV' = dx' dy' dz'$, em que x' , y' e z' variam dentro das fronteiras do sólido onde existe carga. A carga volúmica $\rho(\mathbf{r}')$ é a carga por unidade de volume, no ponto \mathbf{r}' .

O integral de volume que define o campo pode ser bastante difícil de calcular analiticamente, existindo apenas alguns casos nos quais é possível obter uma solução analítica. Estes geralmente envolvem a existência de alguma simetria, a qual pode ser mais bem explorada usando métodos que veremos nos capítulos seguintes. Consequentemente, adiaremos a resolução de problemas com distribuições volúmicas de carga até aos três próximos capítulos, nos quais veremos algumas técnicas alternativas para calcular o campo eléctrico.

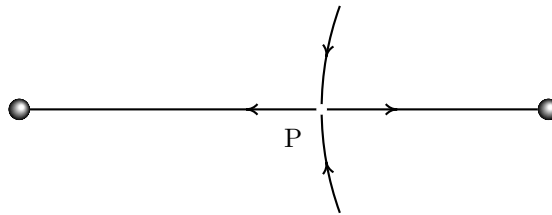
Problemas

1. Duas cargas q_1 e q_2 têm a carga total $q_1 + q_2 = 10 \mu\text{C}$. Quando estão a uma distância de 3 m, o módulo da força exercida por uma das cargas sobre a outra é igual a 24 mN. Calcule q_1 e q_2 , se:
(a) Ambas forem positivas.
(b) Uma for positiva e a outra for negativa.
2. O campo eléctrico na atmosfera terrestre é da ordem dos 150 N/C e é dirigido para o centro da Terra. Calcule a relação entre o peso de um electrão e o módulo da força eléctrica oposta exercida pelo campo eléctrico da atmosfera (os valores da massa do electrão e da aceleração da gravidade encontram-se no Apêndice B).
3. Um sistema de três cargas pontuais está em equilíbrio (a força electrostática sobre cada carga é zero). Sabendo que duas das cargas são q e $2q$, separadas por uma distância d , calcule o valor e a posição da terceira carga.
4. Mostre que o campo eléctrico sobre o eixo de um anel com carga distribuída uniformemente é máximo nos pontos $x = +a/\sqrt{2}$ e $x = -a/\sqrt{2}$, onde x é medido desde a superfície do disco. Faça um gráfico do módulo do campo em função de x .

5. Calcule a força eléctrica que actua sobre cada uma das cargas representadas na figura e o campo eléctrico no ponto P.

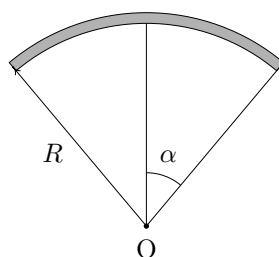


6. Um núcleo de hélio (também chamado **partícula alfa**) é formado por dois prótons e dois neutrões. A força electrostática entre os prótons é repulsiva e muito forte, pois a distância entre eles é muito pequena (aproximadamente 10^{-15} m). A estabilidade do núcleo é devida à existência de uma outra força entre prótons e neutrões, chamada **força forte**. Para ter uma ideia da ordem de grandeza da força forte, calcule a força electrostática entre os dois prótons no núcleo de hélio.
7. Na figura representam-se algumas linhas de campo eléctrico de um sistema de duas partículas com carga. O ponto P encontra-se a 4 cm da carga q_1 e a 3 cm da carga q_2 .
- Qual é o sinal das cargas?
 - Qual é a relação (q_1/q_2) entre elas?
 - Complete o desenho das linhas de campo.
 - Se $q_2 = -4,5$ nC, calcule a força entre as duas cargas.

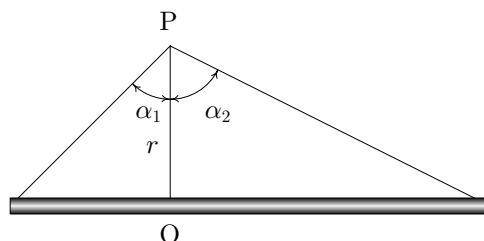


8. Um fio não-condutor no plano xy , forma um círculo de raio a com centro na origem. O fio tem carga linear não-uniforme $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$, onde θ é o ângulo em coordenadas polares. Calcule o campo eléctrico na origem.

9. Usando o resultado do Exemplo 1.6 para o campo de um disco plano, calcule o campo eléctrico produzido por um plano infinito, com carga superficial σ constante.
10. Um disco de 8 cm de raio, tem uma carga superficial $\sigma = ar^2$, onde r é a distância desde o centro, e a uma constante igual a $4 \mu\text{C}/\text{m}^4$. Calcule a carga total do disco, e o campo eléctrico ao longo do eixo.
11. Um fio fino tem carga linear uniforme λ e forma um arco circular que subtende um ângulo de 2α , conforme indicado na figura. Mostre que o módulo do campo eléctrico no ponto O é dado pela expressão $E = (2k\lambda \sin \alpha)/R$.



12. Um fio rectilíneo tem uma carga linear λ constante. Calcule o campo eléctrico em qualquer ponto P em função da distância ao fio (r), e os ângulos α_1 e α_2 definidos na figura. Calcule o valor limite do campo quando o fio for infinito. (Sugestão: defina o eixo x na direcção do fio, com origem em O, e o eixo y na direcção de OP.)



Conceitos básicos

- Fluxo eléctrico
- Ângulo sólido
- Lei de Gauss
- Equilíbrio electrostático
- Indução electrostática

Carl Friedrich Gauss



(1777-1855)

Gauss é considerado um dos maiores matemáticos da história. Nasceu em 1777 em Brunswick, Alemanha, e desde cedo mostrou grande habilidade para a matemática. São muitas as suas contribuições nos campos da teoria dos números, dos números complexos, da geometria e da álgebra. A sua tese de doutoramento foi a primeira demonstração do teorema fundamental da álgebra. No domínio da astronomia, Gauss interessou-se pelo estudo das órbitas planetárias e pela determinação da forma da Terra, e foi director do observatório astronómico da Universidade de Göttingen. Desenvolveu um método para calcular, com grande precisão, os parâmetros de uma órbita planetária a partir de apenas três observações da posição do planeta. A partir de 1831, e em conjunto com o físico Wilhelm Weber, desenvolveu o estudo teórico e experimental do electromagnetismo. A contribuição de Gauss para a determinação do campo magnético terrestre é reconhecida na unidade de campo magnético que leva o seu nome.

Sistemas com simetria e condutores

O campo eléctrico, introduzido no capítulo anterior, constitui um campo vectorial; a cada ponto no espaço associa-se um vector. Outro exemplo de campo vectorial é o campo de velocidades de um fluido em movimento. Neste capítulo definiremos uma grandeza escalar própria de qualquer campo vectorial chamada **fluxo** já que, no caso do movimento de um fluido, o fluxo corresponde ao volume de fluido que passa através de uma superfície por unidade de tempo. No caso do campo eléctrico não existe um fluido em movimento, mas mantém-se o termo fluxo por razões históricas. A partir da definição de fluxo deduziremos a lei de Gauss, a qual já não é geral para qualquer campo, mas constitui uma peculiaridade do campo eléctrico, consequência da sua dependência do quadrado da distância às cargas pontuais. A lei de Gauss permite calcular facilmente o campo eléctrico em situações em que exista alguma simetria.

2.1 Fluxo eléctrico

Para definir o fluxo eléctrico através de uma superfície de área A começamos por considerar o caso mais simples, isto é, quando existe um campo eléctrico perpendicular à superfície e de módulo constante ao longo dela (Figura 2.1). Neste caso definimos o fluxo eléctrico como

$$\boxed{\Psi \equiv EA} . \quad (2.1)$$

Se o campo \mathbf{E} fosse o campo de velocidades de um fluido, a definição anterior seria igual ao volume de fluido que passa através da superfície, por unidade de tempo.

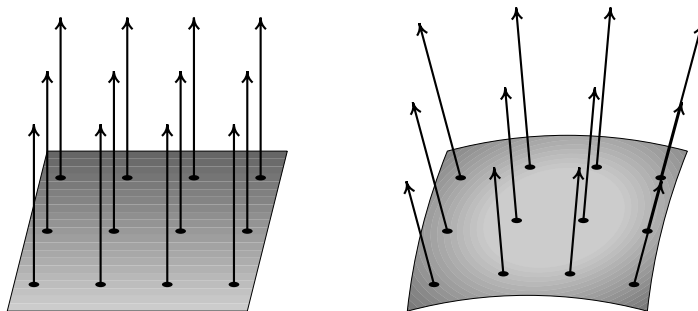


Figura 2.1: Dois exemplos de superfícies onde o campo é perpendicular e tem o mesmo valor em qualquer ponto da superfície.

Se o plano não é perpendicular ao campo eléctrico, mas este é ainda constante, o fluxo através do plano será igual ao fluxo através da projecção do plano na perpendicular ao campo. Se A for a área do plano, a área da projecção perpendicular correspondente será $A' = A \cos \theta$ (Figura 2.2), e o fluxo será igual a

$$\Psi = EA \cos \theta, \quad (2.2)$$

ou em função do versor normal ao plano (\mathbf{e}_n)

$$\Psi = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n) A. \quad (2.3)$$

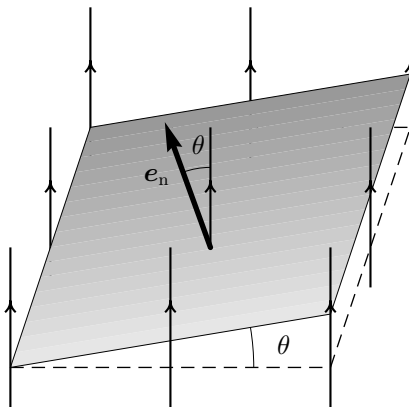


Figura 2.2: Um plano oblíquo ao campo eléctrico. O versor normal ao plano é \mathbf{e}_n e forma um ângulo θ com o campo.

Para calcular o fluxo de um campo eléctrico não constante, através de uma superfície qualquer, dividimos a superfície em pequenos elementos de área ΔA_i (Figura 2.3) equivalentes a planos com campo eléctrico constante \mathbf{E}_i . O fluxo total será a soma dos fluxos através dos pequenos planos:

$$\Delta \Psi_i \approx (\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{e}_i) \Delta A_i \quad (2.4)$$

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Delta \Psi_i \approx \sum_{i=1}^n (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_i) \Delta A_i. \quad (2.5)$$

A aproximação tornar-se-á exacta no limite $n \rightarrow \infty$, de tal forma que as áreas ΔA_i se aproximem todas de zero. Nesse limite, a soma corresponde a um integral de superfície:

$$\boxed{\Psi = \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}}, \quad (2.6)$$

em que o vector diferencial de área, $d\mathbf{A}$, foi definido como um vector de direcção normal à superfície e de módulo igual a dA :

$$d\mathbf{A} \equiv \mathbf{e}_n dA. \quad (2.7)$$

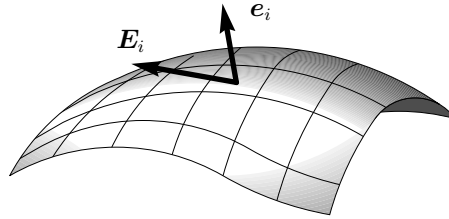


Figura 2.3: Uma superfície dividida em pequenos elementos com áreas ΔA_i e versores normais \mathbf{e}_i .

O integral de superfície na Equação (2.6) é a definição geral do fluxo de um campo vectorial qualquer, através da superfície S . Para que a definição do fluxo seja válida é necessário que o vector $d\mathbf{A}$ exista em todos os pontos, e que o campo \mathbf{E} esteja bem definido sobre a superfície.

Em cada ponto da superfície existem realmente dois versores \mathbf{e}_n normais à superfície, como se mostra na Figura 2.4. Dependendo do versor que escolhermos, estaremos a calcular o fluxo num dado sentido; o fluxo nos dois sentidos opostos é igual em valor absoluto mas com diferentes sinais. No caso de uma superfície fechada, por convenção, definimos o versor normal apontando para o exterior, de maneira que o fluxo calculado é o fluxo para fora da superfície.

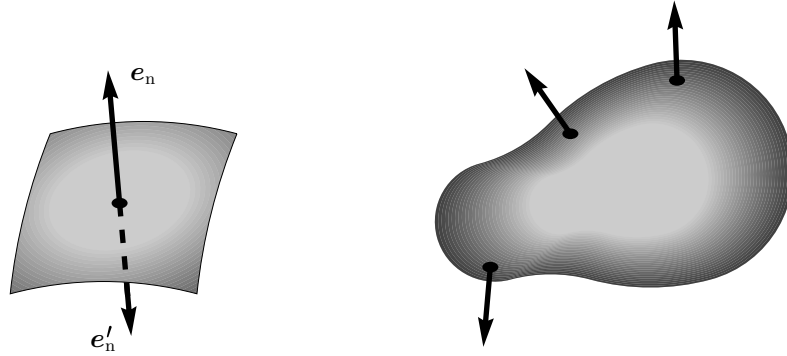


Figura 2.4: Os dois versores normais à superfície. Se a superfície for fechada, um dos versores apontará sempre para fora.

Para calcular o integral na Equação (2.6), é conveniente usar uma representação paramétrica da superfície S com dois parâmetros u e v :

$$S = \{\mathbf{r}(u, v); u \text{ e } v \text{ parâmetros reais}\} . \quad (2.8)$$

Por exemplo, se a superfície fosse o plano $z = 3x - 2y$, uma representação paramétrica seria $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (3x - 2y)\mathbf{k}$, em função dos parâmetros x e y .

Os parâmetros u e v variam dentro de um domínio num plano. Por exemplo, na Figura 2.5 os dois parâmetros são as próprias variáveis x e y , que pertencem ao plano S' . Os aumentos infinitesimais du e dv , no plano S' , são projectados sobre a superfície S , formando uma pequena região cuja área é o elemento diferencial de superfície dA . No limite infinitesimal, dA é a área de um paralelepípedo com lados iguais aos **deslocamentos parciais**:

$$d\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du , \quad (2.9a)$$

$$d\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv ; \quad (2.9b)$$

sendo a derivada parcial $\partial \mathbf{r} / \partial u$ um vector que determina o aumento da função \mathbf{r} , devido a um aumento unitário da variável u ; de igual forma, $\partial \mathbf{r} / \partial v$ determina o aumento de \mathbf{r} devido ao aumento unitário de v . A área do paralelepípedo é, por definição, o módulo do vector $d\mathbf{A}$. O produto vectorial dos vectores (2.9) é um vector de direcção normal à superfície, \mathbf{e}_n , e de módulo igual à área do paralelepípedo; consequentemente:

$$\boxed{d\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv} . \quad (2.10)$$

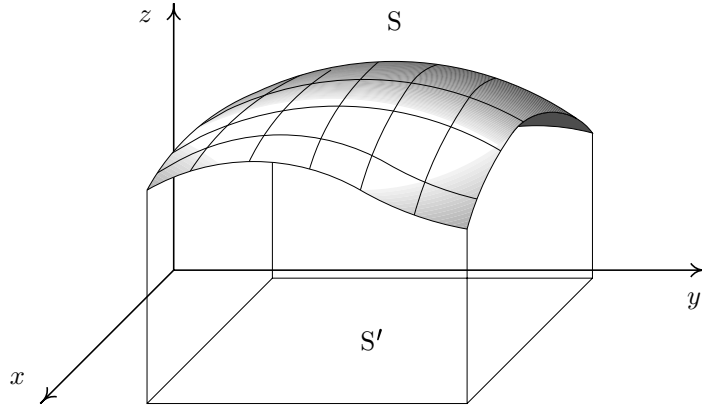


Figura 2.5: Uma superfície é uma função de dois parâmetros reais. Neste caso, o domínio é o rectângulo S' , e a cada ponto no domínio corresponde um único ponto, sobre a superfície S , na posição $\mathbf{r}(x, y)$.

É preciso ter atenção à direcção em que u e v aumentam para saber em que lado da superfície está o vector $d\mathbf{r}_u \times d\mathbf{r}_v$.

Exemplo 2.1

Calcule o fluxo através da superfície ACDE, representada na Figura 2.6, se o campo eléctrico for: (a) $\mathbf{E} = 3\mathbf{j}$ N/C, e (b) $\mathbf{E} = C_1 \sin(C_2 x)\mathbf{i}$, com $C_1 = 20$ N/C e $C_2 = 5 \text{ m}^{-1}$.

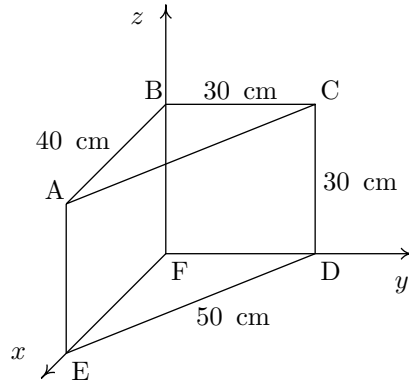


Figura 2.6: Exemplo 2.1.

(a) Como o campo é constante e na direcção do eixo dos y , o fluxo através de ACDE é igual ao fluxo através de ABFE na direcção positiva do eixo y , e calcula-se facilmente usando a Equação (2.1)

$$\Psi_{ABFE} = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,3 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}} = 0,36 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}} .$$

(b) Em qualquer ponto do plano ACDE, se a variável z aumentar uma unidade, o deslocamento correspondente será o versor \mathbf{k} , de maneira que

$$d\mathbf{r}_z = \mathbf{k} dz .$$

Como o campo depende de x convém escolher como segundo parâmetro (além de z) a variável x , para não ter que se calcular x em função de y e z . Se x aumentar desde F até E, o ponto correspondente no plano deslocar-se-á desde D até E:

$$(40\mathbf{i} - 30\mathbf{j}) \text{ cm} .$$

Como $FE = 40$ cm, o deslocamento correspondente ao aumento dx é

$$d\mathbf{r}_x = \left(\mathbf{i} - \frac{3}{4}\mathbf{j} \right) dx ,$$

e usando a Equação (2.10) temos

$$d\mathbf{A} = \mathbf{k} \times \left(\mathbf{i} - \frac{3}{4}\mathbf{j} \right) dx dz = \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j} \right) dx dz .$$

O fluxo através de ACDE é (só escreveremos as unidades no fim)

$$\Psi_{ACDE} = C_1 \int_0^{0,4} \int_0^{0,3} \sin(C_2 x) \mathbf{i} \cdot \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j} \right) dz dx ;$$

Como o produto escalar de \mathbf{i} consigo próprio é 1, e com \mathbf{j} é zero:

$$\Psi_{ACDE} = \frac{9C_1}{40} \int_0^{0,4} \sin(C_2 x) dx = \frac{9C_1}{40C_2} (1 - \cos 0,4C_2) = 1,27 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}} . \quad \blacksquare$$

No exemplo anterior não foi preciso saber a equação do plano ACDE. Quando a equação da superfície é conhecida, os dois deslocamentos podem ser calculados directamente por derivação parcial, usando a Equação (2.9).

2.2 Lei de Gauss

Uma superfície cónica gera-se pelo movimento de uma recta ao longo de uma curva fechada, enquanto um ponto da recta (vértice) permanece fixo fora do plano da curva. O volume delimitado por uma superfície cónica é chamado **ângulo sólido**. A intersecção de uma superfície cónica com uma esfera centrada no vértice do ângulo, é uma curva fechada (Figura 2.7); a área A da superfície da esfera demarcada por esta curva fechada, dividida pelo quadrado do raio da esfera R^2 , é uma constante independente do tamanho da esfera e define o valor do ângulo sólido, Ω , em esterradianos:

$$\Omega \equiv \frac{A}{R^2}. \quad (2.11)$$

O valor de um ângulo sólido está sempre compreendido entre 0 e 4π esterradianos. O valor máximo 4π obtém-se no limite, quando o ângulo «preenche» o espaço todo. A área de uma superfície esférica pode ser calculada por meio da equação anterior, se o ângulo sólido e o raio forem conhecidos.

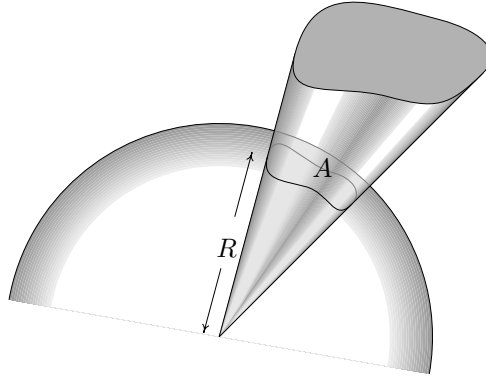


Figura 2.7: Ângulo sólido.

Vamos mostrar que o fluxo eléctrico produzido por uma carga pontual é proporcional ao ângulo sólido medido a partir da posição da carga. Para uma carga pontual, o fluxo $\Delta\Psi$ através de uma pequena superfície com área ΔA (Figura 2.8) é dado, aproximadamente, por

$$\Delta\Psi \approx (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n) \Delta A = \frac{kq}{r^2} \cos \theta \Delta A. \quad (2.12)$$

Como o produto $\Delta A \cos \theta$ é aproximadamente igual à projecção da área ΔA sobre uma esfera com centro na carga q e raio r , $\Delta A \cos \theta / r^2$ é igual ao ângulo sólido $\Delta\Omega$ subtendido pela área ΔA :

$$\Delta\Psi \approx kq \Delta\Omega. \quad (2.13)$$

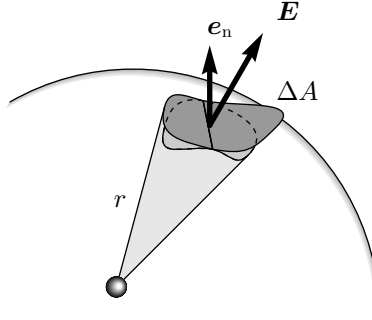


Figura 2.8: O fluxo produzido por uma carga pontual, através de uma superfície com área ΔA , é igual ao fluxo através da projecção de ΔA sobre uma esfera com centro na carga.

No limite $\Delta A \rightarrow 0$, as aproximações feitas tornam-se exactas, e

$$d\Psi = kq \, d\Omega . \quad (2.14)$$

Como kq é constante, integrando os dois lados, obtemos

$$\boxed{\Psi = kq\Omega} . \quad (2.15)$$

O fluxo eléctrico produzido por uma carga pontual, através de uma superfície, é directamente proporcional ao ângulo sólido subtendido pela superfície, com vértice na carga, independentemente da distância entre a carga e a superfície. Isto é uma consequência da diminuição da força electrostática em função do quadrado da distância à carga, já que a área subtendida por um ângulo sólido aumenta com o quadrado da distância ao vértice.

No caso de uma superfície fechada S e uma carga pontual q , existem duas possibilidades (Figura 2.9). Se a carga se encontrar no interior de S , o valor total do ângulo sólido subtendido por S será igual ao ângulo da esfera toda, 4π , e o fluxo (Equação 2.15) será

$$\Psi = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi kq . \quad (2.16)$$

Quando a carga que produz o fluxo está no exterior da superfície S , as rectas tangentes à superfície S e que passam pelo centro da carga dividem a superfície em duas, S_1 e S_2 , com o mesmo ângulo sólido. Como vemos na Figura 2.9, os fluxos eléctricos nas superfícies S_1 e S_2 têm sinais opostos, já que as projecções do campo eléctrico sobre os versores \mathbf{e}_{n1} e \mathbf{e}_{n2} têm sinais opostos. Como o ângulo sólido das duas superfícies é o mesmo, o valor absoluto do fluxo é igual nas duas superfícies. O fluxo que entra por uma das superfícies, sai pela outra, e o fluxo total é nulo.

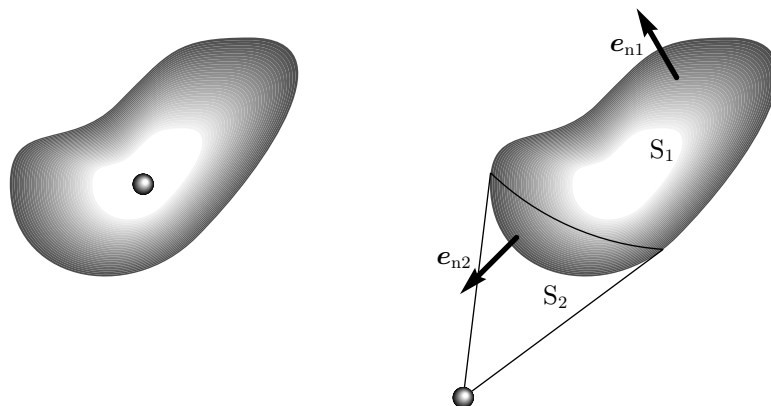


Figura 2.9: Cargas interna e externa a uma superfície S .

Se agora tivermos um sistema de n cargas pontuais q_1, q_2, \dots, q_n , e uma superfície fechada S , o fluxo produzido por todas as cargas que se encontrarem no exterior de S será zero, enquanto que cada carga que estiver no interior de S contribuirá com um fluxo $4\pi k q_i$. Neste caso, o fluxo total será

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 4\pi k q_{\text{int}}, \quad (2.17)$$

onde q_{int} é a carga total no interior da superfície S . Esta equação é a **lei de Gauss**. A constante $4\pi k$ também costuma ser definida como $1/\epsilon_0$, onde ϵ_0 é chamada **permitividade do vázio**:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}. \quad (2.18)$$

A lei de Gauss tem um papel muito importante em electrostática pois permite-nos calcular facilmente o campo eléctrico de certos sistemas. A ideia de usar a lei de Gauss para calcular o campo eléctrico, consiste em descobrir uma superfície imaginária — **superfície gaussiana** — que passe pelo ponto onde se pretende calcular o campo, de forma a que a componente normal à superfície seja sempre constante ou nula. A Equação (2.1) pode agora ser usada obtendo-se, segundo a lei de Gauss:

$$E = \frac{4\pi k q_{\text{int}}}{A}. \quad (2.19)$$

Não obstante, só em alguns casos existem superfícies gaussianas (quando as linhas de campo apresentam alguma simetria). A lei de Gauss, juntamente com o princípio de sobreposição, permite também calcular o campo em sistemas que não tenham simetria, mas que possam ser obtidos por sobreposição de sistemas com simetria (ver Problema 8). A lei de Gauss é também bastante útil para descobrir onde não podem existir cargas,

como veremos na secção sobre condutores em equilíbrio electrostático.

Alguns dos casos que permitem o uso da lei de Gauss para calcular o campo são sistemas idealizados que não existem na prática: planos infinitos, linhas de carga infinitas, etc. Embora a simetria das linhas de força, exibidas pelos ditos sistemas ideais, não exista nos sistemas reais, podemos ainda usar o sistema ideal para obter uma boa aproximação. Por exemplo, na Figura 2.10 mostram-se as linhas de campo de um fio com uma distribuição linear uniforme de carga. Nos pontos perto do centro do fio as linhas são quase paralelas e equidistantes como no caso de um fio infinito. Podemos, pois, calcular o campo de um fio infinito com a mesma carga linear, usando a lei de Gauss, como veremos nos exemplos seguintes. O resultado obtido para o fio infinito será uma aproximação muito boa do campo na região perto do centro.

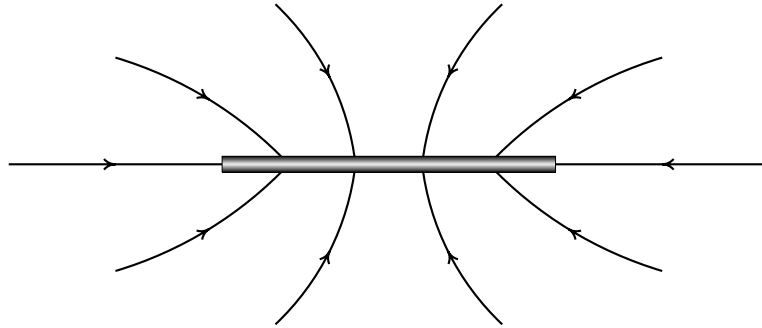


Figura 2.10: Linhas de campo de um fio isolante recto e curto, com carga linear uniforme.

Exemplo 2.2

Calcule o campo eléctrico de um fio rectilíneo infinito com carga linear uniforme λ .

Para calcular o campo eléctrico a uma distância R do fio, consideramos uma superfície imaginária S fechada, que consiste num cilindro de raio R , com eixo sobre o fio e comprimento L (Figura 2.11). A vantagem desta escolha é que o fluxo calcula-se facilmente em função do campo E .

Como o fio é infinito as linhas de campo eléctrico não poderão ser curvas em nenhum dos sentidos. As linhas de campo são rectas de direcções radiais e existe simetria cilíndrica. O fluxo através das bases do cilindro é nulo, pois o campo é paralelo a elas. Na superfície curva do cilindro o campo \mathbf{E} é sempre perpendicular e de módulo constante; assim, o cilindro é uma superfície gaussiana e o fluxo pode ser calculado a partir da Equação (2.1):

$$\Psi_S = EA,$$

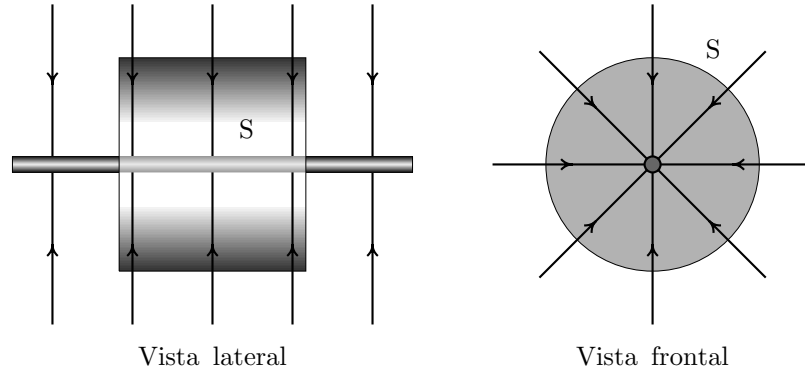


Figura 2.11: Superfície gaussiana de um fio infinito com distribuição uniforme de carga.

onde A é a área lateral do cilindro; temos então

$$\Psi_S = 2\pi RLE.$$

A carga interna da superfície S é igual à carga do pedaço de fio, de comprimento L , no interior de S :

$$q_{\text{int}} = \lambda L.$$

Aplicando a lei de Gauss (Equação 2.17), obtemos

$$2\pi RLE = 4\pi k\lambda L,$$

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{2k\lambda}{R} \mathbf{e}_R}, \quad (2.20)$$

onde \mathbf{e}_R é o versor na direcção radial. ■

Exemplo 2.3

Calcule o campo eléctrico devido a um plano infinito com carga superficial constante σ .

As linhas de campo devem ser rectas perpendiculares ao plano e equidistantes. Isto implica que o campo eléctrico tenha módulo constante e seja perpendicular ao plano, em sentidos opostos nos dois lados do plano. Considerando uma superfície cilíndrica imaginária perpendicular ao plano (Figura 2.12), o fluxo na superfície lateral será zero e nas bases poderá ser facilmente calculado, já que o campo é perpendicular e o seu módulo constante.

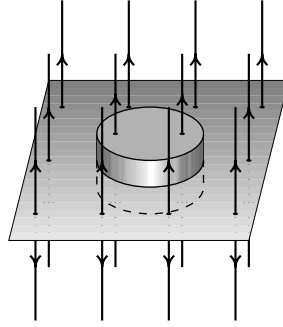


Figura 2.12: Superfície gaussiana para um plano infinito com carga superficial constante.

Em cada uma das bases o fluxo eléctrico é EA , sendo A a área da base. O fluxo total através da superfície fechada é

$$\Psi = 2AE ,$$

e a carga no seu interior é

$$q_{int} = \sigma A .$$

Aplicando a lei de Gauss obtemos

$$\boxed{E = 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}} . \quad (2.21)$$

O campo eléctrico produzido por um plano infinito, com carga superficial uniforme, é constante e directamente proporcional à carga superficial. ■

Exemplo 2.4

Uma esfera maciça de raio R tem uma carga total Q e carga volúmica constante. Calcule o campo eléctrico no interior e no exterior da esfera.

A distribuição de carga na esfera é a mesma em qualquer direcção, o que implica simetria esférica e existência de superfícies gaussianas: qualquer esfera S concêntrica com a esfera maciça e com um raio r (Figura 2.13).

Em qualquer ponto de S , o campo é perpendicular e o seu módulo E é constante, logo o fluxo eléctrico através de S é dado por

$$\Psi = 4\pi r^2 E .$$

Aplicando a lei de Gauss obtemos

$$E = \frac{kq_{int}}{r^2} . \quad (2.22)$$

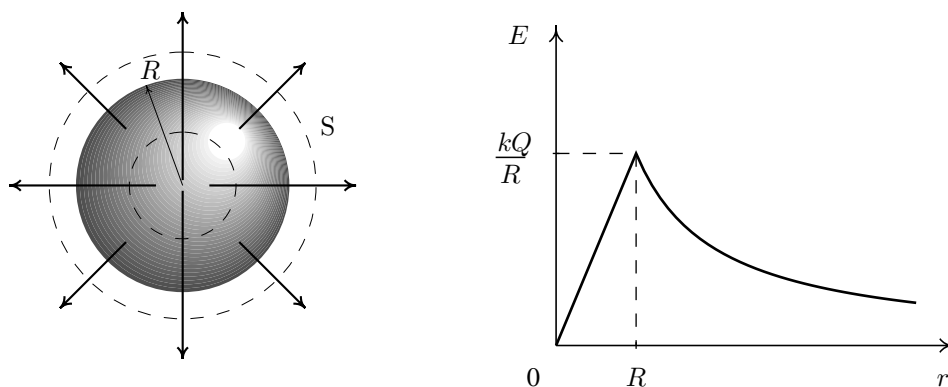


Figura 2.13: Campo produzido por uma esfera maciça de raio R , com carga Q distribuída uniformemente.

No exterior da esfera ($r > R$), a carga dentro da superfície gaussiana é igual à carga total da esfera, $q_{\text{int}} = Q$, e o campo eléctrico é

$$\boxed{E = \frac{kQ}{r^2}}. \quad (2.23)$$

No interior da esfera ($r < R$), a carga interna de S é

$$q_{\text{int}} = Q \frac{r^3}{R^3},$$

e usando a lei de Gauss obtemos

$$\boxed{E = \frac{kQr}{R^3}}. \quad \blacksquare \quad (2.24)$$

O conceito de fluxo permite-nos uma melhor compreensão do campo eléctrico. Consideremos uma curva fechada numa região onde existe um campo eléctrico sem descontinuidades; por cada ponto da curva passa uma única linha de campo eléctrico, e essas linhas delimitam um volume chamado **tubo de fluxo**. As linhas de campo eléctrico dentro do tubo de fluxo não podem sair dele, já que não se podem cruzar com as linhas de campo na fronteira do tubo. Assim, o número de linhas de campo eléctrico dentro do tubo de fluxo é constante. Por outro lado, em qualquer secção transversal do tubo de fluxo, o fluxo eléctrico é o mesmo, pois pela parede lateral do tubo não sai nem entra fluxo (o campo eléctrico é paralelo à parede lateral). Nas regiões onde as linhas de campo eléctrico se juntam, a secção transversal do tubo de fluxo é menor, e o campo é mais forte. O módulo do campo eléctrico, ao longo do tubo de fluxo, é inversamente proporcional à separação entre as linhas de campo.

2.3 Condutores em equilíbrio electrostático

Um condutor é um material que tem alguns electrões livres que podem deslocar-se livremente, chamados **electrões de condução**. Quando as cargas livres não se encontram em movimento, diz-se que o condutor está em **equilíbrio electrostático**. Para que o condutor esteja em equilíbrio electrostático é preciso que o campo eléctrico, em qualquer ponto do condutor, seja nulo. Se assim não fosse, as cargas livres seriam aceleradas pelo campo e o condutor não estaria em equilíbrio.

Imaginemos um condutor em equilíbrio electrostático. Quando se introduz um campo eléctrico externo, os electrões de condução são acelerados no sentido oposto, ficando um excesso de electrões num extremo do condutor e um excesso de protões no extremo oposto (Figura 2.14). Os electrões e os protões em excesso produzem um campo eléctrico que, dentro do condutor, é oposto ao campo externo, fazendo com que o campo total no interior diminua. Enquanto existir campo eléctrico dentro do condutor, o movimento de cargas continuará e o campo total diminuirá até ser zero. Nesse instante o condutor atinge o equilíbrio electrostático e o campo em qualquer ponto interno é nulo. Num condutor típico o tempo necessário para atingir o equilíbrio é muito pequeno, da ordem dos 10^{-19} segundos, como veremos no problema 9 do Capítulo 6.

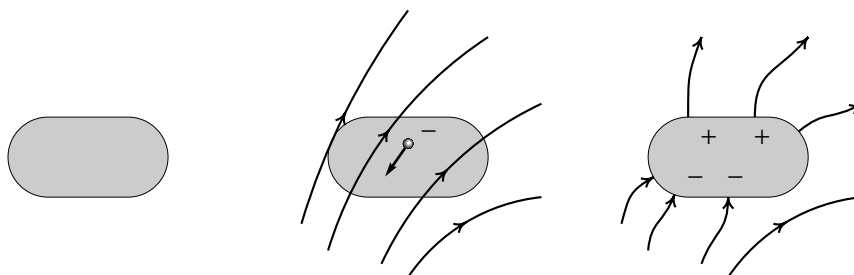


Figura 2.14: A introdução de um campo externo num condutor sem carga produz deslocamento dos electrões livres e, consequentemente, uma carga induzida que anula o campo no interior do condutor.

2.3.1 Carga por indução

O fenómeno de indução de cargas nos extremos de um condutor, dentro de um campo eléctrico, pode ser usado para carregar metais (Figura 2.15). Por exemplo, se deslocarmos um objecto com carga positiva perto de uma peça metálica isolada, a parte do metal que estiver mais perto do objecto carregado acumulará uma carga negativa, enquanto no lado oposto (mais distante) ficará uma carga positiva da mesma ordem de grandeza. Se nesse momento o extremo mais distante do condutor isolado for ligado a outro condutor sem carga, as cargas positivas passam para o segundo condutor. Desligando os dois condutores, antes de retirar o objecto usado para induzir as cargas, os dois condutores ficam com cargas iguais e de sinais opostos.

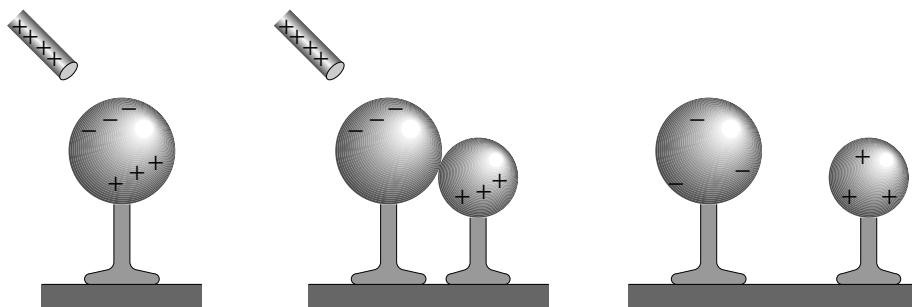


Figura 2.15: O fenómeno da indução electrostática pode ser usado para carregar dois condutores com cargas idênticas mas de sinais opostos.

2.3.2 Carga e campo num condutor em equilíbrio

Como já vimos, o campo eléctrico dentro de um condutor em equilíbrio tem que ser necessariamente nulo. O fluxo eléctrico em qualquer superfície fechada no interior do condutor será nulo, pois o campo é nulo em qualquer ponto do condutor. No entanto, a lei de Gauss garante que não existe carga dentro de uma superfície fechada onde o fluxo eléctrico seja nulo. Isto implica que não pode existir carga em qualquer ponto interno do condutor. Não considerámos os pontos na superfície do condutor, já que qualquer superfície fechada, que tenha no seu interior pontos da superfície do condutor, sai fora do condutor. Assim, os únicos pontos onde pode existir carga num condutor em equilíbrio electrostático é na sua superfície; qualquer excesso de carga num condutor isolado deverá estar distribuída sobre a sua superfície (Figura 2.16).

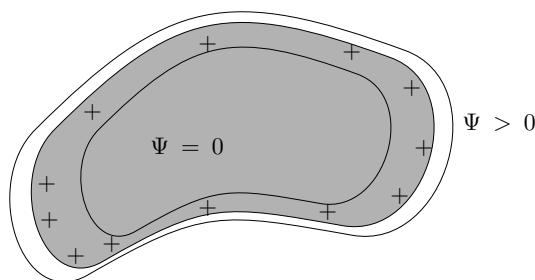


Figura 2.16: Fluxo em superfícies internas e externas a um condutor em equilíbrio electrostático.

O campo eléctrico dentro do condutor em equilíbrio é zero. Na superfície do condutor, se o campo tivesse uma componente ao longo da superfície, esta aceleraria os electrões de condução ao longo da superfície, e o condutor não estaria em equilíbrio. A componente do campo eléctrico normal à superfície terá uma tendência a «puxar para fora» os electrões da superfície, ou a atrair electrões do exterior, mas, como o condutor está isolado, isso será impossível e o condutor permanecerá em equilíbrio. Concluimos assim, que o campo

eléctrico na superfície de um condutor em equilíbrio electrostático é sempre perpendicular à superfície (Figura 2.17).

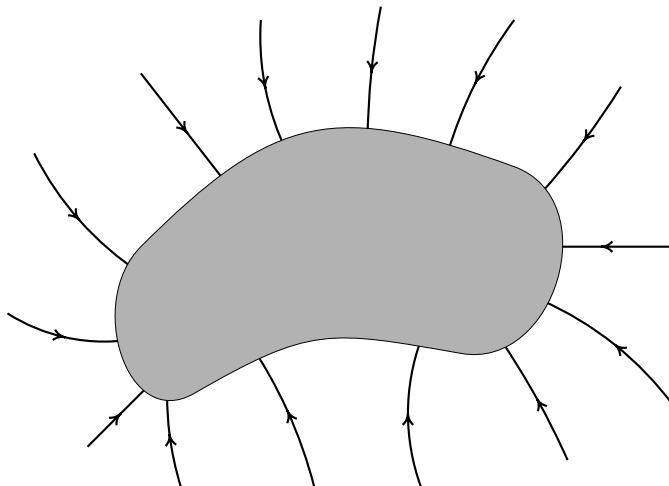


Figura 2.17: As linhas de campo de um condutor em equilíbrio são sempre perpendiculares à superfície e terminam ou começam nela.

Para calcular o campo eléctrico na superfície de um condutor em equilíbrio, imaginemos um pequeno cilindro de bases paralelas à superfície, como se mostra na Figura 2.18. Se o cilindro for suficientemente pequeno, será aproximadamente uma superfície gaussiana.

Só existe fluxo eléctrico na base do cilindro no exterior do condutor, e o fluxo total através da superfície gaussiana é

$$\Psi \approx E\Delta A = 4\pi k\Delta q, \quad (2.25)$$

onde ΔA é a área da parte da superfície no interior do cilindro, e Δq é a carga que ela contém. No limite $\Delta A \rightarrow 0$ a equação anterior é exacta e

$$E = 4\pi k \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta A}. \quad (2.26)$$

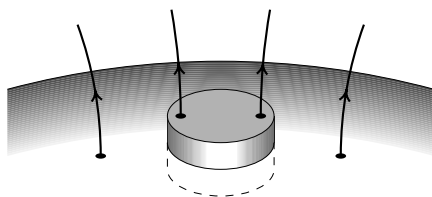


Figura 2.18: Pequena superfície gaussiana na superfície de um condutor, usada para calcular o módulo do campo na superfície.

O limite na equação anterior é igual à carga superficial. Assim, o campo num ponto da superfície do condutor é

$$\boxed{\mathbf{E} = 4\pi k\sigma \mathbf{e}_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_n}, \quad (2.27)$$

onde σ é a carga superficial e \mathbf{e}_n o versor normal para fora do condutor.

O campo na superfície do condutor é o dobro do campo de uma superfície plana infinita (ver Equação 2.21). Podíamos ter pensado que, estando muito perto da superfície do condutor, seria uma boa aproximação admitir que a superfície era muito extensa, mas como vimos não é assim.

No caso de uma superfície plana infinita, o campo num ponto da superfície é devido só à carga nesse ponto, pois, por simetria, o campo total produzido pelos outros pontos no plano é zero. No condutor fechado, o campo num ponto da superfície é o resultado da sobreposição dos campos produzidos pelo próprio ponto mais o campo produzido pelos restantes pontos da superfície. O campo do próprio ponto deverá ser o mesmo que no caso do plano infinito e, portanto, será igual a $2\pi k\sigma$ nos dois lados da superfície e em sentidos opostos. O campo que falta para completar o campo total é o campo devido ao resto da superfície. Como o campo total é nulo no interior e igual a $4\pi k\sigma$ no exterior, o campo produzido pela superfície, sem incluir o ponto P, é igual a $2\pi k\sigma$ nos dois lados da superfície e com o mesmo sentido.

O campo $2\pi k\sigma$ produzido pela superfície, sem incluir o ponto P, actua sobre a carga local no ponto P, produzindo uma força para fora da superfície:

$$dF = 2\pi k\sigma^2 dA. \quad (2.28)$$

Esta força é sempre neste sentido independentemente do sinal da carga superficial σ .

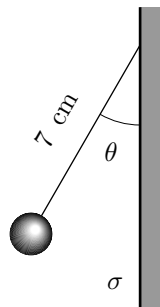
Problemas

1. Calcule o fluxo do campo eléctrico $\mathbf{E} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ através da superfície

$$S = \{z = 2x + 3y, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 1\}$$

(As distâncias são dadas em cm, e o campo em N/C.)

2. Calcule o fluxo produzido pelo campo eléctrico $\mathbf{E} = C_1 \sin(C_2 x)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{k})$, através do triângulo com vértices nos pontos $(0, 0, 0)$, $(2 \text{ cm}, 0, 0)$ e $(0, 3 \text{ cm}, 0)$. Os valores das constantes são $C_1 = 20 \text{ N/C}$ e $C_2 = 5\text{m}^{-1}$.
3. Calcule o fluxo associado a um campo vectorial $\mathbf{F} = e^{-y}(\mathbf{i} - x\mathbf{j})$, através do triângulo com vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$ e $(0, 0, 3)$.
4. Uma esfera condutora, com massa igual a 25 g e carga de $50 \mu\text{C}$, encontra-se pendurada por um fio isolado, de 7 cm de comprimento, colado a um plano vertical. O plano vertical tem uma carga superficial constante $\sigma = 17 \text{ pC/cm}^2$ e pode ser considerado infinito. Calcule o ângulo θ que o fio faz com o plano vertical.



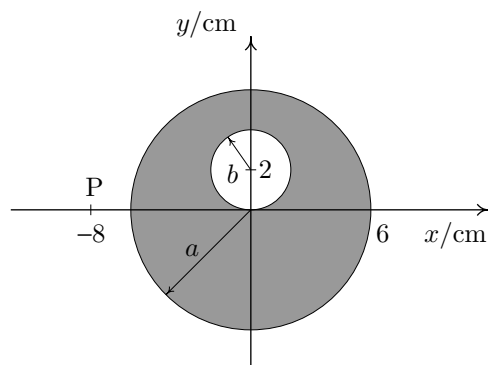
5. O campo eléctrico numa dada região do espaço é

$$\mathbf{E} = 5 \frac{\mathbf{r}}{r^5}.$$

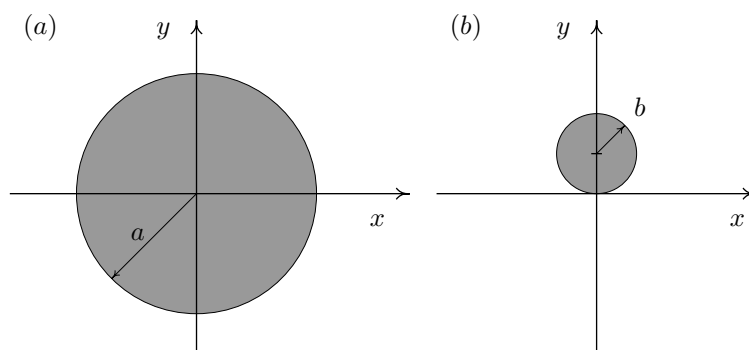
Calcule a carga total dentro de uma esfera de 6 cm de raio e centro na origem. (O raio é dado em cm e o campo em N/C.)

6. (a) Se uma bola de sabão for carregada electricamente, o seu diâmetro vai aumentar, diminuir ou permanecer igual?
 (b) Se colocarmos a bola de sabão num campo eléctrico uniforme, o que acontece com a sua forma?

7. Considere o próton como uma pequena esfera sólida de raio 10^{-15} m, com carga distribuída uniformemente no seu interior. Calcule o campo eléctrico na sua superfície e num ponto a $0,5 \cdot 10^{-15}$ m do centro.
8. A figura representa o corte transversal de um cilindro sólido, muito comprido, de raio $a = 6$ cm e carga volúmica constante $\rho = 25$ nC/m³ e com uma cavidade cilíndrica de raio $b = 2$ cm. Calcule o campo eléctrico no ponto P.



[Sugestão: para calcular o campo, usando a lei de Gauss, é possível considerar o sistema como a sobreposição de um cilindro maciço, de raio a e centro na origem, com carga volúmica ρ (Figura a) e um cilindro, de raio b e centro no ponto $(0, 2)$, com carga volúmica $-\rho$ (Figura b).]



9. Calcule o campo eléctrico produzido pela distribuição de carga (em unidades SI):

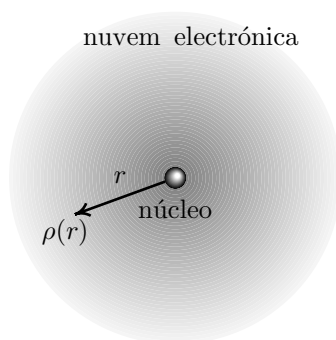
$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{0,05}{r^2} e^{-3r} & 0 \leq r \leq 0,1 \\ 0 & 0,1 < r \end{cases}$$

10. No átomo de hidrogénio, o electrão encontra-se em movimento muito rápido à volta do núcleo. O resultado médio no tempo é uma distribuição contínua de carga (**nuvem electrónica**) com carga volúmica

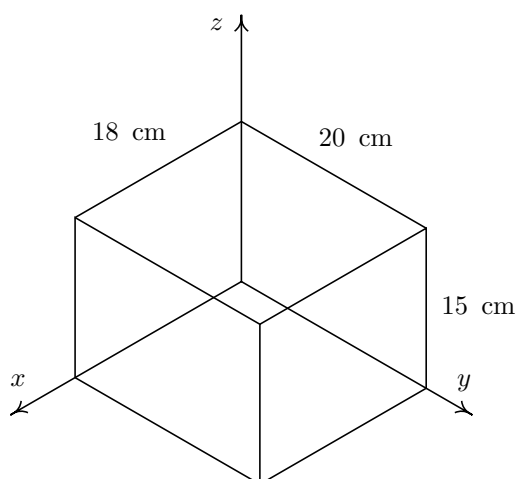
$$\rho(r) = -\frac{e}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

onde e é a carga elementar, a_0 uma constante aproximadamente igual a $5,3 \cdot 10^{-11}$ m, e r a distância desde o núcleo.

- (a) Mostre que a carga total da nuvem electrónica é igual à carga do electrão, $-e$.
 (b) Calcule o campo eléctrico produzido pela nuvem electrónica.
 (c) Calcule o campo total do átomo de hidrogénio. (Sugestão: o campo do núcleo é igual ao campo de uma partícula pontual de carga e , na origem.)



11. Calcule, em unidades SI, a carga total dentro do paralelepípedo representado na figura, sabendo que este se encontra dentro de um campo eléctrico paralelo ao eixo dos x e igual a $\mathbf{E} = 24x \mathbf{i}$.



- 12.** Considere uma esfera condutora de raio b , com carga total igual a zero. A esfera tem uma cavidade esférica de raio a centrada no seu interior. Uma carga pontual q é colocada no centro da cavidade.
- (a) Use a lei de Gauss e as propriedades dos condutores em equilíbrio para calcular o campo eléctrico em cada uma das regiões $r < a$, $a < r < b$ e $b < r$.
 - (b) Desenhe as linhas de campo eléctrico nesta situação.
 - (c) Descreva a distribuição de carga na superfície externa da esfera. Como seria alterada esta distribuição de carga se a carga pontual na cavidade fosse deslocada do centro? Desenhe as linhas de campo eléctrico nesse caso.
- 13.** Uma esfera de raio a , tem uma carga total q distribuída de tal forma que a carga volúmica é $\rho = Ar$, onde A é uma constante e r a distância ao centro da esfera.
- (a) Calcule o valor da constante A em função da carga q .
 - (b) Calcule o campo eléctrico no interior e no exterior da esfera, e faça o gráfico do módulo do campo E em função de r .
- 14.** Um cilindro muito comprido de raio b tem uma carga volúmica

$$\rho(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \rho_0 & a \leq r \leq b \end{cases}$$

onde r é a distância ao eixo do cilindro e ρ_0 é uma constante. Calcule o campo eléctrico em qualquer ponto do espaço, em função de ρ_0 , a e b .

Conceitos básicos

- Trabalho e energia mecânica
- Força conservativa
- Potencial electrostático
- Vector gradiente
- Superfícies equipotenciais

Alessandro Volta



(1745-1827)

Alessandro Volta nasceu em Como, Itália. Em 1780, Volta mostrou que a origem da corrente eléctrica, descoberta por Luigi Galvani, não estava nos seres vivos mas sim no contacto entre dois metais diferentes num meio ionizado. Volta contrariava assim as afirmações de Galvani apoiadas em experiências com órgãos de animais e electricidade. Decorrente destas suas investigações construiu as primeiras pilhas químicas no final do século XVIII, marcando o início do estudo da electricidade e dos circuitos eléctricos. Estes estudos foram as bases do rápido desenvolvimento da teoria electromagnética nas décadas seguintes. Volta também descobriu e isolou o gás metano e inventou o electróforo, aparelho que permite produzir cargas electrostáticas por atrito. Em 1801 fez uma demonstração da pilha química a Napoleão, que o condecorou com o título de conde. Foi director da Faculdade de Filosofia da Universidade de Pádua.

Potencial eléctrico

3.1 Trabalho e energia

Depois de termos estudado o campo eléctrico nos capítulos anteriores, interessa-nos agora determinar o efeito que este campo terá sobre o movimento de partículas com carga. O problema fundamental da mecânica consiste na determinação da trajectória dos objectos, conhecidas as forças que sobre eles actuam, ou o problema inverso, o do cálculo das forças que actuam a partir da observação do movimento do objecto. A trajectória de uma partícula define-se por meio do vector posição, \mathbf{r} , em função do tempo (Figura 3.1). A relação entre força e trajectória é dada pela segunda lei de Newton:

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}. \quad (3.1)$$

Se a força for constante, ou só depender do tempo, esta equação será fácil de integrar. No entanto, no caso de campos de força, \mathbf{F} é função da posição e a forma usual de resolver a equação de movimento consiste em calcular primeiro a velocidade em função da posição. Começamos por integrar os dois lados da equação, em função do deslocamento vectorial $d\mathbf{r}$, ao longo de um percurso qualquer entre os pontos A e B:

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \int_A^B \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.2)$$

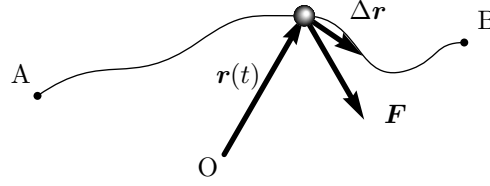


Figura 3.1: Vector posição \mathbf{r} , deslocamento vectorial $\Delta\mathbf{r}$ e força sobre uma partícula.

O termo no integral do lado direito da equação pode ser escrito só em função da velocidade:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} d(v^2); \quad (3.3)$$

assim, o integral de linha de \mathbf{F} pode ser calculado em função da velocidade escalar v :

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \int_A^B \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2, \quad (3.4)$$

e define o **trabalho** entre os pontos A e B:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.5)$$

Sabendo que a **energia cinética** é definida por

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2, \quad (3.6)$$

e considerando as Equações (3.4) e (3.5) obtemos o chamado **teorema do trabalho e da energia**:

$$\boxed{W_{AB} = E_k(B) - E_k(A)}. \quad (3.7)$$

O trabalho feito por uma força sobre uma partícula, ao longo de uma trajectória, é igual ao aumento da energia cinética da partícula.

Uma força diz-se **conservativa**, se o trabalho que realiza entre os pontos A e B é o mesmo, independentemente da trajectória entre os pontos (Figura 3.2). Neste caso é possível definir uma função E_p em cada ponto do espaço: começamos por definir arbitrariamente $E_p(A)$ num ponto A; o valor de $E_p(B)$, em qualquer outro ponto B, define-se a partir do trabalho feito pela força, entre os pontos A e B:

$$\boxed{E_p(A) - E_p(B) = W_{AB}}. \quad (3.8)$$

Desta forma a definição de $E_p(B)$ é consistente, já que o trabalho não depende do percurso

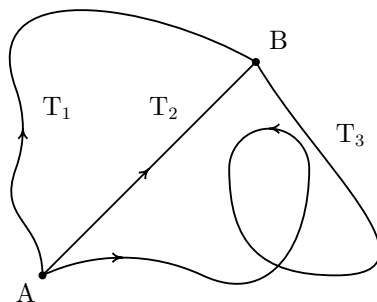


Figura 3.2: Três trajectórias diferentes entre os pontos A e B. Se a força for conservativa, o trabalho será o mesmo ao longo de qualquer uma delas.

de integração. A função E_p é a **energia potencial** associada à força conservativa. Combinando as Equações (3.4) e (3.8), obtém-se a **lei da conservação da energia mecânica**:

$$\boxed{E_k(A) + E_p(A) = E_k(B) + E_p(B)} . \quad (3.9)$$

A unidade usada para medir a energia, no sistema SI, é o joule ($1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$).

3.2 Diferença de potencial electrostático

Vamos agora demonstrar que o campo eléctrico é um campo conservativo, isto é, o trabalho realizado por um campo eléctrico sobre uma carga pontual é independente do percurso. Começamos por considerar o campo eléctrico mais simples, o campo produzido por uma carga pontual, e depois generalizaremos o resultado para campos mais complicados. O campo \mathbf{E} produzido por uma carga pontual q , na origem, é

$$\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{r} = \frac{kq}{r^2} (\mathbf{e}_r \cdot \Delta \mathbf{r}) . \quad (3.10)$$

Considerando o ângulo θ que o deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ forma com o versor \mathbf{e}_r (Figura 3.3), $\mathbf{e}_r \cdot \Delta \mathbf{r} = |\Delta \mathbf{r}| \cos \theta$ é aproximadamente igual a Δr . Assim, no limite $\Delta s \rightarrow 0$, $\mathbf{e}_r \cdot \Delta \mathbf{r} = dr$ e o trabalho feito pela força eléctrica sobre uma carga de prova q_0 é

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = kq_0q \int_A^B \frac{dr}{r^2} = kq_0q \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) . \quad (3.11)$$

Este resultado não depende da trajectória, mas somente da posição dos pontos A e B, o que implica que o campo eléctrico produzido por uma carga pontual é conservativo. Uma distribuição de cargas mais complexa pode ser simplificada se considerarmos que é igual à soma de pequenas cargas pontuais, sendo o resultado anterior válido para a

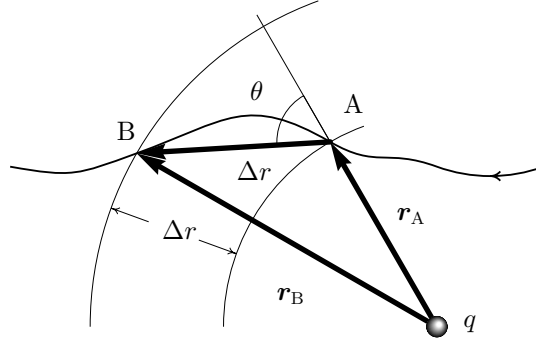


Figura 3.3: Um percurso entre dois pontos A e B, com posições \mathbf{r}_A e \mathbf{r}_B , relativas a uma carga pontual q . O deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ faz um ângulo θ com \mathbf{r}_A e a sua projecção sobre esse vector é $\Delta r = r_B - r_A$.

força produzida por cada carga, e portanto, para a força total. Por conseguinte, o campo eléctrico produzido por qualquer distribuição de carga é um campo conservativo¹.

Como o campo eléctrico é conservativo, podemos definir a energia potencial eléctrica de uma partícula pontual com carga q_0 . Aplicando a Equação (3.8), obtemos

$$E_p(A) - E_p(B) = q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.12)$$

Definimos **potencial eléctrico** como a energia potencial eléctrica por unidade de carga:

$$V = \frac{E_p}{q_0}. \quad (3.13)$$

Assim, independentemente da carga de prova, a diferença de potencial eléctrico entre os pontos A e B é

$$\boxed{V_A - V_B = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}. \quad (3.14)$$

A unidade SI de potencial eléctrico é o volt (V), em homenagem ao físico italiano Alessandro Volta. Sendo o potencial definido como uma energia por unidade de carga, a relação entre o volt, o joule e o coulomb é

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{C}}. \quad (3.15)$$

Outra unidade de energia usada frequentemente é o **electrão-volt** (eV) definido como a energia adquirida por uma carga elementar e ao passar através de uma região onde existe

¹Como veremos no Capítulo 10, as cargas eléctricas não são as únicas fontes do campo eléctrico; outra fonte do campo eléctrico é a indução electromagnética e, nesse caso, o campo não é conservativo.

uma diferença de potencial de 1 V:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot \text{V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} . \quad (3.16)$$

No caso de uma partícula pontual com carga q na origem, o potencial eléctrico, considerando a Equação (3.11), é dado por

$$\boxed{V = \frac{kq}{r}} . \quad (3.17)$$

De notar que nesta equação podíamos somar qualquer constante arbitrária, sem contrariar a Equação (3.11), mas normalmente considera-se que $V = 0$ para $r \rightarrow \infty$ e, por isso, não incluímos a constante.

Para deslocar uma carga de prova q_0 desde o ponto A até o ponto B, sem aceleração, é preciso aplicar uma força externa igual e oposta à força eléctrica. O trabalho feito pela força externa é, nestas condições:

$$W_{AB}(\text{externo}) = -W_{AB}(\text{eléctrico}) = q_0 V_B - q_0 V_A . \quad (3.18)$$

Se o ponto inicial A se encontrar a uma distância infinita, o potencial V_A será zero, por definição, e V_B será igual ao trabalho que a força externa tem de fazer para trazer a carga $q_0 = 1$ desde o infinito até ao ponto B. O potencial eléctrico $V(\mathbf{r})$ é igual ao trabalho que deve ser feito para trazer uma unidade de carga positiva, desde o infinito até à posição \mathbf{r} .

O potencial $V(\mathbf{r})$ constitui um campo escalar. Em cada ponto do espaço existe um valor numérico (escalar) do potencial.

3.3 Gradiente do potencial

A Equação (3.14) define o potencial eléctrico associado a um determinado campo eléctrico. O problema inverso, que abordaremos agora, é como calcular o campo eléctrico dado um determinado potencial eléctrico.

A diferença de potencial $\Delta V = V_B - V_A$ entre dois pontos A e B é dada pelo integral de linha do campo eléctrico, desde A até B, multiplicado por -1 . Como o integral pode ser calculado ao longo de qualquer percurso desde A até B, podemos usar o segmento de recta entre A e B (Figura 3.4). Quando os dois pontos se encontram muito perto um do outro, e admitindo que o campo \mathbf{E} é constante, podemos calcular o integral facilmente:

$$\Delta V \approx -\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{r} , \quad (3.19)$$

onde $\Delta \mathbf{r}$ é o deslocamento desde A até B, com módulo igual ao deslocamento escalar Δs . A aproximação torna-se exacta no limite $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} , \quad (3.20)$$

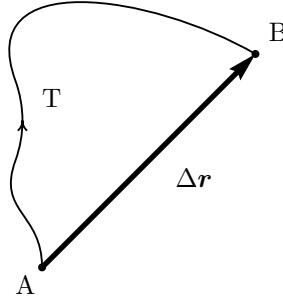


Figura 3.4: Se a força é conservativa, o trabalho ao longo de qualquer percurso entre A e B pode ser calculado facilmente ao longo do vector $\Delta \mathbf{r}$.

sendo \mathbf{e} o versor na direcção de $\Delta \mathbf{r}$. Este limite constitui a definição da derivada direccional de uma função de várias variáveis, neste caso V , na direcção definida pelo versor \mathbf{e} . Temos então, o resultado importante

$$\left(\frac{dV}{ds} \right)_{\mathbf{e}} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}. \quad (3.21)$$

A derivada do potencial eléctrico, em qualquer direcção \mathbf{e} , é igual a menos a componente do campo eléctrico nessa direcção.

Por simplicidade, consideremos que os pontos A e B estão num plano paralelo ao plano xy . As projecções do deslocamento sobre os eixos x e y são $\Delta s \cos \theta_x$ e $\Delta s \cos \theta_y$, onde θ_x e θ_y são os ângulos que o versor \mathbf{e} faz com os versores \mathbf{i} e \mathbf{j} , respectivamente (Figura 3.5). O aumento do potencial (ΔV) desde A até B é igual à soma dos aumentos do potencial desde A até C, e desde C até B.

No limite $\Delta s \rightarrow 0$, se V for uma função contínua, o aumento de V , desde C até B, pode ser aproximado pelo aumento desde A até D (Figura 3.5). Os aumentos de V , por unidade de deslocamento, nas direcções AC e AD, são as derivadas parciais de V em ordem a x e

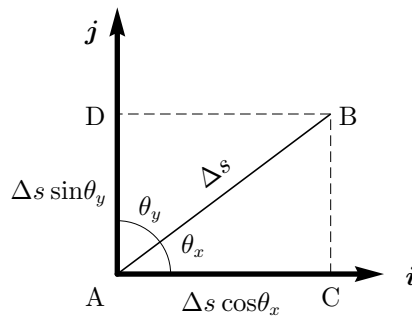


Figura 3.5: Projecções do deslocamento Δs sobre os eixos x e y .

a y , respectivamente. Assim, temos

$$\Delta V \approx \Delta s \cos \theta_x \frac{\partial V}{\partial x} + \Delta s \cos \theta_y \frac{\partial V}{\partial y} . \quad (3.22)$$

Como $\cos \theta_x = \mathbf{i} \cdot \mathbf{e}$ e $\cos \theta_y = \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}$, a derivada na direcção de \mathbf{e} é

$$\left(\frac{dV}{ds} \right)_e = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} \right) \cdot \mathbf{e} . \quad (3.23)$$

O cálculo anterior pode ser facilmente generalizado ao caso de três dimensões, e obtemos o resultado:

$$\left(\frac{dV}{ds} \right)_e = (\nabla V) \cdot \mathbf{e} , \quad (3.24)$$

onde o vector **gradiente do potencial** ∇V é definido como:

$$\boxed{\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}} . \quad (3.25)$$

O resultado obtido é válido para qualquer campo escalar: a derivada direcciona de um campo escalar (função de várias variáveis) contínuo é igual ao produto escalar entre o seu gradiente e o versor que define a direcção. A Equação (3.25) define o gradiente em coordenadas cartesianas, mas, como o produto escalar é independente do sistema de coordenadas, a Equação (3.24) permite definir o gradiente em qualquer sistema de coordenadas.

No caso particular do potencial electrostático, como vimos (Equação 3.21), a derivada direcciona é também igual ao produto escalar entre $-\mathbf{E}$ e o versor \mathbf{e} ; obtemos, assim, a relação que permite calcular o campo eléctrico a partir do potencial:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} . \quad (3.26)$$

O valor máximo do produto escalar $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}$ é igual ao módulo de \mathbf{E} , e obtém-se quando o versor \mathbf{e} tiver a direcção do campo eléctrico. Assim, dado um potencial V , o campo eléctrico será na direcção em que o potencial diminuir mais rapidamente, e o módulo do campo será igual ao valor absoluto da derivada nessa direcção.

As linhas de campo eléctrico estão sempre orientadas desde pontos de maior potencial para pontos de menor potencial. Uma vez que uma linha de campo passe por um ponto com um determinado potencial, não pode voltar a passar por pontos com um potencial igual ou superior. Esta é a razão pela qual as linhas de campo eléctrico nunca podem ser fechadas.

Em coordenadas cartesianas, e considerando a Equação (3.26), as três componentes do campo eléctrico, em função do potencial, são

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (3.27)$$

A partir destas equações é fácil ver que as derivadas cruzadas do campo eléctrico devem ser iguais:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (3.28)$$

A igualdade entre as derivadas cruzadas do campo eléctrico é consequência directa da sua natureza conservativa; assim, uma forma rápida de descobrir se um campo vectorial qualquer é conservativo ou não, consiste em verificar a igualdade das suas derivadas cruzadas.

Exemplo 3.1

O campo eléctrico numa região do espaço tem a forma

$$E_x = \frac{E}{A}(x - y), \quad E_y = -\frac{E}{A}(x + y), \quad E_z = 0,$$

onde A e E são duas constantes. Calcule o potencial num ponto qualquer dentro da região. (Admita $V = 0$ na origem.)

Antes de calcular o potencial, convém verificar se o campo é conservativo, isto é, se

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{E}{A}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0.$$

Existem duas formas de calcular o potencial electrostático. A primeira consiste em calcular o integral de linha do campo; como o potencial é zero na origem, O , o potencial num ponto qualquer P é dado pelo integral

$$V_P = - \int_O^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Usando o percurso representado na Figura 3.6, composto por três segmentos de recta paralelos aos eixos, o integral de linha do campo é igual a:

$$V_P = - \int_0^x E_x(x, 0, 0) dx - \int_0^y E_y(x, y, 0) dy - \int_0^z E_z(x, y, z) dz;$$

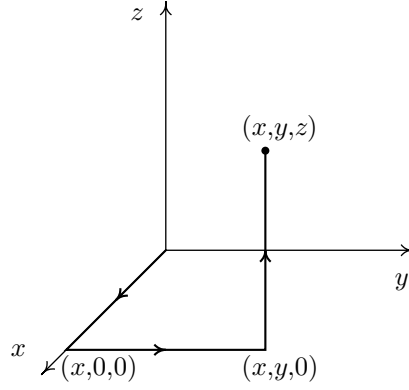


Figura 3.6: Percurso de integração entre a origem e um ponto P.

calculando os integrais, obtemos

$$V_P = -\frac{E}{A} \left[\int_0^x x \, dx - \int_0^y (x+y) \, dy \right] = \frac{E}{2A} (y^2 + 2xy - x^2) .$$

O segundo método para calcular o potencial eléctrico consiste em escrever as três coordenadas do campo em função do potencial:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{E}{A}(y-x) , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{E}{A}(x+y) , \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 , \quad (3.29)$$

e resolver o sistema de equações diferenciais. A terceira equação implica que V não depende de z : $V = V(x, y)$. Integrando a primeira equação em ordem a x obtemos

$$V(x, y) = \frac{E}{A} \int (y-x) \, dx = \frac{E}{A} \left(yx - \frac{x^2}{2} \right) + g(y) ,$$

onde $g(y)$ é qualquer função arbitrária que só depende de y . A derivada parcial de $V(x, y)$ em ordem a y é, então:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{E}{A}x + \frac{dg}{dy} ,$$

e igualando à segunda equação no sistema de equações (3.29), obtemos

$$g = \frac{E}{2A}y^2 + C_1 ,$$

onde C_1 é uma constante arbitrária.

O potencial é pois

$$V(x, y) = \frac{E}{2A}(y^2 + 2xy - x^2) + C_1 .$$

O valor da constante deve ser zero, se queremos que V seja nulo na origem. ■

Exemplo 3.2

Encontre as coordenadas esféricas do gradiente. Use o resultado para demonstrar que se o potencial depende unicamente da distância à origem, $V = f(r)$ (sistemas com simetria esférica), o campo eléctrico é $\mathbf{E} = -f' \mathbf{e}_r$.

Usando a Equação (3.24), vemos que as três coordenadas esféricas do gradiente são

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\mathbf{e}_r}, \quad \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\mathbf{e}_\theta}, \quad \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\mathbf{e}_\phi},$$

onde os versores \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_ϕ definem a direcção em que cada coordenada (r, θ, ϕ) aumenta (ver Apêndice A). Assim, o gradiente é igual a

$$\nabla V = \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\mathbf{e}_r} \mathbf{e}_r + \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\mathbf{e}_\theta} \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{dV}{ds}\right)_{\mathbf{e}_\phi} \mathbf{e}_\phi .$$

O deslocamento ds , na direcção radial, é igual a dr . Na direcção \mathbf{e}_ϕ , em que unicamente ϕ aumenta, o deslocamento ds é um arco de círculo de raio r e ângulo igual a $d\phi$ e, portanto, $ds = r d\phi$. Na direcção \mathbf{e}_θ , em que unicamente θ aumenta, o deslocamento infinitesimal é também um arco de círculo de raio $r \sin \phi$ e ângulo igual a $d\theta$: $ds = r \sin \phi d\theta$. Substituindo na equação anterior, obtemos as coordenadas esféricas do gradiente:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta .$$

O potencial com simetria esférica $V = f(r)$ depende apenas de r e, portanto, as suas derivadas parciais em ordem a ϕ e θ são nulas; a derivada em ordem a r é uma derivada ordinária, f' . Nesse caso, o gradiente do potencial será

$$\nabla V = f' \mathbf{e}_r ,$$

e, pela Equação (3.26), obtemos

$$\mathbf{E} = -f' \mathbf{e}_r . \quad (3.30)$$

As linhas de campo eléctrico são na direcção radial, mantendo a simetria esférica. ■

3.4 Superfícies equipotenciais

Os pontos do espaço nos quais o potencial tem o mesmo valor formam uma superfície contínua chamada **equipotencial**. Em cada ponto do espaço o potencial V tem um certo

valor e, se o campo eléctrico é diferente de zero, existe uma única superfície equipotencial que passa pelo ponto.

Imaginemos um versor \mathbf{e} tangente à superfície equipotencial num ponto P (Figura 3.7). A derivada do potencial na direcção de \mathbf{e} é zero, pois o potencial não varia nessa direcção:

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\mathbf{e}} = 0; \quad (3.31)$$

logo $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e} = 0$ e portanto as linhas de campo eléctrico são perpendiculares às superfícies equipotenciais; as linhas apontarão para o lado da superfície equipotencial com menor potencial.

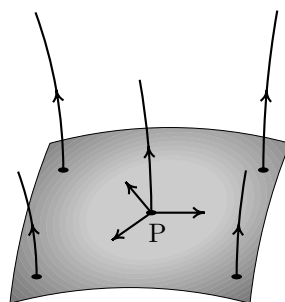


Figura 3.7: Linhas de campo e superfícies equipotenciais.

O potencial $V(x, y)$, sobre o plano xy , pode ser visualizado mais facilmente por meio de um gráfico onde o valor de V é representado no eixo z num sistema de eixos xyz (Figura 3.8). O potencial aparece como uma superfície geográfica com montanhas e vales. As curvas correspondentes a um determinado nível são as equipotenciais, e as linhas de campo são as trajectórias que a água seguiria ao descer pelas montanhas.

Os pontos críticos do potencial $V(x, y, z)$ — onde a derivada em qualquer direcção é nula — podem ser máximos, mínimos ou **pontos de sela**. Em todos estes pontos o campo eléctrico é igual a zero.

Nos pontos máximos, o potencial diminui em qualquer direcção e, portanto, as linhas de campo saem em todas as direcções, existindo uma distribuição de carga positiva na vizinhança do ponto (ponto P na Figura 3.8).

Nos pontos mínimos, o potencial aumenta em todas as direcções, e as linhas de campo apontam na direcção do ponto, existindo uma distribuição de carga negativa na região (ponto Q na Figura 3.8). Um exemplo é o potencial de um dipolo eléctrico (Figura 3.9); cada carga pontual é um ponto crítico onde $V \rightarrow \infty$ ou $V \rightarrow -\infty$, consoante a carga seja positiva ou negativa, respectivamente.

O terceiro tipo de pontos críticos, pontos de sela, são pontos onde o potencial aumenta em algumas direcções e diminui noutras, por exemplo, o ponto S na Figura 3.8. Nos pontos de sela existe um cruzamento de curvas equipotenciais e o campo eléctrico é nulo; no Capítulo 1 já vimos que nesses pontos entram e saem linhas de campo eléctrico.

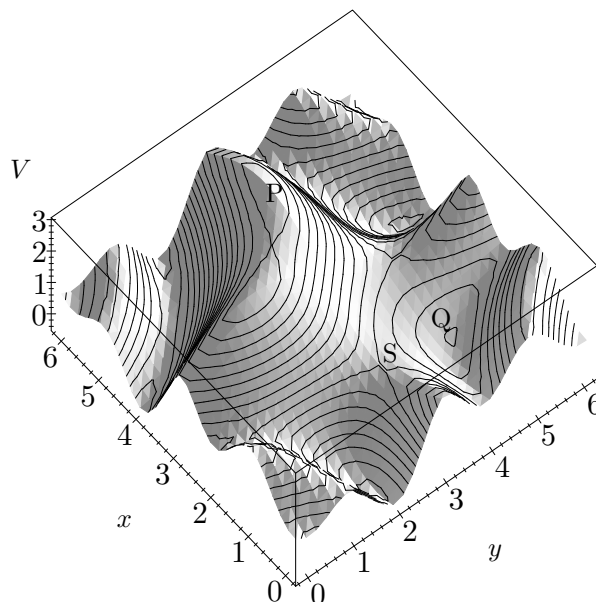


Figura 3.8: O potencial no plano xy pode ser convenientemente representado num gráfico a 3 dimensões. As regiões onde existe carga positiva ou negativa aparecem como montanhas e vales, respectivamente.

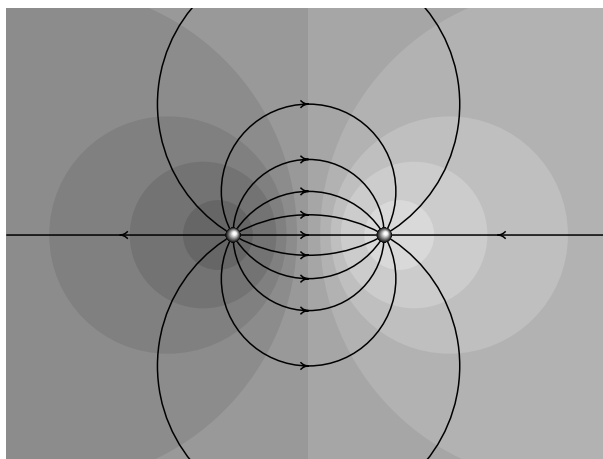


Figura 3.9: Superfícies equipotenciais (esferas cinzentas) e linhas de campo eléctrico (linhas pretas) de um dipolo eléctrico; as superfícies equipotenciais são perpendiculares às linhas de campo.

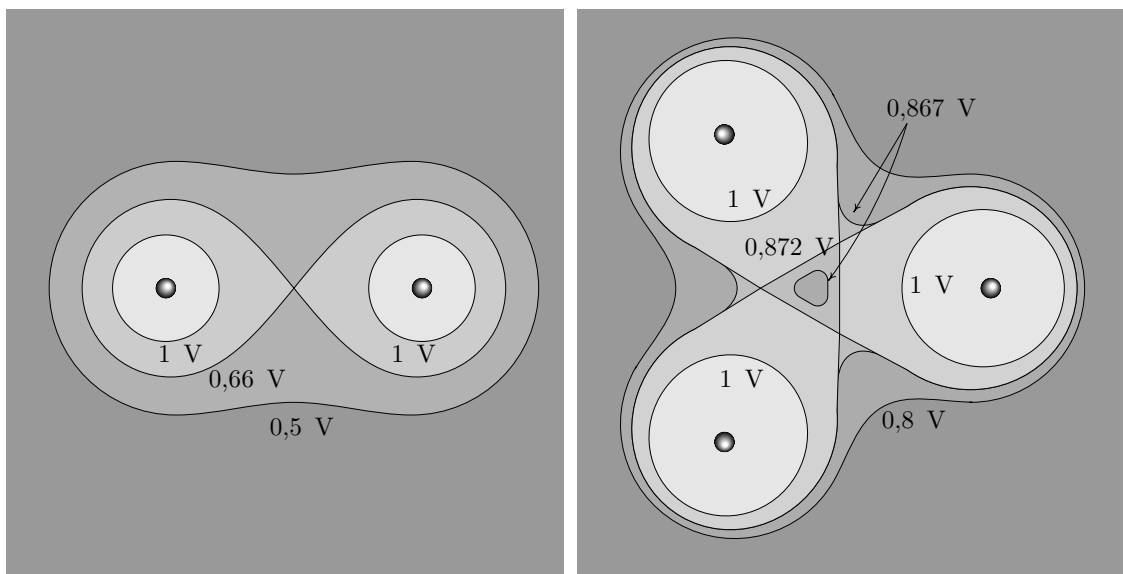


Figura 3.10: Dois exemplos de potenciais com pontos de sela.

À esquerda duas cargas iguais, com um ponto de sela no meio, e à direita o potencial de três cargas iguais, com quatro pontos de sela.

Dois outros exemplos de pontos de sela são apresentados na Figura 3.10. O primeiro exemplo corresponde ao potencial de um sistema de duas cargas iguais; existe um ponto de sela no ponto equidistante às duas cargas, onde as duas superfícies equipotenciais se cruzam. O segundo exemplo é o potencial de três cargas idênticas localizadas nos vértices de um triângulo equilátero; existem quatro pontos de sela onde o campo eléctrico é nulo; três dos pontos de sela são óbvios na Figura 3.10. O quarto ponto é o ponto equidistante às três cargas, onde também existe intersecção de duas superfícies equipotenciais (como as duas superfícies se cruzam em direcções fora do plano xy não aparecem na figura). Sobre o plano xy o potencial no ponto equidistante às três cargas é, como mostra a figura, menor que em qualquer outro ponto na sua vizinhança, o que não implica que o ponto seja um mínimo, já que na direcção z o potencial diminui.

Podem também existir regiões do espaço onde o campo é nulo, sendo o potencial constante em toda a região. Nesse caso temos um **volume equipotencial**; um exemplo é o volume dentro de um condutor em equilíbrio electrostático.

Exemplo 3.3

Encontre o campo eléctrico e as superfícies equipotenciais correspondentes ao potencial $V(x, y, z) = az$, com $a = 4 \text{ V/m}$.

A equação das superfícies equipotenciais é $az = \text{constante}$, a qual representa planos paralelos ao plano xy . Por exemplo, as superfícies equipotenciais com $V = 0 \text{ V}$, 1 V e 2 V , são os planos $z = 0$, $z = 25 \text{ cm}$ e $z = 50 \text{ cm}$ representados na Figura 3.11. O campo eléctrico é uniforme:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} = -4 \mathbf{k} \text{ V/m}.$$

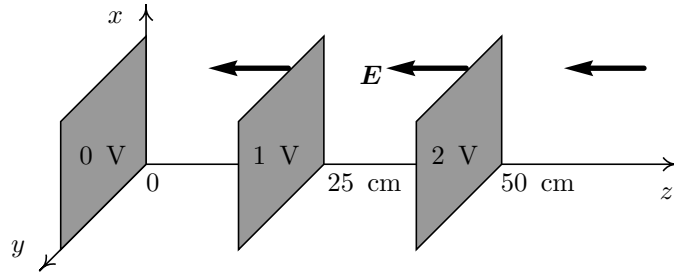


Figura 3.11: Equipotenciais de um campo uniforme. ■

3.5 Cálculo do potencial eléctrico

Para calcular o potencial produzido por uma distribuição de carga, podemos dividir o volume em n pequenos elementos com carga Δq_i (Figura 3.12). O potencial calcula-se como a sobreposição dos potenciais produzidos por cada elemento, considerado como uma carga pontual. O potencial devido a cada pequeno elemento é dado, aproximadamente, pela Equação (3.17). A aproximação será exacta no limite $n \rightarrow \infty$ ($\Delta q_i \rightarrow 0$), e o resultado obtido é

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k \Delta q_i}{r_i}, \quad (3.32)$$

onde Δq_i é a carga dentro do elemento número i , e \mathbf{r}_i é o vector que une o ponto onde se encontra a carga Δq_i ao ponto onde se pretende calcular o campo.

Como já vimos no caso do campo eléctrico (Secção 1.5), a carga pode estar distribuída num volume com carga volúmica ρ , sobre uma superfície com carga superficial σ , ou ao longo de uma curva com carga linear λ .

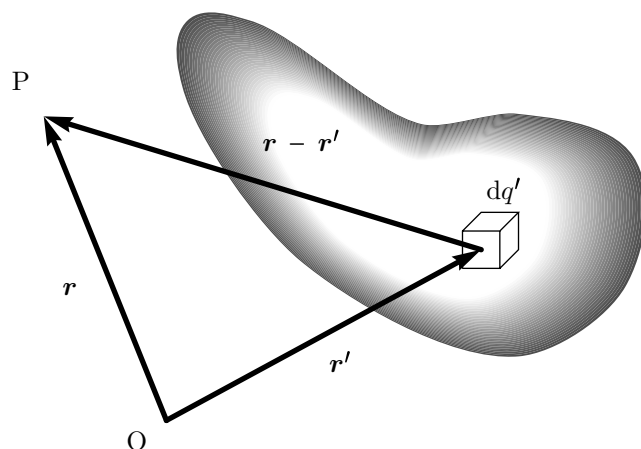


Figura 3.12: Um volume com distribuição contínua de carga pode ser dividido em pequenos elementos para calcular o potencial em P.

No caso de uma carga distribuída dentro de um volume, o potencial é um integral de volume:

$$V = k \iiint_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' , \quad (3.33)$$

onde \mathbf{r}' varia dentro da região de integração.

Se a carga estiver distribuída sobre uma superfície, o potencial será um integral de superfície:

$$V = k \iint_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dA' . \quad (3.34)$$

Finalmente, se a carga estiver distribuída sobre uma curva, o potencial será calculado através de um integral de linha:

$$V = k \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' . \quad (3.35)$$

Os integrais que definem o potencial são semelhantes aos integrais usados para calcular o campo (Capítulo 1). No entanto, é preciso calcular um integral e não três (para as três componentes) como no caso do campo eléctrico. Para calcular o campo eléctrico de distribuições de carga é mais fácil calcular primeiro o potencial por integração, e obter o campo a partir do gradiente do potencial. Quando for possível calcular o campo eléctrico usando a lei de Gauss, é mais conveniente calcular o potencial a partir do campo, através da Equação (3.14), usando qualquer percurso de integração.

Exemplo 3.4

Calcule o potencial e o campo eléctrico devidos a uma esfera condutora de raio a , com carga Q .

Como a esfera é condutora, a carga distribuir-se-á na superfície. Vamos calcular o potencial a partir da carga superficial, por meio do integral duplo da Equação (3.34). Por simetria, a carga superficial deve ser constante:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2} .$$

Podemos escolher o eixo z na direcção do ponto P onde se pretende calcular o potencial, e usar coordenadas esféricas (Figura 3.13).

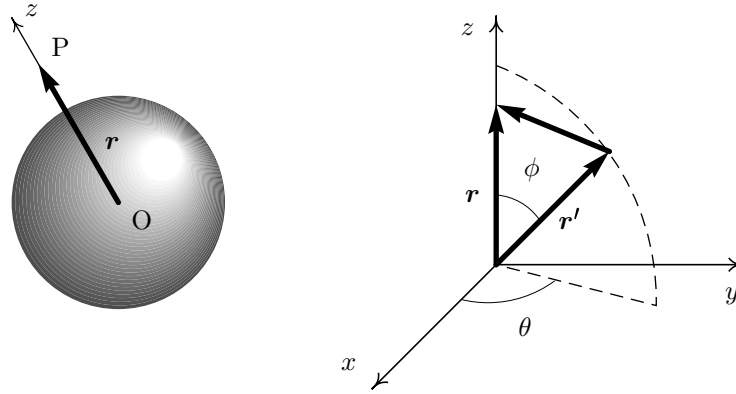


Figura 3.13: Coordenadas esféricas.

O ponto P encontra-se na posição $\mathbf{r} = r \mathbf{k}$ e o vector \mathbf{r}' , que define qualquer ponto sobre a superfície da esfera, tem módulo constante igual a a e forma um ângulo ϕ com o vector \mathbf{r} , de maneira que

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi)^{1/2} . \quad (3.36)$$

Em coordenadas esféricas, o elemento diferencial de superfície sobre a esfera é

$$dA = a^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi ,$$

e o integral do potencial é

$$V = \frac{kQ}{4\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin \phi (a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi)^{-1/2} \, d\theta \, d\phi ;$$

o integral em θ é igual a 2π , logo obtemos

$$V = \frac{kQ}{2} \int_0^\pi \sin \phi (a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi)^{-1/2} d\phi .$$

A primitiva calcula-se facilmente, já que a derivada do termo entre parênteses é igual a $2ar \sin \phi$:

$$V = \frac{kQ}{2ar} \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi} \Big|_{\phi=0}^{\phi=\pi} = \frac{kQ}{2ar} (a + r - |a - r|) .$$

Se o ponto P estiver no interior da esfera $|a - r| = a - r$, e o potencial é constante:

$$V = \frac{kQ}{a} .$$

Para pontos no exterior da esfera $|a - r| = r - a$, e o potencial é

$$V = \frac{kQ}{r} .$$

No interior da esfera, como o potencial é constante, o campo eléctrico é nulo (Figura 3.14). No exterior da esfera, como o potencial só depende de r , podemos usar o resultado do Exemplo 3.2 para calcular o campo:

$$\mathbf{E} = -\frac{dV}{dr} \mathbf{e}_r = \frac{kQ}{r^2} \mathbf{e}_r .$$

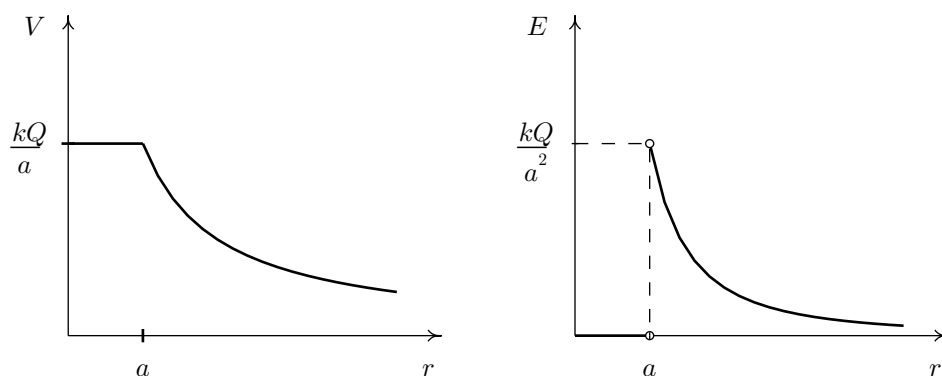


Figura 3.14: Potencial e campo eléctrico de uma esfera condutora.

No interior o potencial é constante e o campo eléctrico é nulo. ■

O exemplo anterior podia também ser resolvido por outro método: calcular primeiro o campo por meio da lei de Gauss, e a partir do campo obter o potencial por meio de um integral de linha. O exemplo seguinte ilustra esse método.

Exemplo 3.5

Calcule o potencial produzido por um cilindro muito comprido, de raio R , com carga volúmica ρ constante.

Neste caso calcularemos primeiro o campo eléctrico e a partir dele o potencial. As linhas de campo eléctrico têm que sair na direcção radial (simetria cilíndrica) e qualquer cilindro co-axial ao cilindro carregado constitui uma superfície gaussiana (Figura 3.15).

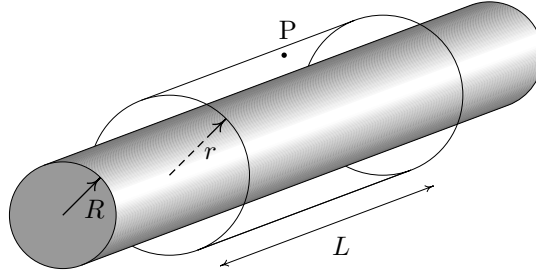


Figura 3.15: Cilindro muito comprido e superfície gaussiana.

O fluxo através da superfície gaussiana é

$$\phi = 2\pi r L E ,$$

onde L e r são o comprimento e o raio do cilindro gaussiano, respectivamente. A carga no interior da superfície gaussiana é

$$q_{\text{int}} = \begin{cases} \pi R^2 L \rho , & r \leq R \\ \pi r^2 L \rho , & r > R . \end{cases}$$

Usando a lei de Gauss obtemos o campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{2\pi k \rho R^2}{r} \mathbf{e}_r , & r \geq R \\ 2\pi k \rho r \mathbf{e}_r , & r \leq R . \end{cases}$$

Se escolhermos $V = 0$ sobre o eixo do cilindro, $r = 0$, o potencial será

$$V(s) = - \int_0^s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} .$$

Se o percurso de integração for o segmento de recta desde o eixo até ao ponto P, como o campo é radial, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E dr$, e o integral de linha será

$$\int_0^r E dr = \begin{cases} 2\pi k \rho R^2 \ln r, & r \geq R \\ \pi k \rho r^2, & r \leq R. \end{cases}$$

Para pontos no interior do cilindro, $r < R$, obtemos

$$V = - \int_0^r E dr = -\pi k \rho r^2,$$

enquanto que para pontos no exterior do cilindro, $r \geq R$, o resultado é

$$V = - \int_0^R E dr - \int_R^r E dr = -\pi k \rho R^2 - 2\pi k \rho R^2 (\ln r - \ln R).$$

Assim, o potencial em qualquer ponto é

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} -\pi k \rho r^2, & r \leq R \\ -2\pi k \rho R^2 \ln\left(\frac{\sqrt{e} r}{R}\right), & r \geq R. \end{cases} \quad \blacksquare \quad (3.37)$$

Se tivéssemos escolhido neste exemplo $V = 0$ para $r \rightarrow \infty$ obteríamos um integral do campo eléctrico divergente, uma vez que o campo eléctrico em $r \rightarrow \infty$ decresce lentamente (o cilindro é infinito). Em sistemas físicos mais realistas, sem cargas no infinito, já não existe este problema e o potencial pode ser sempre considerado nulo no infinito.

3.6 Potencial e carga nos condutores

O campo eléctrico na superfície de um condutor em equilíbrio é perpendicular à superfície, como já vimos no Capítulo 2. Como qualquer superfície perpendicular ao campo eléctrico é necessariamente uma equipotencial, concluimos que a superfície do condutor é sempre uma superfície equipotencial. Dentro do condutor o campo eléctrico é nulo, o que implica um potencial constante dentro do condutor (Figura 3.16).

Como também já vimos no Capítulo 2, num condutor em equilíbrio, qualquer excesso de carga distribui-se sempre sobre a superfície; não obstante, a distribuição de carga não pode ser uniforme como veremos já a seguir. Consideremos primeiro três condutores diferentes com a mesma carga superficial σ , como se mostra na Figura 3.17. Um dos condutores é plano, o outro convexo e o último é côncavo. Nos três casos a separação das linhas de campo sobre a superfície deve ser a mesma, e o campo é igual nos três casos quando a distância d a partir da superfície for igual a zero. À medida que d aumenta, como as

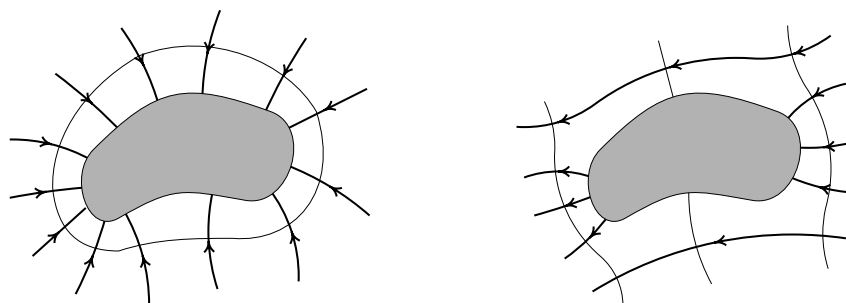


Figura 3.16: Um condutor carregado e um condutor sem carga total, dentro de um campo eléctrico. As linhas mais finas são as curvas equipotenciais.

linhas de campo são perpendiculares à superfície do condutor, a separação das linhas vai ser maior no caso do condutor convexo, e menor no caso do condutor côncavo; no caso do condutor côncavo, as linhas de campo acabam por se afastar à medida que d aumenta. Como o campo eléctrico é inversamente proporcional à distância entre as linhas de campo, o campo produzido pelos três condutores é o representado na Figura 3.17.

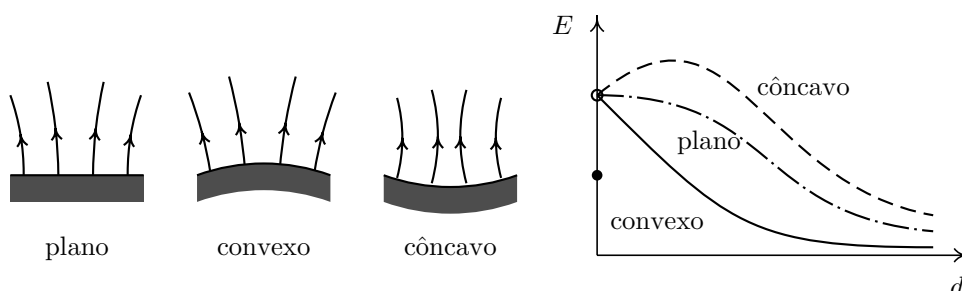


Figura 3.17: Três condutores com a mesma carga superficial e o campo produzido em função da distância d a partir da superfície.

O potencial de cada um dos condutores na Figura 3.17 obtém-se integrando o campo eléctrico desde a superfície ($d = 0$) até o infinito (onde $V = 0$). Na figura, os valores dos três potenciais correspondem às áreas abaixo das três curvas do campo eléctrico. Vemos, claramente, que o condutor côncavo se encontra a um potencial maior que o condutor plano, e estes dois condutores estão a um potencial maior que o condutor convexo.

Em pontos diferentes da superfície de um condutor, o potencial é sempre o mesmo. Portanto, a carga superficial não pode ser a mesma nos pontos onde o condutor é côncavo, convexo ou plano. A carga superficial tem que ser maior nas regiões convexas, menor nas regiões planas e ainda menor nas regiões côncavas. Desta forma obtém-se o mesmo valor para o integral do campo eléctrico, como se mostra na Figura 3.18.

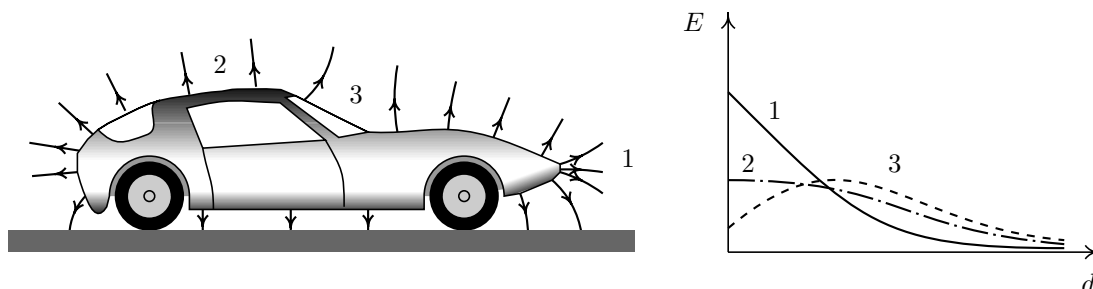


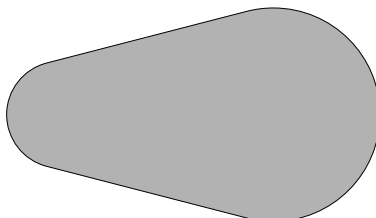
Figura 3.18: Um automóvel com carga superficial positiva. A carga superficial é maior nos pontos mais pontiagudos. No gráfico mostra-se o campo eléctrico em três pontos, em função da distância desde a superfície. A área abaixo das três curvas deve ser igual.

Nas regiões convexas, quanto menor for o raio da curvatura, maior será a carga superficial, e nas regiões côncavas quanto maior for o raio da curvatura, maior será a carga superficial. Este efeito é aproveitado nos pára-raios. Durante uma tempestade as nuvens acumulam cargas elevadas que, por sua vez, induzem cargas nos objectos que se encontram nas proximidades. Quando o campo é suficientemente forte ocorre uma descarga eléctrica entre a nuvem e o ponto onde o campo for mais elevado. Uma vez que o campo será mais forte onde houver maior carga induzida, ou seja, nos objectos mais pontiagudos e mais próximos das nuvens (os pára-raios), as descargas eléctricas atingirão o pára-raios, sendo conduzidas até à terra e minimizando os estragos.

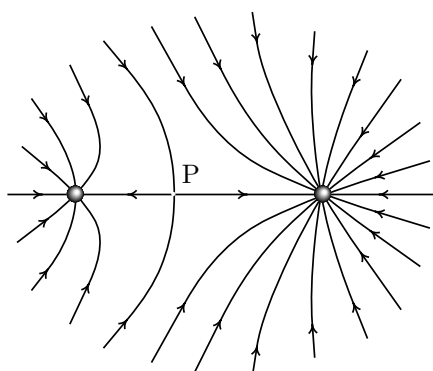
Problemas

- Quando um electrão é acelerado, a partir do repouso, através de uma diferença de potencial de 220 V, fica com uma energia cinética de 220 eV. Calcule a velocidade final do electrão.
- Num tubo de raios x os electrões são acelerados por meio de um campo eléctrico. Os electrões são libertados do repouso, deslocam-se no vácuo através de uma região onde existe uma diferença de potencial de 4 kV, e chocam com um alvo emitindo radiação x.
 - Calcule a energia e a velocidade com que chocam os electrões no alvo.
 - Se a variação de potencial se estender por uma distância de 8 dm, calcule o campo eléctrico (admitindo que o campo é uniforme).

3. Desenhe as linhas de campo eléctrico e as superfícies equipotenciais nas proximidades e nos pontos afastados do condutor representado na figura, admitindo que este tem uma carga q .



4. A figura representa as linhas de campo electrostático de duas partículas carregadas e separadas por uma distância de 7 cm.
- (a) Calcule a distância do ponto P às partículas.
- (b) Sabendo que a carga da partícula no lado direito é de -8 nC , calcule o potencial no ponto P (arbitre $V = 0$ no infinito).

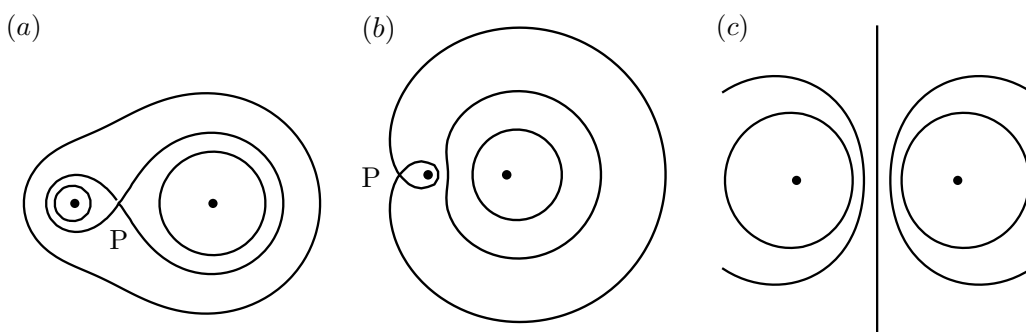


5. Duas superfícies condutoras esféricas e concêntricas têm raios de 5 cm e 7 cm. A superfície menor tem uma carga total de 3 nC e a carga total na superfície maior é de -2 nC . Qual é a diferença de potencial entre as duas superfícies?
6. O potencial sobre o plano xy é

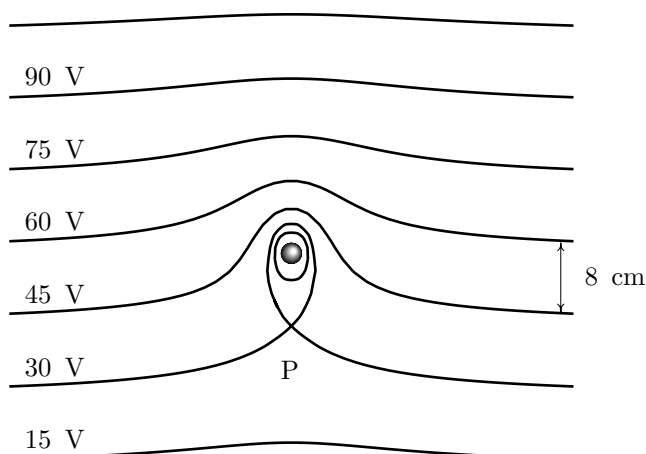
$$V = \frac{ax}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{b}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Calcule o campo eléctrico em qualquer ponto no plano xy .

7. Demonstre que o campo vectorial $A\mathbf{r}$, em que A é uma constante e \mathbf{r} o vector posição, é conservativo. Calcule o potencial correspondente ao campo.
8. Nos três desenhos que se seguem, representam-se as superfícies equipotenciais de três sistemas de duas cargas pontuais q_1 e q_2 . Em todos os casos $q_1 = 3 \text{ nC}$, e a distância entre as duas cargas é 6 cm. Nos desenhos (a) e (b) a distância entre o ponto P e a carga q_1 é igual a 2 cm. Calcule q_2 nos três casos.



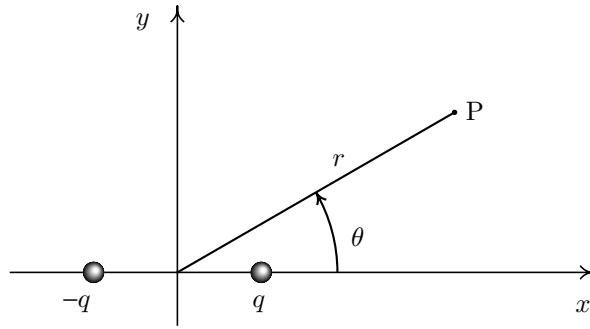
9. A figura mostra as superfícies equipotenciais de uma carga pontual no interior de um campo eléctrico uniforme \mathbf{E}_{ext} . A grandes distâncias da carga pontual as superfícies são planos paralelos distanciados 8 cm.
- (a) Calcule o módulo e a direcção do campo externo \mathbf{E}_{ext} .
- (b) Diga se a carga pontual é positiva ou negativa. Justifique.
- (c) Qual é a direcção da força sobre a carga pontual?
- (d) Sabendo que a distância entre a carga pontual e o ponto P é 9 cm, calcule o valor da carga pontual.



10. Um dipolo eléctrico tem uma carga $+q$ na posição $(a/2)\mathbf{i}$, e uma carga $-q$ na posição $-(a/2)\mathbf{i}$.
- (a) Calcule o potencial V em qualquer ponto $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.
- (b) Calcule o campo eléctrico em qualquer ponto usando a equação $\mathbf{E} = -\nabla V$.
11. No dipolo do exemplo anterior, um ponto P sobre o plano do dipolo (plano xy) tem coordenadas polares r e θ , como se mostra na figura.
- (a) Calcule o potencial eléctrico no ponto P em função das coordenadas polares.
- (b) Para um valor fixo do ângulo θ e para $r \gg a/2$, mostre que uma boa aproximação para o potencial é

$$V \approx \frac{kp \cos \theta}{r^2}$$

onde $p = qa$ é o momento dipolar. (Sugestão: use a aproximação $r^2 + a^2/4 \approx r^2$ seguida da expansão do binómio de Newton.)



12. Um disco de raio R está uniformemente carregado com uma carga superficial σ . Calcule o potencial e o campo eléctrico num ponto P sobre o eixo do disco.
13. O campo eléctrico numa região do espaço é igual a

$$\mathbf{E} = C[(x-1)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x\mathbf{k}]e^{-x-y-z}$$

onde $C = 5 \text{ V/cm}$, e as coordenadas x , y e z são medidas em centímetros.

- (a) Demonstre que o campo \mathbf{E} é conservativo.
- (b) Calcule o potencial electrostático.
- (c) Determine a carga total dentro do cubo definido por $0 \leq x \leq 2 \text{ cm}$, $0 \leq y \leq 2 \text{ cm}$ e $0 \leq z \leq 2 \text{ cm}$. (Sugestão: calcule o fluxo eléctrico nas seis faces do cubo e aplique a lei de Gauss.)

14. Calcule o campo eléctrico associado ao potencial

$$V(r, \theta, \phi) = \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{b}{r^2}$$

onde a e b são constantes, e (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas.

15. Calcule as coordenadas cilíndricas do gradiente do potencial. Use o resultado para calcular o campo eléctrico correspondente ao potencial

$$V(R, \theta, z) = \frac{\sin \theta}{R} \exp(-z^2)$$

16. Determine as condições que deverão cumprir as componentes esféricas de um campo vectorial, para que seja um campo conservativo.

Conceitos básicos

- Divergência e rotacional
- Teoremas da divergência e de Stokes
- Laplaciano
- Equação de Poisson
- Equação de Laplace

George Green (1793-1841)

Não existem retratos deste físico e matemático inglês. Uma vez que passou a maior parte da sua vida a trabalhar no moinho de seu pai em Notingham, e que só frequentou dois anos do ensino elementar, não é claro como aprendeu a matemática. Com 30 anos, Green tornou-se membro da *Subscription Library*, Notingham, instituição fundada em 1816 e que tinha como objectivo ser um ponto de reunião de não-acadêmicos para discutir os avanços da ciência. Aos 35 anos publicou a primeira e mais importante obra sobre a aplicação da análise matemática à teoria da electricidade e ao magnetismo. Esta obra, de tiragem bastante reduzida, foi financiada pelo autor e por alguns membros da *Subscription Library*. Foi a primeira pessoa a usar o termo **potencial** na teoria do campo e introduziu vários teoremas de análise vectorial que permitiram calcular o potencial electrostático. Com 40 anos ingressou na Universidade de Cambridge como estudante de licenciatura. Seis anos depois, saiu de Cambridge e voltou a Notingham para tomar conta dos seus filhos e trabalhar no seu moinho. Posteriormente William Thomson (Lord Kelvin), descobriu o trabalho de Green e conseguiu que fosse publicado num jornal importante (1850 e 1854). Nessa altura, outros cientistas, entre eles Gauss, e de forma independente, tinham chegado a alguns dos resultados obtidos por Green. O trabalho de Green teve grande influência em Thomson, Stokes e Maxwell.

Equações fundamentais da electrostática

Para calcular a interacção electrostática entre objectos com carga, introduzimos no Capítulo 1 o campo eléctrico como mediador da força eléctrica. Os três primeiros capítulos têm apresentado diferentes métodos para calcular o campo eléctrico de uma distribuição de carga. Vimos que em alguns casos simples podemos aproveitar a lei de Gauss para calcular o campo, mas, em geral, a lei de Gauss não é útil, e o único método geral consiste em calcular o integral que define o campo, ou o potencial, em função da carga volúmica. Veremos as limitações desse método e introduziremos as equações mais fundamentais da electrostática que permitem o cálculo do campo eléctrico em situações práticas.

4.1 Limitações da lei de Coulomb

O potencial devido a uma carga distribuída dentro de um volume, com carga volúmica $\rho(\mathbf{r}')$, é dado pelo integral

$$V(\mathbf{r}) = k \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (4.1)$$

O integral tem de ser calculado sobre todo o espaço onde exista carga e, portanto, é preciso conhecer a carga volúmica em todos os pontos \mathbf{r}' onde $\rho \neq 0$, e não só nos pontos \mathbf{r} onde nos interessa calcular o campo. Em problemas práticos só temos informação acerca de uma determinada região, e esperamos poder calcular o campo pelo menos dentro dessa região.

Por exemplo, suponha que temos uma carga pontual q dentro de uma caixa metálica (Figura 4.1) e queremos calcular o campo eléctrico dentro da caixa. Sabemos que a única carga existente dentro da caixa é a carga q e que as linhas de campo dentro da caixa não correspondem às linhas de campo de uma carga pontual pois, como já vimos, as linhas de campo devem ser perpendiculares à superfície metálica. É claro que neste problema existem outras cargas induzidas na superfície metálica, as quais não podemos calcular facilmente; além disso podem existir outras cargas no exterior da caixa metálica. Existe um método que permite calcular o campo eléctrico no interior da caixa, sem precisar de qualquer informação sobre o que se passa no exterior, nem da carga induzida, sendo apenas necessário conhecer algumas condições na fronteira.

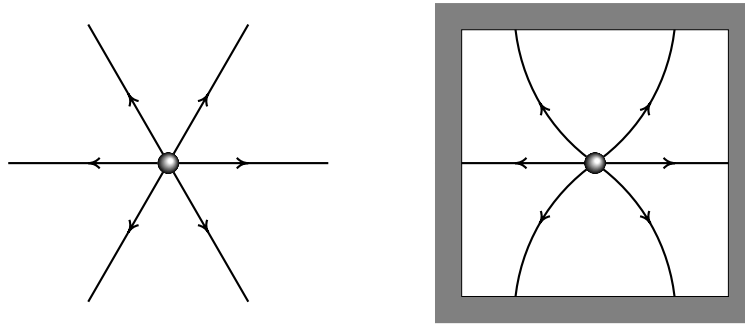


Figura 4.1: Campo eléctrico de uma carga pontual livre e de uma carga pontual dentro de uma caixa metálica.

4.2 Divergência

Uma função associada a qualquer campo vectorial é a chamada **divergência**, definida como o **fluxo por unidade de volume** num ponto. Consideremos um campo vectorial qualquer \mathbf{F} e as suas coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + F_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + F_z(\mathbf{r})\mathbf{k} . \quad (4.2)$$

Consideremos também o paralelepípedo da Figura 4.2 de arestas Δx , Δy e Δz definido pelas condições:

$$|x - x_0| < \Delta x , \quad |y - y_0| < \Delta y , \quad |z - z_0| < \Delta z . \quad (4.3)$$

Queremos calcular o fluxo do campo \mathbf{F} através da superfície fechada do paralelepípedo. Para facilitar o cálculo, numeremos as seis faces de forma que a soma dos números em faces opostas seja sempre 7, como se fosse um dado (ver Figura 4.2). Por exemplo, a face número 1 é formada por todos os pontos (x, y, z) com $x = (x_0 + \Delta x)$ constante e (y, z)

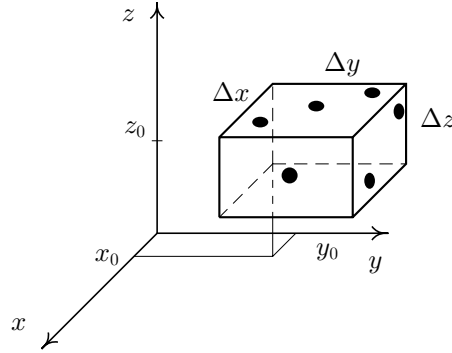


Figura 4.2: Paralelepípedo com as suas 6 faces numeradas à semelhança de um dado.

variando nos intervalos definidos pela Equação (4.3); o versor normal à superfície 1 é o versor $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, logo, sobre a face 1 temos

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1 = F_x(x_0 + \Delta x, y, z), \quad (4.4)$$

e o fluxo através dessa face é

$$\Psi_1 = \iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_1) dA_1 = \int_{z_0}^{z_0 + \Delta z} \int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} F_x(x_0 + \Delta x, y, z) dy dz. \quad (4.5)$$

Se o campo \mathbf{F} é contínuo, podemos usar o teorema do valor médio:

$$\int_{y_0}^{y_0 + \Delta y} F_x(x_0 + \Delta x, y, z) dy = F_x(x_0 + \Delta x, \bar{y}_1, z) \Delta y, \quad (4.6)$$

onde $y_0 \leq \bar{y}_1 \leq y_0 + \Delta y$. Usando novamente o teorema do valor médio para calcular o integral em z , obtemos o seguinte valor para o fluxo:

$$\Psi_1 = F_x(x_0 + \Delta x, \bar{y}_1, \bar{z}_1) \Delta y \Delta z, \quad (4.7)$$

em que $z_0 \leq \bar{z}_1 \leq z_0 + \Delta z$. É fácil verificar que utilizando o mesmo raciocínio obtemos para as outras cinco faces do paralelepípedo os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= F_y(\bar{x}_2, y_0 + \Delta y, \bar{z}_2) \Delta x \Delta z, \\ \Psi_3 &= F_z(\bar{x}_3, \bar{y}_3, z_0 + \Delta z) \Delta x \Delta y, \\ \Psi_4 &= -F_x(\bar{x}_4, \bar{y}_4, z_0) \Delta x \Delta y, \\ \Psi_5 &= -F_y(\bar{x}_5, y_0, \bar{z}_5) \Delta x \Delta z, \\ \Psi_6 &= -F_x(x_0, \bar{y}_6, \bar{z}_6) \Delta y \Delta z. \end{aligned} \quad (4.8)$$

De notar que os valores médios que aparecem nestas equações não são necessariamente iguais; por exemplo \bar{y}_3 e \bar{y}_4 pertencem ambos ao intervalo $(y_0, y_0 + \Delta y)$, mas não têm que ser iguais. Como todos os valores médios \bar{x}_i pertencem ao intervalo $(x_0, x_0 + \Delta x)$, no limite $\Delta x \rightarrow 0$ todos eles se tornam iguais a x_0 , isto é,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \bar{x}_i = x_0 .$$

De igual forma, os valores médios \bar{y}_i e \bar{z}_i tornar-se-ão iguais a y_0 e z_0 . O fluxo total, $\Delta\Psi$, através do paralelepípedo é igual à soma dos seis fluxos Ψ_i . A divergência do campo \mathbf{F} no ponto \mathbf{r}_0 é igual a $\Delta\Psi$ por unidade de volume quando este tende para 0 ($\Delta V \rightarrow 0$, $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$). Assim, a divergência é igual a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Psi}{\Delta V} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_x(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - F_x(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F_y(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - F_y(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y} + \\ &+ \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F_z(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - F_z(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Cada um dos limites, do lado direito da equação anterior, corresponde à definição de derivada parcial. Portanto, num ponto qualquer \mathbf{r} , a divergência do campo \mathbf{F} é

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} . \quad (4.10)$$

Esta expressão apresenta alguma semelhança com a definição do gradiente de um campo escalar; poderemos usar uma notação semelhante para o gradiente e a divergência se definirmos o operador **nabla**:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} . \quad (4.11)$$

Assim, a divergência de um campo vectorial \mathbf{F} é igual ao produto escalar entre o operador nabla e o campo:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}} , \quad (4.12)$$

e o gradiente de um campo escalar V é obtido aplicando o operador nabla ao campo escalar:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k} . \quad (4.13)$$

4.3 Teorema da divergência

A divergência definida na secção anterior é útil para calcular fluxos através de superfícies fechadas. Consideremos uma superfície fechada S que delimita uma região R . Imaginemos agora que a região R é dividida em vários paralelepípedos (Figura 4.3), com volumes infinitesimais ΔV_i (existirá algum erro perto da fronteira, já que os paralelepípedos não coincidem com a superfície S , mas este erro será nulo no limite em que os paralelepípedos sejam infinitesimais).



Figura 4.3: Uma região aproximada por paralelepípedos. Quanto menor forem os paralelepípedos, melhor será a aproximação.

Se somarmos os fluxos do campo \mathbf{F} através de dois paralelepípedos vizinhos, o resultado será igual ao fluxo através de um paralelepípedo maior que contenha os dois iniciais, pois os fluxos na parede comum são iguais e de sinais opostos. Assim, a soma dos fluxos através de todos os paralelepípedos será igual ao fluxo através da fronteira S :

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n \, dA = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta \Psi_i, \quad (4.14)$$

onde $\Delta \Psi_i$ é o fluxo através do paralelepípedo número i . Como $\Delta V_i \rightarrow 0$, podemos usar a definição da divergência, Equação (4.9), e obtemos a expressão:

$$\Delta \Psi_i = \nabla \cdot \mathbf{F}_i \, \Delta V_i. \quad (4.15)$$

Substituindo $\Delta \Psi_i$ na Equação (4.14), a série obtida é o integral de volume da divergência de \mathbf{F} :

$$\boxed{\oiint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_n \, dA = \iiint_R \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV}. \quad (4.16)$$

Este resultado é chamado **teorema da divergência**. O integral de volume no lado direito pode parecer mais complicado que o integral de superfície, mas geralmente até é mais simples, já que é mais fácil calcular a divergência de um campo do que calcular o vetor normal em todos os pontos da superfície.

4.4 Rotacional

Associado a qualquer campo vectorial \mathbf{F} existe um outro campo vectorial importante chamado **rotacional**. Antes de definir o rotacional, é preciso definir a direcção positiva de uma curva fechada que, por definição, é a fronteira de uma superfície aberta. Como vimos no Capítulo 3, em cada ponto da superfície aberta existem dois versores normais, nos dois lados da superfície; se a superfície for **orientável** um dos lados define-se como o lado positivo e o versor normal correspondente define a direcção positiva¹. Uma vez definido o lado positivo da superfície, a direcção positiva da sua fronteira C será definida pela regra da mão direita: apontando com o dedo polegar da mão direita na direcção do versor normal positivo, os outros dedos apontam na direcção positiva da curva C , como se mostra na Figura 4.4.

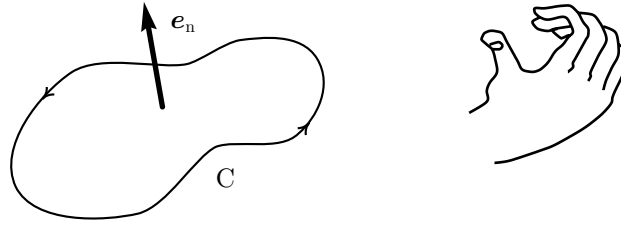


Figura 4.4: Definição da direcção positiva de uma curva fechada pela regra da mão direita.

Consideremos um ponto arbitrário com vector posição $\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}$, e uma curva fechada C , que passa pelo ponto e que envolve uma pequena área ΔA (Figura 4.5). O integral de linha

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (4.17)$$

será diferente para diferentes direcções do versor \mathbf{e}_n , e diminuirá com a área ΔA . Se o versor \mathbf{e}_n tiver a mesma direcção do campo, o integral é nulo, já que o campo é perpendicular ao percurso. Vamos admitir que em qualquer ponto \mathbf{r}_0 existe um vector $\text{rot}\mathbf{F}$, chamado **rotacional** do campo, que verifica a seguinte propriedade:

$$(\text{rot}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_n \equiv \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (4.18)$$

para qualquer direcção \mathbf{e}_n , e qualquer curva fechada C , orientada na direcção do versor \mathbf{e}_n e que passa pelo ponto \mathbf{r}_0 .

¹Um exemplo de superfície não-orientável, com um único lado, é o anel de Möbius, construído com uma tira de papel à qual é dada uma torção de meia volta antes de se juntar os dois extremos formando um anel.

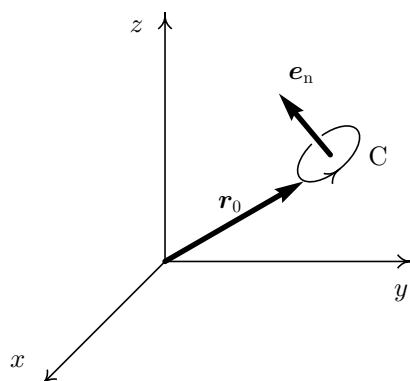


Figura 4.5: Pequeno percurso fechado, C , com vetor normal \mathbf{e}_n .

Para demonstrar a Equação (4.18) vamos calcular as coordenadas cartesianas do vector rotacional. Para encontrar as componentes do rotacional de um campo contínuo, vamos calcular o integral de linha do campo \mathbf{F} ao longo dos três rectângulos representados na Figura 4.6, perpendiculares aos três eixos de coordenadas. Se o rectângulo C_1 for percorrido no sentido indicado na figura, o vetor normal será \mathbf{i} . Podemos dividir o rectângulo C_1 em quatro segmentos rectos e paralelos aos eixos y e z :

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{y_0}^{y_0+\Delta y} F_y(x_0, y, z_0) dy + \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} F_z(x_0, y_0 + \Delta y, z) dz + \int_{y_0+\Delta y}^{y_0} F_y(x_0, y, z_0 + \Delta z) dy + \int_{z_0+\Delta z}^{z_0} F_z(x_0, y_0, z) dz . \quad (4.19)$$

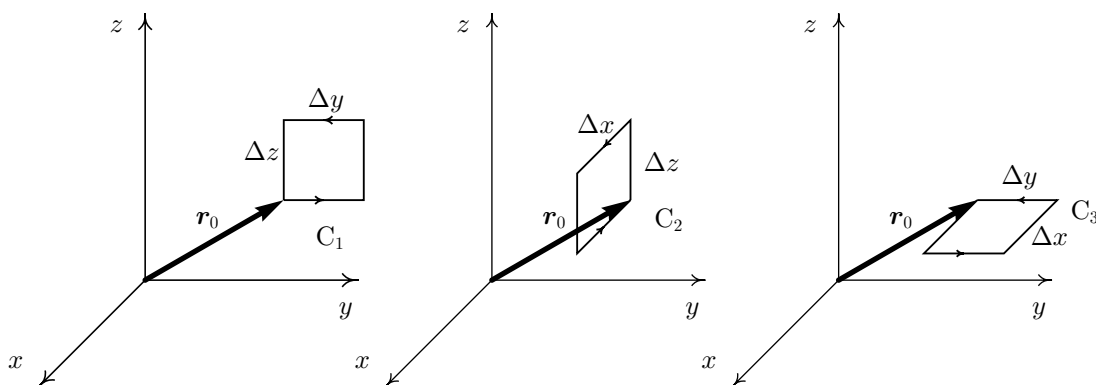


Figura 4.6: Três percursos rectangulares com a mesma origem, orientados nas direcções perpendiculares aos três eixos

Se o campo é contínuo, usando o teorema do valor médio, temos

$$\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_y(x_0, \bar{y}_1, z_0) \Delta y + F_z(x_0, y_0 + \Delta y, \bar{z}_1) \Delta z - F_y(x_0, \bar{y}_2, z_0 + \Delta z) \Delta y - F_z(x_0, y_0, \bar{z}_2) \Delta z. \quad (4.20)$$

A área do rectângulo C_1 é $\Delta A = \Delta y \Delta z$. No limite, $\Delta y \rightarrow 0$ e $\Delta z \rightarrow 0$, os valores médios \bar{y}_i tornam-se iguais a y_0 , e os valores médios \bar{z}_i iguais a z_0 ; logo, dividindo por ΔA , obtemos a componente x do vector rotacional:

$$(\text{rot } \mathbf{F})_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial F_z(\mathbf{r}_0)}{\partial y} - \frac{\partial F_y(\mathbf{r}_0)}{\partial z}. \quad (4.21)$$

Assim, demonstramos que a componente x do vector rotacional existe e que se obtém a partir das derivadas parciais de \mathbf{F} . De igual forma, podemos obter as componentes y e z do rotacional se calcularmos os integrais de linha ao longo de C_2 e C_3 , definidos na Figura 4.6, e dividirmos por ΔA . O resultado é

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (4.22)$$

Esta expressão tem exactamente a forma do produto vectorial entre dois vectores, onde o primeiro vector é o operador nabla e o segundo vector é o campo \mathbf{F} . Em conclusão, o rotacional do campo \mathbf{F} é igual a $\nabla \times \mathbf{F}$. Algumas propriedades da divergência e do rotacional são apresentadas no Apêndice A.

Outro operador importante é o operador **laplaciano**, ∇^2 , obtido no cálculo da divergência do gradiente de um campo escalar:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f. \quad (4.23)$$

A obtenção do rotacional foi feita usando rectângulos, mas esta será estendida a qualquer curva, na próxima secção, conduzindo ao chamado teorema de Stokes ou de Green.

Exemplo 4.1

Demonstre que se um campo escalar $f(r)$ depender apenas da distância à origem r , o seu Laplaciano é

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f') = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r f).$$

Como f só depende da distância à origem, usando o resultado obtido no Exemplo 3.2 temos que:

$$\nabla f = f' \mathbf{e}_r,$$

e aplicando a propriedade distributiva da divergência de um produto (Apêndice A):

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \left(\frac{f'}{r} \mathbf{r} \right) = \mathbf{r} \cdot \nabla \left(\frac{f'}{r} \right) + \frac{f'}{r} \nabla \cdot \mathbf{r} . \quad (4.24)$$

A divergência de \mathbf{r} calcula-se facilmente em coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 .$$

Para calcular o gradiente de f'/r usamos, mais uma vez, o resultado do Exemplo 3.2:

$$\nabla \left(\frac{f'}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{f'}{r} \right) \mathbf{e}_r = \left(\frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2} \right) \mathbf{e}_r ,$$

e substituindo na Equação (4.24) obtemos o laplaciano de f :

$$\nabla^2 f = f'' + 2 \frac{f'}{r} . \quad (4.25)$$

Este último resultado, multiplicado por r^2 , corresponde à derivada de um produto:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} (r^2 f'' + 2r f') = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f') . \quad (4.26)$$

Podíamos também ter factorizado r , no denominador de (4.25), obtendo assim uma expressão com a forma da segunda derivada de um produto:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} (r f'' + 2f') = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r f) . \quad \blacksquare \quad (4.27)$$

4.5 Teorema de Stokes

Tal como a divergência permite o cálculo de integrais de superfície numa forma mais simples, o rotacional facilita o cálculo de integrais de linha em percursos fechados. Começamos por escolher uma superfície cuja fronteira seja o percurso fechado C ; esta superfície pode ser dividida em pequenos elementos rectangulares R_i com áreas infinitesimais ΔA_i (Figura 4.7). Cada percurso rectangular é percorrido no mesmo sentido (sentido anti-horário, na Figura 4.7); somando o integral de linha de \mathbf{F} em dois percursos vizinhos, o resultado é o integral de linha ao longo do rectângulo maior que delimita os dois rectângulos, já que, no lado comum dos dois rectângulos, o integral de linha é calculado duas vezes, em sentidos contrários, sendo o resultado nesse lado nulo. Somando os integrais de linhas de \mathbf{F} em todos os percursos rectangulares, o resultado é uma boa aproximação ao integral de linha em C :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{\infty} \oint_{R_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (4.28)$$

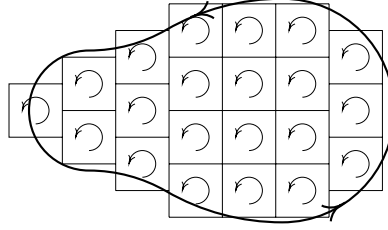


Figura 4.7: A superfície delimitada por uma curva fechada, aproximada por rectângulos.

Como a área de cada rectângulo é muito pequena, usando a definição do rotacional (Equação 4.18), o integral de linha em cada percurso rectangular é

$$\oint_{R_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_n \Delta A_i \quad (4.29)$$

e a série na equação anterior constitui um integral de superfície:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} . \quad (4.30)$$

A superfície S pode ser qualquer superfície delimitada por C . O resultado anterior é o chamado **teorema de Stokes**.

4.6 Equação de Poisson

Para calcular o rotacional do campo eléctrico, comecemos por considerar o teorema de Stokes:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{A} . \quad (4.31)$$

O integral no percurso fechado C , pode ser calculado como a soma do integral desde A até B , ao longo da curva C_1 e o integral desde B até A ao longo da curva C_2 (Figura 4.8); o integral desde B até A é sempre igual e de sinal oposto ao integral desde A até B ao longo do mesmo percurso e, portanto, obtemos

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{E}(C_1) \cdot d\mathbf{r}(C_1) - \int_A^B \mathbf{E}(C_2) \cdot d\mathbf{r}(C_2) . \quad (4.32)$$

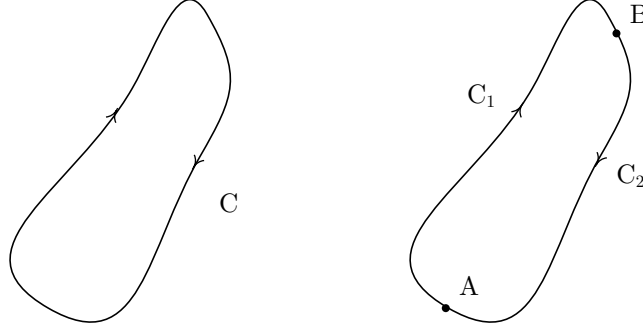


Figura 4.8: Um percurso fechado C dividido em dois percursos abertos C_1 e C_2 .

Como o campo eléctrico é conservativo, o integral de linha entre os pontos A e B é igual ao longo dos percursos C_1 e C_2 . Assim, o integral ao longo do percurso fechado C é zero:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (4.33)$$

Substituindo este resultado na Equação (4.31), verificamos que o fluxo do rotacional do campo eléctrico através de qualquer superfície S , orientada em qualquer direcção, é nulo. Para que este resultado seja válido é necessário que o rotacional do campo eléctrico seja nulo:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}}. \quad (4.34)$$

Em função das componentes cartesianas do rotacional, esta equação é exactamente igual ao sistema de três condições que já encontrámos no capítulo anterior, para os campos conservativos (Equação 3.28).

Como vimos no Capítulo 2, a lei de Gauss relaciona o fluxo do campo eléctrico através de qualquer superfície fechada, com a carga no seu interior. Usando o teorema da divergência podemos calcular o fluxo como um integral de volume da divergência do campo, e podemos escrever a lei de Gauss numa outra forma, mais conveniente para o cálculo do campo eléctrico em geral. Consideremos uma região R , limitada por uma superfície fechada S . A lei de Gauss diz que

$$\oiint_S (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_n) dA = 4\pi k \Delta q_{\text{int}}. \quad (4.35)$$

Usando o teorema da divergência e a relação entre a carga interna e a carga volúmica, obtemos

$$\iiint_{\mathbf{R}} \nabla \cdot \mathbf{E} \, dV = 4\pi k \iiint_{\mathbf{R}} \rho \, dV . \quad (4.36)$$

Os dois integrais de volume podem ser calculados como o produto do valor médio da função integrada pelo volume total ΔV :

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{E}} \, \Delta V = 4\pi k \bar{\rho} \, \Delta V . \quad (4.37)$$

No limite $\Delta V \rightarrow 0$, o interior da superfície S aproxima-se a um ponto e os valores médios $\overline{\mathbf{E}}$ e $\bar{\rho}$ são os valores de \mathbf{E} e ρ nesse ponto; portanto, em qualquer ponto:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k \rho} . \quad (4.38)$$

Esta é a forma diferencial da lei de Gauss. Conhecida a carga volúmica ρ dentro de uma região, obtém-se a divergência do campo em qualquer ponto da região (ou ao contrário). No entanto, a divergência de um campo vectorial não é suficiente para definir o campo; é preciso conhecer também o rotacional e algumas condições na fronteira da região.

As Equações (4.34) e (4.38) são as equações básicas da electrostática, e permitem calcular o campo eléctrico numa região onde se conheça a carga volúmica ρ . Estas equações vectoriais podem ser reduzidas a uma única equação escalar, em função do potencial electrostático V introduzido no capítulo anterior:

$$\mathbf{E} = -\nabla V . \quad (4.39)$$

Com esta definição, a Equação (4.34) é trivial, já que o rotacional do gradiente de qualquer campo escalar é sempre nulo (Apêndice A). A Equação (4.38), em função do potencial V e usando o operador Laplaciano, toma a seguinte forma:

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} . \quad (4.40)$$

Esta equação é chamada **equação de Poisson**. Existem, em geral, muitas soluções desta equação diferencial, para uma determinada carga volúmica ρ dentro de uma região. Para obter uma solução única é preciso impor alguma condição na fronteira, como por exemplo o valor do potencial ao longo da fronteira. Um caso particular é quando a região de interesse é todo o espaço, e a condição fronteira é $V = 0$ no infinito; nesse caso, a solução é a Equação (4.1), que é também obtida a partir da lei de Coulomb.

A equação de Poisson permite-nos estudar também sistemas mais complicados nos quais a lei de Coulomb não ajuda muito. No entanto, para estudar a resolução da equação de Poisson é preciso entrar no campo das equações diferenciais parciais, o qual se encontra além dos objectivos deste livro. No capítulo sobre ondas electromagnéticas (Capítulo 13) veremos alguns exemplos simples de resolução das equações de campo.

Exemplo 4.2

O potencial numa região do espaço é $V = 5x^4 - 6z$, onde as distâncias são medidas em metros e o potencial em volts. Calcule a carga total dentro de uma esfera com centro na origem e raio 3 m.

A carga volúmica calcula-se a partir da equação de Poisson (Equação 4.40):

$$\rho = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (5x^4 - 6z) = -60\epsilon_0 x^2. \quad (4.41)$$

Para calcular a carga total dentro da esfera é preciso integrar ρ dentro do seu volume. O integral será mais fácil de calcular em coordenadas esféricas (Figura 4.9), em que x é igual a $r \sin \phi \cos \theta$; logo a carga volúmica em coordenadas esféricas é

$$\rho = -60\epsilon_0 r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta.$$

O elemento diferencial de volume dV , em coordenadas esféricas, é

$$dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi,$$

e a carga total obtém-se integrando a carga volúmica dentro da esfera:

$$Q = -60\epsilon_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^4 \sin^3 \phi \cos^2 \theta \, dr \, d\theta \, d\phi = -3888\pi\epsilon_0 = -108 \text{ nC}.$$

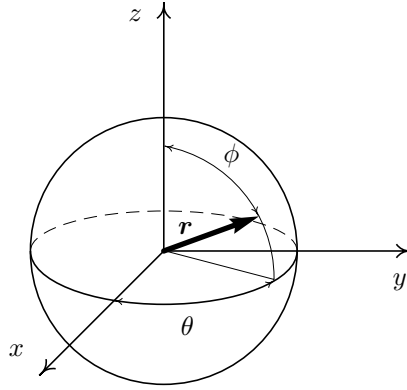


Figura 4.9: Coordenadas esféricas. ■

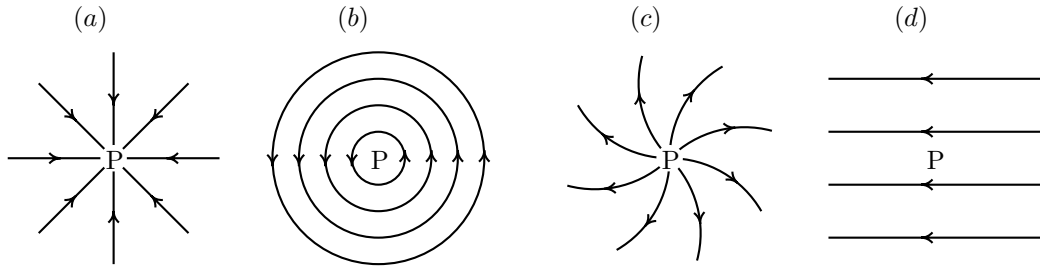
Problemas

- Demonstre que para quaisquer campo escalar f e campo vectorial \mathbf{F} :
 - $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$.
 - $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$.
 - $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$.
- Se f é um campo escalar e \mathbf{F} um campo vectorial, demonstre que a divergência e o rotacional do produto $f\mathbf{F}$ são, respectivamente:

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{F} \quad \text{e} \quad \nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f \nabla \times \mathbf{F}.$$
- Demonstre que a divergência e o rotacional do produto vectorial de dois campos vectoriais \mathbf{F} e \mathbf{G} são, respectivamente:

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}),$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}.$$
- Os desenhos representam as linhas de campo de quatro campos vectoriais. Em cada caso diga se o rotacional do campo no ponto P é zero ou diferente de zero, e determine se a divergência do campo no ponto P é positiva, negativa ou nula.



- Represente as linhas de campo dos campos $\mathbf{F} = \mathbf{r}$ e $\mathbf{G} = \mathbf{k} \times \mathbf{r}$, onde \mathbf{r} é o vector posição, $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demonstre que em qualquer ponto a divergência e o rotacional dos campos \mathbf{F} e \mathbf{G} são:
 - $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$.
 - $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$.
 - $\nabla \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = 0$.
 - $\nabla \times (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{k}$.
- O potencial dentro do cubo $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2$ é

$$V = ax^3z + \frac{bxy}{z^2}$$

onde a e b são constantes. Calcule a carga total dentro do cubo.

7. Diga quais dos seguintes campos podem ser campos electrostáticos. Nos casos afirmativos, calcule a carga volúmica responsável pelo campo, e a energia electrostática volúmica (a e b são constantes):

(a) $(3abyz^3 - 10bx^3y^2)\mathbf{i} + (3abxz^3 - 5bx^4y)\mathbf{j} + 9abxyz^2\mathbf{k}$.

(b) $(18aby^3 - 20bx^3y^2)\mathbf{i} + (18abxz^3 - 10bx^4y)\mathbf{j} + 6abxyz^2\mathbf{k}$.

(c) $a\sin(ax + bz^2)\mathbf{i} + 2bz\sin(ax + bz^2)\mathbf{k}$.

8. Dado o potencial

$$V(x) = \begin{cases} V_0(2x/a - 1), & x \leq 0 \\ -V_0(x/a - 1)^2, & 0 \leq x \leq 2a \\ V_0(3 - 2x/a), & x \geq 2a \end{cases}$$

onde V_0 e a são constantes positivas, calcule:

- (a) O módulo do campo eléctrico.
(b) A carga volúmica em qualquer ponto.
(c) Desenhe os gráficos das duas funções.

9. Considere o cubo definido no Problema 13 do Capítulo 3. Calcule novamente a carga dentro do cubo usando a equação de Poisson.

Conceitos básicos

- Capacidade eléctrica
- Energia potencial electrostática
- Constante dieléctrica e rigidez dieléctrica
- Susceptibilidade e permitividade eléctrica
- Deslocamento eléctrico

Michael Faraday



(1791-1867)

Michael Faraday nasceu perto de Londres. Aos 14 anos deixou a escola e começou a trabalhar. Durante oito anos foi aprendiz num encadernador, beneficiando da tolerância de seu patrão que lhe permitia ler os livros que encadernava. Em 1810 fez-se membro da *City Philosophical Society*, reunindo-se a um grupo de jovens que discutiam temas científicos. Em 1812, Humphry Davy ao fazer uma apresentação pública ganhou a admiração do jovem Faraday. Este, escreveu-lhe uma carta acabando por se tornar seu assistente um ano mais tarde. São muitas as contribuições de Faraday para física e para a química sendo provavelmente o maior físico experimental de todos os tempos. Faraday introduziu os conceitos de campo e de linhas de campo e descobriu a indução electromagnética e o diamagnetismo. Construiu o primeiro gerador de corrente. Seguindo o trabalho de Davy, estudou a electrólise estabelecendo as bases da electroquímica. Sendo um cientista tão eclético, a biografia de Faraday abre este capítulo pela importância do seu trabalho no estudo dos condensadores e dos dieléctricos.

Capacidade e energia electrostática

5.1 Capacidade eléctrica

No Capítulo 3 vimos que a carga num condutor isolado distribui-se sobre a superfície; a diferença de potencial entre o condutor e pontos muito afastados é igual em todo o condutor, e aumenta com o aumento da carga superficial. Se a mesma carga for introduzida em dois condutores diferentes, o que tiver uma maior superfície terá menor carga superficial e, portanto, menor potencial. Para aumentar a carga dos dois condutores será necessário mais energia no caso do condutor que está a maior potencial, já que nesse caso a força repulsiva sobre a carga a ser introduzida é maior. Assim, quanto maior for um condutor mais facilmente se introduzirão as cargas.

No Exemplo 3.4 vimos que o potencial na superfície de uma esfera condutora de raio a é kQ/a ; assim, para uma carga acumulada Q será mais fácil aumentar a carga quanto maior for o raio da esfera. Generalizando, a **capacidade** de acumular carga, de qualquer condutor, é directamente proporcional ao seu tamanho. Define-se a capacidade eléctrica como a relação entre a carga acumulada e o potencial na superfície de um condutor e representa-se pela letra C :

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (5.1)$$

A unidade de capacidade, no sistema internacional de unidades, é o farad (F):

$$1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}. \quad (5.2)$$

Quanto maior for a capacidade de um condutor, mais fácil será acumular carga na sua superfície. No entanto, a carga na superfície não pode aumentar indefinidamente, pois quando a carga for muito elevada as forças entre os electrões serão tão fortes que se produzirá uma descarga brusca do condutor através de faíscas. A descarga eléctrica acontece a um certo valor do potencial, próprio do material que rodeia o condutor. Num condutor a carga máxima à qual aparece o **potencial de ruptura** é, segundo a Equação (5.1), directamente proporcional à capacidade e, portanto, a capacidade é também uma medida da carga máxima que pode ser acumulada num condutor.

5.2 Condensadores

Uma das invenções mais importantes na física do século XVIII foi a chamada **garrafa de Leiden**, a qual consiste num condutor isolado dentro de uma garrafa de vidro. Ao introduzir um condutor carregado dentro de uma garrafa de vidro, o seu potencial diminui e consequentemente a sua capacidade aumenta. Uma versão melhorada da garrafa de Leiden foi obtida cobrindo o interior e o exterior da garrafa com duas lâminas metálicas separadas pelas paredes da garrafa, com a lâmina interna em contacto com o condutor central. Desta forma consegue reduzir-se bastante o potencial do condutor e aumentar a sua capacidade. Em geral chama-se **condensador** a qualquer dispositivo com duas armaduras metálicas que podem manter-se a potenciais diferentes. Os três tipos mais comuns de condensadores são o condensador de placas planas paralelas, o condensador cilíndrico e o condensador esférico (Figura 5.1). Quando as duas armaduras se encontram a diferentes potenciais V_1 e V_2 , existem linhas de campo eléctrico a sair da lâmina a maior potencial e a entrar na outra lâmina. Isto significa que as duas lâminas têm cargas de sinais opostos; se a carga total for zero, as cargas das duas lâminas terão o mesmo valor absoluto:

$$Q \equiv |Q_1| = |Q_2|. \quad (5.3)$$

A **carga armazenada** no condensador é Q . A capacidade de um condensador define-se de forma análoga à capacidade de um condutor:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}, \quad (5.4)$$

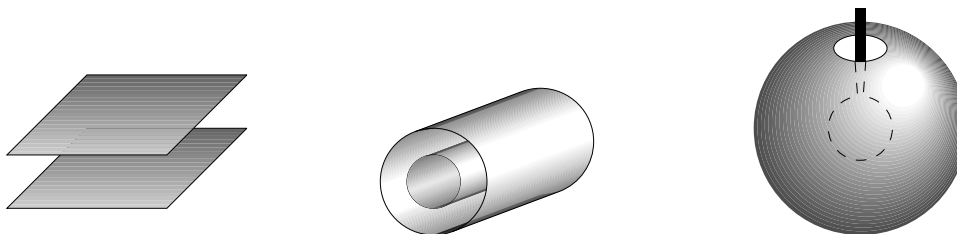


Figura 5.1: Condensadores de placas paralelas, cilíndrico e esférico.

onde $\Delta V = |V_1 - V_2|$ é a diferença de potencial entre as placas e Q é a carga armazenada no condensador.

Para calcular a capacidade de um condensador, admite-se que existe uma carga Q armazenada e calcula-se a diferença de potencial correspondente, usando algum dos métodos introduzidos no Capítulo 3. Veremos a seguir os três tipos mais comuns de condensadores.

5.2.1 Condensador de placas planas paralelas

Um condensador de placas planas paralelas é formado por duas placas metálicas com uma forma qualquer, paralelas e de área A (Figura 5.2). Na região central do condensador, as linhas de campo são aproximadamente paralelas e o campo produzido por cada placa pode ser aproximado pelo campo de um plano infinito com carga, $E = 2\pi k\sigma$. Os campos das duas placas têm o mesmo sentido, de maneira que o campo total no centro do condensador é dado por

$$E = 4\pi k\sigma. \quad (5.5)$$

Para calcular a diferença de potencial ΔV , usamos um percurso perpendicular às placas, seguindo o sentido do campo: do ponto com maior potencial A, até ao ponto com menor potencial B:

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_A^B E \, ds = 4\pi k\sigma L, \quad (5.6)$$

onde L é a distância entre as placas. A capacidade é

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{4\pi k\sigma L}; \quad (5.7)$$

se admitirmos que a carga superficial é uniforme, temos que $\sigma = Q/A$ e a capacidade do condensador de placas planas paralelas é

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{L}. \quad (5.8)$$

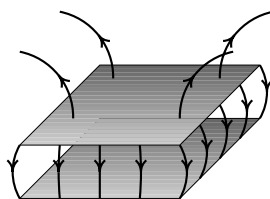


Figura 5.2: Linhas de campo eléctrico dentro de um condensador de placas planas paralelas.

Exemplo 5.1

Um condensador variável é formado por duas placas planas paralelas com forma de sector circular de ângulo 80° e raio 5 cm, que podem rodar à volta de um eixo comum (ver Figura 5.3). Se a distância entre as placas é 0,5 cm, calcule a capacidade máxima e a capacidade quando uma das placas roda 30° a partir da posição onde a capacidade é máxima.

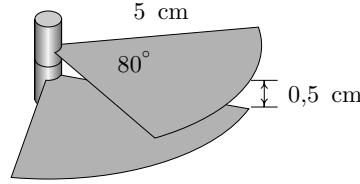


Figura 5.3: Condensador variável.

A capacidade máxima obtém-se quando as duas placas estão uma em frente da outra, de forma que a carga se distribui ao longo de toda a superfície das placas. O ângulo de 80° é igual a $4\pi/9$ radianos, assim, a área dos sectores de círculo é

$$A = \iint dA = \int_0^5 \int_0^{4\pi/9} r dr d\theta = \frac{50\pi}{9} \text{ cm}^2.$$

A capacidade é dada pela expressão obtida para o condensador de placas planas paralelas:

$$C_{\text{máx}} = \frac{A}{4\pi k L}$$

$$C_{\text{máx}} = \frac{0,005\pi/9 \text{ m}^2}{4\pi(9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})(0,005 \text{ m})} \approx 3,1 \text{ pF}.$$

Quando uma das placas roda 30° , a área na qual a carga se distribui, corresponde apenas à área da parte das placas que se encontra em frente uma da outra, ou seja, um sector circular de ângulo 50° . Portanto a área é $5/8$ da área das placas e a capacidade, sendo directamente proporcional à área, será $5/8$ da capacidade máxima:

$$C = \frac{5}{8} C_{\text{máx}} = 1,9 \text{ pF}. \quad \blacksquare$$

5.2.2 Condensador esférico

Este tipo de condensador é formado por duas esferas condutoras concêntricas, com raios a e b ($a < b$). O campo eléctrico entre as duas esferas é radial (Figura 5.4) e calcula-se facilmente usando a lei de Gauss:

$$\mathbf{E} = \frac{kQ}{r^2} \mathbf{e}_r. \quad (5.9)$$

Ao longo de um percurso radial de $r = a$ até $r = b$, o campo é paralelo a ds e a diferença de potencial entre as esferas A e B é

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_a^b E \, dr = kQ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right); \quad (5.10)$$

o que demonstra que ΔV é directamente proporcional a Q e que a capacidade é dada pela seguinte equação:

$$C = \frac{ab}{k(b-a)}. \quad (5.11)$$

Exemplo 5.2

Um condensador esférico tem uma esfera externa de raio 2 cm. Para calcular o raio da esfera interna, ligaram-se as duas esferas a uma diferença de potencial de 3 V e observou-se que a carga armazenada era 12 pC. Calcule o raio da esfera interna.

A capacidade do condensador é igual a

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{12 \cdot 10^{-12} \text{ C}}{3 \text{ V}} = 4 \text{ pF}.$$

Por outro lado, a partir da Equação (5.11), temos que:

$$4 \cdot 10^{-12} = \frac{0,02 a}{9 \cdot 10^9 (0,02 - a)},$$

onde a é medido em centímetros. Resolvendo esta equação para a , obtemos

$$a = 1,29 \text{ cm}. \quad \blacksquare$$

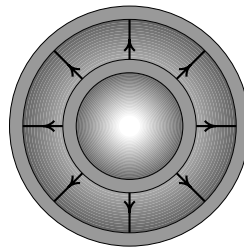


Figura 5.4: As linhas de campo eléctrico dentro de um condensador esférico apontam na direcção radial e só existem entre as duas esferas.

5.2.3 Condensador cilíndrico

Um condensador cilíndrico é formado por duas armaduras cilíndricas coaxiais de raios a e b (Figura 5.5). O campo eléctrico entre as armaduras não é exactamente na direcção radial. No entanto, se o comprimento dos cilindros (L) for maior que a distância entre as armaduras, poderemos admitir que as linhas de campo na região central do condensador são paralelas e radiais, de maneira que um cilindro de raio r ($a < r < b$) e comprimento $l < L$ é uma superfície gaussiana. A carga dentro do cilindro gaussiano é

$$q_{\text{int}} = Q \frac{l}{L}, \quad (5.12)$$

e, usando a lei de Gauss, obtemos o campo eléctrico:

$$E = \frac{2kQ}{Lr}. \quad (5.13)$$

A diferença de potencial obtém-se integrando o campo eléctrico ao longo da direcção radial, para facilitar o cálculo:

$$\Delta V = \int_a^b E \, dr = \frac{2kQ}{L} \ln(b/a), \quad (5.14)$$

o qual conduz à capacidade

$$C = \frac{L}{2k \ln(b/a)}. \quad (5.15)$$

5.3 Energia electrostática

Para obter um sistema de n cargas pontuais $q_1, q_2 \dots q_n$ nas posições $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n$, podemos começar por colocar a carga q_1 em \mathbf{r}_1 . A seguir, para trazer a segunda carga até

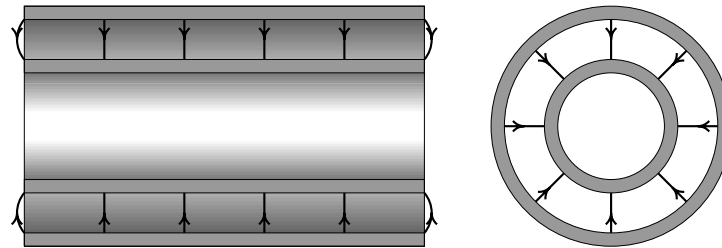


Figura 5.5: Condensador cilíndrico visto de lado e de frente. As linhas de campo são aproximadamente radiais e paralelas.

à posição \mathbf{r}_2 , precisamos de realizar um trabalho

$$W_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}}, \quad (5.16)$$

onde \mathbf{r}_{12} é a posição da partícula 2 relativamente à partícula 1 ($\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$). Para trazer a terceira carga até à terceira posição, é agora preciso efectuar um trabalho

$$W_{13} + W_{23} = \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}. \quad (5.17)$$

Ao trabalho total necessário para trazer as n cargas até às suas posições respectivas chama-se **energia electrostática** do sistema, e é igual a

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}. \quad (5.18)$$

O factor $1/2$ é incluído para que não se contabilize duas vezes o mesmo par, por exemplo, o par de partículas 3 e 5 aparecem duas vezes, quando (i, j) forem iguais a $(3, 5)$ e $(5, 3)$.

No caso de uma distribuição contínua de carga, dentro de uma região R , a equação anterior pode ser usada no limite quando a distribuição de carga é dividida em muitos elementos pequenos. As cargas pontuais q_i e q_j serão substituídas por cargas ρdv e $\rho dv'$ nas vizinhanças de \mathbf{r} e \mathbf{r}' , respectivamente (usaremos v para o volume, para distingui-lo do potencial). Substituindo cada soma na Equação (5.18) por um integral triplo obtemos

$$U = \frac{k}{2} \iiint_R \iiint_R \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv'. \quad (5.19)$$

Apesar de ser uma expressão complicada, pelo elevado número de integrais, vemos que os três integrais do volume v' correspondem exactamente à Equação (4.1), para o potencial na posição \mathbf{r} e, portanto:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_R \rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r}) dv. \quad (5.20)$$

Esta é a energia electrostática total dentro da região R . O integrando corresponde, então, à **energia volúmica electrostática** no ponto \mathbf{r} , representada pela letra u :

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\rho V}. \quad (5.21)$$

De notar que a condição $j \neq i$ na Equação (5.18) servia para excluir a energia de auto-interacção das cargas que, no caso de cargas pontuais, é infinita. Na Equação (5.20) já não é excluída a interacção da distribuição de carga consigo própria.

O campo eléctrico foi introduzido no Capítulo 1 como uma forma de explicar a interacção entre cargas e, até agora, o campo tem sido interpretado como uma força por

unidade de carga. No entanto, no Capítulo 13 veremos que pode existir campo eléctrico mesmo quando não existem cargas e o campo tem existência própria, independentemente das forças. Por essa razão, convém escrever também a energia electrostática de uma distribuição de carga em função do campo eléctrico, para obter uma expressão que será válida mesmo na ausência de cargas.

Usando a Equação de Poisson (Equação 4.40), a carga volúmica ρ pode ser substituída na Equação (5.20) e obtemos

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \iiint_R V \nabla^2 V \, dv . \quad (5.22)$$

O produto de um campo escalar e o seu Laplaciano verifica a seguinte identidade:

$$V \nabla^2 V = \nabla \cdot (V \nabla V) - \nabla V \cdot \nabla V , \quad (5.23)$$

que conduz ao resultado:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_R [\nabla V \cdot \nabla V - \nabla \cdot (V \nabla V)] \, dv . \quad (5.24)$$

Em função do campo eléctrico, e aplicando o teorema da divergência ao último termo:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_R E^2 \, dV + \frac{\epsilon_0}{2} \oint_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} , \quad (5.25)$$

onde S é a fronteira da região R . O primeiro integral será sempre positivo ou zero e o segundo integral corresponde ao fluxo do campo $V\mathbf{E}$ através da superfície fechada S .

Quando não existe carga total dentro da superfície S , o número de linhas de campo que entra e sai da superfície é igual, mas as linhas de campo entram por regiões onde o potencial é mais elevado. Obtém-se assim um resultado negativo para o fluxo de $V\mathbf{E}$, e a energia electrostática U no interior da superfície é nula. A energia electrostática em todo o espaço é sempre positiva, já que o potencial no infinito é zero, logo o segundo integral é nulo.

A Equação (5.25) permite-nos escrever a energia volúmica electrostática em função do campo eléctrico:

$$\boxed{u = \frac{\epsilon_0}{2} [E^2 + \nabla \cdot (V \mathbf{E})]} . \quad (5.26)$$

Se o potencial ou a componente normal do campo são nulos na fronteira de uma região, a energia electrostática pode ser calculada integrando o termo $\epsilon_0 E^2/2$ dentro da região R .

5.4 Energia armazenada num condensador

Para carregar um condensador é preciso realizar um trabalho. À medida que se introduz a carga nas placas, a carga já armazenada no condensador opõe-se à introdução de mais carga. O trabalho para carregar o condensador é igual à energia electrostática armazenada no condensador. Quando o condensador está carregado, existe um campo eléctrico entre as armaduras e, portanto, uma energia electrostática proporcional ao quadrado do campo, como vimos na secção anterior.

A energia armazenada pode ser calculada por qualquer um dos dois métodos propostos na secção anterior. O primeiro método consiste em calcular a energia volúmica, em função da carga volúmica, por meio da Equação (5.21). No caso do condensador, como a carga está distribuída sobre a superfície das armaduras, ρ deve ser substituída pela carga superficial:

$$u_s = \frac{1}{2} \sigma V. \quad (5.27)$$

A energia total obtém-se integrando sobre a superfície das duas armaduras, que é a única região onde σ não é nula:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{S_1} \sigma V \, dA + \frac{1}{2} \iint_{S_2} \sigma V \, dA. \quad (5.28)$$

O potencial é constante em cada uma das superfícies, de maneira que integrando resulta:

$$U = \frac{1}{2} QV_1 - \frac{1}{2} QV_2. \quad (5.29)$$

Obtemos assim a energia armazenada no condensador:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} Q \Delta V}. \quad (5.30)$$

A equação anterior também se pode escrever em função da capacidade do condensador ($C = Q/\Delta V$):

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2. \quad (5.31)$$

Exemplo 5.3

Calcule a energia armazenada num condensador plano de placas paralelas a partir da energia volúmica em função do campo eléctrico.

As linhas de campo eléctrico entre as placas são quase paralelas na região central, mas curvam-se, chegando a sair do condensador, nos extremos das placas. Para facilitar o cálculo desprezaremos a curvatura do campo nos extremos, admitindo que só existe campo no paralelepípedo delimitado pelas duas placas; a componente normal do campo

eléctrico na fronteira dessa região é nula e, conseqüentemente, a energia pode ser calculada integrando $\epsilon_0 E^2/2$ dentro da região. O campo eléctrico entre as placas é constante:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

e a energia electrostática armazenada no condensador é

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathbf{R}} E^2 dv = \frac{\sigma^2 AL}{2\epsilon_0},$$

onde A é a área das placas e L a distância entre elas. A carga volúmica (que assumimos constante) é Q/A , de maneira que

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\epsilon_0 A} \right) Q^2.$$

A expressão dentro do parêntese é o inverso da capacidade do condensador e a energia armazenada é, portanto, $U = Q^2/(2C)$, corroborando a Equação(5.31). ■

No exemplo anterior admitimos que o campo eléctrico era constante e só existia entre as placas do condensador. O resultado obtido para a energia é aproximado; contudo, o resultado é idêntico à energia calculada através da capacidade, já que no cálculo da capacidade admitimos uma carga superficial uniforme, que é consistente com a aproximação de campo eléctrico constante. Um cálculo mais preciso da capacidade do condensador deverá incluir o efeito das bordas, onde o campo não é constante (ver Problema 8).

Exemplo 5.4

Calcule a capacidade do condensador esférico, a partir do cálculo da energia armazenada.

As Equações 5.31 podem ser usadas também para definir a capacidade de um condensador: a energia armazenada num condensador é directamente proporcional ao quadrado da carga armazenada e a constante de proporcionalidade é igual a $1/(2C)$. Calculemos pois a energia armazenada no condensador, a qual deve ser proporcional a Q^2 .

No condensador esférico, o módulo do campo eléctrico entre as esferas é igual a

$$E = \frac{kQ}{r^2} \quad (a < r < b).$$

Como no exterior da esfera maior e no interior da esfera menor o campo eléctrico é nulo, a energia electrostática dentro do condensador é

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_{\mathbf{R}} E^2 dv = \int_a^b \int_0^{4\pi} \left(\frac{\epsilon_0 k^2 Q^2}{2r^2} \right) d\Omega dr = \frac{kQ^2}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

A constante que multiplica Q^2 é $1/(2C)$. Portanto a capacidade do condensador esférico é

$$C = \frac{ab}{k(b-a)} . \quad \blacksquare$$

5.5 Dielétricos

Qualquer substância que não seja condutora é chamada **dielétrico**. Nos dielétricos não existem electrões livres de condução; todos os electrões estão ligados aos átomos ou às moléculas do dielétrico. Existem dois tipos de moléculas: apolares, nas quais a nuvem de electrões e os núcleos positivos têm o seu centro de massa no mesmo ponto, e moléculas polares, em que os centros de massa das cargas positivas e negativas não coincidem, o que faz com que a molécula seja um pequeno dipolo eléctrico.

Nos dielétricos formados por moléculas polares, quando não existe nenhum campo eléctrico externo, os pequenos dipolos encontram-se orientados aleatoriamente, pelo que não se observa qualquer efeito de separação de cargas a nível macroscópico. Quando se introduz um campo eléctrico, os dipolos moleculares orientam-se no sentido oposto ao campo e o corpo todo comporta-se como um grande dipolo eléctrico. No caso de materiais constituídos por moléculas apolares, o campo externo polariza as moléculas no sentido oposto, produzindo também o mesmo efeito de um dipolo macroscópico, mas de menor intensidade do que no caso de moléculas polares.

Se o campo eléctrico for muito forte, poderá acontecer que a separação entre electrões e núcleos seja muito grande, podendo mesmo libertarem-se alguns electrões, deixando as respectivas moléculas ionizadas. Este fenómeno constitui uma ruptura do dielétrico, que faz com que apareçam cargas livres transformando-se o dielétrico num condutor; no entanto, as cargas livres desaparecem rapidamente devido à acção do campo.

Um exemplo típico de ruptura de um dielétrico é um raio. As tempestades dão-se quando existem campos intensos entre as nuvens e os objectos na superfície da Terra. O ar é um dielétrico que não permite a passagem de cargas entre as nuvens e os objectos; quando o campo fica muito intenso, dá-se uma ruptura de algumas moléculas do ar e uma descarga eléctrica brusca com transferência de cargas eléctricas. Se o dielétrico fosse um sólido, a ruptura deixaria fissuras na matéria.

Cada dielétrico é caracterizado por um valor máximo do campo eléctrico que pode suportar sem ruptura, a que se dá o nome de **rigidez dielétrica** (Tabela 5.1).

Tabela 5.1: Constante dielétrica e rigidez dielétrica de várias substâncias.

Substância	Constante dielétrica, K	Rigidez dielétrica $E_{\text{máx}}/\text{kV} \cdot \text{mm}^{-1}$
Água (20° C)	80	—
Ar	1,000 59	3
Baquelite	4,9	24
Óleo de transformador	2,24	12
Papel	3,7	16
Acrílico	3,4	40
Vidro pirex	5,6	14
Porcelana	7	5,7
Poliestireno	2,55	24
Parafina	2,1-2,5	10

Fonte: Tipler, P.A. *Physics*, Worth Publishers, New York, 1976, pág. 778.

Outra constante característica dos dielétricos é a **constante dielétrica**. Ao introduzir-se um dielétrico entre as armaduras de um condensador (Figura 5.6), a sua capacidade aumenta num factor K , próprio de cada dielétrico e independentemente da forma ou tamanho do condensador (fenómeno descoberto por Cavendish no século XVIII e estudado por Michael Faraday no século XIX). Se a capacidade do condensador na ausência de dielétrico for C_0 , após a introdução daquele a capacidade aumentará até

$$C = KC_0, \quad (5.32)$$

sendo $K > 1$ a constante dielétrica.

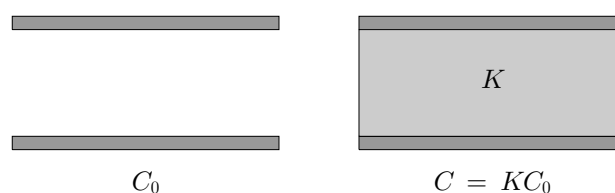


Figura 5.6: Ao introduzir um dielétrico de constante dielétrica K , a capacidade de qualquer condensador aumenta num factor K .

Em virtude do condensador estar isolado, a carga nas armaduras permanece constante durante a introdução de um dieléctrico. Como a capacidade aumenta, a diferença de potencial deve, então, diminuir:

$$\Delta V = \frac{Q_0}{C} = \frac{Q_0}{KC_0} = \frac{V_0}{K}. \quad (5.33)$$

Na construção de um condensador é aconselhável usar um dieléctrico entre as armaduras. O dieléctrico cumpre três funções:

1. Aumenta a capacidade do condensador;
2. Actua como isolante entre as armaduras, evitando que elas entrem em contacto, e servindo ao mesmo tempo como suporte;
3. Aumenta o valor máximo do potencial que o condensador pode suportar sem se queimar (devido ao aumento da rigidez dieléctrica).

5.6 Campo eléctrico dentro da matéria

Já vimos que dentro dos condutores em equilíbrio electrostático o campo eléctrico é nulo. No vácuo, o campo eléctrico é determinado pelas duas equações básicas da electrostática que estudámos no capítulo anterior. Dentro de um dieléctrico, o campo eléctrico não é igual ao que existiria sem dieléctrico já que, como vimos, a diferença de potencial entre as armaduras de um condensador diminui ao introduzir um dieléctrico.

Vamos obter as equações básicas da electrostática dentro de um dieléctrico. Consideremos o caso simples do condensador de placas planas e paralelas. A capacidade sem dieléctrico é dada pela Equação (5.8); ao introduzir um dieléctrico de constante K , a capacidade será

$$C = \frac{K\epsilon_0 A}{d}. \quad (5.34)$$

A diferença de potencial entre as placas é

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{\sigma d}{K\epsilon_0}, \quad (5.35)$$

onde d é a distância entre placas e σ a carga superficial. Se admitirmos que o campo E é uniforme, obtemos

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{\sigma}{K\epsilon_0}. \quad (5.36)$$

No caso do vácuo já vimos que, como consequência da lei de Gauss, o campo na superfície dos condutores é σ/ϵ_0 ; logo nos dieléctricos esta lei deverá ser modificada como veremos a seguir.

Um campo eléctrico externo polariza as cargas dentro dos átomos ou moléculas de um dieléctrico (ver Figura 5.7). A polarização dos átomos é sempre na mesma direcção e

sentido do campo eléctrico externo; o resultado é um campo interno induzido \mathbf{E}_i oposto ao campo externo \mathbf{E}_0 . O campo eléctrico total dentro do dieléctrico é

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_i . \quad (5.37)$$

O campo induzido é proporcional ao campo externo e, portanto, também proporcional ao campo total:

$$\mathbf{E}_i = -\chi_e \mathbf{E} , \quad (5.38)$$

onde χ_e é uma constante positiva chamada **susceptibilidade eléctrica**. Substituindo \mathbf{E}_i na Equação (5.37), obtemos a relação entre o campo, com e sem dieléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{1 + \chi_e} \mathbf{E}_0 , \quad (5.39)$$

e comparando com a relação obtida experimentalmente num condensador, vemos que a constante dieléctrica é igual a

$$K = 1 + \chi_e . \quad (5.40)$$

O campo \mathbf{E}_0 é produzido por todas as **cargas livres** (cargas que não são devidas à polarização), e as cargas induzidas são responsáveis pelo campo \mathbf{E}_i . O campo \mathbf{E}_0 é o campo que existiria se não houvesse dieléctrico.

Na ausência do dieléctrico o campo eléctrico verifica a lei de Gauss, na forma introduzida no Capítulo 2:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} , \quad (5.41)$$

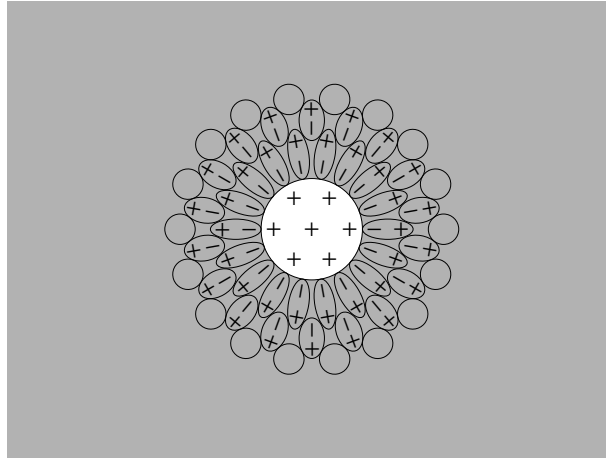


Figura 5.7: As cargas livres (em branco) dentro de um dieléctrico polarizam os átomos do dieléctrico, dando origem a um campo induzido oposto ao campo das cargas livres.

onde ρ_0 é a carga volúmica livre e ϵ_0 a permitividade eléctrica no vácuo. Resolvendo a Equação (5.39) em ordem a \mathbf{E}_0 e substituindo na Equação (5.41) obtemos

$$\nabla \cdot [(1 + \chi_e) \mathbf{E}] = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} . \quad (5.42)$$

Este último resultado pode ser escrito na forma simples

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0} , \quad (5.43)$$

onde \mathbf{D} é o chamado **deslocamento eléctrico**, e define-se como

$$\boxed{\mathbf{D} \equiv \epsilon \mathbf{E}} . \quad (5.44)$$

A **permitividade eléctrica** ϵ do material é definida na seguinte forma:

$$\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0 = K \epsilon_0 . \quad (5.45)$$

A permitividade é, assim, uma constante positiva maior que a permitividade do vácuo. Um condutor perfeito teria uma susceptibilidade e uma permitividade infinitas. No caso de campos variáveis, a permitividade depende da frequência de oscilação do campo eléctrico. A polarização dos átomos ou moléculas não acontece em forma instantânea e, portanto, a oscilação das cargas induzidas apresenta um atraso em relação à oscilação do campo.

De qualquer forma, a lei de Gauss, na forma que já conhecíamos, continua válida para o campo dentro do meio dieléctrico em função da carga volúmica total (livre mais induzida):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (5.46)$$

Esta última equação designa-se forma **microscópica** da lei de Gauss; esta forma não é muito útil pois as cargas induzidas dependem do campo no dieléctrico, e para calcular o campo no dieléctrico seria preciso conhecer as cargas induzidas. Assim, a forma **macroscópica** (Equação 5.43) é mais apropriada, pois permite calcular o deslocamento eléctrico (conhecidas algumas condições fronteira) a partir da carga volúmica livre; o campo eléctrico calcula-se em função do deslocamento e, finalmente, a carga volúmica induzida.

Problemas

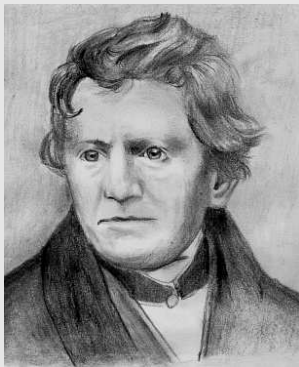
1. Que quantidade de carga deve ser removida de um condensador de 850 pF para o seu potencial diminuir 5 V?
2. Um condensador de placas planas e paralelas distanciadas 1 cm e de 12 cm^2 de área, está totalmente preenchido por dois dieléctricos, cada um com espessura igual a 0,5 cm e a mesma área das placas. Calcule a capacidade do condensador sabendo que as constantes dos dieléctricos são 4,9 e 5,6.
3. Um condensador de placas planas paralelas tem duas placas de área A separadas uma distância x .
 - (a) Se a carga armazenada é Q , calcule a energia armazenada em função de x .
 - (b) Calcule o aumento da energia electrostática (dU) devido a um aumento infinitesimal da distância entre as placas (dx).
 - (c) Calcule a força entre as placas e diga se é atractiva ou repulsiva. (Sugestão: o trabalho realizado pela força entre as placas é igual à diminuição da energia electrostática.)
 - (d) Mostre que o módulo da força calculada na alínea c é igual a $QE/2$, onde E é o campo entre as placas. A força sobre uma carga Q dentro de um campo E é QE ; porque aparece o factor $1/2$ no resultado anterior?
4. Calcule a energia armazenada num condensador cilíndrico a partir da energia volumica, em função do campo eléctrico. Mostre que o resultado verifica a Equação (5.31).
5.
 - (a) Qual é a carga superficial máxima (σ_{\max}) que pode existir na superfície de um condutor isolado, rodeado por ar, sem se produzir uma descarga eléctrica?
 - (b) Qual é o raio mínimo (r_{\min}) de uma esfera metálica para que possa estar ao potencial de 10^6 V sem se descarregar?
 - (c) Calcule o potencial máximo que pode alcançar uma esfera metálica de raio 1 cm.
6. Considere um condensador de placas planas e paralelas, de área $0,3 \text{ m}^2$ e distanciadas 0,5 cm. Entre as placas encontra-se uma chapa de acrílico com a mesma área e espessura igual a 0,5 cm. O condensador é carregado até a diferença de potencial ser igual a 12 V e, de seguida, é desligado da fonte usada para o carregar. Qual é o trabalho necessário para retirar a chapa de acrílico de entre as placas do condensador?
7. No condensador do problema anterior, calcule o potencial de ruptura com dieléctrico e depois de este ser removido.

8. A capacidade de um condensador plano é normalmente calculada desprezando-se os efeitos das bordas, isto é, supondo o campo interno uniforme e o campo externo nulo. Quando se consideram os efeitos das bordas, o valor exacto da capacidade é superior ou inferior a este valor aproximado?
9. Quando o núcleo de urânio (${}_{92}\text{U}$) captura um neutrão, fissiona-se em dois outros núcleos, emitindo vários neutrões que, por sua vez, podem provocar a fissão de outros núcleos. Admitindo que os produtos de fissão são núcleos com cargas iguais a $+46e$ e que, depois da fissão, os dois núcleos estão em repouso e separados por uma distância igual ao dobro dos respectivos raios $2R \approx 1,3 \cdot 10^{-14} \text{ m}$, calcule:
- (a) A energia libertada na fissão, admitindo que esta é igual à energia potencial electrostática dos fragmentos da fissão.
 - (b) Quantas fissões por segundo são necessárias para gerar uma potência de 1 MW num reactor de urânio?
 - (c) Por quantos dias funcionaria o reactor da alínea b se tivesse uma mole de núcleos de urânio?

Conceitos básicos

- Corrente eléctrica
- Resistência
- Lei de Ohm
- Efeito Joule
- Fonte de força electromotriz

Georg Simon Ohm



(1789-1854)

Físico e matemático alemão, nasceu em Erlangen, na Baviera. Foi professor de matemática em Colónia e em Nuremberga. Entre 1825 e 1827, Ohm desenvolveu a primeira teoria matemática da condução eléctrica nos circuitos, baseando-se no estudo da condução do calor de Fourier e fabricando os fios metálicos de diferentes comprimentos e diâmetros usados nos seus estudos da condução eléctrica. Este seu trabalho não recebeu o merecido reconhecimento na sua época, tendo a famosa lei de Ohm permanecido desconhecida até 1841 quando recebeu a medalha Copley da *Royal Society* britânica. Até essa data os empregos que teve em Colónia e Nuremberga não eram permanentes não lhe permitindo manter um nível de vida médio. Só depois de 1852, dois anos antes de morrer, conseguiu uma posição estável como professor de física na Universidade de Munique.

Corrente eléctrica

No ano de 1800 o italiano Alessandro Volta construiu a primeira pilha química, a qual desencadeou uma intensa investigação dos fenómenos eléctricos e magnéticos. Pela primeira vez na história da ciência era possível produzir um fluxo contínuo de cargas eléctricas.

Nos capítulos anteriores estudámos condutores isolados, em equilíbrio electrostático, e, portanto, a potencial constante. Qualquer carga introduzida num condutor isolado distribui-se rapidamente na sua superfície, regressando o condutor ao seu estado de equilíbrio. Uma pilha mantém um condutor em estado de desequilíbrio. A pilha introduz uma diferença de potencial nos extremos do condutor; o extremo que estiver ligado ao eléctrodo **positivo** da pilha, terá um potencial V_A maior do que o potencial V_B do extremo ligado ao eléctrodo **negativo**. Os electrões livres do condutor deslocar-se-ão na direcção do extremo A com maior potencial, como se mostra na Figura 6.1.

Para conseguir manter a diferença de potencial entre os pontos A e B, a pilha deve extrair os electrões livres no ponto A (eléctrodo positivo), e injectar electrões no ponto B (eléctrodo negativo). Desta forma não se acumulam cargas negativas e positivas em A e em B, respectivamente, e o condutor não recupera o estado de equilíbrio; mantém-se um fluxo contínuo de carga negativa entrando no condutor pelo extremo B e saindo por A.

O fluxo de carga constitui a **corrente eléctrica**; a intensidade da corrente através de uma superfície é igual à carga transferida através da superfície, por unidade de tempo:

$$I \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} . \quad (6.1)$$

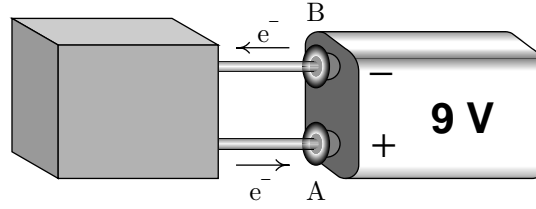


Figura 6.1: Uma pilha mantém uma diferença de potencial constante entre dois pontos de um condutor. A pilha extrai electrões no ponto com maior potencial, e fornece electrões no ponto com menor potencial.

A corrente não deverá ser interpretada como a «derivada» da carga em função do tempo, o que pode conduzir a confusões; na equação anterior ΔQ está distribuída sobre uma superfície e não é simplesmente o aumento de uma função Q devido ao aumento da variável t . O que por vezes acontece é que para uma superfície fixa é possível encontrar uma relação directa entre a carga que atravessa a superfície a partir de um instante fixo e o intervalo de tempo a partir do instante inicial; nesse caso, se t representa o intervalo de tempo, Q não pode ser qualquer função, mas será necessariamente crescente a partir de zero, e a sua derivada será igual à corrente instantânea. A carga total que atravessa a superfície entre t_1 e t_2 é sempre dada pelo integral

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I \, dt. \quad (6.2)$$

A unidade de corrente eléctrica usada no Sistema Internacional de unidades é o **ampere**, representado pela letra A ($1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$). Por exemplo, se a corrente num condutor fosse 3 A, a carga dos electrões que saem do eléctrodo negativo e entram no eléctrodo positivo da bateria, durante 5 segundos, seria -15 coulombs. De igual forma podemos considerar que nos 5 segundos a bateria perdeu $+15 \text{ C}$ no eléctrodo positivo e recebeu $+15 \text{ C}$ no eléctrodo negativo, já que, ao perder electrões, o eléctrodo negativo fica carregado positivamente. Por convenção definimos o sentido da corrente I como o sentido da transferência de carga positiva. A corrente num condutor é sempre dirigida do ponto com maior potencial para o ponto com menor potencial.

Exemplo 6.1

Numa lâmpada fluorescente de 3 cm de diâmetro, considere que existe um fluxo de $2 \cdot 10^{18}$ electrões por segundo, e um fluxo de $0,5 \cdot 10^{18}$ iões (de carga $+e$) por segundo. Calcule a corrente.

O gás ionizado dentro da lâmpada é um condutor com portadores de carga positiva e negativa (Figura 6.2). Quando existe uma diferença de potencial entre os terminais da lâmpada, os electrões deslocam-se para o terminal com maior potencial, enquanto os iões se deslocam em sentido contrário. As duas correntes, electrónica e iónica, têm assim o

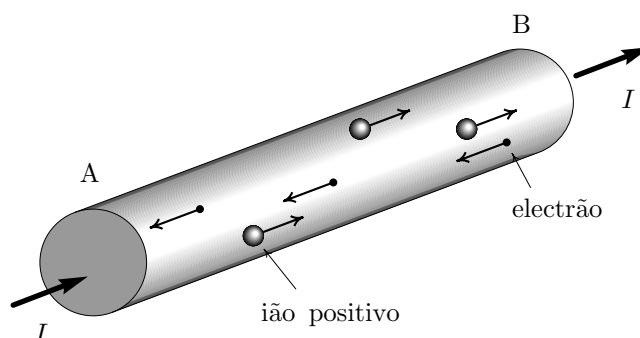


Figura 6.2: Movimento de cargas dentro de uma lâmpada fluorescente.

mesmo sentido (o deslocamento de iões e electrões deixa um excesso de carga positiva no ponto B). A corrente total é a soma das correntes electrónica (I_e) e iónica (I_i):

$$I = I_e + I_i .$$

Calcula-se cada uma das correntes multiplicando o fluxo dos portadores de carga pela sua carga; neste caso, o valor absoluto da carga dos iões e electrões é igual à carga elementar:

$$\begin{aligned} I_e &= 2 \cdot 10^{18} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ A} = 0,32 \text{ A} , \\ I_i &= 0,5 \cdot 10^{18} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ A} = 0,08 \text{ A} , \\ I &= 0,32 \text{ A} + 0,08 \text{ A} = 0,4 \text{ A} . \end{aligned}$$

O fluxo de electrões é maior do que o fluxo de iões uma vez que no condutor que liga a lâmpada à fonte existe um fluxo de electrões correspondente à corrente total 0,4 A, ou seja $2,5 \cdot 10^{18} \text{ e}^-/\text{s}$. Em cada segundo entram na lâmpada $2,5 \cdot 10^{18}$ electrões no ponto B: $2 \cdot 10^{18}$ percorrem a lâmpada e os restantes $0,5 \cdot 10^{18}$ recombinaem-se com os $0,5 \cdot 10^{18}$ iões que se deslocam desde o ponto A até o ponto B. Em cada segundo, o mesmo número ($0,5 \cdot 10^{18}$) de átomos neutros são ionizados no ponto A. Os $0,5 \cdot 10^{18}$ electrões libertados na ionização de átomos neutros, mais os $2 \cdot 10^{18}$ electrões que entram na lâmpada em B, saem pelo ponto A. Se o sistema estiver em equilíbrio, existirá também um fluxo de $0,5 \cdot 10^{18}$ átomos neutros por segundo, desde o ponto B até o ponto A; o fluxo total de massa é $2,5 \cdot 10^{18}$ electrões por segundo, desde o ponto B até o ponto A ($2 \cdot 10^{18}$ electrões de condução mais $0,5 \cdot 10^{18}$ transportados pelos átomos neutros). ■

6.1 Densidade de corrente

Além dos condutores, existem muitos outros sistemas onde pode existir corrente eléctrica. Sempre que existam partículas carregadas em movimento existirão fluxo de carga e corrente eléctrica. Consideremos uma substância que tem n partículas portadoras de carga por unidade de volume, todas elas com a mesma carga q e velocidade v . As partículas

que passam num intervalo de tempo Δt , através de uma superfície S , formam um sólido de base S e altura $d = v\Delta t \cos \theta$, onde θ é o ângulo formado pelo vector velocidade (\mathbf{v}) e a normal (\mathbf{e}_n) à superfície (Figura 6.3). No topo do sólido encontram-se as partículas que passaram no instante inicial t_0 , e na base estão as partículas que acabam de chegar a S no instante $t_0 + \Delta t$. O número total de portadores de carga dentro do sólido é dado pelo produto do **número volúmico** de partículas (n) pelo volume do sólido:

$$N = nAv\Delta t \cos \theta, \quad (6.3)$$

e a sua carga total é dada por ΔQ que passa através de S no intervalo Δt :

$$\Delta Q = qnAv\Delta t \cos \theta. \quad (6.4)$$

Em função do versor \mathbf{e}_n , normal à superfície, a corrente através de S é

$$I = \rho A(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_n), \quad (6.5)$$

onde $\rho = nq$ é a carga volúmica devida às partículas portadoras de carga.

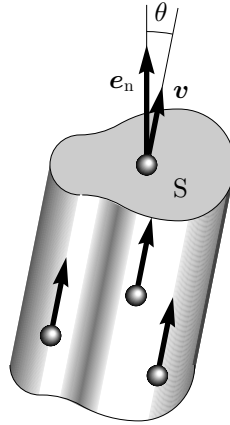


Figura 6.3: Partículas com velocidade comum \mathbf{v} . As partículas que passam através da superfície S , num intervalo Δt , encontram-se dentro de um sólido com base S .

Podemos generalizar o resultado anterior ao caso em que a velocidade e o número volúmico de portadores de carga não sejam constantes, mas variem com a posição. Neste caso, para calcular a corrente I , dividimos a superfície em pequenos elementos (Figura 6.4). Em cada elemento tanto \mathbf{v} como \mathbf{e}_n variam mas, como a área é pequena, obteremos uma boa aproximação se usarmos os seus valores médios e a Equação (6.5); deste modo, a corrente dI através de cada um dos elementos de superfície de área dA , é

$$dI = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (6.6)$$

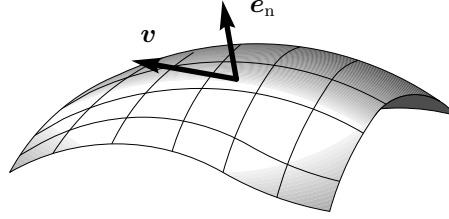


Figura 6.4: Superfície S , com densidade de corrente e vector normal variáveis.

Integrando dI sobre toda a superfície S obtém-se a corrente total:

$$I = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (6.7)$$

Definimos a **densidade de corrente** \mathbf{J} como o vector $\rho\mathbf{v}$, no sentido do fluxo da carga positiva:

$$\boxed{\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}}. \quad (6.8)$$

A densidade de corrente será no sentido da velocidade dos portadores de carga, se a carga destes for positiva, ou no sentido oposto à velocidade se a carga dos portadores for negativa. A corrente é o fluxo de carga através de uma superfície e é igual ao integral de superfície do campo \mathbf{J} :

$$\boxed{I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}}. \quad (6.9)$$

Num condutor podem existir vários tipos diferentes de portadores de carga (como no Exemplo 6.1). Nesses casos existe uma densidade de corrente \mathbf{J} associada a cada «espécie» de portadores, e a densidade de corrente total é a soma de todas elas. Um caso particular é quando a densidade de corrente é constante e normal à superfície, ou seja, $I = JA$.

Se a superfície S na Equação (6.9) for uma superfície fechada, o integral de superfície de \mathbf{J} será igual à carga total que sai da superfície, por unidade de tempo. Devido à conservação da carga, a carga que sai através da superfície fechada S , será igual à diminuição da carga interna dentro do volume delimitado por S :

$$-\frac{dq_{\text{int}}}{dt} = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}. \quad (6.10)$$

A carga interna é igual ao integral da carga volúmica na região R delimitada por S, e o termo do lado direito da equação anterior pode ser calculado como um integral de volume, por meio do teorema da divergência:

$$-\iiint_R \frac{d\rho}{dt} dV = \iiint_R \nabla \cdot \mathbf{J} dV ; \quad (6.11)$$

logo, para que este resultado seja válido em qualquer volume, é necessário que as funções dentro dos integrais sejam iguais:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt}} . \quad (6.12)$$

Esta equação é consequência directa da conservação da carga, e é chamada **equação de continuidade**. Quando a divergência da densidade de corrente for zero, a corrente é **estacionária**; nesse caso não existe acumulação de carga em nenhum ponto.

Exemplo 6.2

Um fio de cobre de raio 0,0815 cm transporta uma corrente de 1 A. Calcule a densidade de corrente e a velocidade média dos electrões de condução. (A massa atómica do cobre é 63,5, e a sua massa volúmica 8,92 g/cm³, e por cada átomo de cobre existe aproximadamente um electrão de condução.)

Num fio de raio constante, com corrente constante, a densidade de corrente pode variar ao longo da secção transversal e, por isso, podemos apenas calcular a densidade de corrente média. Admitindo que \mathbf{J} é constante e paralela ao eixo do fio, obtemos

$$J = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{1 \text{ A}}{\pi (0,0815 \text{ cm})^2} \approx 48 \frac{\text{A}}{\text{cm}^2} .$$

Por cada átomo de cobre existe um electrão de condução, logo, por cada mole de átomos de cobre existem $6,022 \cdot 10^{23}$ electrões de condução. O número de electrões de condução por grama de cobre é

$$\frac{6,022 \cdot 10^{23}}{63,5 \text{ g}} \approx 9,48 \cdot 10^{21} \text{ g}^{-1} .$$

Multiplicando pela massa volúmica do cobre, obtemos o número volúmico de electrões de condução:

$$n = 9,48 \cdot 10^{21} \text{ g}^{-1} \cdot 8,92 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \approx 8,46 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} .$$

A carga volúmica do gás de electrões de condução é

$$\rho = ne = 13,5 \frac{\text{kC}}{\text{cm}^3} .$$

Finalmente, podemos calcular a velocidade média dos electrões de condução:

$$v = \frac{J}{\rho} = \frac{48 \text{ A/cm}^2}{13,5 \text{ kC/cm}^3} \approx 3,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 12,96 \frac{\text{cm}}{\text{h}}. \quad \blacksquare$$

Como vemos no exemplo anterior, os electrões de condução num fio com corrente eléctrica têm uma velocidade média de poucos centímetros por hora. No entanto, a nossa experiência quotidiana diz-nos que correntes eléctricas dentro de fios metálicos se propagam de maneira instantânea. Devemos lembrar que estamos a tratar com um gás de electrões com carga volúmica bastante elevada (13,5 kC/cm³ no Exemplo 6.2) e no instante em que aceleramos o gás num extremo do condutor, começam a sair imediatamente cargas negativas no extremo oposto, qualquer que seja o comprimento do fio. É uma situação análoga à abertura de uma torneira ligada a uma mangueira; se esta já está cheia de água, no momento em que se abre a torneira começa logo a sair água no extremo oposto da mangueira, mesmo no caso da velocidade da água ser muito pequena.

6.2 Resistência e lei de Ohm

Sempre que existe transporte de carga positiva de um ponto A até outro ponto B (que consideramos equivalente ao transporte de carga negativa de B para A), existe uma corrente associada I dirigida de A para B. Se o transporte de cargas é devido à acção de um campo eléctrico E , existe uma diferença de potencial $\Delta V = V_A - V_B > 0$ entre os dois pontos¹. Define-se a resistência R entre os pontos A e B como

$$R \equiv \frac{\Delta V}{I}. \quad (6.13)$$

A unidade de resistência no Sistema Internacional, é o **ohm** ($1 \Omega = 1 \text{ V}/1 \text{ A}$). O valor da resistência R não é necessariamente constante. A curva que representa a corrente I obtida num material, como resultado da aplicação de uma diferença de potencial ΔV , é chamada **característica tensão-corrente** do material. A resistência representa o valor do declive da característica em cada ponto. A Figura 6.5 mostra as curvas características de três materiais. Quando a característica tensão-corrente é uma recta, isto é, quando a resistência é independente da corrente, diz-se que os materiais são **ohmicos** (como por exemplo qualquer metal) e verificam a **lei de Ohm**.

A lei de Ohm é uma consequência da proporcionalidade entre a densidade de corrente e o campo eléctrico e é dada pela expressão:

$$\boxed{J = \sigma E}, \quad (6.14)$$

¹O campo electrostático não é a única causa da corrente. A corrente pode ser o resultado de reacções químicas ou de processos mecânicos.

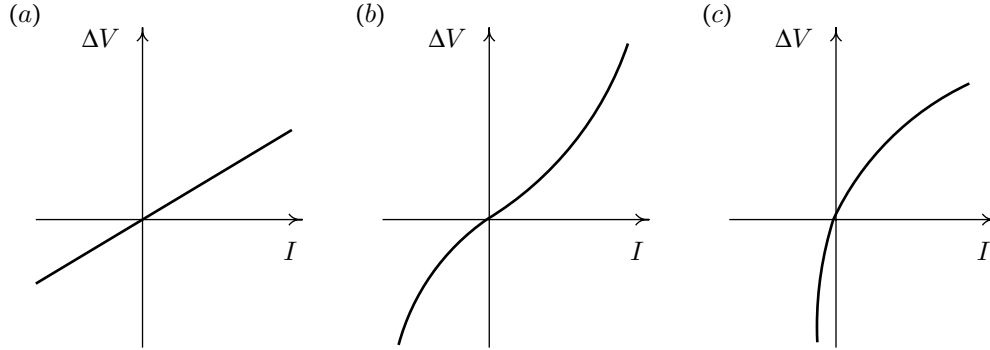


Figura 6.5: Características tensão-corrente de uma barra metálica (a), de uma lâmpada incandescente (b) e de um díodo (c).

onde a constante de proporcionalidade σ é uma constante própria de cada condutor ohmico, e recebe o nome de **condutividade**.

Nos materiais ohmicos, quando se introduz um campo eléctrico, a velocidade média dos portadores de carga é constante e directamente proporcional ao valor do campo; se os portadores de carga fossem livres, seriam acelerados pelo campo. Deve pois existir um mecanismo oposto à aceleração do gás de electrões. Este mecanismo não pode ser explicado, satisfatoriamente, pela física clássica; o movimento dos electrões dentro do condutor é um fenómeno quântico no qual é patente a natureza ondulatória dos electrões. O gás de electrões não é um **gás ideal**. Aceitaremos a lei de Ohm simplesmente como uma lei empírica, sem tentar explicar as suas causas.

Em seguida demonstraremos que a proporcionalidade entre a densidade de corrente e o campo eléctrico implica uma resistência constante (com respeito a I e ΔV). Consideremos um fio de material ohmico e seja A a área da secção transversal, e L o comprimento do fio. Se existir uma diferença de potencial ΔV entre os extremos do fio, existirá também um campo eléctrico E . A densidade de corrente é dada pela lei de Ohm (Equação 6.14) e a corrente no fio será o produto de J pela área A :

$$I = \sigma EA. \quad (6.15)$$

Se a corrente for constante, a densidade de corrente e o campo eléctrico também serão constantes e, portanto,

$$E = \frac{\Delta V}{L}. \quad (6.16)$$

Eliminando o campo E nas duas últimas equações e calculando $R = \Delta V/I$ obtemos

$$\boxed{R = \frac{L}{\sigma A} = \frac{\rho L}{A}}, \quad (6.17)$$

onde a **resistividade** ρ é definida como o inverso da condutividade. No caso de condutores

com uma forma mais complexa, o cálculo da resistência é mais complicado, mas o resultado é sempre o produto entre ϱ e uma constante que depende da forma geométrica². Assim, a lei de Ohm costuma ser escrita na forma da Equação (6.13), com R constante, ou na forma mais fundamental da Equação (6.14).

O transporte de electrões através de um metal é um fenómeno quântico (em consequência da elevada densidade da nuvem electrónica) que não pode ser explicado correctamente por meio de modelos clássicos. Assim, limitar-nos-emos a relacionar a condutividade com a mobilidade dos electrões dentro do metal. Na lei de Ohm, Equação (6.14), podemos substituir a definição da densidade de corrente, $J = \rho v$, para obter

$$\sigma = \frac{J}{E} = \frac{\rho v}{E}. \quad (6.18)$$

O coeficiente v/E é uma medida da resposta dos portadores de carga ao campo eléctrico, e denomina-se **mobilidade eléctrica**, μ_e . Temos pois que a condutividade é directamente proporcional ao número volúmico de portadores de carga e à mobilidade do condutor:

$$\sigma = \frac{1}{\varrho} = \rho \mu_e. \quad (6.19)$$

Nos materiais ohmicos tanto o número volúmico de portadores de carga como a mobilidade são constantes. Num metal, o número de electrões de condução não é alterado significativamente pela acção do campo eléctrico. Os electrões de condução deslocam-se rapidamente em todas as direcções; no entanto, em condições de equilíbrio a velocidade média do gás de electrões é nula. Na presença de um campo eléctrico, os electrões são acelerados na direcção do campo, mas as colisões com a rede iónica produzem uma distribuição de velocidades em todas as direcções, com um valor médio diferente de zero; esse valor médio v define a mobilidade $\mu_e = v/E$.

6.3 Resistência e temperatura

A discussão da secção anterior é apenas válida quando a temperatura é constante. Quando a temperatura aumenta num metal, embora o número de electrões de condução permaneça quase constante, o seu número volúmico diminui, devido à dilatação do metal. Esta variação é pequena comparada com a variação da mobilidade; a temperaturas mais elevadas, as vibrações da rede iónica são mais bruscas o que dificulta o movimento do gás de electrões, diminuindo a mobilidade μ_e . A diminuição da mobilidade conduz a um aumento da resistividade. A dependência da resistividade com a temperatura nos metais é linear, excepto a temperaturas muito baixas, perto do zero absoluto (Figura 6.6).

O aumento linear da resistividade pode expressar-se por meio da equação

$$\varrho = \varrho(20^\circ\text{C}) [1 + \alpha(20^\circ\text{C})(T - 20)], \quad (6.20)$$

²A resistividade ϱ não deverá ser confundida com a carga volúmica ρ .

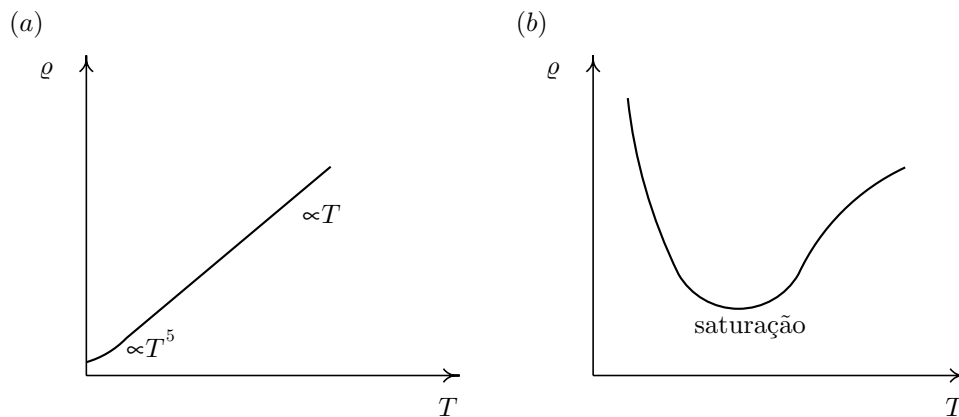


Figura 6.6: Variação da resistividade com a temperatura, para um metal (a) e para um semiconductor (b).

onde $\rho(20^\circ\text{C})$ é o valor da resistividade à temperatura ambiente de 20°C , $\alpha(20^\circ\text{C})$ é uma constante chamada **coeficiente de temperatura** e T a temperatura medida em $^\circ\text{C}$. Na Tabela 6.1 encontram-se os valores da resistividade e o coeficiente de temperatura de alguns metais. De notar que, embora $\alpha(20^\circ\text{C})$ dependa da escolha arbitrária de uma temperatura padrão, neste caso 20°C , o produto $\rho(20^\circ\text{C})\alpha(20^\circ\text{C})$ é constante e igual ao declive da recta resistividade-temperatura.

Tabela 6.1: Resistividade e coeficiente de temperatura de metais a 20°C .

Metal	$\rho(20^\circ\text{C})/\text{n}\Omega \cdot \text{m}$	$\alpha(20^\circ\text{C})/^\circ\text{C}^{-1}$
Alumínio	28	0,0039
Cobre	17	0,0039
Chumbo	220	0,0043
Ferro	100	0,0050
Mercúrio	960	0,0009
Níquel-cromo	1000	0,0004
Prata	16	0,0038
Tungsténio	55	0,0045

Fonte: Tipler, P. A. *Physics*, Worth Publishers, New York, 1976, pág. 793.

Nos materiais **semicondutores**, por exemplo o silício e o germânio, os portadores de carga são positivos e negativos, e o seu número volúmico aumenta rapidamente com a temperatura, o que faz com que a resistividade diminua. Para uma determinada tempera-

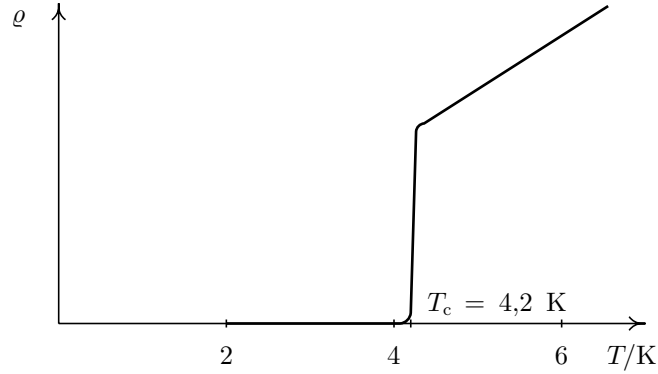


Figura 6.7: Resistividade do mercúrio, em função da temperatura. No valor crítico $T_c = 4,2$ K, a resistividade decresce bruscamente.

tura o semiconductor atinge um nível de saturação a partir do qual o número volúmico de portadores de carga não aumenta mais, e a resistividade começa a aumentar (Figura 6.6).

Exemplo 6.3

Considere o fio do Exemplo 6.2, com uma corrente de 1 A. Calcule o campo eléctrico dentro do fio e a diferença de potencial nos extremos, se o comprimento do fio for 40 cm, e a temperatura 30°C .

A resistividade no fio calcula-se usando os valores para o cobre (Tabela 6.1)

$$\rho(30^\circ\text{C}) = 1,7 \cdot 10^{-8} (1 + 0,0039 \cdot 10) \Omega \cdot \text{m} \approx 1,766 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} ;$$

a resistência do fio é

$$R(30^\circ\text{C}) = \frac{\rho(30^\circ\text{C})L}{A} = \frac{1,766 \cdot 10^{-8} \cdot 0,4}{\pi(0,000815)^2} \Omega \approx 3,39 \text{ m}\Omega .$$

A diferença de potencial obtém-se a partir da lei de Ohm:

$$\Delta V = IR = 3,39 \text{ mV} .$$

Como a densidade de corrente é constante, o campo eléctrico também deve ser constante e, portanto, pode ser calculado como

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{3,39}{0,4} \frac{\text{mV}}{\text{m}} = 8,475 \frac{\text{mV}}{\text{m}} . \quad \blacksquare$$

6.4 Supercondutividade

Em 1911, o físico holandês H. Kamerlingh Onnes descobriu que em alguns metais a resistividade diminuía bruscamente, tornando-se quase nula, a temperaturas muito baixas perto do zero absoluto. Por exemplo, no mercúrio a resistência decresce 4 ordens de grandeza quando a temperatura é igual a 4,2 K; esta temperatura é chamada **temperatura crítica**, T_c (Figura 6.7). A este fenómeno chama-se supercondutividade, e os materiais que apresentam este comportamento são conhecidos como supercondutores.

Não há muito tempo, as aplicações práticas da supercondutividade eram bastante limitadas, devido às temperaturas críticas serem difíceis de obter por serem muito baixas. Na década de 80 vários novos materiais foram descobertos, nos quais a temperatura crítica é muito mais elevada, sendo possível obter-se por meio de azoto líquido. A temperatura crítica mais alta pertence a um cristal composto por Hg, Ba, Ca, Cu e O, obtido em 1993, com uma temperatura crítica da ordem dos 135 K.

A supercondutividade é um fenómeno quântico, devido ao acoplamento dos electrões a baixas temperaturas, formando os chamados **pares de Cooper**, que podem atravessar o supercondutor sem nenhuma oposição da rede iónica. Os electrões têm *spin* de $1/2$, podendo agruparem-se em pares com *spin* 0. A supercondutividade nos novos materiais de temperatura crítica elevada parece ser devida a um mecanismo diferente da formação dos pares de Cooper.

Num fio condutor fechado não pode existir corrente já que se o potencial diminuir ao longo do fio, terá que voltar a aumentar antes de se chegar ao mesmo ponto inicial, e uma corrente implicaria uma queda contínua de potencial ao longo do fio. No entanto, num fio supercondutor fechado pode existir corrente já que quando a resistência é nula, a corrente pode ser diferente de zero mesmo quando não existe diferença de potencial (Figura 6.8). Um fio supercondutor fechado pode manter uma corrente por muito tempo, sem a intervenção de nenhuma bateria, enquanto a temperatura for menor que a temperatura crítica.

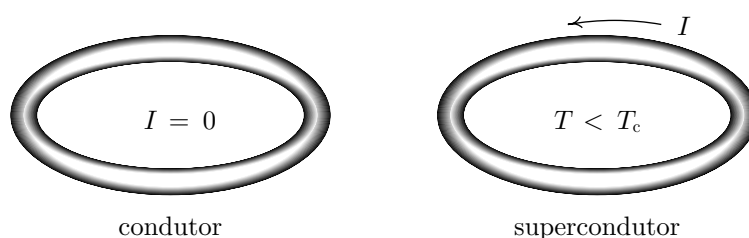


Figura 6.8: Num fio condutor fechado não pode existir corrente eléctrica, contrariamente ao que se passa no caso de um supercondutor.

6.5 Energia dissipada num condutor

Em qualquer condutor onde existe uma corrente I , a corrente está sempre dirigida no sentido de maior para menor potencial. Por exemplo, no condutor da Figura 6.9, o sentido do movimento dos electrões implica que o potencial V_B é maior que o potencial V_A . Num intervalo de tempo Δt entra no extremo A uma carga

$$\Delta Q = I\Delta t, \quad (6.21)$$

com energia electrostática $U_A = V_A\Delta Q$, e sai a mesma quantidade de carga, mas com uma energia $U_B = V_B\Delta Q$ (Figura 6.9). Como $V_B > V_A$ e ΔQ é negativa, concluímos que $U_B < U_A$ e, portanto,

$$\Delta U = U_B - U_A = \Delta V\Delta Q < 0. \quad (6.22)$$

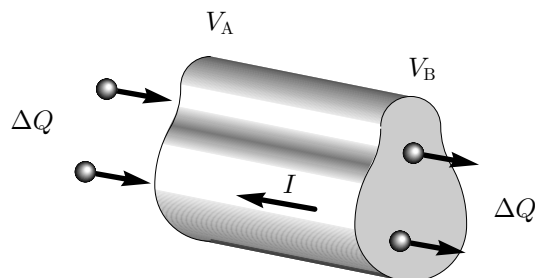


Figura 6.9: Um condutor com corrente. A energia dos electrões diminui enquanto estes percorrem o condutor.

O mesmo resultado obtém-se no caso de portadores de carga positiva. Os portadores de carga num condutor com corrente perdem continuamente energia electrostática. A potência dissipada no condutor define-se como a energia dissipada por unidade de tempo e é igual a

$$\boxed{P = \Delta V I}. \quad (6.23)$$

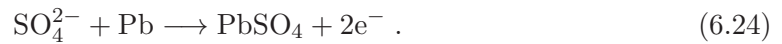
O movimento de portadores de carga é uniforme e não acelerado. Existe no sistema um mecanismo que absorve a energia cinética que os portadores de carga receberiam caso fossem realmente livres de acelerar dentro do campo eléctrico. No caso dos materiais ohmicos, o mecanismo de dissipação de energia são as colisões com a rede iónica, que transformam a energia eléctrica em calor. Este fenómeno de aquecimento dos condutores com a corrente é chamado **efeito Joule**. Na lâmpada fluorescente do Exemplo 6.1, o mecanismo são também as colisões, mas desta vez com átomos; a maior parte da energia dissipada é transformada em luz como resultado das colisões.

6.6 Fontes de força electromotriz

Uma fonte de tensão deve fornecer carga positiva pelo terminal a maior potencial, e receber carga positiva no terminal a menor potencial. Dentro da fonte devem existir forças diferentes da força eléctrica, pois a carga positiva desloca-se no sentido de menor para maior potencial, e em sentido oposto ao campo eléctrico. Nas pilhas químicas o movimento de cargas é o resultado de reacções químicas, e em outro tipo de fontes o deslocamento das cargas é devido a forças mecânicas.

Um exemplo de uma pilha química é a bateria de um automóvel (representada esquematicamente na Figura 6.10). O electrólito dentro da bateria é uma solução de ácido sulfúrico (H_2SO_4) e água (H_2O). Na solução, as moléculas do ácido separam-se em iões positivos H^+ e em iões negativos SO_4^{2-} . O eléctrodo negativo é composto por chumbo (Pb) e o eléctrodo positivo por dióxido de chumbo (PbO_2).

Os iões SO_4^{2-} atacam o eléctrodo negativo, combinando-se com o chumbo para formar sulfato de chumbo (PbSO_4):



Na reacção libertam-se dois electrões que fazem diminuir o potencial do eléctrodo negativo. Quando algum dispositivo é ligado à bateria, os electrões que entram no eléctrodo positivo combinam-se com o dióxido de chumbo e o ácido sulfúrico do electrólito, para produzir água e sulfato de chumbo:

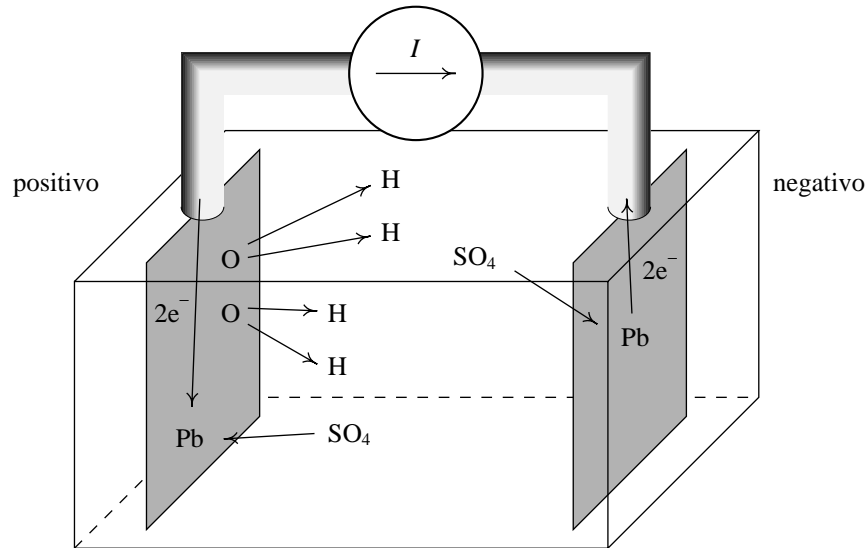
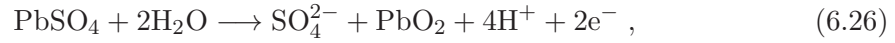


Figura 6.10: Reacções químicas dentro de uma bateria de carro.

Por cada dois electrões que circulam no circuito, duas moléculas de ácido sulfúrico do electrólito da bateria reagem com o metal dos eléctrodos, produzindo duas moléculas de água e duas moléculas de sulfato de chumbo. A bateria vai descarregando-se à medida que a concentração de ácido no electrólito diminui.

As reacções numa bateria de carro são reversíveis, sendo possível recarregá-la com uma corrente em sentido inverso: electrões a entrar no eléctrodo negativo e a sair do eléctrodo positivo. Nesta situação, as reacções nos eléctrodos positivo e negativo são respectivamente:



Ao recarregar a bateria, o sulfato acumulado nos eléctrodos desaparece, e a concentração de ácido no electrólito aumenta.

A energia fornecida pela fonte, por unidade de carga eléctrica transportada através da fonte, tem unidades de diferença de potencial e é chamada **força electromotriz**, ou simplesmente f.e.m., representada pela letra \mathcal{E} e medida em volts.

A característica tensão-corrente de uma fonte é, normalmente, uma recta com declive negativo (Figura 6.11); o declive tem unidades de resistência, e constitui a **resistência interna** da fonte. A energia fornecida pela fonte é igual ao produto da f.e.m. pela carga total ΔQ transportada durante o intervalo Δt . A potência fornecida é igual à energia fornecida por unidade de tempo:

$$\boxed{P = \mathcal{E}I} . \quad (6.28)$$

A potência fornecida ao circuito, VI , é menor que a potência total fornecida pela fonte devido à potência dissipada dentro da própria fonte:

$$P_{\text{diss}} = (\mathcal{E} - V)I = (\mathcal{E} - \mathcal{E} + rI)I = rI^2 . \quad (6.29)$$

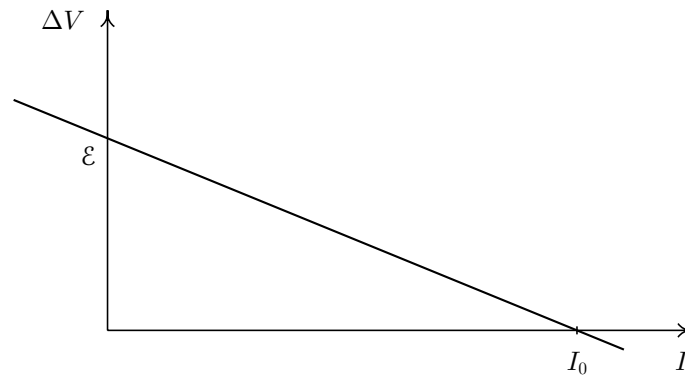


Figura 6.11: Característica tensão-corrente de uma fonte de tensão.

Problemas

- Uma aluna preocupada com a elevada conta de electricidade fez uma estimativa do consumo eléctrico associado a cada um dos dispositivos que usa em casa. A tabela seguinte mostra os tempos médios de uso diário e a potência média de cada um dos dispositivos.
 - Admita que o custo de 1 kW·h em Portugal é 17\$67 e complete a tabela (1 mês = 30 dias).
 - Qual é o consumo mensal de energia em joules?
 - Se a aluna dispensar a telenovela diária (1/2 hora, de segunda a sexta), quanto dinheiro poupará por mês?

Dispositivo	Potência média /W	t médio diário /horas	Energia por mês /kW·h	Custo mensal /escudos
4 lâmpadas	60 (cada)	3 (cada)		
televisão	80	4		
aquecedor	2000	5		
fogão	1200	1		
cilindro água quente	1500	3		

- Um fio condutor de 1 m de comprimento tem uma resistência de $0,3 \Omega$. O fio é esticado até o seu comprimento ser 2 m. Qual é a nova resistência?
- A temperatura num dado momento é 12°C . Quanto deve aumentar a temperatura para que a resistência de um fio de cobre aumente 10 %?
- Um disco de 18 cm de raio roda a 33 rotações por minuto num gira-discos. A superfície do disco tem uma carga superficial constante igual a $0,82 \text{ nC/cm}^2$. Calcule a corrente eléctrica associada à rotação do disco.
- A resistência de uma lâmpada incandescente de 60 W e 230 V, à temperatura ambiente de 20°C , é $R = 65 \Omega$. No entanto, as especificações do fabricante (60 W e 230 V) conduzem a um valor muito mais elevado da resistência. Justifique, calculando a temperatura do filamento de tungsténio quando a lâmpada se encontra acesa.
- Uma bateria de automóvel tem uma carga de 50 Ah. Calcule a massa total de ácido sulfúrico que reage no electrólito, e a massa de sulfato de chumbo acumulado nos eléctrodos, após a bateria descarregar, ficando com 70 % da carga máxima.

7. Uma bateria de automóvel tem escrito o valor 250 Ah, que corresponde à carga disponível quando a bateria está carregada a 100%.
- (a) Depois de algum uso, a bateria descarrega-se até 60%. A que carga corresponde este valor no sistema internacional de unidades?
- (b) Para recarregar a bateria, esta foi ligada a um carregador de 12 V. Inicialmente a corrente que passou do carregador para a bateria foi 7 A, e ao fim de 6 horas diminuiu até 3 A. Admitindo que a corrente diminuiu linearmente, com que percentagem da sua carga máxima fica a bateria ao fim das 6 horas?
8. Um fio condutor de cobre de 1,29 mm de diâmetro e isolamento de borracha pode suportar, com segurança, uma corrente máxima de 6 A.
- (a) Qual é a diferença de potencial que pode ser aplicada a 40 m deste fio?
- (b) Calcule a densidade de corrente e o campo eléctrico no fio atravessado por uma corrente de 6 A.
- (c) Calcule a potência dissipada no fio quando conduz uma corrente de 6 A.
9. Um metal tem uma carga volúmica negativa (ρ_e) devida aos electrões livres, e uma carga volúmica positiva (ρ_i) devida à carga total dos núcleos e dos electrões ligados a eles. Em qualquer instante, a carga volúmica no metal é $\rho = \rho_e + \rho_i$.
- (a) Dentro do metal, ρ_e verifica a equação de continuidade e ρ verifica a lei de Gauss. Demonstre que
- $$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\rho.$$
- (b) Encontre a solução geral da equação anterior e explique o seu significado.
- (c) Mostre que a constante ϵ_0/σ tem unidades de tempo.
- (d) Faça uma estimativa da ordem de grandeza da constante de tempo ϵ_0/σ de metais como o cobre e o alumínio.
10. Um fio de níquel-cromo de 1,8 mm de diâmetro vai ser usado para construir uma caldeira de água que produza 8 g de vapor de água por segundo. A fonte de alimentação a ser usada fornece tensão contínua de 220 V. Calcule o comprimento que deve ter o fio. (O calor de evaporação da água é de 2257,2 J/g.)

Conceitos básicos

- Circuitos de corrente contínua
- Circuitos equivalentes
- Associações em série e em paralelo
- Regras de Kirchhoff
- Decaimento exponencial

**Gustav Robert
Kirchhoff**





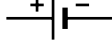


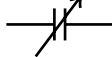
(1824-1887)

Nasceu na actual cidade de Kaliningrad na Rússia. Apesar de maior parte da sua vida ter andado de muletas ou cadeira de rodas foi um cientista muito produtivo. Começou por ser aluno de Gauss tendo trabalhado nas Universidades de Berlim, sem auferir ordenado, e de Breslau. Em 1854 foi contratado pela Universidade de Heidelberg onde colaborou com Bunsen no desenvolvimento da técnica de espectroscopia, técnica esta que permite analisar a composição química de uma substância a partir da luz que esta emite. Aplicou esta técnica no estudo da composição química do Sol explicando a origem do seu espectro de absorção. No mesmo ano, publicou as chamadas leis de Kirchhoff como resultado do desenvolvimento do trabalho de Ohm sobre a teoria de circuitos. Teve um papel importante no estudo da radiação do corpo negro, uma das bases da futura teoria quântica. Entre outras das suas famosas obras destacam-se os 4 volumes sobre física-matemática e o Tratado de Mecânica (1876) que em conjunto com os trabalhos de Mach e Hertz, marcaram uma nova era na interpretação da mecânica.

Circuitos eléctricos I

Neste capítulo vamos estudar os circuitos eléctricos com resistências, condensadores e fontes de f.e.m. constantes. No Capítulo 11 estenderemos este estudo ao caso de fontes de corrente alternada e circuitos com auto-indução magnética. Na Tabela 7.1 apresenta-se a forma esquemática de representar alguns elementos de um circuito.

Tabela 7.1: Diagramas usados para alguns elementos de circuitos.

Dispositivo	Diagrama
condensador	
resistência	
fonte ideal	
interruptor	
resistência variável	
condensador variável	

A maior parte dos elementos num circuito moderno são microscópicos e estão integrados dentro de blocos; no entanto, existem alguns elementos não integrados que podem ser identificados facilmente. As resistências usadas nos circuitos são pequenos cilindros cerâmicos (aproximadamente com 0,5 cm a 1,0 cm de comprimento) com três riscas de cores e uma possível quarta risca dourada ou prateada. As três primeiras riscas representam três algarismos que indicam o valor da resistência em ohms (Tabela 7.2). Os três algarismos correspondentes às três riscas devem ser lidos por ordem começando na risca que se encontra mais próxima de um dos extremos da resistência. Os primeiros dois algarismos representam um número de 1 a 99; por exemplo, se as duas primeiras riscas fossem vermelho e roxo, representariam o número 27. A terceira risca é a potência de dez pela qual se deve multiplicar o número anterior. No mesmo exemplo, se a terceira risca fosse azul, o valor da resistência seria $27 \cdot 10^6 \Omega$. Se não existir uma quarta risca, o valor da tolerância será de 20%, isto é, o valor dado da resistência tem uma margem de erro de 20%. Uma quarta risca prateada ou dourada representa uma tolerância de 10% ou 5%, respectivamente.

Os condensadores são de formas e tamanhos muito variados. Podem ser pequenos cilindros semelhantes às resistências, cilindros maiores com blindagem metálica, pequenos discos cerâmicos, etc. Identificam-se facilmente porque costumam trazer escrito o valor da capacidade e da diferença de potencial máxima que suportam sem ruptura do dielétrico. O tipo mais comum de condensador consiste em duas lâminas metálicas intercaladas com duas lâminas de papel (dielétrico) enroladas formando um cilindro; desta forma a superfície das armaduras pode ser muito maior do que a superfície do cilindro.

Tabela 7.2: Código de cores.

Cor	Algarismo
preto	0
castanho	1
vermelho	2
laranja	3
amarelo	4
verde	5
azul	6
roxo	7
cinzento	8
branco	9

7.1 Circuitos equivalentes

Dois circuitos, C_1 e C_2 , com dois terminais A e B, são considerados equivalentes se, para qualquer valor da diferença de potencial $\Delta V = V_A - V_B$, a corrente que entra num terminal e sai no outro terminal é a mesma nos dois circuitos (Figura 7.1). Para representar diferenças de potencial entre dois pontos usaremos a mesma convenção de índices usada no Capítulo 1 para os vectores de posição:

$$V_{BA} \equiv V_A - V_B, \quad (7.1)$$

isto é, V_{BA} é o aumento do potencial quando passamos do ponto B para o ponto A (positivo se $V_A > V_B$), ou a diminuição do potencial ao passar de A para B.

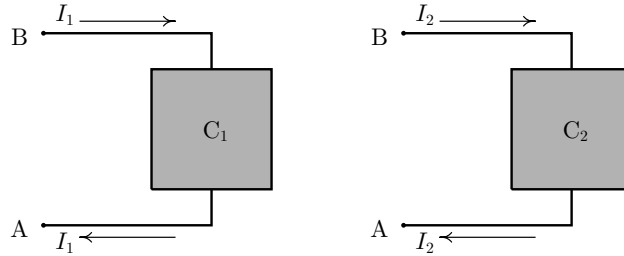


Figura 7.1: Circuitos equivalentes entre A e B.

Dois circuitos podem ser equivalentes entre dois pontos A e B, mas não serem equivalentes entre outro par de pontos. Um primeiro exemplo simples de circuitos equivalentes é um conjunto de elementos ligados em **série**: cada terminal de um dos elementos está ligado ao terminal de um outro elemento, formando uma cadeia entre dois pontos A e B, como se mostra na Figura 7.2. Um circuito equivalente é qualquer permuta na ordem dos elementos. A corrente que circula por cada elemento é necessariamente a mesma, independentemente da ordem em que se encontrarem os elementos; a diferença de potencial V_{AB} também é independente da ordem dos elementos.



Figura 7.2: Circuitos em série equivalentes.

Um segundo exemplo são os circuitos equivalentes a uma fonte de f.e.m. Já vimos no fim do capítulo anterior que a característica tensão-corrente de uma fonte é uma recta com declive negativo:

$$V_{AB} = \mathcal{E} - rI. \quad (7.2)$$

O mesmo resultado é obtido com qualquer dos circuitos da Figura 7.3, onde $I_0 = \mathcal{E}/r$. No **equivalente de Thévenin** (Figura 7.3a) a diferença de potencial entre os pontos A e B é igual à diferença entre \mathcal{E} e a queda de potencial na resistência interna, rI . No **equivalente de Norton** (Figura 7.3b) a corrente que passa pela resistência interna será unicamente $I - I_0$ e, portanto, a diferença de potencial entre A e B é a mesma e igual a

$$V_{AB} = -r(I - I_0) = \mathcal{E} - rI. \quad (7.3)$$

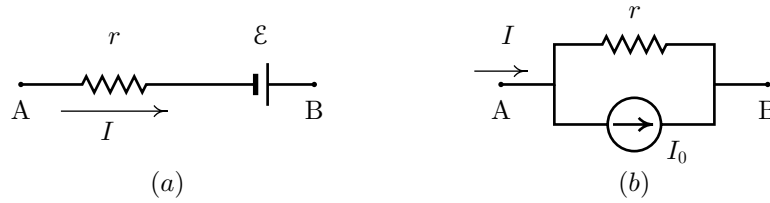


Figura 7.3: Equivalentes de Thévenin (a) e de Norton (b).

Os equivalentes de Thévenin e de Norton representam diferentes mecanismos de produção de força electromotriz. O equivalente de Thévenin corresponde a uma **fonte de tensão**; quando o circuito entre A e B está aberto, não circula corrente dentro da fonte; este tipo de comportamento é característico das pilhas químicas. O equivalente de Norton representa uma **fonte de corrente**; quando o circuito externo está aberto, circula uma certa corrente dentro da fonte; este tipo de comportamento é mais parecido com o que acontece num **gerador de van der Graff**, no qual a corrente é produzida pelo movimento mecânico de cargas sobre uma fita que roda entrando dentro de uma esfera condutora que retira o excesso de carga na fita. No entanto, seja qual for a fonte, do ponto de vista do circuito externo, pode ser substituída pelo equivalente de Thévenin ou de Norton, e o resultado será o mesmo nos dois casos.

Qualquer combinação de resistências e fontes lineares (característica tensão-corrente linear) entre dois pontos A e B, conduz a uma relação linear entre V_{AB} e I , que pode ser representada por um equivalente de Thévenin ou de Norton.

7.2 Associação de resistências e condensadores

Quando duas resistências, R_1 e R_2 , estão ligadas em série (Figura 7.4), a corrente que passa pelas duas resistências é a mesma $I_1 = I_2 = I$. A diferença de potencial V_{AB} entre os terminais do circuito em série é igual à soma das diferenças de potencial nas duas resistências, e usando a lei de Ohm obtemos

$$V_{BA} = V_{CA} + V_{BC} = IR_1 + IR_2. \quad (7.4)$$

**Figura 7.4:** Resistências e condensadores em série.

Esta seria a mesma relação entre V_{AB} e I que se obteria se tivéssemos uma resistência $R_1 + R_2$ entre A e B. O resultado pode ser generalizado facilmente para n resistências, e a resistência equivalente a um sistema de n resistências em série é

$$R_s = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (7.5)$$

No caso de n condensadores em série (Figura 7.4), a carga armazenada em cada um é a mesma carga Q , enquanto que a diferença de potencial em cada condensador é Q/C_i . A diferença de potencial total é

$$V_{BA} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}; \quad (7.6)$$

Um circuito equivalente mais simples consiste em apenas um condensador com capacidade C_s definida pela equação

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (7.7)$$

Num sistema de resistências em paralelo (Figura 7.5), todas as resistências estão ligadas entre os mesmos pontos A e B, de maneira que a diferença de potencial em todas as resistências é V_{AB} ; a corrente I que entra no circuito é repartida entre as n resistências:

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = V_{BA} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (7.8)$$

A resistência equivalente R_p , define-se pela equação:

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (7.9)$$

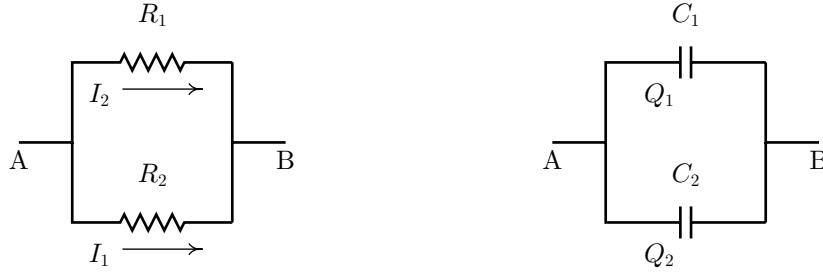


Figura 7.5: Resistências e condensadores em paralelo.

A diferença de potencial nos condensadores ligados em paralelo (Figura 7.5), também é igual em todos eles. A carga total armazenada é igual à soma das cargas em cada um dos condensadores:

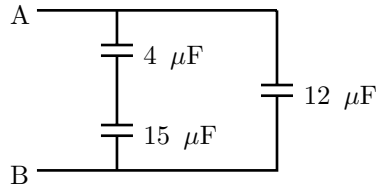
$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = V_{BA} \sum_{i=1}^n C_i, \quad (7.10)$$

a qual conduz à capacidade equivalente:

$$C_p = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (7.11)$$

Exemplo 7.1

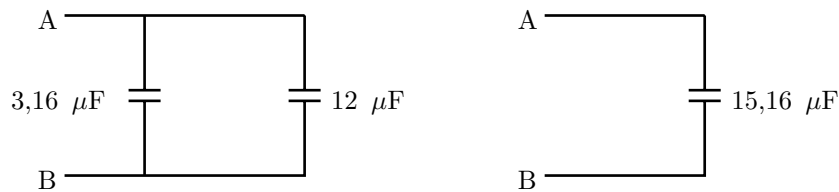
Considere o circuito representado na figura e calcule: (a) A capacidade equivalente entre A e B. (b) A carga armazenada em cada condensador quando a diferença de potencial é $V_{BA} = 200$ V. (c) A energia total armazenada no circuito.



Os condensadores de $4 \mu\text{F}$ e $15 \mu\text{F}$ encontram-se em série e, portanto, podem ser substituídos por um só condensador de capacidade

$$C_{\text{eq}} = \frac{4 \cdot 15}{4 + 15} \mu\text{F} = 3,16 \mu\text{F};$$

este condensador está ligado em paralelo com o condensador de $12 \mu\text{F}$, de maneira que a capacidade total é $15,16 \mu\text{F}$.



Como tanto no condensador de $12 \mu\text{F}$ como no de $3,16 \mu\text{F}$ a diferença de potencial é igual a V_{BA} , as cargas armazenadas nestes condensadores são

$$Q_{12} = (200 \text{ V})(12 \mu\text{F}) = 2,4 \text{ mC} ,$$

$$Q_{3,16} = (200 \text{ V})(3,16 \mu\text{F}) = 632 \mu\text{C} .$$

As cargas nos condensadores de $4 \mu\text{F}$ e $15 \mu\text{F}$ devem ser iguais por estes estarem ligados em série:

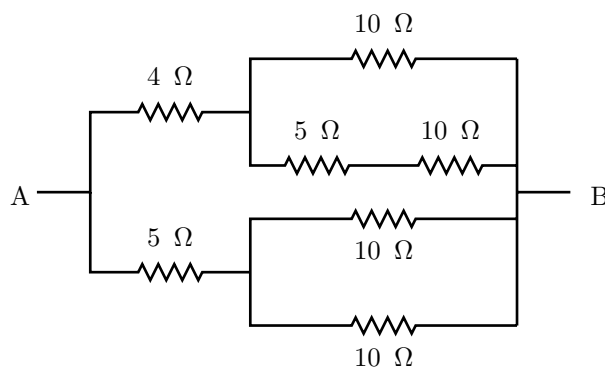
$$Q_4 = Q_{15} = 632 \mu\text{C} .$$

A energia total pode ser calculada somando as energias armazenadas em cada um dos condensadores; a resposta deve ser a mesma em qualquer dos circuitos equivalentes. Usando o circuito mais simples, com um só condensador de $15,16 \mu\text{F}$, obtemos

$$U_t = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(15,16 \mu\text{F})(200 \text{ V})^2 = 0,303 \text{ J} . \quad \blacksquare$$

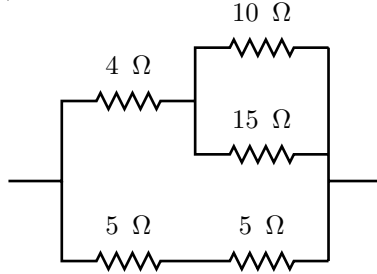
Exemplo 7.2

Considere o circuito da figura e calcule a resistência equivalente entre os pontos A e B, e a corrente que circula por cada uma das resistências quando a diferença de potencial V_{AB} é igual a 12 V .

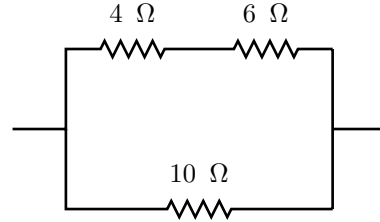


Se substituirmos as resistências ligadas em série e em paralelo, o circuito entre A e B pode ser simplificado da seguinte forma:

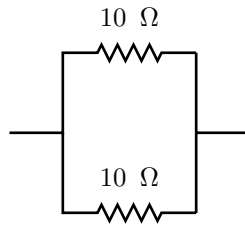
(a)



(b)



(c)



(d)



Conhecida a resistência equivalente $R_{\text{eq}} = 5 \, \Omega$, a corrente entre os pontos A e B pode ser facilmente calculada:

$$I = \frac{12 \, \text{V}}{5 \, \Omega} = 2,4 \, \text{A} .$$

No circuito da figura (c), a corrente de 2,4 A distribuir-se-á uniformemente pelas duas resistências de $10 \, \Omega$, e a corrente em cada uma delas será 1,2 A. No circuito da figura (b), a corrente em cada uma das 3 resistências será a mesma e igual a 1,2 A. No circuito (a) esta corrente repartir-se-á pelas resistências em paralelo ($10 \, \Omega$ e $5 \, \Omega$) sendo inversamente proporcional ao valor das resistências (ver Problema 1):

$$I_{10} = \frac{15}{10 + 15} 1,2 \, \text{A} = 0,72 \, \text{A} ,$$

$$I_{15} = \frac{10}{10 + 15} 1,2 \, \text{A} = 0,48 \, \text{A} .$$

Assim, do ponto A saem duas correntes de 1,2 A das resistências de $4 \, \Omega$ e $5 \, \Omega$. Em B entram quatro correntes: uma corrente de 0,72 A na resistência de $10 \, \Omega$ na parte superior, uma corrente de 0,48 A que percorre as resistências de $10 \, \Omega$ e $5 \, \Omega$ em série, e duas correntes de 0,6 A que passam por cada uma das resistências de $10 \, \Omega$ em paralelo. A corrente total que entra por B e sai por A é 2,4 A. ■

7.3 Energia nos circuitos

Em qualquer circuito existem alguns elementos que fornecem energia eléctrica aos portadores de carga, o que faz com que existam correntes. A energia fornecida é dissipada ou armazenada nos restantes elementos do circuito.

Imaginemos dois pontos A e B num circuito; entre estes dois pontos temos dois sub-circuitos C_1 e C_2 em série (Figura 7.6). Admitamos que o ponto a maior potencial é o ponto A, de maneira que a diferença de potencial V_{BA} é positiva e a energia dos portadores de carga positiva aumenta de B para A e diminui de A para B. Se a corrente I no ponto A estiver dirigida do circuito C_2 para o circuito C_1 , como na Figura 7.6, os portadores de carga perdem energia no circuito C_1 e ganham a mesma energia em C_2 : o circuito C_1 absorve energia enquanto o circuito C_2 fornece energia.

Numa resistência, a corrente é sempre dirigida do terminal a maior potencial para o terminal a menor potencial, de maneira que uma resistência absorve sempre energia, a qual é dissipada em calor por efeito Joule. Num condensador, embora não exista transferência de carga entre as armaduras, pode ainda existir uma corrente eléctrica entrando por um dos terminais e saindo pelo outro; esta corrente aumenta ou diminui a carga armazenada dependendo do sentido da corrente. Se a corrente entra pelo terminal a maior potencial, a carga no condensador aumenta, e este absorve energia do circuito, a qual é armazenada no condensador. No caso contrário, o condensador fornece energia diminuindo a sua energia armazenada e a sua carga.

Uma fonte de f.e.m. pode também fornecer ou absorver energia eléctrica. No fim do Capítulo 6 vimos a característica tensão-corrente de uma fonte com f.e.m. \mathcal{E} e resistência interna r (Figura 6.11); quando o potencial do terminal positivo é maior que o potencial do terminal negativo ($\Delta V > 0$), e $\Delta V < \mathcal{E}$, a fonte fornece energia. No chamado modo inverso, $\Delta V > \mathcal{E}$, a corrente entra na fonte pelo terminal positivo e sai pelo terminal negativo (corrente negativa). Como $\Delta V > 0$, a fonte absorve energia, energia essa que pode ser dissipada por efeito Joule ou absorvida em reacções químicas, como no caso de uma pilha química. Se as reacções na pilha forem reversíveis, este processo poderá ser usado para recarregar a pilha: entre os terminais liga-se uma bateria que produza uma diferença de potencial maior que \mathcal{E} .

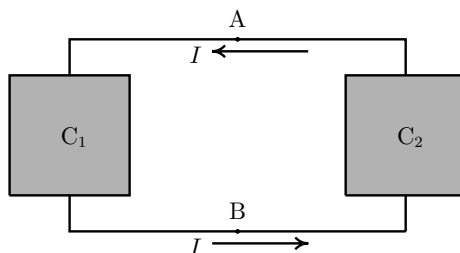


Figura 7.6: Um circuito dividido em dois sub-circuitos C_1 e C_2 . Um deles fornece energia sendo absorvida ou armazenada no outro.

Finalmente, na região $I > \mathcal{E}/r$ a corrente é positiva mas a diferença de potencial ΔV é negativa; a fonte absorve energia. No entanto, a corrente é ainda na direcção da f.e.m., o que implica que a f.e.m. fornece energia! Toda a energia fornecida pela f.e.m., mais a energia fornecida pelo circuito externo, é dissipada por efeito Joule na resistência interna.

7.4 Regras de Kirchhoff

As regras de Kirchhoff são duas regras que se verificam em qualquer circuito eléctrico. Num circuito existem pontos chamados **nós** onde a corrente pode seguir vários caminhos diferentes, e circuitos fechados chamados **malhas**.

Consideremos uma malha e quatro pontos A, B, C e D (Figura 7.7). O aumento de potencial de A para C é igual a $V_{AB} + V_{BC}$; a soma $V_{AB} + V_{BC} + V_{CD}$ é igual ao aumento de potencial do ponto A até o ponto D (V_{AD}). De igual forma:

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0, \quad (7.12)$$

Este resultado é a **regra das malhas**: a soma algébrica dos aumentos e diminuições de potencial ao longo de qualquer malha fechada num circuito, deve ser igual a zero. O sinal da diferença de potencial V_{AB} será positivo ou negativo, conforme o potencial aumente ou diminua ao passar de A para B.

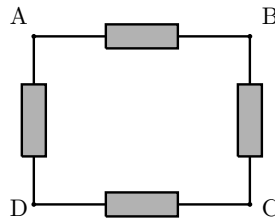


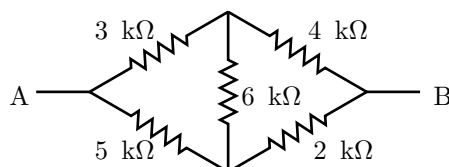
Figura 7.7: Uma malha com quatro elementos.

A outra regra de Kirchhoff é a **regra dos nós**: em qualquer nó, a diferença entre a soma das correntes que entram no ponto e a soma das correntes que saem é igual a zero. Esta segunda regra, apenas válida para correntes estacionárias, é uma consequência directa da conservação da carga: para que não haja acumulação de carga, a corrente que entra no nó por unidade de tempo deverá ser igual à que sai do nó por unidade de tempo.

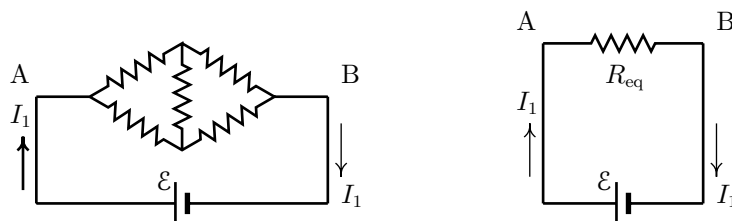
As duas regras de Kirchhoff permitem resolver qualquer circuito com condensadores, resistências e fontes; **resolver** significa encontrar qualquer corrente ou carga armazenada em qualquer dos elementos do circuito. Um método usado para resolver circuitos, que ilustraremos com os dois exemplos seguintes, é o chamado método das malhas. O método consiste em dividir o circuito em malhas contíguas e admitir que em cada malha circula uma corrente independente das outras; a corrente que realmente circula por cada elemento é obtida posteriormente somando as correntes das malhas às quais pertence o elemento.

Exemplo 7.3

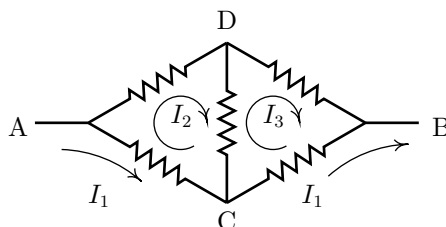
Calcule a resistência equivalente entre os pontos A e B no circuito seguinte:



Nenhum par de resistências entre A e B se encontra em série ou em paralelo e, portanto, não podemos usar o método do exemplo anterior. Por definição, o circuito equivalente deve produzir a mesma corrente em A e B, quando ligado à mesma diferença de potencial e $R_{eq} = \mathcal{E}/I_1$:



Temos, pois, que encontrar o valor de I_1 correspondente à f.e.m. \mathcal{E} . Uma forma fácil de garantir que a regra dos nós se cumpra em todos os nós do circuito consiste em admitir que dentro de cada malha circula uma corrente independente das correntes nas outras malhas: I_1 , I_2 e I_3 na figura seguinte:



Nas resistências que se encontram entre duas malhas vizinhas, a corrente será a soma algébrica das correntes nas duas malhas. Por exemplo, no diagrama anterior a corrente através da resistência entre A e C será $I_1 - I_2$, no sentido de A para C (ou $I_2 - I_1$ no sentido oposto).

Com este método a regra dos nós é garantida em cada nó e basta aplicar a regra das malhas a cada uma das três malhas para calcular as três correntes. No circuito temos as seguintes diferenças de potencial:

$$\begin{aligned} V_{AC} &= -5000(I_1 - I_2), & V_{CB} &= -2000(I_1 - I_3), & V_{AB} &= \mathcal{E}, \\ V_{AD} &= -3000I_2, & V_{DC} &= -6000(I_2 - I_3), & V_{BD} &= 4000I_3, \end{aligned}$$

e as três equações das malhas serão

$$\begin{aligned}V_{AC} + V_{CB} + V_{BA} &= 0, \\V_{AD} + V_{DC} + V_{CA} &= 0, \\V_{BD} + V_{DC} + V_{CB} &= 0.\end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos no sistema de equações acima, obtemos, na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}/1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Obtivemos as equações seguindo todos os passos para maior clareza, mas é possível escrever o sistema matricial imediatamente por observação do circuito: os termos na diagonal são a soma das resistências nas respectivas malhas, os termos não diagonais são negativos e correspondem às resistências entre malhas vizinhas; os termos do lado direito das equações são as f.e.m. totais em cada malha, no sentido da corrente da malha. Neste caso só estamos interessados na solução para I_1 , que pode ser obtida usando a regra de Cramer:

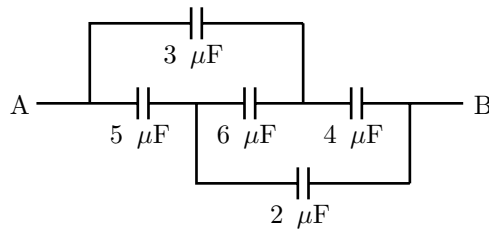
$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{E}/1000 & -5 & -2 \\ 0 & 14 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{vmatrix}} = \frac{132}{448} \left(\frac{\mathcal{E}}{1000} \right).$$

Finalmente, a resistência equivalente é

$$R_{eq} = \frac{\mathcal{E}}{I_1} = 3,39 \text{ k}\Omega. \quad \blacksquare$$

Exemplo 7.4

Encontre o condensador equivalente entre os pontos A e B no circuito seguinte



Mais uma vez, nenhum dos elementos do circuito está ligado em série ou em paralelo. Admitamos que existe uma diferença de potencial V_{AB} (provavelmente produzida por uma f.e.m.). Ao introduzir a diferença de potencial V_{AB} , aparecem correntes nos circuitos que desaparecerão quando as cargas nos condensadores alcançarem valores estacionários. Em qualquer instante as cargas nos condensadores são iguais ao integral das respectivas correntes; assim, a regra dos nós conduz às mesmas condições para as cargas ou para as

7.5 Circuito RC

O circuito da Figura 7.8 com um condensador e uma resistência é chamado circuito RC . Consideremos o caso em que o condensador tem uma carga inicial Q_0 e, num instante que arbitraremos como $t = 0$, o interruptor é fechado permitindo que as cargas negativas e positivas nas armaduras do condensador se recombinem. Na prática, as armaduras do condensador apresentam uma pequena resistência que no circuito da Figura 7.8 está incluída na resistência total R . A partir do instante $t = 0$ aparece uma corrente I através da resistência.

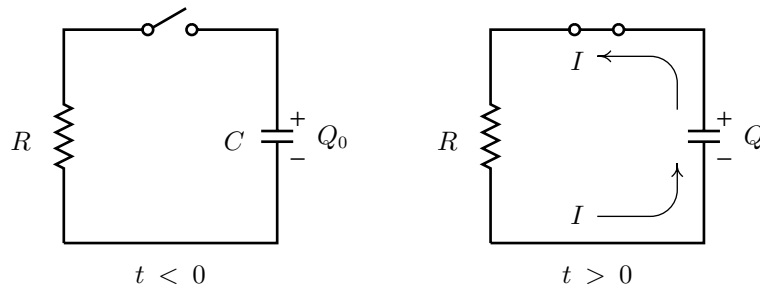


Figura 7.8: Circuito RC .

Para $t > 0$, a carga Q no condensador e a corrente I no circuito são funções de t . A regra da malha implica que em qualquer instante t :

$$IR - \frac{Q}{C} = 0; \quad (7.13)$$

no instante inicial a carga é igual a Q_0 e, portanto, a corrente inicial será Q_0/RC . Em qualquer instante posterior, Q é igual à carga inicial Q_0 menos a carga que saiu, que por sua vez é igual ao integral da corrente desde o instante em que o condensador começa a descarregar ($t = 0$):

$$IR - \frac{1}{C} \left[Q_0 - \int_0^t I dt \right] = 0. \quad (7.14)$$

Derivando os dois termos em função do tempo e dividindo por R , obtemos

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC}I}, \quad (7.15)$$

isto é, a equação diferencial que determina a corrente em função do tempo. Para a resolver, agrupamos num lado da equação os termos que dependem de I e no outro lado os termos que dependem de t :

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt; \quad (7.16)$$

primitivando obtemos

$$\ln I = -\frac{t}{RC} + A, \quad (7.17)$$

onde A pode ser qualquer constante. Contudo, para que a equação anterior seja válida também para $t = 0$, quando I é igual a Q_0/RC , será necessário que A seja igual a $\ln(Q_0/RC)$:

$$\frac{t}{RC} = \ln\left(\frac{Q_0}{RCI}\right). \quad (7.18)$$

Escrevendo I em função do tempo obtemos

$$I = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}; \quad (7.19)$$

e a carga no condensador, igual a RCI , será

$$Q = Q_0 e^{-t/RC}. \quad (7.20)$$

A **constante de tempo** $t_c = RC$ tem unidades de tempo (ver tabela de unidades no Apêndice B). Para $t = t_c$, a carga diminui desde o seu valor inicial Q_0 até $0,37Q_0$. Como podemos ver na Figura 7.9, a constante de tempo é também o intervalo de tempo que demoraria o condensador a descarregar-se, se a corrente se mantivesse constante no seu valor inicial I_0 . Como a corrente não se mantém constante mas diminui, o condensador, teoricamente, demora um tempo infinito a descarregar-se. Na prática, a carga atinge o valor mínimo possível num tempo finito.

A equação diferencial (7.15) é importante porque aparece sempre que existam funções cuja derivada seja directamente proporcional à própria função; se a constante de proporcionalidade for negativa, o resultado será um **decaimento exponencial**. Se a constante de proporcionalidade for positiva, a função aumentará exponencialmente.

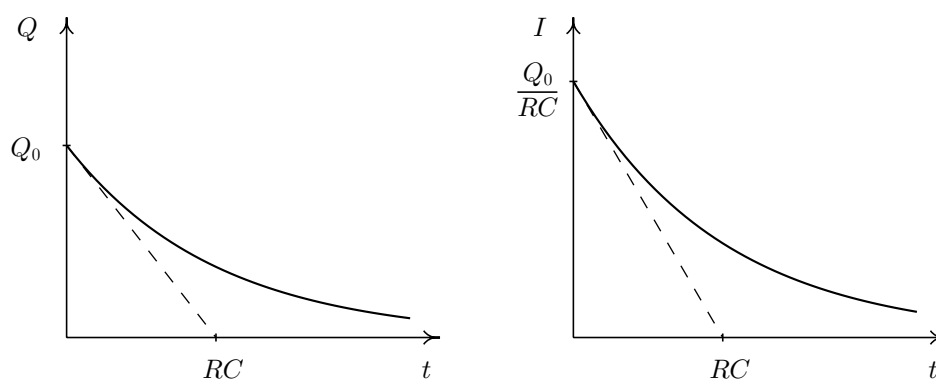


Figura 7.9: Carga e corrente em função do tempo, no circuito RC .

7.6 Circuito RC com fonte

Quando um condensador é ligado a uma fonte, a sua carga aumenta até ao valor $\mathcal{E}C$; no entanto, o aumento da carga no condensador não é instantâneo, mas depende dos valores de C e da resistência da fonte, como veremos. A Figura 7.10 mostra o diagrama de um circuito RC com fonte, onde a resistência R corresponde à soma de todas as resistências presentes no circuito: resistência interna da fonte, resistência dos fios usados para ligar a fonte e resistência das armaduras do condensador (usualmente quase nula).

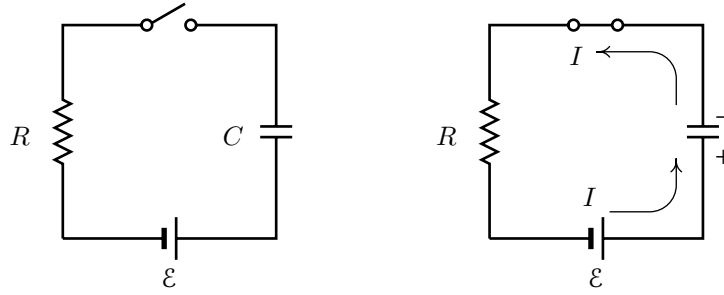


Figura 7.10: Circuito RC com fonte.

Considerando que em $t = 0$ fechamos o interruptor, para $t > 0$ existe uma corrente I e uma carga Q no condensador. Aplicando a regra das malhas, vemos que em qualquer instante:

$$IR + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} ; \quad (7.21)$$

em particular, para $t = 0$ a carga é nula e, portanto, a corrente inicial será igual a \mathcal{E}/R . Em instantes posteriores a carga acumulada já não será nula, mas igual ao integral da corrente, desde $t = 0$:

$$IR + \frac{1}{C} \int_0^t I dt = \mathcal{E} . \quad (7.22)$$

Derivando esta equação em função do tempo, obtemos exactamente a mesma equação diferencial (7.15) cuja solução já sabemos que é um decaimento exponencial, desde o valor inicial de I , com a constante de tempo igual a RC :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} . \quad (7.23)$$

A carga obtém-se a partir da equação da malha (7.21):

$$Q = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/RC}) . \quad (7.24)$$

Representando graficamente (Figura 7.11) podemos verificar que a carga aumenta

exponencialmente até ao valor assintótico $\mathcal{E}C$, enquanto a corrente diminui exponencialmente a partir do valor inicial \mathcal{E}/R . O aumento de Q (e a diminuição de I) depende da constante de tempo RC . Quanto maior for RC , mais lentamente será carregado o condensador. Para $t = 0$, a corrente I pode ser calculada como se o condensador fosse um bom condutor com resistência $R = 0$, e para $t \gg RC$ o condensador comporta-se como um interruptor aberto ($R \rightarrow \infty$).

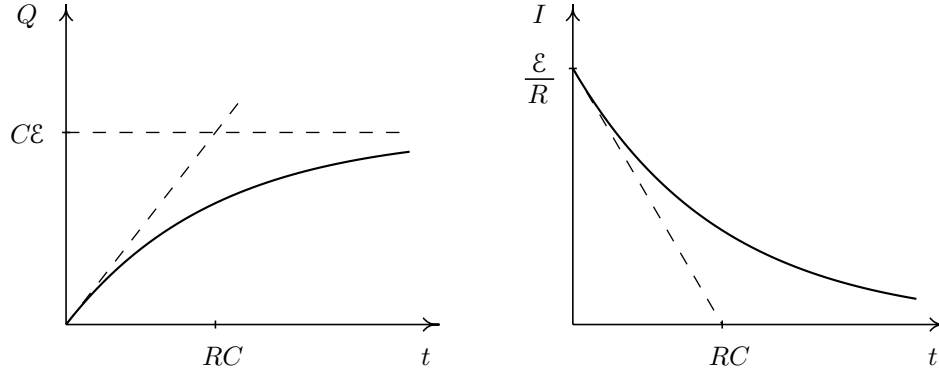


Figura 7.11: Carga e corrente no circuito RC com fonte.

Para $t \geq 0$ a carga total armazenada no condensador é $C\mathcal{E}$. Portanto, a energia armazenada é igual a

$$U_C = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2; \quad (7.25)$$

toda a carga que entra no condensador é fornecida pela f.e.m. O trabalho realizado pela f.e.m. para fornecer a carga $C\mathcal{E}$ é

$$W_{\text{fem}} = Q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2, \quad (7.26)$$

o qual é o dobro de U_C . A parte da energia fornecida pela fonte que não fica armazenada no condensador é dissipada, por efeito Joule, na resistência.

Para demonstrar que metade da energia fornecida pela fonte é dissipada na resistência, consideremos a potência P_R e a energia total E_R dissipadas pela resistência:

$$\frac{dE_R}{dt} = P_R = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}, \quad (7.27)$$

$$E_R = \int_0^\infty P_R dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2, \quad (7.28)$$

O balanço de trabalho e energia é

$$W_{\text{fem}} = U_C + E_R, \quad (7.29)$$

como queríamos demonstrar.

No Capítulo 11 veremos um método que permite calcular as correntes e as cargas em circuitos mais complicados com condensadores e resistências e estudaremos também a respostas destes circuitos a tensões alternadas.

7.7 Amperímetros, voltímetros e ohmímetros

O galvanómetro é um aparelho que permite medir a corrente I num circuito. No entanto, como o valor máximo de corrente permitida num galvanómetro é muito baixo, utiliza-se um amperímetro (Figura 7.12), que não é mais do que um galvanómetro (G) ao qual foi ligada uma resistência em paralelo (R_p) para que se possa medir correntes mais elevadas.

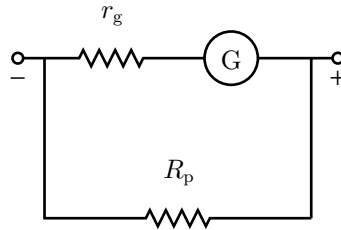


Figura 7.12: Amperímetro.

Quando pelo galvanómetro circula a corrente máxima $I_{\text{máx}}$, a corrente total, I_A , que entra no amperímetro é

$$I_A = \frac{R_p + r_g}{R_p} I_{\text{máx}} \quad (7.30)$$

onde r_g é a resistência interna do galvanómetro, que normalmente é pequena. Utilizando diferentes valores de R_p é possível obter a corrente máxima desejada para o amperímetro.

Para medir a corrente num circuito com um amperímetro, é necessário abrir o circuito no ponto onde se pretende medir a corrente, e ligar o amperímetro em série. A resistência interna do amperímetro não poderá ser muito elevada, para não alterar a corrente a medir.

Para determinar a diferença de potencial entre dois pontos num circuito usa-se um voltímetro. Um voltímetro consiste num galvanómetro ligado em série a uma resistência R_s (Figura 7.13).

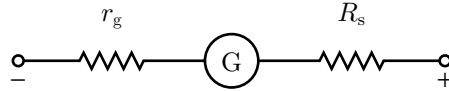


Figura 7.13: Voltímetro.

A diferença de potencial nos terminais do voltímetro é directamente proporcional à corrente no galvanómetro:

$$V_{AB} = I(r_g + R_s) ; \quad (7.31)$$

a leitura do galvanómetro permite determinar a diferença de potencial V_{AB} . A diferença de potencial máxima que pode ser medida, sem queimar o galvanómetro, é

$$V_{\text{máx}} = I_{\text{máx}}(r_g + R_s) . \quad (7.32)$$

Um bom voltímetro deve ter uma resistência interna elevada para que, quando for ligado entre dois pontos de um circuito, não absorva muita corrente e, assim, não altere significativamente a diferença de potencial a ser medida.

Para medir resistências usa-se um ohmímetro, que consiste numa fonte com f.e.m. \mathcal{E} ligada em série a uma resistência variável R_v e a um galvanómetro (Figura 7.14).

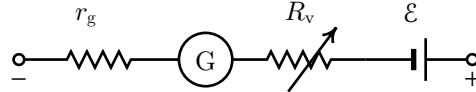


Figura 7.14: Ohmímetro.

Ao ligar a resistência a medir, R , aparece uma corrente inversamente proporcional à resistência:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r_g + R_v} . \quad (7.33)$$

A resistência variável ajusta-se de forma a se obter a corrente máxima no galvanómetro quando a resistência externa é nula (os dois terminais do ohmímetro ligados entre si).

Problemas

1. (a) Duas resistências R_1 e R_2 encontram-se ligadas em paralelo. Sendo I a corrente total que circula pelas resistências, mostre que as correntes através de cada resistência são

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I, \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

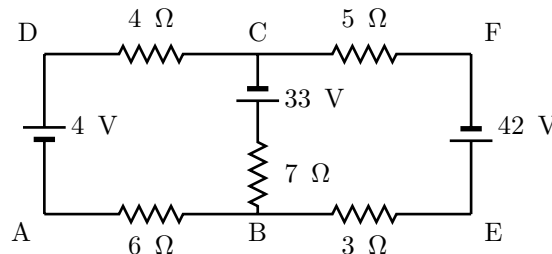
(b) Mostre que, para condensadores em série, se obtém um resultado similar para as diferenças de potencial nos dois condensadores, em função das capacidades C_1 e C_2 .

2. (a) Mostre que as diferenças de potencial em duas resistências R_1 e R_2 em série são

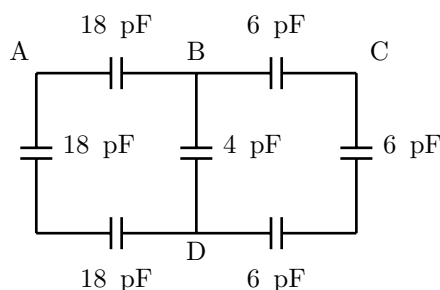
$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V, \quad V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V$$

(b) Mostre que, para dois condensadores em paralelo, se obtém um resultado similar, para as cargas em função das capacidades C_1 e C_2 .

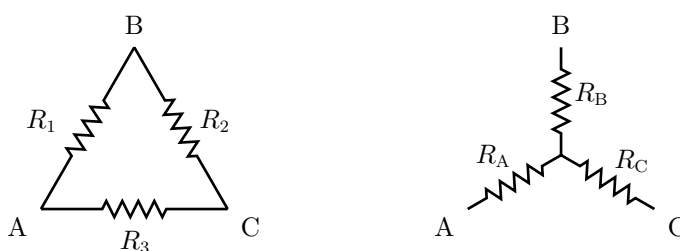
3. Considere duas resistências R_1 e R_2 ligadas em paralelo. Uma corrente total I distribui-se entre as duas resistências. Admita que as correntes I_1 e I_2 podem tomar qualquer valor (inclusivamente negativo) desde que $I = I_1 + I_2$. Determine os valores de I_1 e I_2 que minimizam a potência dissipada por efeito Joule nas resistências, e mostre que os seus valores são exactamente os valores reais das correntes, calculados no Problema 1.
4. Para uma dada bateria, com f.e.m. \mathcal{E} e resistência interna r , qual é o valor da resistência externa R que deve ser ligada aos terminais para que a potência dissipada em calor na resistência R seja máxima? Esboce o gráfico da potência dissipada em função de R .
5. Considere o circuito representado.
- (a) Calcule as correntes em todas as resistências do circuito.
- (b) Calcule as diferenças de potencial V_{AB} , V_{BC} e V_{CD} .
- (c) Indique as fontes de f.e.m. que absorvem ou fornecem energia.



6. A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria com f.e.m. de 12 V é 11,4 V, quando fornece uma corrente de 20 A ao motor de arranque de um carro.
- Qual é a resistência interna da bateria?
 - Qual a potência total fornecida quando o motor de arranque está em funcionamento? Que fração dessa potência é fornecida ao motor de arranque?
 - Em quanto diminuirá a energia química da bateria se o motor de arranque permanecer ligado durante 3 minutos?
7. No circuito seguinte calcule a capacidade equivalente:
- Entre os pontos B e D.
 - Entre os pontos A e B.
 - Entre os pontos A e C.

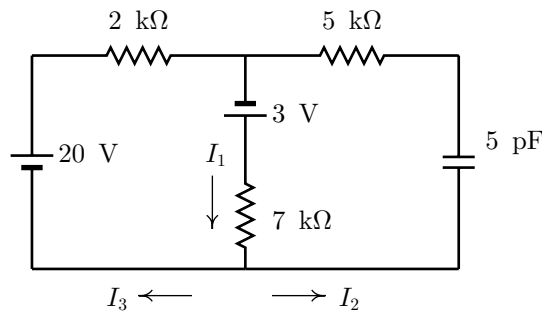


8. Três resistências R_1 , R_2 e R_3 estão ligadas formando o chamado circuito **delta**, como se mostra na figura da esquerda. Demonstre que o circuito delta é equivalente a um circuito **estrela**, com três resistências R_A , R_B e R_C como se mostra no lado direito da figura. Use a transformação delta-estrela para calcular a resistência equivalente no Exemplo 7.3, sem usar as regras de Kirchhoff.

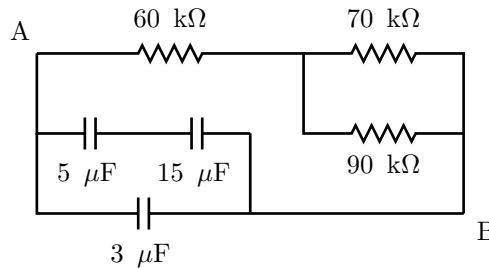


(Sugestão: (i) No circuito delta, calcule as resistências equivalentes entre os pontos A e B (R_{AB}), entre os pontos A e C (R_{AC}) e entre os pontos B e C (R_{BC}). (ii) Calcule R_{AB} , R_{AC} e R_{BC} , em função de R_A , R_B e R_C no circuito estrela. (iii) Igualando os resultados anteriores encontre a solução para R_A , R_B e R_C .)

9. A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria é 4,5 V quando a bateria é percorrida por uma corrente de 3 A, no sentido do terminal negativo para o positivo. Quando a corrente é de 2 A, no sentido oposto, a diferença de potencial aumenta até 12 V.
- (a) Calcule a resistência interna da bateria.
- (b) Qual é a f.e.m. da bateria?
10. No circuito da figura, a corrente I_1 é igual a 2,5 mA num determinado instante.
- (a) Calcule as correntes I_2 e I_3 nesse instante.
- (b) Calcule a carga armazenada no condensador no mesmo instante.

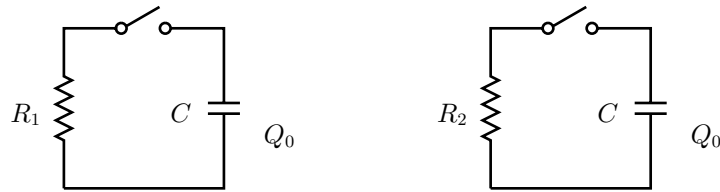


11. Considere o circuito representado.
- (a) Qual é a constante de tempo t_c ?
- (b) No instante inicial a carga no condensador de $5 \mu\text{F}$ é 15 nC. Qual é a carga nos condensadores de $15 \mu\text{F}$ e $3 \mu\text{F}$ no mesmo instante?
- (c) Qual será a carga total armazenada entre os pontos A e B após 0,5 segundo? Nesse mesmo instante calcule a energia total armazenada no circuito e as correntes nas três resistências.



12. A corrente que produz a leitura máxima num galvanómetro é 1 mA, e a resistência interna do galvanómetro é 10Ω .
- (a) O galvanómetro vai ser usado para construir um voltímetro com escala entre 0 e 10 volts. Indique como deverá ser construído o voltímetro.
- (b) Pretende usar-se o mesmo galvanómetro para construir um amperímetro com escala entre 0 e 10 mA. Explique como deverá fazê-lo.

13. Um condensador de $0,5 \mu\text{F}$ descarrega-se através de uma resistência R . Qual é o valor que R deve ter para que $0,1$ segundo depois de se iniciar a descarga, a potência dissipada na resistência tenha o valor máximo possível?
14. Considere a descarga de dois condensadores idênticos, com carga inicial idêntica, Q_0 , através de duas resistências diferentes, $R_1 > R_2$. Para a resistência R_1 as grandezas seguintes são maiores, mais pequenas, ou as mesmas que para a resistência R_2 ?



- (a) Tempo necessário para que a carga inicial diminua metade.
- (b) Potencial nos terminais do condensador num dado instante.
- (c) Corrente na resistência num dado instante.
- (d) Energia total dissipada em calor na resistência.
- (e) Potência dissipada na resistência num determinado instante.

Conceitos básicos

- Campo magnético
- Linhas de indução magnética
- Força magnética
- Momento magnético
- Raios catódicos

André Marie Ampère



(1775-1836)

Nasceu em Lyon, França. Sendo o seu pai um homem culto decidiu dedicar-se à educação do filho, levando a família para fora da cidade. No entanto, acabou por morrer na guilhotina quando André Marie tinha apenas 17 anos. Foi professor de física, química e matemática em Lyon e em Bourg, sendo tal a sua reputação como investigador e professor que lhe foram abertas as portas da Escola Politécnica de Paris. Aí, leccionou mecânica e matemática com Cauchy, trabalhando em equações diferenciais, teoria dos jogos e geometria analítica. Em 1820, foi anunciada a descoberta de Ørsted na qual a agulha de uma bússola era desviada por um fio atravessado por corrente eléctrica. Ampère, idealizando novas experiências com correntes e campos magnéticos, avançou mais na explicação do fenómeno, mostrando que forças magnéticas actuam entre fios atravessados por corrente eléctrica. Ampère fez investigação em óptica, e com Fresnel, defendeu a teoria ondulatória da luz face à teoria corpuscular defendida por Laplace e Biot.

Campo magnético

A força magnética entre ímanes foi descoberta pelos gregos ao observarem que algumas pedras (ímanes naturais) provenientes das minas da região de Magnésia atraíam pedaços de ferro; Magnésia deu origem à palavra **magnetismo**. Antes do século XII, a bússola já era usada pelos chineses, embora estes não soubessem o princípio físico do seu funcionamento.

Por volta de 1600, o inglês William Gilbert publicou o seu livro *De Magnete*. Este foi o primeiro tratado exaustivo sobre a força magnética; de facto, foi nele que a força magnética recebeu o seu nome e foi identificada como uma força diferente da força electrostática. Entre os fenómenos explicados por Gilbert, encontra-se o funcionamento das bússolas. Gilbert deduziu que a Terra devia ser um íman gigante com pólos magnéticos denominados **norte** e **sul**. A força entre pólos iguais é repulsiva e entre pólos diferentes é atractiva. A grande diferença em relação à força electrostática, como Gilbert salientou, é que não existem pólos norte ou sul separadamente; qualquer íman tem sempre os dois pólos. Numa bússola, o pólo norte define-se como o pólo que aponta na direcção do pólo norte geográfico, de tal forma que o pólo **sul magnético** da Terra se encontra no pólo **norte geográfico**.

No século XVII já eram bem conhecidas as forças eléctrica e magnética mas não muito estudadas. O próprio Isaac Newton, no seu importante tratado de mecânica *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, refere-se a elas como exemplos de forças à distância, dirigidas para um centro, mas não desenvolvendo o seu estudo, concentrando-se mais na força gravitacional. Em 1750, John Michell descobriu que a intensidade das forças produzidas por cada pólo num íman são iguais e diminuem proporcionalmente ao quadrado da distância.

As três primeiras décadas do século XIX foram marcadas por um grande avanço no estudo do electromagnetismo. O dinamarquês Hans C. Ørsted descobriu que uma corrente eléctrica altera a orientação da agulha de uma bússola; Ørsted, reconhecendo a grande importância deste resultado como prova da unificação das forças naturais, neste caso a força eléctrica e magnética, escreveu um artigo em latim divulgando-o por toda a Europa.

A descoberta de Ørsted desencadeou um rápido avanço, tanto a nível experimental como a nível teórico. Nos próximos capítulos seguiremos esse processo de evolução do electromagnetismo. Neste capítulo, vamos começar por estudar a força magnética e algumas das suas aplicações.

8.1 Campo de indução magnética

A existência de um campo de indução magnética pode ser estabelecida por meio de uma bússola. Se a bússola tem uma tendência para apontar numa determinada direcção, é porque existe um campo de indução magnética \mathbf{B} , no ponto onde a bússola se encontrar; por definição, a direcção do campo \mathbf{B} é a direcção da agulha da bússola. Juntando continuamente os pontos do espaço, de acordo com a direcção do campo \mathbf{B} , obtemos linhas contínuas denominadas **linhas de indução magnética**. As linhas de indução magnética de um íman saem do pólo norte magnético, entrando pelo pólo sul, e continuando dentro do íman na direcção do pólo norte formando uma curva fechada (Figura 8.1).

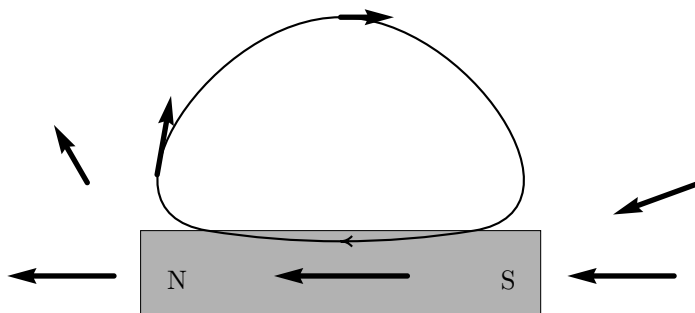


Figura 8.1: Representação vectorial do campo \mathbf{B} em vários pontos perto de um íman e sobre uma linha de indução magnética.

Para definir o módulo do campo de indução magnética, usamos partículas de prova tal como fizemos no caso do campo eléctrico. Quando uma partícula de carga q entra com uma velocidade \mathbf{v} numa região onde existe um campo de indução magnética, sobre ela actua uma força que apresenta as seguintes propriedades:

1. A força é directamente proporcional ao módulo da velocidade (v) da partícula quando a direcção da velocidade da partícula é constante.

2. Se a velocidade é paralela a \mathbf{B} , a força é nula; a força é máxima nas direcções em que a velocidade é perpendicular às linhas de indução magnética. Em geral, o módulo da força depende do seno do ângulo θ formado pelo vector velocidade e as linhas de indução magnética.
3. Num determinado ponto, a força sobre partículas com a mesma velocidade e diferentes cargas q é directamente proporcional a q . Os três resultados anteriores implicam uma força magnética da forma

$$F = Bqv \sin \theta , \quad (8.1)$$

onde B é a constante de proporcionalidade e define o módulo do campo de indução magnética.

4. A direcção e sentido da força são dados pela chamada **regra da mão direita** como se mostra na Figura 8.2: a força é perpendicular tanto a \mathbf{v} como a \mathbf{B} e na direcção que aponta o dedo polegar quando os outros dedos rodam de \mathbf{v} para \mathbf{B} .

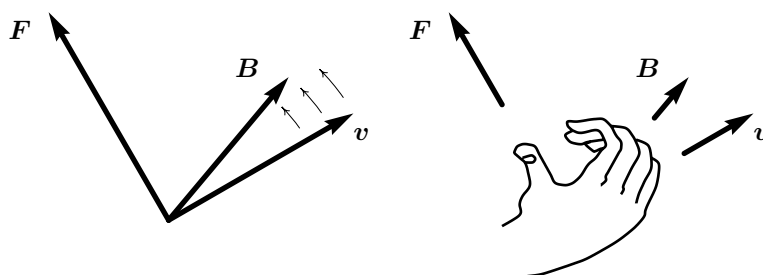


Figura 8.2: A regra da mão direita.

Os quatro resultados anteriores podem ser sintetizados na seguinte fórmula empírica: a força magnética sobre uma partícula de carga q e velocidade \mathbf{v} , num ponto onde existe um campo de indução magnética \mathbf{B} , é igual a

$$\boxed{\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}} , \quad (8.2)$$

onde $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ é o produto vectorial dos vectores \mathbf{v} e \mathbf{B} .

A medição experimental da força \mathbf{F} permite determinar o campo de indução magnética \mathbf{B} através da Equação (8.2). A unidade usada para medir o campo de indução magnética, no Sistema Internacional de unidades, é o **tesla** (T). De acordo com a Equação (8.1) um tesla é igual a

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} . \quad (8.3)$$

Na prática, os campos magnéticos são usualmente muito menores do que 1 T, por isso, outra unidade muito usada é o **gauss** (G), definido como:

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} . \quad (8.4)$$

O campo de indução magnética também costuma ser denominado por densidade de fluxo magnético ou campo magnético. Reservaremos o termo campo magnético para o campo \mathbf{H} dentro da matéria; na prática, não existe grande diferença entre o campo \mathbf{B} e o campo magnético \mathbf{H} , excepto nos materiais ferromagnéticos.

8.2 Força magnética sobre um condutor com corrente

O movimento dos portadores de carga, dentro de um condutor com corrente que se encontre numa região onde exista um campo de indução magnética, produz forças magnéticas sobre o gás de electrões de condução (Figura 8.3); a força magnética é uma força distribuída ao longo do condutor e a força por unidade de comprimento é igual à força resultante sobre um segmento infinitesimal de fio, dividida pelo seu comprimento.

A força média pode ser calculada em função da velocidade média dos portadores de carga, \mathbf{v} , e da carga dos portadores, usando a Equação (8.2). A força total sobre um elemento infinitesimal de um condutor, de comprimento ds , será

$$d\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dN , \quad (8.5)$$

onde dN é o número de portadores de carga dentro do elemento ds , e admitindo que \mathbf{B} é constante no interior do elemento considerado. A carga total dos portadores de carga, no elemento considerado, é dada por $q dN$ e igual ao produto da carga volúmica ρ e o volume do elemento do fio condutor considerado:

$$q dN = \rho A ds, \quad (8.6)$$

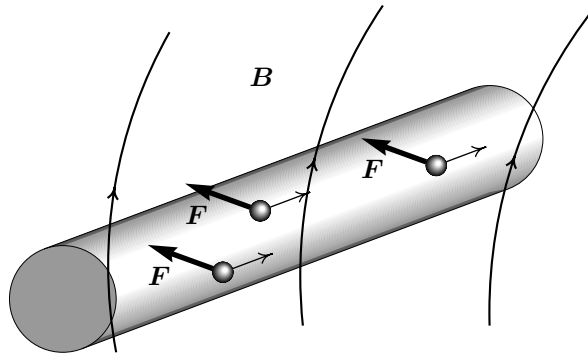


Figura 8.3: Forças sobre os portadores de carga de um condutor dentro de um campo de indução magnética.

onde A é a área da secção transversal do condutor, logo

$$d\mathbf{F} = A\rho(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) ds ; \quad (8.7)$$

onde o produto $\rho\mathbf{v}$ é o valor médio da densidade de corrente \mathbf{J} , que multiplicado pela área da secção transversal é igual ao vector corrente \mathbf{I} , tangente ao fio. Podemos, assim, calcular a força em função da corrente e do deslocamento vectorial $d\mathbf{r}$ ao longo do fio:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{r} \times \mathbf{B} . \quad (8.8)$$

A força total sobre o fio obtém-se integrando a força infinitesimal ao longo do fio:

$$\mathbf{F} = I \int_A^B d\mathbf{r} \times \mathbf{B} . \quad (8.9)$$

No caso particular de um fio rectilíneo de comprimento L , com corrente I , dentro de um campo uniforme \mathbf{B} que faz um ângulo θ com o fio, a força magnética sobre o fio é

$$F = ILB \sin \theta . \quad (8.10)$$

8.3 Espiras e bobinas

Uma **espira** é um fio metálico que forma um circuito fechado; por exemplo, uma espira circular ou rectangular. Um cabo enrolado em várias espiras forma uma **bobina**; a corrente eléctrica entra por um extremo da bobina, percorre todas as espiras e sai pelo outro extremo da bobina. A Figura 8.4 mostra uma espira rectangular de lados x e y , dois lados horizontais (de comprimento x) e dois lados que fazem um ângulo α com a horizontal, percorrida por uma corrente I . Se existir um campo de indução magnética, aparecerão forças magnéticas sobre os quatro lados. No exemplo da figura, o campo é vertical, uniforme e aponta para cima. As forças \mathbf{F}_2 e \mathbf{F}_4 serão iguais e opostas e, consequentemente, a sua resultante será nula¹.

As forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_3 também são iguais e opostas, mas a sua resultante não é nula por não estarem sobre a mesma linha de acção: as duas forças constituem um binário com braço igual a $y \sin \alpha$. Os módulos das forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_3 são

$$F_1 = F_3 = IBx . \quad (8.11)$$

O momento do binário é igual ao produto do módulo destas forças pelo braço:

$$T = IBxy \sin \alpha . \quad (8.12)$$

¹Admitimos que a espira é rígida; se assim não for, as forças \mathbf{F}_2 e \mathbf{F}_4 tenderão a deformar a espira.

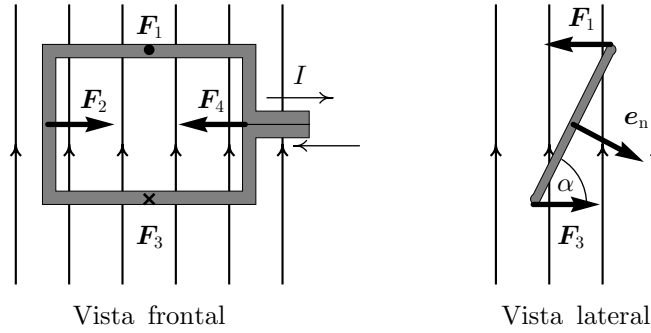


Figura 8.4: Espira dentro de um campo de indução magnética uniforme.

O ângulo α que a espira faz com a horizontal e o ângulo θ entre o campo de indução magnética e a normal à espira, e_n , ou são iguais ou são suplementares ($\alpha = \pi - \theta$), já que os lados dos dois ângulos são respectivamente perpendiculares. Nos dois casos $\sin \alpha = \sin \theta$, e o momento do binário \mathbf{T} pode ser escrito como o produto vectorial

$$\boxed{\mathbf{T} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}}, \quad (8.13)$$

onde o **momento magnético** \mathbf{m} é directamente proporcional à área $A = xy$:

$$\mathbf{m} \equiv AI \mathbf{e}_n. \quad (8.14)$$

Uma espira qualquer, dentro de um campo arbitrário, pode ser aproximada a várias espiras rectangulares infinitesimais que preencham a sua área (Figura 8.5). Em cada espira infinitesimal imaginamos uma corrente circulando no mesmo sentido da corrente da espira; as correntes nas espiras vizinhas anulam-se, ficando unicamente a corrente na periferia, que aproxima o percurso da corrente na espira. A aproximação será melhor quanto menor forem as áreas dos rectângulos.

O momento do binário sobre a espira é igual à soma dos momentos em todas as espiras infinitesimais. Em cada espira infinitesimal o campo é aproximadamente constante e, por isso, podemos usar a Equação (8.14). O momento sobre a espira será assim o integral de

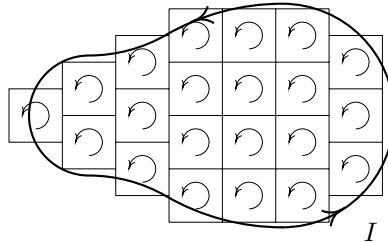


Figura 8.5: Espira com corrente I , aproximada a várias espiras rectangulares com a mesma corrente.

superfície:

$$\mathbf{T} = I \iint d\mathbf{A} \times \mathbf{B} . \quad (8.15)$$

Uma bobina com N espiras, todas elas paralelas e com a mesma forma (Figura 8.6) tem um momento magnético igual à soma dos momentos das N espiras, já que o binário resultante é igual à soma dos N binários sobre as espiras. Assim, o momento magnético da bobina é

$$\mathbf{M} = NAI \mathbf{e}_n . \quad (8.16)$$

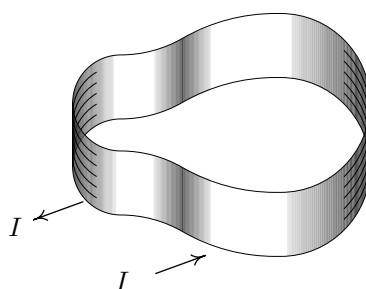


Figura 8.6: Bobina atravessada por uma corrente I .

O momento \mathbf{T} faz rodar a bobina na direcção na qual θ diminui até \mathbf{e}_n (ou o seu valor médio) apontar na direcção de \mathbf{B} (Figura 8.4). O binário produzido sobre uma bobina com corrente é o princípio do funcionamento dos motores eléctricos. Num motor de corrente contínua, no momento em que \mathbf{e}_n aponta na direcção de \mathbf{B} , formando um ângulo $\theta = 0$, inverte-se o sentido da corrente na bobina mudando, assim, o sentido de \mathbf{e}_n que passa a formar um ângulo de 180° com o campo de indução magnética. O aumento do ângulo, entre o campo e o versor normal, produz um aumento do binário que faz rodar a bobina mantendo o seu movimento circular.

8.4 Movimento de partículas dentro do campo magnético

A velocidade de uma partícula é sempre tangente à sua trajectória; em cada ponto da trajectória existe um sistema de três versores perpendiculares (triedro de Frenet-Serret, Figura 8.7) definidos da seguinte forma: o versor **tangencial** \mathbf{e}_t , na direcção da velocidade, o versor **normal** \mathbf{e}_n , sobre o plano tangente à trajectória, e apontando na direcção do centro de curvatura e, finalmente, o versor **binormal**, perpendicular ao plano tangente e definido como $\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$.

A aceleração da partícula em cada ponto tem duas componentes nas direcções dos versores tangencial e normal. A aceleração tangencial é dv/dt e a aceleração normal é a

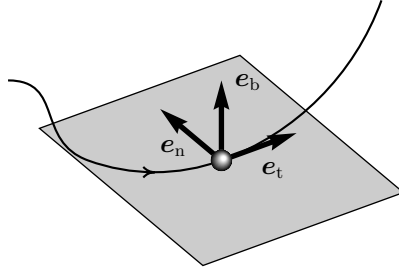


Figura 8.7: Triedro de Frenet-Serret formado pelos versores tangencial (\mathbf{e}_t), normal (\mathbf{e}_n) e binormal (\mathbf{e}_b). O plano sombreado é o plano tangente.

aceleração centrípeta v^2/ρ , em que ρ é o raio de curvatura local, medido sobre o plano tangente.

No caso de uma partícula de carga q , dentro de um campo de indução magnética, a aceleração é também igual à força magnética dividida pela massa m :

$$\frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n. \quad (8.17)$$

Como $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ é um vector perpendicular a \mathbf{e}_t , concluímos que:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0, \\ \frac{q}{m} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n. \end{cases} \quad (8.18)$$

A velocidade escalar, v , permanece constante; só muda a direcção de \mathbf{v} . A direcção normal, \mathbf{e}_n , é definida pela regra da mão direita de \mathbf{v} para \mathbf{B} . O raio de curvatura calcula-se a partir da última equação:

$$\rho = \frac{mv}{qB \sin \theta}. \quad (8.19)$$

A Figura 8.8 mostra um caso em que o campo de indução magnética é uniforme e perpendicular à velocidade da partícula (a velocidade é sobre o plano do desenho e o campo de indução magnética aponta para dentro do desenho). O raio de curvatura será constante e igual a

$$\boxed{r = \frac{mv}{qB}}. \quad (8.20)$$

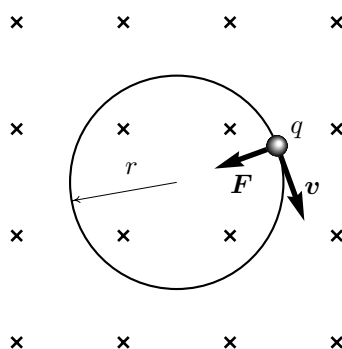


Figura 8.8: Movimento circular uniforme de uma partícula com carga negativa, dentro de um campo de indução magnética uniforme.

O versor \mathbf{e}_t aponta na direcção de \mathbf{v} , enquanto que \mathbf{e}_n é perpendicular a \mathbf{v} e a \mathbf{B} ; o versor binormal tem a direcção de $q\mathbf{B}$ e permanece sempre constante. O resultado é um movimento circular uniforme.

A velocidade angular,

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}, \quad (8.21)$$

é igual para partículas com a mesma **carga mássica** q/m . O sentido de rotação depende do sinal da carga; no caso da Figura 8.8, as partículas com carga negativa rodam no sentido horário, e as partículas com carga positiva rodam no sentido anti-horário. Nos aceleradores de partículas, a carga mássica das partículas produzidas numa colisão é calculada observando o seu movimento dentro de um campo de indução magnética, perpendicular à velocidade.

Quando a velocidade não for perpendicular ao campo \mathbf{B} , podemos considerar o movimento como a sobreposição de dois movimentos; a componente da velocidade tangente ao campo permanece constante enquanto que a componente perpendicular ao campo descreve um movimento circular com raio r . A partícula roda sobre um plano perpendicular ao campo, o qual se desloca na direcção da componente tangencial ao campo, com velocidade uniforme; o movimento resultante é um movimento helicoidal. De notar que o raio r do círculo que descreve a hélice não é igual ao raio de curvatura ρ da hélice ($\rho > r$). Em cada ponto, o raio r é inversamente proporcional ao módulo do campo de indução magnética, e o eixo da hélice segue a direcção das linhas de indução magnética.

Dentro de campos eléctrico e de indução magnética, a força sobre uma partícula com carga q e velocidade \mathbf{v} é a soma das forças eléctrica e magnética:

$$\boxed{\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})}; \quad (8.22)$$

esta força é chamada **força de Lorentz**. A combinação do campo eléctrico e do campo de indução magnética permite produzir movimentos muito variados.

Exemplo 8.1

Num feixe de partículas de massa m e carga q a componente da velocidade, v_0 , ao longo do eixo do feixe é a mesma para todas as partículas, divergindo o feixe de um ângulo θ . Mostre que um campo de indução magnética uniforme \mathbf{B} , na direcção do eixo, faz o feixe convergir para um ponto (foco), e encontre a distância deste ponto ao ponto inicial. (Nota: este método é usado em microscópios electrónicos e outros aparelhos que utilizam feixes de partículas.)

Consideremos uma partícula dentro do feixe, com velocidade v_0 , formando um certo ângulo α ($0 \leq \alpha \leq \theta$) com o campo de indução magnética. Escolhamos um sistema de eixos de forma a que o eixo x esteja na direcção do campo e a velocidade inicial da partícula esteja no plano xy (Figura 8.9):

$$\begin{aligned} v_x &= v_0, \\ v_y &= v_0 \tan \alpha. \end{aligned}$$

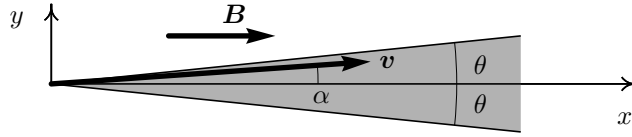


Figura 8.9: Feixe de partículas dentro de um campo de indução magnética.

Depois de algum tempo a velocidade v_x é a mesma, mas a velocidade v_y terá diminuído, aparecendo uma componente v_z . Na projecção sobre o plano yz , o movimento é circular uniforme, como já vimos no caso do movimento no plano perpendicular ao campo. O raio da projecção yz calcula-se a partir da Equação (8.20), em que a velocidade escalar é igual à velocidade inicial $v_y = v_0 \tan \alpha$:

$$a = \frac{mv_0 \tan \alpha}{qB}. \quad (8.23)$$

Enquanto as partículas descrevem um círculo no plano normal ao eixo, o plano desloca-se a velocidade constante v_0 e o movimento resultante é uma hélice sobre um cilindro de raio a (Figura 8.10). Para calcular o **passo**, p , da hélice calculemos o período de rotação do movimento circular uniforme:

$$T = \frac{2\pi a}{v_0 \tan \alpha} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

O resultado não depende do ângulo α . Apesar de as diversas partículas no feixe percorrerem hélices de raios diferentes, todas elas completam uma volta exactamente no mesmo tempo T , regressando ao eixo x .

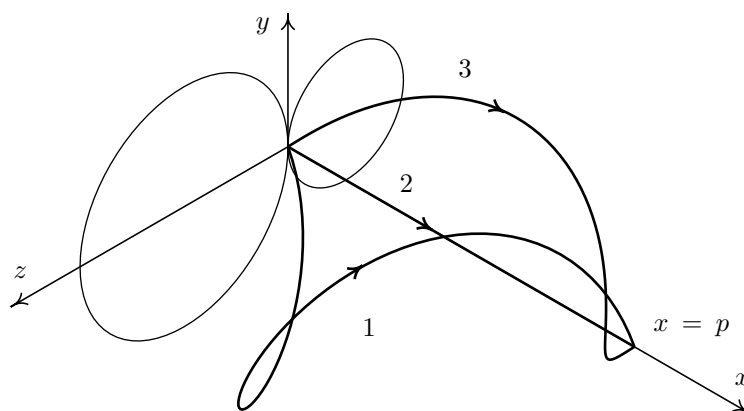


Figura 8.10: Movimento helicoidal de partículas com a mesma componente da velocidade na direcção do campo \mathbf{B} .

Como o movimento na direcção x é uniforme, com velocidade v_0 , a distância p a que as partículas completam a primeira volta é

$$p = v_0 T = \frac{2\pi m v_0}{qB}.$$

A Figura 8.10 mostra o movimento de três partículas: a partícula 1 com uma componente de velocidade inicial no sentido negativo de y , a partícula 2 com velocidade inicial na direcção x e a partícula 3 com uma componente da velocidade inicial segundo y . Os dois círculos no plano yz representam as projecções dos movimentos das partículas 1 e 3. A secção transversal do feixe de partículas aumenta a partir da origem, até um valor máximo em $x = p/2$, diminuindo logo até zero para $x = p$ onde as partículas convergem.

■

8.5 Aplicações dos campos eléctrico e magnético

As aplicações tecnológicas do movimento de partículas dentro dos campos eléctrico e magnético são muitas. Existem diversos métodos de separação de partículas baseados nos campos eléctrico e magnético. Algumas técnicas de impressão usam campos eléctricos para transportar as partículas de tinta. Um televisor e um monitor de computador usam um feixe contínuo de electrões para produzir a imagem; o varrimento do ecrã, por parte do feixe de electrões, é controlado com precisão por meio de campos eléctrico e magnético pulsatórios. O movimento de partículas dentro dos campos eléctrico e magnético é também usado para determinar a relação carga-massa das partículas, permitindo descobrir novas partículas elementares em colisões a alta energia, nos aceleradores de partículas. Estudaremos com mais detalhe quatro exemplos de aplicação dos campos eléctrico e magnético.

8.5.1 Filtro de velocidades

Um dispositivo usado para filtrar partículas em movimento, com uma determinada velocidade num feixe de partículas, consiste num par de campos eléctrico e magnético perpendiculares entre si e perpendiculares ao feixe (Figura 8.11).

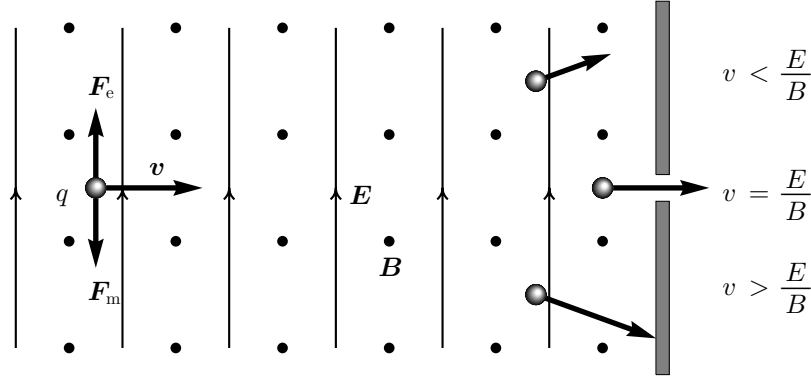


Figura 8.11: Partículas com carga positiva dentro de um filtro de velocidades. O campo eléctrico aponta para cima e o campo de indução magnética aponta para fora do papel.

Para que uma partícula no feixe consiga sair do filtro, a sua trajectória deverá ser rectilínea, e para que isso aconteça é necessário que a força de Lorentz seja nula. A força eléctrica e a força magnética têm sentidos opostos neste caso, de maneira que a condição para o movimento rectilíneo é dada por

$$qvB = qE, \quad (8.24)$$

a qual implica uma velocidade igual a

$$\boxed{v = \frac{E}{B}}. \quad (8.25)$$

Apenas as partículas com esta velocidade conseguirão atravessar o filtro, independentemente do sinal e do valor da carga q . Consideremos, por exemplo, partículas com carga positiva constante. Com os campos indicados na Figura 8.11, a força eléctrica será para cima e igual para todas as partículas. A força magnética, para baixo, é directamente proporcional a v . A força magnética sobre as partículas lentas ($v < E/B$), não será suficiente para contrariar a força eléctrica, e a trajectória das partículas será curva para cima. As trajectórias das partículas rápidas ($v > E/B$) será curva para baixo. Se a carga for negativa, as partículas lentas serão puxadas para baixo e as partículas rápidas serão puxadas para cima, mas as partículas com $v = E/B$ seguem a trajectória recta.

8.5.2 Tubo de raios catódicos

A invenção do tubo de raios catódicos permitiu ao inglês J. J. Thomson descobrir, em 1897, a primeira partícula elementar — o electrão. O tubo de raios catódicos é igual ao tubo usado nos osciloscópios e aparelhos de televisão (Figura 8.12). Uma f.e.m. \mathcal{E}_1 é usada para aquecer um filamento F (cátodo) dentro do tubo onde existe vácuo. Quando se introduz uma segunda f.e.m. \mathcal{E}_2 , que faz com que a placa perfurada G (ânodo) tenha maior potencial do que o filamento, aparece um feixe de raios entre o filamento e o ânodo, chamados de **raios catódicos**. A grande contribuição de Thomson foi descobrir que os raios catódicos são formados por partículas subatómicas, todas elas com a mesma carga mássica.

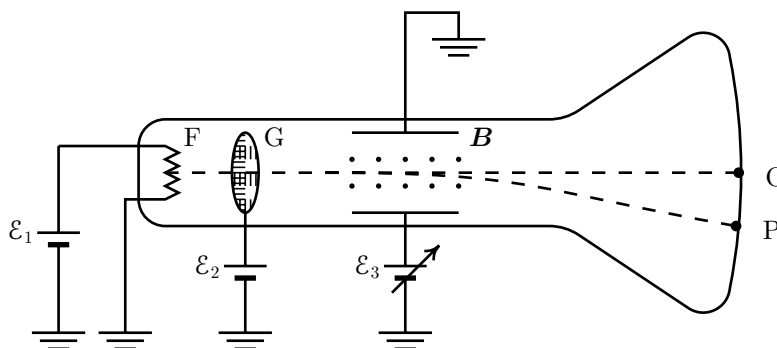


Figura 8.12: Tubo de raios catódicos.

A maior parte dos electrões extraídos do cátodo conseguem atravessar a placa G e continuam com velocidade constante, v , na direcção do ecrã. A velocidade v dos electrões no feixe é devida à aceleração produzida pela diferença de potencial entre o cátodo e o ânodo. Como a aceleração é do cátodo para o ânodo, a carga dos electrões é negativa. Como o feixe não é desviado pela acção da gravidade, Thomson concluiu que a massa do electrão devia ser muito pequena e propôs um método para calcular a carga mássica do electrão (m/e).

O método consiste em medir o desvio do feixe de electrões quando se introduz um campo eléctrico perpendicular ao feixe. Na Figura 8.12, a introdução da diferença de potencial \mathcal{E}_3 desvia os raios catódicos do ponto inicial O até ao ponto P no ecrã. A velocidade v dos electrões pode ser calculada introduzindo também um campo magnético cruzado B de forma a fazer regressar o feixe ao ponto inicial O, actuando como um filtro de velocidades. A carga mássica m/e é calculada em função de v , B , \mathcal{E}_3 e o desvio angular entre O e P. O facto de se obter um só ponto P no ecrã corrobora que todas as partículas do feixe (electrões) têm exactamente a mesma carga mássica.

8.5.3 Espectrómetro de massa

No espectrómetro de massa, o campo de indução magnética é usado para separar os elementos que compõem um gás, de acordo com a sua massa atómica. Este método é especialmente útil quando se têm diferentes isótopos de um mesmo elemento².

O gás entra dentro de uma cavidade no vazio — **fonte de iões** — onde é bombardeado por um feixe de electrões (Figura 8.13). As colisões entre os electrões e o gás ionizam algumas moléculas do gás; se o feixe de electrões não tiver uma energia muito elevada, a probabilidade deste arrancar dois ou mais electrões de uma molécula é muito baixa e podemos admitir que todos os iões têm a carga elementar e . Os iões são acelerados fora da fonte; a velocidade com que os iões saem não depende da sua massa mas apenas da sua carga e da diferença de potencial; temos, assim, um feixe de partículas com velocidade constante v , mas massas diferentes.

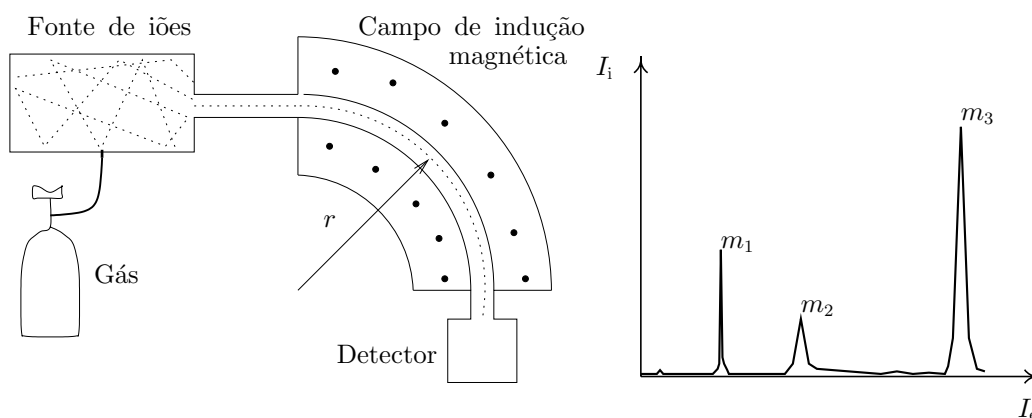


Figura 8.13: Espectrómetro de massa e espectro de um gás.

O feixe de iões passa através de um campo de indução magnética uniforme e perpendicular, \mathbf{B} . O raio de curvatura dos iões dentro do campo de indução magnética depende da massa iónica m ; substituindo a carga dos iões na Equação (8.20), obtemos

$$r = \frac{mv}{eB} . \quad (8.26)$$

Modificando o módulo B do campo, o raio r pode ser ajustado até os iões com uma determinada massa entrarem no detector (Figura 8.13). Se o campo \mathbf{B} for produzido por um electroímã, B é directamente proporcional à corrente I_e no electroímã; a corrente iónica I_i no detector, em função de I_e , apresenta vários picos que correspondem às diferentes massas m dos componentes do gás. O valor de I_e onde aparece um pico é directamente proporcional à massa atómica do elemento correspondente. A altura dos picos é directamente proporcional à concentração do elemento dentro do gás.

²Os isótopos têm o mesmo número atómico mas diferentes massas atómicas; como as propriedades químicas dependem apenas do número atómico, não é possível separar isótopos por meios químicos.

8.5.4 Galvanómetro

Como vimos no capítulo anterior, o dispositivo usado para medir correntes é o galvanómetro. O tipo mais comum de galvanómetro consiste numa bobina que roda à volta de um eixo, dentro de um campo de indução magnética (Figura 8.14). Quando uma corrente I percorre a bobina, produz-se um momento magnético \mathbf{m} directamente proporcional à corrente I . O campo de indução magnética exerce sobre a bobina um momento de binário igual a $\mathbf{m} \times \mathbf{B}$.

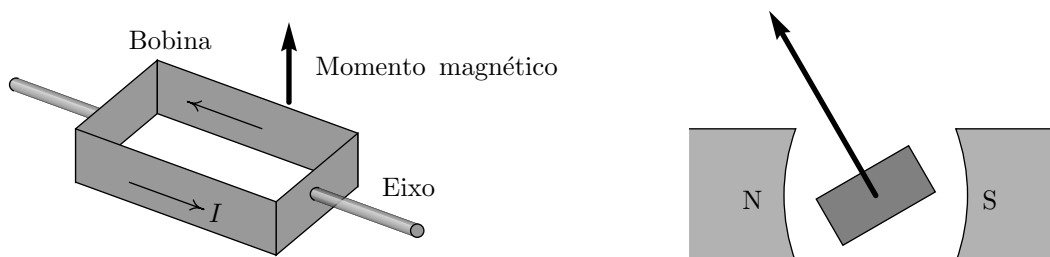
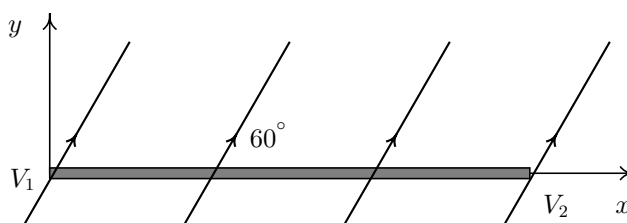


Figura 8.14: Galvanómetro.

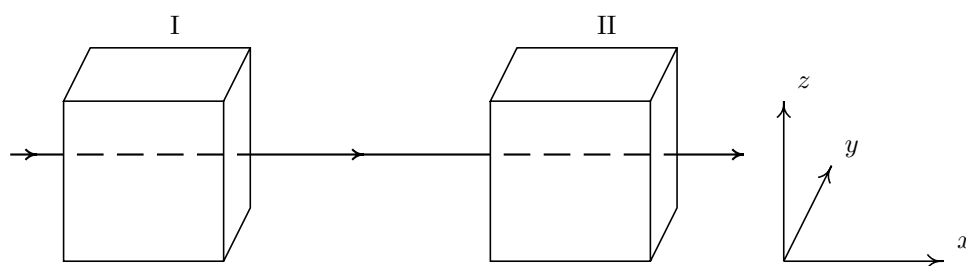
À rotação da bobina opõe-se uma mola em espiral que actua sobre ela; o momento do binário produzido pela mola em espiral é directamente proporcional ao ângulo de rotação da bobina. Na posição em que os dois binários se equilibram, a bobina terá rodado um ângulo que é directamente proporcional ao momento magnético e, portanto, à corrente I . A medição do ângulo permite determinar o valor da corrente.

Problemas

1. Um fio linear de cobre, de diâmetro 2,59 mm e de comprimento 2 m, encontra-se dentro de um campo de indução magnética uniforme ($B = 50$ G) que forma um ângulo de 60° com o fio. Calcule a força magnética sobre o fio quando se aplica uma diferença de potencial de 0,06 V entre os seus extremos.

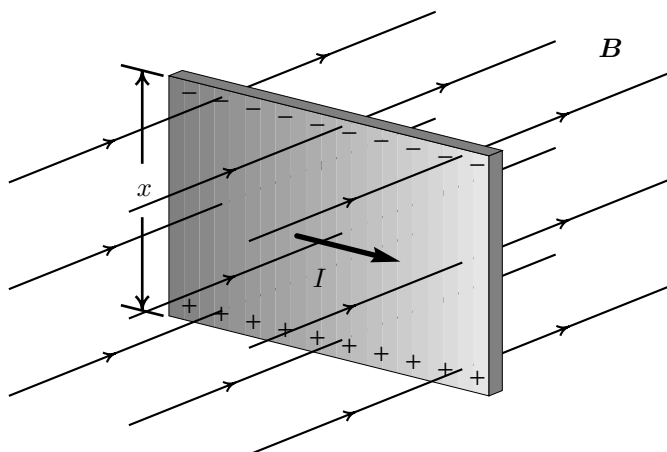


2. Um feixe de prótons desloca-se com uma velocidade constante v , segundo o eixo x . As partículas atravessam, sucessivamente, duas regiões, I e II, caracterizadas do seguinte modo: em I, existe um campo de indução magnética, B_1 e em II, coexistem um campo de indução magnética, B_2 , e um campo eléctrico, $E = E j$. Todos os campos são uniformes nas regiões em que foram definidos e anulam-se fora delas. A interacção gravítica não é significativa. Quais as condições a que devem obedecer os campos B_1 e B_2 para que o feixe não sofra qualquer perturbação no seu movimento, enquanto atravessa as regiões I e II? Se em vez de um feixe de prótons, fosse um feixe de electrões, as condições estabelecidas manter-se-iam?

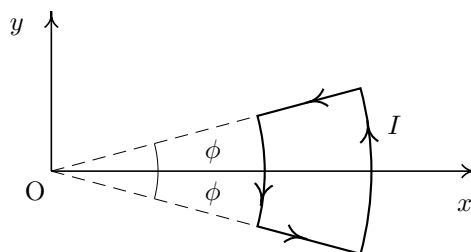


3. Um protão «navega» na atmosfera solar, a uma velocidade de $0,15c$, onde c é a velocidade da luz no vazio (ver Apêndice B). O protão atravessa um campo magnético uniforme de $0,12$ T, formando um ângulo de 25° . Calcule o raio do cilindro que envolve a órbita helicoidal do protão.
4. Considere uma bobina circular de 400 espiras e raio $0,1$ cm, num campo magnético uniforme de $0,3$ T. Calcule o momento de binário máximo sobre a bobina quando a corrente for 92 mA.
5. Num filtro de velocidades os módulos dos campos de indução magnética e eléctrico são $0,1$ T e $0,2$ MV/m, respectivamente.
- Qual deve ser a velocidade de uma partícula para que não seja desviada ao passar pelos campos?
 - Qual é a energia que deve ter um protão para passar através do filtro?
 - E qual a energia de um electrão que sai do filtro? (As massas do electrão e do protão encontram-se no Apêndice B.)
6. Um ião de ^{24}Mg , monoionizado, é acelerado por uma diferença de potencial de 2 kV e descreve uma trajectória circular no campo de indução magnética de 50 mT de um espectrómetro de massa.
- Calcule o raio de curvatura da órbita do ião.
 - Qual será a diferença entre os raios das órbitas dos iões dos isótopos ^{26}Mg e ^{24}Mg no mesmo campo?

7. Em 1879, o físico E. H. Hall descobriu que quando uma corrente atravessa uma lâmina condutora de largura x , dentro de um campo de indução magnética perpendicular à lâmina, aparece uma diferença de potencial V através da lâmina como se mostra na figura (efeito Hall). Demonstre que a diferença de potencial é igual a $xIB/\rho A$, em que ρ é a carga volúmica dos portadores de carga e A a área da secção transversal da lâmina. Como se modificaria o resultado, se em vez de uma lâmina condutora tivesse uma lâmina de germânio com portadores de carga positivos?



8. Partículas de carga q e massa m são aceleradas, a partir do repouso, por uma diferença de potencial V e entram numa região de campo de indução magnética uniforme B perpendicular à velocidade. Sendo r o raio de curvatura das órbitas circulares, demonstre que r^2 é igual a $2mV/qB^2$.
9. A espira da figura é formada por dois arcos de raios r_1 e r_2 ($r_2 > r_1$), cada um correspondente a um ângulo 2ϕ , e dois segmentos radiais de comprimento $r_2 - r_1$. Existe um campo de indução magnética $C e_\theta/r$, onde C é uma constante e (r, θ) são as coordenadas polares. Calcule o momento de binário sobre a espira quando esta é percorrida por uma corrente I , no sentido indicado na figura.



Conceitos básicos

- Lei de Biot-Savart
- Força magnética entre fios com corrente
- Lei de Ampère
- Diamagnetismo, paramagnetismo e ferromagnetismo
- Susceptibilidade e permeabilidade magnética

Jean-Baptiste Biot



(1774-1862)

Biot nasceu em Paris. Estudou na Escola Politécnica dessa cidade onde foi discípulo de Monge. Entre 1797 e 1800 foi professor de matemática na Escola Central de Beauvais, professor de física-matemática no *Collège de France* onde, em 1809, ocupou a cátedra de astronomia. A matemática aplicada foi o seu campo de investigação nas áreas da óptica, elasticidade, astronomia, electricidade e magnetismo, tendo feito algum trabalho mais abstracto na área da geometria. Colaborou com Arago na medição do comprimento do arco do meridiano terrestre e na refacção da luz em gases. Estudou a polarização da luz ao atravessar uma solução química. Em 1820, com o francês Savart, deu o seu maior contributo para o electromagnetismo com o estudo do campo magnético produzido por cabos atravessados por corrente. No campo da óptica, foi um dos principais promotores da teoria corpuscular da luz.

Magnetostática

9.1 Lei de Biot-Savart

Como já foi dito no capítulo anterior, em 1820 o dinamarquês Ørsted revolucionava as ciências da electricidade e do magnetismo com a descoberta da produção de um campo magnético por meio de uma corrente eléctrica. O físico francês Arago anunciou o descobrimento de Ørsted em Paris, e construiu o primeiro electroímã enrolando um fio que, ao ser percorrido por corrente, atraía pequenos pedaços de ferro. Alguns dias mais tarde Jean-Baptiste Biot e Felix Savart, ao estudar sistematicamente o campo produzido por um fio com corrente, encontraram uma expressão matemática para o campo de indução magnética em função da corrente. Ampère também se interessou pelo resultado de Ørsted estudando simultaneamente, mas de forma independente, a relação entre a corrente e o campo de indução magnética, estudos esses que o levariam a descobrir a existência de forças magnéticas entre fios atravessados por corrente.

Em Londres, no ano de 1821, Michael Faraday também reproduzia e estendia a experiência de Ørsted, e com base nesta realizou uma série de experiências sobre a rotação produzida por campos de indução magnética sobre espiras, que serviriam de base à invenção do motor eléctrico.

A **lei de Biot-Savart** estabelece a equação do campo de indução magnética \mathbf{B} produzido num ponto P por um fio com corrente I , que escrita em notação vectorial é dada

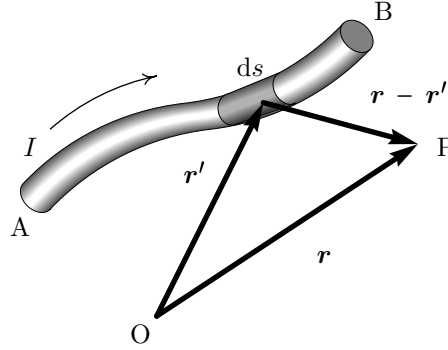


Figura 9.1: Vectores usados na lei de Biot-Savart.

pela seguinte equação:

$$\mathbf{B} = k_m \int_A^B \frac{\mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds. \quad (9.1)$$

O vector \mathbf{r} é o vector posição do ponto P onde se pretende calcular o campo, \mathbf{r}' é o vector que define os pontos do fio e o integral é um integral de linha ao longo do fio. A **constante magnetostática** k_m tem o seguinte valor experimental, no Sistema Internacional de unidades,

$$k_m = 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}. \quad (9.2)$$

Este é um valor exacto, já que é definido, e não medido experimentalmente; na próxima secção voltaremos a este ponto. A Equação (9.1) é semelhante à equação do campo eléctrico produzido por um fio com carga linear λ . A diferença está em que a corrente I aparece em vez de λ e o campo tem a direcção de $\mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ e não a direcção de $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$; o campo produzido por um elemento infinitesimal de fio não é um campo central e, como veremos, não é conservativo.

Exemplo 9.1

Calcule o campo de indução magnética produzido por um fio rectilíneo com corrente I .

Convém escolher o eixo z ao longo do fio e usar coordenadas cilíndricas. Para um dado ponto P podemos escolher o plano xy sobre o ponto, de maneira que a posição de P, em coordenadas cilíndricas, seja $\mathbf{r} = R \mathbf{e}_R$ e o elemento infinitesimal de fio seja dz , na posição $\mathbf{r}' = z \mathbf{k}$; assim, temos:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = r \mathbf{e}_R - z \mathbf{k},$$

e o produto vectorial no numerador da lei de Biot-Savart é

$$\mathbf{I} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = I \times (r \mathbf{e}_R - z \mathbf{k}) = IR \mathbf{e}_\theta,$$

onde \mathbf{e}_θ é o versor transversal, perpendicular a \mathbf{e}_R e a \mathbf{k} . Usando a lei de Biot-Savart temos

$$\mathbf{B} = k_m I \int_{z_1}^{z_2} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz \mathbf{e}_\theta .$$

O integral pode ser resolvido por meio da substituição trigonométrica $z = R \tan \beta$, onde β é o ângulo representado na Figura 9.2.

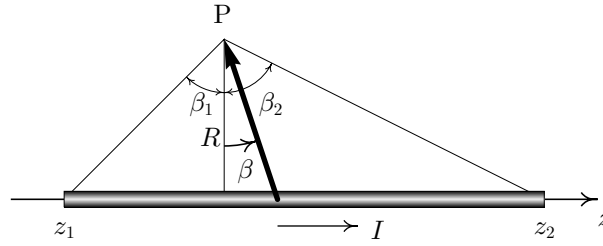


Figura 9.2: Fio retilíneo curto, com corrente I .

Em função de β o integral é

$$\mathbf{B} = \frac{k_m I \mathbf{e}_\theta}{R} \int_{-\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta ,$$

e o resultado obtido é

$$\mathbf{B} = \frac{k_m I}{R} (\sin \beta_1 + \sin \beta_2) \mathbf{e}_\theta . \quad (9.3)$$

Se o ponto P se encontrar sobre o eixo do fio, a expressão anterior não poderá ser usada mas é fácil ver que o campo será nulo. ■

As linhas de indução magnética são círculos perpendiculares ao fio e com centro nele (Figura 9.3). No caso de um fio retilíneo muito comprido, ou em geral, quando a distância R é pequena quando comparada com a distância aos dois extremos do fio, os ângulos β_1 e β_2 são aproximadamente iguais a 90° , e substituindo na Equação (9.3) obtemos $B = 2k_m I/R$.

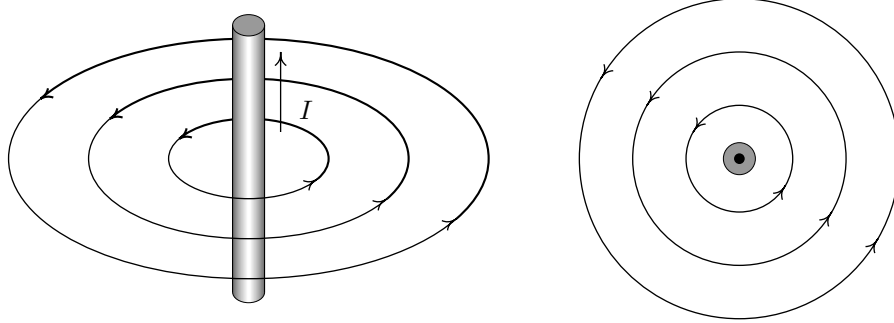


Figura 9.3: Linhas de indução magnética de um fio retilíneo.

Em forma vectorial, o campo \mathbf{B} do fio retilíneo pode ser escrito na forma

$$\mathbf{B} = \frac{2k_m}{R} \mathbf{I} \times \mathbf{e}_R. \quad (9.4)$$

A equação anterior é válida inclusivamente para fios curtos, sempre que exista simetria cilíndrica e a corrente seja estacionária, já que, como veremos no Capítulo 12, o factor adicional que aparece na Equação 9.3 é devido à corrente não ser estacionária.

9.2 Força magnética entre fios com corrente

Já vimos, no capítulo anterior, que sobre um fio atravessado por corrente, um campo de indução magnética produz uma força. Quando existem dois fios com correntes I_1 e I_2 , a corrente I_1 no fio 1 produz um campo magnético \mathbf{B}_1 , de acordo com a lei de Biot-Savart, o qual exerce uma força \mathbf{F}_{12} sobre o segundo fio; de igual forma, o fio 2 produz um campo de indução magnética \mathbf{B}_2 que actua no primeiro fio, com uma força \mathbf{F}_{21} (Figura 9.4).

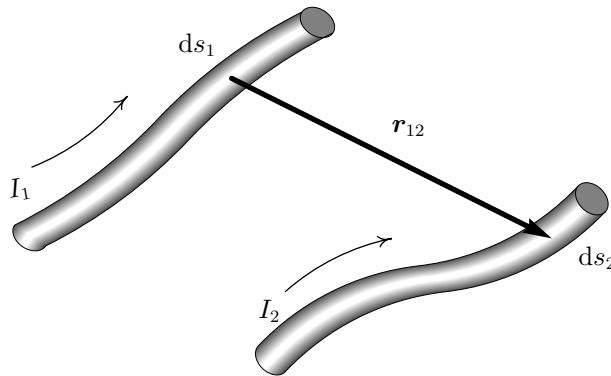


Figura 9.4: Força entre fios com correntes.

A força, por unidade de comprimento, que o fio 1 exerce sobre o fio 2 é

$$\frac{d\mathbf{F}_{12}}{ds_2} = \mathbf{I}_2 \times \mathbf{B}_1 . \quad (9.5)$$

O campo produzido pelo fio 1, na posição de ds_2 , é dado pela lei de Biot-Savart:

$$\mathbf{B}_1 = k_m \int_{A_1}^{B_1} \frac{\mathbf{I}_1 \times \mathbf{e}_{12}}{r_{12}^2} ds_1 . \quad (9.6)$$

Substituindo na Equação (9.5) e integrando desde A_2 até B_2 , obtemos

$$\mathbf{F}_{12} = k_m \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} \frac{\mathbf{I}_2 \times (\mathbf{I}_1 \times \mathbf{e}_{12})}{r_{12}^2} ds_1 ds_2 . \quad (9.7)$$

Um caso simples é quando os dois fios são rectilíneos e paralelos; se os fios são muito compridos, a Equação (9.3) constitui uma boa aproximação ao valor do campo produzido por cada um dos fios. A força sobre o fio 2, por unidade de comprimento, obtém-se a partir das Equações (9.5) e (9.3):

$$\boxed{\frac{F_{12}}{l_2} \approx \frac{2k_m I_1 I_2}{r_{12}}} ; \quad (9.8)$$

o sentido da força obtém-se facilmente usando a regra da mão direita e o resultado é uma força atractiva entre fios com correntes no mesmo sentido ou repulsiva para correntes em sentidos opostos (Figura 9.5).

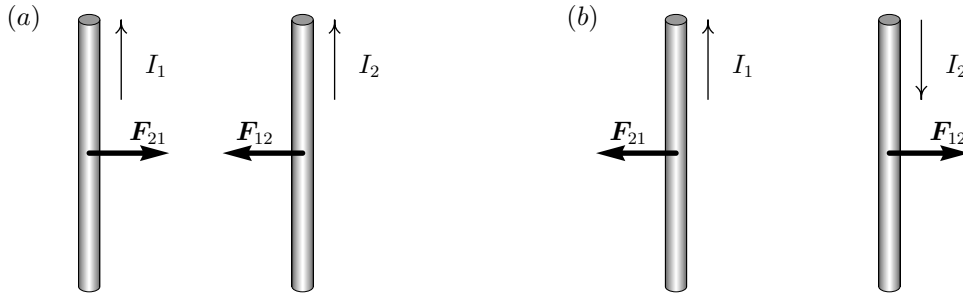


Figura 9.5: Força magnética entre dois fios rectilíneos paralelos:

- (a) A força entre fios com correntes no mesmo sentido é atractiva;
- (b) A força entre fios com correntes em sentidos opostos é repulsiva.

A Equação (9.8) é usada para definir o ampere no Sistema Internacional de unidades, em função do newton e do metro, usando o valor 10^{-7} N/A² para a constante magnetostática: um ampere é a corrente que deve circular por dois fios rectilíneos e paralelos para se

obter uma força por unidade de comprimento de $2 \cdot 10^{-7}$ N/m quando a distância entre os fios é de 1 metro. Assim, como foi referido na secção anterior, o valor da constante magnetostática é definido no Sistema Internacional de unidades, de forma a obter uma unidade de corrente da ordem de grandeza das correntes normalmente obtidas em experiências de electricidade. O coulomb é uma unidade auxiliar, definida como a carga transferida por uma corrente contínua de 1 ampere durante 1 segundo e, portanto, o valor da constante de Coulomb não pode ser definido devendo ser medido experimentalmente.

Exemplo 9.2

Os dois fios rectilíneos e paralelos da Figura 9.5(a) transportam correntes de 3 A e 4 A e encontram-se separados por uma distância de 5 cm (o comprimento dos fios é muito maior do que 5 cm). Calcule a força por unidade de comprimento entre os fios. Em que ponto (ou pontos) o campo de indução magnética total é nulo?

A força entre os dois fios é

$$\frac{F_{12}}{l_2} = \frac{2k_m I_1 I_2}{d} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 10^{-2}} \frac{\text{N} \cdot \text{A}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{m}} = 48 \frac{\mu\text{N}}{\text{m}}.$$

Na região entre os dois fios, os campos dos dois fios têm sentidos opostos e, portanto, existe um ponto P no qual o campo total é nulo (Figura 9.6). No ponto P,

$$B_1 = \frac{2k_m I_1}{x_1} = B_2 = \frac{2k_m I_2}{x_2},$$

em que x_1 e x_2 são as distâncias de P aos fios percorridos por correntes de 3 A e 4 A, respectivamente ($x_1 + x_2 = 5$ cm). Podemos assim calcular x_1 :

$$\frac{I_1}{x_1} = \frac{I_2}{5 \text{ cm} - x_1} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2} 5 \text{ cm} \approx 2,1 \text{ cm}.$$

O campo é nulo no ponto sobre o segmento que une os fios, a uma distância de 2,1 cm do fio que transporta 3 A.

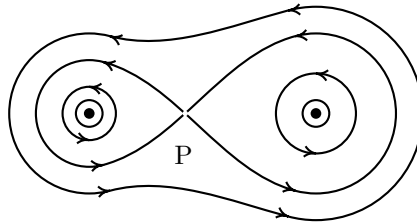


Figura 9.6: Linhas de indução magnética de dois fios com correntes paralelas, para fora do papel. ■

9.3 Lei de Ampère

O integral de linha do campo eléctrico, ao longo de qualquer percurso fechado C , é igual a zero como demonstrámos no Capítulo 4. Isto é consequência de o campo eléctrico ser conservativo.

O campo de indução magnética não é conservativo, já que existem curvas de indução magnética fechadas, ao longo das quais o integral do campo não é zero. Por exemplo, no caso do campo produzido por um fio rectilíneo, se a curva fechada for um círculo C com centro no fio e perpendicular a ele, o campo de indução magnética será tangente a C e estará dirigido sempre no mesmo sentido, de maneira que o integral de linha do campo de indução magnética não será nulo:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B \oint_C ds = 2\pi r B. \quad (9.9)$$

Em geral, o valor do integral de linha do campo, ao longo de uma curva fechada é proporcional à corrente que passa através da curva, como demonstraremos a seguir. Consideremos qualquer percurso fechado C em torno do fio. Em coordenadas cilíndricas, com o eixo z sobre o fio (Figura 9.7), o deslocamento diferencial é

$$d\mathbf{r} = dR \mathbf{e}_R + R d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{k}. \quad (9.10)$$

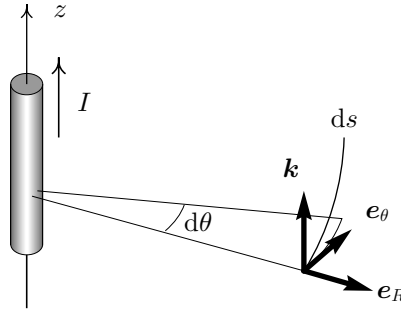


Figura 9.7: Deslocamento diferencial em coordenadas cilíndricas.

O campo de indução magnética do fio é dado pela Equação (9.4), com $\mathbf{I} \times \mathbf{e}_R = I \mathbf{e}_\theta$, e o integral de linha do campo é

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 2k_m I \oint_C d\theta. \quad (9.11)$$

Para o percurso fechado C , se o fio estiver dentro de C , o integral de $d\theta$ será igual a 2π ; mas, se o fio estiver por fora da curva C , o ângulo θ aumenta num certo valor e logo diminui na mesma quantidade, dando um resultado total igual a zero. Logo, para um fio muito comprido e qualquer percurso fechado:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} 4\pi k_m I, & \text{fio dentro de } C \\ 0, & \text{fio fora de } C. \end{cases} \quad (9.12)$$

No resultado anterior a curva C não tem que ser plana nem perpendicular ao fio. O importante é que seja fechada, dando uma volta em torno do fio¹. É de salientar também que a curva foi percorrida no mesmo sentido do campo, ou seja, no sentido positivo definido pela corrente I ; se a curva fosse percorrida no sentido oposto ao sentido definido por I segundo a regra da mão direita, o campo estaria na direcção oposta ao versor transversal \mathbf{e}_θ e o resultado anterior teria um sinal negativo.

Quando existem vários fios com correntes, os fios que não passam através da curva C não contribuem para o valor do integral de linha do campo, enquanto que cada fio com corrente I_n que passa através de C aumenta o valor do integral em $\pm 4\pi k_m I_n$, dependendo do sentido da corrente. Este resultado é designado por **lei de Ampère**: o integral de linha do campo de indução magnética, ao longo de uma curva fechada C , é igual a $4\pi k_m$ vezes a corrente total I_C através da curva C , considerada como positiva segundo o sentido da regra da mão direita:

$$\boxed{\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 4\pi k_m I_C}, \quad (9.13)$$

O lado direito também costuma ser descrito como $\mu_0 I_C$, onde a constante μ_0 , igual a $4\pi k_m$, é a **permeabilidade magnética** do vazio.

Como veremos no próximo capítulo, a lei de Ampère é realmente válida apenas na ausência de campos eléctricos variáveis. Neste capítulo consideraremos unicamente campos electrostáticos nos quais a lei é válida.

A lei de Ampère pode ser usada para calcular o campo de indução magnética em sistemas simples com certa simetria, de forma semelhante à da lei de Gauss no caso do campo eléctrico. Para que a lei de Ampère seja útil para calcular o campo, é necessário que existam curvas fechadas onde o campo seja tangente e de módulo constante, como veremos no exemplo a seguir.

¹Se a curva C dá n voltas ao fio antes de regressar ao ponto inicial, vê-se facilmente que o resultado do integral de linha de \mathbf{B} será $4n\pi k_m I$.

Exemplo 9.3

Calcule o campo de indução magnética produzido por um fio cilíndrico, de raio a , com corrente I distribuída uniformemente dentro do fio.

Por simetria, o campo de indução magnética deve ser tangente aos círculos concêntricos e perpendiculares ao fio (Figura 9.8). Ao longo de um desses círculos, de raio r , o integral de linha do campo é

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = B \int ds = 2\pi r B .$$

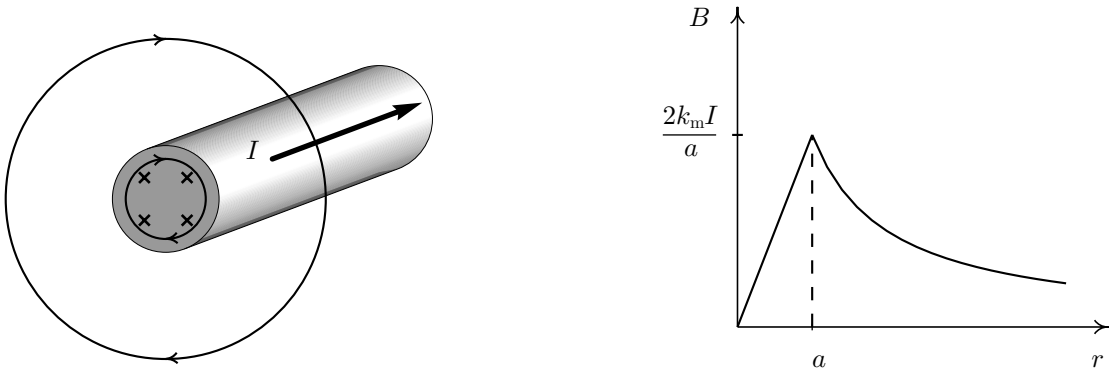


Figura 9.8: Linhas de indução magnética de um cilindro de raio a com distribuição uniforme de corrente e gráfico de B em função de r .

Usando a lei de Ampère, obtemos

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 4\pi k_m I_C .$$

Comparando as duas equações concluímos que:

$$B = \frac{2k_m I_C}{r} .$$

Se o raio do círculo C for maior que o raio do cilindro, a corrente através de C será exactamente igual a I . Mas no caso de um círculo com raio $r < a$ a corrente I_C deverá ser calculada como o produto entre a densidade de corrente $J = I/\pi a^2$ e a área do círculo C , $A = \pi r^2$. Obtemos assim:

$$I_C = \begin{cases} I , & r \geq a \\ \frac{r^2}{a^2} I , & r < a , \end{cases}$$

e, por conseguinte, o campo será

$$B = \begin{cases} \frac{2k_m I}{r} & r \geq a \\ \frac{2k_m I}{a^2} r & r < a \end{cases}$$

A Figura 9.8 mostra o gráfico do módulo do campo de indução magnética, em função da distância ao eixo do cilindro, r . No interior do cilindro, o campo aumenta linearmente em função de r , até um valor máximo $2k_m I/a$; fora do cilindro, o campo diminui inversamente proporcional a r e o resultado é o mesmo que obtivemos para um fio ideal (raio nulo), usando a lei de Biot-Savart. ■

9.4 Linhas de indução magnética

As linhas de indução magnética verificam as seguintes propriedades:

- As linhas são sempre contínuas e fechadas;
- As linhas de indução magnética não podem convergir ou divergir num ponto, isto é, não existem **monopólos magnéticos** (pólos magnéticos isolados);
- Em pontos onde o campo de indução magnética é diferente de zero, as linhas de indução magnética não se podem cruzar. Num ponto onde $\mathbf{B} = 0$, existem linhas a entrarem e a saírem do ponto; o número de linhas que entra é igual ao número de linhas que sai.

Quando as linhas de indução magnética estão sobre um plano, assemelham-se às curvas equipotenciais num plano. Veremos alguns exemplos. As linhas de dois fios rectilíneos e paralelos são perpendiculares aos fios e encontram-se sobre planos perpendiculares aos dois fios. Perto de cada fio, as linhas são aproximadamente círculos na direcção definida pela regra da mão direita. O caso em que as correntes têm o mesmo sentido já foi ilustrado na Figura 9.6: as linhas perto de cada fio são aproximadamente círculos. Entre os dois fios os círculos correspondentes aos dois fios têm sentidos opostos; isto implica uma mudança no sentido do campo e, necessariamente, a existência de um ponto intermédio onde o campo seja nulo (P na figura). Nesse ponto, entram e saem duas linhas de indução magnética.

Quando as correntes têm sentidos opostos, entre os dois fios, os círculos correspondentes às linhas de indução magnética dos dois fios apontam na mesma direcção; se os valores das correntes forem os mesmos, o desenho das linhas deverá ser simétrico, como se mostra na Figura 9.9a.

Quando uma das correntes é maior, a corrente total será diferente de zero. Isto implica que, visto de longe, o sistema assemelha-se a um único fio com corrente $I_1 - I_2$, no sentido da corrente maior. Consequentemente, longe dos fios as linhas de indução magnética são círculos orientados no sentido definido pela corrente maior; estes círculos têm sentido oposto aos círculos na proximidade do fio com a menor corrente e, portanto, existe um

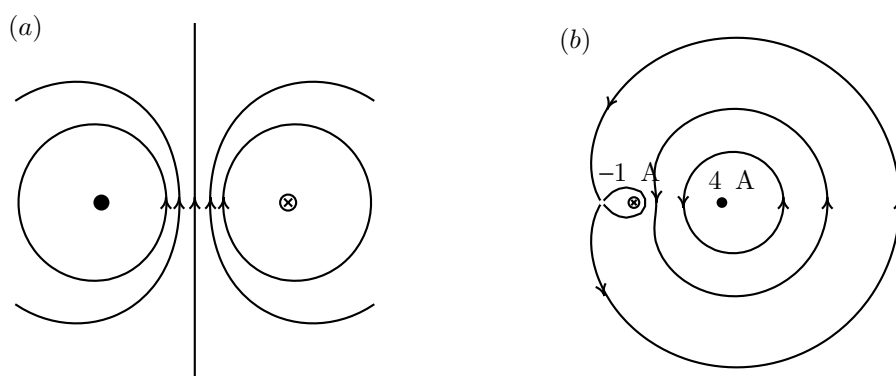


Figura 9.9: Linhas de indução magnética de fios com correntes opostas. No caso (a) as correntes têm a mesma intensidade.

ponto de campo nulo por fora do segmento entre as duas correntes e mais perto da corrente menor (Figura 9.9b).

No caso de três fios paralelos podem existir um ou dois pontos de campo nulo, consoante os valores das correntes e as distâncias entre os fios. A Figura 9.10 mostra dois exemplos nos quais existem dois pontos de campo nulo.

As linhas de campo de um sistema de fios rectilíneos são idênticas às curvas equipotenciais de um sistema de fios infinitos com carga linear uniforme. Os campos das Figuras 9.6, 9.9 e 9.10 são semelhantes às curvas equipotenciais dos sistemas de fios pa-

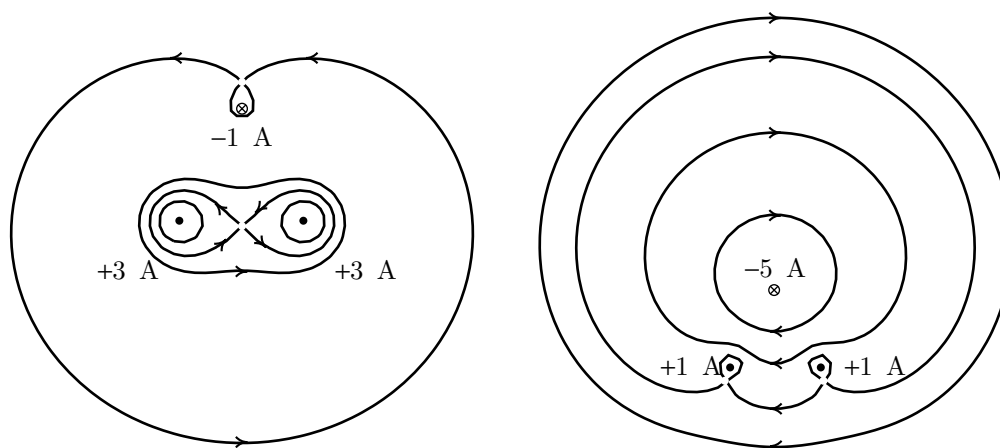


Figura 9.10: Dois exemplos ilustrando as linhas de indução magnética de três correntes rectilíneas e paralelas. O sinal positivo indica correntes para fora do papel.

rales com cargas lineares (λ, λ) , $(\lambda, -\lambda)$ e $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, respectivamente, sobre um plano perpendicular aos fios. No entanto, as linhas de indução são verdadeiras curvas, orientadas num sentido, enquanto que as equipotenciais são realmente superfícies fechadas.

9.5 Solenóides

Um solenóide é um fio metálico enrolado em hélice (Figura 9.11). Tem N espiras circulares, todas com a mesma área e percorridas pela mesma corrente I .

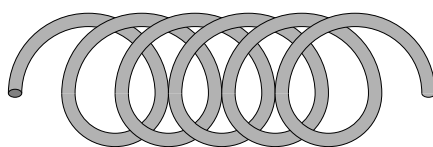


Figura 9.11: Solenóide.

Dentro do solenóide os campos produzidos pelas espiras reforçam-se, enquanto que por fora do solenóide acontece o oposto. Para desenhar as linhas de campo do solenóide, comecemos por considerar as linhas de campo de uma espira, as quais são similares às equipotenciais de um dipolo eléctrico, em duas dimensões (Figura 9.12). Quando existem muitas espiras perto umas das outras, a situação é semelhante às equipotenciais de um par de lâminas paralelas, com carga superficial constante e de sinais opostos.

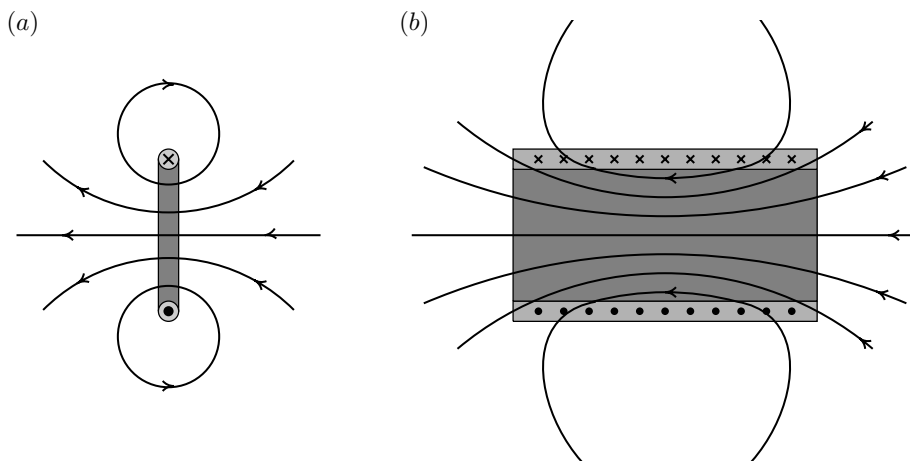


Figura 9.12: O campo de indução magnética de uma espira (a) e de um solenóide com muitas espiras (b).

As linhas de indução magnética do solenóide são semelhantes às linhas de um íman cilíndrico. Um solenóide muito comprido produz linhas de indução quase paralelas no seu interior (campo uniforme); neste caso, podemos aplicar a lei de Ampère para calcular o campo (Figura 9.13).

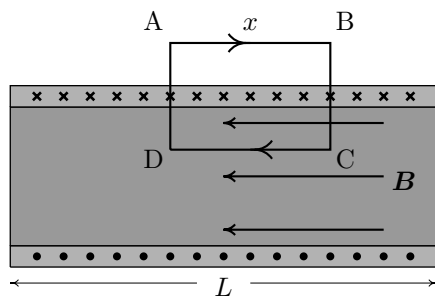


Figura 9.13: Percurso usado para calcular o campo dentro do solenóide usando a lei de Ampère.

O integral de linha do campo \mathbf{B} ao longo dos lados BC e DA é nulo, pois o campo é perpendicular aos lados; no lado AB, podemos assumir $\mathbf{B} \approx 0$, já que as linhas de indução magnética estão muito distanciadas. Portanto, ao longo do rectângulo ABCD:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = Bx. \quad (9.14)$$

Usando a lei de Ampère temos

$$Bx = \mu_0 I_C, \quad (9.15)$$

onde I_C é a corrente total que passa pelas espiras no interior do rectângulo ABCD. Como existem N espiras no comprimento total L , o número de espiras que atravessa o rectângulo é Nx/L e $I_C = NxI/L$. O módulo do campo de indução magnética é

$$\boxed{B = \mu_0 n I}, \quad (9.16)$$

onde $n \equiv N/L$ é o número de espiras por unidade de comprimento. Lembramos que este resultado é aproximado, sendo a aproximação tanto melhor quanto mais perto do centro do solenóide. O campo produzido pelo solenóide é semelhante ao campo de um íman cilíndrico; os solenóides são usados para construir electroímans, normalmente com um núcleo de ferro para reforçar o campo. Também são usados como elementos de circuitos (indutores), como veremos no próximo capítulo.

9.6 Equações fundamentais da magnetostática

A lei de Ampère (9.13) pode também ser escrita de forma diferencial; usando o teorema de Stokes (4.30), podemos substituir o integral de linha por um integral de superfície:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 I_C, \quad (9.17)$$

onde S é uma superfície com fronteira em C . A corrente I_C é a corrente através da curva C , a qual pode ser calculada integrando a densidade de corrente \mathbf{J} sobre a superfície S ; assim, a equação anterior pode ser escrita na seguinte forma:

$$\iint_S [\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (9.18)$$

Para que esta equação seja válida em qualquer superfície S , orientada em qualquer direcção, será necessário que o termo dentro do integral seja nulo:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}}. \quad (9.19)$$

Esta é a forma diferencial da lei de Ampère e constitui uma das equações fundamentais da magnetostática, relacionando o campo de indução magnética em qualquer ponto, com a densidade de corrente. Como vimos no caso da electrostática, o rotacional não é suficiente para definir um campo vectorial; é preciso também conhecer a sua divergência.

As linhas de indução magnética são sempre fechadas. Isto quer dizer que qualquer linha de indução que seja cortada por uma superfície fechada será sempre cortada num número par de pontos; por cada ponto onde a linha entra na superfície fechada, existe outro ponto onde a mesma linha sai da superfície. Assim, o fluxo magnético através de qualquer superfície fechada é sempre nulo:

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (9.20)$$

Aplicando o teorema da divergência, concluímos que, em qualquer ponto, a divergência do campo \mathbf{B} é nula:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0}. \quad (9.21)$$

As Equações (9.19) e (9.21) definem o campo \mathbf{B} em qualquer ponto dentro de uma região onde são conhecidas algumas condições fronteira.

9.7 Campo magnético dentro da matéria

As partículas elementares, e em particular os electrões, têm um momento magnético intrínseco próprio de cada tipo de partícula, chamado *spin*; os electrões num átomo têm

também um momento magnético orbital, devido ao seu movimento no átomo. Os prótons e neutrões no núcleo também têm *spin*, mas o momento magnético deles é muito menor do que o momento dos electrões. Uma partícula com momento magnético comporta-se como um pequeno íman orientado na direcção do momento.

Dentro de um campo de indução magnética externo, os momentos magnéticos dos átomos ou moléculas tendem a alinhar-se na direcção do campo. No entanto, o campo também induz correntes, na direcção que produz um campo induzido oposto ao campo externo. Existem, assim, dois efeitos opostos: o alinhamento dos momentos atómicos ou moleculares na direcção do campo determina uma força atractiva na direcção da fonte externa do campo; por outro lado, os momentos induzidos são opostos ao campo externo, e determinam uma força repulsiva. Dependendo do valor dos momentos intrínsecos do material e do módulo do campo, um ou outro efeito pode dominar.

Os electrões têm uma tendência para se agruparem em pares com *spins* orientados em direcções opostas. Cada par tem um momento magnético nulo; consequentemente, a maior parte dos átomos com número par de electrões têm um *spin* total nulo e só apresentam o primeiro tipo de resposta ao campo magnético: campo de indução magnética induzido, oposto ao campo externo que conduz a uma repulsão num campo externo. Este tipo de comportamento é chamado **diamagnetismo**; os materiais diamagnéticos identificam-se por serem ligeiramente repelidos por campos magnéticos fortes, já que o campo induzido costuma ser muito fraco. A maior parte das substâncias são diamagnéticas como por exemplo a água, o vidro, os plásticos e muitos compostos orgânicos.

Alguns elementos como o alumínio, o sódio, o oxigénio e a platina, possuem um momento magnético intrínseco. Um campo de indução magnética produz os dois fenómenos de momentos magnéticos induzidos e alinhamento dos momentos magnéticos intrínsecos na direcção do campo externo. Como o efeito diamagnético é bastante fraco, o efeito dominante é o alinhamento dos momentos magnéticos na direcção do campo externo, e uma força magnética atractiva: **paramagnetismo**.

O alinhamento dos momentos magnéticos nos materiais paramagnéticos não é um efeito forte, pois é contrariado pelas vibrações térmicas dos átomos. Alguns materiais chamados **ferromagnéticos** apresentam momentos magnéticos muito mais elevados que podem ser alinhados de uma forma mais eficaz, dando origem a campos intrínsecos elevados que persistem mesmo depois de desaparecer o campo externo; os ímanes naturais são constituídos por este tipo de materiais. Nos materiais ferromagnéticos, os átomos estão distribuídos numa forma que favorece o seu agrupamento em **domínios** magnéticos: pequenas regiões microscópicas formadas por vários átomos com momentos magnéticos na mesma direcção. Os momentos magnéticos dos domínios magnéticos são muito maiores que os momentos atómicos e são assim menos susceptíveis de serem alterados pelas vibrações térmicas. Contudo, existe uma temperatura elevada, conhecida como **temperatura de Curie**, acima da qual o alinhamento dos domínios magnéticos é destruído, por exemplo, a temperatura de Curie do ferro é 770 °C, que é mais baixa do que a sua temperatura de fusão. As vibrações mecânicas fortes podem também conduzir à ruptura dos domínios magnéticos.

No caso do diamagnetismo e do paramagnetismo o campo induzido \mathbf{B}_i é sempre directamente proporcional ao campo externo \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{B}_i = \chi_m \mathbf{B}_0 . \quad (9.22)$$

A constante de proporcionalidade, χ_m , é a **susceptibilidade magnética** do material, que pode ser positiva (paramagnetismo) ou negativa (diamagnetismo). O campo total é:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_i = (1 + \chi_m) \mathbf{B}_0 . \quad (9.23)$$

O campo de indução magnética **livre**, \mathbf{B}_0 , é o campo produzido apenas pelas correntes livres, I_0 , sem incluir as correntes induzidas nos átomos. A partir da lei de Ampère temos:

$$\oint_C \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I_0 , \quad (9.24)$$

e usando a Equação (9.23), obtemos a lei de Ampère para o campo total dentro do material:

$$\oint_C \frac{\mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}}{1 + \chi_m} = \mu_0 I_0 . \quad (9.25)$$

A **permeabilidade magnética**², μ , do material define-se como

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) . \quad (9.26)$$

O **campo magnético** \mathbf{H} é definido como o campo de indução magnética, dividido pela permeabilidade:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} . \quad (9.27)$$

A lei de Ampère nos meios diamagnéticos ou paramagnéticos é

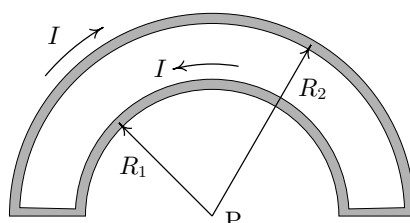
$$\boxed{\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_0} . \quad (9.28)$$

Obviamente, a lei de Ampère na sua forma original continua a ser válida para \mathbf{B} em função da corrente total $I_0 + I_i$. Do ponto de vista prático tem que se calcular primeiro o campo \mathbf{H} e, em função dele, calcular a corrente induzida I_i .

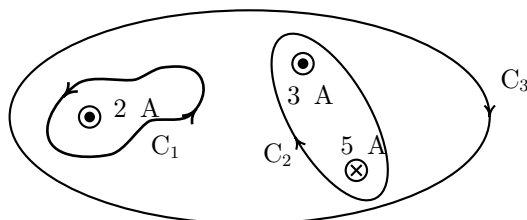
²A constante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ é a permeabilidade magnética do vazio, onde $\chi_m = 0$.

Problemas

1. Considere o fio representado na figura e calcule o campo de indução magnética no ponto P, o centro comum aos dois arcos semicirculares.



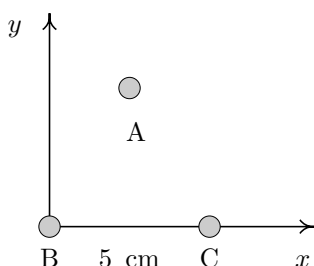
2. Três fios paralelos têm correntes de 5 A, 3 A e 2 A como se mostra na figura. Calcule $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo das três curvas C_1 , C_2 e C_3 .



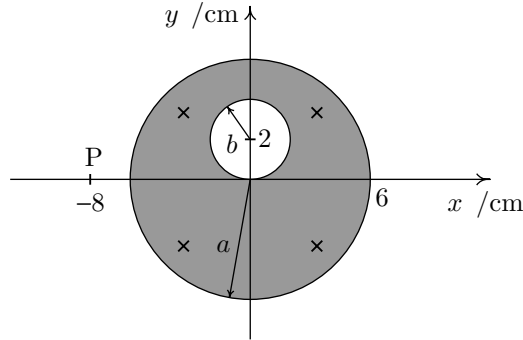
3. Três fios rectilíneos, compridos e paralelos, estão dispostos de tal modo que os seus eixos formam um triângulo equilátero de 5 cm de lado.
 (a) Os fios são atravessados por uma corrente trifásica; num dado momento as correntes nos fios são: $\mathbf{I}_A = \mathbf{I}_C = -10\mathbf{k}$ A e $\mathbf{I}_B = 20\mathbf{k}$ A. Calcule as forças, por unidade de comprimento, sobre os fios A e C.
 (b) Considerando que no momento seguinte as correntes nos três fios variam de forma sinusoidal segundo as equações:

$$\mathbf{I}_A = I_0 \cos(\omega t - 2\pi/3) \mathbf{k} \quad \mathbf{I}_B = I_0 \cos \omega t \mathbf{k} \quad \mathbf{I}_C = I_0 \cos(\omega t + 2\pi/3) \mathbf{k}$$

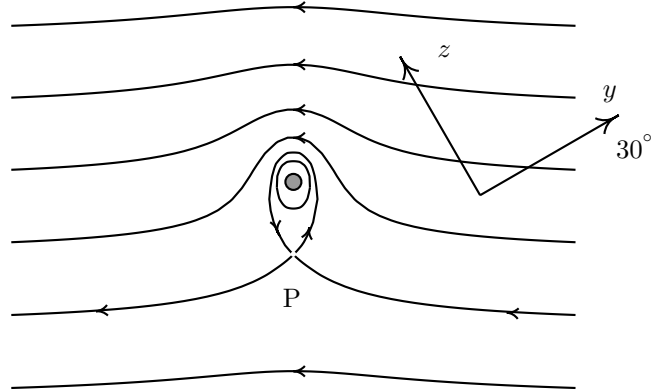
com $I_0 = 20$ A e $\omega = 200\pi \text{ s}^{-1}$, calcule a força, por unidade de comprimento, sobre o fio A.



4. A figura representa o corte transversal de um sólido cilíndrico, muito comprido, de raio $a = 6$ cm e com uma cavidade cilíndrica de raio $b = 2$ cm. No cilindro flui uma corrente de densidade uniforme, $J = 127$ A/m², dirigida para dentro da folha de papel. Calcule o campo de indução magnética no ponto P na posição $-8\mathbf{i}$ (cm), usando a lei de Ampère e o princípio de sobreposição.

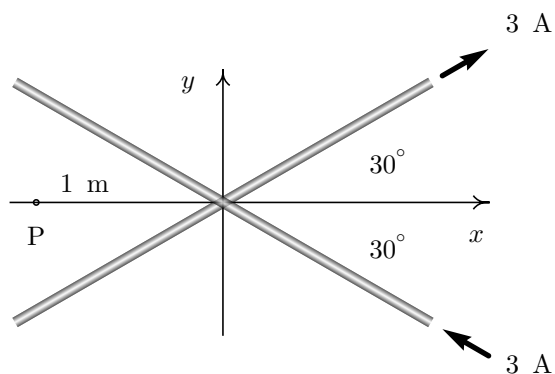


5. A figura mostra as linhas de indução magnética de um fio com corrente, dentro de um campo de indução magnética uniforme \mathbf{B}_{ext} ; o fio é perpendicular à folha e os eixos y e z foram escolhidos sobre o plano da folha.
- Escreva o versor na direcção do campo externo, usando o sistema de eixos dado.
 - Escreva o vector unitário na direcção da corrente no fio.
 - Calcule e represente o vector unitário na direcção da força sobre o fio.
 - Considerando que $I = 0,5$ A e se a força sobre o fio, por unidade de comprimento, for de $2 \cdot 10^{-5}$ N/m, calcule a distância até ao ponto P.

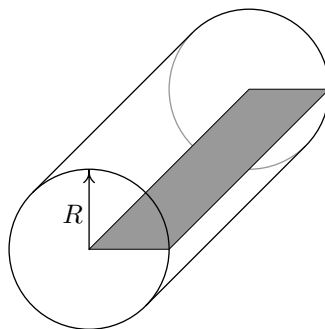


6. Considere dois fios de cobre, rectilíneos e paralelos, de 60 cm de comprimento, distanciados de 9 cm e com raios de 2 mm e 3 mm. Calcule o valor da força magnética entre os fios quando cada um deles for ligado a uma f.e.m. de 1,5 V. (Use o valor da resistividade do cobre à temperatura ambiente: 17 n $\Omega \cdot$ m.)

7. Os dois fios representados na figura são muito compridos e cada um transporta uma corrente de 3 A. Um dos fios e o ponto P encontram-se sobre o plano xy , enquanto que o outro fio se encontra num plano paralelo a xy mas 5 cm acima deste ($z = 5$). Calcule o valor do campo vectorial \mathbf{B} no ponto P com coordenadas $x = -1$ m, $y = z = 0$.



8. Um anel supercondutor de 5 cm de raio, transporta uma corrente de 4 A. Calcule o vector de campo de indução magnética, \mathbf{B} , no centro do anel.
9. Um condutor cilíndrico comprido e de raio R , é percorrido por uma corrente I de densidade uniforme $J = I/\pi R^2$. Calcule o fluxo magnético por unidade de comprimento através da área sombreada na figura.



10. Um fio cilíndrico de cobre, de raio a , conduz uma corrente I . A corrente está distribuída de forma não-uniforme, com \mathbf{J} directamente proporcional à distância ao eixo do fio. Calcule o campo de indução magnética \mathbf{B} dentro e fora do fio, usando a lei de Ampère. Desenhe o gráfico de B em função da distância ao eixo do cilindro.
11. Uma espira quadrada com arestas iguais a d é percorrida por uma corrente I . Calcule o campo de indução magnética no centro da espira.

Conceitos básicos

- Lei de Faraday
- Indução electromagnética
- Campo electromagnético em referenciais móveis.
- Auto-indução
- Indução mútua

Joseph Henry



(1797-1878)

Henry nasceu em Albany, nos Estados Unidos da América. Estudou na Academia de Albany onde acabou por ser contratado como professor de filosofia natural. Durante o Verão, transformando a sala de aulas em laboratório, investigou e descobriu o fenómeno de indução electromagnética. Os seus trabalhos só foram publicados quando Faraday, do outro lado do oceano e simultaneamente, chegava às mesmas conclusões. Em 1832 foi contratado pela Universidade de Princeton. Foi o director da *Smithsonian Institution* em 1846, aquando da sua fundação. Descobriu a auto-indução em circuitos eléctricos, trabalhou no envio de sinais eléctricos à distância e explicou as bases para a criação de transformadores. Apesar do seu êxito profissional, muitas das suas descobertas passaram despercebidas na época talvez por utilizar uma metodologia qualitativa, recorrendo raramente à matemática nos seus artigos.

Indução electromagnética

Depois de se estabelecer, no ano de 1820, a corrente como fonte de campos magnéticos muitos investigadores tentaram produzir correntes eléctricas a partir do campo magnético. A ideia era que se uma corrente eléctrica produz um campo magnético, o processo inverso poderia também ser factível. Muitas experiências foram feitas com o objectivo de se medir a diferença de potencial de um fio dentro de um campo magnético, mas em vão. O americano Joseph Henry pensou que o fracasso das experiências podia ser devido ao facto de se usar o campo de indução magnética de um íman e não o campo produzido por outra corrente; Henry realizou a experiência com um electroíman e encontrou o seguinte e surpreendente resultado: no preciso instante em que o electroíman era ligado ou desligado da fonte, aparecia uma diferença de potencial no fio; depois de o electroíman ter sido ligado, o campo de indução magnética permanecia constante e a diferença de potencial no fio desaparecia.

O fenómeno que Henry observou é chamado **indução electromagnética**. Infelizmente Henry não tinha ainda divulgado os seus resultados, quando, em 1831, Faraday descobriu o mesmo fenómeno publicando os seus resultados num jornal científico. Faraday não era muito inclinado para a matemática, sendo por vezes criticado pela sua falta de rigor matemático, mas o seu sentido prático permitiu-lhe conceber uma interpretação da força electromagnética fora dos moldes da mecânica newtoniana e que seria desenvolvida com maior rigor por William Thomson, Stokes e Maxwell. Faraday interpretava a interacção electromagnética em função de linhas de indução magnética e considerava a indução electromagnética como o resultado da perturbação destas linhas.

10.1 Lei de Faraday

Um íman em movimento, perto de uma espira metálica, produz uma corrente induzida ao longo da espira, como se esta tivesse sido ligada a uma f.e.m. Outro caso onde aparece indução electromagnética é num circuito que se encontra perto de um electroíman com corrente variável e, portanto, campo magnético variável. Em geral, sempre que varia o fluxo magnético, através da superfície delimitada por um circuito, aparece uma f.e.m. induzida no circuito. O valor da f.e.m. induzida é dado pela **lei de Faraday**:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (10.1)$$

onde Φ é o fluxo do campo de indução magnética, através do circuito. O sinal negativo é simplesmente para indicar que a força electromotriz induzida é sempre oposta à variação de Φ , e pode ser omitido já que, de qualquer forma, para determinar o sentido da f.e.m. induzida será necessário usar a chamada **lei de Lenz**: a força electromotriz e a corrente induzidas, têm a direcção correspondente a um campo induzido \mathbf{B} que produz um fluxo oposto à variação do fluxo externo. Dito por outras palavras, se, por exemplo, o fluxo magnético externo diminui, deverá aparecer um fluxo induzido na mesma direcção do fluxo externo; a direcção do fluxo induzido é a direcção do campo magnético induzido no circuito; usando a regra da mão direita, determina-se a direcção da corrente induzida e com ela o sentido da f.e.m. induzida. Se o fluxo externo aumenta, o fluxo e o campo induzidos serão opostos ao campo e fluxo externos.

Ilustraremos esta lei por meio de um exemplo: um íman é deslocado na direcção de uma espira metálica, como se mostra na Figura 10.1. Como o pólo que está mais perto da bobina é o pólo norte, o fluxo externo na bobina aponta para a direita; à medida que o íman se aproxima da espira, o fluxo aumenta, já que um maior número de linhas de campo atravessa a espira.

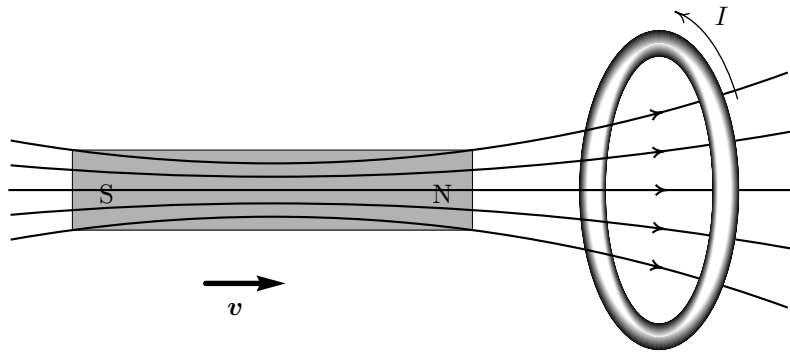


Figura 10.1: Um íman ao aproximar-se de uma espira induz uma força electromotriz ao longo da espira.

Segundo a lei de Lenz, o fluxo induzido será neste caso oposto ao fluxo externo, ou seja, para a esquerda; o campo magnético induzido aponta para a esquerda, dentro da espira, e colocando o dedo polegar direito na direcção do campo induzido, vemos que a corrente induzida segue a direcção indicada na Figura 10.1. Para calcular a intensidade da corrente induzida, será preciso calcular a derivada do fluxo magnético (f.e.m. induzida) e dividir pela resistência da espira.

É de salientar que o campo externo sobre a espira começa a enfraquecer quando o pólo norte já está perto da espira, mas o número de linhas de campo que a atravessa (e portanto o fluxo magnético) continua a aumentar até ao instante em que metade do íman atravessa a espira; nesse instante, o fluxo começa a diminuir e a corrente induzida muda de sentido. Neste caso, o fluxo do íman é sempre para a direita, mas o que determina o sentido da corrente induzida não é a sua direcção, mas sim o seu aumento ou diminuição.

Exemplo 10.1

Uma espira metálica com $0,25 \text{ m}^2$ de área, perpendicular a um campo uniforme de indução magnética de $0,40 \text{ T}$, é retirada do campo durante um intervalo de tempo de 200 ms . Calcule a f.e.m. induzida média.

O fluxo magnético inicial através da espira é

$$\Phi_0 = 0,40 \cdot 0,25 \text{ T} \cdot \text{m} = 0,10 \text{ T} \cdot \text{m} .$$

O fluxo final é zero; calculando o valor médio da derivada obtemos a f.e.m. induzida média:

$$\mathcal{E}_m = \frac{\Phi_0 - \Phi_f}{\Delta t} = \frac{0,10}{0,200} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{s}} = 0,50 \text{ V} . \quad \blacksquare$$

10.2 Gerador de corrente alternada

O princípio de indução electromagnética é aproveitado para gerar corrente alternada. Neste caso, o campo de indução magnética é constante, mas a superfície do circuito roda, o que faz com que o fluxo magnético seja variável.

Um gerador de corrente alternada é formado por uma bobina que roda em torno de um eixo, dentro de um campo de indução magnética constante (Figura 10.2). Por simplicidade, assumiremos um campo uniforme. Os dois terminais da bobina estão soldados a dois anéis colectores que estão em contacto com duas escovas, de forma a que a corrente induzida na bobina possa ser aproveitada num circuito externo ligado às escovas. O fluxo magnético através de cada espira da bobina é

$$\Phi = A(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_n), \quad (10.2)$$

onde A é a área da bobina e \mathbf{e}_n o seu versor normal. Se o ângulo entre o versor \mathbf{e}_n e o campo \mathbf{B} for θ , o fluxo através da bobina será

$$\Phi = BA \cos \theta . \quad (10.3)$$

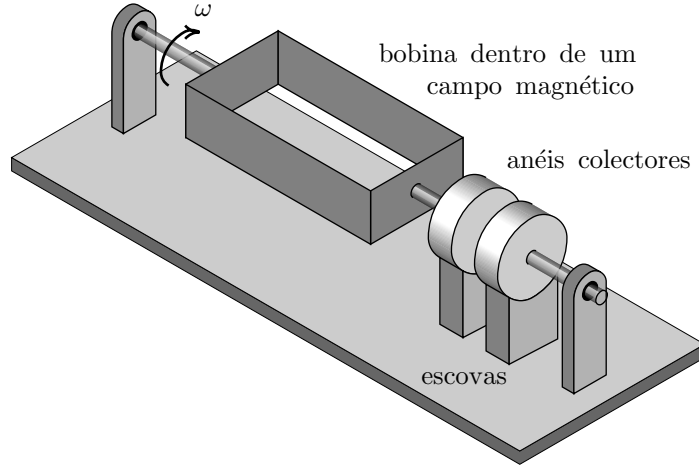


Figura 10.2: Gerador de corrente alternada.

A bobina roda com velocidade angular constante, ω ; portanto, o ângulo θ aumenta ωt durante o tempo t e o fluxo em função do tempo é

$$\Phi = BA \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (10.4)$$

onde a fase inicial φ_0 é o ângulo em $t = 0$, medido em radianos.

A f.e.m. induzida em cada uma das espiras obtém-se a partir da lei de Faraday (10.1). A diferença de potencial entre as escovas é igual à soma de todas as f.e.m. induzidas nas N espiras da bobina¹:

$$\begin{aligned} V &= N \frac{d\Phi}{dt} = NBA\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \\ V &= V_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (10.5)$$

A diferença de potencial produzida pelo gerador de corrente alternada varia sinusoidalmente com a amplitude $V_0 = NBA\omega$. A frequência da tensão eléctrica é a mesma frequência de rotação da bobina, e a tensão é máxima quando a bobina se encontra perpendicular ao campo de indução magnética.

10.3 Indução em condutores em movimento

Na secção anterior vimos alguns exemplos de circuitos fechados nos quais aparecem correntes induzidas devidas à alteração do fluxo magnético no interior do circuito. Uma

¹Outra forma usual de obter o mesmo resultado consiste em considerar a área da bobina não como A mas NA já que cada espira envolve uma área A ; o fluxo total através da bobina seria o fluxo através da área NA e a sua derivada daria directamente o valor da f.e.m. total induzida.

diferença de potencial induzida aparece também nos condutores em movimento dentro de um campo de indução magnética, sem ser necessária a existência de um circuito. Neste caso, não existe fluxo magnético variável através do condutor e a diferença de potencial induzida não pode ser calculada derivando o fluxo magnético, mas é fácil identificar a origem da indução electromagnética: a acumulação de cargas nos extremos, devido à força magnética sobre as cargas de condução. Veremos, numa secção posterior, que no caso de um circuito em repouso com fluxo magnético variável existem também forças sobre os electrões de condução.

Consideremos uma barra condutora de comprimento L que se desloca com velocidade uniforme, perpendicular a um campo de indução magnética constante \mathbf{B} , como se mostra na Figura 10.3. Os electrões de condução dentro da barra deslocam-se todos para a direita, com velocidade \mathbf{v} e, portanto, sobre eles actua uma força magnética

$$F_m = evB . \quad (10.6)$$

Esta força induz acumulação de cargas positivas e cargas negativas nos pontos A e B, respectivamente. As cargas acumuladas nos extremos produzem um campo eléctrico E_i dentro da barra, que actua sobre os electrões com uma força eléctrica F_e oposta à força magnética. No estado de equilíbrio, a força electrostática $F_e = eE_i$ é igual e oposta à força magnética; o campo induzido será assim igual a vB . Como a velocidade e o campo de indução magnética são iguais em qualquer ponto da barra, o campo eléctrico induzido será uniforme, e a diferença de potencial induzida entre os extremos do condutor será

$$V_A - V_B = vBL . \quad (10.7)$$

O método usado para calcular a f.e.m. induzida na barra em movimento, podia também ter sido usado na secção anterior para calcular a tensão de um gerador de corrente alternada (Figura 10.2). Cada espira na bobina é formada por quatro segmentos, indicados com os

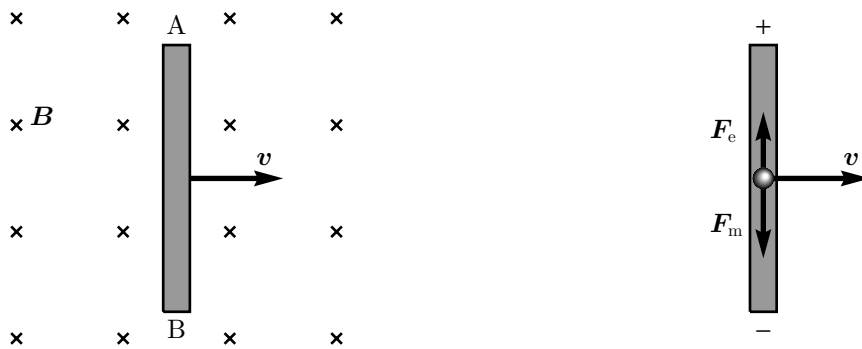


Figura 10.3: Conductor em movimento dentro de um campo de indução magnética; à direita, as forças sobre os electrões de condução.

números 1, 2, 3 e 4 na Figura 10.4. Em cada segmento, o campo eléctrico induzido será igual e oposto à força magnética sobre os electrões, dividida pela carga do electrão:

$$\mathbf{E}_i = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (10.8)$$

e a diferença de potencial no segmento é

$$\Delta V = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r} . \quad (10.9)$$

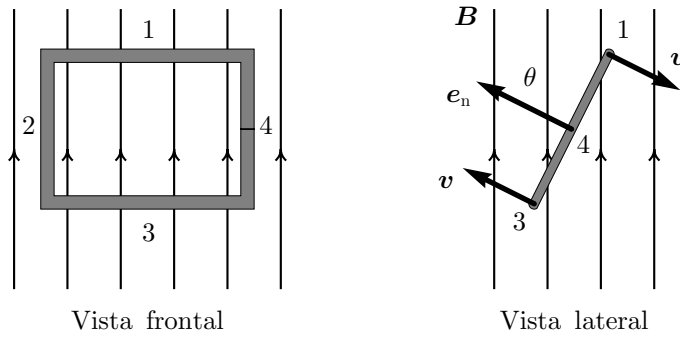


Figura 10.4: Uma espira que roda dentro de um campo de indução magnética uniforme.

Quando a espira roda com velocidade angular ω , as velocidades dos segmentos 1 e 3 são $\omega y/2$, em que y é o comprimento dos segmentos 2 e 4. Ao longo dos segmentos 2 e 4 o campo induzido é perpendicular a $d\mathbf{r}$ e, portanto, não existe diferença de potencial². O ângulo entre a velocidade e o campo é θ , no caso do segmento 3, e $180^\circ - \theta$ para o segmento 1. A diferença de potencial na espira é

$$\Delta V = \int_1 \frac{\omega y}{2} B \sin \theta ds + \int_3 \frac{\omega y}{2} B \sin \theta ds . \quad (10.10)$$

Resolvendo a equação e considerando que a área da espira é $A = xy$, obtemos

$$\Delta V = AB\omega \sin \theta . \quad (10.11)$$

²Existe uma pequena diferença de potencial ao longo da secção transversal, devido ao efeito Hall (Problema 7 do Capítulo 8), mas esta não produz corrente ao longo da bobina.

Multiplicando pelo número total de espiras, N , obtém-se a Equação (10.5). Visto desta forma, a causa da tensão nos terminais do gerador é a força magnética que actua sobre o gás de electrões na bobina; se a variação do fluxo magnético e a força magnética sobre os electrões livres num condutor em movimento fossem fenómenos independentes, devíamos somar os dois efeitos para obter a força electromotriz induzida. Mas não é assim e, como veremos mais à frente, estamos perante duas interpretações de um mesmo fenómeno.

Considerando condutores em movimento, como temos feito nos exemplos desta secção, podemos pensar que a lei de Faraday não introduz nada de novo e a expressão da força magnética introduzida no Capítulo 8 é suficiente para explicar o fenómeno da indução electromagnética. No entanto, a situação é mais complicada já que existe também indução electromagnética mesmo quando não existe movimento. Um exemplo é a experiência de Henry, na qual uma corrente induzida aparece num circuito no instante em que um electroímã é ligado ou desligado de uma fonte; neste caso, não existe movimento relativo entre o circuito e o íman.

Outro resultado experimental importante é o facto de a diferença de potencial induzida num condutor em movimento perto de um íman ser exactamente a mesma no caso em que o íman está em repouso e o condutor em movimento, ou no caso oposto, em que o circuito está em repouso e o íman se desloca produzindo a mesma velocidade relativa. No primeiro caso existe força magnética sobre os electrões no circuito, enquanto que no segundo caso o circuito está em repouso e não existe força magnética.

Faraday conseguiu explicar todos estes casos de indução electromagnética por meio de um só princípio, introduzindo o conceito de linhas de indução magnética. Segundo Faraday, a origem da indução deve-se ao facto de o condutor «cortar» as linhas de indução magnética; e a diferença de potencial induzida é proporcional ao número de linhas cortadas, por unidade de tempo. O condutor em movimento «varre» uma área vL por unidade de tempo, e o «número de linhas» cortadas é o número de linhas nessa área, que é igual ao fluxo através dela, BvL . Quando o condutor está em repouso e o campo de indução magnética é deslocado com velocidade $-\mathbf{v}$, o mesmo número de linhas é cortado, dando origem à mesma f.e.m. induzida. No caso do electroímã, no momento em que é ligado à fonte, linhas de indução magnética cortam o circuito entrando na sua área interna. Em todos estes casos podemos ver que existe sempre corte de linhas de indução magnética e a f.e.m. induzida é igual ao número de linhas cortadas por unidade de tempo.

O conceito de linhas de indução, introduzido por Faraday, conquistou alguns adeptos ao mesmo tempo que foi alvo de críticas pela sua imprecisão matemática. Maxwell desenvolveu uma teoria matemática das linhas de campo, dando maior credibilidade à teoria de Faraday; a síntese de Maxwell permitiu-lhe apreciar o electromagnetismo numa forma unificada criando uma nova ciência (a electrodinâmica) de imensa riqueza, tanto do ponto de vista fenomenológico como do ponto de vista matemático.

Antes de estudarmos de uma forma mais precisa a relação entre fluxos magnéticos variáveis e condutores em movimento, vamos considerar mais um dispositivo que aproveita a indução electromagnética para produzir corrente, o qual pode ser analisado usando o método introduzido nesta secção para condutores em movimento.

10.4 Gerador de Faraday

O primeiro gerador electromagnético foi inventado por Faraday em 1831. É um dispositivo bastante simples que consiste num disco metálico, montado sobre um suporte isolante, que se faz rodar dentro de um campo de indução magnética perpendicular ao disco (tal como está representado na Figura 10.5).

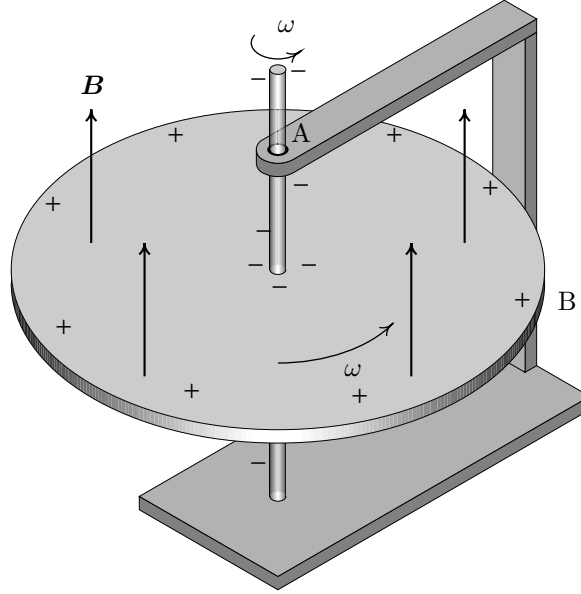


Figura 10.5: Gerador de Faraday.

Quando o disco roda com velocidade angular constante ω , sobre os electrões de condução actua uma força magnética que os desloca na direcção radial. O deslocamento dos electrões de condução produz um campo eléctrico induzido E_i radial. No estado estacionário, as forças magnética e eléctrica, sobre os electrões de condução, são iguais e opostas. Em coordenadas polares, a velocidade de um electrão, que se encontra a uma distância r é

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{e}_r + \dot{\theta} r \mathbf{e}_\theta . \quad (10.12)$$

Como o campo \mathbf{B} tem a direcção de \mathbf{k} e o campo induzido E_i é radial, a força de Lorentz sobre o electrão será

$$\mathbf{F} = -e(E_i + B\dot{\theta}r) \mathbf{e}_r + eB\dot{r} \mathbf{e}_\theta . \quad (10.13)$$

As equações de movimento são as seguintes:

$$E_i + B\dot{\theta}r = \frac{m}{e}(\dot{\theta}^2 r - \ddot{r}) , \quad (10.14)$$

$$B\dot{r} = \frac{m}{e}(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) , \quad (10.15)$$

onde m é a massa do electrão. No estado estacionário, $\dot{r} = 0 = \ddot{r}$, $\dot{\theta} = \omega$ é constante, e o resultado obtido para o campo induzido é

$$E_i = \frac{m}{e} \omega^2 r - B\omega r . \quad (10.16)$$

O primeiro termo é devido à inércia dos electrões de condução que faz com que se acumulem na borda do disco quando este roda; o segundo termo é devido à força magnética sobre os electrões e o sinal negativo indica que a direcção do campo induzido é radial apontando para o eixo. Se a frequência de rotação fosse, por exemplo, 60 rotações por minuto, o termo $m\omega/e$ seria da ordem de grandeza 10^{-11} T, isto é, várias ordens de grandeza inferior ao valor típico dos campos de indução magnética usados neste tipo de geradores. Assim, podemos desprezar o termo relativo à inercia, e admitir que o campo induzido é igual a $-B\omega r$.

A diferença de potencial entre a borda e o eixo obtém-se integrando o campo induzido em ordem a r , desde 0 até ao raio do disco R :

$$V_A - V_B = - \int_0^R B\omega dr = -\frac{1}{2} B\omega R^2 . \quad (10.17)$$

O sinal negativo indica que o potencial no ponto A é menor do que o potencial no ponto B (Figura 10.5). Esta diferença de potencial pode ser usada para manter uma corrente contínua num circuito ligado entre os pontos A e B.

10.5 Campo eléctrico em referenciais em movimento

No Capítulo 8 aceitámos como resultado experimental a proporcionalidade entre a força magnética e a velocidade, sem nos questionarmos sobre que velocidade estávamos a pensar: velocidade da partícula relativa ao campo magnético ou do campo em relação a esta? Ou será a velocidade relativa a um «espaço absoluto»? Na resposta a estas questões está a base da compreensão do fenómeno de indução electromagnética.

Consideremos o caso de uma partícula com carga q , que se desloca com velocidade \mathbf{v} em relação a um referencial R, onde existem um campo eléctrico \mathbf{E} e um campo de indução magnética \mathbf{B} . A força de Lorentz (Equação 8.22) é

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (10.18)$$

Do ponto de vista do referencial R' , que se desloca com a partícula, a velocidade da partícula em relação a R' é zero, não existindo força magnética; por outro lado, como o campo magnético do referencial R se desloca com velocidade $-\mathbf{v}$ relativa a R' , aparecerá um campo eléctrico induzido no referencial R , que vai modificar o campo eléctrico total \mathbf{E}' medido em R' . Sobre a partícula actua uma força eléctrica

$$\mathbf{F}' = q\mathbf{E}' . \quad (10.19)$$

Se a velocidade é constante, o referencial R' é inercial (as leis de Newton são válidas nesse sistema) e por conseguinte a força nos dois referenciais deverá ser a mesma³ ($\mathbf{F}' = \mathbf{F}$), o que implica a seguinte relação entre os campos:

$$\boxed{\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}} . \quad (10.20)$$

O campo eléctrico no referencial em movimento é uma mistura dos campos eléctrico e magnético no referencial no qual tem lugar esse movimento. Assim, os campos eléctrico e magnético são duas partes do mesmo campo, já que o que parece ser um campo magnético num referencial aparece como campo eléctrico num outro referencial. Na Equação (10.20), os três campos são calculados no mesmo ponto \mathbf{r} e no mesmo instante t .

Uma forma conveniente de definir um sistema de eixos no referencial R' consiste em escolher os mesmos eixos e a mesma origem O do referencial R , num instante que definimos como $t = 0$. Em $t > 0$, a origem O' do referencial R' estará na posição $t\mathbf{v}$ e os eixos x' , y' e z' serão paralelos aos eixos x , y e z do referencial R (Figura 10.6). Os vectores de posição, \mathbf{r} e \mathbf{r}' , de um ponto nos referenciais R e R' , respectivamente, verificam a equação

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + t\mathbf{v} . \quad (10.21)$$

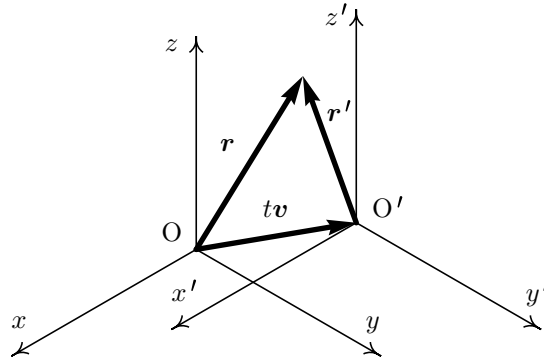


Figura 10.6: Referencial R' em movimento com velocidade \mathbf{v} .

³Realmente, existe outra força de origem não electromagnética que garante o movimento uniforme, mas esta, como se sabe, é igual nos dois referenciais.

Consideremos agora um campo vectorial qualquer $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ no referencial R. O campo num ponto \mathbf{r}' no referencial R' é definido por

$$\mathbf{F}'(x', y', z', t) = \mathbf{F}(x' + tv_x, y' + tv_y, z' + tv_z, t); \quad (10.22)$$

assim, a variação do campo \mathbf{F}' será devida tanto à variação explícita do campo \mathbf{F} , como ao deslocamento relativo entre os referenciais. A derivada parcial do campo \mathbf{F}' , em ordem a t , é

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}; \quad (10.23)$$

e usando o operador nabla obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}. \quad (10.24)$$

Esta derivada do campo \mathbf{F} é chamada **derivada convectiva**. Usando a propriedade distributiva do produto vectorial (Apêndice A) temos

$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}) = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}. \quad (10.25)$$

O segundo e terceiro termos são nulos, pois a velocidade \mathbf{v} , com que se desloca o referencial em movimento, é igual em todos os pontos e as suas derivadas em x , y e z são nulas. Substituindo em (10.26) obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{F}), \quad (10.26)$$

onde \mathbf{v} é considerado constante no último termo. A posição \mathbf{r} de qualquer ponto que se desloca com R' aumenta $\mathbf{v}t$ durante o tempo t , logo $\partial \mathbf{r} / \partial t$ é igual a \mathbf{v} , e a derivada convectiva (10.23) pode também ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \mathbf{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} = \frac{d\mathbf{F}}{dt}. \quad (10.27)$$

10.6 Forma geral da lei de Faraday

A lei de Faraday pode ser escrita numa forma geral, independente dos circuitos. Consideremos o circuito C da Figura 10.7; no caso (a) o circuito está em repouso e segundo a lei de Faraday a variação do campo de indução magnética produzirá uma f.e.m. induzida igual a

$$\mathcal{E} = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}. \quad (10.28)$$

O sentido positivo de \mathcal{E} foi definido na Figura 10.7 em função do versor normal escolhido. O sinal negativo na equação anterior indica o sentido correcto da f.e.m. induzida. Temos

admitido que a forma do circuito é fixa, e por isso a única causa possível da variação do fluxo é a variação do campo em função do tempo.

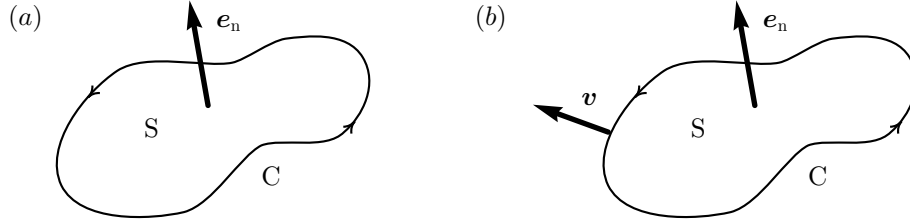


Figura 10.7: Um circuito em repouso (a), e em movimento (b).

Consideremos agora o caso (b) na Figura 10.7, em que o circuito se desloca com velocidade \mathbf{v} . A Equação (10.28) tem que ser válida no referencial que se desloca com o circuito, já que nesse referencial o circuito está em repouso, logo se \mathbf{B}' for o campo de indução magnética observado no referencial em movimento, a f.e.m. induzida no circuito é

$$\mathcal{E}' = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}', \quad (10.29)$$

onde o integral é calculado sobre a superfície S em repouso. Usando a derivada convectiva, Equação (10.26), e lembrando que a divergência de campo de indução magnética \mathbf{B} é zero em qualquer ponto, obtemos

$$\mathcal{E}' = - \iint_S \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{A}', \quad (10.30)$$

e, aplicando o teorema de Stokes obtemos, finalmente,

$$\boxed{\mathcal{E}' = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}' + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}'} \quad (10.31)$$

Esta é a lei de Faraday, escrita numa forma bastante útil do ponto de vista prático. Quando não existe deslocamento relativo entre o campo e o circuito, o segundo termo é zero e só é preciso calcular o integral de superfície; quando o campo for constante num referencial, o primeiro termo é nulo e a velocidade \mathbf{v} será a velocidade do circuito, relativa ao referencial onde o campo é constante, e obtemos a Equação (10.9).

A derivada convectiva na Equação (10.28) pode também ser substituída pela Equação (10.27):

$$\mathcal{E}' = - \iint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot d\mathbf{A}' = - \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} . \quad (10.32)$$

O último integral é calculado na superfície S em movimento, e é igual ao fluxo através do circuito C em movimento, e a derivada total do fluxo depende tanto das variações do campo \mathbf{B} como do movimento do circuito. Este último resultado é a forma (10.1) da lei de Faraday, com a qual iniciámos o capítulo, e que, como acabamos de mostrar, é equivalente à Equação (10.31) quando o circuito C mantém a sua forma constante.

A f.e.m. induzida \mathcal{E}' é medida no referencial que acompanha o movimento do circuito C , isto é, onde aparece corrente induzida. A diferença de potencial induzida no circuito é igual ao integral de linha do campo eléctrico no circuito:

$$\mathcal{E}' = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r}' ; \quad (10.33)$$

assim, a Equação (10.31) pode ser escrita como

$$\oint (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}' = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}' , \quad (10.34)$$

e, segundo a Equação (10.20), a expressão entre parênteses é o campo eléctrico no referencial R onde o circuito C se desloca com velocidade \mathbf{v} :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = - \iint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}' . \quad (10.35)$$

Esta última equação representa uma relação geral do campo electromagnético, já que as únicas referências ao circuito são a sua forma geométrica C e a sua superfície interna S , que igualmente podiam corresponder a uma curva abstracta. Usando o teorema de Stokes, o lado esquerdo da equação pode ser escrito como o integral de superfície do rotacional de \mathbf{E} sobre a superfície S , e para que o resultado seja válido em qualquer superfície é necessário que

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}} . \quad (10.36)$$

Esta é a forma diferencial da lei de Faraday.

Em conclusão, o fenómeno da indução electromagnética é devido à dependência entre os campos eléctrico e magnético. Por um lado, o rotacional do campo eléctrico é igual a menos a derivada do campo de indução magnética, e, por outro lado, o campo eléctrico observado num referencial que se desloca com velocidade \mathbf{v} em relação ao **laboratório** é uma combinação dos campos eléctrico e magnético observados no laboratório.

10.7 Auto-indução

Em qualquer circuito eléctrico, a corrente produz um campo de indução magnética e, portanto, fluxo magnético através da área delimitada dentro do circuito (Figura 10.8).

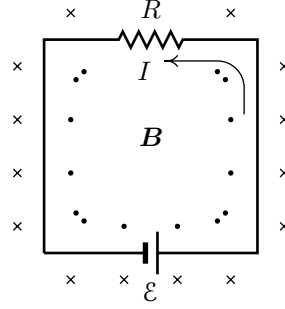


Figura 10.8: Campo magnético produzido pela corrente que circula numa malha de um circuito.

O campo de indução magnética produzido pelo circuito pode ser calculado a partir da lei de Biot-Savart, tendo em conta que a corrente é constante em todo o circuito:

$$\mathbf{B} = k_m I \oint_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_m I \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad (10.37)$$

onde $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ é o integral de linha ao longo do circuito. A função \mathbf{f} pode ser difícil de calcular, mas o importante é que não depende da corrente. O fluxo magnético através da superfície do circuito,

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = k_m I \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{A}, \quad (10.38)$$

será então directamente proporcional à corrente, com uma constante de proporcionalidade L que só depende da forma geométrica do circuito:

$$\Phi = LI. \quad (10.39)$$

Se a corrente no circuito mudar, aparecerá uma f.e.m. induzida de acordo com a lei de Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (10.40)$$

A variação da corrente no circuito induz uma corrente sobre o próprio circuito, como se existisse uma f.e.m. que se opõe às variações da corrente; esta propriedade dos circuitos é chamada **auto-indução**. O valor da f.e.m. induzida correspondente a uma certa variação da corrente é directamente proporcional à constante L do circuito, chamada **coeficiente de auto-indução**.

A auto-indução representa-se no diagrama do circuito por meio de uma espiral (indutor) como se mostra na Figura 10.9. O sinal negativo na Equação (10.40) indica que a direcção da f.e.m. induzida é contrária à variação da corrente. No entanto, como nas equações de circuitos é costume escrever diferenças de potencial no sentido oposto à corrente (por exemplo IR numa resistência), escreveremos também a diferença de potencial no indutor, no sentido oposto à corrente, isto é, $L dI/dt$.

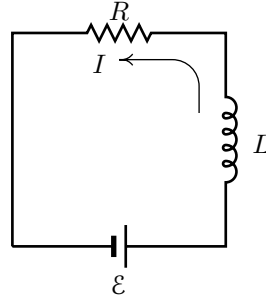


Figura 10.9: Representação diagramática da auto-indução.

A unidade de indutância no sistema internacional é o **henry** (H), igual a $1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}$. A auto-indução de uma bobina com várias voltas pode ser elevada, enquanto que a auto-indução de outros elementos de circuito como resistências e fios é muito pequena. Por isso é costume considerar a auto-indução apenas no caso de existirem bobinas.

Dois circuitos com correntes variáveis induzem correntes mutuamente. A f.e.m. induzida pelo circuito 1 sobre o circuito 2 é directamente proporcional à variação da corrente I_1 :

$$\Phi_{12} = -M_{12}I_1, \quad (10.41)$$

onde a constante M_{12} é chamada **coeficiente de indução mútua**.

De igual forma, a f.e.m. induzida pelo circuito 2 no circuito 1 é directamente proporcional a dI_2/dt , e a constante de proporcionalidade é a mesma constante M_{12} ⁴. As f.e.m. totais induzidas em cada circuito são devidas tanto à indução mútua, como à auto-indução:

$$\mathcal{E}_1 = M_{12} \frac{dI_2}{dt} - L_1 \frac{dI_1}{dt}, \quad (10.42)$$

$$\mathcal{E}_2 = M_{12} \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}. \quad (10.43)$$

⁴Ver por exemplo: Feynman, P. R., Leighton, R. B. e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. II, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.

Exemplo 10.2

Considere um **cabo coaxial** formado por dois cilindros condutores coaxiais de raios R_1 e R_2 ($R_2 > R_1$). Calcule a auto-indução por unidade de comprimento.

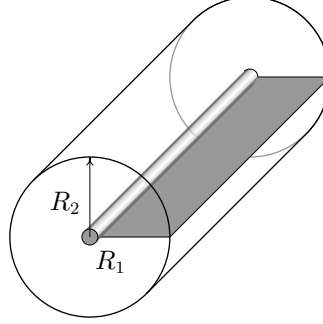


Figura 10.10: Cabo coaxial.

Quando o cabo é ligado a um circuito, os dois condutores cilíndricos transportam a mesma corrente I mas em sentidos opostos. Devido à simetria cilíndrica do cabo, as linhas de campo magnético serão círculos com centro no eixo dos cilindros e perpendiculares ao eixo. Podemos aplicar a lei de Ampère a um destes círculos de raio r , $R_1 < r < R_2$; se o círculo é percorrido na direcção do campo, o integral de linha do campo é:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r B .$$

A corrente que passa através do círculo é a corrente no fio interno, I . A lei de Ampère implica que

$$2\pi r B = 4\pi k_m I ,$$

e o campo entre os dois condutores é

$$B = \frac{2k_m I}{r} .$$

A superfície de comprimento unitário entre os dois cilindros é o rectângulo $R_1 < r < R_2$, $0 < z < 1$, como se mostra na Figura 10.10. O campo \mathbf{B} é perpendicular a essa superfície, de maneira que o fluxo magnético, por unidade de comprimento, entre os dois cilindros é igual a

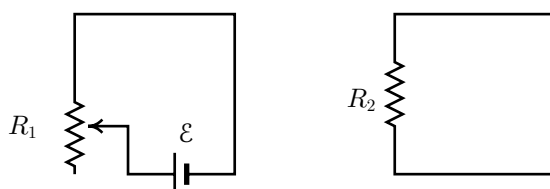
$$\Phi = \int_0^1 dz \int_{R_1}^{R_2} \frac{2k_m I}{r} dr = 2k_m I \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) . \quad (10.44)$$

A derivada deste fluxo é directamente proporcional à derivada da corrente, e a constante de proporcionalidade é o coeficiente de auto-indução por unidade de comprimento:

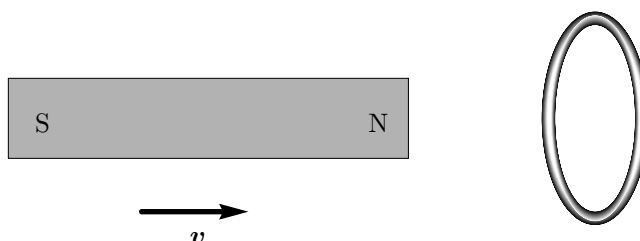
$$L = 2k_m \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) . \quad \blacksquare \quad (10.45)$$

Problemas

- Indique a direcção da corrente induzida no circuito da direita, quando a resistência no circuito da esquerda é, subitamente:
 - Aumentada.
 - Reduzida.

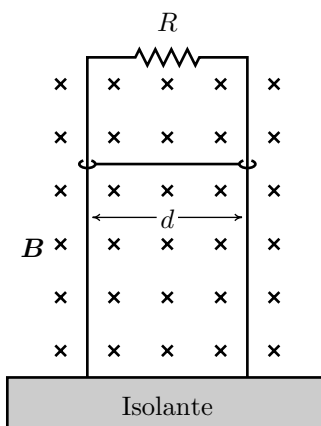


- Um íman desloca-se a velocidade constante sobre o eixo de uma espira, como mostra a figura.



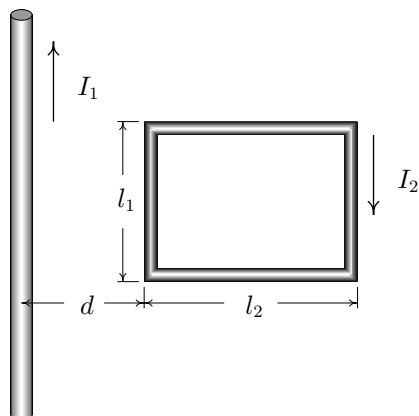
- Faça um esquema qualitativo do fluxo magnético Φ através da espira em função do tempo t . Indique o instante t_1 em que o íman está a meio da travessia da espira.
 - Faça o gráfico da corrente I na espira em função do tempo.
- Mostre que, se o fluxo magnético através da cada espira de uma bobina de N espiras e resistência R variar de Φ_1 até Φ_2 , a carga total que passa através da bobina é dada por $Q = N(\Phi_2 - \Phi_1)/R$.
 - Uma bobina circular de diâmetro 2 cm, resistência de $50 \, \Omega$ e $N = 100$ tem o seu eixo paralelo a um campo de indução magnética uniforme e de módulo 1 T. A direcção do campo é subitamente invertida; calcule a carga total que passa pela bobina.
 - Se a inversão do campo na alínea anterior levar 0,1 s, calcule a corrente e a f.e.m. médias no circuito.

4. Um avião Boeing 747 tem um comprimento total de 60 m entre as pontas das asas. O avião voa a 800 km/h e a uma altitude constante, numa região onde o campo magnético da Terra é 0,5 G, formando um ângulo de 60° com a vertical. Calcule a diferença de potencial induzida entre as pontas das asas.
5. (a) Considere o gerador de Faraday da Figura 10.5. Se não existir campo de indução magnética, existirá alguma diferença de potencial entre os pontos A e B quando o disco roda?
 (b) Num condutor sólido, os electrões movem-se livremente. Então porque não «caem» no interior do condutor sob o efeito do seu peso?
6. Na figura, uma barra condutora de comprimento d e massa m , desliza sobre dois trilhos metálicos verticais, dentro de um campo magnético \mathbf{B} , uniforme. A resistência dos trilhos e da barra são desprezíveis em relação a R . A barra mantém sempre o contacto com os trilhos mas o atrito com eles, assim como o atrito com o ar, são também desprezíveis. Quando a barra começa a cair livremente, o seu movimento é inicialmente acelerado, mas atinge logo uma velocidade constante v . Calcule a velocidade limite v .

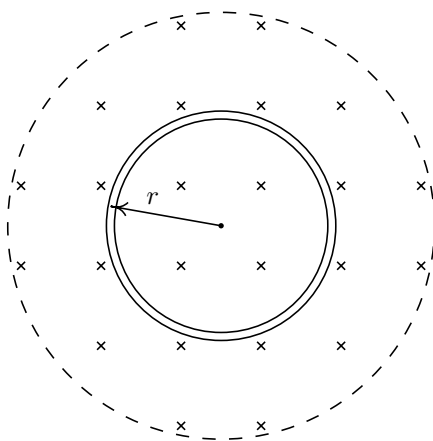


7. Uma espira quadrada de cobre, com 4 cm de lado, encontra-se sobre a superfície horizontal de uma mesa. Um electroímã está colocado em cima da mesa, com o seu pólo norte um pouco acima e à esquerda da espira, de maneira que o campo de indução magnética é aproximadamente uniforme e aponta para baixo através da espira, formando um ângulo de 30° com a vertical. Calcule a f.e.m. média induzida na espira à medida que o campo de indução magnética varia desde zero até ao seu valor final de 0,5 T, num intervalo de tempo igual a 200 ms. Qual será a direcção da corrente induzida?

8. Considere um fio rectangular no qual circula uma corrente I_2 . No mesmo plano encontra-se outro fio percorrido por uma corrente I_1 e de comprimento $l \gg l_1, l_2$ (ver figura). Determine o coeficiente de indução mútua entre o fio e o circuito rectangular.



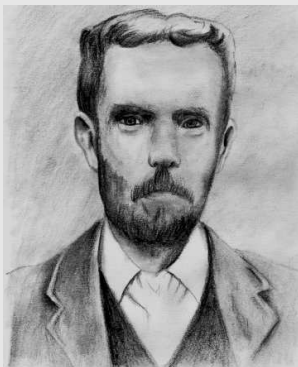
9. No interior do círculo a tracejado na figura, existe um campo de indução magnética uniforme apontando para dentro do papel e com módulo igual a $0,4 \text{ T}$. O campo diminui a uma taxa constante de $0,1 \text{ T/s}$.
- Qual é a forma das linhas de campo eléctrico induzido no interior do círculo?
 - Qual é o módulo e a direcção do campo eléctrico induzido dentro do anel condutor de raio $r = 8 \text{ cm}$?
 - Calcule a f.e.m. induzida dentro do anel condutor.
 - Diga qual é a diferença de potencial entre dois pontos em qualquer parte do anel.



Conceitos básicos

- Corrente alternada
- Transformadas de Fourier e de Laplace
- Diagramas de fasores
- Impedância
- Ressonância

Oliver Heaviside



(1850-1925)

Nasceu em Londres. Aos 16 anos abandonou a escola para seguir o sonho de ser telegrafista. Nos tempos livres estudava electricidade chegando a publicar alguns artigos inspirados pelo Tratado de Electricidade e Magnetismo de Maxwell. Apesar dos vários contributos para o electromagnetismo, é mais conhecido pelo estudo da análise vectorial; introduziu o cálculo operacional para resolver equações diferenciais dos circuitos, tornando-as equações algébricas facilmente resolvíveis. No entanto, o seu trabalho foi alvo de fortes críticas por falta de rigor matemático; Heaviside achava que não se devia perder tempo em demonstrações de algo que intuitivamente parecia estar certo. Resolveu equações diferenciais usando métodos cuja demonstração rigorosa iria manter ocupadas futuras gerações de matemáticos. Em 1902 postulou a existência da ionosfera que permitia que ondas de rádio fossem transmitidas entre continentes. Uma doença infantil deixou-o surdo anos mais tarde, tendo passado os últimos 25 anos da sua vida isolado e solitário.

Circuitos eléctricos II

No Capítulo 7 vimos como é possível calcular as correntes num circuito formado por resistências e fontes. Também vimos alguns exemplos de circuitos com condensadores e resistências, nos quais as correntes e as cargas armazenadas não são estacionárias mas dependem do tempo. Quando também existem indutores, a situação é mais complicada; a diferença de potencial num indutor depende da derivada da corrente e num condensador a diferença de potencial é proporcional ao integral da corrente desde um tempo inicial. As equações das malhas de um circuito com condensadores e indutores são equações integro-diferenciais.

Um circuito com fontes constantes acaba por alcançar sempre um estado estacionário, no qual os condensadores podem ser considerados como interruptores abertos e os indutores como interruptores fechados. Quando as fontes não são constantes, mas variam periodicamente, as correntes nunca chegam a ser constantes; porém, o circuito alcança um estado estacionário no sentido em que as correntes têm um comportamento periódico. Uma corrente periódica com valor médio igual a zero é chamada **corrente alternada**. Um método muito útil para resolver as equações das malhas quando a corrente é alternada, consiste em transformar as equações em equações algébricas onde a variável independente já não é o tempo, mas a frequência de oscilação, utilizando a transformada de Fourier. Este método pode ser estendido a circuitos mais gerais com fontes não periódicas, usando outra transformada, a transformada de Laplace.

O estudo dos circuitos de corrente alternada tem um grande interesse prático, já que a corrente da rede eléctrica pública é alternada; na Europa é geralmente usada uma tensão

eficaz de 220 V, com frequência de 50 Hz. No continente americano está mais generalizado o uso de 120 V com 60 Hz de frequência. Existem razões práticas a favor do uso de tensões alternadas e não contínuas; como vimos no Capítulo 7, a potência dissipada num cabo eléctrico de resistência R aumenta proporcionalmente ao quadrado da corrente. Para transportar uma potência eléctrica VI convém, assim, aumentar a diferença de potencial de forma a usar uma corrente menor, reduzindo as perdas nas linhas de transmissão. As linhas de alta tensão transportam tensões da ordem de vários quilovolts; no entanto, as altas tensões devem ser reduzidas antes de serem fornecidas aos consumidores, para evitar os riscos de electrocussão ou incêndios. No caso de correntes alternadas, o aumento e a diminuição da tensão são obtidos facilmente por meio de transformadores.

Nicola Tesla foi um dos principais impulsores do uso da corrente alternada. Tesla também inventou um novo tipo de motor de indução que não precisa de escovas nem comutadores, sendo assim mais estável e confiável. Para aumentar o desempenho dos motores de indução, Tesla também propôs a introdução da corrente trifásica.

11.1 Série de Fourier

Uma função periódica é uma função que se repete depois de um intervalo de tempo T :

$$f(t + T) = f(t) , \quad (11.1)$$

para qualquer t . O **período** T é o menor número para o qual se verifica a propriedade anterior; obviamente que para $2T$, $3T$, etc. também se verifica a mesma propriedade. Para definir uma função periódica, basta definir o seu valor dentro de um intervalo de tempo T , por exemplo desde $t = 0$ até $t = T$; o comportamento da função em $(0, T)$ repete-se em $(T, 2T)$, $(2T, 3T)$, etc. As funções periódicas e parcelarmente contínuas podem ser representadas por uma **série de Fourier**¹:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] , \quad (11.2)$$

onde a frequência angular ω_n é igual a

$$\omega_n \equiv \frac{2\pi}{T} n , \quad (11.3)$$

e as constantes a_n e b_n são obtidas da seguinte forma:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega_n t) dt , \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega_n t) dt . \quad (11.4)$$

¹A série de Fourier é convergente em qualquer ponto, inclusivamente nos pontos de descontinuidade da função f , onde converge para o valor médio dos limites de f nos dois lados da descontinuidade.

A série de Fourier pode ser escrita de uma forma mais compacta usando a chamada fórmula de Euler, uma função exponencial de variável complexa que relaciona as funções trigonométricas com a função exponencial complexa:

$$e^{i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t) , \quad (11.5a)$$

$$e^{-i\omega_n t} = \cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t) . \quad (11.5b)$$

Com estas relações, as funções trigonométricas na série de Fourier podem ser substituídas por exponenciais complexas² e o resultado obtido é

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} , \quad (11.6)$$

onde os coeficientes c_n são definidos pela seguinte equação:

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt . \quad (11.7)$$

A cada função periódica corresponde um conjunto único de coeficientes c_n ; assim, uma função periódica no domínio do tempo t pode ser representada pela sucessão de coeficientes c_n no **domínio da frequências** ω_n , já que c_n depende de ω_n . Outra forma conveniente de representar os coeficientes de Fourier é

$$\boxed{\tilde{f}(\omega) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega t} dt} , \quad (11.8)$$

onde $\tilde{f}(\omega)$ é chamada a **transformada de Fourier** da função $f(t)$. Na série de Fourier só entrarão os valores de $\tilde{f}(\omega)$ nos pontos $\omega_n = 2\pi n/T$, mas pode calcular-se $\tilde{f}(\omega)$ para qualquer valor real da frequência ω .

Se a função $f(t)$ for uma função real, vemos imediatamente a partir de (11.8) que a transformada de Fourier verifica a seguinte propriedade:

$$\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega) , \quad (11.9)$$

onde \tilde{f}^* é o complexo conjugado de \tilde{f} . Assim, no caso de funções reais basta conhecer a transformada de Fourier no domínio das frequências positivas ($0 \leq \omega < \infty$) e a série de Fourier pode ser escrita na forma

$$f(t) = \frac{\tilde{f}(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}[\tilde{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t}] , \quad (11.10)$$

²Os pormenores deixam-se como exercício para o leitor (ver Problema 1)

onde Re representa a parte real do número complexo entre parênteses. O termo independente do tempo, $\tilde{f}(0)/2$, é real e igual ao valor médio da função f . Uma função **alternada** é uma função periódica com valor médio igual a zero, representada pela série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}[\tilde{f}(\omega_n) e^{i\omega_n t}]. \quad (11.11)$$

Cada termo na série anterior é chamado um **harmónico**.

Exemplo 11.1

Calcule a transformada de Fourier no intervalo de tempo $0 < t < 2\pi$ das funções V_1 e V_2 definidas por

$$V_1(t) = \begin{cases} 5, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad V_2(t) = 5 \sin(3t)$$

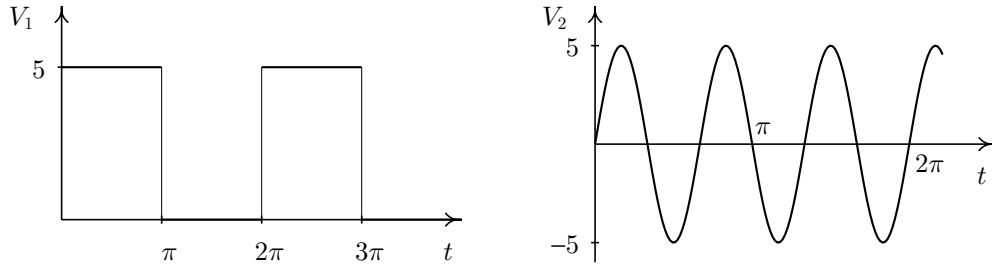


Figura 11.1: Duas funções periódicas.

Usando a definição (11.8) da transformada de Fourier e a fórmula de Euler (11.5b) obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V_1(t) [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] dt = \frac{5}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] dt \\ &= \frac{5}{\pi\omega} [\sin(\omega\pi) + i \cos(\omega\pi) - i]; \end{aligned}$$

que pode também ser escrito em função da exponencial complexa³:

$$\tilde{V}_1(\omega) = \frac{5i}{\pi\omega} (e^{-i\omega\pi} - 1). \quad (11.12)$$

³O leitor provavelmente já reparou que $e^{-i\omega t}$ pode também ser integrado directamente, sem se ter que usar a fórmula de Euler.

Nos integrais calculados acima admitimos que $\omega \neq 0$ (função alternada); para $\omega = 0$ temos

$$\tilde{V}_1(0) = \frac{5}{\pi} \int_0^{\pi} dt = 5. \quad (11.13)$$

Se V_1 fosse a tensão num circuito, o termo $\tilde{V}_1(0)$ corresponderia a uma corrente contínua e $V_1 - 2,5$ seria a corrente alternada.

Para obter a transformada da função harmónica V_2 podíamos proceder da mesma forma, usando a definição da transformada. No entanto, é mais fácil escrever a função em termos da parte real de uma exponencial complexa:

$$5 \sin(3t) = \operatorname{Re}[5 \sin(3t) - i5 \cos(3t)] = \operatorname{Re}[-i5 e^{i3t}]$$

e, por comparação com a série de Fourier,

$$V_2(t) = \frac{1}{2} \tilde{V}_2(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}[\tilde{V}_2(\omega_n) e^{i\omega_n t}],$$

obtemos a transformada de Fourier:

$$\tilde{V}_2(\omega) = \begin{cases} -i5, & \omega = 3 \\ 0, & \omega \neq 3. \end{cases} \quad \blacksquare$$

11.2 Fasores

A série de Fourier (11.11) pode ser representada graficamente no plano complexo. Cada termo na série de Fourier é representado por um **fasor**, que é um vector no plano complexo (Figura 11.2) definido por

$$\tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}; \quad (11.14)$$

o módulo do fasor é constante e igual ao módulo da transformada de Fourier $|\tilde{f}(\omega)|$. A **fase** (ângulo com o eixo real) é a soma da fase da transformada $\tilde{f}(\omega)$ e do termo ωt que aumenta uniformemente com o tempo. À medida que t aumenta, o vector roda no sentido anti-horário, com velocidade angular constante ω , e módulo constante. A projecção do fasor no eixo horizontal é a sua parte real:

$$\operatorname{Re}[\tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}] = \operatorname{Re}[\tilde{f}(\omega)] \cos(\omega t) - \operatorname{Im}[\tilde{f}(\omega)] \sin(\omega t). \quad (11.15)$$

Esta expressão pode ser escrita numa forma mais simples; pensando em termos de um fasor em movimento circular uniforme, com velocidade angular ω , vemos logo que a projecção

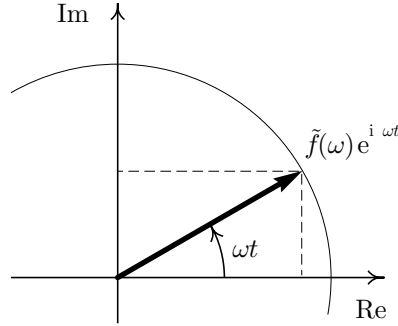


Figura 11.2: Fasor no plano complexo, com velocidade angular ω .

no eixo horizontal é uma função harmónica com amplitude igual ao módulo do fasor e frequência angular ω :

$$\text{Re}[\tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}] = |\tilde{f}(\omega)| \cos(\omega t + \varphi), \quad (11.16)$$

em que φ é a fase de \tilde{f} e também o ângulo que o fasor faz com o eixo x em $t = 0$. Fasores da mesma frequência partilham o mesmo movimento circular uniforme e, portanto, a sua relação de fases é sempre a mesma; as operações entre fasores podem ser feitas num referencial estacionário e o fasor resultante partilhará o mesmo movimento circular.

A série de Fourier de uma função alternada é igual à soma das projecções, sobre o eixo horizontal, de fasores com velocidades angulares $2\pi/T$, $4\pi/T$, \dots . O fasor com velocidade angular $\omega = n\pi/T$, no instante $t = 0$, é a transformada de Fourier $\tilde{f}(\omega)$. Por exemplo, no caso da função $V_2(t) = 5\sin(3t)$ do Exemplo 11.1, é apenas preciso um fasor com velocidade angular igual a 3 e amplitude igual a 5, para obter V_2 ; no instante $t = 0$, o fasor encontra-se na parte negativa do eixo imaginário, e assim vemos que $\tilde{V}_2(3) = -i5$.

11.3 Impedância

Segundo a lei de Ohm, a diferença de potencial numa resistência é directamente proporcional à corrente através dela. Nos condensadores e indutores a relação entre diferença de potencial e corrente é mais complicada; no entanto, nos dois casos a transformada de Fourier da diferença de potencial é directamente proporcional à transformada de Fourier da corrente. Nesse resultado surpreendente reside a importância da transformada de Fourier na análise de circuitos; no domínio da frequência, nas resistências, nos condensadores e nos indutores é válida a lei de Ohm na forma complexa para tensões alternadas:

$$\boxed{\tilde{V}(\omega) = Z(\omega)\tilde{I}(\omega)}, \quad (11.17)$$

onde \tilde{V} e \tilde{I} são as transformadas de Fourier da tensão e da corrente, respectivamente. Assim, cada componente harmónica da tensão é um múltiplo da corrente nesse harmónico;

mas a constante de proporcionalidade Z é complexa e diferente para diferentes harmónicos dando origem a atrasos de fase e a distorção. A constante complexa $Z(\omega)$ é chamada **impedância**.

A lei de Ohm numa resistência é

$$V(t) = RI(t); \quad (11.18)$$

a resistência de um condutor é o resultado da interacção do gás de electrões de condução com a rede iónica e, naturalmente, deverá depender da frequência de oscilação ω do campo eléctrico. Vamos admitir que dentro de um intervalo de frequências não muito elevadas (a frequência da corrente contínua é zero), a resistência permanece constante e igual ao valor medido com corrente contínua. Sendo R constante, a transformada de Fourier de V será igual à transformada de I multiplicada por R :

$$\tilde{V}(\omega) = R\tilde{I}(\omega), \quad (11.19)$$

e, portanto, a impedância de uma resistência é independente da frequência e igual a R :

$$Z_R = R. \quad (11.20)$$

As resistências não produzem atrasos de fase nem distorção. Em todos os harmónicos, as transformadas da tensão e da corrente, $\tilde{V}(\omega)$ e $\tilde{I}(\omega)$, são números complexos com a mesma direcção no plano complexo. A corrente $I(t)$ está sempre em fase com a tensão $V(t)$ (Figura 11.3).

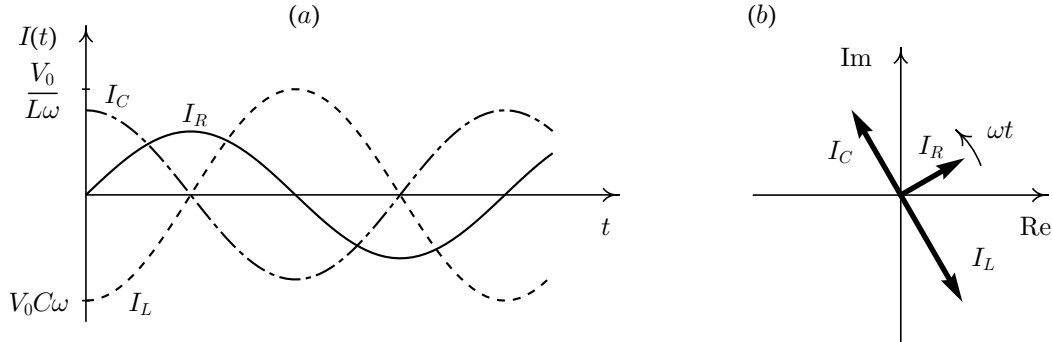


Figura 11.3: (a) Corrente numa resistência (I_R), num indutor (I_L) e num condensador (I_C), quando a tensão em cada um deles é $V_0 \sin(\omega t)$, e (b) fasores correspondentes às três correntes.

A diferença de potencial num indutor é

$$V(t) = L \frac{dI}{dt} ; \quad (11.21)$$

admitimos que a indutância L é independente da frequência, o que, normalmente, é válido para frequências não muito elevadas. Quando a frequência é muito elevada, como as variações do campo magnético não se propagam instantaneamente dentro do indutor, L pode depender da frequência. A transformada de Fourier da diferença de potencial pode ser simplificada integrando por partes:

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{2L}{T} \int_0^T \frac{dI}{dt} e^{-i\omega t} dt = \frac{i2\omega L}{T} \int_0^T I e^{i\omega t} dt , \quad (11.22)$$

onde usámos o facto de ω ser realmente uma variável discreta e, assim, tanto $I(t)$ como $e^{i\omega t}$ têm período T , sendo o seu produto igual em 0 e em T . O integral no lado direito multiplicado por $2/T$, é a transformada da corrente, $\tilde{I}(\omega)$. Consequentemente, a impedância de um indutor é

$$Z_L = i\omega L . \quad (11.23)$$

A impedância de um indutor é completamente imaginária e directamente proporcional à frequência angular. A transformada da corrente é igual a $-i\tilde{V}/\omega L$ (a multiplicação por $-i$ corresponde a uma diminuição da fase em 90°) cada fasor da corrente está sempre 90° antes do fasor da tensão e, consequentemente, a corrente no indutor tem um atraso de fase de 90° em relação à tensão (Figura 11.3).

A diferença de potencial num condensador é igual a

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t I(s) ds . \quad (11.24)$$

Integrando por partes, podemos simplificar a transformada de Fourier de $V(t)$:

$$\tilde{V}(\omega) = \frac{2}{T} \int_0^T V t e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{i\omega T} \int_0^T \frac{dV}{dt} e^{i\omega t} dt ; \quad (11.25)$$

a derivada de V é neste caso $I(t)/C$, o que conduz à impedância

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} . \quad (11.26)$$

Cada fasor da corrente, $\tilde{I} = iC\omega\tilde{V}$, está sempre 90° adiantado à tensão \tilde{V} e, portanto, o adiantamento de fase da corrente $I(t)$ em relação à tensão é 90° (Figura 11.3).

11.4 Associações de resistências, condensadores e indutores

Num circuito de corrente alternada podemos representar de forma genérica uma resistência, um condensador ou um indutor, por meio de uma caixa com uma impedância Z . A diferença de potencial num elemento de circuito com impedância Z , percorrido por uma corrente $\tilde{I}(\omega)$, é dada pela Equação (11.17).

Quando dois elementos com impedâncias Z_1 e Z_2 se encontram ligados em série (Figura 11.4), em qualquer instante de tempo a diferença de potencial no sistema é igual à soma das diferenças de potencial em cada elemento, e a corrente em cada elemento é a mesma:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) , \quad (11.27)$$

$$I(t) = I_1(t) = I_2(t) . \quad (11.28)$$

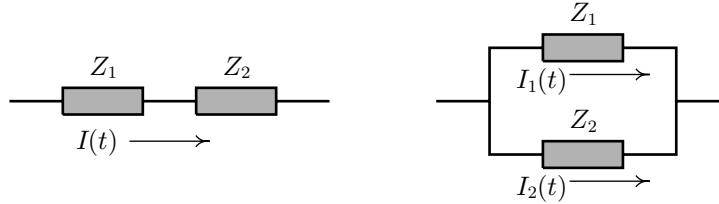


Figura 11.4: Associações de duas impedâncias em série (esquerda) e em paralelo (direita).

Como o integral é um operador linear, a transformada de Fourier também é linear e, portanto,

$$\tilde{V}(\omega) = \tilde{V}_1(\omega) + \tilde{V}_2(\omega) . \quad (11.29)$$

Em cada elemento a transformada da diferença de potencial é igual ao produto da impedância pela transformada da corrente:

$$\tilde{V}(\omega) = Z_1 \tilde{I}_1 + Z_2 \tilde{I}_2 = (Z_1 + Z_2) \tilde{I} , \quad (11.30)$$

o que é equivalente a um único elemento com impedância Z_{eq} , igual à soma das impedâncias de todos os elementos:

$$\boxed{Z_{eq} = Z_1 + Z_2} . \quad (11.31)$$

No caso de dois elementos ligados em paralelo (Figura 11.4), a diferença de potencial será a mesma nos dois:

$$V(t) = V_1(t) = V_2(t) , \quad (11.32)$$

e a corrente total através do sistema será a soma das duas correntes:

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) . \quad (11.33)$$

A transformada da corrente I é igual à soma das transformadas das correntes em cada elemento:

$$\tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}}{Z_1} + \frac{\tilde{V}}{Z_2} , \quad (11.34)$$

e a impedância equivalente Z_{eq} é dada pela seguinte relação:

$$\boxed{\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} . \quad (11.35)$$

Se definirmos o inverso da impedância como a **admitância**, Y , temos o seguinte resultado: a admitância equivalente de um sistema de elementos em paralelo é igual à soma das admitâncias de todos os elementos.

A situação é análoga ao caso de associações de resistências, com a diferença de que algumas das impedâncias são números complexos. A impedância de um circuito, em geral, contém uma parte real e uma parte imaginária, ambas dependentes da frequência angular:

$$Z(\omega) = R(\omega) + iX(\omega) , \quad (11.36)$$

onde X é chamada **reactância**. Um número complexo, nomeadamente a impedância, pode ser escrito em função do seu módulo $|Z|$ e da sua fase φ :

$$Z(\omega) = |Z(\omega)| e^{i\varphi(\omega)} . \quad (11.37)$$

Como a corrente e a tensão são funções reais, as suas transformadas verificam a propriedade (11.9) e a partir da definição da impedância (Equação 11.17) concluímos que a mesma propriedade é válida para $Z(\omega)$:

$$Z(-\omega) = Z^*(\omega) . \quad (11.38)$$

Uma consequência desta propriedade é que a parte real da impedância $R(\omega)$ é sempre uma função par e a parte imaginária $X(\omega)$ uma função ímpar e nula no caso de corrente contínua ($\omega = 0$). O módulo da impedância é também uma função par e a fase é uma função ímpar.

Para somar impedâncias é conveniente usar a forma $R + iX$ somando as partes reais e imaginárias entre si. Para calcular o produto entre dois números complexos, é mais conveniente trabalhar com módulos e fases, pois o módulo do produto é igual ao produto dos módulos e a fase do produto é igual à soma das fases. No diagrama de fasores, o fasor $V = Z\tilde{I}$ obtém-se somando as fases da impedância e da corrente e multiplicando as suas amplitudes; o fasor $I = V/Z$ obtém-se subtraindo a fase da impedância à fase da corrente e dividindo as amplitudes.

O inverso de um número complexo calcula-se invertendo o módulo e mudando o sinal da fase, ou, em função das partes real e imaginária, multiplicando o numerador e o denominador pelo complexo conjugado. Por exemplo, o inverso da impedância (Equação 11.36) é a admitância:

$$Y = \frac{R - iX}{R^2 + X^2} ; \quad (11.39)$$

esta forma é bastante útil para calcular o equivalente de um sistema de impedâncias em paralelo.

Exemplo 11.2

A resistência de uma bobina é $150 \, \Omega$ e a sua indutância é $1,4 \, \text{H}$. A bobina é ligada à tensão da rede eléctrica, com amplitude $311 \, \text{V}$ e frequência de $50 \, \text{Hz}$. Calcule a corrente na bobina em qualquer instante t .

A frequência angular calcula-se multiplicando a frequência por 2π :

$$\omega = 100\pi \, (\text{s}^{-1}) .$$

Ao circuito equivalente da bobina (Figura 11.5) chama-se circuito LR .

A impedância equivalente da resistência e do indutor em série é

$$Z = R + i\omega L = (150 + i140\pi) \, \Omega = 465 e^{i1,2421} \, \Omega .$$

A tensão é um fasor com velocidade angular igual a 100π radianos por segundo, e com módulo igual a $311 \, \text{V}$. Se arbitramos $t = 0$ no instante em que a tensão (igual a zero) começa a aumentar, obtemos

$$\tilde{V} = -i311 e^{i100\pi t} \, (\text{V}) .$$

O fasor da corrente é

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z} = -i0,669 e^{i(314,16 t - 1,2421)} \, (\text{A}) .$$

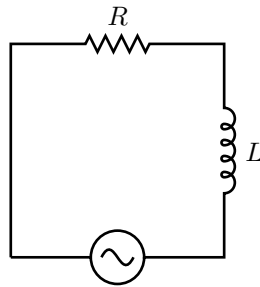


Figura 11.5: Circuito LR .

A corrente em função do tempo é a parte real de $\tilde{I}e^{i\omega t}$:

$$I(t) = 0,669 \sin(314,16 t - 1,2421) \text{ (A)} . \quad (11.40)$$

A corrente é uma função sinusoidal, com a mesma frequência da tensão. ■

11.5 Potência média

Como vimos no capítulo da corrente eléctrica (Capítulo 6), a potência instantânea fornecida a um elemento de circuito, com diferença de potencial V e corrente I , é igual ao produto VI . Assim, em função do tempo t , a potência no circuito é

$$P(t) = V(t)I(t) . \quad (11.41)$$

No caso de correntes alternadas, o produto VI alterna entre positivo e negativo. Se V e I estão em fase (como acontece numa resistência) o produto é sempre positivo, o que implica que o circuito absorve sempre energia (efeito Joule). Com uma diferença de fase entre 0° e 90° , os intervalos onde a potência é positiva (energia absorvida pelo circuito) são maiores que os intervalos nos quais a potência é negativa e, em média, o circuito absorve energia. Se a diferença de fase é exactamente 90° (isto é, no caso de termos apenas condensadores ou indutores), os intervalos em que o circuito absorve e fornece energia são iguais e a potência média é zero. No caso de não existirem fontes dentro do circuito, não é possível ter diferenças de fase maiores que 90° entre V e I , já que a parte real da impedância é sempre positiva e, portanto, a sua fase está entre -90° e 90° .

A potência média num circuito de corrente alternada com período T é dada por

$$\overline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t)V(t) dt . \quad (11.42)$$

As séries de Fourier da tensão e da corrente são

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{V}_n e^{in\omega t} , \quad (11.43a)$$

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{I}_n e^{in\omega t} , \quad (11.43b)$$

em que as plicas nos símbolos de somatório indicam que o termo $n = 0$ é excluído (o valor

médio de uma função alternada é nulo). As funções \tilde{V}_n e \tilde{I}_n são uma forma abreviada de escrever $\tilde{V}(\omega_n)$ e $\tilde{I}(\omega_n)$, respectivamente. A potência média no circuito é

$$\overline{P} = \frac{1}{4T} \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{I}_n \tilde{V}_m \int_0^T e^{i(n+m)\omega t} dt, \quad (11.44)$$

e os integrais serão todos nulos excepto nos casos em que $n = -m$, que conduzem a um valor T para o integral:

$$\overline{P} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{I}_n \tilde{V}_{-n} + \tilde{I}_{-n} \tilde{V}_n); \quad (11.45)$$

e lembrando que \tilde{V}_{-n} é o complexo conjugado de \tilde{V}_n , obtemos

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}(\tilde{I}_n \tilde{V}_n^*). \quad (11.46)$$

Como já foi referido acima, a diferença de fase φ_n entre a tensão e a corrente é igual à fase da impedância, que está entre -90° e 90° :

$$\tilde{V}_n = |\tilde{V}_n| e^{i\theta_n} \quad \tilde{I}_n = |\tilde{I}_n| e^{i(\theta_n - \varphi_n)}, \quad (11.47)$$

e substituindo na equação anterior obtemos a potência média:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{I}_n| |\tilde{V}_n| \cos \varphi_n. \quad (11.48)$$

O **factor de potência** é o co-seno da fase da impedância:

$$\cos \varphi_n = \frac{\text{Re}(Z_n)}{|Z_n|} = \frac{\text{Re}(Z_n) |\tilde{I}_n|}{|\tilde{V}_n|}, \quad (11.49)$$

e, assim, a potência média é

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{I}_n|^2 \text{Re}(Z_n). \quad (11.50)$$

A potência dissipada no circuito é devida apenas à parte real da impedância; essa parte real pode ter também contribuições de indutores e condensadores mas, no caso de elementos em série, a potência é dissipada unicamente nas resistências; o factor adicional de $1/2$, não obtido no caso da corrente contínua, implica que a **corrente eficaz** que fornece energia é

$$I_{\text{ef}} = \frac{|\tilde{I}|}{\sqrt{2}}, \quad (11.51)$$

e a correspondente **tensão eficaz**⁴ é

$$V_{\text{ef}} = \frac{|\tilde{V}|}{\sqrt{2}}. \quad (11.52)$$

A corrente e a tensão medidas por meio de um amperímetro e de um voltímetro de corrente alternada, respectivamente, são os valores eficazes. Os 220 V da tensão da rede eléctrica pública correspondem ao valor eficaz; o valor máximo de tensão é 311 V. Em cada componente harmónica a potência média dissipada no circuito é

$$\boxed{\overline{P} = I_{\text{ef}} V_{\text{ef}} \cos \varphi = I_{\text{ef}}^2 \operatorname{Re}(Z)} \quad (11.53)$$

A potência média está entre 0, quando o circuito é puramente indutivo ou capacitivo [$\operatorname{Re}(Z) = 0$], e o valor máximo $I_{\text{ef}} V_{\text{ef}}$, quando o circuito é puramente resistivo [$\operatorname{Im}(Z) = 0$].

Exemplo 11.3

Um aparelho tem uma resistência de 1,5 kΩ em série com um condensador de 3 μF. Calcule a potência média dissipada quando o aparelho é ligado a uma tomada (220 V, 50 Hz).

A parte real da impedância equivalente será, neste caso, igual à resistência, e o seu módulo:

$$|Z| = \sqrt{(1500)^2 + (2\pi \cdot 50 \cdot 3 \cdot 10^{-6})^{-2}} \Omega = 1837 \Omega.$$

A corrente eficaz é igual à tensão eficaz dividida pelo módulo da impedância:

$$I_{\text{ef}} = \frac{220}{1837} \text{ A} = 0,1198 \text{ A},$$

e a potência média dissipada é

$$\overline{P} = I_{\text{ef}}^2 R = 21,51 \text{ W.} \quad \blacksquare$$

11.6 Ressonância

A amplitude da corrente num circuito alimentado por uma determinada tensão alternada é inversamente proporcional ao módulo da impedância. Num circuito ideal, com resistência nula, a impedância pode ser nula; na prática, existe sempre alguma resistência e a impedância nunca é zero, qualquer que seja a frequência, mas existirá uma frequência para a qual o módulo da impedância é mínimo e o módulo da corrente é máximo. A frequência para a qual a corrente é máxima é a **frequência de ressonância** do circuito; quando a tensão alimentada ao circuito tem a mesma frequência de ressonância do circuito, diz-se que a tensão está em ressonância com o circuito.

⁴Em geral, o valor eficaz, de uma função alternada, define-se como a raiz quadrada do valor médio do quadrado da função. Outra notação usada por alguns autores para a tensão eficaz é $V_{\text{r.m.s.}}$.

Consideremos o circuito *LCR* da Figura 11.6. A impedância equivalente é a soma das três impedâncias, e o quadrado do seu módulo será

$$|Z|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2. \quad (11.54)$$

O primeiro termo é positivo e independente da frequência. O segundo termo pode ser positivo ou nulo, sendo nulo quando a frequência angular for igual a

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (11.55)$$

Quando $\omega = \omega_0$, o módulo da impedância terá o seu valor mínimo R e a amplitude da corrente será máxima e igual à amplitude da tensão dividida por R . A frequência de ressonância do circuito é

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (11.56)$$

A impedância pode ser escrita em função de ω_0 e de um parâmetro adimensional chamado **factor de qualidade**:

$$Q \equiv \frac{L\omega_0}{R}. \quad (11.57)$$

A corrente eficaz é igual à tensão eficaz, dividida pelo módulo da impedância:

$$I_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{ef}}}{R} \left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (11.58)$$

Se ω for muito diferente de ω_0 , a corrente será muito pequena. A diferença entre as correntes na frequência de ressonância f_0 e outras frequências será tanto maior quanto menor for o factor de qualidade (indutância elevada, resistência ou capacidade pequenas). Com um factor de qualidade suficientemente elevado, o circuito actua como um filtro que anula os modos de oscilação com frequências afastadas da frequência de ressonância.

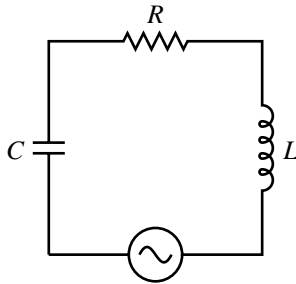


Figura 11.6: Circuito *LCR*.

Os filtros de frequências são muito usados em circuitos. Por exemplo, a antena de um aparelho de rádio recebe todas as frequências das estações que estejam a transmitir sinais; para filtrar a estação seleccionada usa-se um circuito LCR com um condensador variável; alterando a capacidade C do condensador variável é possível obter uma frequência de ressonância igual à frequência desejada, filtrando as outras frequências.

11.7 Transformada de Laplace

Num circuito com fontes de tensão alternada podem também existir correntes transitórias que não são funções periódicas. Por exemplo, no momento em que o circuito é ligado à fonte, a corrente, que inicialmente era nula, não aumenta subitamente até ao valor estacionário, mas oscila com uma amplitude que aumenta gradualmente até alcançar o valor estacionário.

O método da transformada de Fourier usado nas secções anteriores não permite encontrar soluções não periódicas das equações do circuito. Existem outros métodos para resolver as equações integro-diferenciais das malhas; nesta secção veremos um método que também consiste em passar do domínio do tempo t para outro domínio onde as equações se tornam equações algébricas. A função exponencial que usamos na definição da transformada de Fourier é uma função com período T . Para permitir soluções não periódicas, teremos que usar outra função que nos permita eliminar o número imaginário i na exponencial e estender o intervalo de integração até ao infinito. A correspondente transformação é chamada **transformada de Laplace** e é definida pela seguinte equação:

$$\boxed{\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt}; \quad (11.59)$$

a transformada de Laplace da função f é outra função \hat{f} num outro domínio do parâmetro s . Também usaremos a notação $\mathcal{L}(f)$ para a transformada de Laplace de f , quando for mais conveniente. O domínio de \hat{f} são os valores de s para os quais

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} = 0. \quad (11.60)$$

A transformada de Laplace de uma função exponencial é

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt, \quad (11.61)$$

que no domínio $s > a$ é igual a

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a}. \quad (11.62)$$

A transformada de Laplace tem duas propriedades importantes que usaremos para resolver as equações de circuitos. A primeira propriedade é a transformada da derivada de uma função; é fácil mostrar por integração por partes que

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = s\hat{f} - f(0), \quad (11.63)$$

no mesmo domínio da transformada de f . A segunda propriedade é a transformada de uma primitiva; mais uma vez, a integração por partes permite mostrar que

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du\right) = \frac{\hat{f}}{s}. \quad (11.64)$$

Estas duas propriedades permitem transformar as equações das malhas num circuito em equações algébricas lineares, em função do parâmetro s . A resolução dessas equações lineares permite encontrar as transformadas de Laplace das correntes nas malhas; as correntes serão obtidas aplicando a transformada de Laplace inversa. No caso da transformada de Fourier, para encontrar a função correspondente a uma determinada transformada, substitui-se na série de Fourier. No caso da transformada de Laplace podemos abordar o problema utilizando algumas regras simples e consultando tabelas de transformadas de Laplace, tal como no caso da primitivação de funções⁵.

Exemplo 11.4

O circuito da Figura 11.7 encontra-se inicialmente no estado estacionário. Calcule a corrente na resistência de $6\ \Omega$ em função do tempo, a partir do instante em que se fecha o interruptor.

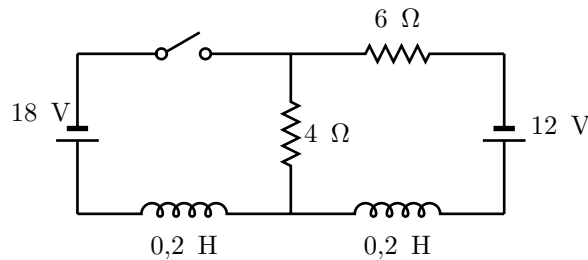


Figura 11.7: Exemplo de resposta transitória de um circuito.

O tempo t pode ser medido a partir do instante em que o interruptor é fechado; assim, para $t < 0$ o indutor actua como um condutor perfeito e a corrente estacionária na resistência de $6\ \Omega$ é igual a $12/10 = 1,2$ (não vamos escrever unidades, todos os resultados estão no sistema SI). Seja I_1 a corrente na malha da esquerda e I_2 a corrente na malha

⁵É também possível calcular a transformada inversa de Laplace por outro método o qual exige conhecimentos avançados de integração no plano complexo.

da direita, ambas no sentido horário. Aplicando a regra de Kirchhoff nas duas malhas, obtemos

$$\begin{cases} 0,2 \frac{dI_1}{dt} + 4I_1 - 4I_2 = -18, \\ 0,2 \frac{dI_2}{dt} - 4I_1 + 10I_2 = 12. \end{cases}$$

No estado estacionário, a diferença de potencial nos indutores é nula, e o sistema de equações é

$$\begin{cases} 4I_1 - 4I_2 = -18, \\ -4I_1 + 10I_2 = 12; \end{cases}$$

somando as duas equações obtemos $I_2 = -1$. A resposta transitória será uma corrente I_2 que diminui exponencialmente desde 1,2 até -1 . Para resolver o sistema de equações diferenciais, transformamos os dois lados das equações considerando que a transformação de Laplace é linear:

$$\begin{cases} 0,2 \mathcal{L}\left(\frac{dI_1}{dt}\right) + 4\mathcal{L}(I_1) - 4\mathcal{L}(I_2) = -18\mathcal{L}(1), \\ 0,2 \mathcal{L}\left(\frac{dI_2}{dt}\right) - 4\mathcal{L}(I_1) + 10\mathcal{L}(I_2) = 12\mathcal{L}(1). \end{cases}$$

As transformadas de I_1 e I_2 são duas funções (\hat{I}_1 e \hat{I}_2) que dependem de s . As transformadas das derivadas das correntes obtêm-se a partir da Equação (11.63) sabendo que para $t = 0$, $I_1 = 0$ e $I_2 = 1,2$. Finalmente, a transformada de 1 é um caso particular da Equação (11.62) para $a = 0$ [$\mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(e^0) = 1/s$]. Com estas substituições, e multiplicando cada equação por 5 obtemos

$$\begin{cases} s\hat{I}_1 + 20\hat{I}_1 - 20\hat{I}_2 = -\frac{90}{s}, \\ s\hat{I}_2 - 1,2 - 20\hat{I}_1 + 50\hat{I}_2 = \frac{60}{s}. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$\hat{I}_2 = \frac{1,2s^2 + 84s - 600}{s(s+10)(s+60)}. \quad (11.65)$$

A corrente I_2 em função do tempo será a transformada inversa de \hat{I}_2 .

Para calcular a transformada inversa, escrevemos o resultado anterior em frações parciais:

$$\hat{I}_2 = -\frac{1}{s} + \frac{2,64}{s+10} - \frac{0,44}{s+60}.$$

Cada um dos três termos no lado direito tem a mesma forma da Equação (11.62) e, portanto, são as transformadas de três funções exponenciais com a igual a 0, -10 e -60 , respectivamente. Assim, obtemos finalmente a corrente em função do tempo:

$$I_2(t) = -1 + 2,64e^{-10t} - 0,44e^{-60t}.$$

Podemos conferir facilmente que para $t = 0$ a corrente é 1,2 e que para $t \gg 0$ a corrente diminui até -1 . ■

11.8 Resposta transitória do circuito LCR

A resposta do circuito LCR em série, alimentado por uma tensão alternada, já foi discutida na Secção 11.6 e vimos a existência de uma frequência de ressonância $\omega_0 = 1/\sqrt{LR}$. Vamos agora estudar a resposta transitória do circuito LCR alimentado por uma fonte contínua (Figura 11.8).

O interruptor fecha-se no instante $t = 0$. Para $t > 0$ aparece uma corrente variável $I(t)$. Aplicando a regra das malhas obtemos a seguinte equação:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(u) du + RI = \mathcal{E}, \quad (11.66)$$

onde admitimos que a carga inicial no condensador é zero; se o condensador tivesse uma carga inicial Q_0 , teríamos que somar ou subtrair Q_0/C no lado direito, consoante a carga

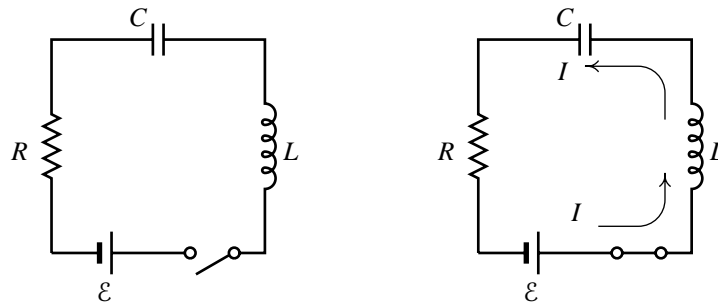


Figura 11.8: Circuito LCR alimentado por uma fonte contínua.

seja positiva ou negativa respectivamente. Aplicando a transformada de Laplace obtemos

$$L \mathcal{L}\left(\frac{dI}{dt}\right) + \frac{1}{C} \mathcal{L}\left(\int_0^t I(u) du\right) + R\hat{I} = \mathcal{E} \mathcal{L}(1), \quad (11.67)$$

onde \hat{I} é a transformada de Laplace da corrente. As transformadas dos dois primeiros termos obtêm-se a partir das Equações (11.63) e (11.64) [com a condição inicial $I(0) = 0$] e a transformada de 1, a partir de (11.62) com a igual a zero:

$$sL\hat{I} + \frac{\hat{I}}{sC} + R\hat{I} = \frac{\mathcal{E}}{s}. \quad (11.68)$$

Resolvendo em ordem a \hat{I} obtemos

$$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}/L}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}, \quad (11.69)$$

onde ω_0 é a frequência angular de ressonância e Q o factor de qualidade definidos pelas Equações (11.55) e (11.57). Para calcular a transformada inversa, usamos a decomposição em fracções parciais e a Equação (11.62). As duas raízes do denominador de \hat{I} são

$$s = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right), \quad (11.70)$$

podendo ser reais e diferentes, reais e iguais ou complexas, segundo o valor do factor de qualidade Q .

11.8.1 Raízes reais diferentes

Se Q for menor que $1/2$ (resistência maior que $2L\omega_0$), as duas raízes serão reais, negativas e diferentes:

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 + \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \quad \omega_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right). \quad (11.71)$$

Escrevendo a Equação (11.69) na forma de fracções parciais obtemos

$$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}}{L(\omega_1 - \omega_2)} \left(\frac{1}{s - \omega_1} - \frac{1}{s - \omega_2} \right); \quad (11.72)$$

e usando a Equação (11.62), obtemos a transformada inversa:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}Q}{\omega_0 L \sqrt{1 - 4Q^2}} (e^{\omega_2 t} - e^{\omega_1 t}) = \frac{2\mathcal{E}Q e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}{\omega_0 L \sqrt{1 - 4Q^2}} \sinh\left(\frac{\omega_0 t}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}\right). \quad (11.73)$$

A função exponencial e o seno hiperbólico no domínio real positivo são ambas funções positivas e, portanto, a corrente nunca é negativa. A corrente aumenta até um valor máximo e depois diminui aproximando-se exponencialmente de zero. Neste caso, diz-se que o circuito está **sobreamortecido** (Figura 11.9).

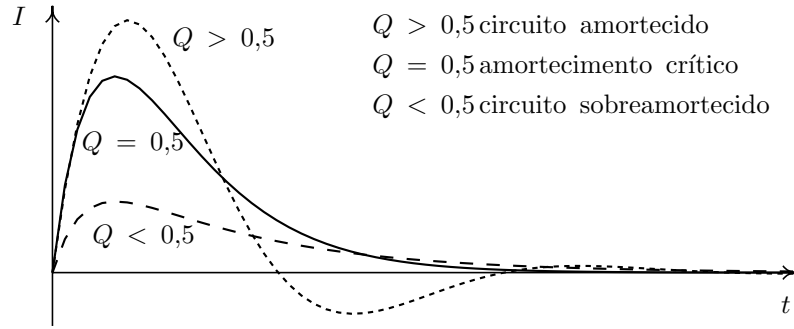


Figura 11.9: Corrente em três circuitos LCR com diferentes factores de qualidade Q .

11.8.2 Raízes iguais

Se a resistência for igual ao valor crítico $2L\omega_0$, o factor de qualidade é $1/2$ e existe só uma raiz igual a $-\omega_0$. A Equação (11.69) é equivalente a

$$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}}{L(s + \omega_0)^2}. \quad (11.74)$$

Para calcular a transformada inversa usamos a propriedade

$$\mathcal{L}(t f(t)) = -\frac{d\hat{f}}{ds}. \quad (11.75)$$

a qual se obtém facilmente, derivando os dois lados da Equação (11.59). Aplicando esta propriedade à função $e^{-\omega_0 t}$, e usando a Equação (11.62) obtemos

$$\mathcal{L}(t e^{-\omega_0 t}) = \frac{1}{(s + \omega_0)^2}, \quad (11.76)$$

e a transformada inversa da corrente \hat{I} é, assim,

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}t}{L} e^{-\omega_0 t}. \quad (11.77)$$

Este é o caso de **amortecimento crítico** (Figura 11.9).

11.8.3 Raízes complexas

Se a resistência for menor que o valor crítico $2L\omega_0$, ξ será menor que 1, e as duas raízes serão complexas e conjugadas entre si:

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 + i\sqrt{4Q^2 - 1} \right) \quad \omega_2 = \omega_1^* . \quad (11.78)$$

A decomposição em fracções parciais (11.72) continua válida, onde ω_1 e ω_2 são agora números complexos:

$$\hat{I} = \frac{\mathcal{E}Q}{iL\omega_0\sqrt{4Q^2 - 1}} \left(\frac{1}{s - \omega_1} - \frac{1}{s - \omega_1^*} \right) . \quad (11.79)$$

Usando a Equação (11.62), a transformada inversa de \hat{I} é

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}Q}{i\omega_0L\sqrt{4Q^2 - 1}} (e^{\omega_1^*t} - e^{\omega_1t}) = \frac{2\mathcal{E}Q e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}}{\omega_0L\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}\right) . \quad (11.80)$$

A corrente oscila com uma frequência angular igual a

$$\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)^{1/2} , \quad (11.81)$$

e com uma amplitude que decresce exponencialmente. A corrente é negativa (oposta ao sentido da fonte), durante alguns intervalos de tempo; quando a carga no condensador é suficientemente elevada para produzir uma diferença de potencial igual e oposta à f.e.m., a corrente não desaparece instantaneamente devido à corrente induzida no indutor e oposta à diminuição da corrente; quando finalmente a corrente é nula, a carga do condensador é superior à necessária para que a diferença de potencial no condensador seja igual à tensão da f.e.m. (estado estacionário); essa tensão no condensador produz uma corrente negativa no circuito que tenta diminuir a carga até ao valor estacionário mas o indutor faz com que a corrente persista depois de a carga ter atingido o valor estacionário e, assim, a carga diminui em relação ao valor estacionário. O ciclo repete-se, cada vez com menor amplitude até que, finalmente, a carga no condensador permanece constante ($C\mathcal{E}$) e a corrente desaparece (Figura 11.9).

Neste capítulo considerámos apenas materiais ohmicos, nos quais a característica tensão-corrente é uma recta; a resposta dos materiais ohmicos a uma tensão é linear, sem produzir distorções. No caso de materiais não ohmicos a resposta já não é linear e a forma da corrente já não é semelhante à forma da tensão de entrada.

Problemas

1. Usando a Equação (11.5), escreva as funções $\sin(\omega_n t)$ e $\cos(\omega_n t)$ em função das exponenciais $e^{i\omega_n t}$ e $e^{-i\omega_n t}$. Substitua o resultado na série de Fourier (11.2) para obter a forma complexa (11.6). Encontre a relação entre os coeficientes c_n , a_n e b_n .
2. Calcule a transformada de Fourier da tensão:

$$V(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 2 \\ 3(t - 2n), & 2n < t < 2(n + 1) \end{cases}$$

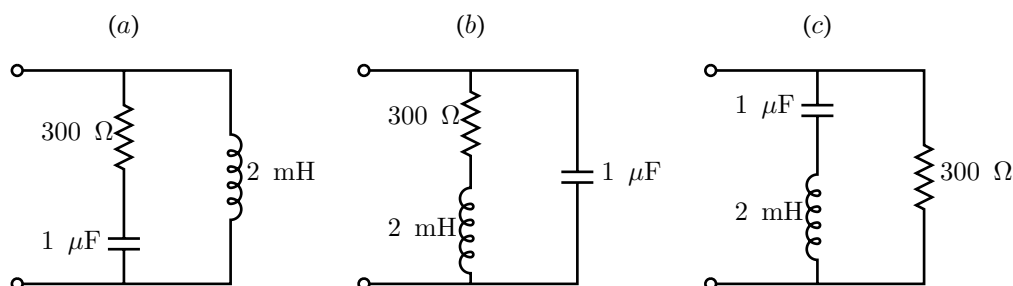
3. A tensão e a corrente num circuito são

$$V(t) = 170 \sin(377t + 3) \text{ (V)},$$

$$I(t) = 10 \sin(377t + 3,2) \text{ (A)}.$$

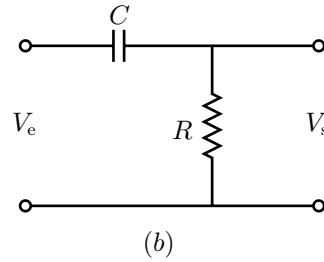
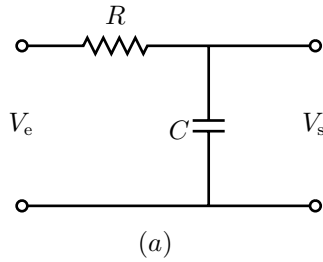
Desenhe os fasores correspondentes no plano complexo e calcule a impedância do circuito.

4. Usando a definição do farad e do henry no sistema internacional de unidades, demonstre que as impedâncias de um condensador (Z_C) e de um indutor (Z_L) têm unidades de resistência.
5. Para cada um dos três circuitos representados, calcule a impedância equivalente entre os pontos indicados com um pequeno círculo, para uma tensão de entrada com frequência $f = 2 \text{ kHz}$.

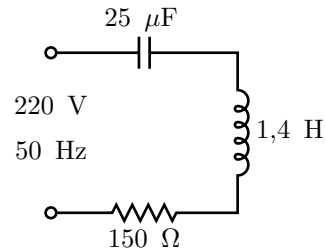


6. Um circuito LC é formado por um condensador de $5 \, \mu\text{F}$ em série com um indutor de 2 H . Inicialmente, a carga no condensador é zero e não existe corrente no circuito; em $t = 0$ o circuito é ligado a uma f.e.m. contínua de 60 V . Encontre as funções que definem a corrente e a carga no condensador em função do tempo, e esboce os respectivos gráficos.

7. Os dois circuitos da figura, alimentados por uma tensão de entrada V_e com frequência angular ω , são chamados **filtro passa-baixo** (a) e **filtro passa-alto** (b). Determine a relação entre a tensão de saída e a tensão de entrada V_s/V_e para os dois casos. Explique porque é que os circuitos são chamados filtro passa-baixo e filtro passa-alto.



8. No circuito LCR da figura, calcule:
 (a) O módulo e a fase da impedância.
 (b) A frequência de ressonância.
 (c) A potência média dissipada.

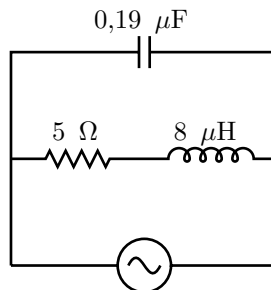


9. Se a é uma constante, demonstre que as transformadas de Laplace das funções $\sin(at)$ e $\cos(at)$ são:

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad \mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

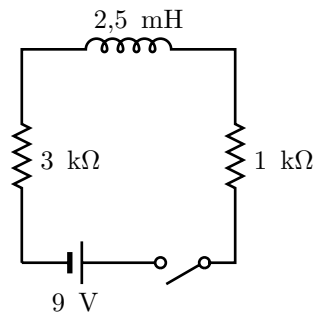
Use estes resultados para resolver a equação do circuito LCR (Equação 11.66) alimentado por uma tensão alternada $\mathcal{E} = V_0 \sin(\omega t)$, a partir de $t = 0$. Compare a solução com os resultados da Secção 11.6.

10. Calcule o valor da frequência f do gerador para o qual a corrente $I(t)$ se encontra em fase com a tensão $V(t)$. Será essa a frequência de ressonância do circuito? Explique.



11. No instante $t = 0$ fecha-se o interruptor. Calcule:

- (a) A corrente estacionária (em $t \gg 0$).
- (b) A corrente em função do tempo.
- (c) O tempo necessário para que a corrente aumente até metade da corrente estacionária.



12. Uma bobina de resistência $8 \, \Omega$ e coeficiente de auto-indução $4 \, \text{H}$ é ligada a uma diferença de potencial constante de $100 \, \text{V}$. Seja $t = 0$ o instante da ligação, no qual a corrente é nula. Calcule a corrente I e a sua taxa de variação dI/dt nos instantes:

- (a) $t = 0$.
- (b) $t = 0,1 \, \text{s}$.
- (c) $t = 0,5 \, \text{s}$.
- (d) $t = 1 \, \text{s}$.

Conceitos básicos

- Corrente de deslocamento
- Equações de Maxwell
- Transporte de energia electromagnética
- Potencial vectorial
- Campo de calibração

**James Clerk
Maxwell**



(1831-1879)

Nasceu em Edimburgo. Com 14 anos escreveu o seu primeiro artigo científico sobre curvas com mais de dois focos. Em 1854 obteve o título de matemático pela Universidade de Cambridge. Entre 1855 e 1856, desenvolveu e demonstrou matematicamente a teoria das linhas de campo de Faraday, mostrando como é possível descrever os campos eléctrico e magnético, e a sua relação, com umas poucas equações matemáticas. Em 1856 regressou à Escócia para acompanhar a doença do seu pai. Nessa época recebeu um prémio pela melhor explicação sobre a natureza dos anéis de Saturno; Maxwell demonstrou que a estabilidade dos anéis era devida a serem formados por muitas rochas pequenas. Em 1860 aceitou um emprego em Londres onde permaneceu até 1866. Durante esse período calculou a velocidade de propagação do campo electromagnético concluindo que era igual à da luz e que portanto esta devia ser uma onda electromagnética. A partir do estudo estatístico do movimento das moléculas, e independentemente de Boltzmann, formulou uma teoria cinética dos gases que reproduz as propriedades fenomenológicas da termodinâmica.

Electrodinâmica

Da mesma forma que um campo de indução magnética variável induz um campo eléctrico, veremos neste capítulo que a variação temporal do campo eléctrico induz um campo de indução magnética; isto foi descoberto por Maxwell, de forma teórica, a partir da sua observação de que, quando existem campos eléctricos dependentes do tempo, a lei de Ampère não é compatível com a conservação da carga. Para garantir a conservação da carga, Maxwell introduziu na lei da Ampère um termo dependente da derivada do campo eléctrico, a designada corrente de deslocamento.

Incluindo a corrente de deslocamento, Maxwell mostrou que as leis de Ampère, Faraday e Gauss, juntamente com a condição de a divergência do campo de indução magnética ser nula, formavam um sistema de equações que definiam de forma consistente o campo electromagnético. Estas quatro equações de Maxwell sintetizam a teoria electromagnética e levaram Maxwell a descobrir a verdadeira natureza da luz, como veremos no Capítulo 13.

12.1 Corrente de deslocamento

A lei de Ampère (9.19) relaciona a densidade de corrente num ponto com o rotacional do campo de indução magnética:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} . \quad (12.1)$$

Como a divergência do rotacional de qualquer campo vectorial é zero, a equação anterior implica que a divergência da densidade de corrente é nula, em qualquer ponto. Isto está em contradição com o princípio fundamental da conservação da carga eléctrica; como vimos no Capítulo 6, a expressão da conservação da carga em termos matemáticos é a equação de continuidade, que na forma diferencial é

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (12.2)$$

Assim, a lei de Ampère só poderá ser válida para correntes estacionárias, onde não exista aumento ou diminuição da carga volúmica em qualquer ponto. Para encontrar a forma mais geral do rotacional do campo \mathbf{B} , que reproduza a lei de Ampère no caso particular das correntes estacionárias, vamos partir da equação de continuidade. Se substituirmos a carga volúmica na Equação (12.2), usando a lei de Gauss (4.38), obtemos

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 . \quad (12.3)$$

O termo entre parênteses é um campo vectorial \mathbf{F} com divergência igual a zero:

$$\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{F} . \quad (12.4)$$

No caso particular em que a derivada do campo eléctrico seja zero, a densidade de corrente será igual ao campo \mathbf{F} e para que a lei de Ampère seja válida, o campo \mathbf{F} deverá ser igual a

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} , \quad (12.5)$$

e a divergência de \mathbf{F} é nula como precisávamos, já que a divergência do rotacional de qualquer campo é sempre nula. As Equações (12.4) e (12.5) conduzem à **lei de Ampère-Maxwell**:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (12.6)$$

Quando existem correntes não-estacionárias, a acumulação ou redução da carga em alguns pontos implica campos eléctricos variáveis que introduzem um termo adicional:

$$\mathbf{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \quad (12.7)$$

conhecido como **densidade de corrente de deslocamento**.

A forma integral da lei de Ampère-Maxwell obtém-se multiplicando escalarmente os dois lados da Equação (12.6) por $d\mathbf{A}$ e integrando sobre uma superfície S :

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} . \quad (12.8)$$

O integral no lado esquerdo pode ser escrito como um integral de linha, usando o teorema de Stokes (4.30). O integral de \mathbf{J} , no lado direito, é a corrente através da curva C e o

integral de \mathbf{E} é o fluxo eléctrico Φ . Assim, o resultado obtido é semelhante à lei de Ampère, com uma corrente modificada:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0(I_C + I_d), \quad (12.9)$$

onde C é a curva fronteira de S , I_C é a corrente através da superfície S e a **corrente de deslocamento** I_d é definida da seguinte forma:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (12.10)$$

Exemplo 12.1

Um fio rectilíneo, de comprimento L é percorrido por uma corrente I (Figura 12.1). Calcule o campo magnético produzido, usando a lei de Ampère-Maxwell. Mostre que se obtém o mesmo resultado usando a lei de Biot-Savart.

Os pontos à mesma distância r do fio e equidistantes de um dos extremos são equivalentes e, portanto, as linhas de campo são círculos C perpendiculares ao fio e com centro nele (Figura 12.1). Ao longo do círculo C , de raio r , o integral de linha do campo \mathbf{B} é

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r B. \quad (12.11)$$

A corrente no fio não é estacionária, pois existe acumulação de carga nos dois extremos: carga positiva no extremo em que a corrente aponta e negativa no oposto. Estas cargas produzem um fluxo eléctrico variável através do círculo C . Como as cargas nos extremos aumentam, o fluxo que elas produzem também aumenta, gerando uma corrente de deslocamento. No extremo do lado direito acumula-se carga positiva $q > 0$, e no extremo do lado esquerdo uma carga igual e oposta $-q$. No sentido definido para a circunferência C na Figura 12.1, as duas cargas produzem um fluxo eléctrico negativo através do círculo

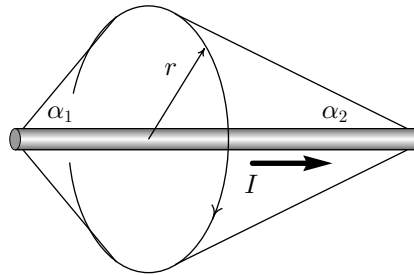


Figura 12.1: Um fio finito com corrente eléctrica.

com fronteira em C; cada fluxo pode ser calculado usando a Equação (2.15):

$$\Phi_1 = -kq\Omega_1, \quad \Phi_2 = -kq\Omega_2,$$

onde Ω_1 e Ω_2 são os ângulos sólidos da curva C a partir dos dois extremos. Para um cone pode mostrar-se que o ângulo sólido Ω depende do ângulo α :

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha); \quad (12.12)$$

portanto, o fluxo eléctrico total através de C é

$$\Phi = 2\pi kq(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - 2).$$

A derivada temporal de q é exactamente a corrente I ; a derivada do fluxo eléctrico, multiplicada por ϵ_0 é igual à corrente de deslocamento:

$$I_d = 2\pi k\epsilon_0 \frac{dq}{dt}(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - 2) = \frac{I}{2}(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - 2).$$

A corrente I_C que atravessa o círculo delimitado por C é a própria corrente I ; a corrente total na lei de Ampère-Maxwell será

$$I_t = I_C + I_d = \frac{I}{2}(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2). \quad (12.13)$$

Substituindo (12.11) e (12.13) na lei de Ampère-Maxwell (12.9), obtemos

$$B = \frac{k_m I}{r}(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2),$$

que é o mesmo resultado obtido no Exemplo 9.1 do Capítulo 9, usando a lei de Biot-Savart. Quando o fio é muito comprido, os ângulos α_1 e α_2 são aproximadamente rectos e a corrente de deslocamento é quase nula.

No cálculo da corrente total, podíamos ter usado, em vez do círculo de raio r , qualquer outra superfície com fronteira em C. Por exemplo, usemos a superfície S indicada na Figura 12.2; essa superfície não corta o fio e, portanto, I_C será igual a zero. Contudo, a corrente de deslocamento compensará a diminuição de I_C , resultando a mesma corrente total. O fluxo Φ_2 da carga positiva continua sendo o mesmo que no caso do círculo:

$$2\pi kq(\cos \alpha_2 - 1);$$

o fluxo da carga $-q$ não é igual ao do círculo, pois a superfície S está agora à esquerda da carga e o versor normal (e_n na Figura 12.2) aponta na direcção da carga; assim, o fluxo Φ_1 é positivo. Para calcular Φ_1 imaginemos uma superfície fechada, formada por S mais o círculo com fronteira em C; através dessa superfície fechada, com $-q$ no seu interior, o fluxo para dentro é igual a $4\pi kq$. O fluxo no círculo é igual e de sinal contrário ao fluxo calculado na primeira parte do problema (o versor normal tem agora o sentido oposto),

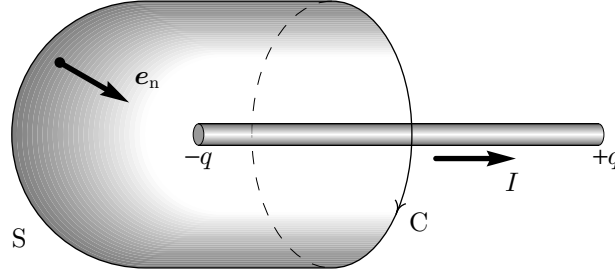


Figura 12.2: Outra forma de definir a superfície S delimitada por C .

de tal forma que

$$\Phi_1 = 4\pi kq + 2\pi kq(\cos \alpha_1 - 1) .$$

O fluxo total é

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2\pi kq(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) ;$$

e multiplicando a sua derivada por ϵ_0 obtemos a corrente de deslocamento:

$$I_d = \frac{I}{2}(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) ,$$

a qual é idêntica à corrente calculada no primeiro caso. A corrente I , neste exemplo, não é estacionária ($\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$), mas a corrente total ($I_d + I_C$) é, já que é proporcional ao rotacional do campo \mathbf{B} ; a corrente total através de qualquer superfície fechada é sempre nula. ■

12.2 Equações de Maxwell

Em capítulos anteriores já foram introduzidas as equações básicas da electrostática e da magnetostática. No caso de campos não estáticos vimos, no Capítulo 10 e na secção anterior, como devem ser modificadas as equações básicas; nesse caso, os campos eléctrico e magnético já não são independentes. Antes de fazermos um sumário das equações básicas, vamos ver que também existe uma relação importante entre a constante de Coulomb e a constante magnética.

A constante $\mu_0\epsilon_0$ que aparece na lei de Ampère-Maxwell, pode ser calculada a partir da constante de Coulomb k e da constante magnética k_m :

$$\mu_0\epsilon_0 = \frac{k_m}{k} = \frac{1}{9 \cdot 10^{16}} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} = \frac{1}{c^2} , \quad (12.14)$$

onde c é a velocidade da luz no vazio ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Esta relação entre as constantes electromagnéticas e a velocidade da luz não é coincidência, mas é devida ao facto da luz ser uma onda electromagnética, como veremos no próximo capítulo.

As quatro equações fundamentais que definem os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} são as equações que definem as suas divergências e rotacionais, nomeadamente a lei de Gauss (4.38), a lei de Faraday (10.36), a Equação (9.21) e a lei de Ampère-Maxwell (12.6), representadas, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} , \quad (12.15a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (12.15b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (12.15c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} . \quad (12.15d)$$

Estas quatro equações, conhecidas como **equações de Maxwell**, definem os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} em qualquer ponto, dentro de qualquer meio, em função da carga volúmica e da densidade de corrente. A densidade de corrente depende do movimento das cargas o qual é determinado a partir das leis da mecânica e considerando que a força electromagnética sobre uma partícula com carga q é a Força de Lorentz,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (12.16)$$

Dentro da matéria o problema seria intratável se considerássemos todas as cargas e correntes existentes dentro dos átomos; de qualquer forma, a escala de distâncias relevante a nível experimental é várias ordens de grandeza maior do que um átomo. Assim, é mais conveniente incluir os campos das cargas e correntes polarizadas nos átomos em dois novos campos \mathbf{D} e \mathbf{H} introduzidos nos Capítulos 5 e 9. Em função destes campos as equações de Maxwell são

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 , \quad (12.17a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \quad (12.17b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (12.17c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} , \quad (12.17d)$$

onde ρ_0 é a carga volúmica «livre», excluindo as cargas polarizadas nos átomos, \mathbf{J}_0 é a densidade de corrente «livre», sem incluir correntes de polarização, \mathbf{D} é o deslocamento eléctrico e \mathbf{H} é o campo magnético.

As Equações (12.17) são as equações de Maxwell a nível macroscópico. Para as resolver é preciso relacionar o deslocamento eléctrico e o campo magnético com o campo eléctrico e a indução magnética. O caso mais simples é o dos meios **isotrópicos** e **lineares**, nos quais os campos \mathbf{D} e \mathbf{H} são paralelos e directamente proporcionais a \mathbf{E} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} , \quad (12.18)$$

onde ϵ é a permissividade eléctrica do meio e μ é a permeabilidade magnética.

As Equações de Maxwell também podem ser escritas na forma integral. Integram-se (12.17a) e (12.17c) sobre uma superfície fechada S e aplica-se de seguida o teorema da divergência; as Equações (12.17b) e (12.17d) integram-se ao longo de uma curva fechada C , e aplica-se de seguida o teorema de Stokes. Obtemos assim o resultado:

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_0 , \quad (12.19a)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \iint_{S_C} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} , \quad (12.19b)$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 , \quad (12.19c)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_0 + \iint_{S_C} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} . \quad (12.19d)$$

Estas equações são válidas para quaisquer superfície fechada S , curva fechada C e superfície S_C delimitada por C . Para uma determinada distribuição de cargas e correntes, as Equações de Maxwell definem completamente o campo electromagnético. Portanto, estas quatro equações são as equações básicas da electrodinâmica.

12.3 Transformação de Galileu do campo electromagnético

A derivada do campo eléctrico na Equação (12.15d) implica que pode existir indução magnética sem existirem correntes, já que a variação temporal do campo eléctrico é também uma fonte de indução magnética. A variação temporal do campo eléctrico pode ser devida a variações nas suas fontes ou simplesmente a um deslocamento global das fontes; no caso de um deslocamento das fontes, no referencial em movimento com as fontes não existe variação temporal do campo eléctrico e, consequentemente, o campo de indução magnética não pode ser igual ao do referencial em movimento.

Já vimos algo semelhante no Capítulo 10 quando estudámos o campo eléctrico em referenciais em movimento. Consideremos uma distribuição de carga $\rho(t)$ fixa num referencial R' que se desloca com velocidade \mathbf{v} . Não existe corrente no referencial R' e assim, de acordo com a Equação (12.15d), o rotacional do campo \mathbf{B}' será igual a $\partial \mathbf{E}' / \partial t$, dividida por

c^2 . A derivada do campo \mathbf{E}' , em movimento, calcula-se aplicando a derivada convectiva (Equação 10.26) ao campo \mathbf{E} :

$$\nabla \times \mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) ; \quad (12.20)$$

usando a lei de Gauss (Equação 12.15a) o termo $\mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{E})$ é igual a $\rho \mathbf{v} / \epsilon_0$. O produto $\rho \mathbf{v}$ é a densidade de corrente \mathbf{J} e a constante $\epsilon_0 c^2$ é igual a $1/\mu_0$:

$$\nabla \times \mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) ; \quad (12.21)$$

usando a lei de Ampère-Maxwell (Equação 12.15d) os dois primeiros termos no lado direito podem ser substituídos pelo rotacional de \mathbf{B} . Assim, obtemos

$$\nabla \times \mathbf{B}' = \nabla \times \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right) ; \quad (12.22)$$

esta equação implica que

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} + \mathbf{C} , \quad (12.23)$$

onde \mathbf{C} é um campo com rotacional igual a zero. A relação anterior é válida para qualquer velocidade \mathbf{v} ; no caso particular $\mathbf{v} = 0$ os dois campos \mathbf{B}' e \mathbf{B} deverão ser iguais o que implica $\mathbf{C} = 0$. Obtemos, assim, o campo \mathbf{B}' em função de \mathbf{E} e \mathbf{B} que, juntamente com a Equação (10.20), constitui a **transformação de Galileu** do campo electromagnético:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (12.24a)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} . \quad (12.24b)$$

Estas equações relacionam os campos (\mathbf{E}' , \mathbf{B}') no referencial em movimento, com os campos no laboratório, em qualquer ponto \mathbf{r} e em qualquer instante t . A distinção entre «laboratório» e «referencial em movimento» é importante, já que as equações de Maxwell são variantes em relação à transformação entre referenciais inerciais. Vejamos o que isto quer dizer; seguindo a mesma convenção usada no Capítulo 10, podemos definir o mesmo sistema de eixos coordenados nos dois referenciais R (laboratório) e R' (referencial em movimento), num instante que designamos por $t = 0$; assim, num instante t qualquer, a origem do referencial R' encontra-se na posição $t\mathbf{v}$ relativa ao referencial R e a relação entre a posição de uma partícula nos dois referenciais é a transformação de Galileu:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v} t . \quad (12.25)$$

A transformação inversa é $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v} t$, que tem a mesma forma da transformação de Galileu já que a velocidade do laboratório R, relativa a R', é $-\mathbf{v}$. Os referenciais R e R' são, assim, tratados de forma idêntica, sendo completamente arbitrária a escolha do referencial a que chamamos laboratório. As derivadas da Equação (12.25) dão a transformação

da velocidade e da aceleração, que também não permitem distinguir entre referenciais inerciais.

No caso da transformação de Galileu do campo electromagnético, a situação já não é simétrica. Para obter a transformação inversa de (12.24), substituímos \mathbf{B} e \mathbf{E} nas Equações (12.24a) e (12.24b) e obtemos

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \left(\mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right) = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}' + \beta(\beta \cdot \mathbf{E}) - \beta^2 \mathbf{E} , \quad (12.26a)$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' + \beta(\beta \cdot \mathbf{B}) - \beta^2 \mathbf{B} , \quad (12.26b)$$

onde usámos a propriedade distributiva do produto vectorial:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} , \quad (12.27)$$

e β é definida por

$$\beta = \frac{\mathbf{v}}{c} . \quad (12.28)$$

Podemos eliminar $(\beta \cdot \mathbf{B})$ e $(\beta \cdot \mathbf{E})$ observando que, multiplicando escalarmente (12.24a) e (12.24b) por β , obtêm-se as seguintes relações:

$$\beta \cdot \mathbf{E}' = \beta \cdot \mathbf{E} , \quad (12.29a)$$

$$\beta \cdot \mathbf{B}' = \beta \cdot \mathbf{B} . \quad (12.29b)$$

Substituindo em (12.26), obtemos as transformações inversas:

$$\mathbf{E} = \gamma^2 \left(\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \right) - \gamma^2 \beta(\beta \cdot \mathbf{E}') , \quad (12.30a)$$

$$\mathbf{B} = \gamma^2 \left(\mathbf{B}' + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' \right) - \gamma^2 \beta(\beta \cdot \mathbf{B}') , \quad (12.30b)$$

em que γ é o **factor de dilatação de Lorentz**, definido pela seguinte expressão:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} . \quad (12.31)$$

A transformação inversa não tem a mesma forma da transformação inicial. Por exemplo, se o campo magnético fosse nulo no referencial R, ao passar para o referencial R' obteríamos um campo \mathbf{E}' igual ao campo \mathbf{E} , enquanto que, se o campo magnético fosse nulo no referencial R', passando para o referencial R observaríamos um campo \mathbf{E} diferente de \mathbf{E}' . Na prática, a diferença é muito pequena já que para as velocidades a que estamos habituados β é várias ordens de grandeza menor que 1, e γ é praticamente 1; nesse caso, a transformação inversa mantém a mesma forma da transformação inicial.

A situação complica-se quando consideramos a própria luz, pois, em princípio, seria fácil descobrir qual é o verdadeiro referencial R onde as equações de Maxwell são exactas: bastaria medir a velocidade de propagação da luz no vazio e compará-la com o valor de c . O meio hipotético no qual se propaga o campo electromagnético, e que constituiria o referencial R , foi chamado éter. Durante as quatro últimas décadas do século XIX foram feitas várias experiências de óptica para descobrir a velocidade da Terra no éter. Algumas experiências foram bem explicadas pela teoria do éter, mas várias modificações tiveram que ser feitas para conseguir explicar novos resultados que continuavam a surgir e que contrariavam todos os esforços para manter a teoria do éter. Assim, por exemplo, chegou a admitir-se que o éter era um meio material no sentido em que podia também ser arrastado parcialmente pelos objectos, em particular pela Terra.

A experiência que parece ter dado o golpe fulminante à teoria do éter foi o interferómetro de Michelson e Morley, que é capaz de medir pequeníssimas diferenças na velocidade de propagação da luz em diferentes direcções. A Figura 12.3 mostra um diagrama simplificado do interferómetro de Michelson e Morley. Um feixe de luz é separado em dois, no espelho semi-transparente A; os dois feixes são reflectidos nos espelhos B e C, chegando ao ponto D onde são observadas franjas de interferência entre os feixes. As franjas mais claras aparecem nos pontos onde a diferença entre os percursos dos dois feixes for um múltiplo inteiro do comprimento de onda, produzindo interferência construtiva.

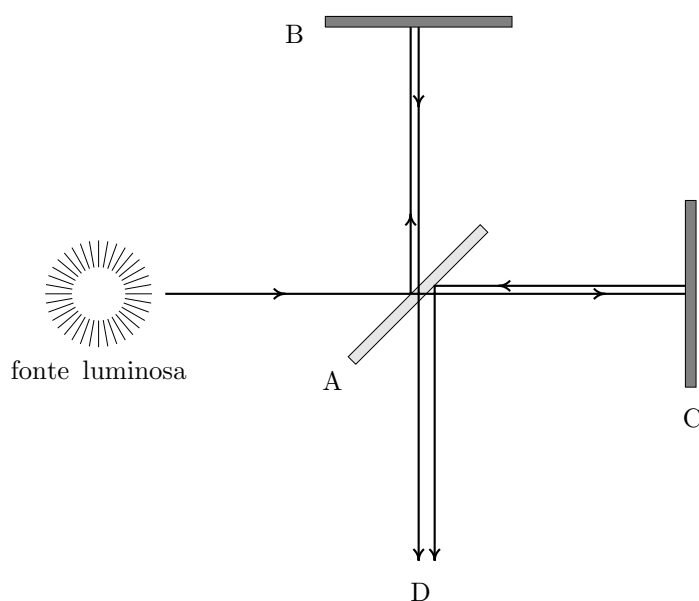


Figura 12.3: Interferómetro de Michelson e Morley.

Deslocando um dos espelhos B ou C do interferómetro, modifica-se o tempo que demora um dos feixes a chegar até D, produzindo um deslocamento das franjas de interferência; se a velocidade da luz variasse com a direcção, rodando o interferómetro conseguia-se também alterar os tempos de chegada dos feixes e deslocar as franjas.

As experiências de Michelson e Morley demonstraram que a velocidade da luz solar não varia com a direcção, uma vez que ao rodar o interferómetro não observaram qualquer alteração da posição das franjas.

Hendrik Lorentz conseguiu explicar a invariância da velocidade da luz, admitindo que os corpos em movimento no éter sofrem uma contracção de $1/\gamma$, na direcção do seu movimento. A consequência dessa contracção seria uma modificação da transformação de Galileu (Equação 12.25), que passaria a ser substituída pela chamada transformação de Lorentz (ver Problema 5), e as transformações dos campos electromagnéticos seriam idênticas para qualquer referencial. No entanto, persiste na teoria de Lorentz um efeito físico (contracção) que depende da existência do referencial absoluto, já que a contracção é na direcção da velocidade «absoluta» e é proporcional ao módulo desta.

Em 1905, Albert Einstein publicou a sua teoria da relatividade que consegue compatibilizar as equações de Maxwell com a inexistência de referenciais absolutos. O postulado fundamental da teoria da relatividade é a invariância da velocidade da luz no vazio; este postulado conduz a resultados surpreendentes, irreconciliáveis com os resultados da mecânica clássica; por exemplo, o facto de o intervalo de tempo entre dois eventos depender do referencial considerado. A teoria da relatividade tem tido um grande sucesso na física contemporânea; no campo do electromagnetismo, as equações de Maxwell e a invariância da carga continuam válidas a nível relativista. A alteração fundamental é ao nível das equações de transformação dos campos; as Equações (12.24) só são válidas a velocidades não muito elevadas, de forma a que β seja muito menor do que 1.

Exemplo 12.2

Calcule o campo de indução magnética produzido por uma partícula pontual com carga q e velocidade \mathbf{v} .

Uma carga em repouso não produz nenhum campo de indução magnética; contudo, quando a carga está em movimento, o campo eléctrico que ela produz acompanha o seu movimento, dando origem a um campo \mathbf{B} induzido. Se R' for o referencial fixo à carga, os campos eléctrico e de indução magnética no referencial R' , num ponto \mathbf{r}' , são os seguintes:

$$\mathbf{E}' = \frac{kq}{r'^3} \mathbf{r}', \quad \mathbf{B}' = 0.$$

Substituindo estes campos na Equação (12.30a), obtemos o campo de indução magnética no referencial R :

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma^2 k_m q}{r'^3} \mathbf{v} \times \mathbf{r}', \quad (12.32)$$

onde usámos a relação $c^2 = k/k_m$ entre as constantes k e k_m . O produto $\mathbf{v} \times \mathbf{r}'$ implica linhas de indução magnética circulares à volta da direcção do movimento da partícula. A baixas velocidades, nas quais a transformação de Galileu é válida, $\gamma \approx 1$ e a equação anterior conduz à lei de Biot-Savart para o campo produzido por um condutor com corrente. ■

Na época de Maxwell não tinha ainda sido descoberto o electrão, nem existia o modelo atómico e por isso não era óbvio, como é hoje em dia, que a corrente eléctrica num fio fosse equivalente a um sistema de cargas pontuais em movimento. Tinham sido observados campos de indução magnética produzidos por correntes, mas ninguém tinha observado campos de indução magnética no caso de objectos carregados em movimento; a carga volúmica do gás de electrões é muito elevada, enquanto que as cargas produzidas em experiências de electrização por fricção são muito baixas, conduzindo a campos muito fracos na Equação (12.32). O físico americano Henry Rowland, em 1878, conseguiu mostrar a existência do campo de indução magnética produzido por cargas em movimento, por meio de uma experiência com um disco carregado, de 21 cm de diâmetro, rodando a 61 rotações por segundo; para detectar o campo, foi usada uma agulha magnética cuja deflexão pode ser medida com precisão por meio de um sistema de espelhos. .

12.4 Energia do campo electromagnético

Já vimos que um campo electrostático tem uma energia potencial associada, interpretada como a energia necessária para juntar as cargas que o produzem. De igual forma, o campo electromagnético não-estático implica uma energia associada. A força sobre um pequeno volume dV com carga volúmica $\rho(\mathbf{r}, t)$, que se desloca com velocidade \mathbf{v} dentro de campos electromagnéticos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, é

$$d\mathbf{F} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV . \quad (12.33)$$

O trabalho realizado por essa força durante um intervalo de tempo dt é igual a $d\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e a potência fornecida é $dP = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$; obtemos assim:

$$dP = d\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \rho(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) dV = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dV . \quad (12.34)$$

O campo de indução magnética não entra explicitamente na equação anterior porque a força magnética não realiza trabalho; no entanto, a potência depende implicitamente da indução magnética, já que o campo eléctrico depende das variações de \mathbf{B} .

A potência total fornecida numa região R é o integral de volume de (12.34) e a densidade de corrente pode ser escrita em função dos campos, por meio da lei de Ampère-Maxwell (12.17d):

$$P = \iiint_R \mathbf{E} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV . \quad (12.35)$$

A seguir, usamos a identidade vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (12.36)$$

e a lei de Faraday (12.17b), para escrever (12.35) na forma

$$P = \iiint_R \left[-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] dV. \quad (12.37)$$

O último termo na equação anterior representa um fluxo através da superfície fronteira da região R, o qual pode ser escrito como um integral de superfície usando o teorema da divergência. Num meio linear, o deslocamento eléctrico e o campo magnético estão relacionados com o campo eléctrico e a indução magnética segundo as Equações (12.18), e o produto escalar de qualquer vector com a sua derivada é igual a 1/2 da derivada do quadrado do seu módulo. Assim, a equação anterior pode ser escrita na seguinte forma:

$$P = \iiint_R \left[-\frac{1}{2\mu} \frac{\partial (B^2)}{\partial t} - \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial (E^2)}{\partial t} \right] dV - \frac{1}{\mu} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{A}, \quad (12.38)$$

$$P = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V u dV - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}, \quad (12.39)$$

onde a **energia volúmica electromagnética** u é definida pela equação

$$u \equiv \frac{1}{2\mu} B^2 + \frac{\epsilon}{2} E^2, \quad (12.40)$$

e o **vector de Poynting** \mathbf{S} é

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (12.41)$$

A potência instantânea P é a energia mecânica fornecida pelo sistema, por unidade de tempo. Essa energia fornecida deverá ser igual à diminuição da energia electromagnética na região R. Assim, na Equação (12.39), o integral de volume de u é a energia electromagnética total dentro da região R, e o integral de \mathbf{S} sobre a superfície fechada S é o fluxo de energia electromagnética.

O fluxo de energia electromagnética que entra no volume V aumenta a energia mecânica ou a energia electromagnética dentro do volume. O vector de Poynting é a densidade de fluxo de energia electromagnética (energia electromagnética transferida, por unidade de área e por unidade de tempo) e a sua direcção e sentido indicam a direcção e sentido em que a energia é transferida.

12.5 Potencial vectorial

No Capítulo 3 vimos como o campo electrostático pode ser representado em função do potencial electrostático. Uma condição necessária para a definição do potencial é o facto do campo electrostático ser conservativo. Em condições não estáticas, o campo eléctrico não é conservativo já que o seu rotacional não é nulo, como podemos ver na lei de Faraday. Contudo, é ainda possível definir potenciais electromagnéticos como veremos de seguida.

Qualquer campo vectorial \mathbf{F} verifica a propriedade

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 . \quad (12.42)$$

Esta propriedade e a terceira equação de Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, sugerem que o campo de indução magnética pode ser escrito na forma

$$\boxed{\mathbf{B} \equiv \nabla \times \mathbf{A}} , \quad (12.43)$$

em que \mathbf{A} é um campo vectorial, chamado **potencial vectorial**. Existe alguma arbitrariedade nesta definição; o rotacional de \mathbf{A} é uma combinação de derivadas das componentes de \mathbf{A} e existem muitas funções cujas derivadas são iguais. Se \mathbf{A} e \mathbf{A}' forem dois campos com o mesmo rotacional \mathbf{B} , isto é,

$$\nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\mathbf{A}' - \mathbf{A}) = 0 , \quad (12.44)$$

a diferença entre \mathbf{A} e \mathbf{A}' é um campo conservativo que pode ser calculado como o gradiente de um campo escalar ϕ :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \phi . \quad (12.45)$$

Algo semelhante acontecia no caso electrostático em que podíamos somar ao potencial uma constante arbitrária, sem modificar o campo eléctrico; o potencial electrostático foi definido de forma única definindo um ponto onde devia ser nulo. No caso do potencial \mathbf{A} , não será suficiente definir um ponto onde o potencial é nulo; será preciso, por exemplo, dar um valor arbitrário à divergência de \mathbf{A} , já que para definir um campo vectorial são precisos o seu rotacional e a sua divergência, e a definição (12.43) só determina o rotacional de \mathbf{A} . Regressaremos a este ponto mais tarde.

Substituindo a Equação (12.43) na segunda equação de Maxwell (Equação 12.15b) temos

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 . \quad (12.46)$$

Como o rotacional do gradiente de qualquer campo escalar é zero, esta última equação implica a existência de um campo escalar (o potencial escalar V) tal que,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V ; \quad (12.47)$$

o que é equivalente a

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}. \quad (12.48)$$

Assim, continua a ser possível definir o potencial escalar V , mas o campo eléctrico depende tanto do potencial escalar como do potencial vectorial. No caso estático, a derivada temporal do potencial vectorial é nula e o campo eléctrico é igual a menos o gradiente do potencial escalar.

Regressando à Equação (12.45), a adição do termo $\nabla\phi$ ao potencial \mathbf{A} não altera o campo de indução magnética, mas, de acordo com a Equação (12.48), o campo eléctrico diminui em $\nabla(\partial\phi/\partial t)$. Para que o campo eléctrico esteja bem definido, é preciso que, ao modificar \mathbf{A} para \mathbf{A}' , o potencial escalar também seja alterado de V para

$$V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (12.49)$$

A segunda e terceira equações de Maxwell são automaticamente garantidas pela definição dos potenciais escalar e vectorial. Em função dos potenciais, a primeira e quarta equações são

$$\nabla \cdot (\nabla V) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (12.50)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \left(\nabla \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right). \quad (12.51)$$

Usando as expressões da divergência do gradiente e da divergência do rotacional (Apêndice A), temos

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (12.52)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (12.53)$$

Para além destas duas equações temos também a liberdade de escolher arbitrariamente a divergência de \mathbf{A} ; uma determinada escolha de $\nabla \cdot \mathbf{A}$ é chamada uma **calibração**. A calibração mais simples é a calibração de Coulomb: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, com a qual podemos transformar a Equação (12.52) na equação de Poisson da electrostática. A Equação (12.53) é mais complicada uma vez que envolve os dois potenciais V e \mathbf{A} . A calibração que permite separar V e \mathbf{A} em duas equações com a mesma estrutura, é a calibração de Lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (12.54)$$

Com esta relação o segundo e o terceiro termos da Equação (12.53) desaparecem e as Equações (12.52) e (12.53) podem ser escritas nas seguintes formas, respectivamente:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (12.55)$$

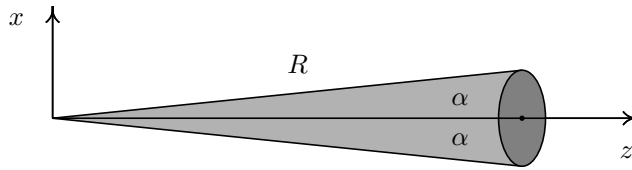
$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (12.56)$$

Esta forma das equações é mais simétrica e tem a grande vantagem de ser uma única equação aplicada a campos diferentes, sendo a resolução matemática semelhante nos dois casos. Nas regiões do espaço onde não existam cargas e correntes, os lados direitos das duas equações são nulos e obtém-se a chamada equação de onda, que será estudada no próximo capítulo.

Problemas

1. Considere as quatro equações de Maxwell na forma diferencial e escreva-as na forma de oito equações escalares em função das componentes cartesianas dos campos \mathbf{E} , \mathbf{B} , da densidade de corrente \mathbf{J} e da carga volúmica ρ .
2. Os lados de um cone formam um ângulo α com o seu eixo. Usando coordenadas esféricas e considerando o eixo polar sobre o eixo do cone e origem no vértice, calcule a área de corte entre o cone e uma esfera de raio R . Mostre que o ângulo sólido do cone é dado pela equação

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \alpha)$$



3. Considere um condensador de placas circulares de raio 1 cm, paralelas e planas, separadas por 1 mm de ar. Num determinado instante, existe uma corrente de 5 A que entra na placa superior e sai da placa inferior.
 - (a) Calcule a variação do campo eléctrico entre as placas, por unidade de tempo.
 - (b) Calcule a corrente de deslocamento entre as placas e mostre que é igual a 5 A.
 - (c) Porque razão as duas correntes são iguais?

4. Use as equações da transformação de Galileu, (12.24) e (12.25), para escrever as equações de Maxwell num sistema em movimento R' . Mostre que a primeira e terceira equações de Maxwell são iguais no sistema em movimento (são invariantes) enquanto que a segunda e a quarta equações variam (as leis da electrodinâmica são variantes em relação à transformação de Galileu).
5. As transformações de Lorentz dos campos eléctrico e de indução magnética são as seguintes:

$$\mathbf{E}' = \gamma \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) , \quad (12.57)$$

$$\mathbf{B}' = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) , \quad (12.58)$$

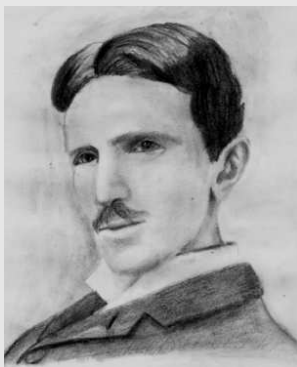
$$(12.59)$$

Demonstre que as transformações inversas, para \mathbf{E} e \mathbf{B} em função de \mathbf{E}' e \mathbf{B}' , são as mesmas, mudando o sinal da velocidade \mathbf{v} . (Sugestão: Admita que as transformações inversas têm a mesma forma, com $-\mathbf{v}$ em vez de \mathbf{v} , e demonstre que o produto das duas transformações é a identidade.)

Conceitos básicos

- Equação de onda
- Ondas planas e esféricas
- Polarização
- Intensidade de uma onda
- Espectro electromagnético

Nicola Tesla



(1856-1943)

Tesla nasceu na Croácia. Foi engenheiro e estudou nas Universidades de Gratz na Áustria e na de Praga na Checoslováquia. Em 1884 emigrou para os Estados Unidos da América onde trabalhou para Edison. Três anos depois criou o seu próprio laboratório onde inventou o motor de indução que funciona com corrente alternada não precisando de escovas. Trabalhou para Westinghouse impulsionando o uso da corrente alternada na rede eléctrica *versus* a utilização de corrente contínua defendida por Edison. O sistema de corrente alternada acabaria por se impor, devido às suas vantagens. Tesla registou inúmeras patentes entre as quais se destacam a bobina de Tesla, uma lâmpada precursora das lâmpadas fluorescentes e uma bomba que funcionava sem aspas. Tinha uma personalidade bastante excêntrica vivendo num mundo de fantasia, razão pela qual não lhe foi dado o devido crédito. Em 1914 processou judicialmente Marconi arguindo ter inventado a rádio antes dele. Ganhou o processo em 1943 quando a Corte Suprema de Justiça deliberou a favor de Tesla retirando a patente a Marconi.

Ondas electromagnéticas e luz

Estudando as equações básicas do electromagnetismo, Maxwell descobriu, em 1865, a possibilidade da existência de campos electromagnéticos, inclusivamente na ausência de cargas e correntes; estas soluções correspondem a ondas electromagnéticas que se propagam no vazio, à velocidade da luz. Maxwell concluiu que a luz deveria também ser uma onda electromagnética. As ondas electromagnéticas só foram produzidas em laboratório, a partir de campos eléctricos e magnéticos, em 1888, por Heinrich Hertz. Hoje em dia, o ar à nossa volta é preenchido por ondas electromagnéticas produzidas «artificialmente»: ondas de rádio, televisão, radar, telemóveis, etc.

Outros investigadores tinham também observado relações entre as propriedades eléctricas, magnéticas e ópticas de alguns materiais; em 1845 Faraday observou que um campo magnético forte modifica o estado de polarização da luz que passa através de um pedaço de vidro. Desde a época de Newton e Huygens que existia uma polémica entre aqueles que, como Huygens, pensavam que a luz era uma onda e aqueles que, como Newton, defendiam a teoria corpuscular da luz, na qual um feixe de luz é um feixe de partículas.

O trabalho de Maxwell e dos seus seguidores, nomeadamente Kirchhoff, resolveria o conflito a favor da teoria ondulatória da luz; mas, por outro lado, a unificação da óptica com o electromagnetismo conduziria, anos mais tarde, ao descobrimento do efeito fotoeléctrico. No início do século XX, o efeito fotoeléctrico constituía um dos fenómenos não explicados de forma satisfatória pela física clássica. A explicação de Einstein do efeito fotoeléctrico, considerando a luz composta por partículas (fótons), foi uma das origens da actual dualidade onda-corpusculo da mecânica quântica. Ironicamente, foi o próprio Hertz

quem descobriu o efeito fotoeléctrico, durante as suas experiências para demonstrar que a luz é uma onda electromagnética.

13.1 Ondas electromagnéticas

Na ausência de cargas e correntes, as equações de Maxwell (12.15) tomam a forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (13.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (13.1d)$$

Obviamente, uma das soluções deste sistema é $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ em qualquer ponto. Mas, como vimos no capítulo anterior, um campo pode ser nulo num referencial em movimento e diferente de zero num outro referencial. Será então possível que existam soluções triviais como $\mathbf{E}' = \mathbf{B}' = 0$ num dado referencial mas que não o sejam no referencial de laboratório? Para estudar essa possibilidade, usemos as equações de transformação dos campos (Equações 12.24), igualando os campos no referencial R' a zero¹:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (13.2)$$

A primeira equação implica que \mathbf{E} é perpendicular tanto a \mathbf{B} como a \mathbf{v} ; a segunda equação mostra que \mathbf{B} também é perpendicular a \mathbf{v} . Os três vectores definem assim um sistema de coordenadas cartesianas onde, por exemplo, o eixo dos x aponta no sentido do campo eléctrico, o eixo dos y tem o sentido do campo de indução magnética e a velocidade do referencial R' é no sentido do eixo dos z (Figura 13.1). Como os três vectores são perpendiculares, as equações anteriores conduzem às seguintes relações entre os módulos:

$$E = vB, \quad c^2 B = vE, \quad (13.3)$$

as quais implicam que a velocidade do referencial R' é a velocidade da luz, e o módulo do campo eléctrico é igual ao módulo do campo de indução magnética multiplicado por c :

$$\boxed{E = cB}. \quad (13.4)$$

Como vimos no capítulo anterior, sempre que existam campos eléctrico e de indução magnética não paralelos, existe uma densidade de fluxo de energia electromagnética igual

¹A velocidade v será, de facto, a velocidade máxima c , o que tira credibilidade à transformação de Galileu dos campos; no entanto, o resultado relativista é o mesmo usando a transformação de Lorentz.

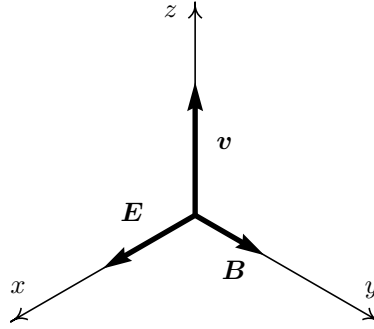


Figura 13.1: O campo eléctrico, a indução magnética e a velocidade de uma onda electromagnética são perpendiculares entre si.

ao vector de Poynting, que neste caso será

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = c \epsilon_0 E^2 \mathbf{e}_k, \quad (13.5)$$

onde \mathbf{e}_k é o versor perpendicular aos campos e na direcção da regra da mão direita de \mathbf{E} para \mathbf{B} . Consequentemente, existem soluções não triviais no vácuo, chamadas **ondas electromagnéticas**, nas quais, em cada ponto, os campos eléctrico e magnético são campos cruzados e transportam energia electromagnética na direcção perpendicular aos campos (direcção de propagação da onda).

Em cada ponto por onde passa uma onda electromagnética que se propaga no vácuo, existe uma energia volúmica dada pela Equação (12.40), com μ e ϵ substituídas por μ_0 e ϵ_0 , respectivamente:

$$u \equiv \frac{\epsilon_0}{2} (c^2 B^2 + E^2) = \epsilon_0 E^2. \quad (13.6)$$

Embora, numa onda electromagnética, o campo \mathbf{B} seja muito menor que o campo \mathbf{E} , como indica a Equação (13.4), a contribuição de cada campo para a energia da onda é a mesma.

13.2 Equação de onda electromagnética

Para encontrar a forma explícita dos campos de uma onda electromagnética, em função do tempo e da posição, é preciso resolver o sistema de Equações (13.1). Os rotacionais da segunda e quarta equações são

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (13.7a)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}. \quad (13.7b)$$

Os lados esquerdos podem ser simplificados aplicando a propriedade do rotacional de um rotacional (Apêndice A) e nos lados direitos podemos usar a segunda e quarta equações de Maxwell para obter

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (13.8a)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (13.8b)$$

Finalmente, de acordo com a primeira e terceira equações de Maxwell, a divergência dos dois campos é nula, o que conduz à chamada **equação de onda** para os campos eléctrico e magnético:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (13.9a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (13.9b)$$

Estas duas equações têm a mesma forma matemática, sendo as suas soluções semelhantes; a equação de onda aparece em vários campos da física e as suas soluções já tinham sido estudadas por d'Alembert e outros matemáticos antes da época de Maxwell. É claro que as Equações (13.9) são só duas das quatro equações iniciais e, portanto, ainda teremos que usar a segunda ou quarta equação de Maxwell para calcular um dos campos em função do outro; assim, só será preciso resolver uma das equações de onda. A equação de onda é linear: uma combinação linear de soluções (funções de onda) é também solução, isto é, a sobreposição de duas ondas dá outra onda que se obtém somando as funções de onda das ondas iniciais. Estudaremos alguns tipos de ondas nas secções seguintes.

13.3 Ondas planas

Como vimos, os campos eléctrico e de indução magnética numa onda electromagnética são perpendiculares entre si e perpendiculares à direcção de propagação da onda. Contudo, a direcção dos campos não tem que ser a mesma em pontos diferentes. No caso de os campos terem sempre a mesma direcção diz-se que é uma **onda plana polarizada**; a direcção de polarização é, por definição, a direcção do campo eléctrico.

Consideremos uma onda plana polarizada na direcção de \mathbf{j} , que se propaga na direcção do eixo dos z , como na Figura 13.1:

$$\mathbf{E} = E \mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = B \mathbf{k}. \quad (13.10)$$

De acordo com a primeira e a terceira equações de Maxwell, a divergência de cada um destes campos tem que ser nula:

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0; \quad (13.11)$$

ou seja E não depende da variável y e B não depende da variável z . Mas, como em qualquer ponto o módulo do campo eléctrico é $E = cB$, nem E nem B podem depender de y ou de z :

$$\mathbf{E} = E(x, t) \mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = B(x, t) \mathbf{k}. \quad (13.12)$$

Substituindo o campo eléctrico na equação de onda (13.9a), os dois lados da equação são vectores na direcção \mathbf{j} e obtemos a equação de onda escalar

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}. \quad (13.13)$$

Para resolver esta equação, vamos rescrevê-la na forma de um operador que actua sobre a função $E(x, t)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = 0. \quad (13.14)$$

O operador pode ser factorizado da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = 0, \quad (13.15)$$

onde a ordem dos dois operadores nos parênteses é indiferente. Para que o resultado anterior seja zero, é preciso que se verifique uma das duas equações:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E = 0. \quad (13.16)$$

Consideremos a primeira equação:

$$c \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (13.17)$$

O lado esquerdo tem exactamente a forma da derivada convectiva (ver Equação 10.23), em que a velocidade, neste caso, é na direcção de \mathbf{i} e o seu módulo é igual a c . Segundo a Equação (10.27), esta derivada convectiva é a variação do campo E no referencial R' que acompanha o movimento da onda, com velocidade c na direcção de \mathbf{i} :

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad \text{ao longo das rectas} \quad x' = x - ct; \quad (13.18)$$

nomeadamente, por cada valor possível de x' temos um ponto correspondente em R' que se desloca na direcção positiva do eixo x , descrevendo uma trajectória rectilínea no domínio

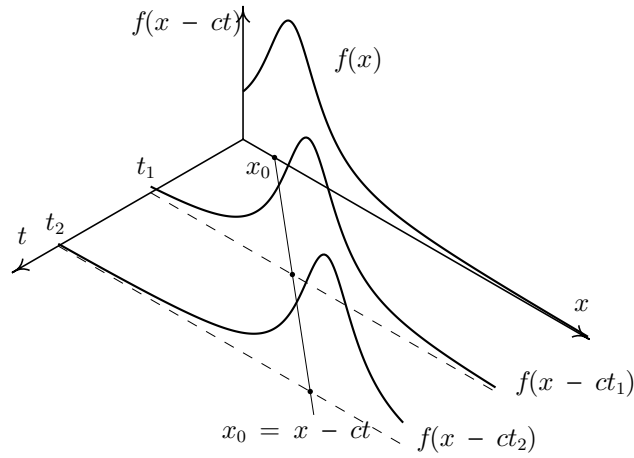


Figura 13.2: Onda com velocidade c , propagando-se na direcção positiva do eixo dos x .

(x, t) da função E (ver Figura 13.2). Ao longo destas rectas **características**, a derivada de E é nula e, portanto, o valor de E é constante; por exemplo, a recta $x_0 = x - ct$ que aparece representada no plano xt na Figura 13.2 é a característica correspondente a $x' = x_0$. O valor constante de E ao longo da recta característica pode ser diferente em características diferentes; se a função $f(x')$ representa os valores de E nas diferentes características, o valor de E em qualquer ponto do seu domínio será

$$E(x, t) = f(x - ct) , \quad (13.19)$$

em que f pode ser qualquer função, correspondendo ao valor de E ao longo do eixo dos x , no instante $t = 0$. Esta solução representa uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo dos x .

A segunda das Equações (13.16) resolve-se de forma idêntica, com a diferença que agora a onda se propaga no sentido negativo do eixo dos x , a qual conduzirá a funções de onda da forma $g(x + ct)$. A forma geral das ondas planas que se propagam na direcção do eixo dos x será uma sobreposição de uma onda propagando-se no sentido positivo (função de $x - ct$) e outra onda propagando-se no sentido negativo (função de $x + ct$)

$$E(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) . \quad (13.20)$$

As duas funções podem ser determinadas a partir de condições fronteira, por exemplo, na origem o campo em função do tempo é $f(-ct) + g(ct)$; no instante $t = 0$, o campo E em função de x é igual a $f(x) + g(x)$.

A Figura 13.3 mostra um exemplo de campos eléctrico e magnético de uma onda plana, num dado instante de tempo t . Para $t + \Delta t$, o gráfico seria semelhante, mas deslocado uma distância $c\Delta t$ no sentido positivo do eixo dos x .

Temos considerado apenas o caso de polarização linear, em que os campos \mathbf{E} têm

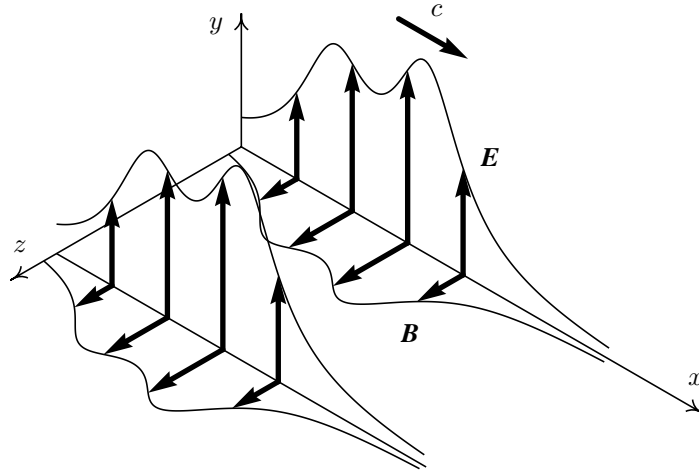


Figura 13.3: Campos eléctrico e de indução magnética de uma onda plana que se propaga no sentido positivo do eixo dos x .

sempre a mesma direcção, mas, de facto, existem também ondas planas com campos que rodam (polarização circular ou elíptica) como veremos na próxima secção.

13.4 Ondas harmónicas

Um caso importante das ondas electromagnéticas são as ondas periódicas que se repetem durante um intervalo de tempo. Como vimos no Capítulo 11, qualquer função periódica pode ser representada como uma série de funções seno e co-seno com diferentes frequências. Quando a função de onda $f(x \pm ct)$ é uma função seno ou co-seno, a respectiva onda é chamada **onda harmónica** ou **monocromática**. Uma dada função sinusoidal, com período λ , é dada pela função

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}u + \varphi_0\right). \quad (13.21)$$

Se u for, por exemplo, igual a $(y - ct)$, a função f corresponderá a uma onda plana propagando-se na direcção de \mathbf{j} . Se a onda estiver polarizada na direcção de \mathbf{i} , o campo eléctrico será

$$\mathbf{E} = E_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(y - ct) + \varphi_0\right] \mathbf{i}. \quad (13.22)$$

A constante E_0 é a **amplitude** do campo eléctrico, o ângulo $\varphi = [2\pi(y - ct)/\lambda + \varphi_0]$ é chamado **fase** e a constante φ_0 é chamada **fase inicial**. Quando dois pontos têm fases iguais, em qualquer instante, diz-se que estão em fase. O **comprimento de onda**, λ , é igual à distância entre dois pontos consecutivos em fase, na direcção de propagação da onda; por exemplo, os pontos y_1 e y_2 da Figura 13.4.

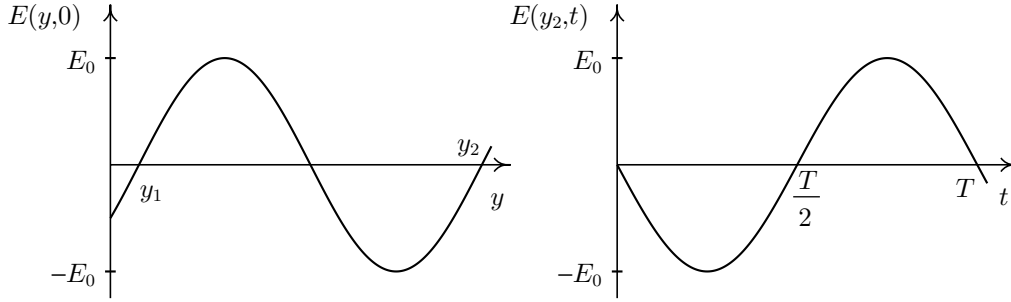


Figura 13.4: Campo eléctrico de uma onda plana harmónica, polarizada segundo \mathbf{i} e direcção de propagação \mathbf{j} . O gráfico do lado direito representa o campo eléctrico observado no ponto y_2 , em função do tempo.

O campo E observado num ponto fixo oscila sinusoidalmente. O **período** T é o tempo que demora uma oscilação completa do campo. Durante cada oscilação, a onda desloca-se um comprimento de onda λ , com velocidade constante c , e consequentemente,

$$T = \frac{\lambda}{c}. \quad (13.23)$$

A **frequência** da onda é o inverso do período, $f = 1/T$, e portanto, igual ao número total de oscilações do campo por unidade de tempo, que é igual ao número de comprimentos de onda por unidade de tempo. A **frequência angular** ω é o aumento, em radianos, da fase num ponto qualquer, por unidade de tempo; temos então que

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}. \quad (13.24)$$

De maneira análoga, como o comprimento de onda λ é a distância entre dois pontos consecutivos com a mesma fase, o inverso de λ , chamado **número de onda**, representa o número de pontos que se encontram em fase, por unidade de comprimento. Este número, multiplicado por 2π , determina o aumento da fase por unidade de comprimento e é chamado **número de onda angular**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (13.25)$$

Em função da frequência angular e do número de onda angular, a onda harmónica é

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(ky - \omega t + \varphi_0) \mathbf{i}. \quad (13.26)$$

Como o período e o comprimento de onda estão relacionados pela Equação (13.23), a frequência angular e o número de onda angular devem verificar a igualdade:

$$c = \frac{\omega}{k}. \quad (13.27)$$

Podem existir ondas harmónicas planas propagando-se em qualquer outra direcção diferente do eixo dos y . É costume definir o **vector de propagação** \mathbf{k} com módulo igual ao número de onda angular k e na direcção de propagação da onda; na Equação (13.26) y é a projecção da posição \mathbf{r} de um ponto, na direcção de propagação \mathbf{j} ; assim, ky deverá ser substituído por k multiplicado pela projecção de \mathbf{r} na direcção de propagação ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$) e a forma mais geral da onda harmónica plana é

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0) \mathbf{e}_p, \quad (13.28)$$

onde o **versor de polarização** \mathbf{e}_p define a direcção do campo eléctrico, que pode ser qualquer direcção perpendicular ao vector de propagação \mathbf{k} .

A sobreposição de duas ondas harmónicas planas origina uma outra onda electro-magnética plana, já que a equação de onda é linear (Problema 6). A sobreposição de ondas harmónicas planas permite «construir» ondas planas mais complicadas, que não são necessariamente harmónicas. E qualquer onda periódica pode ser obtida como sobreposição de ondas harmónicas, por meio da série de Fourier.

Exemplo 13.1

Uma onda plana polarizada circularmente é uma onda na qual os módulos dos campos são constantes, mas rodam no plano perpendicular à direcção de propagação. Demonstre que a sobreposição das seguintes ondas harmónicas

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \cos(kx - \omega t) \mathbf{j} \quad \mathbf{E}_2 = E_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{k}$$

é uma onda polarizada circularmente.

O campo vectorial total é

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = E_0 [\cos(kx - \omega t) \mathbf{j} + \sin(kx - \omega t) \mathbf{k}]$$

e o seu módulo é

$$|\mathbf{E}| = E_0 [\cos^2(kx - \omega t) + \sin^2(kx - \omega t)]^{1/2} = E_0.$$

O ângulo que o campo total faz com o eixo dos y é igual a

$$\theta = \arctg\left(\frac{E_z}{E_y}\right) = \arctg[\operatorname{tg}(kx - \omega t)] = kx - \omega t.$$

Em qualquer ponto com x constante, o módulo do campo eléctrico é constante e igual

a E_0 , e roda sobre o plano yz com velocidade angular

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\omega .$$

Para interpretar o sinal negativo, temos que ter em conta que o sentido positivo das rotações no plano yz é definido a partir de \hat{i} , pela regra da mão direita; assim, numa rotação positiva o vector \mathbf{E} desloca-se de \hat{j} para \hat{k} ; o sinal negativo, neste caso, indica que num ponto fixo o campo roda no sentido de \hat{k} para \hat{j} como se mostra na Figura 13.5. Colocando o dedo polegar da mão direita na direcção de propagação (\hat{i}), o campo em cada ponto roda na direcção negativa (oposta aos outros dedos) e por isso diz-se que a onda tem **helicidade** negativa. No entanto, se nos deslocarmos na direcção positiva de x (direcção de propagação) num determinado instante, a onda aparece como uma hélice que roda na direcção da mão direita (positiva); assim, em óptica diz-se que este tipo de onda tem **polarização circular direita**.

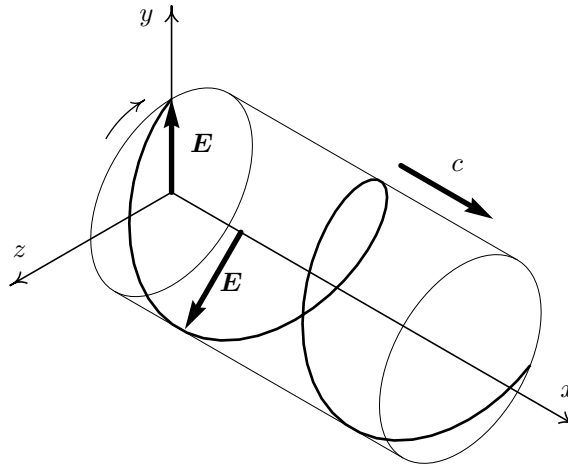


Figura 13.5: Onda electromagnética plana com polarização circular direita.

A sobreposição de duas ondas planas da mesma frequência e amplitude, com diferença de fase de $\pm\pi/2$ e polarizadas em direcções perpendiculares, produz ondas polarizadas circularmente. Se a amplitude das duas ondas sobrepostas fosse diferente, a onda resultante seria uma onda com polarização elíptica, em que os vectores \mathbf{E} e \mathbf{B} descreveriam uma elipse, no plano perpendicular à propagação da onda. ■

Exemplo 13.2*O campo eléctrico*

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \mathbf{j} , \quad (13.29)$$

corresponde a uma onda estacionária, na qual os pontos onde o campo é máximo, mínimo ou nulo permanecem fixos. Demonstre que a onda estacionária é solução da equação de onda e pode ser obtida a partir da sobreposição de duas ondas harmónicas planas, com a mesma frequência, mas propagando-se em direcções opostas.

As derivadas parciais da componente y do campo são

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= E_0 k \cos(kx) \cos(\omega t) , \\ \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= -E_0 k^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = -k^2 E , \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -E_0 \omega \sin(kx) \sin(\omega t) , \\ \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -E_0 \omega^2 \sin(kx) \cos(\omega t) = -\omega^2 E , \end{aligned}$$

logo, se ω e k verificarem a condição

$$\frac{\omega}{k} = c ,$$

o campo será solução da equação de onda plana:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} .$$

Para decompor a onda estacionária em ondas planas, usamos a identidade trigonométrica

$$\sin(kx) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)] ,$$

a qual conduz a

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{2} \sin(kx + \omega t) \mathbf{j} + \frac{E_0}{2} \sin(kx - \omega t) \mathbf{j} .$$

Os dois termos descrevem ondas harmónicas, polarizadas na direcção de \mathbf{j} , com a mesma frequência $\omega/2\pi$, que se propagam em direcções opostas. O campo de indução magnética é a sobreposição dos campos associados a cada onda:

$$\mathbf{B} = -\frac{E_0}{2c} \sin(kx + \omega t) \mathbf{k} + \frac{E_0}{2c} \sin(kx - \omega t) \mathbf{k} . \quad \blacksquare$$

13.5 Ondas esféricas

As ondas planas constituem simplesmente uma aproximação válida dentro de uma região pequena quando comparada com a distância à fonte, já que uma onda electromagnética real costuma propagar-se em várias direcções, e não numa direcção única. Se a fonte que produz a onda poder ser considerada uma fonte pontual, a propagação da onda será nas direcções radiais com origem na fonte; assim, o vector de polarização estará sobre o plano dos versores \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_ϕ . Consideremos uma onda que em cada ponto está polarizada na direcção de \mathbf{e}_ϕ ; a forma geral do campo eléctrico será

$$\mathbf{E} = E(r, \theta, \phi, t) \mathbf{e}_\phi . \quad (13.30)$$

Se a fonte for isotrópica (isto é, emitir igualmente em todas as direcções) existirá simetria esférica e a função de onda dependerá apenas da distância à origem r e do tempo t . Usando a expressão do Laplaciano para vectores com simetria esférica (Apêndice A), obtemos²

$$\nabla^2 E(r, t) \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [rE(r, t)] \mathbf{e}_\phi , \quad (13.31)$$

e a equação de onda (Equação 13.9a) implica que

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rE)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} . \quad (13.32)$$

Multiplicando os dois lados da equação por r , e como as variáveis r e t são independentes, obtemos

$$\frac{\partial^2 (rE)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rE)}{\partial t^2} . \quad (13.33)$$

Esta é a equação da onda plana, para a função rE . Portanto, rE deverá ser uma onda plana $f(r, t)$ que se propaga na direcção radial:

$$E(r, t) = \frac{1}{r} f(r \pm ct) ; \quad (13.34)$$

o sinal positivo corresponde a ondas que se propagam na direcção da origem. Como considerámos ondas emitidas por uma fonte pontual na origem, devemos apenas manter o sinal negativo. A função $f(r - ct)/r$ representa uma onda que se propaga na direcção radial, afastando-se da origem, mas cuja forma não permanece constante, diminuindo à medida que a onda se afasta da origem (Figura 13.6).

Os pontos que se encontram em fase formam esferas com centro na origem, chamadas **frentes de onda**. O campo de indução magnética calcula-se a partir da lei de Faraday; como o campo eléctrico é na direcção de \mathbf{e}_ϕ , o seu rotacional, em coordenadas esféricas, é

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rE)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} f'(r - ct) \mathbf{e}_\theta . \quad (13.35)$$

²O versor \mathbf{e}_ϕ depende das coordenadas θ e ϕ , mas é independente de r .

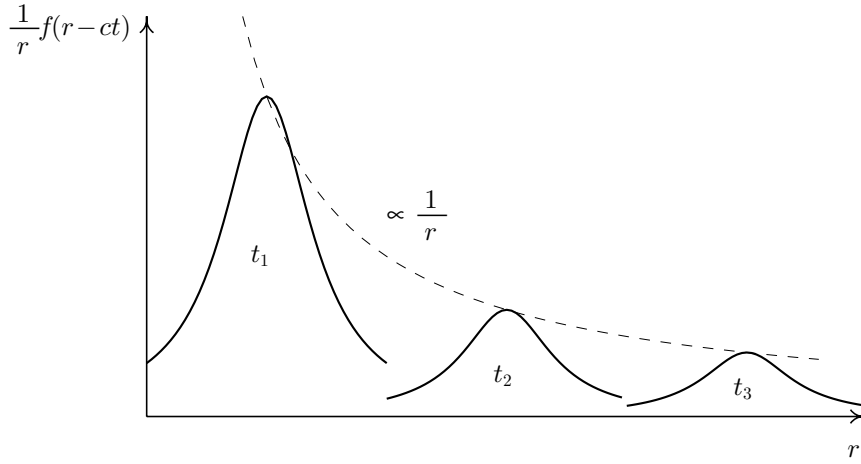


Figura 13.6: Uma função de onda esférica em diferentes instantes t .

Integrando em ordem a t , e multiplicando por -1 , obtemos o campo de indução magnética

$$\mathbf{B} = \frac{1}{cr} f(r - ct) \mathbf{e}_\theta . \quad (13.36)$$

Os campos eléctrico e de indução magnética são perpendiculares e o seu produto vectorial tem a direcção radial; o módulo do campo \mathbf{B} é c vezes menor do que o módulo de \mathbf{E} . A onda também podia estar polarizada na direcção do versor \mathbf{e}_θ ou em qualquer direcção perpendicular à direcção radial.

No caso de f ser uma função sinusoidal, teremos uma onda esférica harmónica; a forma geral do campo eléctrico será

$$\boxed{E(r, t) = \frac{E_0}{r} \sin(kr - \omega t + \varphi_0)} . \quad (13.37)$$

A amplitude da onda diminui à medida que r aumenta.

13.6 Intensidade das ondas electromagnéticas

A densidade de fluxo energético de uma onda, ϕ , é igual à energia transportada pela onda através de uma superfície normal à sua direcção de propagação, por unidade de área e por unidade de tempo. Por exemplo, a densidade de fluxo energético da luz solar que entra na atmosfera terrestre é aproximadamente $1,4 \text{ kW/m}^2$.

No caso das ondas electromagnéticas, o fluxo de energia, por unidade de área, é igual ao módulo do vector Poynting; a partir da Equação (13.5), obtemos

$$\phi = c\epsilon_0 E^2 . \quad (13.38)$$

O resultado da Equação 13.38 é um valor instantâneo, já que o campo eléctrico é variável; no caso de uma onda periódica, o valor médio de E^2 é

$$\overline{E^2} = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 dt ; \quad (13.39)$$

se a onda for harmónica e plana, o campo eléctrico é dado pela Equação (13.28), e usando a identidade trigonométrica

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} , \quad (13.40)$$

obtemos o resultado

$$\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos 2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)] dt. \quad (13.41)$$

A função co-seno tem um período igual a $2T$, de maneira que o seu integral entre 0 e T é nulo:

$$\overline{E^2} = \frac{E_0^2}{2} ; \quad (13.42)$$

assim, a densidade média de fluxo energético é directamente proporcional ao quadrado da amplitude do campo eléctrico:

$$\overline{\phi} = \frac{\epsilon_0}{2} c E_0^2 . \quad (13.43)$$

O fluxo energético³ Φ_e é a energia total emitida, por unidade de tempo. Uma fonte pontual, isotrópica, emite uma onda esférica que se propaga em todas as direcções; se a densidade de fluxo energético for ϕ , a uma distância r , o fluxo energético será

$$\Phi_e = 4\pi r^2 \overline{\phi} . \quad (13.44)$$

Se conseguíssemos diminuir o ângulo sólido (Ω) da onda emitida por uma fonte pontual, a sua intensidade aumentaria já que a radiação estaria mais concentrada; por exemplo, se em vez de emitir em todas as direcções ($\Omega = 4\pi$) a fonte emitisse apenas em metade do espaço ($\Omega = 2\pi$), a sua intensidade aumentaria para o dobro. Consequentemente, define-se a **intensidade** de uma onda como o fluxo energético, por unidade de ângulo sólido:

$$I = \frac{\Phi_e}{\Omega} . \quad (13.45)$$

³Também chamado potência radiante

No caso da fonte pontual isotrópica, o ângulo sólido é 4π e o fluxo energético é dado pela Equação (13.44); obtemos, assim, a intensidade:

$$I = r^2 \phi. \quad (13.46)$$

A densidade média de fluxo energético calcula-se de forma análoga à utilizada no caso da onda plana, mas substituindo E_0 por E_0/r^2 na Equação (13.41), o que conduz a

$$\phi = \frac{\epsilon_0}{2r^2} c E_0^2, \quad (13.47)$$

e a intensidade é directamente proporcional ao quadrado da amplitude do campo eléctrico:

$$I = \frac{\epsilon_0}{2} c E_0^2. \quad (13.48)$$

13.7 Espectro electromagnético

Numa onda harmónica o comprimento de onda, λ , e a frequência, f , não podem variar independentemente, mas estão relacionadas pela condição $\lambda f = c$; por outro lado a amplitude dos campos eléctrico e magnético também não pode variar arbitrariamente pois deve verificar $E_0/B_0 = c$. Dada a frequência ou o comprimento de onda, é possível classificar a onda dentro do **espectro electromagnético** e determinar as suas propriedades. A amplitude dos campos determina a intensidade mas não a classificação no espectro.

Em princípio, podem existir ondas electromagnéticas com qualquer valor de λ entre 0 e ∞ . A Figura 13.7 mostra o espectro de ondas conhecidas, com os valores de λ e de f característicos de cada classe.

Os principais mecanismos de produção de ondas electromagnéticas são a aceleração de cargas num condutor (antenas), a radiação de **corpo negro** emitida por sistemas termodinâmicos à temperatura maior que o zero absoluto e as transições entre níveis de energia em sistemas quânticos como átomos ou núcleos. À medida que a frequência aumenta e o comprimento de onda diminui, os mecanismos de emissão envolvem sistemas mais pequenos. De igual forma, a interacção de uma onda electromagnética é maior com objectos de tamanhos da ordem de grandeza de λ .

Desta forma, as ondas de radar não conseguem penetrar objectos muito pequenos, enquanto que a luz ultravioleta consegue. A radiação x, caracterizada por comprimentos de onda da ordem de 10^{-10} metros, atravessa facilmente as células. A radiação gama com λ ainda menor, pode mesmo penetrar nos cromossomas e alterar o conteúdo genético sendo, portanto, bastante perigosa.

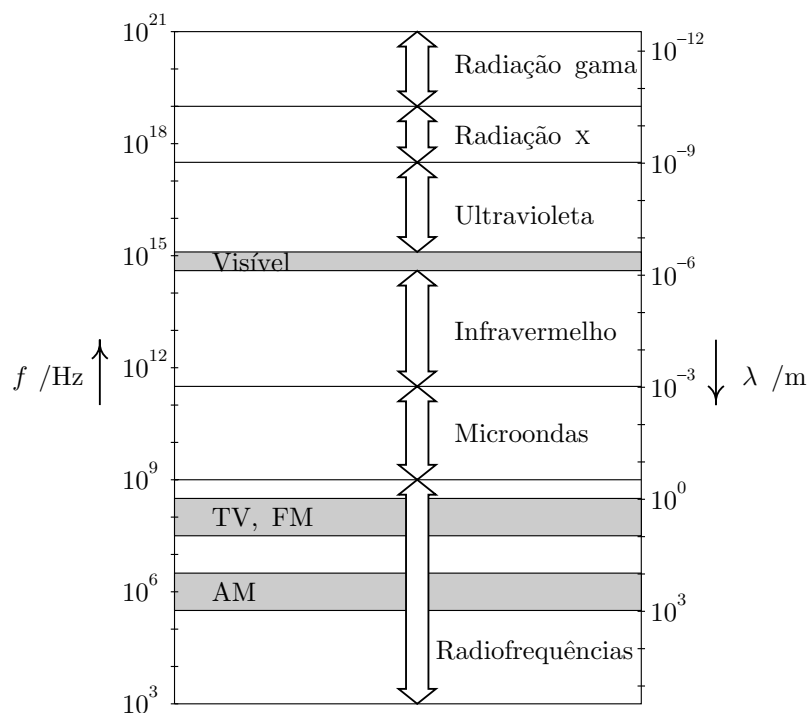


Figura 13.7: Espectro electromagnético

Usualmente, as ondas electromagnéticas não se apresentam com uma frequência f definida, como no caso das ondas harmónicas, mas são uma sobreposição de ondas harmónicas com uma distribuição de frequências particular. Por exemplo, a luz solar tem um espectro contínuo de frequências na banda visível, que pode ser separado por meio de um prisma (Figura 13.8). A permitividade eléctrica é tanto maior quanto maiores forem as frequências, o que implica uma menor velocidade da luz, quanto maior for a frequência; o índice de refacção, que é inversamente proporcional à velocidade no meio, será maior para a luz com maior frequência (violeta) e menor para a luz com menor frequência (vermelha).

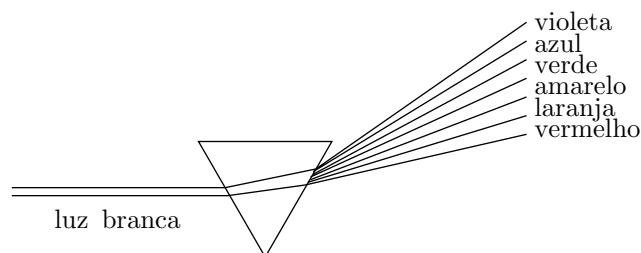


Figura 13.8: Decomposição espectral da luz solar por um prisma.

A decomposição espectral permite também descobrir linhas de absorção e de emissão que podem ser usadas para determinar a composição química da fonte. A luz produzida por um gás em combustão ou por um gás pelo qual passa uma descarga eléctrica, é formada apenas por algumas frequências isoladas; no prisma, a decomposição por frequências produz uma sequência de linhas que se aproximam de um limite (séries espectrais). Cada elemento químico tem um espectro próprio. O espectro de absorção é produzido quando uma luz policromática atravessa o gás; o espectro apresenta linhas escuras correspondentes às frequências absorvidas no gás. A espectroscopia permite determinar a composição química de fontes distantes, como por exemplo as estrelas.

13.8 Ondas electromagnéticas em meios materiais

Nas secções anteriores temos considerado unicamente ondas no vazio. Nos meios materiais, as equações de Maxwell (Equações 12.15) podem ser substituídas pelas equações para meios macroscópicos (Equações 12.17). Se o meio for isotrópico e linear e não existirem cargas nem correntes livres, o sistema de equações obtido será semelhante ao sistema (13.1), com ϵ_0 e μ_0 substituídas pela permissividade eléctrica ϵ e a permeabilidade magnética μ do material. A velocidade das ondas electromagnéticas no meio já não será a velocidade da luz no vazio ($c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$), mas será igual a

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (13.49)$$

Nos condutores, os electrões de condução atenuam rapidamente qualquer campo eléctrico externo, e por isso não permitem a propagação das ondas electromagnéticas, sendo opacos à luz. A permeabilidade da maior parte dos materiais, excepto os ferromagnéticos, é muito próxima a μ_0 , e a velocidade das ondas electromagnéticas é, aproximadamente,

$$v \approx \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu_0}} = c \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{K}}, \quad (13.50)$$

onde K é a constante dieléctrica, a qual verifica a Equação (5.45). Contudo, a constante dieléctrica tem uma forte dependência com a frequência; mesmo a frequências muito baixas o valor obtido de K é diferente do valor medido estaticamente num condensador. A dependência de K com a frequência determina diferentes velocidades para diferentes componentes harmónicas de uma onda, dando origem a **dispersão**.

No vazio, já demonstramos que as ondas electromagnéticas são transversais, nomeadamente os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} , e o vector de propagação são perpendiculares. Para investigar a possível existência de outras soluções das equações de Maxwell nos meios materiais, podemos usar o método da transformada de Fourier, que usámos no Capítulo 11 para resolver as equações dos circuitos de corrente alternada. A transformada de Fourier de uma função de t são os coeficientes que permitem representar a função como uma sobreposição de funções harmónicas. Em três dimensões, a generalização das funções harmónicas são

as ondas planas dadas pela Equação (13.28); assim, a generalização da transformada de Fourier (Equação 11.8), para campos vectoriais é

$$\tilde{\mathbf{F}}(\omega, \mathbf{k}) = \int \iiint \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dV dt, \quad (13.51)$$

onde o integral no tempo é calculado num intervalo de um período $T = 2\pi/\omega$, e o volume de integração é um paralelepípedo com arestas iguais aos comprimentos de onda $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$, definidos como $2\pi/k_x$, $2\pi/k_y$ e $2\pi/k_z$, respectivamente. A transformada da divergência de \mathbf{F} será dada por

$$\int \iiint \nabla \cdot \mathbf{F} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} dV dt. \quad (13.52)$$

Usando a propriedade distributiva da divergência,

$$\nabla \cdot (f \mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (13.53)$$

e como o gradiente da função exponencial é ela própria multiplicada por $i\mathbf{k}$, obtemos o resultado

$$\int \iiint \left[\nabla \cdot (e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{F}) - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{F} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] dV dt. \quad (13.54)$$

O teorema da divergência permite escrever o primeiro integral de volume como o fluxo de \mathbf{F} vezes a função exponencial, através do paralelepípedo com arestas $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$, integral esse que será nulo, já que tanto \mathbf{F} como a exponencial são funções periódicas. O segundo integral pode ser escrito como o produto da constante $-i\mathbf{k}$ pela transformada de Fourier do campo \mathbf{F} . Portanto, a transformada da divergência é dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \longrightarrow -i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{F}}. \quad (13.55)$$

De forma análoga, pode mostrar-se que as transformadas do rotacional e da derivada em ordem ao tempo, de \mathbf{F} , são as seguintes:

$$\nabla \times \mathbf{F} \longrightarrow -i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{F}}, \quad (13.56)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \longrightarrow i\omega \tilde{\mathbf{F}}. \quad (13.57)$$

Podemos, assim, calcular as transformadas de Fourier de cada uma das equações de Maxwell (Equações 12.17), quando não existem cargas nem correntes livres:

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{D}} = 0, \quad (13.58a)$$

$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}} = \omega \tilde{\mathbf{B}}, \quad (13.58b)$$

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad (13.58c)$$

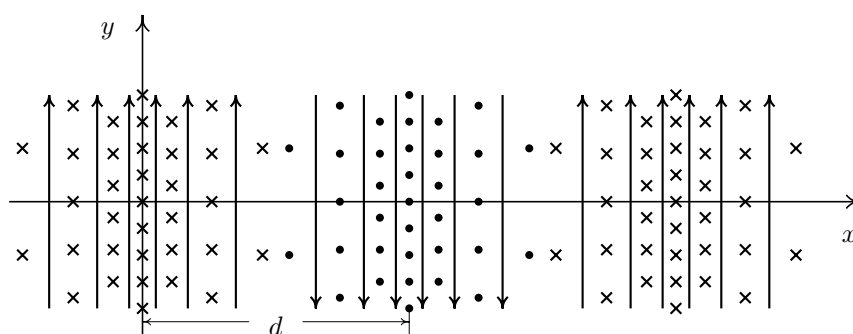
$$\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{H}} = -\omega \tilde{\mathbf{D}}. \quad (13.58d)$$

A primeira e terceira equações implicam que o deslocamento eléctrico \mathbf{D} e a indução magnética \mathbf{B} são perpendiculares ao vector de propagação (a direcção de cada componente harmónica do campo é a mesma direcção da correspondente transformada de Fourier). No vazio, o deslocamento eléctrico é igual ao campo eléctrico \mathbf{E} e, assim, as ondas electromagnéticas são sempre **ondas transversais**: os campos apontam na direcção perpendicular à propagação da onda. No entanto, nos meios materiais a segunda e quarta Equações (13.58) admitem soluções em que \mathbf{E} ou \mathbf{H} oscilam na direcção do vector de propagação \mathbf{k} . Por exemplo, \mathbf{E} pode ser paralelo a \mathbf{k} , se \mathbf{B} for igual a zero; nesse caso, o vector de Poynting é nulo, e trata-se de ondas que não transportam energia. A este tipo de ondas chamam-se ondas electromagnéticas longitudinais ou **estáticas**.

Problemas

1. Uma onda harmónica plana, polarizada, com $\lambda = 3$ m, propaga-se na direcção do vector \mathbf{j} . Escreva as equações dos campos eléctrico e magnético, considerando que:
 - (a) O vector de polarização é $\mathbf{e}_p = (\mathbf{i} + \mathbf{k})/\sqrt{2}$.
 - (b) $\mathbf{e}_p = (\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{k})/2$.
 - (c) A onda tem polarização circular negativa.
2. Considere uma onda electromagnética plana, polarizada linearmente na direcção do eixo dos x , que se propaga na direcção positiva do eixo dos y . A sua frequência é de 12 MHz e a sua amplitude é $E_0 = 0,008$ V/m.
 - (a) Calcule o período e o comprimento de onda.
 - (b) Escreva as funções de onda dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} .
3. Uma antena de televisão tem, aproximadamente, 1,5 metros de comprimento. Faça uma estimativa da frequência das ondas de televisão.
4. A radiação electromagnética do Sol chega à atmosfera da Terra com uma densidade de fluxo energético de $1,4 \cdot 10^3$ W/m². Qual será a densidade de fluxo energético da radiação solar, na superfície de Mercúrio? Qual é o fluxo energético emitido pelo Sol? (A distância da Terra ao Sol é, aproximadamente, 149,6 Gm, e do Mercúrio ao Sol, aproximadamente, 57,9 Gm.)
5. Uma fonte pontual, isotrópica e monocromática radia um fluxo energético de 100 W.
 - (a) Calcule a densidade de fluxo energético à distância de 2 m.
 - (b) Calcule as amplitudes dos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} nessa região.

6. Demonstre que a equação de onda é linear, isto é, que qualquer combinação linear de duas soluções é também solução.
7. A figura seguinte representa o campo electromagnético de uma onda plana de 420 MHz, no instante $t = 0$. As linhas de campo verticais representam o campo eléctrico e as linhas perpendiculares à folha de papel são as linhas de indução magnética. Calcule a distância d e escreva o vector de indução magnética em função do tempo e da coordenada x .



8. Uma estação de rádio transmite na frequência de 90,8 MHz.
- Calcule o comprimento de onda correspondente a esta frequência.
 - Faça uma estimativa do comprimento da antena que permita melhorar a recepção da estação.
9. As órbitas de Marte e da Terra estão, aproximadamente, sobre o mesmo plano. A distância média de Marte ao Sol é de 229 Gm e a distância média da Terra ao Sol é de 150 Gm. Suponha que está em comunicação com um astronauta em órbita à volta de Marte. Se o tempo médio de resposta do astronauta às suas mensagens for t_1 , quando a Terra está entre o Sol e Marte e t_2 quando o Sol está entre a Terra e Marte, calcule $\Delta t = t_2 - t_1$.
10. Uma onda electromagnética plana propaga-se no sentido negativo do eixo dos y . Num dado instante $t = 0$ o campo eléctrico é $\mathbf{E} = E_0 \sin(2,25 \cdot 10^7 y) \mathbf{k}$, onde y é medido em metros.
- Calcule o comprimento de onda.
 - Calcule a frequência.
 - Diga qual é o vector de polarização.

11. Uma lâmina metálica muito extensa encontra-se sobre o plano xy . A lâmina é ligada a uma fonte variável que produz um campo eléctrico uniforme no plano xy , mas variável no tempo segundo a equação:

$$\mathbf{E} = E_0 \sin(\omega t) \mathbf{i} ,$$

onde E_0 e ω são constantes. O campo eléctrico na lâmina origina uma onda electromagnética plana. Escreva as funções que representam os campos eléctrico e de indução magnética da dita onda, em função do tempo e da posição.

12. O campo eléctrico de uma onda estacionária no vazio é dado pela função:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(ky) \cos(\omega t) \mathbf{i}$$

- (a) Calcule o campo de indução magnética.
- (b) Encontre o vector de Poynting em qualquer ponto e em qualquer instante.
- (c) Calcule a densidade média de fluxo energético, ϕ , em qualquer ponto.

Respostas aos problemas

Capítulo 1

1. (a) $6 \mu\text{C}$, e $4 \mu\text{C}$. (b) $12 \mu\text{C}$, e $-2\mu\text{C}$.
2. A força electrostática é $2,7 \cdot 10^{12}$ vezes maior que o peso.
3. A terceira carga é $-0,343 q$, e encontra-se entre as outras duas cargas, a uma distância $0,414 d$ da carga q .
5. Com origem na carga $q_1 = -5 \text{ nC}$, eixo dos x na direcção de $q_2 = 9 \text{ nC}$, e eixo dos y na direcção de $q_3 = 7 \text{ nC}$, as forças e o campo são
$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= (1,35 \mathbf{i} + 3,15 \mathbf{j}) \text{ mN}, & \mathbf{F}_2 &= (-0,12 \mathbf{i} - 0,71 \mathbf{j}) \text{ mN}, \\ \mathbf{F}_3 &= (-1,23 \mathbf{i} - 2,44 \mathbf{j}) \text{ mN}, & \mathbf{E}_P &= (-0,545 \mathbf{i} - 0,135 \mathbf{j}) \text{ N}/\mu\text{C}. \end{aligned}$$
6. $230,4 \text{ N}$.
7. (a) Negativo. (d) $66 \mu\text{N}$.
(b) $q_1/q_2 = 16/9$.
8. $\mathbf{E} = -\frac{\pi k \lambda_0}{a} \mathbf{j}$.
9. $E = 2\pi k \sigma$, perpendicular ao plano.
10. 257 pC . $\mathbf{E} = \frac{72\pi x}{5} \left(\frac{x^2 + 32}{\sqrt{x^2 + 64}} - |x| \right) \mathbf{i}$ (x em cm e E em N/C).
12. $\mathbf{E} = \frac{k\lambda}{r} [(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \mathbf{i} + (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \mathbf{j}]$
O campo do fio infinito é: $\mathbf{E} = \frac{2k\lambda}{r} \mathbf{j}$.

Capítulo 2

1. $8 \text{ N} \cdot \text{cm}^2/\text{C}$, no sentido negativo do eixo z .
2. $7,99 \text{ N} \cdot \text{cm}^2/\text{C}$.
3. $(3/16)(5e^{-4} + 7)$, no sentido desde o triângulo até à origem.
4. $62,97^\circ$.
5. 154 nC .
6. (a) Aumenta, devido à repulsão electrostática entre as cargas na superfície.
(b) O campo induz cargas positivas e negativas na bola; as forças sobre essas cargas deformam a bola, tornando-a num elipsóide com o eixo maior na direcção do campo.
7. $1,44 \cdot 10^{21} \text{ N/C}$ e $7,21 \cdot 10^{20} \text{ N/C}$.
8. $(-56,96 \mathbf{i} + 1,66 \mathbf{j}) \text{ N/C}$.
9.
$$E(r) = \begin{cases} 1,88 \cdot 10^9 \frac{1 - e^{-3r}}{r^2}, & r < 0,1 \\ \frac{4,89 \cdot 10^8}{r^2}, & r \geq 0,1 \end{cases} \quad (r \text{ em m, } E \text{ em N/C}).$$
10. (b) $E(r) = -\frac{ke}{r^2} + ke\left(\frac{2}{a_0^2} + \frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-2r/a_0}$.
(c) $E(r) = ke\left(\frac{2}{a_0^2} + \frac{2}{a_0 r} + \frac{1}{r^2}\right)e^{-2r/a_0}$.
11. $1,146 \text{ pC}$.
12. (a) $E_r = \begin{cases} kq/r^2, & r < a \\ 0, & a < r < b \\ kq/r^2, & r > b. \end{cases}$
(c) $\sigma = q/4\pi b^2$, uniforme; a carga superficial aumenta na região mais perto da carga pontual, e diminui na região oposta.
13. (a) $q/\pi a^4$.
(b) $E_r = \begin{cases} kqr^2/a^4, & r < a \\ kq/r^2, & r > a. \end{cases}$

$$14. \quad E(r) = \begin{cases} 0, & r < a \\ 2\pi k\rho_0(r^2 - a^2)/r, & a \leq r \leq b \\ 2\pi k\rho_0(b^2 - a^2)/r, & r > b \end{cases} \quad (\text{na direcção radial}).$$

Capítulo 3

1. $8,80 \cdot 10^6 \text{ m/s.}$

2. (a) $E = 6,4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$, $v = 37,5 \text{ Mm/s.}$ (b) 5 kV/m.

4. (a) $4,2 \text{ cm}$ e $2,8 \text{ cm.}$ (b) $-2858,56 \text{ V.}$

5. $154,3 \text{ V.}$

6. $E_x = \frac{2ax^2 - ay^2 + bx^3 + bxy^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, \quad E_y = \frac{y(3ax + bx^2 + by^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}},$

E_z não pode ser calculado com a informação dada.

7. $V = -Ar^2/2.$

8. (a) 12 nC. (c) -3 nC.

(b) -48 nC.

9. (a) $187,5 \text{ V/m}$, para baixo. (c) para cima.

(b) negativa. (d) $-0,169 \text{ nC.}$

10. (a) $V = \frac{kq}{\sqrt{(x - a/2)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{kq}{\sqrt{(x + a/2)^2 + y^2 + z^2}}.$

(b) $\mathbf{E} = \frac{kq[(x - a/2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]}{[(x - a/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{kq[(x + a/2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]}{[(x + a/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$

11. (a) $V = \frac{kq}{\sqrt{r^2 + a^2/4 - ar \cos \theta}} - \frac{kq}{\sqrt{r^2 + a^2/4 + ar \cos \theta}}.$

12. $V = 2\pi k\sigma(\sqrt{r^2 + R^2} - r), \quad \mathbf{E} = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right)\mathbf{e}_r.$

13. (b) Arbitrando $V = 0$ no infinito, $V = Cx e^{-x-y-z}.$

(c) $q = \epsilon_0 C(7e^{-6} - 15e^{-4} + 9e^{-2} - 1) = -0,174 \text{ fC.}$

$$14. \quad \mathbf{E} = \left(\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2} \right) \mathbf{e}_r + \frac{a \sin \theta}{r^3 \sin \phi} \mathbf{e}_\theta.$$

$$15. \quad \nabla V = \frac{\partial V}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\sin \theta}{R^2} \mathbf{e}_R - \frac{\cos \theta}{R^2} \mathbf{e}_\theta + \frac{2z \sin \theta}{R} \mathbf{k} \right) \exp(-z^2).$$

$$16. \quad \frac{\partial E_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \phi E_\theta), \quad \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial r}(r E_\phi), \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(r E_\phi) = \frac{\partial}{\partial \phi}(r \sin \phi E_\theta).$$

Capítulo 4

$$4. \quad (a) \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} < 0. \quad (c) \quad \nabla \times \mathbf{F} \neq 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} > 0.$$

$$(b) \quad \nabla \times \mathbf{F} \neq 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (d) \quad \nabla \times \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0.$$

$$6. \quad Q = -\frac{9\epsilon_0}{2} \left(3a + \frac{7}{8}b \right).$$

$$7. \quad (a) \quad \rho = \epsilon_0 b x (18 a y z - 5 x^3 - 30 x y^2),$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} [9 a^2 b^2 z^6 (x^2 + y^2) + 25 b^2 x^4 y^2 (x^4 + 4 x^2 y^2) + 3 a b^2 x^2 y z^3 (27 a y z - 10 x^3 - 20 x y^2)].$$

$$(c) \quad \rho = \epsilon_0 [(a^2 + 4b^2 z^2) \cos(ax + bz^2) + 2b \sin(ax + bz^2)],$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{4} [a^2 + 4b^2 z^2 - (a^2 + 4b^2 z^2) \cos(2ax + 2bz^2)].$$

$$8. \quad (a) \quad E(x) = \begin{cases} 2V_0/a, & x \leq 0 \\ 2V_0 |x - a| / a^2, & 0 \leq x \leq 2a \\ 2V_0/a, & x \geq 2a. \end{cases}$$

$$(b) \quad \rho(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2V_0 \epsilon_0 / a^2, & 0 \leq x \leq 2a \\ 0, & x \geq 2a. \end{cases}$$

$$9. \quad q = \epsilon_0 C (7e^{-6} - 15e^{-4} + 9e^{-2} - 1) = -0,174 \text{ fC}.$$

Capítulo 5

1. 4,25 nC.
2. 5,55 pF.
3. (a) $Q^2 x / 2\epsilon_0 A$. (c) $Q^2 / 2\epsilon_0 A$, atractiva.
(b) $Q^2 dx / 2\epsilon_0 A$.
4. $(kQ^2/L) \ln(b/a)$.
5. (a) 2,6 nC/cm². (c) 30 kV.
(b) 1/3 m.
6. $3,12 \cdot 10^{-7}$ J
7. Sem dieléctrico, 15 kV; com dieléctrico 200 kV.
8. Maior.
9. (a) $3,76 \cdot 10^{-11}$ J. (c) 261 dias.
(b) $2,66 \cdot 10^{16}$.

Capítulo 6

1. (a) 8873\$87. (c) 15\$55.
(b) $1,8 \cdot 10^9$ J.
2. 1,2 Ω .
3. 24,8°C.
4. 0,459 μA .
5. 2812°C.
6. 54,9 g de ácido sulfúrico e 169,7 g de sulfato de chumbo.
7. (a) $5,4 \cdot 10^5$ C. (b) 72 %.

8. (a) 3,12 V. (c) 18,7 W.
 (b) $J = 4,59 \text{ MA/m}^2$; $E = 7,8 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$.

9. $\rho = \rho_0 e^{-\sigma t / \epsilon_0}$, $\epsilon_0 / \sigma \sim 10^{-19} \text{ s}$.

10. 6,6 m.

Capítulo 7

4. r .

5. (a) $I_{DC} = I_{BA} = 3 \text{ A}$, $I_{CF} = I_{EB} = 2 \text{ A}$, $I_{CB} = 1 \text{ A}$.
 (b) 18 V, -26 V e 12 V. (c) todas fornecem potência.

6. (a) 0,03 Ω . (c) 43,2 kJ.
 (b) 240 W, 95%.

7. (a) 12 pF. (c) 6,75 pF.
 (b) 21,6 pF.

8. (a) $R_{AB} = R_1(R_2 + R_3)/R_t$, $R_{AC} = R_3(R_1 + R_2)/R_t$, $R_{BC} = R_2(R_1 + R_3)/R_t$,
 onde $R_t \equiv R_1 + R_2 + R_3$.
 (b) $R_A = R_1 R_3 / R_t$, $R_B = R_1 R_2 / R_t$, $R_C = R_2 R_3 / R_t$.

9. (a) 1,5 Ω . (b) 9 V.

10. (a) $I_2 = -0,25 \text{ mA}$, $I_3 = 2,75 \text{ mA}$. (b) 66,25 pC, positiva em F e negativa em E.

11. (a) 0,67 s. (b) 15 nC, 12 nC.
 (c) 12,8 nC, 12,1 pJ, $I_{60} = 19,1 \text{ A}$, $I_{70} = 10,7 \text{ A}$, $I_{90} = 8,4 \text{ A}$.

12. (a) Ligando uma resistência de 9990 Ω em série com o galvanómetro.
 (b) Ligando uma resistência de 1,11 Ω em paralelo.

13. 400 k Ω .

14. (a) Maior. (d) Igual.
 (b) Maior. (e) Depende de t .
 (c) Depende de t .

Capítulo 8

1. $80,5 \mathbf{k}$ (mN).
2. $\mathbf{B}_1 = B_1 \mathbf{i}$, $\mathbf{B}_2 = B_{2x} \mathbf{i} + E/v \mathbf{k}$, onde B_1 , B_{2x} e E podem ser quaisquer funções, não necessariamente constantes. As condições obtidas são válidas para qualquer tipo de partículas.
3. 1,98 m.
4. $3,47 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}$.
5. (a) $2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. (c) $1,82 \cdot 10^{-18} \text{ J}$.
(b) $3,34 \cdot 10^{-15} \text{ J}$.
6. (a) 63 cm. (b) 2,6 cm.
7. Se os portadores de carga tivessem carga positiva, a diferença de potencial de Hall seria no sentido oposto ao indicado na figura.
9. $\mathbf{T} = CI(r_1 - r_2) \sin \phi \mathbf{i}$.

Capítulo 9

1. $\pi k_m I \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$, para fora da folha.
2. $2,5 \mu\text{T} \cdot \text{m}$, $2,5 \mu\text{T} \cdot \text{m}$ e 0.
3. (a) $\mathbf{F}_A/l_A = \mathbf{F}_C/l_C = (0,6 \mathbf{i} + 0,3464 \mathbf{j})$ (mN/m).
(b) $\mathbf{F}_A/l_A = 0,8\sqrt{3} \cos(\omega t - \pi/3) [\cos(\omega t - \pi/6) \mathbf{i} - \sin(\omega t - \pi/6) \mathbf{j}]$ (mN/m).
4. $(9,39 \cdot 10^{-8} \mathbf{i} + 3,22 \cdot 10^{-6} \mathbf{j})$ (T).
5. (a) $-\sqrt{3}/2 \mathbf{j} + 1/2 \mathbf{k}$. (c) $-1/2 \mathbf{j} - \sqrt{3}/2 \mathbf{k}$.
(b) \mathbf{i} . (d) 2,5 mm.
6. 10,25 N.
7. $(-59,4 \mathbf{i} - 102,9 \mathbf{j} + 2388,1 \mathbf{k})$ (nT).

8. $(50,3 \text{ k}) \mu\text{T}$.
9. $k_m I$.
10. $\begin{cases} B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > a \\ B = \frac{\mu_c I r^2}{2\pi a^3}, & r < a \end{cases}$ onde μ_c é a permeabilidade magnética do cobre.
11. $\frac{8\sqrt{2}k_m I}{d}$.

Capítulo 10

1. (a) Anti-horário. (b) Horário.
3. (b) 1,26 mC. (c) $\bar{I} = 12,6 \text{ mA}$, $\bar{\mathcal{E}} = 0,628 \text{ V}$.
4. 0,33 V.
5. (a) Aparece uma diferença de potencial $V_A - V_B < 0$ que fornece a força centrípeta sobre os electrões, mas é demasiado pequena para poder ser medida experimentalmente.
(b) Os electrões de condução caem de facto; mas depois de uma pequeníssima queda, aparece uma diferença de potencial que equilibra o seu peso; esta diferença de potencial é demasiado pequena para poder ter quaisquer efeitos significativos.
6. $v = \frac{mgR}{B^2 d^2}$.
7. 3,5 mV.
8. $M = 2k_m l_1 \ln\left(\frac{d + l_2}{d}\right)$.
9. (a) Círculos em sentido horário.
(b) 4,00 mN/C.
(c) 2,011 mV.
(d) 0.

Capítulo 11

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos(\omega_n t) &= \frac{1}{2}(e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t}), & c_n &= a_n - i b_n, \\ \sin(\omega_n t) &= \frac{i}{2}(e^{-i\omega_n t} - e^{i\omega_n t}), & c_{-n} &= a_n + i b_n. \end{aligned}$$

$$2. \quad \tilde{V}(\omega) = \begin{cases} 6, & \omega = 0 \\ \frac{3}{\omega^2} [e^{i2\omega}(1 - i\omega) - 1], & \omega \neq 0. \end{cases}$$

$$3. \quad |Z| = 17 \, \Omega, \quad \varphi = -11,46^\circ, \quad Z = (16,66 - i 3,38) \, \Omega.$$

$$5. \quad (a) (2,039 + i 25,50) \, \Omega. \quad (c) (9,566 - i 52,72) \, \Omega. \\ (b) (20,44 - i 75,87) \, \Omega.$$

$$6. \quad I = 94,9 \sin(316,2t) \, \text{mA}, \quad Q = 300 - 300 \cos(316,2t) \, \mu\text{C} \quad (t \text{ em segundos}).$$

$$7. \quad (a) \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

$$(b) \frac{V_s}{V_e} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

O circuito (a) filtra as tensões com frequências altas e o circuito (b) filtra as tensões com frequências baixas.

$$8. \quad (a) |Z| = 587 \, \Omega, \quad \varphi = 75,2^\circ. \\ (b) 26,9 \, \text{Hz}. \\ (c) 22,6 \, \text{W}.$$

$$10. \quad 181 \, \text{kHz}. \text{ Não é a frequência de ressonância, pois a parte real da impedância, neste caso, depende também da frequência, e o valor mínimo da impedância não é } R.$$

$$11. \quad (a) 2,25 \, \text{mA}. \\ (b) I(t) = 2,25(1 - e^{-16t}) \, \text{mA} \quad (t \text{ em } \mu\text{s}). \\ (c) 433 \, \text{ns}.$$

$$12. \quad (a) I = 0; \, dI/dt = 25 \, \text{A/s}. \\ (b) I = 2,26 \, \text{A}; \, dI/dt = 20,5 \, \text{A/s}. \\ (c) I = 7,9 \, \text{A}; \, dI/dt = 9,2 \, \text{A/s}. \\ (d) I = 10,8 \, \text{A}; \, dI/dt = 3,38 \, \text{A/s}.$$

Capítulo 12

3. (a) $1,8 \cdot 10^{15} \text{ N}/(\text{C} \cdot \text{s})$. (b) $I_d = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = 5 \text{ A}$.

Capítulo 13

1. (a) e (b) $\mathbf{E} = E_0 \sin[2\pi \cdot 10^8(t - y/c)] \mathbf{e}_z$.
 (c) $\mathbf{E} = E_0 \{\sin[2\pi \cdot 10^8(t - y/c + \varphi_0)] \mathbf{i} + \cos[2\pi \cdot 10^8(t - y/c + \varphi_0)] \mathbf{k}\}$.
 Nos 3 casos $B_y = 0$, $B_x = E_z/c$ e $B_z = -E_x/c$.
2. (a) $T = 83,33 \text{ ns}$, $\lambda = 25 \text{ m}$.
 (b) $\mathbf{E} = 0,008 \cos(0,2513 y - 75,40 \cdot 10^6 t + \varphi_0) \mathbf{i}$,
 $\mathbf{B} = -2,67 \cdot 10^{-11} \cos(0,2513 y - 75,40 \cdot 10^6 t + \varphi_0) \mathbf{k}$ (unidades SI).
3. Ordem de grandeza de 10^8 Hz .
4. Em Mercúrio: $9,346 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$. Potência: $3,94 \cdot 10^{26} \text{ W}$.
5. (a) $1,99 \text{ W/m}^2$. (b) $E_0 = 38,7 \text{ N/C}$, $B_0 = 1,29 \text{ mG}$.
7. $d = 35,7 \text{ cm}$, $\mathbf{B} = -B_0 \cos[2\pi(4,2 \cdot 10^8 t + 1,40 x)] \mathbf{k}$ (t em segundos e x em metros).
8. (a) $3,3 \text{ m}$ (b) Ordem de grandeza de 1 m .
9. 2000 s ($33,3 \text{ minutos}$).
10. (a) 279 nm . (c) O versor \mathbf{k} .
 (b) $1,074 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$.
11. $\mathbf{E} = \begin{cases} E_0 \sin(\omega t - kz) \mathbf{i}, & z > 0 \\ E_0 \sin(\omega t + kz) \mathbf{i}, & z < 0 \end{cases}$ $\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{E_0}{c} \sin(\omega t - kz) \mathbf{j}, & z > 0 \\ -\frac{E_0}{c} \sin(\omega t + kz) \mathbf{j}, & z < 0 \end{cases}$.
12. (a) $\mathbf{B} = -\frac{E_0}{c} \sin(ky) \sin(\omega t) \mathbf{k}$.
 (b) $\mathbf{S} = \frac{c\epsilon_0 E_0^2}{4} \sin(2ky) \sin(2\omega t) \mathbf{j}$.
 (c) 0.

Análise vectorial

A.1 Vectores

Um vector livre \mathbf{A} tem um módulo ou norma A e uma direcção definida por um versor (vector com módulo unitário) \mathbf{e}_A :

$$\mathbf{A} = A \mathbf{e}_A . \quad (\text{A.1})$$

O produto escalar entre dois vectores é um número, igual ao produto da projecção de um dos vectores sobre o outro, pelo módulo do segundo vector:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta , \quad (\text{A.2})$$

onde θ é o ângulo formado pelos vectores. O produto vectorial entre dois vectores é um vector perpendicular a eles, na direcção da regra da mão direita (página 155), e com módulo igual a

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta . \quad (\text{A.3})$$

Em coordenadas cartesianas, o vector tem três componentes A_x , A_y e A_z , que são as projecções do vector sobre os três versores \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} que definem, respectivamente, os três eixos x , y e z :

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} . \quad (\text{A.4})$$

A soma (+), o produto escalar (\cdot) e o produto vectorial (\times) entre dois vectores \mathbf{A} e

\mathbf{B} calculam-se da seguinte forma, em função das componentes cartesianas:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k}. \quad (\text{A.7})$$

O produto vectorial pode também ser escrito na forma de um determinante:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

O módulo de um vector \mathbf{A} representa-se por A ou $|\mathbf{A}|$ e o seu valor, em função das suas componentes cartesianas, é dado por

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (\text{A.9})$$

Um resultado bastante útil é o obtido para o módulo da diferença entre dois vectores

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = A^2 + B^2 - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (\text{A.10})$$

ou, em função do ângulo θ entre os dois vectores (teorema do co-seno),

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta. \quad (\text{A.11})$$

Os produtos escalar e vectorial verificam as seguintes propriedades distributivas:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}, \quad (\text{A.13})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}). \quad (\text{A.14})$$

A.2 Curvas, superfícies e volumes

Uma curva C é o conjunto dos pontos do espaço cuja posição $\mathbf{r}(u)$ é uma função contínua de um parâmetro real u . O elemento diferencial de percurso, sobre a curva, é

$$ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| du. \quad (\text{A.15})$$

Uma superfície S é formada pelos pontos do espaço cuja posição $\mathbf{r}(u, v)$ é uma função contínua de dois parâmetros reais u e v , tal que $\partial\mathbf{r}/\partial u$ e $\partial\mathbf{r}/\partial v$ sejam vectores linearmente independentes. O vector diferencial de área $d\mathbf{A}$ correspondente à superfície S é

$$d\mathbf{A} = \left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv . \quad (\text{A.16})$$

O módulo desse vector é o elemento diferencial de superfície e a sua direcção é a direcção normal à superfície.

Quando \mathbf{r} é função de três parâmetros u_1 , u_2 e u_3 , e as suas três derivadas parciais são vectores linearmente independentes, obtemos um espaço a três dimensões. Do ponto de vista geométrico o espaço é único; contudo, existem diferentes representações paramétricas (sistemas de coordenadas). O vector de posição, \mathbf{r} , depende de três coordenadas u_1 , u_2 e u_3 . Os **factores de escala** são definidos como o módulo de cada uma das três derivadas parciais de \mathbf{r} :

$$h_i = \left| \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_i} \right| \quad (i = 1, 2, 3) . \quad (\text{A.17})$$

O deslocamento infinitesimal é igual a

$$d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 , \quad (\text{A.18})$$

onde os versores \mathbf{e}_i apontam na direcção na qual a coordenada u_i aumenta. Se o sistema de coordenadas for ortogonal (as três derivadas parciais de \mathbf{r} são perpendiculares), o elemento diferencial de volume é igual a

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 . \quad (\text{A.19})$$

No caso das coordenadas cartesianas, os factores de escala são todos iguais a 1 e $dV = dx dy dz$.

A.3 Coordenadas cilíndricas e esféricas

Em coordenadas cilíndricas, as coordenadas de um ponto na posição \mathbf{r} são a sua projecção R sobre o plano xy , o ângulo θ que esta projecção faz com o eixo dos x e a coordenada z (Figura A.1). Os três versores correspondentes são \mathbf{e}_R , \mathbf{e}_θ e \mathbf{k} , respectivamente. Os versores \mathbf{e}_R e \mathbf{e}_θ dependem do ângulo θ . O vector posição em coordenadas cilíndricas é

$$\mathbf{r} = R \mathbf{e}_R + z \mathbf{k} , \quad (\text{A.20})$$

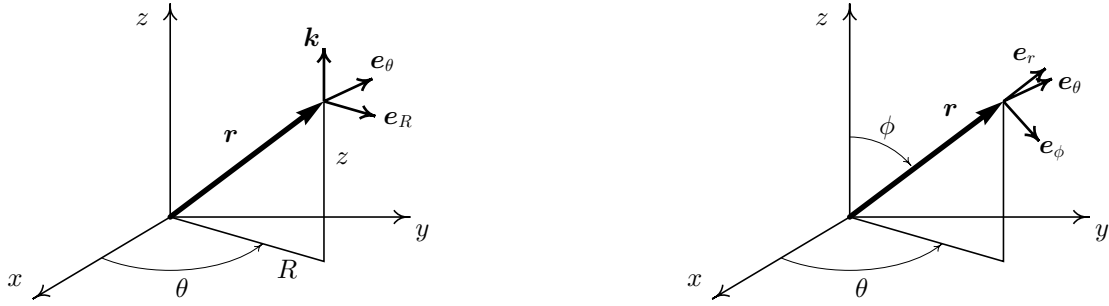


Figura A.1: Coordenadas cilíndricas (esquerda) e esféricas (direita).

que corresponde ao deslocamento diferencial¹

$$d\mathbf{r} = dR \mathbf{e}_R + R d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{k} . \quad (\text{A.21})$$

Assim, os factores de escala são

$$h_R = h_z = 1 \quad h_\theta = R . \quad (\text{A.22})$$

As coordenadas esféricas de um ponto na posição \mathbf{r} são o módulo do vector \mathbf{r} , o ângulo ϕ que este vector faz com o eixo dos z e o ângulo θ que a projecção de \mathbf{r} sobre o plano xy faz com o eixo dos x (Figura A.1). Os versores correspondentes são \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ e \mathbf{e}_ϕ , respectivamente. O versor \mathbf{e}_θ depende de θ , e os versores \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_ϕ dependem de θ e de ϕ . O vector posição em coordenadas esféricas é

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r , \quad (\text{A.23})$$

e o deslocamento diferencial é igual a

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\phi \mathbf{e}_\phi + r \sin \phi d\theta \mathbf{e}_\theta . \quad (\text{A.24})$$

Os correspondentes factores de escala são

$$h_r = 1 \quad h_\phi = r \quad h_\theta = r \sin \phi . \quad (\text{A.25})$$

Um caso especial são as coordenadas polares, que são um caso particular das coordenadas cilíndricas com $z = 0$ ou um caso particular das coordenadas esféricas com $\phi = \pi/2$.

¹A derivada parcial $\partial \mathbf{e}_R / \partial \theta$ é igual ao versor \mathbf{e}_θ .

A.4 Operadores vectoriais

Um campo escalar $f(\mathbf{r})$ é uma função que a cada ponto com posição \mathbf{r} associa um valor escalar f . Um campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ associa um valor vectorial \mathbf{F} a cada ponto do espaço. O gradiente, em coordenadas generalizadas, calcula-se usando a definição dada no Capítulo 3 [Equação (3.24)], e o resultado é

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \mathbf{e}_3 . \quad (\text{A.26})$$

Usando as definições do Capítulo 4, a divergência e o rotacional têm a seguinte forma geral:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 F_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 F_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 F_3)}{\partial u_3} \right] , \quad (\text{A.27})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} . \quad (\text{A.28})$$

O gradiente, a divergência e o rotacional são operadores lineares. Algumas propriedades importantes dos campos escalares f e g e dos campos vectoriais \mathbf{F} e \mathbf{G} são as seguintes:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) , \quad (\text{A.29})$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{F} , \quad (\text{A.30})$$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = \nabla f \times \mathbf{F} + f \nabla \times \mathbf{F} , \quad (\text{A.31})$$

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + 2(\nabla f \cdot \nabla g) + g\nabla^2 f , \quad (\text{A.32})$$

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f , \quad (\text{A.33})$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0} , \quad (\text{A.34})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0 , \quad (\text{A.35})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} , \quad (\text{A.36})$$

$$\nabla \cdot (f\nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g , \quad (\text{A.37})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) , \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} , \quad (\text{A.39})$$

$$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0 . \quad (\text{A.40})$$

A derivada de um campo escalar f , na direcção de um versor \mathbf{e} , e igual à projecção do gradiente sobre o versor \mathbf{e}

$$\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\mathbf{e}} = \nabla f \cdot \mathbf{e} . \quad (\text{A.41})$$

Um campo escalar $f(r)$ com simetria esférica, só depende da variável r e o seu gradiente e Laplaciano são, respectivamente:

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \mathbf{e}_r , \quad (\text{A.42})$$

$$\nabla^2 f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rf) . \quad (\text{A.43})$$

Apêndice B

Unidades SI e constantes

O sistema de unidades usado oficialmente em Portugal e na maior parte do mundo é o **Sistema Internacional** de unidades (SI). As unidades SI de base são as seguintes:

Tabela B.1: Unidades SI de base

Grandeza	Nome	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Intensidade da corrente eléctrica	ampere	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de matéria	mole	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Outras unidades suplementares são o radiano (rad) usado para medir ângulos planos e o esterradiano (sr) usado para medir ângulos sólidos. A temperatura também pode ser medida em graus Celsius ($^{\circ}\text{C}$; $273,15\text{ K} = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$).

Na Tabela B.2 apresentam-se algumas unidades derivadas; cada uma delas pode ser expressa também em termos de unidades SI de base. Os prefixos (Tabela B.3) que precedem às unidades representam múltiplos ou submúltiplos da unidade.

Na Tabela B.4 encontram-se os valores correntemente aceites para algumas constantes

Tabela B.2: Unidades SI derivadas

Grandeza	Nome	Símbolo	Equivalente
Frequência	hertz	Hz	1/s
Força	newton	N	kg·m/s ²
Pressão e tensão	pascal	Pa	kg/(m·s ²)
Energia, trabalho e quantidade de calor	joule	J	kg·m ² /s ²
Potência	watt	W	kg·m ² /s ³
Carga eléctrica	coulomb	C	A·s
Potencial eléctrico, força electromotriz	volt	V	kg·m ² /(A·s ³)
Resistência eléctrica	ohm	Ω	kg·m ² /(A ² ·s ³)
Condutância eléctrica	siemens	S	A ² ·s ³ /(kg·m ²)
Capacidade eléctrica	farad	F	A ² ·s ⁴ /(kg·m ²)
Fluxo de indução magnético	weber	Wb	kg·m ² /(A·s ²)
Indução magnética	tesla	T	kg/(A·s ²)
Indutância	henry	H	kg·m ² /(A ² ·s ²)
Fluxo luminoso	lúmen	lm	cd·sr
Iluminação	lux	lx	cd·sr/m ²

Tabela B.3: Prefixos SI

Factor	Prefixo	Símbolo	Factor	Prefixo	Símbolo
10 ¹⁸	exa	E	10 ⁻¹	deci	d
10 ¹⁵	peta	P	10 ⁻²	centi	c
10 ¹²	tera	T	10 ⁻³	mili	m
10 ⁹	giga	G	10 ⁻⁶	micro	μ
10 ⁶	mega	M	10 ⁻⁹	nano	n
10 ³	quilo	k	10 ⁻¹²	pico	p
10 ²	hecto	h	10 ⁻¹⁵	femto	f
10 ¹	deca	da	10 ⁻¹⁸	ato	a

fundamentais. A aceleração da gravidade não é uma constante, mas costuma usar-se como valor de referência $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Outras propriedades e constantes de alguns materiais aparecem ao longo do texto nas tabelas seguintes:

- Série triboeléctrica, Tabela 1.1, página 5;
- Constante dieléctrica e rigidez dieléctrica, Tabela 5.1, página 104;
- Resistividade e coeficiente de temperatura de metais, Tabela 6.1, página 120.

Tabela B.4: Valores de algumas constantes fundamentais

Constante	Símbolo	Valor	Unidades
Permeabilidade do vazio	μ_0	4π	10^{-7} N/A^2
Permitividade do vazio	ϵ_0	8,854 188	F/m
Velocidade da luz no vazio	c	2,997 925	10^8 m/s
Carga elementar	e	1,602 177	10^{-19} C
Massa do electrão	m_e	9,109 390	10^{-31} kg
Massa do protão	m_p	1,672 623	10^{-27} kg
Massa do neutrão	m_n	1,674 929	10^{-27} kg
Constante de Avogadro	N_A	6,022 137	10^{23} 1/mol

Bibliografia

Obras clássicas

1. Gilbert, William. *De Magnete*, Dover Publications Inc., New York, 1958.
2. Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H. e H. Weyl. *The Principle of Relativity*, Dover Publications Inc., New York, 1952.
3. Maxwell, James Clerk. *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 volumes, Dover Publications Inc., New York, 1954.

Livros de texto

4. Alonso, M. e E. J. Finn. *Physics*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.
5. Hecht, E. *Óptica*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1991.
6. Hecht, E. *Physics*, Brooks/Cole, Pacific Grove, Califórnia, 1994.
7. Kip, A. F. *Fundamentals of Electricity and Magnetism*, McGraw-Hill, New York, 1969.
8. Mendiratta, S. K. *Introdução ao Electromagnetismo*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1984.
9. Oatley, C. *Electric and Magnetic Fields*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1976.
10. Purcell, E. M. *Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, vol. 2*, McGraw-Hill, New York, 1962.
11. Tipler, P.A. *Physics*, Worth Publishers, New York, 1976.

Ideias e conceitos

12. Feynman, P. R., Leighton, R. B. e M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, vol. II*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1964.
13. Jammer, M. *Concepts of Force. A Study in The Foundations of Dynamics*, Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1957.

14. Lévy-Leblond, J. M. e A. Butoli. *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas*, Gradiva, Lisboa, 1991.

Notações e unidades

15. de Almeida, G. *Sistema Internacional de Unidades (SI)*, 2ª edição, Plátano Editora, Lisboa, 1997.
16. Cohen, E. R. e B. N. Taylor. *The Fundamental Physical Constants*, Physics Today, 47, BG9, 1994.
17. Nelson, R. A. *Guide for Metric Practice*, Physics Today, 47, BG15, 1994.

Livros avançados

18. Brito, L., Fiolhais, M. e C. Providência. *Campo Electromagnético*, McGraw-Hill, Lisboa, 1999.
19. Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*, 2ª edição, John Wiley & Sons, New York, 1975.
20. Landau, L. e Lifshitz E. *Curso Abreviado de Física Teórica, Libro 1: Mecánica y Electrodinámica*, 2ª edição, Mir, Moscovo, 1979.

Análise vectorial

21. Kovach, L. D. *Advanced Engineering Mathematics*, Addison-Wesley Pub. Co., Massachusetts, 1982.
22. Kreyszig, I. E. *Advanced Engineering Mathematics*, 7ª edição, J. Wiley, 1992.
23. Marsden, J. E. e A.J. Tromba. *Vector Calculus*, W. H. Freeman and Company, New York, 1988.
24. Spiegel, M. R. *Theory and Problems of Vector Analysis*, Schaum Pub. Co., New York, 1959.

Outros documentos

25. O'Connor J. J. e E. F. Robertson. *MacTutor History of Mathematics Archive*, Universidade de St. Andrews, Escócia, disponível através da *World Wide Web*, no endereço:
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/>
26. Fonte Dias, V. da Carreira, R. e P. Fonseca. *Sebenta Multimédia: Análise de Circuitos Eléctricos*, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 1996.
<http://analog.inesc.pt/smace/capa.htm>.

27. Mourão, J. M. e J. C. Romão. *Física para Química, Parte 2: Electromagnetismo*, Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico, 1991.
28. Sá, P. A. *Notas de Apoio de Teoria da Electricidade II*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

Informações adicionais, sobre a disciplina leccionada na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, podem ser obtidas através da internet no endereço:

<http://www.fe.up.pt/deqwww/electromagnetismo/>

Índice remissivo

A

acção à distância, 15
aceleração
 centrípeta, 160
 normal, 160
 tangencial, 160
ácido sulfúrico, 124
admitância, 220
Albany, EUA, 190
alumínio, 121
âmbar, 4
amortecimento crítico, 231
Ampère, André Marie, 152, 171
ampere (unidade), 112, 175
amperímetro, 146
amplitude, 216, 261
ângulo sólido, 35, 240
ânodo, 165
antena, 269
antipartícula, 6
Arago, D. François J., 170–171
átomo, 6
auto-indução, 205
Avogadro, constante de, 295

B

bateria de automóvel, 124
Beauvais, França, 170
binário, 157, 167

Biot, Jean-Baptiste, 152, 170–171
bobina, 157, 167
Boltzmann, Ludwig, 236
Bourg, França, 152
Brunswick, Alemanha, 28
Bunsen, Robert W., 128

C

cabo coaxial, 206
calibração, 251
 de Coulomb, 251
 de Lorentz, 251
campo
 conservativo, 53, 58
 de força, 51
 de indução magnética, 154–156
 eléctrico, 13–14, 29
 de um anel, 20
 de um disco, 22
 de um fio infinito, 38
 de um plano infinito, 39
 na atmosfera, 25
 nos condutores, 43
 escalar, 55
 induzido, 106
 magnético, 28, 156, 186, 242
 de um fio infinito, 173
 vectorial, 29, 78
candela, 293

- capacidade, 93–94
- característica, 260
 - tensão-corrente, 117
- carga, 5
 - conservação, 6, 238
 - elementar, 7, 295
 - induzida, 42
 - linear, 19
 - livre, 106
 - mássica, 161
 - portadores de, 112–113, 121
 - quantificação, 7
 - superficial, 21
 - volúmica, 24
- cátodo, 165
- Cauchy, Augustin-Louis, 152
- Cavendish, Henry, 104
- Celsius, grau, 293
- chumbo, 121, 124
- circuito
 - delta, 149
 - eléctrico, 50
 - equivalente, 131
 - estrela, 149
 - LC*, 233
 - LR*, 221
 - LCR*, 225, 229
 - RC*, 142
- City Philosophical Society*, 92
- cobre, 116, 121
- código de cores, 130
- coeficiente
 - de auto-indução, 205
 - de indução mútua, 205
 - de temperatura, 120
- Colónia, Alemanha, 110
- Collège de France*, Paris, 170
- Como, Itália, 50
- comprimento de onda, 261
- concavidade, 70
- condensador, 92, 94
 - cilíndrico, 98
 - de placas planas paralelas, 95
 - equivalente, 140
 - esférico, 97
 - variável, 96
- condensadores
 - em paralelo, 134
 - em série, 133
- condução eléctrica, 110
- condutividade, 118
- condutor, 4, 42
 - em equilíbrio, 42
 - em movimento num campo magnético, 195–197
 - onda electromagnética num, 271
 - potencial e carga num, 69–71
- cone, 240
- constante
 - de Avogadro, 295
 - de Coulomb, 9
 - dieléctrica, 104, 106, 271
 - magnetostática, 172
- coordenadas
 - cartesianas, 287
 - cilíndricas, 172, 177, 289
 - esféricas, 60, 66, 89, 290
 - polares, 20, 22, 290
- corpo negro, 269
- corrente
 - alternada, 211
 - de deslocamento, 237, 239
 - densidade de, 115
 - eficaz, 223
 - eléctrica, 111, 115
 - estacionária, 116, 238
 - induzida, 192
 - trifásica, 187, 212
- Coulomb, Charles, 8
- coulomb (unidade), 9, 54, 294

Croácia, 254
curva, 288
curvatura, 160

D

d'Alembert, Jean, 258
Davy, Humphry, 92
De Magnete, 153, 297
decaimento exponencial, 144
densidade de fluxo
 energético, 249, 257, 268
 magnético, 156
derivada
 convectiva, 201, 259
 direccional, 56, 292
 parcial, 57, 80
deslocamento, 52
 eléctrico, 107, 242
diamagnetismo, 92, 185
dieléctrico, 92, 103
diferença de potencial, 53–57
díodo, 118
dípolo eléctrico, 18, 74, 103
disco de Rowland, 248
dispersão, 271
divergência, 78, 291
 teorema da, 81
domínios magnéticos, 185
du Fay, Charles, 4

E

Edimburgo, Escócia, 236
Edison, Thomas Alva, 254
efeito
 fotoeléctrico, 255
 Hall, 169, 196
 Joule, 123, 222
Einstein, Albert, 247

electrão, 5, 165
 de condução, 42
 massa, 295
electrão-volt, 55
electricidade, 50
 resinosa, 5
 vítrea, 5
eléctrodo, 111, 124
electroímã, 183, 191
electrólise, 92
electrólito, 124
electroquímica, 92
energia
 armazenada num condensador, 101
 cinética, 52
 conservação da, 53
 electrostática, 99
 mecânica, 53
 potencial, 53
 volúmica
 electromagnética, 249
 electrostática, 100–101
equação
 de continuidade, 116, 238
 de onda, 258–259
equações de Maxwell, 237, 241–243
equivalente
 de Norton, 132
 de Thévenin, 132
Erlangen, Alemanha, 110
Escola Central de Beauvais, 170
Escola Politécnica de Paris, 152, 170
espectro
 de absorção, 128, 271
 de emissão, 271
 electromagnético, 269
espectrómetro de massa, 166
espectroscopia, 128
espira, 157
estado estacionário, 211

esterradiano, 35, 293

éter, 15

teoria do, 246

Euler

fórmula de, 213

experiência

de Michelson e Morley, 247

do disco de Rowland, 248

F

factor

de escala, 289

de potência, 223

de qualidade, 225

farad (unidade), 94, 294

Faraday, Michael, 92, 104, 171, 190, 197, 236, 255

fase, 215, 261

diferença de, 223

inicial, 261

fasor, 215–216

feixe de partículas, 162, 164

ferro, 121

ferromagnetismo, 185

Filadélfia, EUA, 2

filtro

de frequência, 226

de velocidades, 164

passa-alto, 234

passa-baixo, 234

física

atômica, 6

clássica, 255

fissão nuclear, 109

fluxo, 29

de carga, 115

eléctrico, 29–34

magnético, 184, 192

tubo de, 41

fonte

de corrente, 132

de iões, 166

de tensão, 132

isotrópica, 266, 269, 273

força

conservativa, 52

de Lorentz, 161, 198, 242

eléctrica, 53–54

electromotriz, 125

induzida, 192

electrostática, 3

forte, 26

magnética, 4, 153, 155, 157, 175, 197, 199

fórmula de Euler, 213

fotão, 255

Fourier, Joseph, 110

Franklin, Benjamin, 2, 4, 7

frentes de onda, 267

frequência, 262

angular, 212, 262

domínio da, 213

Fresnel, Augustin Jean, 152

função

alternada, 214

de onda, 258, 260

harmónica, 215

periódica, 212

G

Galilei, Galileu, 244, 247

Galvani, Luigi, 50

galvanómetro, 146, 167

garrafa de Leiden, 94

gás de electrões, 116–117, 197, 217

gás ideal, 118

Gauss, Karl Friedrich, 28–29, 76, 128

gauss (unidade), 156

gerador

- de corrente, 92
- alternada, 193
- contínua, 199
- de Faraday, 198–199
- de Van der Graff, 132

germânio, 121

Gilbert, William, 4, 153

gradiente, 57, 80, 292

- em coordenadas cartesianas, 56–57
- em coordenadas esféricas, 60
- em coordenadas generalizadas, 291

Gray, Stephen, 4

Green, George, 76

H

Hall, Edwin H., 169

harmónico, 214

Heaviside, Oliver, 210

hélice, 162

helicidade, 264

hélio, 26

Henry, Joseph, 190–191, 197

henry (unidade), 205, 294

Hertz, Heinrich, 128, 255

hertz (unidade), 294

Huygens, Christian, 255

I

íman, 153

impedância, 216–218

- associações em paralelo, 220
- associações em série, 219
- de um condensador, 218
- de um indutor, 218
- de uma resistência, 217
- equivalente, 219

indução

- electromagnética, 92, 190–191, 197
- electrostática, 42

mútua, 205

indutor, 183, 205

integral

- de linha, 19, 52, 65
- de superfície, 21, 31–32, 65
- de volume, 25, 65

intensidade de uma onda, 267–269

interferómetro de Michelson-Morley, 247

isótopos, 166

isolante, 4

isotropia, 243, 266, 268

J

Joule, efeito, 123, 222

joule (unidade), 53–54, 294

K

Kaliningrad, Rússia, 128

Kamerlingh Onnes, H., 121

Kelvin, Lord (Thomson, W.), 76, 191

kelvin (unidade), 293

Kirchhoff, Gustav Robert, 128, 255

L

lâmpada

- fluorescente, 112
- incandescente, 118, 126

Laplace, Pierre S., 152

laplaciano, 84, 292

lei

- de Ampère, 177–178, 186, 237
- de Ampère-Maxwell, 238, 242
- de Biot-Savart, 172, 248
- de Coulomb, 7–9
- de Faraday, 192–193, 197, 242
- de Gauss, 29, 35–43, 65, 77, 242
- na forma diferencial, 88
- de Lenz, 192
- de Ohm, 110, 117–119, 216

Lenz, Emil, 192
linhas
 de campo, 92, 236
 de campo eléctrico, 15–17, 57
 de indução magnética, 92, 154,
 180–182, 197
Londres, Inglaterra, 92, 210
Lorentz, factor de dilatação de, 245
Lorentz, força de, 161
Lorentz, Hendrik A., 161, 199, 242,
 245, 247
lúmen, 294
lux, 294
luz, 255
 infravermelha, 270
 solar, 270
 teoria corpuscular, 152
 teoria ondulatória, 152
 ultravioleta, 269
 velocidade, 236, 295
 visível, 270
Lyon, França, 152

M

Mach, Ernst, 128
Magnésia, 153
malhas, 138
Marconi, Guglielmo, 254
Marte, 274
massa
 do electrão, 295
 do neutrão, 295
 do protão, 295
materiais ohmicos, 117
Maxwell, James Clerk, 76, 191, 197, 210,
 236, 255
mecânica
 clássica, 6
 quântica, 6, 255
meio
 isotrópico, 243, 271

 linear, 243
mercúrio, 121
metro, 9, 53, 293
Michell, John, 153
Michelson, Albert A., 246
microondas, 270
microscópio electrónico, 162
Millikan, Robert, 13
mobilidade eléctrica, 119
Möbius, anel de, 82
módulo de um vector, 288
moléculas polares e apolares, 103
momento magnético, 158
Monge, Gaspar, 170
monopólo magnético, 180
Morley, Edward W., 246
motor
 de corrente contínua, 159
 de indução, 212
movimento
 circular uniforme, 161
 helicoidal, 161
Munique, Alemanha, 110

N

nabla, 80
neutrão, 6, 109
 massa, 295
Newton, Isaac, 2, 153, 255
Newton, segunda lei de, 51
newton (unidade), 9, 53, 294
níquel-cromo, 121
nós, 138
Nottingham, Reino Unido, 76
Nuremberga, Alemanha, 110
núcleo, 6
número atómico, 6
número de onda, 262
 angular, 262
nuvem electrónica, 103
 do átomo de hidrogénio, 48

O

Ohm, Georg S., 110
ohm (unidade), 117, 294
ohmímetro, 147
onda
 electromagnética, 255, 257
 esférica, 266–267
 estacionária, 265
 estática, 273
 harmónica, 261
 longitudinal, 273
 monocromática, 261
 plana, 258
 polarizada, 258
 transversal, 273
órbita planetária, 28
Ørsted, Hans C., 152, 154, 171

P

paramagnetismo, 185
pára-raios, 71
pares de Cooper, 122
Paris, França, 170
partícula alfa, 26
pascal (unidade), 294
passo de uma hélice, 162
período, 212, 262
permeabilidade magnética, 186
 do vazio, 295
permitividade eléctrica, 107
 do vazio, 37, 295
pilha, 50, 111, 124
Poisson, equação de, 88
Poisson, Siméon Denis, 88
polarização, 258, 263
 circular, 261, 263
 da luz, 255
 eléctrica, 106
 linear, 261
pólos magnéticos, 153

pontos de sela, 61, 63
potência
 dissipada, 123
 fornecida, 125
 instantânea, 223
 média, 222–224
potencial, 76
 de ruptura, 94
 de uma carga pontual, 55
 electrostático, 54
 vectorial, 250
Poynting, vector de, 249, 257
prata, 121
prefixos das potências de 10, 294
Priestley, Joseph, 7
prisma, 270
produto
 escalar, 287
 vectorial, 287
protão, 6
 massa, 295

Q

quilograma, 293

R

radar, 269
radiano, 293
raio, 103
raios
 catódicos, 165
 gama, 269
 x, 71, 269
reactância, 220
rede iónica, 217
regra
 da mão direita, 155, 264
 de Cramer, 140
regras de Kirchhoff, 138

relatividade, teoria da, 247
resistência, 117–118
 e temperatura, 119–121
 equivalente, 135
resistências
 em série, 133
 em paralelo, 133
resistividade, 119
resposta transitória, 229
ressonância, 224–226
rigidez dielétrica, 103–104
rotacional, 82–84, 291
Rowland, Henry, 248
Royal Society, 110

S

saturação, 121
Saturno, anéis de, 236
Savart, Felix, 171
segundo (unidade), 293
semicondutores, 121
separação
 electrostática, 163
 magnética, 163, 166
série
 de Fourier, 212, 263
 espectral, 271
 triboelectrica, 5
siemens (unidade), 294
silício, 121
simetria, 29, 37
 cilíndrica, 38
 esférica, 40, 60, 266, 292
sistema internacional de unidades, 9, 293
Smithsonian Institution, 190
sobreamortecido
 circuito *LCR*, 231
Sol
 composição química do, 128
 fluxo energético do, 273
solenóide, 182

spin, 122, 185
Stokes, George G., 76, 191
Stokes, teorema de, 86
Subscription Library, 76
supercondutividade, 121
superfície, 289
 aproximação por planos, 31
 cónica, 35
 equipotencial, 61–64
 fechada, 31
 gaussiana, 37–38, 40, 44
 orientável, 82
susceptibilidade
 eléctrica, 106
 magnética, 186

T

Tales de Mileto, 3
televisão, 273
temperatura
 crítica, 121
 de Curie, 185
tensão
 eficaz, 224
teorema
 da divergência, 81
 de Stokes, 86, 239
 do co-seno, 288
 fundamental da álgebra, 28
teoria cinética dos gases, 236
Tesla, Nicola, 212, 254
tesla (unidade), 155, 294
Thomson, J. J., 5, 165
Thomson, W. (Lord Kelvin), 76, 191
trabalho, 52
trabalho e energia, 52
trajectória, 51
transformação
 de Galileu, 244, 247, 253
 de Lorentz, 247, 253

transformada

de Fourier, 211, 213, 272

de Laplace, 211, 226–229

triedro de Frenet-Serret, 159

tubo de raios catódicos, 165

tungsténio, 121

U

Universidade

de Berlim, 128

de Cambridge, 76, 236

de Gotinga, 28

de Gratz, 254

de Heidelberg, 128

de Munique, 110

de Praga, 254

de Princeton, 190

urânio, 109

V

valor médio, 79

vector posição, 51, 289–290

velocidade

das ondas electromagnéticas, 271

versor, 8

binormal, 160

normal, 30, 159

tangencial, 159

volt (unidade), 54, 294

voltímetro, 147

Volta, Alessandro, 50, 54, 111

W

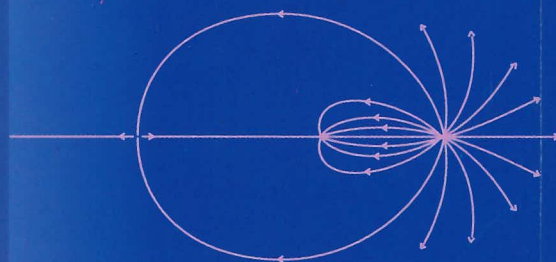
watt (unidade), 294

weber (unidade), 294

Weber, Wilhelm E., 28

Westinghouse, George, 254

Livro de texto de electromagnetismo de nível introdutório destinado aos estudantes de Engenharia e a todos aqueles que tenham electromagnetismo no currículo dos seus cursos. As matérias são expostas numa linguagem muito simples e muito bem ilustradas por figuras e gráficos bastante didácticos. Cada capítulo contém para além da matéria teórica, uma série de exemplos resolvidos e uma lista de problemas propostos cuja solução numérica é apresentada no fim do livro. Em anexos podem ser encontradas tabelas de constantes físicas, factores de conversão, sistemas de unidades e as principais equações de cálculo diferencial.



**Mc
Graw
Hill**

ISBN 972-773-010-8



9 789727 730100