

Relações binárias

Relações binárias.

Referência: Discrete Mathematics with Graph Theory
Edgar Goodaire e Michael Parmenter, 3rd ed 2006
Capítulo: 2

1

RELAÇÕES BINÁRIAS

Combinar conjuntos

- ❑ $C = \{\text{toyota, ford, renault, volvo}\}$
- ❑ $P = \{\text{joão, ana, rui, rita}\}$

- ❑ Operações já vistas
- ❑ $C \cap P = \emptyset$
- ❑ $C \cup P = \{\text{toyota, ford, renault, volvo, joão, ana, rui, rita}\}$
- ❑ $C \oplus P = \{\text{toyota, ford, renault, volvo, joão, ana, rui, rita}\}$
- ❑ $C \setminus P = \{\text{toyota, ford, renault, volvo}\}$
- ❑ $C^c = \{\text{joão, ana, rui, rita}\}$ se U for o universo de discurso
- ❑ Como combinar informação de outra maneira, por exemplo, para saber de quem é cada carro?

Conjuntos-3

Produto cartesiano

- ❑ O **produto cartesiano** de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os pares ordenados (a,b) com elementos respetivamente de A e de B
 - $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$
 - (a,b) são pares ordenados porque a ordem é importante $(a,b) \neq (b,a)$
 - a e b designam-se coordenadas

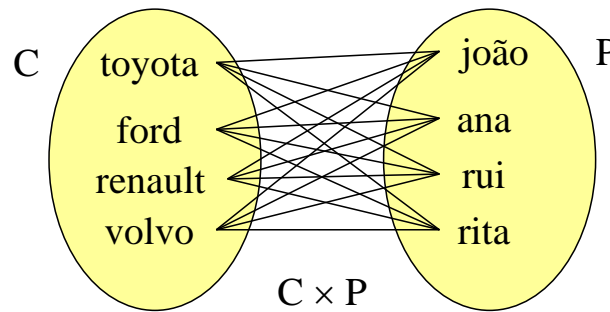
- ❑ $C \times P = \{ (\text{toyota, joão}), (\text{toyota, ana}), (\text{toyota, rui}), (\text{toyota, rita}),$
 $(\text{ford, joão}), (\text{ford, ana}), (\text{ford, rui}), (\text{ford, rita}),$
 $(\text{renault, joão}), (\text{renault, ana}), (\text{renault, rui}), (\text{renault, rita}),$
 $(\text{volvo, joão}), (\text{volvo, ana}), (\text{volvo, rui}), (\text{volvo, rita}) \}$

conjunto de sequências (ou tuplos)

- ❑ $|C \times P| = |C| \times |P| = 4 * 4 = 16$

Conjuntos-4

Notação



diagrama

$C \times P$	joão	ana	rui	rita
toyota	X	X	X	X
ford	X	X	X	X
renault	X	X	X	X
volvo	X	X	X	X

matricial

- ❑ Notação mais adequada depende da análise a realizar

Conjuntos-5

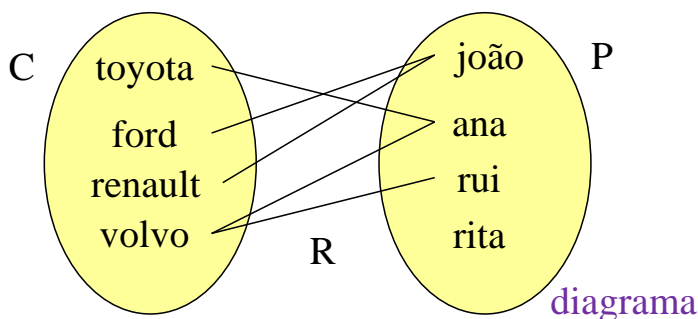
Produto cartesiano generalizado

- ❑ O produto cartesiano é generalizável $C \times P \times D$
 - $D = \{2005, 2008, 2009\}$
- ❑ $C \times P \times D =$
 - $\{(toyota, jo\tilde{a}o, 2005), (toyota, ana, 2005), (toyota, rui, 2005), (toyota, rita, 2005),$
 $(ford, jo\tilde{a}o, 2005), (ford, ana, 2005), (ford, rui, 2005), (ford, rita, 2005),$
 $(renault, jo\tilde{a}o, 2005), (renault, ana, 2005), (renault, rui, 2005), (renault, rita, 2005),$
 $(volvo, jo\tilde{a}o, 2005), (volvo, ana, 2005), (volvo, rui, 2005), (volvo, rita, 2005),$
 $(toyota, jo\tilde{a}o, 2008), (toyota, ana, 2008), \dots\}$
 - Ternos ordenados
- ❑ O produto cartesiano n\~ao \e comutativo $A \times B \neq B \times A$
- ❑ Se o produto cartesiano for sobre o mesmo conjunto
 - $A^n = A \times A \times \dots \times A = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A, i=1, \dots, n\}$
 - Os elementos de A^n s\~ao n-tuplos

Conjuntos-6

Relações binárias

- Uma **relação binária** do conjunto A para o conjunto B é um subconjunto de $A \times B$. Uma relação binária em A é um subconjunto de $A^2 = A \times A$.
- $R = \{(c,p) \mid c \in C \wedge p \in P \wedge \text{o dono de } c \text{ é } p\}$ **conjunto de seqüências**
 $= \{(toyota, ana), (ford, jo\tilde{a}o), (renault, jo\tilde{a}o), (volvo, rui), (volvo, ana)\}$
 - Neste exemplo, 5 pares em vez dos 16 de $C \times P$
 - R representa mais informação do que $C \times P$ ou \emptyset , apesar de todos serem subconjuntos de $C \times P$



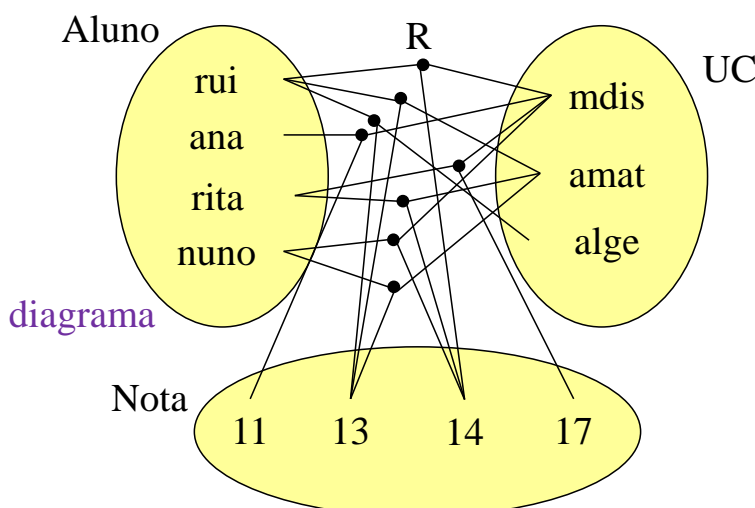
matricial

R	joão	ana	rui	rita
toyota		X		
ford	X			
renault	X			
volvo		X	X	

Conjuntos-7

Relações de ordem superior

- Certos problemas são naturalmente modelizáveis por relações entre mais do que dois conjuntos de valores
 - Registrar as notas de cada aluno a cada disciplina.**
 - $R \subseteq \text{Aluno} \times \text{UC} \times \text{Nota}$ **relação ternária**
 - $R = \{(rui, mdis, 14), (ana, mdis, 11), \dots\}$ **conjunto de seqüências**



matricial (3 dimensões)

	alge	11	13	14	17
mdis					
amat					
rui				X	
ana		X			
rita					X
nuno				X	

Conjuntos-8

Representação tabular

- ❑ Para relações n-árias $n > 3$ representações em diagrama e matricial ficam confusas → representação tabular

- Tabela = conjunto de sequências ou tuplos

tabela

Aluno	UC	Nota
ruí	mdis	14
ana	mdis	11
rita	mdis	17
nuno	mdis	14
ruí	amat	13
rita	amat	14
ruí	alge	13
nuno	amat	13

- ❑ Cabeçalho da tabela = esquema da relação = domínios dos atributos do produto cartesiano
- ❑ Linha da tabela = sequência da relação = facto da situação

Conjuntos-9

Relações n-árias versus binárias

- ❑ Relações n-árias aumentam a potência da representação?
- ❑ Representar a relação ternária em 3 relações binárias
 - Operação de projecção (eliminar colunas da tabela original)
 - Desaparecem linhas: relação é conjunto logo não tem repetições

Aluno	UC	Aluno	Nota	UC	Nota	Aluno	UC	Nota
ruí	mdis	ruí	14	mdis	14	ruí	mdis	14
ana	mdis	ana	11	mdis	11	ana	mdis	11
rita	mdis	rita	17	mdis	17	rita	mdis	17
nuno	mdis	nuno	14	amat	13	nuno	mdis	14
ruí	amat	ruí	13	amat	14	ruí	amat	14
rita	amat	rita	14	alge	13	rita	amat	14
ruí	alge	nuno	13			ruí	alge	13
nuno	amat					nuno	amat	13

Tabela ternária com as mesmas projecções
– representação binária perde informação

Conjuntos-10

1 relação n-ária = n relações binárias

- ❑ Se a tabela tiver uma coluna que identifique cada linha
 - Se não tiver acrescenta-se uma chave que numere as linhas

Nr	Aluno	UC	Nota
1	ruí	mdis	14
2	ana	mdis	11
3	rita	mdis	17
4	nuno	mdis	14
5	ruí	amat	13
6	rita	amat	14
7	ruí	alge	13
8	nuno	amat	13

Nr	Aluno	Nr	UC	Nr	Nota
1	ruí	1	mdis	1	14
2	ana	2	mdis	2	11
3	rita	3	mdis	3	17
4	nuno	4	mdis	4	14
5	ruí	5	amat	5	13
6	rita	6	amat	6	14
7	ruí	7	alge	7	13
8	nuno	8	amat	8	13

- ❑ É sempre possível representar uma relação n-ária à custa de até n relações binárias, usando uma chave comum

Conjuntos-11

Propriedades das relações binárias

- ❑ Relação binária definida num só conjunto A ($R \subseteq A^2$) é:
- ❑ **Reflexiva** se e só se

$$\forall a \in A, (a,a) \in R$$

- ❑ **Simétrica** se e só se

$$\forall a, b \in A, (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$$

- ❑ **Antissimétrica** se e só se

$$\forall a, b \in A, (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a=b$$

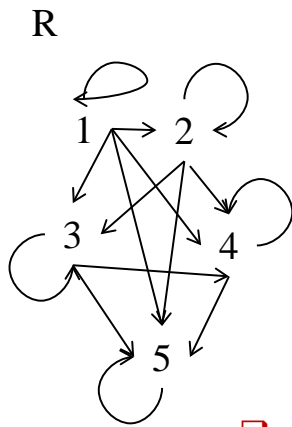
- ❑ **Transitiva** se e só se

$$\forall a, b, c \in A, (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$$

- ❑ Nota: antissimétrica não é a mesma coisa que não simétrica

Conjuntos-12

Exemplos



R	1	2	3	4	5
1	X	X	X	X	X
2		X	X	X	X
3			X	X	X
4				X	X
5					X

❑ R: reflexiva

- Lacetes em todos os elementos; diagonal principal completa

❑ antissimétrica

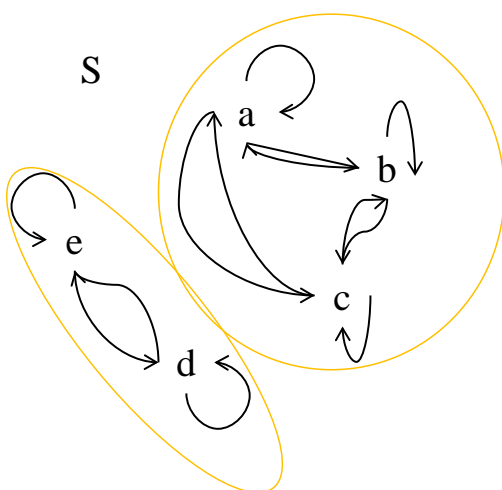
- Sem qualquer arco de retorno; sem elemento simétrico relativamente à diagonal principal

❑ transitiva

- Ligações diretas para todos os elementos com caminho até lá

Conjuntos-13

Exemplos



S	a	b	c	d	e
a	X	X	X		
b	X	X	X		
c	X	X	X		
d				X	X
e				X	X

❑ S: reflexiva

simétrica

- Todos os arcos de retorno; elementos simétricos à diagonal

transitiva

Outra notação:

aRb significa $(a,b) \in R$

Reflexiva: $\forall a \ aRa$

Simétrica: $aRb \rightarrow bRa$

Antissimétrica: $(aRb \wedge bRa) \rightarrow a=b$

Transitiva: $(aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc$

Conjuntos-14

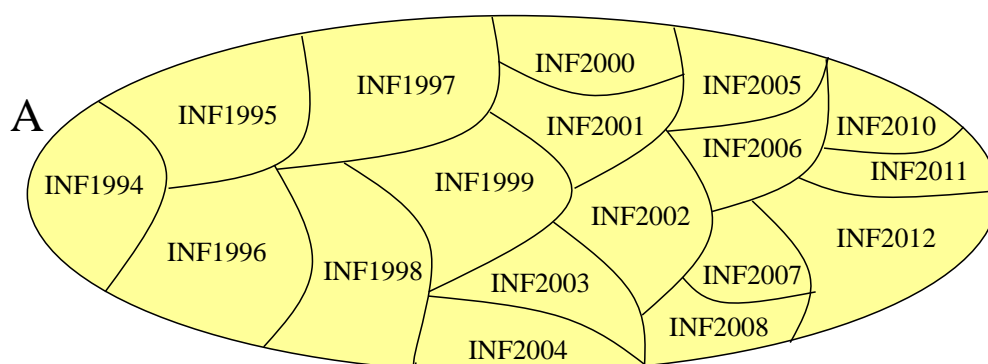
Relações de equivalência

- ❑ Uma **relação de equivalência** num conjunto A é uma relação binária R em A que é reflexiva, simétrica e transitiva
 - Estas são as propriedades da igualdade
- ❑ **Exemplo:** suponha que A é o conjunto de todas as pessoas e $R = \{(a,b) \in A^2 \mid a \text{ e } b \text{ têm os mesmos pais}\}$
 - Esta relação define grupos de pessoas (de irmãos)
- ❑ Se \sim representar uma relação de equivalência num conjunto A , a classe de equivalência de $a \in A$ é o conjunto $\bar{a} = \{x \in A \mid x \sim a\}$
- ❑ O conjunto de todas as classes de equivalência designa-se conjunto quociente **$A \bmod \sim$** e é denotado por A/\sim

Conjuntos-15

Conjunto quociente

- ❑ **Exemplo:** $a \sim b$ se e só se a e b forem estudantes de Informática da FEUP (conjunto A) com os mesmos primeiros 4 algarismos no número de aluno. O conjunto quociente A/\sim é o conjunto das classes dos vários anos
 - $A/\sim = \{\{x \mid x \in \text{INF1994}\}, \{x \mid x \in \text{INF1995}\}, \{x \mid x \in \text{INF1996}\}, \dots, \{x \mid x \in \text{INF2011}\}, \{x \mid x \in \text{INF2012}\}\}$
 - Estes conjuntos são todos disjuntos dois a dois e cobrem todo o conjunto dos estudantes de Informática da FEUP



Conjuntos-16

Partição

- ❑ Uma **partição** de um conjunto A é uma coleção de subconjuntos não vazios de A , disjuntos dois a dois, cuja reunião é A . Estes conjuntos designam-se por células ou blocos e particionam A .
- ❑ **Teorema:** as classes de equivalência associadas a uma relação de equivalência num conjunto A formam uma partição de A .

Conjuntos-17

Relação inversa

- ❑ A relação inversa de uma relação R designa-se R^{-1} e contém os pares de R mas pela ordem inversa

$$R^{-1} = \forall a, b ((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R^{-1})$$

- ❑ Corresponde a inverter os arcos num diagrama de R

Conjuntos-18