Exercícios de conjuntos e relações binárias

T2012-3v1-P1

- Dados dois conjuntos A e B, em geral a afirmação $\wp(A-B) \subseteq \wp(A)- \wp(B)$ é verdadeira ou falsa? Se for verdadeira demonstre-a e se for falsa indique um contraexemplo.
- R:
  - A afirmação é falsa. Qualquer powerset contém o vazio. Portanto, a diferença de dois powersets não contém o vazio.
  - Em particular $\varnothing \notin \wp(A)- \wp(B)$. Mas $\varnothing \in \wp(A-B)$ o qual não é portanto subconjunto de $\wp(A)- \wp(B)$.
- Contraexemplo: $A=\{1,2\}$, $B=\{1\}$.
  - $\wp(A)= \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$, $\wp(B)=\{\varnothing,\{1\}\}$
  - $\wp(A) - \wp(B) = \{\{2\},\{1,2\}\}$
  - $A-B=\{2\}$
  - $\wp(A-B)=\{\varnothing, \{2\}\}$

T2012-3v2-P1

- Dado um conjunto A ao qual pertence o elemento z, qual a proporção dos elementos de $\wp(A)$ de que z é elemento?
- R: Seja B=A-{z}.
  - Se |A|=n então |B|=n-1.
  - $|\wp(B)|=2^{n-1}$, o qual contém todos os subconjuntos de A que não incluem z. Como $|\wp(A)|=2^n=2*2^{n-1}$ e o número de conjuntos que contém z é 2^{n-1}, a proporção dos elementos de $\wp(A)$ que contém z é de 50%.
  - Outra forma de ver é considerar que, para cada subconjunto de A que não contém z existe exatamente um subconjunto de A que contém esses mesmos elementos mais o z.

T2013-3 P1

- MIEIC = {x | x é estudante do MIEIC}
- MDIS_F = { x | x frequenta MDIS }
- MDIS_A = {x | x foi aprovado a MDIS}
- Ano1 = {x | x é estudante do 1º ano}
- Ano5 = {x | x é estudante do 5º ano}
- I = { x | x é um estudante inteligente }

a) Nem só os estudantes do 1º ano do MIEIC frequentam MDIS.

- $MDIS\_F \setminus (MIEIC \cap ANO1) \neq \emptyset$

b) Só os estudantes inteligentes são aprovados a MDIS.

- $MDIS\_A \subseteq I$

c) Nenhum estudante do MIEIC do 5º ano frequenta MDIS.

- $(MIEIC \cap ANO5 \cap MDIS\_F) = \emptyset$

T2013-3 P1

- MIEIC = {x | x é estudante do MIEIC}
- MDIS_F = { x | x frequenta MDIS }
- MDIS_A = {x | x foi aprovado a MDIS}
- Ano1 = {x | x é estudante do 1º ano}
- Ano5 = {x | x é estudante do 5º ano}
- I = { x | x é um estudante inteligente }

d) Os estudantes do 5º ano só frequentam MDIS se não forem inteligentes.

- $(\mathrm{MDIS\_F} \cap \mathrm{ANO5}) \subseteq \mathrm{I}^c$

e) Os estudantes do 1º ano que não frequentam MDIS não são alunos do MIEIC.

- $(\mathrm{MDIS\_F}^c \cap \mathrm{ANO1}) \subseteq \mathrm{MIEIC}^c$

f) Os estudantes do MIEIC do 2º, 3º e 4º ano que não frequentem MDIS são inteligentes.

- $(\mathrm{MIEIC} \setminus (\mathrm{ANO1} \cup \mathrm{ANO5})) \setminus \mathrm{MDIS\_F} \subseteq \mathrm{I}$

T2012-3-P3

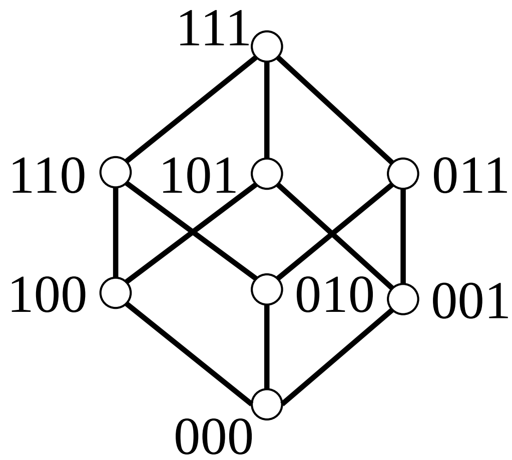
- Seja S={1,2,3,4,5,6}. Defina uma relação R em S como (i,j) ∈ R se i+j for um divisor de 24. Assinale as propriedades de que esta relação goza:
  - Reflexiva
  - Simétrica
  - Antissimétrica
  - Transitiva
  - Relação de equivalência
  - Ordem parcial
  - Não reflexiva
  - Não simétrica e não antissimétrica
  - Não transitiva
  - Não relação de equivalência
  - Não ordem parcial
- Divisores de 24: 1,2,3,4,6,8,12,24
- $R \subseteq S^2$
  - R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(2,1),(2,2),(2,4),(2,6),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(6,2),(6,6)}
- Não reflexiva, simétrica, não transitiva, não relação de equivalência, não ordem parcial

Estruturas conjunto + relação binária

- Conjunto das sequências binárias de comprimento n
  - $B=\{0,1\}$
  - $B^2= \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} = \{00, 01, 10, 11\}$
  - $B^3= \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
  - $B^n= \{00\ldots00, 00\ldots01, \ldots, 11\ldots11\}$
- Quais das estruturas seguintes são CPO?

Exemplo dos CPO

$S_1=(B^n,\preccurlyeq_1) \qquad a \preccurlyeq_1 b \leftrightarrow \forall i\ a_i \le b_i$



S_1 é CPO

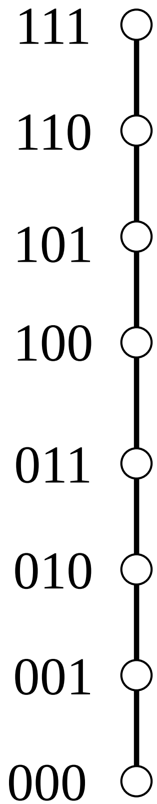
Exemplo dos CPO

- $S_2=(B^n,\preccurlyeq_2)$ $\quad a \preccurlyeq_2 b \leftrightarrow \forall i\ a_i<b_i$

S_2 não é CPO
Não é reflexiva

Exemplo dos CPO

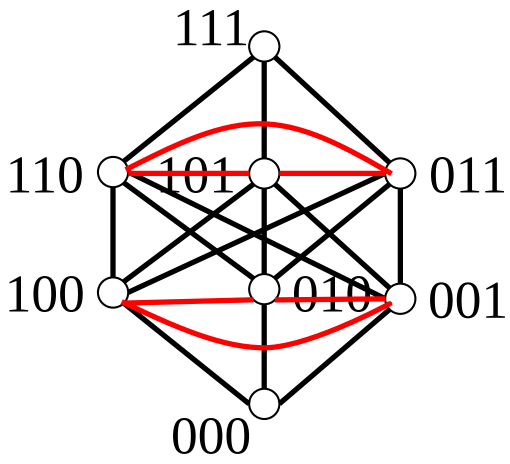
$S_3=(B^n,\preccurlyeq_3)$ $\qquad$ $a \preccurlyeq_3 b \leftrightarrow a_{10}\leq b_{10}$ (a e b na base 10)



$\boxed{S_3 \text{ é CPO}}$

Exemplo dos CPO

$S_4=(B^n,\preccurlyeq_4)$ $\qquad$ $a \preccurlyeq_4 b \leftrightarrow \sum a_i \leq \sum b_i$



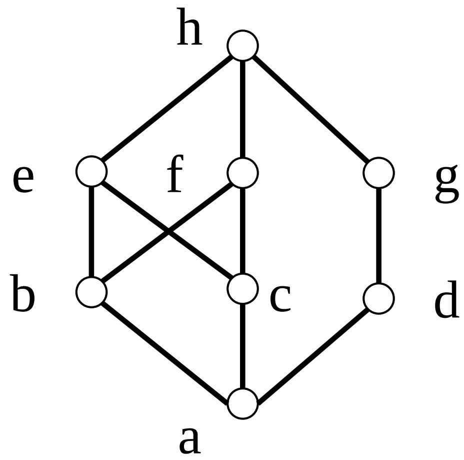
Não faz sentido desenhar diagrama de Hasse para S_4

S_4 não é CPO
Não é antissimétrica

Último exemplo de CPO

$$S_5=(\{a..h\},\preccurlyeq_5)$$

$\preccurlyeq_5 = \{a\preccurlyeq a,\ a\preccurlyeq b,\ a\preccurlyeq c,\ a\preccurlyeq d,\ a\preccurlyeq e,\ a\preccurlyeq f,\ a\preccurlyeq g,\ a\preccurlyeq h,\ b\preccurlyeq b,\ b\preccurlyeq e,\ b\preccurlyeq f,\ b\preccurlyeq h,\ c\preccurlyeq c,\ c\preccurlyeq e,\ c\preccurlyeq f,\ c\preccurlyeq h,\ d\preccurlyeq d,\ d\preccurlyeq g,\ d\preccurlyeq h,\ e\preccurlyeq e,\ e\preccurlyeq h,\ f\preccurlyeq f,\ f\preccurlyeq h,\ g\preccurlyeq g,\ g\preccurlyeq h,\ h\preccurlyeq h\}$



S_5 é CPO

Nota: $e \wedge f$ não existe, porque o conjunto dos minorantes de “e” e de “f” não tem um máximo

Relações binárias P9

- Suponha que $(A_1, \preccurlyeq_1) e\ (A_2, \preccurlyeq_2)$ são cpo.
- Mostre que a definição

$$(x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2) \leftrightarrow x_1 \preccurlyeq_1 y_1\ e\ x_2 \preccurlyeq_2 y_2$$

para $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A_1 \times A_2$ faz de $(A_1 \times A_2, \preccurlyeq)$ um cpo.

- **Resp:** Se $\preccurlyeq_1\ e\ \preccurlyeq_2$ são ordens parciais então são reflexivas, antissimétricas e transitivas. Mostrar que $(A_1 \times A_2, \preccurlyeq)$ é um cpo, com a definição dada, é mostrar que $\preccurlyeq$ goza dessas propriedades.
- $(x_1, x_2) \preccurlyeq (x_1, x_2) \leftrightarrow x_1 \preccurlyeq_1 x_1\ e\ x_2 \preccurlyeq_2 x_2$
- E portanto é reflexiva, uma vez que $\preccurlyeq_1\ e\ \preccurlyeq_2$ o são

P9

- Se se verificar $(x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2)\ e\ (y_1, y_2) \preccurlyeq (x_1, x_2)$ então $x_1 \preccurlyeq_1 y_1\ e\ x_2 \preccurlyeq_2 y_2\ e\ y_1 \preccurlyeq_1 x_1\ e\ y_2 \preccurlyeq_2 x_2$.
- Mas como estas são antissimétricas $x_1 = y_1\ e\ x_2 = y_2$, ou seja, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ e $\preccurlyeq$ também é antissimétrica.

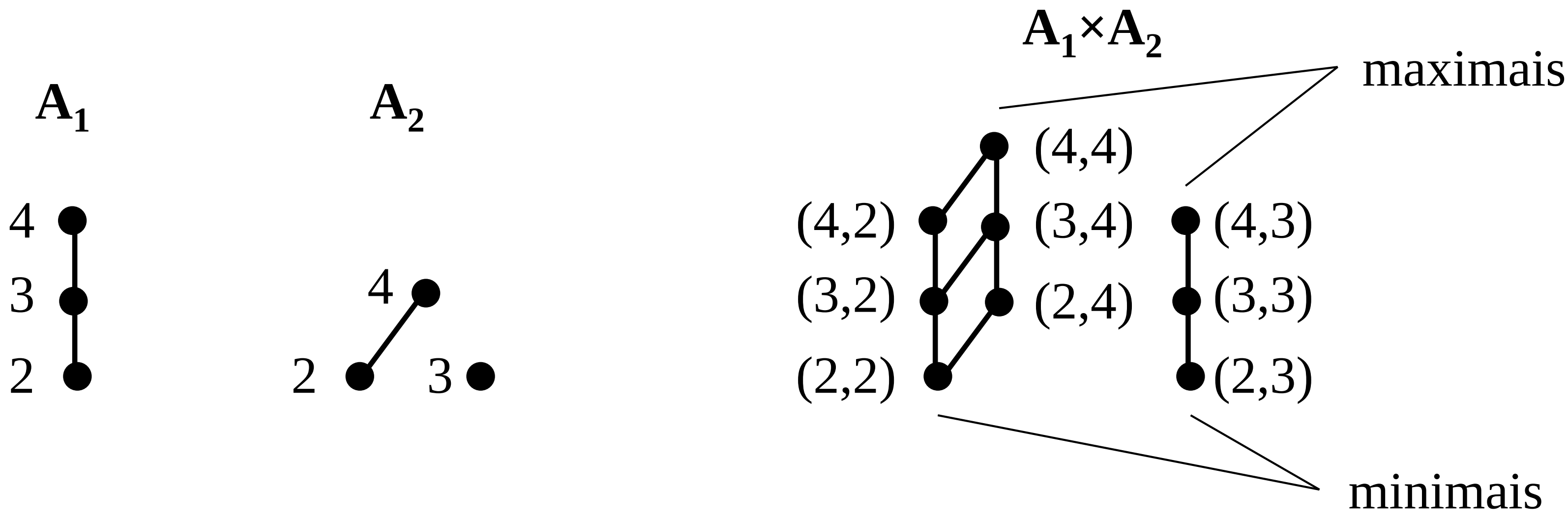
- Se tivermos
- $(x_1, x_2) \preccurlyeq (y_1, y_2)\ e\ (y_1, y_2) \preccurlyeq (z_1, z_2)$ então
- $x_1 \preccurlyeq_1 y_1\ e\ x_2 \preccurlyeq_2 y_2 e\ y_1 \preccurlyeq_1 z_1\ e\ y_2 \preccurlyeq_2 z_2$. Mas como são transitivas
- $x_1 \preccurlyeq_1 z_1\ e\ x_2 \preccurlyeq_2 z_2$, ou seja, $(x_1, x_2) \preccurlyeq (z_1, z_2)$ e portanto $\preccurlyeq$ também é transitiva.

Ordem parcial do produto

- Seja $A_1 = A_2 = \{2,3,4\}$. Atribua a A_1 a ordem parcial ≤ e a A_2 a ordem parcial |. Ordene parcialmente $A_1 \times A_2$ tal como definido atrás. Mostre todos os relacionamentos da forma $(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)$.
- **Resp:**
- $\{(x_1, x_2) \prec (y_1, y_2)\ |x_1 \leq y_1\ e\ x_2|y_2\ e\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)\} =$
- $\{(2,2) \prec (3,2), (2,2) \prec (4,2), (2,2) \prec (2,4), (2,2) \prec (3,4), (2,2) \prec (4,4), (2,3) \prec (3,3), (2,3) \prec (4,3), (2,4) \prec (3,4), (2,4) \prec (4,4), (3,2) \prec (4,2), (3,2) \prec (3,4), (3,2) \prec (4,4), (3,3) \prec (4,3), (3,4) \prec (4,4), (4,2) \prec (4,4)\}$

Diagrama produto

- Desenhe os diagramas de Hasse para os cpo indicados $(A_1, \preccurlyeq_1), (A_2, \preccurlyeq_2)$ e $(A_1 \times A_2, \preccurlyeq)$
- Determine todos os elementos maximais, minimais, máximo e mínimo que existirem em $\preccurlyeq$.
- **Resp:**

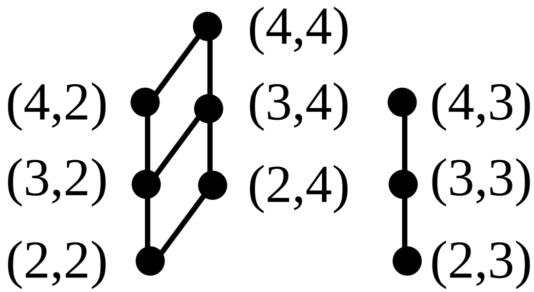


Ínfimos e supremos

- Obtenha os ínfimos e supremos que existirem para cada um dos seguintes pares de elementos

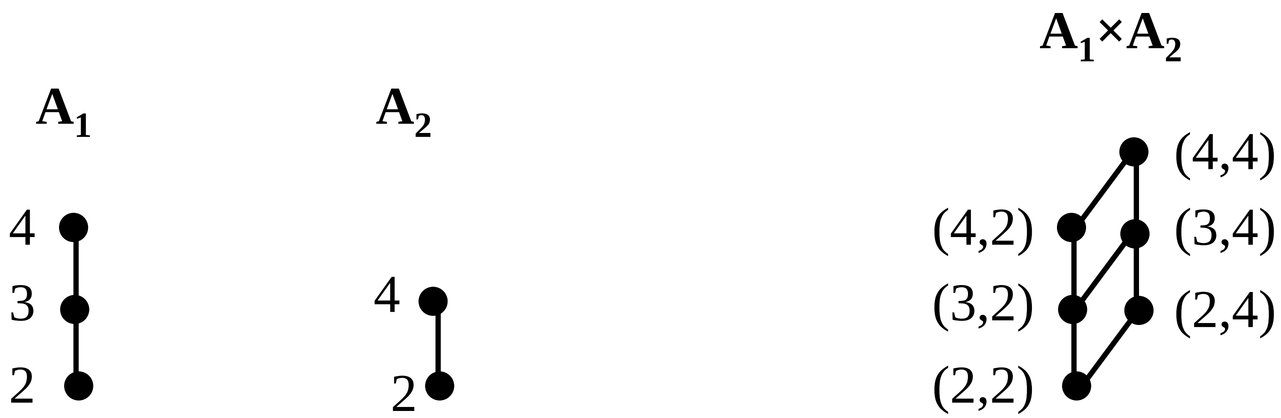
- $(2,2) \wedge (3,3) =$ não existe
- $(2,2) \vee (3,3) =$ não existe
- $(4,2) \wedge (3,4) =$ (3,2)
- $(4,2) \vee (3,4) =$ (4,4)
- $(3,2) \wedge (2,4) =$ (2,2)
- $(3,2) \vee (2,4) =$ (3,4)
- $(3,2) \wedge (3,4) =$ (3,2)
- $(3,2) \vee (3,4) =$ (3,4)

$A_1 \times A_2$



Produto de ordens totais

- Mostre, com um exemplo, que se $(A_1, \preccurlyeq_1) e\ (A_2, \preccurlyeq_2)$ forem ordens totais, $(A_1 \times A_2, \preccurlyeq)$ não é necessariamente uma ordem total.
- **Resp**
- Considere a restrição de A_2 só a {2,4}. Então $(A_2, |)$ é uma relação de ordem total. A relação de ordem obtida não é total



T2012-3P6v1 (relações binárias)

- Dada uma relação binária R, define-se a relação inversa $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$. Suponha que R é uma relação transitiva em $S \times S$. Será que R^{-1} tem que ser também transitiva? Prove a afirmação ou construa um contraexemplo.
- R: Assumamos, por contradição, que R^{-1} não é transitiva. Então, existem dois arcos $xR^{-1}y$ e $yR^{-1}z$ tais que não existe o arco $xR^{-1}z$. Se $xR^{-1}y$ e $yR^{-1}z$, na relação direta temos que zRy e yRx. Como R é transitiva, então zRx. Mas isso obriga a que $xR^{-1}z$, o que contradiz a hipótese. Portanto, R^{-1} é transitiva.

T2012-3P6v2 (relações binárias)

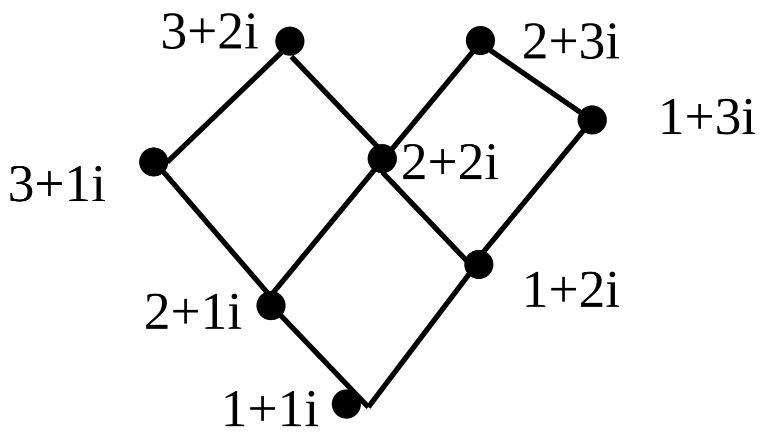
- Dada uma relação binária R, define-se a relação inversa $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$. Suponha que R é uma ordem total num conjunto S. Mostre que $R \cup R^{-1} = S \times S$.
- R: uma vez que R é uma relação de ordem total, qualquer que seja o par $(x,y) \in S \times S$, temos que $xRy \vee yRx$. Como, pela definição de relação inversa R^{-1}, o segundo caso se transforma em $xR^{-1}y$, obtém-se

$$xRy \vee xR^{-1}y \Leftrightarrow (x,y) \in R \cup R^{-1}$$

- e, portanto, $S \times S \subseteq R \cup R^{-1}$. Como qualquer par (x,y) de R ou de R^{-1} pertence a $S \times S$, temos que $R \cup R^{-1} \subseteq S \times S$ e, portanto, $R \cup R^{-1} = S \times S$.

T2012-3P4v2

- Seja $S=\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{N} \wedge |a+bi|=\sqrt{(a^2+b^2)} \leq 4\}$ o conjunto dos números complexos de coeficientes inteiros e módulo inferior ou igual a 4.
- Define-se neste conjunto a seguinte ordem parcial: $a+bi \preccurlyeq c+di$ se $a \leq c \wedge b \leq d$. Desenhe o diagrama de Hasse do cpo $(S, \preccurlyeq)$, assinalando o elemento $1+3i \vee 3+i$.



T2012-3P5v2

- Se, relativamente à pergunta anterior, com o mesmo conjunto S de números complexos, redefinisse a relação binária para $a+bi \preccurlyeq c+di$ se $|a+bi| \leq |c+di|$, o resultado seria:
  - não respondo,
  - uma relação de ordem total,
  - uma relação de ordem parcial correspondendo a um diagrama de Hasse com quatro níveis,
  - não é ordem parcial