Relações de recorrência

Sequências.

Relações de recorrência.

Equação caraterística.

Relações de recorrência de 2ª ordem não homogéneas.

Referência: Discrete Mathematics with Graph Theory
Edgar Goodaire e Michael Parmenter, 3rd ed 2006

Capítulo: 4

Sequências definidas recursivamente

- Definição de fatorial
  - $n! = \begin{cases} 1 & se\ n = 0 \\ n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 & se\ n \geq 1 \end{cases}$

- Exemplos
  - 0! = 1 1! = 1 3! = 3.2.1 = 6 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

- Definição **recursiva** de fatorial (recorrente, indutiva)
  - $n! = \begin{cases} 1 & se\ n = 0 \\ n \times (n-1)! & se\ n \geq 1 \end{cases}$
- Fatorial de ordem n definido à custa de fatorial de ordem n-1

Cálculo iterativo do fatorial

```
Fatorial(n){
i=1
fat=1
while (i<n) {
   i= i+1
   fat= fat*i
   }
}
```

- Mostrar que, no final, fat=n!
- Invariante (afirmação a provar): no final de cada ciclo fat=i!
- Base: antes do ciclo i=1 e fat =1=i!
- Indutivo: assumir que fat=i!; se i<n executa-se outro ciclo e i passa a i+1 e fat passa a fat*(i+1)=i!*(i+1)= (i+1)!

Implementação recursiva

```
Fatorial(n){
if (n=1)
     return 1
else
     return n*Fatorial(n-1)
}
```

- Calcula o fatorial(n) à custa do n e do fatorial(n-1)
- Segue a prova indutiva

Sequência

- Uma **sequência** é uma função cujo domínio é um conjunto infinito de inteiros e que toma valores num conjunto de números reais
- Definição da sequência $f_1(n) = n^2$
  - Por lista: 1, 4, 9, 16, …
- Definição da sequência $f_2(n)$
  - Por lista: 2, 4, 8, 16, …
  - Recursivamente:
    - $a_1=2$ condição inicial
    - $a_{k+1} = 2a_k$, para $k \geq 1$ relação de recorrência
  - Por fórmula explícita
    - $a_n = 2^n$ solução da relação de recorrência

Sequências aritmética e geométrica

- A sequência aritmética de primeiro termo a e diferença d
  - $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{k+1} = a_k + d, \quad k \geq 1. \end{cases}$
  - O termo geral é $a_n = a + (n-1)d$
  - A soma dos n primeiros termos é $S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
  - Ex: -7, -4, -1, 2, 5, 8, …
- A sequência geométrica de primeiro termo a e razão r
  - $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{k+1} = ra_k, \quad k \geq 1. \end{cases}$
  - O termo geral é $a_n = ar^{n-1}$
  - A soma dos n primeiros termos é $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
  - Ex: 1, 2, 4, 8, 16, 32, …

Problema

- Como descobrir a relação de recorrência?
  - Certos problemas são naturalmente formulados como relações de recorrência
  - O cálculo de um termo de ordem n depende de termos anteriores, recursivamente até à condição inicial
- Como descobrir a solução explícita para uma relação de recorrência?
  - A solução explícita é necessária para o cálculo direto do termo de ordem n

Depósito com capitalização

- O banco tem um depósito com juros de 4% ao ano, automaticamente acumulados ao capital inicial. Se depositar, em 2012-01-01, 1000€, ao fim de quanto tempo tem mais do que 1400€ na conta?
- E se o cálculo e capitalização dos juros for mensal?

- R: $c_n= (1+J)c_{n-1}$, $n\geq1$, $c_0=C$
- A solução da relação de recorrência é $c_n= (1+J)^nC > 1400$
- Resolvendo em ordem a n, $n > \log_{1+J} \frac{1400}{C}$ com C=1000
- No caso da capitalização anual J=0.04 e n>8.58, 9 anos
- No caso da mensal J=0.04/12=0.0033 e n>101.9, 102 meses

Reprodução de coelhos

- Suponha que numa ilha sem coelhos nem predadores se coloca à nascença um casal de coelhos e se pretende estudar a evolução da população
- Cada casal de coelhos começa a reproduzir-se ao fim de dois meses de vida e a partir daí produz um novo casal todos os meses
- Qual a população de coelhos ao fim de 8 meses?

- R: c_0=1, c_1=1, c_2=2, c_3=3, c_4=5, c_5=8, c_6=13, c_7=21, c_8=34
- $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ sequência de Fibonacci
  - (Solução mais à frente a partir do polinómio caraterístico.)

Solução por abstração

- Dada a relação de recorrência
  - $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{k+1} = 3a_k + 1 \end{cases} \quad k \geq 1$
  - Obtenha uma fórmula explícita para a_k e mostre que é correta.
  - $a_1 = 1$
  - $a_2 = 3a_1 + 1 = 3(1) + 1 = 4$
  - $a_3 = 3a_2 + 1 = 3(3(1) + 1) + 1 = 13$
  - $a_4 = 3a_3 + 1 = 3(3(3(1) + 1) + 1) + 1 = 40$
  - $a_5 = 3a_4 + 1 = 3(3(3(3(1) + 1) + 1) + 1) + 1 = 121$
  - …
  - $a_k = \frac{3^k - 1}{2}$
  - Prova da correção por indução.

Polinómio caraterístico

- Relação de recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes

$$\boldsymbol{a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n)}$$

  - Linear porque a_{n-1} e a_{n-2} aparecem a somar e com expoente 1
    - $a_n = a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-1}^2 + 4$ não é linear por duas razões
  - De segunda ordem porque a_n depende de a_{n-2}
    - $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-3} + n^2$ é de terceira ordem
  - Com coeficientes constantes porque r e s não dependen de n
  - Se f(n)=0 a relação de recorrência diz-se **homogénea**

$$a_n - ra_{n-1} - sa_{n-2} = 0$$

- Polinómio caraterístico é

$$x^2 - rx - s = 0$$

Solução da recorrência homogénea

- Sejam x_1 e x_2 as raízes do polinómio caraterístico. Então a solução de $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ é, para $n \geq 2$,

$$a_n = c_1{x_1}^n + c_2{x_2}^n, \text{ se } x_1 \neq x_2$$

$$a_n = c_1x^n + c_2nx^n, \text{ se } x_1 = x_2 = x$$

- $c_1\ e\ c_2$ a determinar a partir das condições iniciais

Exemplo com $x_1 \neq x_2$

- Resolva a relação de recorrência $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n \geq 2$ com as condições iniciais $a_0 = 1$ e $a_1 = 4$.
- R: o polinómio característico é $x^2 - 5x + 6$ cujas raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$
- A solução vai então ser da forma

$$a_n = c_1(2^n) + c_2(3^n)$$

- As condições iniciais forçam a que

$$a_o = c_1 2^0 + c_2 3^0 = c_1 + c_2 = 1$$
$$a_1 = c_1 2^1 + c_2 3^1 = 2c_1 + 3c_2 = 4$$

E se a_0=0 e a_1=1 ?

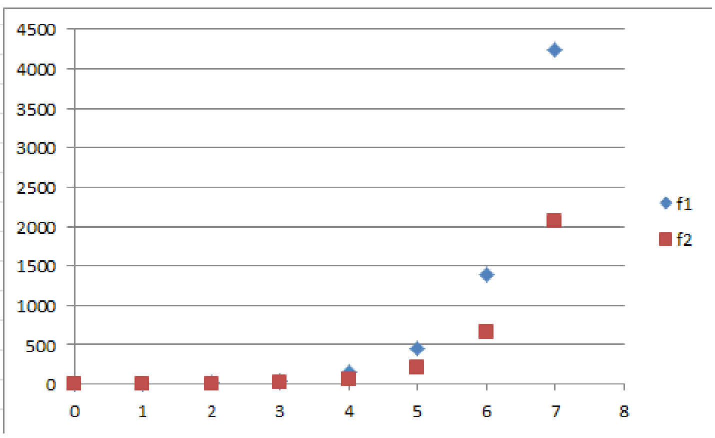
- Pelo que $c_1 = -1$ e $c_2 = 2$ e finalmente

$$a_n = -2^n + 2(3^n)$$

c_1=-1 e c_2=1

Condições iniciais diferentes

- $f_1 = -2^n + 2(3^n)$
- $f_2 = -2^n + 3^n$



Exemplo com $x_1 = x_2$

- Resolva a relação de recorrência $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 2$ com as condições iniciais $a_0 = 1\ e\ a_1 = 4$.
- R: o polinómio característico é $x^2 - 4x + 4$ que tem uma raíz dupla $x = 2$
- A solução vai então ser da forma
$$a_n = c_1(2^n) + c_2 n(2^n)$$
- As condições iniciais forçam a que
$$a_o = c_1 2^0 + c_2(0)2^0 = c_1 = 1$$
$$a_1 = c_1 2^1 + c_2(1)2^1 = 2c_1 + 2c_2 = 4$$
- Pelo que $c_1 = 1\ e\ c_2 = 1$ e finalmente
$$a_n = 2^n + n(2^n) = (n+1)2^n$$

Sequência de Fibonacci

- (exemplo dos coelhos)
- $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$
- Polinómio caraterístico: $x^2 - x - 1$ Raízes: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
- Solução da recorrência: $a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Das condições iniciais:
  - $c_1 + c_2 = 1$
  - $c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$
- Solução: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

Caso geral (não homogéneo)

- Relação de recorrência $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n)$
- **Solução particular** é uma solução específica p_n que portanto satisfaz $p_n = rp_{n-1} + sp_{n-2} + f(n)$
- Seja t_n outra solução particular; então também se verifica que $t_n = rt_{n-1} + st_{n-2} + f(n)$
- Chamando à diferença
- $q_n = t_n - p_n = r(t_{n-1} - p_{n-1}) + s(t_{n-2} - p_{n-2})$
$$q_n = rq_{n-1} + sq_{n-2}$$
- Verifica-se que esta satisfaz a relação homogénea
- Portanto $t_n = p_n + q_n$ é a soma de uma solução particular mais a solução homogénea (já vista atrás)

Teorema

- Seja $p_n$uma solução particular para a relação de recorrência $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2} + f(n)$ ignorando as condições iniciais. Seja q_n a solução da recorrência homogénea $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$, também ignorando as condições iniciais. Então $p_n + q_n$ é a solução para a relação de recorrência não homogénea. As condições iniciais determinam as constantes em q_n.

Solução particular

- A solução particular p_n depende de f(n) e nem sempre é fácil de encontrar
  - Um bom ponto de partida é fazer p_n da mesma forma de f(n), com as constantes por determinar
  - As constantes determinam-se por substituição na recorrência

Exemplo

- Exemplo: resolva a relação de recorrência não homogénea $a_n = -3a_{n-1} + n, n \geq 1$ com $a_0 = 1$
- R: Determinação de uma solução particular; como f(n)=n é linear vamos escolher $p_n = c + bn$. Para determinar c e b vamos substituir p_n na relação de recorrência

$$c + bn = -3[c + b(n-1)] + n =$$
$$-3c + 3b + (1 - 3b)n$$

- Igualando os coeficientes das potências de n idênticas

$$c = -3c + 3b \text{ e } b = 1 - 3b$$

- Conclui-se que $c = \frac{3}{16}$ e $b = \frac{1}{4}$, pelo que

$$p_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}n$$

Exemplo (cont.)

- A relação de recorrência homogénea é

$$a_n = -3a_{n-1}$$

- O polinómio caraterístico resulta $x^2 + 3x$, com raízes -3 e 0
- A solução homogénea sem condições iniciais é da forma

$$q_n = c_1(-3)^n + c_2(0^n) = c_1(-3)^n$$

- Então, a solução geral é da forma

$$p_n + q_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}n + c_1(-3)^n$$

- Para a condição inicial $a_0 = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}(0) + c_1(-3)^0 = 1$

  conclui-se que $c_1 = \frac{13}{16}$

$$a_n = \frac{3}{16} + \frac{1}{4}n + \frac{13}{16}(-3)^n$$

Outro exemplo

- Obter uma solução para $a_n = 2a_{n-1} + 3\mathrm{a}_{\mathrm{n}-2} + 5^{\mathrm{n}}$,
  $n \geq 2, a_0 = -2, a_1 = 1.$
- R: Tentando $p_n = c(5^n)$ e substituindo na relação

  $c(5^n) = 2c(5^{n-1}) + 3c(5^{n-2}) + 5^{\mathrm{n}}$ dividindo por 5^{n-2}

  $25c = 10c + 3c + 25,$ logo $c = \frac{25}{12}$ e $p_n = \frac{25}{12}(5^n)$
- Polinómio caraterístico $x^2 - 2x - 3$ com raízes -1 e 3
- Solução homogénea $q_n = c_1(-1)^n + c_2(3^n)$
- Solução geral $p_n + q_n = \frac{25}{12}(5^n) + c_1(-1)^n + c_2(3^n)$
- Iniciais: $a_0 = -2 = \frac{25}{12} + c_1 + c_2, a_1 = 1 = \frac{25}{12}(5) - c_1 + 3c_2$

$$a_n = \frac{25}{12}(5^n) - \frac{17}{24}(-1)^n - \frac{27}{8}(3^n)$$