PROVA COM CONETIVAS BOOLEANAS

Passos válidos usando $\neg$, $\wedge$ e $\vee$

Para cada conetiva: padrões de inferência

- A P pode seguir-se qualquer fórmula que seja sua consequência
  - Ex: (dupla negação) $\neg\neg P$ dá origem a P, e vice-versa
  - eliminação da negação
- Q é verdade lógica: pode introduzir-se em qualquer ponto
- De $P \wedge Q$ infere-se P e infere-se Q
  - eliminação da conjunção
- Tendo provado P e Q pode inferir-se $P \wedge Q$
  - introdução da conjunção
- Tendo provado P pode inferir-se $P \vee Q \vee \ldots R$
  - introdução da disjunção

Métodos de prova

- **Prova por casos** (eliminação da disjunção)
  - Fórmula a provar: S
  - Disjunção já provada: $P \vee Q$
  - Mostra-se que se obtém S se se assumir P, e que se obtém S se se assumir Q; como um deles tem de verificar-se, conclui-se S
  - Generaliza-se a qualquer número de elementos na disjunção
- **Prova por contradição** (introdução da negação)
  - Fórmula a provar: $\neg S$
  - Premissas: P, Q, R, …
  - Assumir S e mostrar que se obtém uma contradição
  - $\neg S$ é consequência lógica das premissas

Prova por casos

- Mostrar que existem números irracionais b e c tais que b^c é racional
- Considera-se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$: é racional ou é irracional
  - Se é racional: temos $b = c = \sqrt{2}$
  - Se é irracional: fazemos $b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $c = \sqrt{2}$
    - $b^c = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$

      $= \sqrt{2}^{(\sqrt{2}.\ \sqrt{2})}$

      $= \sqrt{2}^{2} = 2$
- Quer $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ seja racional ou irracional, existem b e c irracionais tais que b^c é racional

Prova por casos 2

Provar que Small(c) é consequência de

(Cube(c) $\wedge$ Small(c)) $\vee$ (Tet(c) $\wedge$ Small(c)) :

- Prova:

(Cube(c) $\wedge$ Small(c)) $\vee$ (Tet(c) $\wedge$ Small(c)) é premissa

Vamos analisar 2 casos, para os 2 componentes da disjunção

I- Assume-se Cube(c) $\wedge$ Small(c)

Então Small(c) (por eliminação da conjunção)

II- Assume-se Tet(c) $\wedge$ Small(c)

Então Small(c) (por eliminação da conjunção)

- Em qualquer dos casos: obtém-se Small(c)

Prova por casos 3

De (NaSala(rita) $\wedge$ Feliz(rui)) $\vee$ (NaSala(ana) $\wedge$ Feliz(luis))

pretendemos provar Feliz(rui) $\vee$ Feliz(luis)

- Assumindo a disjunção da premissa temos que
  - (NaSala(rita) $\wedge$ Feliz(rui)) ou
  - (NaSala(ana) $\wedge$ Feliz(luis))

No primeiro caso temos Feliz(rui) e portanto

Feliz(rui) $\vee$ Feliz(luis) por introdução de disjunção

No segundo caso temos Feliz(luis) e portanto

Feliz(rui) $\vee$ Feliz(luis) por introdução de disjunção

- Em qualquer dos casos, tem-se a conclusão pretendida

Prova indireta

- Exemplo:
  - Premissas: BackOf(a,b)
  - BackOf(b,c)
  - i) se assumir Cube(a)
    - Não se consegue extrair mais informação
  - ii) se assumir ¬BackOf(a,b)
    - Contradição direta com uma premissa
    - Pode-se concluir o contrário, embora sem valor acrescentado
  - iii) se assumir BackOf(c,a)
    - De BackOf(a,b) e BackOf(b,c) conclui-se BackOf(a,c) e daí ¬BackOf(c,a)
    - Contradição indireta com uma conclusão das premissas
    - Em geral, se há contradição é porque de algum modo a conclusão contrária já está implícita nas premissas e portanto pode ser explicitada

Prova por contradição

- Premissas: Cube(c) $\vee$ Dodec(c) e Tet(b)
- Concluir: b$\neq$c
- Prova:
  - Supondo b=c
  - Da 1ª premissa: Cube(c) ou Dodec(c)

    Se Cube(c) , então Cube(b) (indiscernibilidade dos idênticos)

    o que contradiz Tet(b)

    Se Dodec(c) então Dodec(b) (indiscernibilidade dos idênticos)

    o que contradiz Tet(b)
- Obtemos contradição nos 2 casos, logo a suposição b=c conduz a contradição
- Então, conclui-se b$\neq$c

Prova por contradição 2

- Provar: $\sqrt{2}$ é irracional
  - Factos acerca dos racionais
    - nº racional pode ser expresso como p/q, com pelo menos 1 de p e q ímpar
    - elevando ao quadrado um número ímpar, obtém-se outro ímpar; se n^2 é par, n é par e n^2 é divisível por 4
- Prova:
  - Suposição: $\sqrt{2}$ é racional

  $\sqrt{2} = p/q$ (um de p e q é ímpar)

  $p^2 / q^2 = 2$ ou $p^2 = 2\,q^2$: p^2 é par e p^2 é divisível por 4

  p^2 é divisível por 4, q^2 é divisível por 2; q é par

  p e q ambos pares: contradiz a afirmação inicial
- Então $\sqrt{2}$ não é racional

O que é contradição?

- Afirmação que não pode ser verdadeira

  NaSala(rita) $\wedge$ $\neg$NaSala(rita)

  b $\neq$ b

- Conjunto de afirmações que não podem ser verdadeiras simultaneamente

  Cube(c) e Tet(c)

- Conjunto de frases é contraditório se não puder ser satisfeito
- Para provar F usando contradição:

  Assume-se $\neg$ F

  Constrói-se $\neg$ $\neg$ F

  Conclui-se $\neg$ $\neg$ F e portanto F

Premissas inconsistentes

- Conjunto de frases é inconsistente: não existe um mundo no qual possam ser satisfeitas simultaneamente
- Consequência lógica: qualquer fórmula é consequência de um conjunto inconsistente de premissas
  - Argumento é válido trivialmente por não haver nenhuma circunstância que torne as premissas simultaneamente verdadeiras

$$\mathrm{NaSala(rita)} \lor \mathrm{NaSala(luis)}$$

$$\neg\mathrm{NaSala(rita)}$$

$$\neg\mathrm{NaSala(luis)}$$

- Argumentos com premissas inconsistentes: pouco úteis
  - se não há circunstância que torne as premissas simultaneamente verdadeiras, não temos indicação quanto ao valor lógico da conclusão – **argumento não é sólido**

Estilo

- Nas provas informais, os passos mencionados devem ser
  - Relevantes, para não aborrecer nem distrair o leitor
  - De fácil compreensão, para serem convincentes

- Significa que as provas devem levar em consideração a quem se destinam

PROVAS FORMAIS

Regras de inferência para $\wedge$

Eliminação da conjunção ($\wedge$ Elim)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_1 \wedge \ldots \wedge P_i \wedge \ldots \wedge P_n \\
 & \ldots \\
\triangleright & P_i
\end{array}
$$

Introdução da conjunção ($\wedge$ Intro)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_1 \\
 & \Downarrow \\
 & P_n \\
 & \ldots \\
\triangleright & P_1 \wedge \ldots \wedge P_i \wedge \ldots \wedge P_n
\end{array}
$$

P_1 $\Downarrow$ P_n significa que todos os elementos P_1 a P_n têm de aparecer na prova antes de se introduzir a conjunção

$\wedge$ nas provas formais

1. $A \wedge B \wedge C$
2. B — $\wedge$ Elim: 1
3. C — $\wedge$ Elim: 1
4. $C \wedge B \wedge C$ — $\wedge$ Intro: 3,2,3

Parêntesis: introduzir quando puder haver ambiguidade

1. $P \vee Q$
2. R
3. $(P \vee Q) \wedge R$ — $\wedge$ Intro: 1,2

1. ~~$P \vee Q$~~
2. ~~R~~
3. ~~$P \vee Q \wedge R$~~ — $\wedge$ Intro: 1,2

Regras de inferência para $\vee$

Introdução da disjunção

($\vee$ Intro)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_i \\
 & \ldots \\
\triangleright & P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots \vee P_n
\end{array}
$$

Eliminação da disjunção

($\vee$ Elim)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots \vee P_n \\
 & \ldots \\
 & \begin{array}{|l} \underline{P_1} \\ \ldots \\ F \end{array} \\
 & \Downarrow \\
 & \begin{array}{|l} \underline{P_n} \\ \ldots \\ F \end{array} \\
 & \ldots \\
\triangleright & F
\end{array}
$$

Prova por casos

$\vee$ nas provas formais

1. $(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$

   2. $(A \wedge B)$
   3. B — $\wedge$ Elim: 2
   4. $B \vee D$ — $\vee$ Intro: 3

   5. $(C \wedge D)$
   6. D — $\wedge$ Elim: 5
   7. $B \vee D$ — $\vee$ Intro: 6

8. $B \vee D$ — $\vee$ Elim: 1, 2-4, 5-7

Objetivo: $B \vee D$

Exemplo

1. $P \vee (Q \wedge R)$
2. P
3. $P \vee Q$ — ? Intro: 2
4. $P \vee R$ — $\vee$ Intro: ?
5. ? — $\wedge$ Intro: 3,4

6. $Q \wedge R$
7. Q — $\wedge$ Elim: ?
8. $P \vee Q$ — $\vee$ Intro: 7
9. R — ?Elim: 6
10. ? — $\vee$ Intro: 9
11. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ — $\wedge$ Intro: 8,10

12. $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ — $\vee$ Elim: ?, 2-5, 6-?

Propriedade distributiva da disjunção relativamente à conjunção

Regras de Inferência para ¬

Eliminação da negação (¬ Elim)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \neg\neg P \\
 & \ldots \\
\triangleright & P
\end{array}
$$

Introdução da negação (¬ Intro)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} \underline{P} \\ \ldots \\ \bot \end{array} \\
\triangleright & \neg P
\end{array}
$$

Prova por contradição

$\perp$ Contradição

Introdução da contradição ($\perp$ Intro)

$$
\begin{array}{l|l}
 & P \\
 & \ldots \\
 & \neg P \\
 & \ldots \\
\triangleright & \perp
\end{array}
$$

Eliminação da contradição ($\perp$ Elim)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \perp \\
 & \ldots \\
\triangleright & P
\end{array}
$$

Teorema 3

Lei de DeMorgan

1. $\neg P \lor \neg Q$	
2. $P \land Q$	
3. $\neg P$	
4. P	$\land$ Elim: 2
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 4,3
6. $\neg Q$	
7. Q	$\land$ Elim: 2
8. $\perp$	$\perp$ Intro: 7,6
9. $\perp$	$\lor$ Elim: 1, 3-5, 6-8
10. $\neg(P \land Q)$	$\neg$ Intro: 2-9

$\neg(P \land Q)$

Estratégia geral de prova por contradição com prova por casos lá dentro

$\neg$ nas provas formais

1. A	
2. $\neg$ A	
3. $\perp$	$\perp$ Intro: 1,2
4. $\neg\neg$A	$\neg$ Intro: 2-3

Teorema 1

$$A \Leftrightarrow \neg\neg A$$

com a eliminação da $\neg$

1. P	
2. $\neg$ P	
3. $\neg$Q	
4. $\perp$	$\perp$ Intro: 1,2
5. $\neg\neg$ Q	$\neg$ Intro: 3-4
6. Q	$\neg$ Elim: 5

Prova-se fórmula arbitrária a partir de premissas inconsistentes

Exemplo

Prova de verdade lógica: não tem premissas

1. $P \wedge Q \wedge \neg P$	
2. P	$\wedge$ Elim: 1
3. $\neg P$	$\wedge$ Elim: 1
4. $\perp$	$\perp$ Intro: 2,3
5. $\neg (P \wedge Q \wedge \neg P)$	$\neg$ Intro: 1-4

Uso de subprovas

1. $(B \land A) \lor (A \land C)$	
2. $B \land A$	
3. B	$\land$ Elim: 2
4. A	$\land$ Elim: 2
5. $(A \land C)$	
6. A	$\land$ Elim: 5
7. A	$\lor$ Elim: 1, 2-4, 5-6
8. $A \land B$	$\land$ Intro: 7,3

<u>Errado</u>
8: usa passo 3 de subprova fechada

- Quando uma subprova é <u>fechada</u>:
- Suposições são <u>descarregadas</u>
- Subprova pode ser usada <u>como um todo</u> para justificar outros passos

Exemplo

Teorema 2

Lei de DeMorgan

1. $\neg(P \wedge R)$	
2. $\neg(\neg P \vee \neg R)$	
3. $\neg P$	
4. $\neg P \vee \neg R$	$\vee$ Intro: 3
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 4,2
6. $\neg\neg P$	$\neg$ Intro: 3-5
7. P	$\neg$ Elim: 6
8. $\neg R$	
9. $\neg P \vee \neg R$	$\vee$ Intro: 8
10. $\perp$	$\perp$ Intro: 9,2
11. $\neg\neg R$	$\neg$ Intro: 8-10
12. R	$\neg$ Elim: 11
13. $P \wedge R$	$\wedge$ Intro: 7,12
14. $\neg(P \wedge R)$	Reit: 1
15. $\perp$	$\perp$ Intro: 13,14
16. $\neg\neg(\neg P \vee \neg R)$	$\neg$ Intro: 2-15
17. $\neg P \vee \neg R$	$\neg$ Elim: 16

$\neg P \vee \neg R$

Exercício

Teorema do Cancelamento

1. $P \vee Q$	
2. $\neg P$	
3. P	
4. $\neg Q$	
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 3,2
6. $\neg\neg Q$	$\neg$ Intro: 4-5
7. Q	$\neg$ Elim: 6
8. Q	
9. Q	Reit: 8
10. Q	$\vee$ Elim: 1,3-7,8-9

Q

Estratégia seguida:

- prova por casos incluindo uma prova por contradição no 1º caso

Experimentar:

- prova por contradição com prova por casos

Citar teoremas

- Para encurtar a prova em F : usar resultados prévios

1.	$\neg(P \wedge Q)$	
2.	P	
3.	$\neg P \vee \neg Q$	Teor Prev (Teorema 2): 1
4.	$\neg\neg P$	Teor Prev (Teorema 1): 2
5.	$\neg Q$	Teor Prev (Cancelamento): 3,4

- Símbolos usados nas provas: podem ser substituídos
  - por outros símbolos
  - por fórmulas arbitrárias

Leis distributivas

Distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

- Equivalências úteis nas simplificações de fórmulas:
  - Idempotência
  - Leis distributivas
  - Leis de DeMorgan
  - Dupla negação
  - Princípios do 3º excluído ($P \vee \neg P \Leftrightarrow V$) e da não contradição ($P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$)
  - Comutatividade, associatividade
  - Elementos neutro ($\wedge$: V, $\vee$: F) e absorvente ($\vee$: V, $\wedge$: F)
  - Cancelamento, …

Formas normais

- Forma normal disjuntiva (DNF):
  - Fórmula construída a partir de literais com as conetivas $\wedge$ e $\vee$: reescrita como disjunção de conjunções de literais
  - $(P_1 \wedge ... \wedge P_n) \vee (Q_1 \wedge ... \wedge Q_n) \vee \ldots \vee (R_1 \wedge ... \wedge R_n)$

- Forma normal conjuntiva (CNF):
  - Fórmula construída a partir de literais com as conetivas $\wedge$ e $\vee$: reescrita como conjunção de disjunções de literais
  - $(P_1 \vee ... \vee P_n) \wedge (Q_1 \vee ... \vee Q_n) \wedge \ldots \wedge (R_1 \vee ... \vee R_n)$

Exemplo

Transformar em forma normal disjuntiva

$$
\begin{aligned}
(A \lor B) \land (C \lor D) &\Leftrightarrow [(A \lor B) \land C] \lor [(A \lor B) \land D] \\
&\Leftrightarrow (A \land C) \lor (B \land C) \lor [(A \lor B) \land D] \\
&\Leftrightarrow (A \land C) \lor (B \land C) \lor (A \land D) \lor (B \land D)
\end{aligned}
$$

Transformar em forma normal conjuntiva

$$
\begin{aligned}
(A \land B) \lor (C \land D) &\Leftrightarrow [(A \land B) \lor C] \land [(A \land B) \lor D] \\
&\Leftrightarrow (A \lor C) \land (B \lor C) \land [(A \land B) \lor D] \\
&\Leftrightarrow (A \lor C) \land (B \lor C) \land (A \lor D) \land (B \lor D)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\neg((A \lor B) \land \neg C) &\Leftrightarrow \neg(A \lor B) \lor \neg\neg C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \land \neg B) \lor \neg\neg C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \land \neg B) \lor C \\
&\Leftrightarrow (\neg A \lor C) \land (\neg B \lor C)
\end{aligned}
$$

Completude para as funções da verdade

- Uma conetiva arbitrária pode ser expressa com $\neg$, $\wedge$ e $\vee$?
- Conetivas binárias: tabela de verdade tem 4 linhas
  - cada linha pode ter V ou F
  - número de conetivas possíveis: 2^4

P	Q	P $*$ Q
V	V	valor1
V	F	valor2
F	V	valor3
F	F	valor4

$C_1 = P \wedge Q$

$C_2 = P \wedge \neg Q$

$C_3 = \neg P \wedge Q$

$C_4 = \neg P \wedge \neg Q$

Representação de $*$: disjunção dos C_i correspondentes a linhas com valor V

Todas as funções binárias funcionais da verdade podem ser descritas com $\neg$, $\wedge$ e $\vee$

Completude para as funções da verdade

- Conetivas unárias

P	$\#P$
V	valor1
F	valor2

Ambos os valores F: $P \wedge \neg P$

Outros casos: disjunção de

$C_1 = P$ e $C_2 = \neg P$

- Conetivas de outras aridades

P	Q	R	$@(P,Q,R)$
V	V	V	F
V	V	F	V
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Exprimir conetiva em DNF:

$(P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \ldots$

- Bastam, e.g., $\neg$ e $\wedge$: $P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$