<u>RESOLUÇÃO ASSISTIDA DE PROBLEMAS</u>

<u>CAPÍTULO 6 – CARACTERIZAÇÃO DE ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS UNIVARIADAS</u>

<u>PROBLEMA 6.1</u>

APOIOS À RESOLUÇÃO

<u>Alínea (i)</u>

<u>Apoio 1</u> (apenas o resultado)

a) 24.58%.

b) 9.89%.

c) 90.11%. ■

<u>Apoio 2</u> (sugestão)

Note que a variável aleatória "número de grandes prémios terminados" segue uma distribuição Binomial. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial. ■

<u>Apoio 3</u> (resolução completa)

A variável aleatória *Y* corresponde ao número de grandes prémios terminados. Admitindo que os resultados associados a cada grande prémio são independentes, então *Y* segue uma distribuição Binomial $B(6, 0.20)$, cuja função de probabilidade, $p(y)$, é:

$$p(y) = \binom{6}{y} \cdot 0.20^{y} \cdot 0.80^{6-y}.$$

a) $p(2) = \binom{6}{2} \cdot 0.20^{2} \cdot 0.80^{4} = 0.2458$

(este valor é dado directamente na Tabela da distribuição Binomial, incluída no Anexo «Tabelas»).

b) $p(Y \geq 3) = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 - [\,p(0) + p(1) + p(2)\,] =$

$= 1 - (0.2621 + 0.3932 + 0.2458) = 0.0989.$

c) $p(Y \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 1 - p(Y \geq 3) = 1 - 0.0989 = 0.9011.$ ■

<u>Alínea (ii)</u>

<u>Apoio 1</u> (apenas o resultado)

1.77%. ∎

Apoio 2 (sugestão)

Procure caracterizar a variável "número de carros Fórmula 1 patrocinados pela firma RFM à chegada de um grande prémio". A partir desta variável, procure definir a variável "número de grandes prémios nos quais há pelo menos dois Fórmula 1 à chegada". ∎

Apoio 3 (resolução completa)

Denote-se por U o número de carros fórmula 1 patrocinados pela firma RFM à chegada de um grande prémio.A variável U seguirá a distribuição Binomial B(3, 0.20) e assim

$$p(U \geq 2) = p(2) + p(3) = 0.0960 + 0.0080 = 0.1040\,.$$

Denote-se por V o número de grandes prémios nos quais há pelo menos dois Fórmula 1 à chegada. A variável V seguirá ainda a distribuição Binomial B(6, 0.104), pelo que

$$\mathrm{p}(V \geq 3) = 1 - [\ \mathrm{p}(0) + \mathrm{p}(1) + \mathrm{p}(2)\ ],$$

com

$$p(0) = (1 - 0.104)^6 = 0.896^6 = 0.5174\,,$$

$$p(1) = \binom{6}{1} \cdot 0.104 \cdot 0.896^5 = 0.3603 \text{ e}$$

$$p(2) = \binom{6}{2} \cdot 0.104^2 \cdot 0.896^4 = 0.1046\,.$$

Finalmente

$$\mathrm{p}(V \geq 3) = 1 - (0.5174 + 0.3603 + 0.1046) = 0.0177\,.$$ ∎

PROBLEMA 6.2

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

35.29%. ∎

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória “número de votos favoráveis dos vogais” segue uma distribuição Binomial. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Considere-se a hipótese de que os vogais não se abstêm. Nestas condições, e dado que o presidente vota favoravelmente na «sua» proposta, a variável Y, que denota o número de votos favoráveis dos vogais, segue a distribuição Binomial $B(6, 0.35)$. Nestas condições,

$$p(y) = \binom{6}{y} \cdot 0.35^{y} \cdot 0.65^{6-y}$$

e

$$p(Y \geq 3) = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 - p(Y \leq 2) = 1 - [\, p(0) + p(1) + p(2)\,] =$$
$$= 1 - (0.0754 + 0.2437 + 0.3280) = 0.3529 \,. ■$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

82.15%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que, nesta situação, o número de vogais cujas intenções de voto o presidente da empresa desconhece cinge-se a quatro. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Z a variável aleatória que corresponde ao número de votos favoráveis dos vogais cujas intenções de voto o Presidente desconhece. Esta variável segue uma distribuição Binomial $B(4, 0.35)$. Assim,

$$p(z) = \binom{4}{z} \cdot 0.35^{z} \cdot 0.65^{4-z}$$

e

$$p(Z \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - 0.1785 = 0.8215 \,. ■$$

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

48.07%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Procure aplicar o Teorema de Bayes, recorrendo ao conceito de probabilidade condicional. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Considere os seguintes acontecimentos:

S1: sucesso na votação prévia

S2: sucesso na votação em concelho.

A probabilidade associada a este segundo acontecimento é

$$P(S2) = P(S2 \mid S1) \cdot P(S1) + P(S2 \mid \overline{S1}) \cdot P(\overline{S1}).$$

Seja Y_1 uma variável aleatória que denota o número de votos favoráveis dos dois vogais. Então

$$Y_1 \frown B(2, 0.35).$$

Nestas condições

$$P(S1) = P(Y_1 \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - 0.4225 = 0.5775$$

e

$$P(\overline{S1}) = 1 - P(S1) = 1 - 0.5775 = 0.4225 .$$

Falta ainda determinar $P(S2 \mid S1)$ e $P(S2 \mid \overline{S1})$. Seja Y_2 a variável aleatória que corresponde ao o número de votos favoráveis dos vogais que não participaram na primeira votação. Então

$$Y_2 \frown B(4, 0.35),$$

vindo

$$P(S2 \mid S1) = P(Y_2 \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - 0.1785 = 0.8215$$

e

$$P(S2 \mid \overline{S1}) = P(Y_2 \geq 4) = P(Y_2 = 4) = 0.0150 .$$

Substituindo, resulta

$$P(S2) = 0.8215 \cdot 0.5775 + 0.0150 \cdot 0.4225 = 0.4807 . \ ■$$

PROBLEMA 6.3

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

9.8%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória "número de calços defeituosos na remessa de dez" segue uma distribuição Binomial. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial.

Note ainda que a variável aleatória "número de calços defeituosos no conjunto de dois seleccionados retirados aleatoriamente da remessa", segue uma distribuição Hipergeométrica. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória com esta característica.

Recorra ao conceito de probabilidade condicional. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

Seja Y a variável aleatória que corresponde ao número de calços defeituosos na remessa de dez. Esta variável segue uma distribuição Binomial $B(10, 0.05)$. Assim,

$$p(y) = \binom{10}{y} \cdot 0.05^{y} \cdot 0.95^{10-y},$$

pelo que

$p(0) = 0.5987$

$p(1) = 0.3151$

$p(2) = 0.0746$

$p(3) = 0.0105$

e

$p(y > 3)$ corresponde a um valor desprezável.

Seja agora Z a variável aleatória que denota o número de calços defeituosos no conjunto de dois seleccionados aleatoriamente. Esta variável segue a distribuição Hipergeométrica $H\,(10 \cdot p, 10 \cdot q, 2)$, em que $10 \cdot p$ corresponde ao número de calços defeituosos na remessa e $10 \cdot q$ ao número de calços não defeituosos. Assim,

$$p(z) = \frac{\binom{10 \cdot p}{z}\binom{10 \cdot q}{N - z}}{\binom{10}{2}}.$$

Ora,

$$P(Z = 0) = P(Z = 0 \mid Y = 0) \cdot P(Y = 0) + P(Z = 0 \mid Y = 1) \cdot P(Y = 1) +$$

$$+ P(Z = 0 \mid Y = 2) \cdot P(Y = 2) + P(Z = 0 \mid Y = 3) \cdot P(Y = 3) \qquad (1).$$

Calculam-se agora as probabilidades incluídas nesta expressão.

$P(Z=0 \mid Y=0)=1$.

Para determinar $P(Z=0 \mid Y=1)$ refira-se que, nestas condições, Z segue uma distribuição $H(1, 9, 2)$. Então

$$p(Z=0 \mid Y=1)=\frac{\binom{1}{0}\binom{9}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1\cdot 9!\cdot 2!\cdot 8!}{2!\cdot 7!\cdot 10!}=\frac{8}{10}=0.800\,.$$

Para determinar $P(Z=0 \mid Y=2)$ o raciocínio é semelhante. Com $Y=2$ a variável Z segue uma distribuição $H(2, 8, 2)$, pelo que

$$p(Z=0 \mid Y=2)=\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1\cdot 8!\cdot 2!\cdot 8!}{2!\cdot 6!\cdot 10!}=\frac{8\cdot 7}{10\cdot 9}=0.622\,.$$

Com $Y=3$ variável Z segue uma $H(3, 7, 2)$, pelo que $P(Z=0 \mid Y=3)$ é dado por

$$p(Z=0 \mid Y=3)=\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1\cdot 7!\cdot 2!\cdot 8!}{2!\cdot 5!\cdot 10!}=\frac{6\cdot 7}{10\cdot 9}=0.467\,.$$

Substituindo os valores encontrados na expressão (1), vem:

$$P(Z=0)=1\cdot 0.5987+0.800\cdot 0.3151+0.622\cdot 0.0746+0.467\cdot 0.0105\approx 0.902$$

Assim, a probabilidade de a remessa ser rejeitada é

$$P(Z\geq 1)=1-P(Z=0)=1-0.902=0.098\,.$$

<u>Alternativa 2:</u>

Note que seleccionar dois calços ao acaso a partir de uma remessa supostamente aleatória é o mesmo que retirar uma amostra aleatória de dois calços a partir da população. Então a variável Z (número de calços defeituosos no conjunto de dois seleccionados aleatoriamente) segue uma distribuição $B(2, 0.05)$. Nestas condições,

$$p(z)=\binom{2}{z}\cdot 0.05^{z}\cdot 0.95^{2-z}$$

e

$$P(Z\geq 1)=1-P(Z=0)=1-0.95^{2}=0.0978\approx 0.098\,. \blacksquare$$

PROBLEMA 6.4

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

48.4%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a probabilidade de o operador permanecer 10 minutos sem executar nenhum retoque é equivalente à probabilidade de, numa sequência de 10 peças, nenhuma necessitar de ser retocada. Reveja as definições associadas à distribuição Binomial.■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

A probabilidade de o operador permanecer 10 minutos sem executar nenhum retoque é equivalente probabilidade de, numa sequência de 10 peças, nenhuma necessitar de ser retocada.

Seja Y a variável aleatória que denota o número de peças retocadas em 10 minutos. Seja ainda $p = 0.07$ a probabilidade de uma peça ser retocada manualmente pelo operador e $q = 1 - 0.07 = 0.93$ a probabilidade de uma peça não necessitar de ser retocada. A variável Y seguirá então a distribuição Binomial $B(10, 0.07)$. Assim,

$$p(y) = \binom{10}{y} \cdot 0.07^{y} \cdot 0.93^{10-y}$$

e

$$p(Y = 0) = 0.93^{10} = 0.484 .$$■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

1.83%. ■

Apoio 2 (sugestão)

A variável número de peças produzidas sem retoque até ocorrer a segunda peça a necessitar de retoque, segue uma distribuição Binomial Negativa. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória com esta característica. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

Seja Y a variável aleatória que corresponde ao número de peças produzidas sem retoque até ocorrer a segunda peça a necessitar de retoque. Esta variável segue uma distribuição Binomial Negativa $BN(2,\, 0.07)$, cuja função probabilidade é

$$p(y)=\binom{y+2-1}{y}\cdot 0.07^2\cdot\left(1-0.07^y\right).$$

Assim, numa sequência de seis peças, a probabilidade de a última ser a segunda peça a necessitar de retoque é:

$$p(4)=\binom{5}{4}\cdot(0.07)^2\cdot(0.93)^4=0.0183\,.$$

Alternativa 2

Note que o facto de, entre 6 produzidas, a sexta peça corresponder à segunda a necessitar de retoque, implica que nas 5 primeiras haja uma a necessitar de retoque e que a sexta peça seja também defeituosa. Considerem-se os acontecimentos:

A*:* existir uma defeituosa nas 5 primeiras peças produzidas

B*:* a sexta peça produzida é defeituosa.

A variável Z que denota o número de peças retocadas num conjunto de cinco, segue uma distribuição Binomial $B(5,\, 0.07)$. Nestas condições, a probabilidade pretendida é

$$p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=p(\mathrm{B}|\mathrm{A})\cdot p(\mathrm{A}).$$

Ora, $p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{Z} = 1)$ e, portanto,

$$p(Z=1)=\left[\binom{5}{1}\cdot 0.07^1\cdot 0.93^4\right].$$

Por outro lado, como A e B são acontecimentos independentes, $p(\mathrm{B}|\mathrm{A})=p(\mathrm{B})=0.07$.

Substituindo, resulta

$$p(A\cap B)=\left[\binom{5}{1}\cdot 0.07^1\cdot 0.93^4\right]\cdot 0.07=0.0183=1.83\%\,.\ \blacksquare$$

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

13.28 minutos. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que o tempo (em minutos) que o operador permanece sem executar nenhum retoque equivale ao número de peças que são produzidas sem necessitarem de qualquer retoque, até que haja uma que necessite. A variável em questão segue uma distribuição geométrica, que é um caso particular da distribuição Binomial Negativa. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Y a variável aleatória que corresponde ao número de peças produzidas até ocorrer a primeira peça a precisar de retoque. Esta variável segue uma distribuição Geométrica $G(0.07)$. O valor esperado de Y é dado por

$$\mu_y = \frac{q}{p},$$

pelo que o tempo que, em média, o operador permanece sem executar nenhum retoque é

$\mu_y = 0.93/0.07 = 13.28$ peças (o que equivale a 13.28 minutos). ■

PROBLEMA 6.5

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

$2 \cdot \dfrac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{6^N}$, com $N \geq 2$ (em que N representa o número cartas recebidas). ■

Apoio 2 (sugestão)

Sejam A e B os selos em falta. A colecção só pode ficar completa após ter sido recebida a segunda carta. Tal sucederá na N-ésima carta ($N \geq 2$) se ocorrer uma das duas situações seguintes:

(i) Nas N - 1 cartas anteriores o coleccionador recebe pelo menos um selo A, não recebe nenhum selo B e na N-ésima carta recebe um selo B.

(ii) Nas N - 1 cartas anteriores coleccionador recebe pelo menos um selo B, não recebe nenhum selo A e na N-ésima carta recebe um selo A. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam A e B os selos em falta. A colecção só pode ficar completa após ter sido recebida a segunda carta. Tal sucederá na N-ésima carta ($N \geq 2$) se ocorrer uma das duas situações seguintes:

(i) Nas N - 1 cartas anteriores o coleccionador recebe pelo menos um selo A, não recebe nenhum selo B e na N-ésima carta recebe um selo B.

(ii) Nas N - 1 cartas anteriores o coleccionador recebe pelo menos um selo B, não recebe nenhum selo A e na N-ésima carta recebe um selo A.

As probabilidades de ocorrência destas duas situações são claramente iguais. Calcule-se a primeira. Sejam

Acontecimento B: a última carta (a N-ésima) traz um selo B.

Y: número de selos A nas N - 1 cartas que precedem a última.

Z: número de selos B nas N - 1 cartas que precedem a última.

Para $N \geq 2$:

$$P_N = P\{[Y \geq 1 \cap Z = 0] \cap B\} = P[Y \geq 1 \cap Z = 0] \cdot P(B)$$
$$= P[Y \geq 1 | Z = 0] \cdot P(Z = 0) \cdot P(B) = [1 - P(Y = 0 \mid Z = 0)] \cdot P(Z = 0) \cdot P(B).$$

Ora, a variável Z segue uma Binomial $B(N$ -1, 1/6) e $Y | Z = 0$ uma Binomial $B(N - 1, 1/5)$. Assim,

$$P(Z = 0) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{N-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1}$$

e

$$P(Y = 0 | Z = 0) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{N-1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{N-1}$$

Substituindo, vem:

$$P_N = \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{N-1}\right] \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{5^{N-1}} \cdot \frac{5^{N-1}}{6^{N-1}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5N^{n-1} - 4^{N-1}}{6^N}.$$

A probabilidade de ocorrência da situação (i) ou (ii) é então:

$$2P_N = \begin{cases} 0 & , \quad N < 2 \\ 2 \cdot \dfrac{5^{N-1} - 4^{N-1}}{6^N} & , \quad N \geq 2 \end{cases}$$

■

PROBLEMA 6.6

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

4.9%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória "número de peças defeituosas entre as 5 retiradas do lote" segue uma distribuição Hipergeométrica. Para o cálculo da probabilidade pretendida recorra ao acontecimento complementar. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória com esta característica. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Y a variável aleatória que denota o número de peças defeituosas entre as 5 retiradas do lote. Então, Y segue uma distribuição Hipergeométrica $H(M \cdot p, M \cdot (1-p), N)$, em que p representa a proporção de peças defeituosas no lote (com p = 0.01) e M o número de peças que compõe o lote (com M = 300). Ou seja, Y segue uma distribuição H(3, 297, 5). A função de probabilidade de Y é:

$$p(y) = \frac{\binom{3}{y} \cdot \binom{297}{5-y}}{\binom{300}{5}}.$$

Como

$$p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$$

e

$$p(0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{297}{5}}{\binom{300}{5}} = \frac{297! \cdot 5! \cdot 295!}{5! \cdot 300! \cdot 292!} = 0.951,$$

resulta

$$p(Y \geq 1) = 1 - 0.951 = 0.049.$$ ■

PROBLEMA 6.7

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

4.19%. ■

Apoio 2 (sugestão)

É razoável admitir que a variável aleatória "número de avarias por unidade de tempo" segue uma distribuição de Poisson. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Para cada máquina, o número médio de avarias por hora é de $\lambda_M = 2$ avarias/8 horas $= 0.25$. É razoável admitir que a variável aleatória Y' - número de avarias/hora – segue uma distribuição de Poisson(λ_M = 0.25). Considera-se agora o conjunto de 20 máquinas. Nesta situação, a taxa horária de avarias (das 20 máquinas) será:

$\lambda_C = 20 \cdot 0.25 = 5$ [avarias/hora].

Ora, um intervalo de tempo Δt de 10 minutos corresponde a 0.1667 horas. Dado que a probabilidade de se registar uma avaria num intervalo qualquer de dimensão Δt é praticamente proporcional à dimensão do intervalo, a taxa de avarias, para o conjunto das 20 máquinas, em períodos de 10 minutos é dada por:

$\lambda = \lambda_C \cdot \Delta t = 5 \cdot 0.1667 = 0.8333$ [avarias/10 minutos].

Nestas condições, a variável aleatória Y, que denota o número de avarias em qualquer período de 10 minutos, seguirá uma distribuição de Poisson(λ = 0.8333). Note-se que a distribuição do número de avarias em cada intervalo de 10 minutos é a mesma para todos os intervalos (constitui uma das condições que se deverá verificar numa distribuição de Poisson). Como a função de probabilidade de Y é

$$p_Y(y) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^y}{y!},$$

vem

$$P(Y = 3) = e^{-0.8333} \cdot \frac{0.8333^3}{3!} = 0.0419 \ . \ ■$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Valor esperado: 5 [avarias/hora]

Variância: 5 [avarias/hora]^2. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 6.3 veja quais as expressões do valor esperado e da variância da distribuição de Poisson. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja Z a variável aleatória que representa o número de avarias/hora que se verificam no conjunto de 20 máquinas. Para este conjunto, a taxa horária de avarias é $\lambda_C = 20 \cdot 0.25 = 5$ e a variável Z seguirá uma distribuição de Poisson(λ_C = 5). Nestas condições,

$\mathrm{E}(Z) = \mu_Z = \lambda_C = 5$ [avarias/hora]

e

$\mathrm{Var}(Z) = \sigma_Z^2 = \lambda_C = 5$ [avarias/hora]^2. ■

PROBLEMA 6.8

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

83.47%. ■

Apoio 2 (sugestão)

A distribuição das variáveis aleatórias "número de bolhas por m^2" e "número de bolhas por placa" podem ser aproximadas por distribuições de Poisson. Na secção 6.3 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória seguindo uma distribuição de Poisson. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Considera-se aceitável admitir que a variável aleatória *Y'*, número de bolhas por m^2, segue uma distribuição de Poisson(λ = 0.4). Considerando agora cada placa de 1.5•3.0 m^2, o número médio de bolhas por placa (λ_p) será de:

λ_p = (0.4 bolhas/m^2)$\cdot$(1.5•3.0m^2) = 1.8 bolhas/placa.

A variável aleatória *Y,* número de bolhas por placa, seguirá então uma distribuição de Poisson(λ_p = 1.8). Assim,

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-1.8} \cdot \frac{1.8^0}{0!} = 1 - e^{-1.8} = 1 - 0.1653 = 0.8347\,.$$ ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

0.844%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a variável aleatória "número de placas sem bolhas de entre um conjunto de seis" segue uma distribuição Binomial. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Na alínea (i) admitiu-se que variável aleatória *Y,* número de bolhas por placa, seguia uma distribuição de Poisson($\lambda_p = 1.8$). Ora (ver Tabela 2 do Anexo Tabelas),

$P(Y = 0) = 0.1653$.

Seja Z a variável aleatória que denota o número de placas sem bolhas num conjunto de seis. A variável Z segue uma distribuição Binomial $B(6, 0.1653)$, cuja função probabilidade é

$$p(z) = \binom{6}{z} \cdot 0.1653^z \cdot 0.8347^{6-z}.$$

Assim, como

$$P(Z \geq 4) = p(4) + p(5) + p(6)$$

e

$$p(4) = \binom{6}{4} \cdot 0.1653^4 \cdot 0.8347^2 = 0.00780,$$

$$p(5) = \binom{6}{5} \cdot 0.1653^5 \cdot 0.8347^1 = 0.00062,$$

$$p(6) = \binom{6}{6} \cdot 0.1653^6 \cdot 0.8347^0 = 0.00002,$$

resulta

$$P(Z \geq 4) = 0.00780 + 0.00062 + 0.00002 = 0.00844.$$ ■

PROBLEMA 6.9

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

53.6 toneladas ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que a quantidade de cimento transferida diariamente do comboio para o entreposto (que se denota por Q) é igual à quantidade descarregada diariamente para os camiões. Procure definir a função de probabilidade da variável Q em função do número de camiões que podem chegar diariamente ao entreposto. ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória Y - número de camiões que se dirigem diariamente ao entreposto – segue uma distribuição de Poisson(λ = 3). Considere-se agora a variável Q que denota a quantidade de cimento que, diariamente, é transferida do comboio para o entreposto. Ora, Q (em toneladas) é igual à quantidade descarregada diariamente para os camiões o que, por sua vez, corresponde à procura satisfeita diariamente. Assim:

$$Q = \begin{cases} 20 \cdot y \ , & y \leq 3 \\ 80 \ , & y > 3 \end{cases}$$

Na tabela seguinte apresentam-se os valores da função probabilidade de Q em função do número de camiões que chegam por dia. Note-se que a capacidade máxima do entreposto equivale à descarga de quatro camiões (80 toneladas) e portanto

$$p(Y \geq 4) = 1 - p(Y \leq 3) = 1 - [\ p(0) + p(1) + p(2) + p(3)\ ] =$$
$$= 1 - (0.0498 + 0.1493 + 0.2241 + 0.2240) = 0.3528\,.$$

y [nº. de camiões]	q [toneladas]	$p(Q = q) = p(Y = y)$
0	0	$p(0) = p(Y = 0) = 0.0498$
1	20	$p(20) = p(Y = 1) = 0.1493$
2	40	$p(40) = p(Y = 2) = 0.2241$
3	60	$p(60) = p(Y = 3) = 0.2240$
≥ 4	80	$p(80) = p(Y \geq 4) = 0.3528$

O valor esperado de Q resulta então,

$$\mathrm{E}(Q) = \mu_Q = \sum_q q \cdot p(q)$$
$$= 0 \cdot 0.0498 + 20 \cdot 0.1493 + 40 \cdot 0.2241 + 60 \cdot 0.2240 + 80 \cdot 0.3528 = 53.6 \text{ toneladas.}$$ ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

6.4 [toneladas]. ■

Apoio 2 (sugestão)

Procure definir a variável aleatória "procura não satisfeita" (*PNS*) a partir das variáveis aleatórias "procura total" (*PT*) e "procura satisfeita" (Q). Na Secção 4.5 do Capítulo 4, veja como se calcula o parâmetro valor esperado de uma variável transformada a partir dos parâmetros das distribuições das variáveis originais. Note que se está perante uma transformação linear. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

Seja,

PT: procura total (diária)

PNS: procura não satisfeita (diariamente)

Q: procura satisfeita (diariamente).

Então,

$PNS = PT - Q$.

O valor esperado de *PNS* é

$\mathrm{E}(PNS) = \mu_{PNS} = \mathrm{E}(PT) - \mathrm{E}(Q)$.

Ora,

$PT = 20 \bullet Y$,

donde

$\mathrm{E}(PT) = \mu_{PT} = 20 \bullet \mathrm{E}(Y)$.

Uma vez que Y segue uma distribuição de Poisson(λ = 3), o seu valor esperado é $\mu_Y = 3$ camiões/dia. Então $\mathrm{E}(PT) = \mu_{PT} = 20 \bullet 3 = 60$ toneladas/dia, obtendo-se

$\mathrm{E}(PNS) = \mu_{PNS} = \mathrm{E}(PT) - \mathrm{E}(Q) = 60 - 53.6 = 6.4$ toneladas/dia.

Alternativa 2

A procura não satisfeita (*PNS*) toma os seguintes valores (em toneladas/dia)

$$PNS = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 4 \\ 20 \cdot y & , \quad y > 4 \end{cases}$$

Na tabela seguinte apresentam-se os valores da função probabilidade de *PNS* para o número de camiões (y) que, por dia, são desviados por não poderem descarregar (pelo facto de o entreposto estar cheio).

y [nº. de camiões]	*pns* [toneladas]	$p(Q = q) = p(Y = y)$
≤ 4	0	$p(0) = p(Y = 0) = 0.8153$
5	20	$p(20) = p(Y = 5) = 0.1008$
6	40	$p(40) = p(Y = 6) = 0.0504$
7	60	$p(60) = p(Y = 7) = 0.0216$
8	80	$p(80) = p(Y = 8) = 0.0081$
9	100	$p(100) = p(Y = 9) = 0.0027$
10	120	$p(120) = p(Y = 10) = 0.0008$
11	140	$p(140) = p(Y = 11) = 0.0002$
> 11	> 140	$p(>140) = p(Y > 11) \approx 0$

Ora,

$$\mathrm{E}(PNS) = \sum pns \cdot p(pns)$$

$$= 20 \cdot 0.1008 + 40 \cdot 0.0504 + 60 \cdot 0.0216 + 80 \cdot 0.0081 +$$
$$+ 100 \cdot 0.0027 + 120 \cdot 0.0008 + 140 \cdot 0.0002 = 6.37 \approx 6.4 \text{ [toneladas].} \blacksquare$$

PROBLEMA 6.10

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

6.23%. ■

Apoio 2 (sugestão)

O número de insucessos até ocorrer o r-ésimo sucesso (sair a face escolhida) segue uma distribuição Binomial Negativa. Calcule a probabilidade de ganhar o jogo ou ao fim de três lançamentos, ou fim de quatro, ou de cinco, ou de seis. A probabilidade pretendida no enunciado (ganhar uma partida) corresponde à soma das anteriores. Na secção 6.1 veja qual a expressão da função de probabilidade de uma variável aleatória Binomial Negativa. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Calcule-se a probabilidade de ganhar o jogo ou ao fim de três lançamentos, ou fim de quatro, ou de cinco, ou de seis. A probabilidade pretendida no enunciado (ganhar uma partida) corresponde à soma das anteriores. A primeira situação ocorre quando em três lançamentos sucessivos se verificam zero insucessos (ou seja, a partida acaba ao fim de três lançamentos), a segunda quando se ganha ao quarto lançamento (o que significa que ocorre um insucesso antes dele) e assim sucessivamente, até à situação em que se obtém o terceiro sucesso apenas no sexto lançamento.

Uma vez que se está perante experiências de Bernoulli, a probabilidade de existirem Y insucessos até ocorrer o r-ésimo sucesso (sair a face escolhida) é dada recorrendo à distribuição Binomial Negativa. No caso em estudo, a variável Y segue uma distribuição Binomial Negativa $BN(r = 3, p = 1/6)$, cuja função de probabilidade é:

$$p(y) = \binom{y+3-1}{y} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^y .$$

Assim, a probabilidade de ganhar em seis lançamentos é

$$p(Y \leq 3) = p(0) + p(1) + p(2) + p(3).$$

Como

$$p(0)=\binom{2}{0}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0=0.0046$$

$$p(1)=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1=0.0116$$

$$p(2)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=0.0193$$

$$p(3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3=0.0268,$$

resulta

$$p(Y\leq 3)=0.0046+0.0116+0.0193+0.0268=0.0623.\ \blacksquare$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

5. ■

Apoio 2 (sugestão)

Em vez de calcular directamente a probabilidade de, entre *N* partidas jogadas, haver pelo menos uma em que ganha, tente obter a expressão baseada no acontecimento complementar (nenhuma das *N* partidas é ganha pelo Sr. Jo Gador). Em alternativa, considere a variável aleatória *Y* que denota o número de partidas que o Sr. Jo Gador joga antes de ganhar pela primeira vez. A variável *Y* segue uma distribuição Geométrica *G*(*p*), em que *p* corresponde ao resultado obtido na alínea (i). ■

Apoio 3 (resolução completa)

Alternativa 1

Considerem-se os seguintes acontecimentos:

A: de entre as *N* partidas jogadas, há pelo menos uma em que o Sr. Jo Gador ganha

$\overline{\text{A}}$: o Sr. Jo Gador perde as *N* partidas jogadas.

A probabilidade de o Sr. Jo Gador não ganhar uma partida é de p = 1- 0.0623 = 0.9377 (ver o resultado da alínea (i)). A probabilidade de o Sr. Jo Gador não ganhar *N* partidas (admitindo que os resultados são independentes) será:

$$p(\overline{\text{A}})=\left(1-0.0623^N\right)=0.9377^N.$$

Então, a probabilidade de em *N* partidas ganhar pelo menos uma vem

$$p(\text{A})=1-p(\overline{\text{A}})=1-0.9377^N,$$

donde

$p(\mathrm{A}) \geq 0.25 \;\; \Rightarrow \;\; 1 - 0.9377^N \geq 0.25$.

Esta inequação pode ser resolvida de duas maneiras:

- Por tentativas:

$N = 4$: $1 - 0.9377^4 = 0.227 \leq 0.25$ (pelo que o número de partidas que devem ser jogadas será superior a 4)

$N = 5$: $1 - 0.9377^5 = 0.275 \geq 0.25$ (o número de partidas que devem ser jogadas será de 5).

- Recorrendo ao cálculo de logaritmos:

$$1 - 0.9377^N \geq 0.25 \Rightarrow 0.9377^N \leq 0.75$$

$$\ln\left(0.9377^N\right) \leq \ln(0.75)$$

$$N \cdot \ln(0.9377) \leq \ln(0.75)$$

$$N \cdot (-0.06433) \leq -0.28768$$

$$N \geq \frac{0.28768}{0.06433} = 4.47 \,.$$

Uma vez que N é inteiro, o número de partidas que devem ser jogadas será de $N = 5$.

Alternativa 2

Como se viu na alínea (i), a probabilidade de ganhar uma partida é de p = 6.23%. Seja Y a variável aleatória que denota o número de partidas que o Sr. Jo Gador joga antes de ganhar pela primeira vez. Nesta situação, a variável Y segue uma distribuição Geométrica $G(p = 0.0623)$ (note-se que a distribuição Geométrica é um caso particular da distribuição Binomial Negativa). A função de probabilidade de Y é:

$$p(Y = y) = 0.0623 \cdot (1 - 0.0623)^y \,.$$

Seja $K = Y + 1$ o número de partidas que o Sr. Jo Gador joga, na condição de ganhar na última pela primeira vez. Na tabela seguinte apresentam-se os valores da função de probabilidade e de distribuição de K para cada valor de Y.

k	y	$p(Y = y)$	$F(y)$
1	0	0.0623	0.0623
2	1	0.0584	0.1207
3	2	0.0548	0.1755
4	3	0.0514	0.2269
5	4	0.0482	0.2750

Dado que para $F(k = 5) \geq 0.25$, o número mínimo de partidas que o Sr. Jo Gador deve jogar será ser de 5. ■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Valor esperado: -33.15 moedas de ouro. ■

Apoio 2 (sugestão)

Note que há seis situações distintas que podem ocorrer: ganhar numa das 5 partidas disponíveis ou não ganhar nenhuma. Determine a probabilidade de ocorrer cada situação e o respectivo lucro. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Há seis situações distintas que podem ocorrer: ganhar numa das 5 partidas disponíveis ou não ganhar nenhuma.

Determine-a probabilidade de ocorrer a última situação (não ganhar nenhuma partida) e o respectivo lucro. Denote-se por L o lucro obtido e por Y o número de partidas ganhas em 5 tentativas. A variável aleatória Y segue uma distribuição Binomial $B(N = 5, p = 0.0623)$ (ver resultado da alínea (i)). A probabilidade de não ganhar nenhuma partida é dada por:

$$p(0) = \binom{5}{0} \cdot (0.0623)^0 . (1-0.0623)^5 = 0.7250 .$$

A este resultado está associado um lucro (negativo) de $L = 0 \cdot 30 - 5 \cdot 10$ = -50 [moedas de ouro].

Seja Y a variável aleatória que denota o número de partidas que o Sr. Jo Gador joga antes de ganhar pela primeira vez. Nesta situação, a variável Y segue uma distribuição Geométrica $G(p = 0.0623)$ e o lucro é dado por $L = 30 - 10 \cdot Y$. Atendendo às regras estabelecidas pelo Sr. Jo Gador, Y deverá ser inferior a 5 ($Y \leq 4$).

Na tabela seguinte apresentam-se os cinco valores da função de probabilidade de Y e de L para as cinco situações que faltam considerar: ganhar numa das 5 partidas disponíveis.

y	$p(Y=y)$	L	$p(L = l)$
0	0.0623	30	$P(L = 30) = p(Y = 0) = 0.0623$
1	0.0584	20	$P(L = 20) = p(Y = 1) = 0.0584$
2	0.0548	10	$P(L = 20) = p(Y = 2) = 0.0584$
3	0.0514	0	$P(L = 0) = p(Y = 3) = 0.0514$
4	0.0482	-10	$P(L = -10) = p(Y = 4) = 0.0482$

O valor esperado lucro é dado por

$$E(L) = \sum_{l=1}^{6} l \cdot p(l) = -50 \cdot 0.7250 + 30 \cdot 0.0623 +$$

$$+ 20 \cdot 0.0584 + 10 \cdot 0.0548 - 10 \cdot 0.0482 = -33.15 \text{ [moedas de ouro]}. \blacksquare$$

APÊNDICE

Distribuições Discretas no "Microsoft Excel"

Distribuição Binomial

BINOMDIST: Dá o valor da função de probabilidade [$P(Y = y_0)$] e da função de probabilidade acumulada [$P\ (Y \leq y_0)$] da distribuição Binomial.

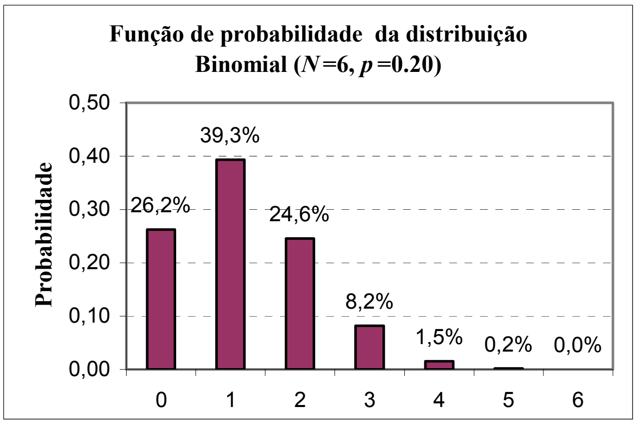
Exemplo: Se Y for $B(6,0.20)$, calcular $P(Y = 2)$ [= 0.24576] e $P(Y \leq 2)$ [= 0.90112].

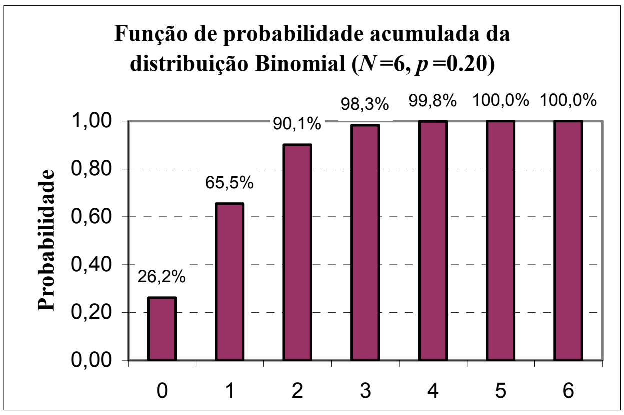
Number_s:	número de sucessos: 2
Trials:	número de experiências: 6
Probability_s:	probabilidade de um sucesso: 0.20
Cumulative:	FALSE – dá a função de probabilidade
	TRUE – dá a função de probabilidade acumulada

CRITBINOM: Dá o menor valor da variável Binomial para o qual a função de probabilidade acumulada é maior ou igual a um determinado valor.

Exemplo: Se Y for $B(6,0.20)$, calcular o menor valor de y_0 para o qual $P(Y \leq y_0) \geq 70\%$ [$y_0 = 2$]

Trials:	número de experiências: 6
Probability_s:	probabilidade de um sucesso: 0.20
Alpha:	valor da probabilidade em análise: 0.70





Distribuição Hipergeométrica

HYPGEOMDIST: Dá o valor da função de probabilidade da distribuição Hipergeométrica.

Exemplo: Se Y for $H(3, 297, 5)$, calcular $P(Y = 1)$ [= 0.048669].

Sample_s: número de sucessos: 1
Number_sample: número de experiências: 5
Population_s: número de sucessos na população: 3
Number_pop: dimensão total da população: 300

Distribuição Binomial Negativa

NEGBINOMDIST: Dá o valor da função de probabilidade da distribuição Binomial Negativa [Prob($Y = y_0$)], isto é, dá a probabilidade de existirem y_0 insucessos até ocorrer o r-ésimo sucesso.

Exemplo: Se Y $\rightarrow BN(r = 2, p = 0.07)$, calcular $P(Y = 4)$ [= 0.0183].

Number_f: número de insucessos ocorridos até ao r-ésimo sucesso: 4
Number_s: valor de r: 2
Probability_s: probabilidade de ocorrer um sucesso: 0.07

Distribuição de Poisson

POISSON: Dá o valor da função de probabilidade [$P(Y = y_0)$] e da função de probabilidade acumulada da distribuição de Poisson [$P(Y \leq y_0)$].

Exemplo: Se Y for Poisson ($\lambda = 0.833$), calcular $P(Y = 2)$ [= 0.15083] e $P(Y \leq 2)$ [= 0.94772].

Y: número de ocorrências no intervalo considerado: 2
Mean: número médio de ocorrências por unidade de tempo (λ): 0.833
Cumulative: TRUE – dá a função de probabilidade acumulada
FALSE – dá a função de probabilidade