

CAPÍTULO 4 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS. DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Problemas

PROBLEMA 4.1

Uma empresa de fiscalização de obras de construção civil tem 7 fiscais, dos quais 2 são do sexo feminino. Para visitar as obras de uma ponte ferroviária, foram seleccionados ao acaso dois fiscais. Denote-se por Y o número de mulheres seleccionadas.

- (i) Defina o espaço amostral da experiência, designando os fiscais por A, ..., E (homens) e F, G (mulheres).
- (ii) Defina o valor da variável aleatória Y , para cada elemento do espaço amostral.
- (iii) Defina as funções de probabilidade e de distribuição da variável Y . Represente ambas as funções na forma tabular e através de diagramas de barras.
- (iv) Calcule o valor esperado, o desvio padrão e o coeficiente de assimetria da variável Y .

PROBLEMA 4.2

Num balcão de uma companhia de aviação, o intervalo de tempo, Δt [minutos], que separa duas quaisquer chamadas consecutivas para reserva de voos, tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(\Delta t) = \begin{cases} e^{-\Delta t} & , \text{ para } \Delta t \geq 0 \\ 0 & , \text{ para } \Delta t < 0 \end{cases}$$

- (v) Calcule a probabilidade $P(\Delta t > 2)$.
- (vi) Calcule a probabilidade $P(\Delta t > 3)$.
- (vii) Calcule a probabilidade condicional de $\Delta t > 3$, dado que $\Delta t > 1$ (compare esta probabilidade com a obtida em (i) e procure generalizar a relação entre elas).

PROBLEMA 4.3

Admita que, para acções de uma determinada empresa cotada na bolsa de Nova Iorque, o lucro anual por acção, depois de impostos, aqui denotado por x [US\$], tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{27}\right) \cdot (9x - 6x^2 + x^3) & , \text{ para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \text{ para outros valores de } x \end{cases}$$

- (i) Represente graficamente esta função.

- (ii) Calcule as probabilidades seguintes:
 $P(x \leq 1.50)$, $P(x \geq 2)$ e $P(1.00 \leq x \leq 2.5)$.
- (iii) Calcule a função de distribuição $F(x)$ e represente-a graficamente.

PROBLEMA 4.4

Admita que, num determinado processo de fabrico, a temperatura da água registada no início de cada turno no reservatório «R» segue uma distribuição com valor esperado 153°F e desvio padrão 7°F . Calcule estes dois parâmetros da distribuição da temperatura quando esta for expressa em $^\circ \text{C}$.

PROBLEMA 4.5

Numa determinada barragem, a relação entre a cota a montante e o volume de água armazenada na albufeira é a seguinte:

$$N = 75.22 + 0.2511 \cdot V - 0.000481 \cdot V^2 + 0.386 \cdot 10^{-6} \cdot V^3$$

onde

N : cota a montante [m]

V : volume de água armazenada [10^6 m^3]

No fim do mês de Março, contempla-se a possibilidade de efectuar uma reparação que impede a utilização dos grupos de geradores. Durante a reparação, que decorrerá ao longo de um período de 3 meses, o volume de água que afluirá à albufeira, ΔV (expresso em 10^6 m^3), segue uma distribuição com valor esperado $\mu = 20$ e variância $\sigma^2 = 225$.

Admitindo que, no início da reparação, o volume de água armazenada na barragem é $V_0 = 400 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, calcule o valor esperado e o desvio padrão da cota a montante no fim da reparação, se no decurso desta não for descarregado qualquer caudal.

PROBLEMA 4.6

No planeamento de um concerto ao ar livre, programado para o dia 6 de Maio, a organização considera que a adesão do público depende do estado do tempo. Na tabela seguinte apresentam-se as estimativas do número de espectadores em função do estado do tempo. Foi ainda pedido ao instituto de meteorologia informação relativa ao estado do tempo no mês de Maio durante os últimos 10 anos.

Estado do tempo	Frequência relativa do estado do tempo [%]	Estimativa do n.º de espectadores
Húmido e frio	20	5000
Húmido e quente	20	20000
Seco e frio	10	30000
Seco e quente	50	50000

- (i) Qual o valor esperado do número de espectadores?

- (ii) Considere que os bilhetes vão ser vendidos a 4.5 € cada. Os custos associados à limpeza e à segurança da área do concerto são de 1.0 € por cada bilhete vendido. Sabe-se que o grupo musical cobra 75000 euros e que a organização do concerto custará 30000 euros (valor que inclui os custos de aluguer de espaço). Sabendo que os organizadores do concerto pretendem ter lucro, recomendaria avançar com o concerto? Justifique.
- (iii) Suponha que a organização decidiu avançar com a preparação do concerto. Na semana anterior à realização do concerto a previsão do tempo não é favorável, de tal forma que os quatro tipos de condições meteorológicas têm agora as seguintes probabilidades estimadas:

Estado do tempo	Probabilidade de ocorrência [%]
Húmido e frio	30
Húmido e quente	20
Seco e frio	20
Seco e quente	30

Se o concerto for cancelado, a organização terá de pagar metade dos custos de organização mais 7500 euros ao grupo musical devido ao cancelamento do concerto. Nestas condições, recomendaria avançar ou cancelar o concerto?

PROBLEMA 4.7

Uma empresa de veículos de aluguer possui três veículos com idades e estados de conservação diferentes. Considere as seguintes probabilidades associadas à disponibilidade num determinado dia:

Veículo mais novo: 0.95

Veículo mais antigo: 0.85

Terceiro veículo: 0.9

A disponibilidade de um dado veículo não é afectada pelo facto de cada um dos outros estar, ou não, disponível.

- Defina a função de probabilidade e a função distribuição de probabilidade para a variável “número de veículos disponíveis por dia”.
- Calcule o valor esperado e o desvio padrão da variável definida na alínea anterior.
- Admitindo que o lucro líquido relativo à utilização de cada Veículo é de 0.50 euros por dia, calcule o valor esperado e o desvio padrão do lucro líquido por dia.