

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS DE PROBABILIDADE

Problemas

PROBLEMA 5.1

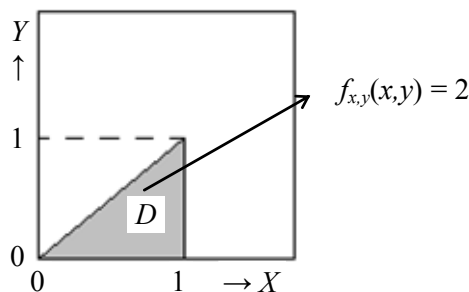
Uma moeda E-C é lançada ao ar três vezes. Seja X o número de E's obtidos nos dois primeiros lançamentos e Y o número de C's obtidos nos dois últimos lançamentos.

- (i) Defina a função conjunta de probabilidade das variáveis X e Y .
- (ii) Defina a função condicional de probabilidade de Y , dado que $X = 1$.
- (iii) Calcule o coeficiente de correlação ρ_{XY} .

PROBLEMA 5.2

Considere duas variáveis aleatórias X e Y com a seguinte função conjunta de densidade de probabilidade:

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{se } x \text{ e } y \text{ pertencerem ao domínio } D \text{ (ver figura)} \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases}$$



Calcule:

- (i) As distribuições marginais das variáveis X e Y ;
- (ii) Os valores esperados das variáveis X e Y ;
- (iii) As distribuições condicionais de X , dado que $Y = y$, e de Y , dado que $X = x$;
- (iv) A covariância entre X e Y .

PROBLEMA 5.3

Numa linha de produção são fabricados osciladores de um certo tipo, que incluem uma resistência R e um condensador com capacidade C .

O período de oscilação depende de R e C , de acordo com a relação seguinte:

$$T = \left(\frac{1}{100} \right) \cdot R^3 \cdot C^3$$

Admita que R e C são variáveis aleatórias com os seguintes parâmetros:

$$R: \mu_R = 10^6, \quad \sigma_R = 0.03 \cdot \mu_R$$

$$C: \mu_C = 10^{-6}, \quad \sigma_C = 0.05 \cdot \mu_C$$

Supondo que a resistência e o condensador incorporados em cada oscilador são seleccionados independentemente um do outro, determine o valor esperado e o desvio padrão do período dos osciladores.

PROBLEMA 5.4

O teor de humidade de uma remessa de carvão foi estimado em 8%. O erro de estimação deste teor tem valor esperado nulo e desvio padrão de 0.5%. O peso da remessa – 1000 toneladas – foi obtido recorrendo a uma balança que introduz um erro com valor esperado nulo e desvio padrão de 5 toneladas.

Calcule o valor esperado e o desvio padrão do peso do carvão seco existente na referida remessa.

PROBLEMA 5.5

As variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n representam as alturas de N indivíduos escolhidos ao acaso entre os portugueses adultos do sexo masculino. Cada variável X_i ($i = 1, 2, \dots, N$) tem valor esperado μ e desvio padrão σ .

A variável aleatória

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_i$$

representa a média das alturas dos N indivíduos seleccionados ao acaso.

Calcule as covariâncias seguintes e interprete os resultados obtidos.

$$(i) \quad Cov(X_i - \bar{X}, \bar{X})$$

$$(ii) \quad Cov(X_i - \bar{X}, X_i)$$

$$(iii) \quad Cov(X_i - \bar{X}, X_j - \bar{X}) \text{ (para } i \neq j)$$

PROBLEMA 5.6

Considere a seguinte população de casais cuja função conjunta de probabilidade do rendimento mensal do marido (X) e da mulher (Y) se encontra representada na tabela seguinte.

		Y [euros]			
		1000	2000	3000	4000
X [euros]	1000	0.20	0.04	0.01	0
	2000	0.10	0.36	0.09	0
	3000	0	0.05	0.10	0
	4000	0	0	0	0.05

- Determine as funções marginais de probabilidade para as variáveis X e Y .
- Considere apenas as mulheres com um rendimento de 2000 euros mensais. Qual a probabilidade do marido ter um rendimento idêntico?
- Calcule o valor esperado e o desvio padrão da variável X e da variável Y .
- Verifique se as variáveis X e Y são independentes.
- Calcule a covariância e a correlação entre X e Y .
- Calcule o valor esperado e o desvio padrão do:
 - Rendimento total (R), considerando $R = X + Y$
 - Do imposto sobre o rendimento familiar (I), considerando $I = 0.20X + 0.10Y$

PROBLEMA 5.7

Considere que tem uma poupança de 1000 euros e que está a ponderar aplicar este dinheiro em acções e em fundos de investimento geridos pelo seu banco. A taxa de rentabilidade dos dois tipos de investimento é incerta, apresentando a seguinte distribuição conjunta de probabilidade.

		Y: taxa de rentabilidade das acções			
		-10 %	0 %	10 %	20 %
X: taxa de rentabilidade dos fundos de investimento	6 %	0.10	0.10	0	0
	8 %	0	0.10	0.30	0.20
	10 %	0	0	0.10	0.10

Se investisse metade da sua poupança (que corresponde a 500 euros) em acções e a outra metade em fundos de investimento, qual seria o valor esperado e o desvio padrão da taxa de rentabilidade da sua poupança (que se denota por R)?