

TESTES DE HIPÓTESES

Objectivo: Verificar se os dados amostrais (ou estimativas obtidas a partir deles) são ou não compatíveis com determinadas populações (ou com valores previamente fixados dos correspondentes parâmetros populacionais).

O resultado do teste corresponderá a uma de duas respostas possíveis: “Há compatibilidade” ou “Não há compatibilidade”. Em qualquer dos casos corre-se o risco de errar. Uma das características do teste de hipóteses é precisamente **permitir controlar ou minimizar esse risco**.

O procedimento básico de um teste de hipóteses pode ser decomposto em quatro fases:

- i) **Definição das hipóteses.**
- ii) **Identificação da estatística de teste e caracterização da sua distribuição.**
- iii) **Definição da regra de decisão, com especificação do nível de significância do teste.**
- iv) **Cálculo da estatística de teste e tomada de decisão.**

DEFINIÇÃO DAS HIPÓTESES

Uma hipótese pode ser definida como uma “conjectura” acerca de uma ou mais populações.

Num teste de hipóteses há que definir duas hipóteses designadas por hipótese nula H_0 e hipótese alternativa H_1 .

A hipótese alternativa está associada à “conjectura” que pretendemos verificar se é válida, no contexto do problema em análise. A hipótese nula é a hipótese complementar de H_1 .

A estratégia básica seguida no método do teste de hipóteses consiste em tentar suportar a validade de H_1 , uma vez provada a inverosimilhança de H_0 , isto é, conseguindo-se mostrar que com elevada probabilidade a hipótese nula é falsa, fica corroborada a validade da hipótese alternativa. Se não for possível rejeitar H_0 , a hipótese H_1 não será reforçada pelo teste.

NOTAS:

- A hipótese alternativa contém sempre uma desigualdade ou não-igualdade ($>$, $<$, \neq) mas nunca uma igualdade ($=$).
- A hipótese nula é considerada verdadeira ao longo do procedimento do teste até ao momento em que haja evidência estatística clara que aponte em sentido contrário.

Neste caso, isto é, quando se rejeitar H_0 , aceita-se H_1 como válida uma vez que se admite que as hipóteses são complementares.

- A hipótese nula contém sempre uma igualdade. Mesmo quando na hipótese nula faz sentido figurar o sinal \geq ou \leq , o teste é realizado considerando apenas a situação em que H_0 mais se aproxima de H_1 , isto é, supondo que é verdadeira a afirmação H_0 de que corresponde à igualdade. Esta é sempre a situação mais desfavorável.
- Quando a hipótese alternativa contiver uma desigualdade ($>$ ou $<$) o teste diz-se **unilateral** (à direita para o sinal $>$, à esquerda para o sinal $<$). Quando H_1 envolve uma **não-igualdade** (\neq) o teste diz-se **bilateral**.

Como iremos ver a designação de unilateral ou bilateral tem a ver com as “caudas” da distribuição da estatística de teste, onde fica localizada a região (ou regiões) de rejeição.

IDENTIFICAÇÃO DA ESTATÍSTICA DE TESTE E CARACTERIZAÇÃO DA SUA DISTRIBUIÇÃO

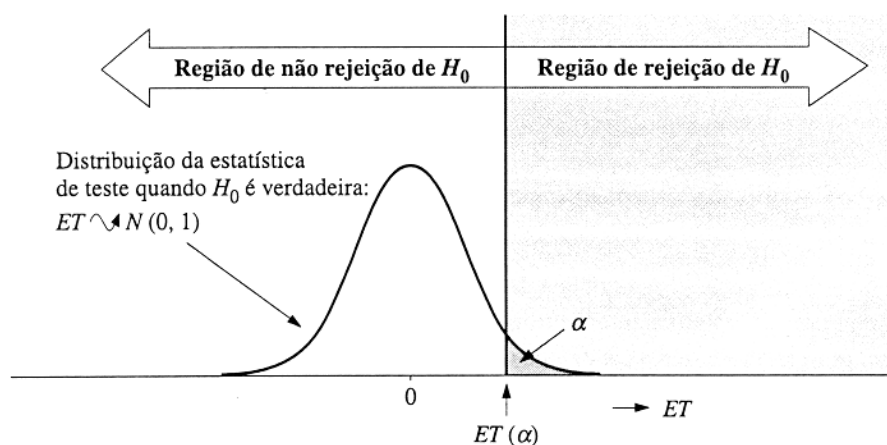
A decisão de rejeitar ou não a hipótese nula baseia-se no valor que assumir a estatística de teste (note-se que a distribuição da estatística de teste é especificada no pressuposto de que H_0 é verdadeira).

Se, no caso da hipótese nula ser válida, o valor de ET for muito improvável e, pelo contrário, aquele valor for razoavelmente provável quando se verificar a hipótese alternativa, então H_0 deverá ser rejeitada em favor de H_1 .

Para que a decisão possa ser tomada de uma forma controlada há que fixar previamente o valor a partir do qual se considera improvável a validade da hipótese nula. Tal

fixação corresponde à definição da **regra de decisão** para o teste. Formalizar esta regra passa pela definição de uma **região de rejeição**.

EX:...



Região de rejeição de H_0 (teste unilateral à direita)

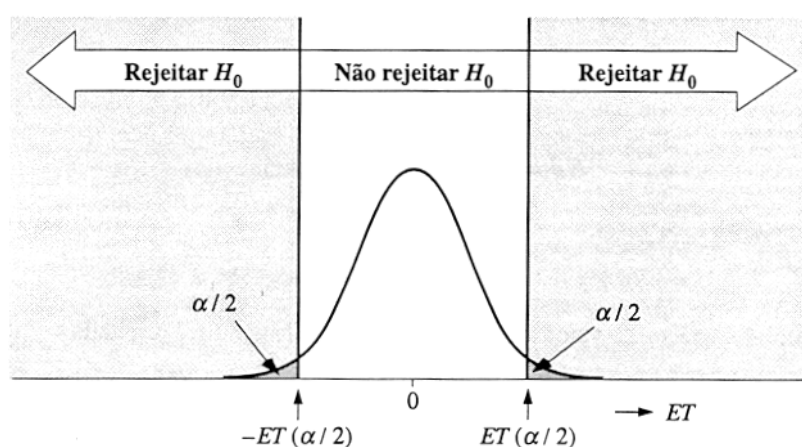
O **nível de significância** do teste corresponde à probabilidade α de, no caso de H_0 ser verdadeira, a ET pertencer à região de rejeição.

O **nível de significância** representa pois a probabilidade (ou risco) de se incorrer no erro de rejeitar H_0 , quando esta hipótese é de facto verdadeira. **Este erro designa-se por erro do tipo I.**

$$\begin{aligned}\alpha &= P[\text{Cometer um erro de tipo I}] \\ &= P[\text{Rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ é verdadeira}]\end{aligned}$$

Os valores mais frequentes para o nível de significância são $\alpha = 0.05$ (5%) e $\alpha = 0.01$ (1%) embora se possa atribuir a α qualquer valor entre 0 e 1.

A região de rejeição anterior concentra-se na cauda direita da distribuição da ET porque corresponde a um teste unilateral à direita. Se se tratasse de um teste bilateral, a região de rejeição iria cobrir as duas caudas da distribuição. O(s) valor(es) da estatística de teste que separa(m) as regiões de aceitação e rejeição designa(m)-se por valor(es) crítico(s) da estatística de teste.



Região de rejeição de H_0 (teste bilateral)

CÁLCULO DA ESTATÍSTICA DE TESTE E TOMADA DE DECISÃO

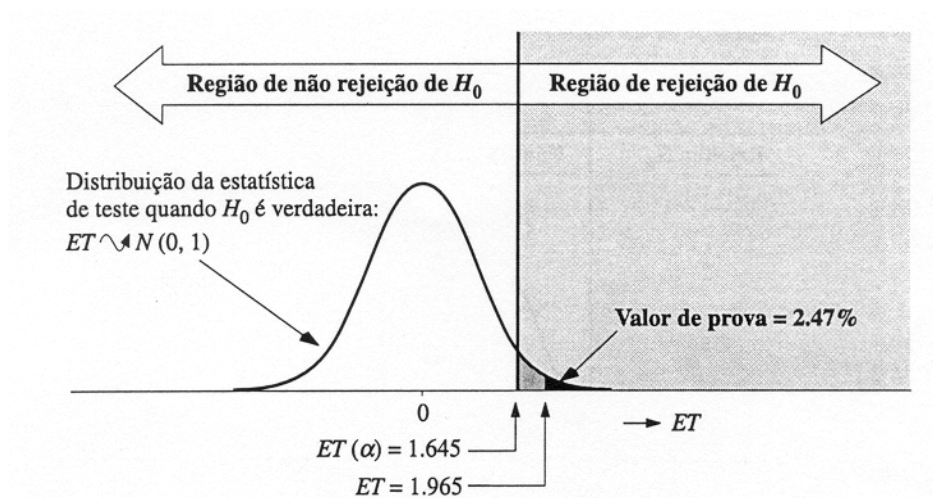
A última fase de um teste de hipóteses corresponde ao cálculo da estatística de teste e, face ao valor obtido, à aplicação da regra de decisão.

Face ao resultado obtido há que desencadear as acções correspondentes.

VALOR DE PROVA

O valor de prova constitui uma medida do grau com que os dados amostrais contrariam a hipótese nula, isto é, o valor de prova corresponde à probabilidade de a estatística de teste tomar um valor igual ou mais extremo do que aquele que de facto é observado.

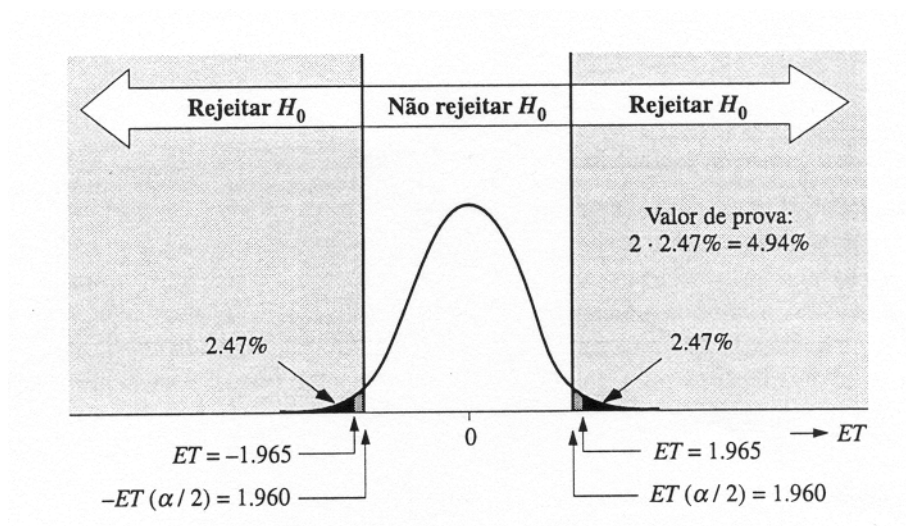
O valor de prova é calculado, tal como a estatística de teste, admitindo que H_0 é verdadeira.



Valor de prova

Quanto menor for o valor de prova maior será o grau com que os dados amostrais contrariam a hipótese nula. Assim deve incluir-se o valor de prova nos resultados dos testes de hipóteses.

Quando o teste é bilateral, no cálculo do valor de prova deve ter-se em consideração ambas as caudas da distribuição da estatística de teste.



Valor de prova num teste bilateral

ERRO DO TIPO II. POTÊNCIA DO TESTE

Sempre que se realiza um teste de hipóteses podemos incorrer em dois tipos de erros, isto é:

$$\begin{aligned}
 P(\text{Cometer um erro do tipo I}) &= P(\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) \\
 &= \text{nível de significância do teste} = \alpha
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 P(\text{Cometer um erro do tipo II}) &= P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) \\
 &= P(\text{Não rejeitar } H_0 | H_1 \text{ é verdadeira}) \\
 &= \beta
 \end{aligned}$$

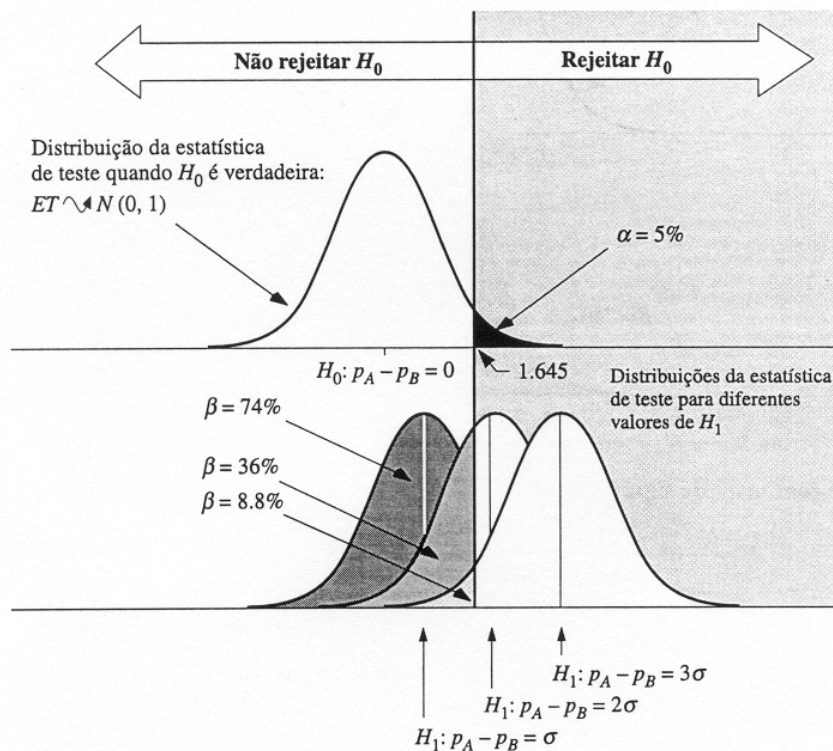
Designa-se por potência do teste a probabilidade de rejeitar H_0 quando H_0 é falsa. A potência do teste é pois dada por $1 - \beta$.

Os diferentes resultados associados a um teste de hipóteses estão representados na tabela seguinte:

	H_0 Verdadeira	H_0 Falsa
H_0 rejeitada	Erro do tipo I (probabilidade α)	Decisão correcta (probabilidade $1 - \beta$)
H_0 não rejeitada	Decisão correcta (probabilidade $1 - \alpha$)	Erro do tipo II (probabilidade β)

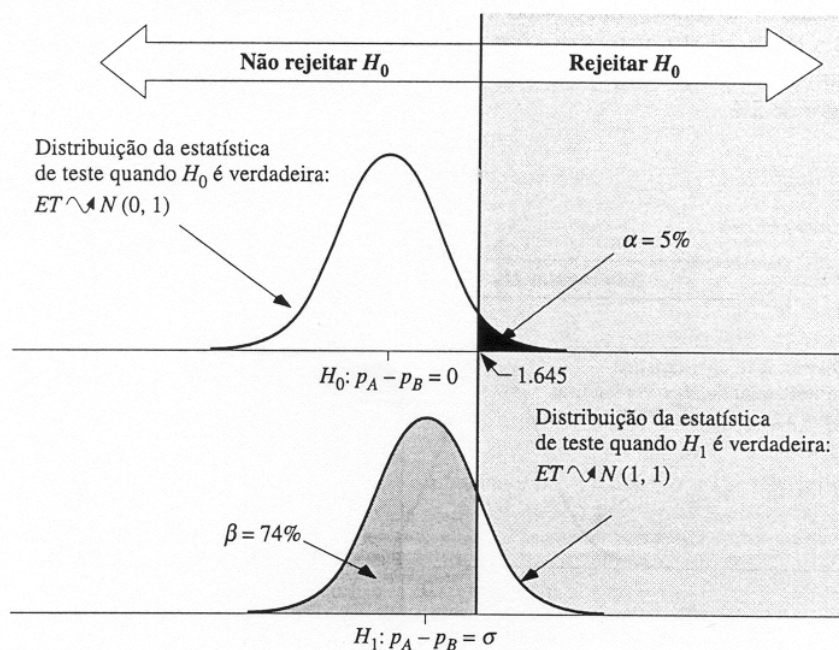
RELAÇÃO ENTRE A VARIAÇÃO DE α e β

De acordo com o exemplo que vem sendo analisado podemos estudar a relação entre os valores de α e β para um dado teste de hipóteses.

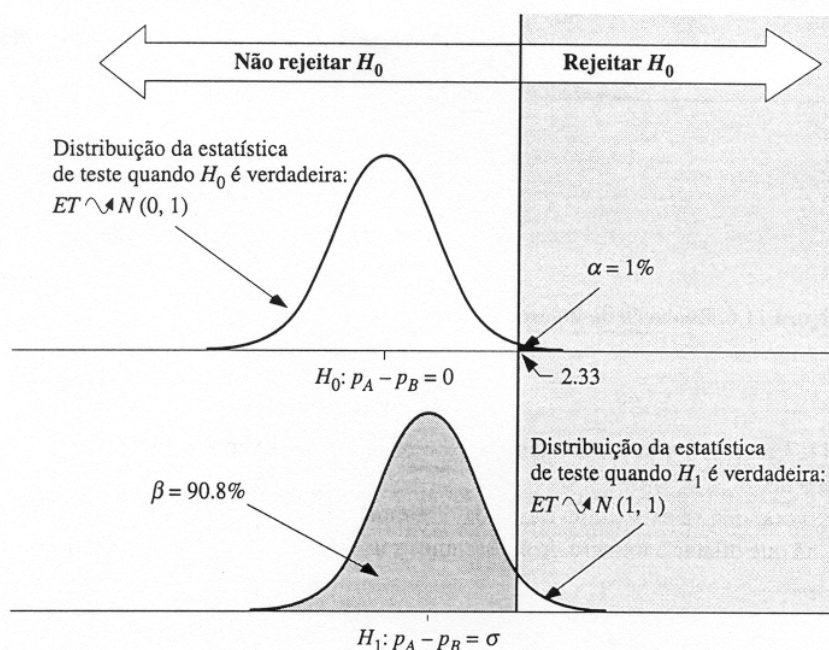


Evolução de β para diferentes valores de $p_A - p_B$

(i) Teste com nível de significância 5%:

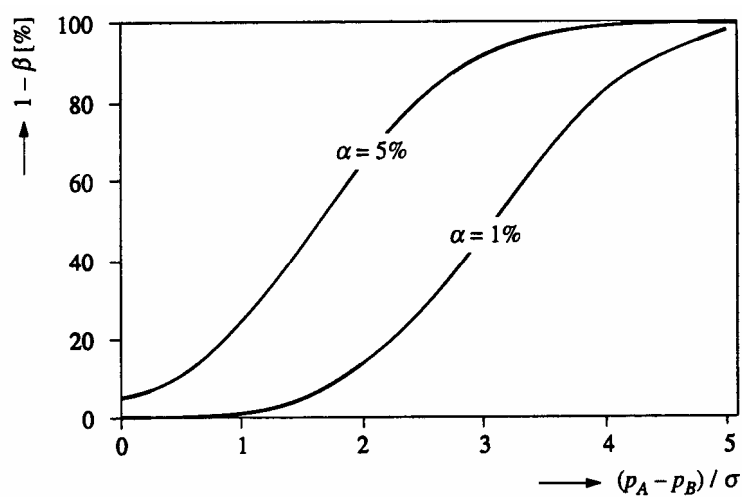


(ii) Teste com nível de significância 1%:



Relação entre a variação de α e β num teste de hipóteses

O traçado das curvas que representam a potência de um teste de hipóteses faz-se a partir de um procedimento idêntico ao que acabamos de efectuar, obtendo-se:



Potência do teste para $\alpha = 5\%$ e $\alpha = 1\%$