Testes de hipóteses

O objectivo dos estatísticos reside, geralmente, na realização de inferências acerca de parâmetros desconhecidos da população, com base na informação contida nos dados amostrais. Estas inferências são feitas em dois sentidos, estimando os respectivos parâmetros ou testando hipóteses em relação aos seus valores. Depois de termos já analisado a primeira questão, através dos capítulos anteriores, trataremos, agora, dos tópicos gerais de testes de hipóteses. Um teste de hipóteses é um processo estatístico usado para se tirar uma conclusão do tipo "sim ou não" sobre uma ou mais populações, a partir de uma ou mais amostras dessas populações. Uma hipótese estatística é uma alegação, ou afirmação, sobre uma propriedade de uma população.

1 Testes paramétricos

Os elementos básicos de um teste estatístico são:

1. hipótese nula, H_0;
2. hipótese alternativa, H_1;
3. estatística de teste;
4. regra de decisão estatística.

Hipótese nula A hipótese nula (denotada por H_0) é uma afirmação sobre o valor de um parâmetro populacional, deve conter a condição de igualdade e escrever-se como $=$, $\leqslant$ ou $\geqslant$:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

ou

$$H_0 : \theta \leqslant \theta_0$$

ou

$$H_0 : \theta \geqslant \theta_0.$$

Ao fazermos efectivamente o teste, trabalhamos com a hipótese de que o parâmetro é igual a um valor específico. Testamos a hipótese nula directamente no sentido de que, supondo-a verdadeira, procuramos chegar a uma conclusão que nos leve a rejeitar H_0 ou não rejeitar H_0.

Observação 1.1. *Mesmo que por vezes expressemos H_0 com o símbolo $\leqslant$ ou $\geqslant$, como em $H_0 : \theta \leqslant \theta_0$ ou $H_0 : \theta \geqslant \theta_0$, fazemos o teste supondo que $\theta = \theta_0$ seja verdadeira. Devemos ter um valor fixo único para θ, de modo a que possamos trabalhar com uma única distribuição com parâmetro específico.*

Hipótese alternativa A hipótese alternativa (denotada por H_1) é uma afirmação que deve ser verdadeira se a hipótese nula é falsa. A hipótese alternativa comporta apenas uma das três formas:

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

ou

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

ou

$$H_1 : \theta > \theta_0.$$

Normalmente, H_1 é a negação de H_0, embora nem sempre seja necessariamente assim. Uma hipótese estatística diz-se simples, se especifica completamente a distribuição da população $H_0 : \theta = \theta_0$. Caso contrário, a hipótese diz-se composta ($H_1 : \theta \neq \theta_0$ ou $H_1 : \theta < \theta_0$ ou $H_1 : \theta > \theta_0$).

Estatística de teste Uma estatística de teste é uma função das observações amostrais cujo valor vai determinar a conclusão a retirar do teste estatístico. No caso de se testar um parâmetro, a estatística de teste é, habitualmente, um estimador desse parâmetro.

Regra de decisão estatística A regra de decisão estatística é o princípio que determina a conclusão a retirar (rejeitar ou não H_0) a partir da comparação do valor da estatística de teste com um ou mais valores críticos. Os valores críticos determinam o conjunto de valores da estatística de teste que conduz à rejeição da hipótese nula. Este conjunto de valores denomina-se região crítica ou região de rejeição da hipótese nula (ou de teste). Os valores que não pertencem à região de rejeição pertencem à região de aceitação.

1.1 Erros de inferência

Ao testarmos uma hipótese nula, chegamos a uma conclusão: rejeitá-la ou não rejeitá-la. Como na inferência estatística parte-se da amostra para a população (em consequência, do particular para o geral), pode incorrer-se em erros na tomada de decisão (quando forem tomadas decisões incorrectas). Há dois tipos diferentes de erro que podemos cometer. A tabela seguinte resume as diferentes possibilidades e mostra que tomamos uma decisão correcta quando, ou rejeitamos uma hipótese nula que é falsa, ou deixamos de rejeitar uma hipótese nula que é verdadeira. Todavia, cometemos um erro quando rejeitamos uma hipótese nula verdadeira, ou deixamos de rejeitar uma hipótese nula falsa.

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Natureza da situação</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>A hipótese nula H_0 é verdadeira</td><td>A hipótese nula H_0 é falsa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Decisão</td><td>Rejeitamos a hipótese nula H_0</td><td>Erro tipo I ($\leqslant \alpha$) (rejeição de uma hipótese nula verdadeira)</td><td>Decisão correcta</td></tr>
<tr><td>Não rejeitamos a hipótese nula H_0</td><td>Decisão correcta</td><td>Erro tipo II (β) (não rejeição de uma hipótese nula falsa)</td></tr>
</table>

O erro tipo I consiste em rejeitar a hipótese nula quando esta é verdadeira. O erro tipo I não é um cálculo mal feito ou uma fase do processo mal desempenhada, é um erro que pode ocorrer como consequência casual de um acontecimento raro. A probabilidade de rejeitar a hipótese nula quando esta é verdadeira é inferior ou igual ao nível de significância α:

$$P\left[\text{erro tipo I}\right] = P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ verdadeira}\right] \leqslant \alpha.$$

O valor de α é tipicamente predeterminado sendo comuns as escolhas $\alpha = 0,05$ e $\alpha = 0,01$.

O erro tipo II consiste em não rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa. Usa-se o símbolo β para representar a probabilidade de um erro tipo II:

$$\beta = P\left[\text{erro tipo II}\right] = P\left[\text{não rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\right].$$

Quando H_0 é falsa, desejamos rejeitar H_0 (para que a decisão seja correcta), pelo que chamamos potência do teste à probabilidade disso acontecer. A potência do teste $1-\beta$ $(0<\beta<1)$ é a probabilidade ou risco de rejeitar H_0 quando H_0 é falsa, isto é:

$$1-\beta = P\left[\text{rejeitar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}\right].$$

1.1.1 Relação entre os erros tipo I e tipo II

Vimos que α é a probabilidade de um erro tipo I (rejeitar uma hipótese nula verdadeira) e β é a probabilidade de um erro tipo II (não rejeitar uma hipótese nula falsa). Uma das etapas do processo de teste de hipóteses envolve a escolha do nível de significância α, no entanto, não seleccionamos β. Seria

óptimo se pudéssemos ter sempre $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, mas isto não é possível; devemos, pois, procurar controlar as probabilidades de erro α e β.

O tamanho da amostra n, α e β estão todos interrelacionados, de forma que, escolhidos quaisquer dois deles, o terceiro está automaticamente determinado. Poderíamos, pois, escolher α e β (e o tamanho n da amostra estaria determinado), mas a prática comum na pesquisa e na indústria consiste em determinar previamente os valores de α e n, de modo que o valor de β fica determinado. Escolhe-se então um tamanho n de amostra tão grande quanto razoável em face do tempo, custo e outros factores relevantes. Valem as seguintes considerações de ordem prática:

1. para α fixo, um aumento do tamanho n da amostra ocasiona uma redução de β, isto é, uma amostra maior reduz a hipótese de cometermos o erro de não rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa;

2. para um tamanho n, fixo, de amostra, uma diminuição de α acarreta um aumento de β; reciprocamente, um aumento de α acarreta uma diminuição de β;

3. para reduzir α e β, devemos aumentar o tamanho n da amostra.

1.2 $p - value$ ou valor p

O $p - value$ é o menor nível de significância, α, a partir do qual se começa a rejeitar a hipótese nula H_0, isto é, se $\alpha \geqslant p - value$ então deve-se rejeitar H_0.

1.2.1 Teste bilateral

$$\begin{aligned}
p - value &= 2 \times P\left[Z \geqslant \mid V.E.T.\mid\right] \\
&=_{\text{ou}} 2 \times P\left[T \geqslant \mid V.E.T.\mid\right] \\
&=_{\text{ou}} 2 \times \min\left\{P\left[\chi^2 \leqslant V.E.T.\right]; P\left[\chi^2 \geqslant V.E.T.\right]\right\} \\
&=_{\text{ou}} 2 \times \min\left\{P\left[F \leqslant V.E.T.\right]; P\left[F \geqslant V.E.T.\right]\right\},
\end{aligned}$$

sendo $V.E.T.$ o valor da estatística de teste e a escolha da expressão que permite calcular o valor do $p - value$ depende da distribuição da estatística de teste.

1.2.2 Teste unilateral à direita

$$
\begin{aligned}
p - value &= P\left[Z \geqslant V.E.T.\right] \\
&=_{\text{ou}} P\left[T \geqslant V.E.T.\right] \\
&=_{\text{ou}} P\left[\chi^2 \geqslant V.E.T.\right] \\
&=_{\text{ou}} P\left[F \geqslant V.E.T.\right],
\end{aligned}
$$

sendo $V.E.T.$ o valor da estatística de teste e a escolha da expressão que permite calcular o valor do $p - value$ depende da distribuição da estatística de teste.

1.2.3 Teste unilateral à esquerda

$$
\begin{aligned}
p - value &= P\left[Z \leqslant V.E.T.\right] \\
&=_{\text{ou}} P\left[T \leqslant V.E.T.\right] \\
&=_{\text{ou}} P\left[\chi^2 \leqslant V.E.T.\right] \\
&=_{\text{ou}} P\left[F \leqslant V.E.T.\right],
\end{aligned}
$$

sendo $V.E.T.$ o valor da estatística de teste e a escolha da expressão que permite calcular o valor do $p - value$ depende da distribuição da estatística de teste.

1.3 Testes

Vamos considerar três tipos de testes:

1. bilateral;
2. unilateral à direita;
3. unilateral à esquerda.

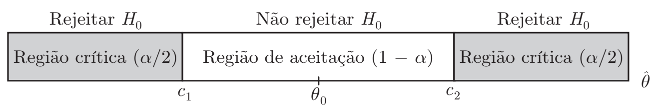
Definimos a estatística de teste $\widehat{\Theta}$ e o valor crítico c, no caso do teste unilateral, ou os valores críticos c_1 e c_2, no caso do teste bilateral. Calcula-se a estatística de teste a partir dos dados da amostra. As conclusões a retirar são, de acordo com a situação, as que se mostram de seguida. Em qualquer dos casos, rejeita-se a hipótese nula se o valor da estatística de teste cair na zona sombreada (região de rejeição). Em qualquer um dos testes a área da região crítica é α. Nos testes bilaterais, o nível de significância α é dividido

igualmente entre as duas caudas que constituem a região crítica. Por exemplo, num teste bilateral, com nível de significância $\alpha = 0,05$, há uma área de 0,025 em cada uma das caudas. Em testes unilaterais direitos ou esquerdos, a região crítica é constituída por uma única cauda.

1. Teste bilateral:

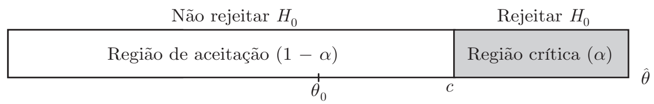
$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$



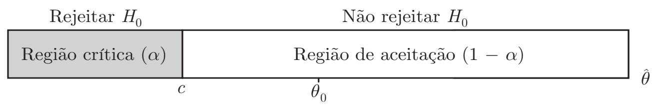
2. Teste unilateral à direita:

$$
\begin{array}{ccc}
H_0 : \theta = \theta_0 & & H_0 : \theta \leqslant \theta_0 \\
 & \text{ou} & \\
H_1 : \theta > \theta_0 & & H_1 : \theta > \theta_0
\end{array}
$$



3. Teste unilateral à esquerda:

$$
\begin{array}{ccc}
H_0 : \theta = \theta_0 & & H_0 : \theta \geqslant \theta_0 \\
 & \text{ou} & \\
H_1 : \theta < \theta_0 & & H_1 : \theta < \theta_0
\end{array}
$$



1.3.1 Passos de um teste de hipóteses

1. Identificar a afirmação ou hipótese específica a ser testada e colocá-la em forma simbólica. Dar a forma simbólica que deve ser verdadeira quando a afirmação original é falsa. Das duas expressões simbólicas obtidas, a hipótese nula H_0 é a que contém a condição de igualdade e a hipótese alternativa H_1 é a outra afirmação;

2. Escolher o nível de significância α. São comuns os valores 0,05 e 0,01;

3. Identificar a estatística relevante para este teste e determinar a sua distribuição amostral;

4. Determinar a estatística de teste, os valores críticos e a região crítica. Esboçar um gráfico e incluir a estatística de teste, o(s) valor(es) crítico(s) e a região ou regiões críticas;

5. Rejeitar H_0 se a estatística de teste está na região crítica. Não rejeitar H_0 se a estatística de teste não está na região crítica.

1.3.2 Testes de hipóteses ao valor médio

Hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \quad \text{(teste bilateral)} \quad ;$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \quad ;$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \quad .$$

Estatística de teste

- Se σ é conhecido, X é uma variável aleatória com distribuição normal e n qualquer então

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N\left(0;1\right);$$

- Se σ é conhecido, X é uma variável aleatória com distribuição arbitrária e $n > 30$ então

$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \dot{\sim} N\left(0;1\right);$$

- Se σ é desconhecido, X é uma variável aleatória com distribuição arbitrária e $n > 30$ então

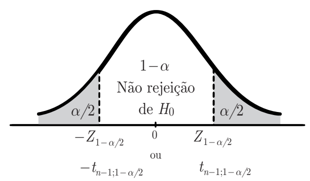
$$Z_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \dot{\sim} N\left(0;1\right);$$

- Se σ é desconhecido, X é uma variável aleatória com distribuição normal e n qualquer então

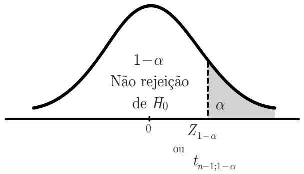
$$T_0 = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}.$$

Regra de decisão

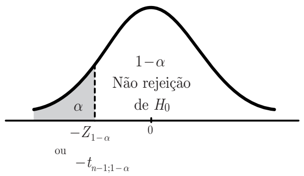
- teste bilateral:
  - se $\mid Z_0 \mid \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$;
  - se $\mid T_0 \mid \geqslant t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$.



- teste unilateral à direita:
  - se $Z_0 \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$;
  - se $T_0 \geqslant t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{n-1;1-\alpha}$.



- teste unilateral à esquerda:
  - se $Z_0 \leqslant -Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$;
  - se $T_0 \leqslant -t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{n-1;1-\alpha}$.



Exemplo 1.1. *Seleccionou-se aleatoriamente uma amostra da cotação diária, em euros, de uma empresa, em relação aos dois últimos meses. Os dados obtidos, após tratamento resultaram na seguinte informação:*

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 81,9; \qquad \sum_{i=1}^{10} (x_i - \overline{x})^2 = 17,533.$$

A cotação diária da empresa é normalmente distribuída. Afirma-se que a média das cotações da empresa é superior a $7,1$. Considerando um nível de significância de 1%, verifique a validade dessa afirmação, se:

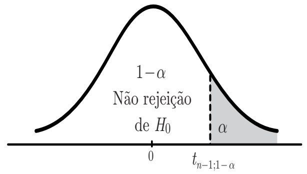
(a) contarmos apenas com a informação da amostra;

Seja a variável aleatória X - "cotações diárias da empresa". Então:

- *Parâmetro a testar: μ;*
- *Formulação das hipóteses:*

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leqslant 7,1 \\ \\ H_1 : \mu > 7,1 \end{cases} \quad \textit{(teste unilateral à direita)} \;\; ;$$

- *Tipo de população: normal;*
- *Nível de significância: $\alpha = 0,01$;*
- *Dimensão da amostra: $n = 10$;*
- *Estatística de teste: $T_0 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$;*
- *Outros dados: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 8,19$ e $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}{9} = 1,948$;*
- *Regiões crítica e de aceitação:*



com $t_{n-1;1-\alpha} = t_{9;0,99} = 2,82$. Obtemos assim as regiões, R.A. $=]-\infty; 2,82[$ e R.C. $= [2,82; +\infty[$;

- *Valor da estatística de teste: $T_0 = \frac{8,19-7,1}{\frac{\sqrt{1,948}}{\sqrt{10}}} = 2,469$;*
- *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste $T_0 = 2,469$ pertence à região de aceitação não se deve rejeitar H_0, ou seja, conclui-se que a média das cotações da empresa deverá ser inferior ou igual a $7,1$, ao nível de significância de 1%.*

O p-value é menor nível de significância a partir do qual se deve rejeitar H_0, isto é, se $\alpha \geqslant p-value$ então deve-se rejeitar H_0:

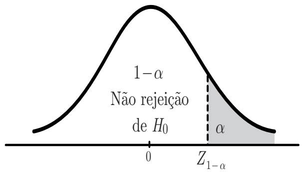
$$\begin{aligned} p-value &= P\left[T \geqslant 2,469\right] = 1 - P\left[T_9 < 2,469\right] \simeq \\ &\simeq 1 - 0,9822 = \\ &= 0,0178. \end{aligned}$$

(b) soubermos que $\sigma = 1,1$;

Como neste caso a variância da população é conhecida, $\sigma = 1,1$, a estatística de teste será diferente da usada na alínea anterior. Assim:

- *Estatística de teste: $Z_0 = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0;1)$;*

- *Regiões crítica e de aceitação:*



  com $Z_{1-\alpha} = Z_{0{,}99} = 2{,}326$. *Obtemos assim as regiões, R.A.* $=]-\infty; 2{,}326[$ *e R.C.* $= [2{,}326; +\infty[$*;*
- *Valor da estatística de teste:* $Z_0 = \frac{8{,}19-7{,}1}{\frac{1{,}1}{\sqrt{10}}} = 3{,}1335$*;*
- *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste* $Z_0 = 3{,}1335$ *pertence à região crítica deve-se rejeitar* H_0*, ou seja, conclui-se que a média das cotações da empresa é superior a* $7{,}1$*, ao nível de significância de* 1%*.*

O p-value é menor nível de significância a partir do qual se deve rejeitar H_0*, isto é, se* $\alpha \geqslant p - value$ *então deve-se rejeitar* H_0*:*

$$\begin{aligned} p - value &= P[Z \geqslant 3{,}1335] = 1 - P[Z < 3{,}1335] = \\ &= 1 - \Phi(3{,}1335) = 1 - 0{,}9991 = 0{,}0009. \end{aligned}$$

1.3.3 Testes de hipóteses à proporção

Hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p \neq p_0 \end{cases} \text{(teste bilateral)} \ ;$$

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{cases} \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : p \leqslant p_0 \\ H_1 : p > p_0 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \ ;$$

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{cases} \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : p \geqslant p_0 \\ H_1 : p < p_0 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \ .$$

Estatística de teste Se $n > 30$ (amostras grandes) então

$$Z_0 = \frac{\widehat{P} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \dot{\sim} N(0; 1) \, .$$

Regra de decisão

- teste bilateral:
  - se $| Z_0 | \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.
- teste unilateral à direita:
  - se $Z_0 \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$.
- teste unilateral à esquerda:
  - se $Z_0 \leqslant -Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$.

Exemplo 1.2. *Uma empresa pretende lançar um novo produto numa cidade de um milhão de habitantes. No estudo de mercado realizado foram inquiridas* 1000 *pessoas, tendo* 800 *delas afirmado que muito dificilmente iriam utilizar aquele novo produto.*

(a) *Teste, ao nível de significância de* 1%*, se a verdadeira proporção de habitantes que utilizarão o novo produto pode ser considerada no máximo igual a* $0{,}18$*.*

Seja a variável aleatória X *- "Número de pessoas que pretendem utilizar um determinado produto". Então:*

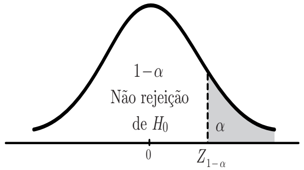
- *Parâmetro a testar:* p*;*
- *Formulação das hipóteses:*

$$\begin{cases} H_0 : p \leqslant 0{,}18 \\ H_1 : p > 0{,}18 \end{cases} \textit{(teste unilateral à direita)} \ ;$$

- *Tipo de população: Bernoulli;*
- *Nível de significância:* $\alpha = 0{,}01$*;*
- *Dimensão da amostra:* $n = 1000$*;*
- *Estatística de teste:* $Z_0 = \frac{\hat{P}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \dot{\sim} N(0; 1)$*;*

– *Outros dados:* $\hat{p} = \frac{200}{1000} = 0,2$;

– *Regiões crítica e de aceitação:*



com $Z_{1-\alpha} = Z_{0,99} = 2,3263$. *Obtemos assim as regiões, R.A.* $=]-\infty; 2,3263[$ *e R.C.* $= [2,3263; +\infty[$;

– *Valor da estatística de teste:* $Z_0 = \frac{0,2-0,18}{\sqrt{\frac{0,18\times 0,82}{1000}}} = 1,6462$;

– *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste* $Z_0 = 1,6462$ *pertence à região de aceitação não se deve rejeitar* H_0*, ou seja, conclui-se que a verdadeira proporção de habitantes que utilizarão o novo produto pode ser considerada no máximo igual a* $0,18$*, ao nível de significância de* 1%.

O p-value é menor nível de significância a partir do qual se deve rejeitar H_0*, isto é, se* $\alpha \geqslant p-value$ *então deve-se rejeitar* H_0:

$$\begin{aligned} p-value &= P\left[Z \geqslant 1,6462\right] = 1 - P\left[Z \leqslant 1,6462\right] = \\ &= 1 - \Phi\left(1,65\right) = 0,0495. \end{aligned}$$

(b) Com a decisão que tomou na alínea anterior qual o tipo de erro que pode estar a cometer? Justifique.

Como a decisão tomada foi de não rejeitar H_0*, podemos estar a cometer um erro tipo II, ou seja, não rejeitar* H_0*, mas* H_0 *ser falsa.*

1.3.4 Testes de hipóteses à variância duma população normal

Hipóteses

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases} \quad \text{(teste bilateral)} \quad ;$$

$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0: \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \quad ;$$

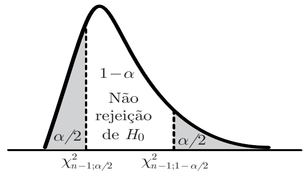
$$\begin{cases} H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0: \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \quad .$$

Estatística de teste

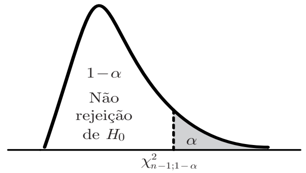
$$Q_0 = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Regra de decisão

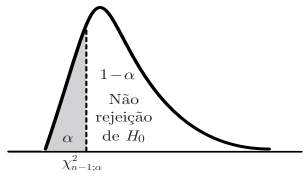
- teste bilateral: se $Q_0 \leqslant \chi^2_{\text{tabelado}_1}$ ou $Q_0 \geqslant \chi^2_{\text{tabelado}_2}$ rejeita-se H_0, sendo $\chi^2_{\text{tabelado}_1} = \chi^2_{n-1;\frac{\alpha}{2}}$ ou $\chi^2_{\text{tabelado}_2} = \chi^2_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$.



- teste unilateral à direita: se $Q_0 \geqslant \chi^2_{\text{tabelado}}$ rejeita-se H_0, sendo $\chi^2_{\text{tabelado}} = \chi^2_{n-1;1-\alpha}$.



- teste unilateral à esquerda: se $Q_0 \leqslant \chi^2_{\text{tabelado}}$ rejeita-se H_0, sendo $\chi^2_{\text{tabelado}} = \chi^2_{n-1;\alpha}$.



Exemplo 1.3. *Seleccionou-se aleatoriamente uma amostra da cotação diária, em euros, de uma empresa, em relação aos dois últimos meses. Os dados obtidos, após tratamento resultaram na seguinte informação:*

$$10,1; \quad 10,3; \quad 9,9; \quad 9,8; \quad 10,0; \quad 10,2; \quad 10,4; \quad 10,6; \quad 10,1.$$

A cotação diária da empresa é normalmente distribuída. Afirma-se que a variância das cotações da empresa é inferior a 0,04. Considerando um nível de significância de 5%, verifique a validade desta afirmação.

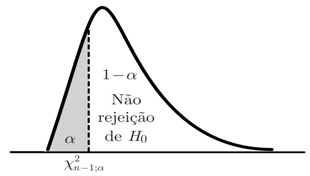
Seja a variável aleatória X - "cotações diárias da empresa".

- *Parâmetro a testar: σ^2;*
- *Formulação das hipóteses:*

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 \geqslant 0,04 \\ H_1 : \sigma^2 < 0,04 \end{cases} \quad \textit{(teste unilateral à esquerda)} \;\; ;$$

- *Tipo de população: normal;*
- *Nível de significância: $\alpha = 0,05$;*
- *Dimensão da amostra: $n = 9$;*
- *Estatística de teste: $Q_0 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$;*
- *Outros dados: $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{9} = 10,156$ e $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i-\overline{x})^2}{8} = 0,063$;*

- *Regiões crítica e de aceitação:*



com $\chi^2_{n-1;\alpha} = \chi^2_{8;0,05} = 2,73$. Obtemos assim as regiões, R.A. $=]2,73;+\infty[$ e R.C. $= [0;2,73]$.

- *Valor da estatística de teste: $Q_0 = \frac{8\times 0,063}{0,04} = 12,6$;*
- *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste $Q_0 = 12,6$ pertence à região de aceitação não se deve rejeitar H_0, ou seja, conclui-se que a variância das cotações da empresa é inferior ou igual a 0,04, ao nível de significância de 5%.*

O p-value é menor nível de significância a partir do qual se deve rejeitar H_0, isto é, se $\alpha \geqslant p-value$ então deve-se rejeitar H_0:

$$p-value = P\left[\chi^2 \leqslant 12,6\right] = P\left[\chi^2_8 < 12,6\right] \simeq 0,874.$$

1.3.5 Testes de hipóteses envolvendo diferenças de valores médios para duas amostras independentes

Hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases} \quad \text{(teste bilateral)} \;\; ;$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu_1 \leqslant \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \;\; ;$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu_1 \geqslant \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \;\; ;$$

ou então
$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d_0 \end{cases} \quad \text{(teste bilateral)} \quad ;$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > d_0 \end{cases} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \quad ;$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geqslant d_0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < d_0 \end{cases} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \quad .$$

Estatística de teste

- Se σ_1 e σ_2 são conhecidos, X_1 e X_2 seguem uma distribuição normal e n_1 e n_2 quaisquer então
$$Z_0 = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1)\,;$$

- Se σ_1 e σ_2 são conhecidos, X_1 e X_2 seguem uma distribuição arbitrária e $n_1 > 30$ e $n_2 > 30$ então
$$Z_0 = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \dot{\sim} N(0;1)\,;$$

- Se σ_1 e σ_2 são desconhecidos, X_1 e X_2 seguem uma distribuição arbitrária e $n_1 > 30$ e $n_2 > 30$ então
$$Z_0 = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \dot{\sim} N(0;1)\,;$$

- se σ_1 e σ_2 são desconhecidos, as populações são homocedásticas ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), X_1 e X_2 seguem uma distribuição normal e n_1 e n_2 quaisquer então
$$T_0 = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2};$$

- se σ_1 e σ_2 são desconhecidos e as populações são heterocedásticas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$), X_1 e X_2 seguem uma distribuição normal e n_1 e n_2 quaisquer então
$$T_0 = \frac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_r,$$
onde r é o número natural mais próximo de r^* e este é dado por
$$r^* = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}.$$

Nota 1.1. *No quadro resumo sobre testes de hipóteses para uma e duas populações d_0 corresponde a $(\mu_1 - \mu_2)_0$.*

Regra de decisão

- teste bilateral:
  - se $\mid Z_0 \mid \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$;
  - se $\mid T_0 \mid \geqslant t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{n_1+n_2-2;1-\frac{\alpha}{2}}$;
  - se $\mid T_0 \mid \geqslant t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{r;1-\frac{\alpha}{2}}$.
- teste unilateral à direita:
  - se $Z_0 \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$;
  - se $T_0 \geqslant t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}$;
  - se $T_0 \geqslant t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{r;1-\alpha}$.
- teste unilateral à esquerda:
  - se $Z_0 \leqslant -Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$;
  - se $T_0 \leqslant -t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{n_1+n_2-2;1-\alpha}$;
  - se $T_0 \leqslant -t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{r;1-\alpha}$.

Exemplo 1.4. *Seleccionaram-se aleatoriamente amostras de cotações diárias, em euros, de duas empresas do mesmo sector, em relação aos dois últimos meses. Os dados obtidos, após tratamento resultaram na seguinte informação:*

- *Empresa 1:* $\sum_{i=1}^{10} x_{i1} = 81,9$; $\sum_{i=1}^{10} \left(x_{i1} - \overline{x}\right)^2 = 17,533$;

- *Empresa 2:* $10,1$*;* $10,3$*;* $9,9$*;* $9,8$*;* $10,0$*;* $10,2$*;* $10,4$*;* $10,6$*;* $10,1$.

As cotações diárias das duas empresas são normalmente distribuídas. Ao nível de significância de $0,01$*, haverá evidência suficiente nos dados que revelem que em média as cotações da empresa 1 são inferiores às da empresa 2?*

(a) Admitindo que $\sigma_1^2 = 2$ *e* $\sigma_2^2 = 1$.

Sejam as variáveis aleatórias:

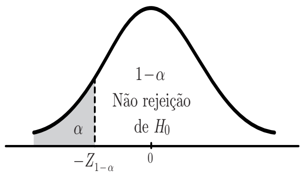
- X_1 *- "cotações diárias da empresa 1";*
- X_2 *- "cotações diárias da empresa 2".*

Então:

- *Parâmetro a testar:* $\mu_1 - \mu_2$*;*
- *Formulação das hipóteses:*

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geqslant \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geqslant 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{matrix} \quad \textit{(teste unilateral à esquerda)} \quad ;$$

- *Tipos de população: normais;*
- *Nível de significância:* $0,01$*;*
- *Dimensão das amostras:* $n_1 = 10$ *e* $n_2 = 9$*;*
- *Estatística de teste:* $Z_0 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - d_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1)$*;*
- *Outros dados:* $\overline{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i1}}{10} = 8,19$, $\overline{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_{i2}}{9} = 10,156$, $\sigma_1^2 = 2$ *e* $\sigma_2^2 = 1$*;*
- *Regiões crítica e de aceitação:*



com $-Z_{1-\alpha} = -Z_{0,99} = -2,3263$. *Obtemos assim as regiões, R.A.* $=]-2,3263; +\infty[$ *e R.C.* $= [-\infty; -2,3263]$*;*

- *Valor da estatística de teste:* $Z_0 = \frac{(8,19 - 10,156) - 0}{\sqrt{\frac{2}{10} + \frac{1}{9}}} = -3,525$*;*
- *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste* $Z_0 = -3,525$ *pertence à região crítica deve-se rejeitar* H_0*, ou seja, conclui-se que a média das cotações da empresa 1 é realmente inferior à média das cotações da empresa 2, ao nível de significância de* 1%.

O p-value é menor nível de significância a partir do qual se deve rejeitar H_0*, isto é, se* $\alpha \geqslant p - value$ *então deve-se rejeitar* H_0*:*

$$\begin{aligned} p - value &= P[Z \leqslant -3,525] = \\ &= \Phi(-3,53) = \\ &= 0,0002. \end{aligned}$$

(b) Considerando apenas a informação contida nas amostras e admitindo que $\sigma_1 = \sigma_2$.

Sejam as variáveis aleatórias:

- X_1 *- "cotações diárias da empresa 1";*
- X_2 *- "cotações diárias da empresa 2".*

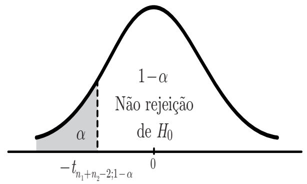
Então:

- *Parâmetro a testar:* $\mu_1 - \mu_2$*;*
- *Formulação das hipóteses:*

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \geqslant \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geqslant 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \end{matrix} \quad \textit{(teste unilateral à esquerda)} \quad ;$$

- *Tipos de população: normais;*
- *Nível de significância:* $0,01$*;*
- *Dimensão das amostras:* $n_1 = 10$ *e* $n_2 = 9$*;*
- *Estatística de teste:* $T_0 = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2}$*;*
- *Outros dados:* $\overline{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i1}}{10} = 8,19$, $\overline{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_{i2}}{9} = 10,156$, $s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_{i1} - \overline{x})^2}{9} = 1,948$ *e* $s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_{i2} - \overline{x})^2}{8} = 0,063$*;*

– *Regiões crítica e de aceitação:*



com $-t_{n_1+n_2-2;1-\alpha} = -t_{17;0{,}99} = -2{,}57$. *Obtemos assim as regiões, R.A.* $= \left]-2{,}57;+\infty\right[$ *e R.C.* $= \left]-\infty;-2{,}57\right]$*;*

– *Valor da estatística de teste:* $T_0 = \frac{(8{,}19-10{,}156)-0}{\sqrt{\frac{9\times1{,}948+8\times0{,}063}{17}\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right)}} = -4{,}154$*;*

– *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste* $T_0 = -4{,}154$ *pertence à região crítica deve-se rejeitar* H_0*, ou seja, conclui-se que a média das cotações da empresa 1 é realmente inferior à média das cotações da empresa 2, ao nível de significância de* 1%*.*

O p-value é menor nível de significância a partir do qual se deve rejeitar H_0*, isto é, se* $\alpha \geqslant p-value$ *então deve-se rejeitar* H_0*:*

$$p-value = P\left[T \leqslant -4{,}154\right] = P\left[T_{17} \leqslant -4{,}154\right] = 0{,}0003.$$

1.3.6 Testes de hipóteses envolvendo diferenças de proporções para duas amostras independentes

Hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{cases} \quad \text{(teste bilateral)} \quad ;$$

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : p_1 \leqslant p_2 \\ H_1 : p_1 > p_2 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \quad ;$$

$$\begin{cases} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 < p_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : p_1 \geqslant p_2 \\ H_1 : p_1 < p_2 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \quad ;$$

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Área Departamental de Matemática
Resumos sobre Probabilidades e Estatística

ou então

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = p_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq p_0 \end{cases} \quad \text{(teste bilateral)} \quad ;$$

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = p_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 > p_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : p_1 - p_2 \leqslant p_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 > p_0 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \quad ;$$

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = p_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 < p_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : p_1 - p_2 \geqslant p_0 \\ H_1 : p_1 - p_2 < p_0 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \quad .$$

Estatística de teste Se $n_1 > 30$ e $n_2 > 30$ (amostras grandes) então

$$Z_0 = \frac{\left(\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2\right) - p_0}{\sqrt{\frac{\widehat{P}_1\left(1-\widehat{P}_1\right)}{n_1} + \frac{\widehat{P}_2\left(1-\widehat{P}_2\right)}{n_2}}} \dot{\sim} N\left(0;1\right).$$

Nota 1.2. *No quadro resumo sobre testes de hipóteses para uma e duas populações* p_0 *corresponde a* $\left(p_1 - p_2\right)_0$*.*

Regra de decisão

- teste bilateral: se $\mid Z_0 \mid \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.
- teste unilateral à direita: se $Z_0 \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$.
- teste unilateral à esquerda: se $Z_0 \leqslant -Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$.

Exemplo 1.5. *Foi efectuado um estudo em duas empresas do mesmo ramo de actividade, a empresa A e a empresa B, sobre a preferência dos trabalhadores por dois tipos de aumentos salariais: um pacote de benefícios extra ou um determinado aumento no salário base. Dos* 150 *trabalhadores da empresa A,* 75 *preferiram um aumento no salário base; dos* 200 *trabalhadores da empresa B,* 103 *preferiram também esse aumento. A questão que se coloca é saber se há diferença de uma empresa para outra na proporção de trabalhadores que preferem o acréscimo no salário base (e não no benefício extra). Pretende-se reduzir a* 1% *a probabilidade de rejeitar indevidamente a hipótese de que essas proporções sejam iguais.*

Sejam as variáveis aleatórias:

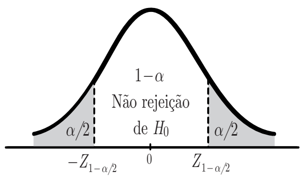
- X_1 - *"número de trabalhadores da empresa A que preferem o acréscimo no salário base";*
- X_2 - *"número de trabalhadores da empresa B que preferem o acréscimo no salário base".*

Então:

- *Parâmetro a testar:* $p_1 - p_2$;
- *Formulação das hipóteses:*

$$\begin{cases} H_0 : p_1 - p_2 = 0 \\ H_1 : p_1 - p_2 \neq 0 \end{cases} \quad \textit{ou} \quad \begin{array}{l} H_0 : p_1 = p_2 \\ H_1 : p_1 \neq p_2 \end{array} \quad \textit{(teste bilateral)} \;;$$

- *Tipos de população: Bernoulli;*
- *Nível de significância:* $0,01$;
- *Dimensão das amostras:* $n_1 = 150$ *e* $n_2 = 200$;
- *Estatística de teste:* $Z_0 = \dfrac{\left(\hat{P}_1 - \hat{P}_2\right) - p_0}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1\left(1-\hat{P}_1\right)}{n_1} + \frac{\hat{P}_2\left(1-\hat{P}_2\right)}{n_2}}} \dot{\frown} N(0;1)$;
- *Outros dados:* $\hat{p}_1 = \frac{75}{150} = 0,5$ *e* $\hat{p}_2 = \frac{103}{200} = 0,515$;
- *Regiões crítica e de aceitação:*



com $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,995} = 2,5758$. *Obtemos assim as regiões, R.A.* $=]-2,5758; 2,5758[$ *e R.C.* $=]-\infty; -2,5758] \cup [2,5758; +\infty[$;

- *Valor da estatística de teste:* $Z_0 = \dfrac{0,5 - 0,515 - 0}{\sqrt{\frac{0,5\times 0,5}{150} + \frac{0,515\times 0,515}{200}}} = -0,278$;

- *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste* $Z_0 = -0,278$ *pertence à região de aceitação não se deve rejeitar* H_0, *ou seja, não existe diferença entre a proporção de trabalhadores que preferem o aumento sob a forma de acréscimo no salário base, na empresa A e na empresa B, ao nível de significância de 1%.*

O p-value é menor nível de significância a partir do qual se deve rejeitar H_0, *isto é, se* $\alpha \geqslant p-value$ *então deve-se rejeitar* H_0*:*

$$\begin{aligned} p-value &= 2 \times P\left[Z \geqslant \mid -2,278 \mid\right] = \\ &= 2 \times \left[1 - \Phi(2,28)\right] = \\ &= 2 \times (1 - 0,9887) = \\ &= 2 \times 0,0113 = 0,0226. \end{aligned}$$

1.3.7 Testes de hipóteses às variâncias de duas populações

Hipóteses

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \\ H_1 : \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2 \end{cases} \quad \text{(teste bilateral)} \;;$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \\ H_1 : \sigma_2^2 > \sigma_1^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} H_0 : \sigma_2^2 \leqslant \sigma_1^2 \\ H_1 : \sigma_2^2 > \sigma_1^2 \end{array} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \;;$$

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \\ H_1 : \sigma_2^2 < \sigma_1^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} H_0 : \sigma_2^2 \geqslant \sigma_1^2 \\ H_1 : \sigma_2^2 < \sigma_1^2 \end{array} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \;;$$

ou então

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \\ H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1 \end{cases} \quad \text{(teste bilateral)} \;;$$

$$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \\ H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leqslant 1 \\ H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1 \end{array} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \;;$$

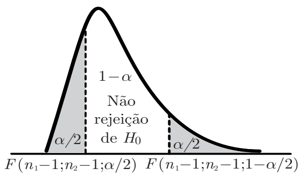
$$\begin{cases} H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \\ H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \geqslant 1 \\ H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1 \end{array} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \;.$$

Estatística de teste

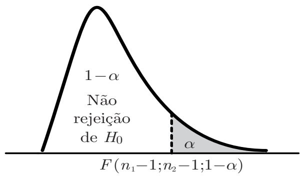
$$F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)_0 \sim F\left(n_1 - 1; n_2 - 1\right).$$

Regra de decisão

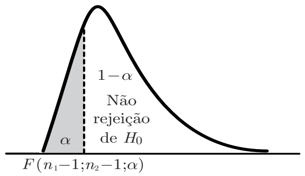
- teste bilateral: se $F_0 \leqslant F_{\text{tabelado}_1}$ ou $F_0 \geqslant F_{\text{tabelado}_2}$ rejeita-se H_0, sendo $F_{\text{tabelado}_1} = F\left(n_1 - 1; n_2 - 1; \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{F\left(n_2 - 1; n_1 - 1; 1 - \frac{\alpha}{2}\right)}$ ou $F_{\text{tabelado}_2} = F\left(n_1 - 1; n_2 - 1; 1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.



- teste unilateral à direita: se $F_0 \geqslant F_{\text{tabelado}}$ rejeita-se H_0, sendo $F_{\text{tabelado}} = F\left(n_1 - 1; n_2 - 1; 1 - \alpha\right)$.



- teste unilateral à esquerda: se $F_0 \leqslant F_{\text{tabelado}}$ rejeita-se H_0, sendo $F_{\text{tabelado}} = F\left(n_1 - 1; n_2 - 1; \alpha\right) = \frac{1}{F(n_2-1; n_1-1; 1-\alpha)}$.



Nota 1.3. *Consultar o quadro resumo sobre testes de hipóteses para uma e duas populações.*

Exemplo 1.6. *Um docente universitário está indeciso entre dois modelos de exame. A sua escolha recairá naquele que demorar menos tempo a concluir. Para efectuar a sua escolha, o docente aplicou o teste A, a uma amostra de* 8 *alunos e o teste B, a uma amostra de* 10 *alunos, tendo obtido os seguintes tempos, em minutos, para a conclusão do exame:*

- *Teste A:* 120*;* 90*;* 110*;* 100*;* 80*;* 85*;* 95*;* 80*;*
- *Teste B:* 110*;* 95*;* 100*;* 85*;* 90*;* 95*;* 110*;* 80*;* 90*;* 110.

Admitindo que os tempos de resolução se comportam segundo uma lei normal, teste a um nível de significância de 5%*, se existe diferença na variabilidade do tempo de resolução dos dois tipos de exame.*

Sejam as variáveis aleatórias:

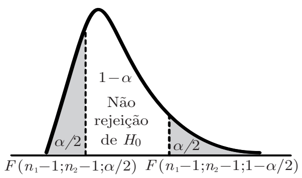
- X_1 *- "Tempo para conclusão do teste A";*
- X_2 *- "Tempo para conclusão do teste B".*

Então:

- *Parâmetro a testar:* $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$*;*
- *Formulação das hipóteses:*

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_2^2 = \sigma_1^2 \\ \\ H_1 : \sigma_2^2 \neq \sigma_1^2 \end{cases} \quad \textit{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1 \\ \\ H_1 : \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \neq 1 \end{matrix} \quad \textit{(teste bilateral)} \;;$$

- *Tipos de população: normais;*
- *Nível de significância:* $0,05$*;*
- *Dimensão das amostras:* $n_1 = 8$ *e* $n_2 = 10$*;*
- *Estatística de teste:* $F_0 = \frac{S_1^2}{S_2^2} \times \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)_0 \sim F(n_1 - 1; n_2 - 1)$*;*
- *Outros dados:* $\overline{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_{i1}}{8} = \frac{760}{8} = 95$, $\overline{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{i2}}{10} = \frac{965}{10} = 96,5$, $s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8}(x_{i1}-\overline{x})^2}{7} = \frac{1450}{7} = 207,14$ *e* $s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10}(x_{i2}-\overline{x})^2}{9} = \frac{1052,5}{9} = 116,94$*;*
- *Regiões crítica e de aceitação:*



com $F(7;9;0,025) = \frac{1}{F(9;7;0,975)} = 0,207$ *e* $F(7;9;0,975) = 4,20$. *Obtemos assim as regiões, R.A.* $=]0,207;4,20[$ *e R.C.* $= [0;0,207] \cup [4,20;+\infty[$*;*

- *Valor da estatística de teste:* $F_0 = \frac{207,14}{116,94} \times 1 = 1,77$*;*
- *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste* $F_0 = 1,77$ *pertence à região de aceitação não se deve rejeitar* H_0*, ou seja, não existe diferença na variabilidade do tempo de resolução dos dois tipos de exame, ao nível de significância de 5%.*

O p-value é menor nível de significância a partir do qual se deve rejeitar H_0*, isto é, se* $\alpha \geqslant p - value$ *então deve-se rejeitar* H_0*:*

$$\begin{aligned} p - value &= 2 \times \min\{P[F \leqslant 1,77]; P[F \geqslant 1,77]\} = \\ &= 2 \times \min\{P[F_{7;9} \leqslant 1,77]; 1 - P[F_{7;9} < 1,77]\} = \\ &= 2 \times \min\{0,7912; 0,2088\} = \\ &= 0,4176. \end{aligned}$$

1.3.8 Testes de hipóteses envolvendo diferenças de valores médios para duas amostras emparelhadas

Quando as duas amostras formam um par de observações (x_{1i}, x_{2i}) trata-se de uma amostra emparelhada. Quando temos amostras emparelhadas, consideramos a variável aleatória $D = X_1 - X_2$ e calculam-se os valores observados de D, $d_i = x_{1i} - x_{2i}$, $i = 1, \ldots, n$. Para estes novos valores calcula-se a média e a variância:

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n}$$

e

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \overline{D}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}\overline{D}^2.$$

Hipóteses

Considerando $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$ temos:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = (\mu_D)_0 \\ H_1 : \mu_D \neq (\mu_D)_0 \end{cases} \quad \text{(teste bilateral)} \;;$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = (\mu_D)_0 \\ H_1 : \mu_D > (\mu_D)_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu_D \leqslant (\mu_D)_0 \\ H_1 : \mu_D > (\mu_D)_0 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à direita)} \;;$$

$$\begin{cases} H_0 : \mu_D = (\mu_D)_0 \\ H_1 : \mu_D < (\mu_D)_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} H_0 : \mu_D \geqslant (\mu_D)_0 \\ H_1 : \mu_D < (\mu_D)_0 \end{matrix} \quad \text{(teste unilateral à esquerda)} \;.$$

Estatística de teste

- População das diferenças normal, σ_D conhecido e n qualquer:

$$Z_0 = \frac{\overline{D} - (\mu_D)_0}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \sim N(0;1)\,;$$

- População das diferenças arbitrária, σ_D conhecido e $n > 30$:

$$Z_0 = \frac{\overline{D} - (\mu_D)_0}{\frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}} \dot\sim N(0;1)\,;$$

- População das diferenças arbitrária, σ_D desconhecido e $n > 30$:

$$Z_0 = \frac{\overline{D} - (\mu_D)_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \dot{\sim} N(0;1);$$

- População das diferenças normal, σ_D desconhecido e n qualquer:

$$T_0 = \frac{\overline{D} - (\mu_D)_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}.$$

Regra de decisão

- teste bilateral:
  - se $| Z_0 | \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$;
  - se $| T_0 | \geqslant t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$.
- teste unilateral à direita:
  - se $Z_0 \geqslant Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$;
  - se $T_0 \geqslant t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{n-1;1-\alpha}$.
- teste unilateral à esquerda:
  - se $Z_0 \leqslant -Z_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $Z_{\text{tabelado}} = Z_{1-\alpha}$;
  - se $T_0 \leqslant -t_{\text{tabelado}}$ então rejeita-se H_0, sendo $t_{\text{tabelado}} = t_{n-1;1-\alpha}$.

Exemplo 1.7. *Uma firma de tintas pretende reduzir o tempo de secagem, em minutos, das suas tintas e para tal resolve aplicar um novo produto químico. Os resultados obtidos para o tempo de secagem da tinta antes* (X_1) *e depois* (X_2) *de aplicado o novo produto químico foram os seguintes:*

x_1	18	38	8	10	12	12
x_2	30	70	20	4	10	20

Considerando que as variáveis X_1 *e* X_2 *seguem a distribuição normal, teste, ao nível de significância de* 10%, *se o tempo médio de secagem da tinta diminuiu com a aplicação do novo produto químico.*

Sejam as variáveis aleatórias:

- X_1 - *"tempo de secagem da tinta antes de aplicar o novo produto químico";*

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Área Departamental de Matemática
Resumos sobre Probabilidades e Estatística

- X_2 - *"tempo de secagem da tinta depois de aplicar o novo produto químico".*

Então:

- *Parâmetro a testar:* $\mu_1 - \mu_2$;
- *Formulação das hipóteses:*

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 \leqslant \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 > \mu_2 \end{cases} \quad \textit{ou} \quad \begin{cases} H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leqslant 0 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0 \end{cases} \quad \textit{(teste unilateral à direita)};$$

Como se tratam de amostras emparelhadas devemos considerar a variável aleatória $D = X_1 - X_2$ *e reescrever as hipóteses:*

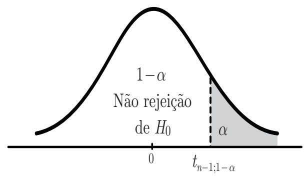
$$\begin{cases} H_0 : \mu_D \leqslant 0 \\ H_1 : \mu_D > 0 \end{cases} \quad \textit{(teste unilateral à direita)};$$

- *Tipo de população: normal;*
- *Nível de significância:* $\alpha = 0,1$;
- *Dimensão da amostra:* $n = 6$;
- *Estatística de teste:* $T_0 = \frac{\overline{D}-\mu_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$;
- *Outros dados:*

Observação	1	2	3	4	5	6
Diferenças (d_i)	-12	-32	-12	6	2	-8

Logo $\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{6} d_i}{6} = -9,333$ *e* $s_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{6}\left(d_i - \overline{d}\right)^2}{5}} = 13,369$;

- *Regiões crítica e de aceitação:*



com $t_{n-1;1-\alpha} = t_{5;0,90} = 1,4759$. *Obtemos assim as regiões, R.A.* $=]-\infty; 1,4759[$ *e R.C.* $= [1,4759; +\infty[$;

- *Valor da estatística de teste:* $T_0 = \frac{-9,333-0}{\frac{13,369}{\sqrt{6}}} = -1,71$;

- *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste* $T_0 = -1,71$ *pertence à região de aceitação, não se deve rejeitar* H_0, *ao nível de significância de* 10%, *ou seja, não existe evidência estatística suficiente para concluir que o tempo médio de secagem da tinta diminuiu com a aplicação do novo produto químico.*

O p-value é menor nível de significância a partir do qual se deve rejeitar H_0, *isto é, se* $\alpha \geqslant p-value$ *então deve-se rejeitar* H_0:

$$\begin{aligned} p-value &= P\left[T \geqslant -1,71\right] = \\ &= P\left[T_5 < 1,71\right] = \\ &= 0,926. \end{aligned}$$

2 Testes não-paramétricos

2.1 Testes de aderência ou de qualidade de ajuste

Utiliza-se um teste de aderência para testar a hipótese de que uma distribuição de frequências observadas se ajusta (ou adere) a determinada distribuição teórica. Os testes de aderência ou de qualidade de ajuste consistem em decidir entre duas alternativas do tipo:

- H_0: A população tem uma distribuição especificada;
- H_1: A população não tem a distribuição especificada;

em que a distribuição especificada pode ser uma distribuição discreta (binomial, Poisson, etc.) ou contínua (normal, exponencial, etc.), com os valores dos parâmetros especificados, ou não, em H_0. Se os parâmetros não forem especificados, terão de ser estimados.

2.1.1 Teste de Qui-Quadrado

Este teste mede a qualidade de ajuste, comparando a distribuição de frequências observadas (na amostra) com a distribuição de frequências esperadas (obtidas da distribuição teórica hipotética). Estes testes utilizam a seguinte notação:

- o_i - representa a frequência observada de um resultado;
- e_i - representa a frequência esperada de um resultado;
- k - representa o número de categorias, ou resultados, diferentes;
- n - representa o número total de provas.

Estruturação dos dados para o teste de Qui-Quadrado:

Classe i	Frequência observada	Frequência esperada	$\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$
1	o_1	e_1	$\frac{(o_1-e_1)^2}{e_1}$
2	o_2	e_2	$\frac{(o_2-e_2)^2}{e_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	o_k	e_k	$\frac{(o_k-e_k)^2}{e_k}$
Total	n	n	$Q_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$

Se $Q_0 = 0$, então $o_i = e_i$, com $i = 1, 2, \ldots, k$. Por outro lado, quanto maior for Q_0, mais a distribuição da amostra se afasta da distribuição teórica e, consequentemente, maior é a evidência a favor da rejeição de H_0.

Estatística de teste:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{k-m-1},$$

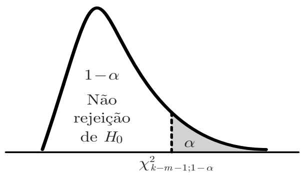
para n suficientemente grande. A letra m designa o número de parâmetros da distribuição que têm de ser estimados a partir da amostra.

Teste unilateral à direita:

- Hipóteses:
  - H_0: A população tem uma distribuição especificada;
  - H_1: A população não tem a distribuição especificada.
- Estatística de teste:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{k-m-1};$$

- Regra de decisão: se $Q_0 \geqslant \chi^2_{\text{tabelado}}$ rejeita-se H_0, sendo $\chi^2_{\text{tabelado}} = \chi^2_{k-m-1;1-\alpha}$.



Estes testes são baseados nos pressupostos de que a amostra aleatória obtida é independente e identicamente distribuída (i.i.d.) e de tamanho relativamente grande. Pode considerar-se que n é suficientemente grande se o número esperado de observações de todas as classes for maior ou igual a 5. No entanto, se a maioria (cerca de 75%) das classes satisfizer esta condição e o número esperado de observações das restantes for pelo menos 2, então o teste pode ser usado satisfatoriamente. Caso nenhuma destas situações se verifique, deve aumentar-se o tamanho da amostra ou juntar-se classes adjacentes. Observe-se que, ao juntar classes, o número de graus de liberdade diminui.

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Área Departamental de Matemática
Resumos sobre Probabilidades e Estatística

Exemplo 2.1. *O recenseamento de 320 famílias com 5 filhos conduziu aos seguintes resultados:*

Rapazes	5	4	3	2	1	0
Famílias	18	56	110	88	40	8

Verifique se estes resultados são compatíveis com a hipótese do número de rapazes numa família de 5 filhos ser uma variável aleatória com distribuição binomial, admitindo a igual probabilidade dos sexos, ao nível de significância de $0,01$.

Vai aplicar-se o teste de ajustamento do qui-quadrado. Defina-se a variável aleatória X - "número de rapazes, numa família de 5 filhos". X pode assumir os valores $0, 1, 2, 3, 4, 5$.

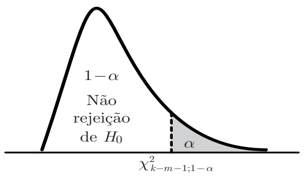
- *Formulação das hipóteses:*
  - $H_0 : X \sim b\,(n = 5; p = 0,5)$;
  - $H_1 : X \nsim b\,(n = 5; p = 0,5)$;

  dado que se admite a igual probabilidade dos sexos, isto é, $p = 0,5$.
- *Estatística de teste:* $Q_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \sim \chi^2_{k-m-1}$, *onde k é o número de classes e m, o número de parâmetros a estimar. Neste caso $m = 0$ já que p está especificado e $n = 5$. Os o_i e e_i correspondem, respectivamente, às frequências observadas e esperadas (supondo que H_0 é verdadeira, ou seja, $p = 0,5$).*

X_i	o_i	p_i	$e_i = np_i$	$\frac{(o_i-e_i)^2}{e_i}$
0	8	0,0312	9,984	0,39426
1	40	0,1563	50,016	2,00576
2	88	0,3125	100,000	1,44000
3	110	0,3125	100,000	1,00000
4	56	0,1563	50,016	0,71594
5	18	0,0312	9,984	6,43592
Total	320	1,0000	320	$Q_0 = 11,99188$

Os valores e_i obtiveram-se da seguinte forma: $e_i = np_i$, sendo p_i as probabilidades teóricas que correspondem a uma binomial de parâmetros $n = 5$ e $p = 0,5$.

- *Nível de significância:* $\alpha = 0,01$*;*
- *Determinação da região crítica e da região de aceitação: (teste unilateral à direita)*



com $\chi^2_{k-m-1;1-\alpha} = \chi^2_{5;0,99}$. *Obtemos assim as regiões, R.A.* $= [0;15,1[$ *e R.C.* $= [15,1;+\infty[$*;*

- *Tomada de decisão: Como o valor* $Q_0 = 11,99188$ *pertence à região de aceitação, não rejeitamos* H_0 *com* $\alpha = 0,01$*, isto é, conclui-se que os dados da amostra podem ter origem numa binomial de parâmetros* $n = 5$ *e* $p = 0,5$.

2.2 Testes de independência estatística

Os testes de independência baseiam-se no uso das chamadas tabelas de contingência. Uma tabela de contingência (ou tabela de frequência de dupla entrada) é uma tabela em que as frequências correspondem a duas variáveis (uma variável categoriza as linhas e a outra categoriza as colunas).

Os testes de independência são usados para determinar se uma variável linha de uma tabela de contingência é independente da sua variável coluna, isto é, estes testes consistem em decidir entre duas alternativas do tipo:

- H_0: As variáveis são (estatisticamente) independentes;
- H_1: As variáveis não são (estatisticamente) independentes.

É de suma importância reconhecer que, neste contexto, a palavra contingência se refere a dependência estatística e não pode ser usada para estabelecer uma ligação directa de causa e efeito entre as duas variáveis em questão. Ao testarmos a hipótese nula de independência entre as variáveis linha e coluna numa tabela de contingência, aplicam-se os seguintes pressupostos:

1. os dados amostrais são seleccionados aleatoriamente;

2. cada realização de cada variável pode ser classificada numa de várias categorias exaustivas e mutuamente exclusivas;
3. a hipótese nula H_0 é a afirmação de que as variáveis linha e coluna são independentes. A hipótese alternativa H_1 afirma que as variáveis linha e coluna são dependentes;
4. para cada célula na tabela de contingência, a frequência esperada e_{ij} é no mínimo 5 (não há tal exigência para as frequências observadas).

Depois de realizar e classificar as observações, comparam-se as frequências observadas o_{ij} (na amostra) com as frequências esperadas e_{ij} (no caso de H_0 ser verdadeira), calculando depois a estatística de teste. A estatística de teste permite-nos medir o grau de discordância entre as frequências observadas e as frequências que deveríamos esperar teoricamente no caso de as variáveis serem independentes (no caso de H_0 ser verdadeira). Pequenos valores da estatística de teste indicam acentuada concordância entre as frequências observadas e as frequências esperadas, pelo que a decisão deve ser no sentido de aceitar H_0. Grandes valores da estatística de teste reflectem diferenças significativas entre as frequências observadas e as esperadas pelo que a decisão deve ser no sentido de rejeitar H_0.

Para realizar o teste construímos a seguinte tabela, cujas colunas ($j = 1, 2, \ldots, c$) e as linhas ($i = 1, 2, \ldots, l$) se referem a classes. Os símbolos o_{ij} representam as frequências observadas e os e_{ij} as frequências esperadas das células ij. As frequências marginais:

$$o_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{l} o_{ij}$$

e

$$o_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{c} o_{ij}$$

são os totais da coluna j e da linha i, respectivamente. As frequências podem ser absolutas (n =número total de observações ou relativas $n = 1$).

Classe i de uma variável \ Classe j de outra variável	Frequência observada (frequência esperada)				Total
	1	2	$\cdots$	c	
1	$o_{11}\,(e_{11})$	$o_{12}\,(e_{12})$	$\cdots$	$o_{1c}\,(e_{1c})$	$o_{1\bullet} = e_{1\bullet}$
2	$o_{21}\,(e_{21})$	$o_{22}\,(e_{22})$	$\cdots$	$o_{2c}\,(e_{2c})$	$o_{2\bullet} = e_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
l	$o_{l1}\,(e_{l1})$	$o_{l2}\,(e_{l2})$	$\cdots$	$o_{lc}\,(e_{lc})$	$o_{l\bullet} = e_{l\bullet}$
Total	$o_{\bullet 1}\,(e_{\bullet 1})$	$o_{\bullet 2}\,(e_{\bullet 2})$	$\cdots$	$o_{\bullet c}\,(e_{\bullet c})$	n

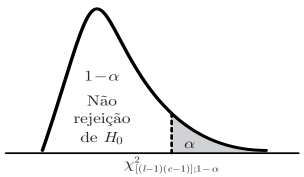
As frequências esperadas marginais $e_{\bullet j}$ e $e_{i\bullet}$ são estimadas a partir das frequências observadas na amostra, isto é, faz-se $e_{\bullet j} = o_{\bullet j}$ e $e_{i\bullet} = o_{i\bullet}$. Finalmente, as frequências esperadas e_{ij} são calculadas no pressuposto de que H_0 é verdadeira, pelo que

$$e_{ij} = \frac{o_{i\bullet} \times o_{\bullet j}}{n}.$$

Então:

- A estatística de teste é:

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{c}\left[\frac{\left(O_{ij}-E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}\right] \sim \chi^2_{[(l-1)(c-1)]};$$



- Regra de decisão: se $Q_0 \geqslant \chi^2_{\text{tabelado}}$ rejeita-se H_0, sendo $\chi^2_{\text{tabelado}} = \chi^2_{[(l-1)(c-1)];1-\alpha}$.

Os testes de independência com tabelas de contingência envolvem apenas regiões críticas unilaterais à direita.

Exemplo 2.2. *Num estudo de mercado sobre a audiência de 2 jornais semanais e de 1 revista semanal foram inquiridos 1000 leitores de ambos os sexos sobre o semanário que compram preferencialmente, tendo-se encontrado os seguintes resultados:*

Sexo \ Semanário	Expresso	Sol	Visão
Feminino	150	50	150
Masculino	350	200	100

Será de admitir que a preferência pelos vários semanários é influenciada pelo sexo dos leitores? (Admita um nível de significância de 5%)

Pretende-se saber se a preferência pelos vários semanários é independente do sexo dos leitores. Para isso vai aplicar-se o teste do qui-quadrado da independência entre duas variáveis. Então:

- *Formulação das hipóteses:*
  - H_0*: A preferência pelos vários semanários não depende do sexo do leitor;*
  - H_1*: A preferência pelos vários semanários depende do sexo do leitor.*
- *Estatística de teste:*

$$Q_0 = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{c}\left[\frac{\left(O_{ij}-E_{ij}\right)^2}{E_{ij}}\right] \sim \chi^2_{[(l-1)(c-1)]};$$

- *Nível de significância:* $\alpha = 0,05$*;*
- *Cálculos auxiliares: Os* o_{ij} *correspondem ao número de indivíduos observados das células* ij*. O cálculo do número esperado de indivíduos esperados* e_{ij}*, pressupõe que a hipótese nula,* H_0 *é verdadeira, isto é, as variáveis são independentes:*

$$e_{ij} = np_{ij} = np_{i\bullet} \times p_{\bullet j} = n\frac{o_{i\bullet}}{n}\frac{o_{\bullet j}}{n} = \frac{o_{i\bullet}}{n} \times o_{\bullet j}n.$$

  Neste caso, ter-se-á:

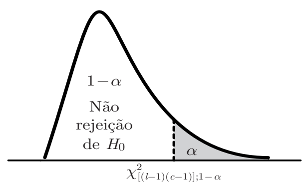
  - $o_{1\bullet} = 150 + 50 + 150 = 350$*;*
  - $o_{2\bullet} = 350 + 200 + 100 = 650$*;*

- $o_{\bullet 1} = 150 + 350 = 500$;
- $o_{\bullet 2} = 50 + 200 = 250$;
- $o_{\bullet 3} = 150 + 100 = 250$;
- $e_{11} = \frac{350 \times 500}{1000} = 175$;
- $e_{12} = \frac{350 \times 250}{1000} = 87,5$;
- $e_{13} = \frac{350 \times 250}{1000} = 87,5$;
- $e_{21} = \frac{650 \times 500}{1000} = 325$;
- $e_{22} = \frac{650 \times 250}{1000} = 162,5$;
- $e_{23} = \frac{650 \times 250}{1000} = 162,5$.

No quadro seguinte estão incluídos, para além dos o_{ij}, os e_{ij} obtidos:

Sexo \ Semanário	Expresso	Sol	Visão	Total
Feminino	150 (175)	50 (87,5)	150 (87,5)	350
Masculino	350 (325)	200 (162,5)	100 (162,5)	650
Total	500	250	250	1000

- *Determinação da região crítica e da região de aceitação: (teste unilateral à direita)*



com $\chi^2_{[(l-1)(c-1)];1-\alpha} = \chi_{2;0,95}$. *Obtemos assim as regiões, R.A.* $= [0; 5,99[$ *e R.C.* $= [5,99; +\infty[$;

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Área Departamental de Matemática
Resumos sobre Probabilidades e Estatística

- *Cálculo do valor da estatística de teste:*

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{(150-175)^2}{175} + \frac{(50-87,5)^2}{87,5} + \frac{(150-87,5)^2}{87,5} + \frac{(350-325)^2}{325} + \\ &\quad + \frac{(200-162,5)^2}{162,5} + \frac{(100-162,5)^2}{162,5} = \\ &= 98,89. \end{aligned}$$

- *Tomada de decisão: Como o valor da estatística de teste $Q_0 = 98,89$ pertence à região critica, rejeita-se H_0, isto é, devemos concluir que a preferência pelos semanários não é independente do sexo do leitor.*