Teoria Elementar da Probabilidade

jlborges@fe.up.pt

jlborges@fe.up.pt

Teoria da probabilidade

modelizar os fenómenos ou os processos nos quais interfere o acaso,

alicerce fundamental para inferência estatística

experiência aleatória - tem associados, de forma não controlada, dois ou mais resultados possíveis

jlborges@fe.up.pt

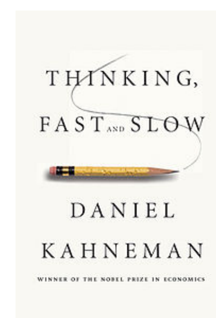
Gambling is a source to which probability theory owes its birth and development

jlborges@fe.up.pt

Librarian or a Farmer?

- An individual has been described by a neighbor as follows:
- "Steve is very shy and withdrawn, invariably helpful but with little interest in people or in the world of reality. A meek and tidy soul, he has a need for order and structure, and a passion for detail."
- Is Steve more likely to be a librarian or a farmer?

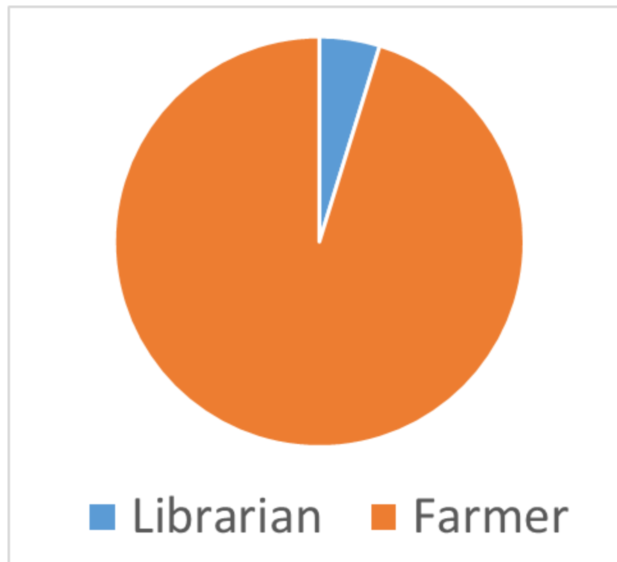
- **Thinking, Fast and Slow, Daniel Kahneman, Farrar, Straus and Giroux; 1 edition, 2011**



Librarian or a Farmer?

- personality of a **stereotypical librarian**
- relevant **statistical considerations are almost always ignored**
- more than 20 male farmers for each male librarian in the US

- it is almost certain that more "meek and tidy" souls will be found on tractors than at library information desks



numa experiência aleatória é importante definir o

Espaço amostral (ou **espaço de resultados**)

que é o

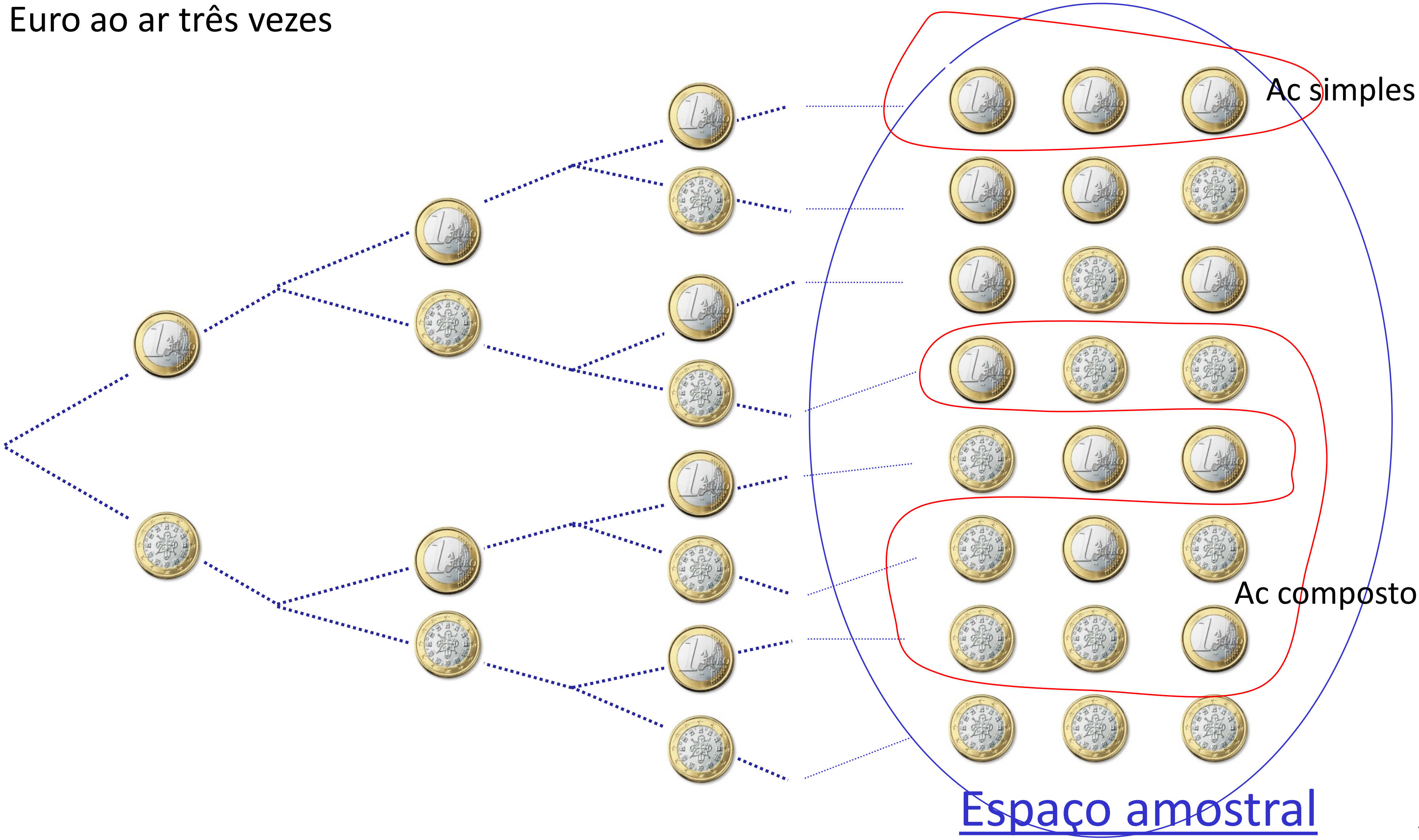
conjunto de todos os resultados possíveis

À mesma experiência aleatória podem estar associados espaços amostrais diversos, dependendo da forma como essa experiência é avaliada

Acontecimento:

conjunto de um ou mais resultados do espaço amostral

Exemplo sequência de FC's (face comum) e FN's (face nacional) no lançamento de um Euro ao ar três vezes



O conceito de **probabilidade** pode ser definido de diferentes modos

Definição Clássica de probabilidade

experiência aleatória com **N** resultados mutuamente exclusivos e igualmente prováveis

para um acontecimento **A** que contém N_A desses resultados ($N_A \leq N$), a sua **probabilidade** é dada por

$$\boxed{P(A) = \frac{N_A}{N}}$$

Exemplo

A probabilidade de obter um resultado não inferior a três no lançamento de um dado é 4/6 = 0.667

(o nº de casos favoráveis é 4, sendo 6 o nº de casos possíveis)

Problema

Entre os dígitos 1,2,3,4,5 é seleccionado um ao acaso e, em seguida, uma segunda selecção é efectuada entre os restantes

i) Qual a probabilidade de o primeiro dígito seleccionado ser ímpar?
ii) Qual a probabilidade de o segundo dígito seleccionado ser ímpar?
iii) Qual a probabilidade de ambos os dígitos serem ímpares?

i) 3/5

ii) 3/5 * 2/4 + 2/5*3/4= 3/5

iii) 3/5 * 2/4=3/10

Odds de um resultado de uma experiência aleatória

Razão dos resultados favoráveis com os resultados desfavoráveis:

$$p / (1-p)$$

Aposta com um dado

aposta A: ganho se sair 2 ou menos

aposta B: ganho se sair 3 ou menos

$$\boxed{p(A) = 2/6 \quad p(B) = 3/6}$$

odds ratio = 1/odds

Qual das apostas envolve mais risco para o apostador?

$$odds(A) = \frac{2/6}{1-2/6} = 0.5 \quad \rightarrow \quad 2/1$$

$$odds(B) = \frac{3/6}{1-3/6} = 1 \quad \rightarrow \quad 1/1$$

Aposta A será justa se o lucro for maior

Para ser justo, por cada unidade apostada devo receber essa unidade mais duas

$$\boxed{\begin{aligned} odds(A) &= \frac{2/6}{1-2/6} = 0.5 \quad \rightarrow \quad 2/1 \\ odds(B) &= \frac{3/6}{1-3/6} = 1 \qquad \rightarrow \quad 1/1 \end{aligned}}$$

Se apostar 10€ com as odds 2/1 em caso de sucesso ganho 20€

Neste caso o valor esperado da aposta A será:

$$\boxed{E(A) = \frac{2}{6} \cdot 2 \cdot 10 - \left(1 - \frac{2}{6}\right) \cdot 1 \cdot 10 = 0}$$

Logo, 2/1 corresponde a uma aposta justa

Roleta Europeia

- 18 Pretos,
- 18 Vermelhos,
- 1 Verde
- 37 resultados possíveis

- Apostar no preto = 18/37 = .49
- Prob. perder = 19/37 = .51
- Probabilidades favorecem casino. O Lucro do casino a longo prazo supera o prejuízo.
- Nos EUA a roleta tem 0 e 00, sendo a margem do casino ainda maior.

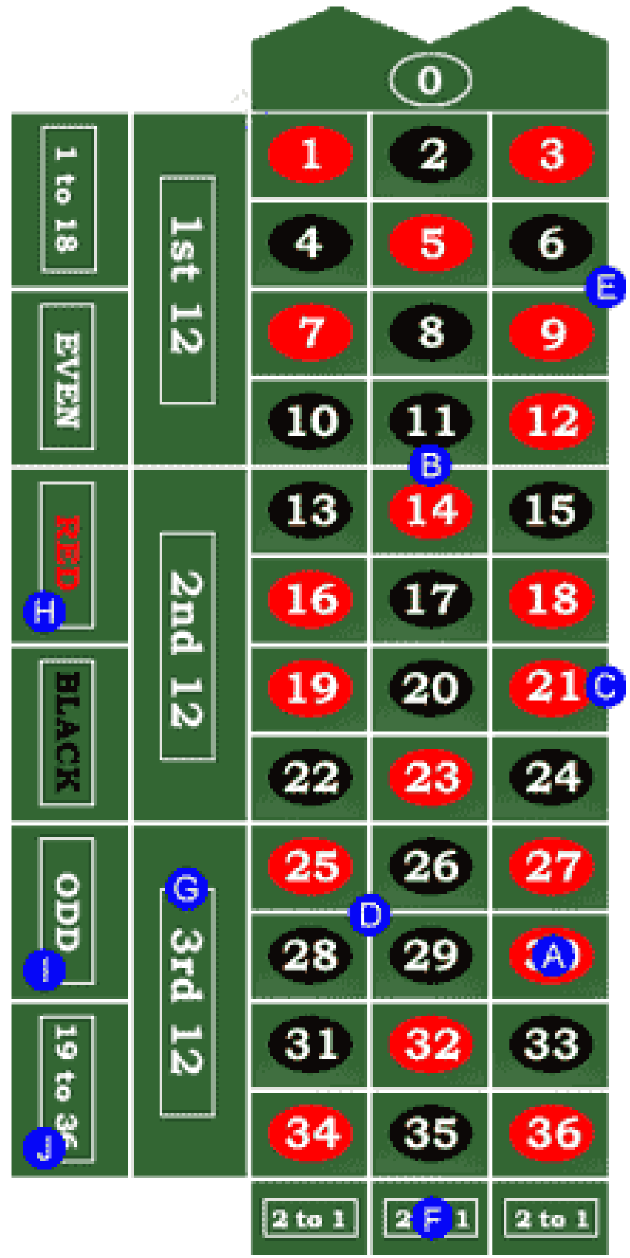
jlborges@fe.up.pt

Roulette Inside Bets

Wager	Ex.	Bet on	Payoff	Odds
Straight up	A	30	35:1	36:1
Split Bet	B	11 or 14	17:1	17.5:1
Street Bet	C	19, 20, 21	11:1	11.33:1
Corner	D	25, 26, 28, 29	8:1	8.25:1
Line Bet	E	4, 5, 6, 7, 8, 9	5:1	5.17:1

Roulette Outside Bets

Wager	Ex.	Bet on	Payoff	Odds
Column	F	Set of column numbers	2:1	2.08:1
Dozen	G	25 through 36	2:1	2.08:1
Red or Black	H	Red numbers	1:1	1.01:1
Even or Odd	I	Odd numbers	1:1	1.01:1
Low or High	J	19 through 36	1:1	1.01:1



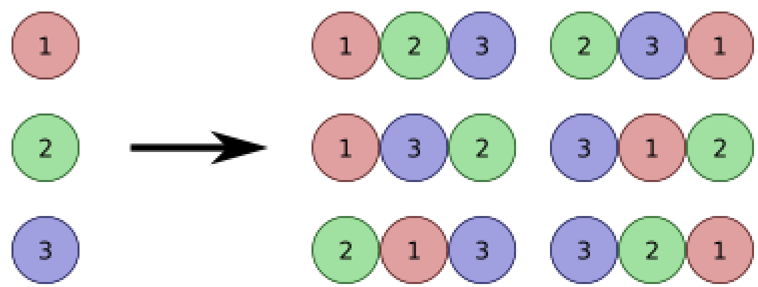
Análise Combinatória

Permutações de **n** elementos distintos são os agrupamentos formados por esses elementos que apenas diferem uns dos outros pela ordem pela qual tais elementos estão dispostos

$$P_n = n!$$

Exemplo: considerem-se as permutações dos números 1, 2 e 3.

3! = 6



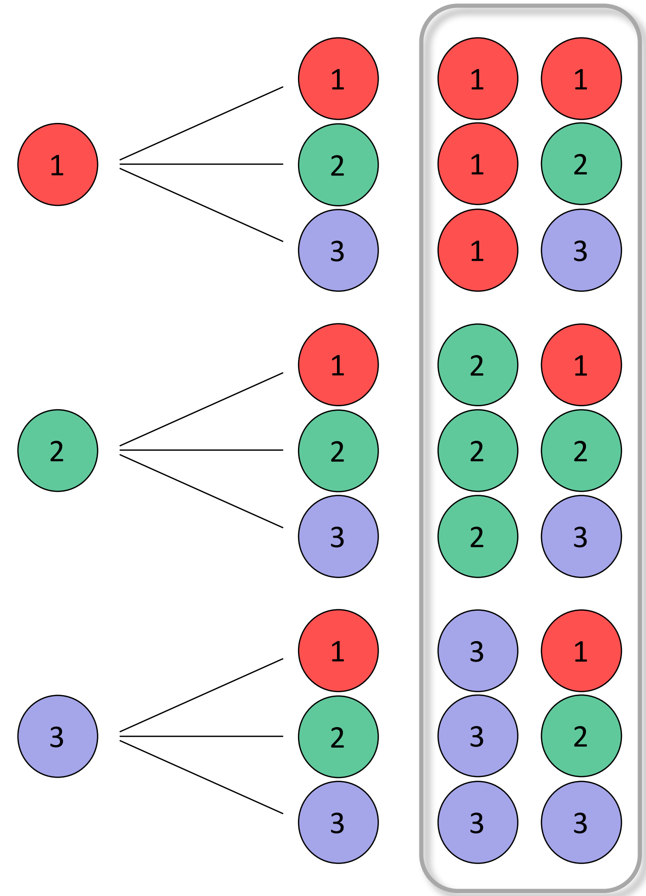
Análise Combinatória

Permutações com repetição de **n** elementos m vezes

$$P_n = n^m$$

Exemplo: considerem-se as permutações com repetição dos números 1, 2 e 3 duas vezes.

$3^2=9$

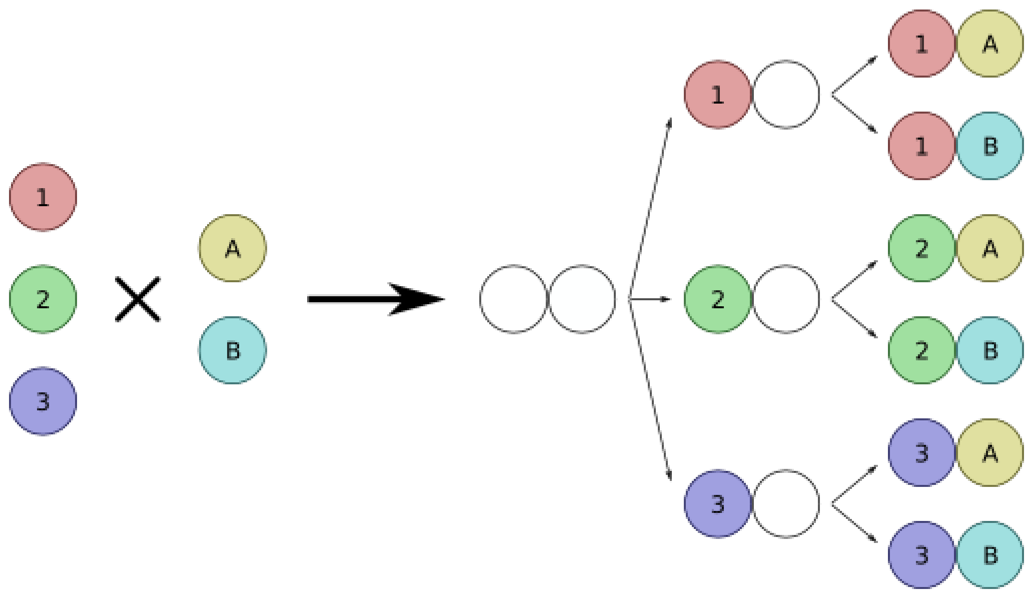


Multiplicação e combinação - Para calcular o número de combinações possíveis

- **Exemplo:**
  - 3 camisolas (Azul, Verde e Vermelha)
  - 2 pares de calças (Azul e Amarela)

  Quantas combinações são possíveis ?

  3 x 2 = 6

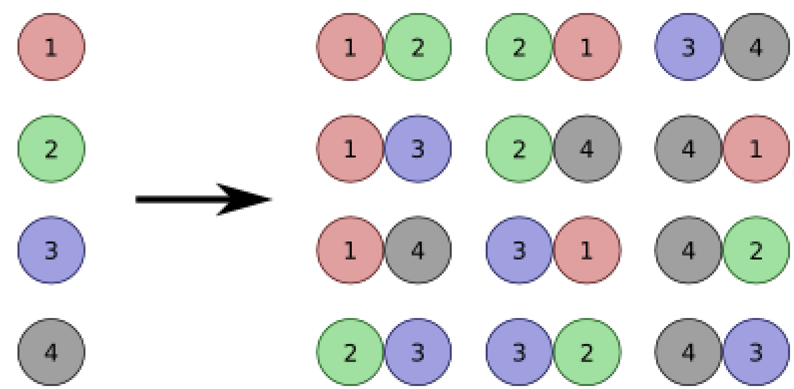


Arranjos <u>de **n** elementos distintos tomados **k** a **k**</u> são os agrupamentos formados por **k** desses elementos que diferem uns dos outros tanto pelos elementos que neles figuram como pela ordem pela qual estes elementos estão dispostos

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo: considerem-se os arranjos dos números 1, 2, 3 e 4 tomados dois a dois.

4! / 2! = 12

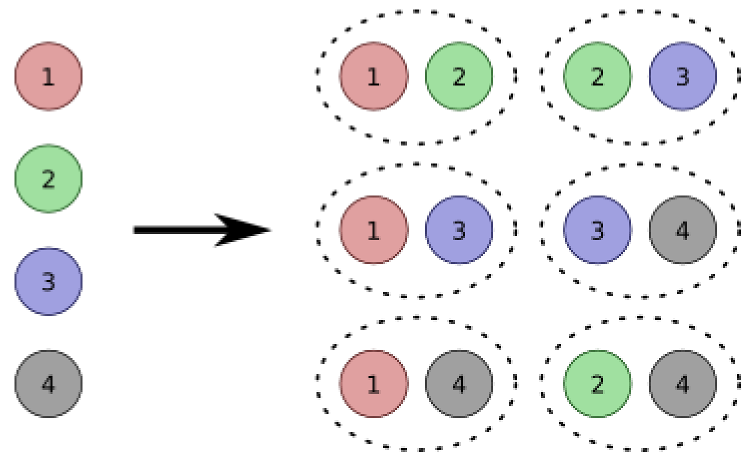


Combinações de **n** elementos distintos tomados **k** a **k** são os agrupamentos formados por **k** desses elementos que apenas diferem uns dos outros pelos elementos que neles figuram, independentemente da ordem pela qual estes elementos estão dispostos

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Exemplo: considerem-se as combinações dos números 1, 2, 3 e 4 tomados dois a dois.

4! / ((4-2)! x 2!) = 6



Definição Frequencista de probabilidade

Estende as definições anteriores ao caso em que a simetria e a equiprobabilidade dos resultados não se aplicam

Se no decurso de **N** realizações de uma experiência um acontecimento **A** ocorrer **N_A** vezes ($0 \leq N_A \leq N$), a **probabilidade do acontecimento A** é dada por

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

Exemplo

Qual a probabilidade de um português com 18 anos viver pelo menos até aos 70 anos?

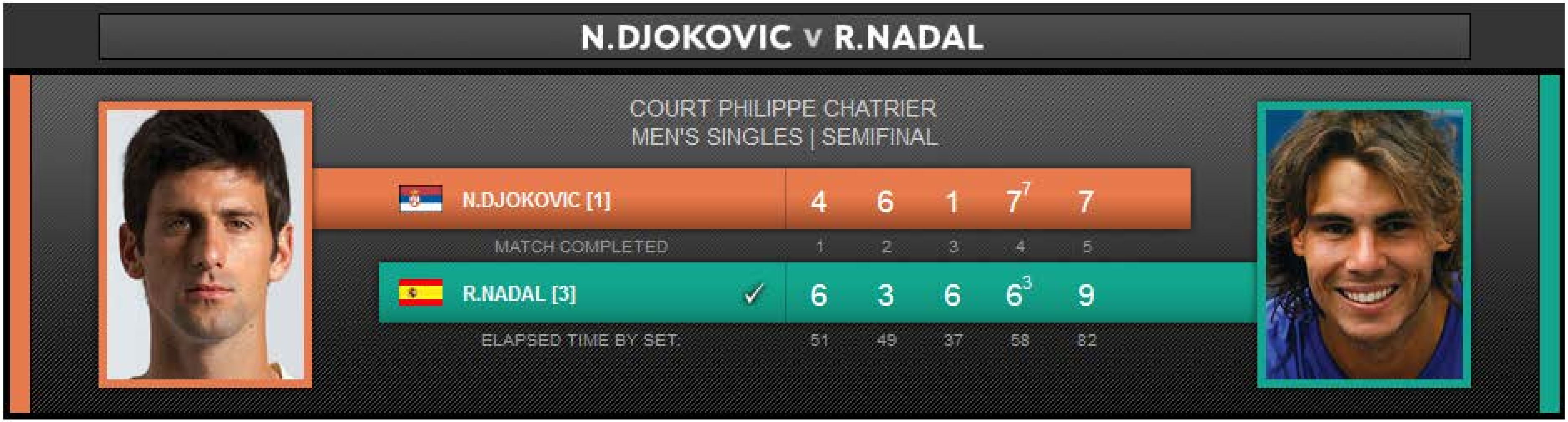
Qual a probabilidade de o Roger Federer fazer um ás num match-point?

Probabilidades de um dado ou de uma moeda 'defeituosa'.

jlborges@fe.up.pt

2013 - Roland Garros - Semi Final

Scores / Match Statistics



Total points won	S1	S2	S3	S4	S5	Total	%
Nadal	36	27	28	34	52	177	0.53
Djokovic	30	32	12	39	45	158	0.47

Prob. Nadal
Ganhar um ponto

Serve	Total	Won	Lost	% won
Nadal	160	108	52	0.68
Djokovic	175	106	69	0.61

$$\frac{num\ sucessos}{num\ experiências} = \frac{177}{177 + 158}$$

Definição subjectiva de probabilidade

No caso de experiências que não se repetem de forma estável um número significativo de vezes, a via frequencista não possibilita estimar probabilidades

Nestas situações, as **probabilidades** podem ser interpretadas como <u>expressões do grau de credibilidade</u> que cada pessoa atribui à ocorrência dos acontecimentos em causa

Exemplo

Qual a probabilidade de o actual governo se manter inalterado nos próximos seis meses?

jlborges@fe.up.pt

Mundial 2002

World Cup Winner	bet365		EUROBET	SportingOdds	sportingbet
ARGENTINA Group F	9/2	9/2	4/1	9/2	9/2
FRANCE Group A	7/2	7/2	4/1	7/2	4/1
ITALY Group G	9/2	5/1	4/1	5/1	5/1
BRAZIL Group C	11/2	6/1	6/1	6/1	6/1
SPAIN Group B	8/1	8/1	10/1	8/1	8/1
ENGLAND Group F	14/1	14/1	10/1	14/1	14/1
GERMANY Group E	12/1	18/1	15/1	16/1	16/1
PORTUGAL Group D	12/1	14/1	12/1	14/1	12/1
IRELAND Group E	125/1	100/1	80/1	66/1	100/1

odds=p/(1-p)

Odds ratio

$$odds = p/(1-p) \quad \Rightarrow p = odds/(1+odds)$$

$$p_{Port} = \frac{1/12}{1+1/12} = 7.7\%$$

Probabilidade de Portugal ser campeão mundial?

Def. Frequencista = 0.0000 %

Def. Subjectiva = 7.7%

https://www.skybet.com/football/euro-2016

Sunday 3rd July 2016

Euro 2016 Winner - Win Outright Each Way: 1/2 f

France 100/30	Germany 100/30
Spain 11/2	Belgium 12/1
England 12/1	Italy 16/1
Portugal 18/1	Croatia 22/1
Switzerland 33/1	Austria 40/1
Hide	
Russia 40/1	Ukraine 66/1
Poland 66/1	Sweden 80/1
Turkey 80/1	Wales 80/1
Romania 80/1	Czech Republic 100/1
Iceland 100/1	Republic of Ireland 150/1
Slovakia 150/1	Hungary 250/1
Northern Ireland 250/1	Albania 250/1

em 19 Fev 2016

Markets Offered

- Next Pope
- Papal Name Of Next Pope
- Length Of Papal Conclave
- Country Of Next Pope
- Age Of Next Pope
- No. Of Ballots Held

Next Pope

Friday 15th March 2013, 12:00

Pope Benedict retires! The Paddy Power Blog investigates who will succeed him

Next Pope Hide

Singles Only. Applies to the next permanently appointed Pope after Benedict XVI. Others on request.

Cardinal Marc Ouellet (Canada)	3/1	Cardinal Antonio Canizares Llovera (Spain)	40/1	Cardinal Jorge Mario Bergoglio (Argentina)	80/1
Cardinal Peter Turkson (Ghana)	7/2	Cardinal Luis Antonio Tagle (Philipines)	40/1	Cardinal Wilfrid Napier (South Africa)	80/1
Cardinal Francis Arinze (Nigeria)	11/2	Cardinal Norberto Rivera Carrera (Mexico)	40/1	Cardinal Silvano Piovanelli (Italy)	100/1
Cardinal Leonardo Sandri (Argentina)	7/1	Cardinal Agnostino Vallini(Italy)	40/1	Archbishop Piero Marini (Italy)	100/1
Archbishop Angelo Scola	7/1	Cardinal Andre Vingt-	50/1	Archbishop Gerhard Ludwig	100/1

http://www.paddypower.com/bet/novelty-betting/current-affairs/pope-betting

Axiomas de Probabilidade

Conjunto de regras (propriedades) que as probabilidades tem de satisfazer

Axioma 1 $0 \leq P(A) \leq 1$

Axioma 2 $P(S) = 1$

Axioma 3 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(Se **A** e **B** forem mutuamente exclusivos)

Com base nos axiomas apresentados, podem deduzir-se as seguintes **propriedades associadas às probabilidades**

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

$$P(\phi)=0$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

jlborges@fe.up.pt

Problema

O jogador A lança **6 dados** e ganha um prémio se conseguir **pelo menos um 1**.

O jogador B lança **12 dados** e ganha um prémio se conseguir **pelo menos dois 1s**.

Qual o jogador com maior probabilidade de ganhar um prémio?

$$p_A = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.665$$

$$p_B = 1 - \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 12 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{11}\right] = 0.619$$

Nota: Quando se pergunta "pelo menos..." é em geral mais fácil calcular o complemento

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

If you bet on a horse, that’s gambling.

If you bet that you can make three spades, that's entertainment.

If you bet cotton will go up three points, that’s business.

See the difference?

Blackie Sherrod

Probabilidade Condicional

Probabilidade de ocorrência de um acontecimento **A** quando se admite como certa a ocorrência de um outro acontecimento **B**

p(A | B), designa-se por **probabilidade condicional** de **A** dado **B**

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} \quad (com\ P(B) > 0)}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Exemplo:

Três lâmpadas **defeituosas** foram misturadas com **seis** lâmpada **boas**.

Calcule a probabilidade de duas lâmpadas seleccionadas ao acaso serem boas.

A_1: a primeira lâmpada é boa

A_2: a segunda lâmpada é boa

A probabilidade de ambas as lâmpadas serem boas é dada por

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) = \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$$

Acontecimentos Independentes

Dois **acontecimentos** dizem-se **independentes** quando a ocorrência de um não afecta a ocorrência do outro

$$P(A|B) = P(A) \qquad (com\ P(B) > 0)$$

OU

$$P(B|A) = P(B) \qquad (com\ P(A) > 0)$$

OU

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad (com\ P(A) > 0\ e\ P(B) > 0)$$

jlborges@fe.up.pt

Total points won	S1	S2	S3	S4	S5	Total	% Wp
Nadal	36	27	28	34	52	177	0.53
Djokovic	30	32	12	39	45	158	0.47

Serve	Total	Won	Lost	% S
Nadal	160	108	52	0.48
Djokovic	175	106	69	0.52

Nadal ganhar um ponto:
$P(Wp)$

$$P(Wp) = \frac{177}{177+158} = 0.53 \qquad P(S) = \frac{160}{160+175} = 0.48$$

Nadal servir:
$P(S)$:

$$P(S \cap Wp) = P(S) \cdot P(Wp) = \frac{160}{160+175} \cdot \frac{177}{177+158} = 0.25$$

$$P(S \cap Wp) = P(S) \cdot P(Wp|S) = \frac{160}{160+175} \cdot \frac{108}{160} = 0.32$$

$$P(Wp) \neq P(Wp|S)$$

não são acontecimentos independentes

a probabilidade de o Nadal ganhar um ponto é maior se estiver a servir

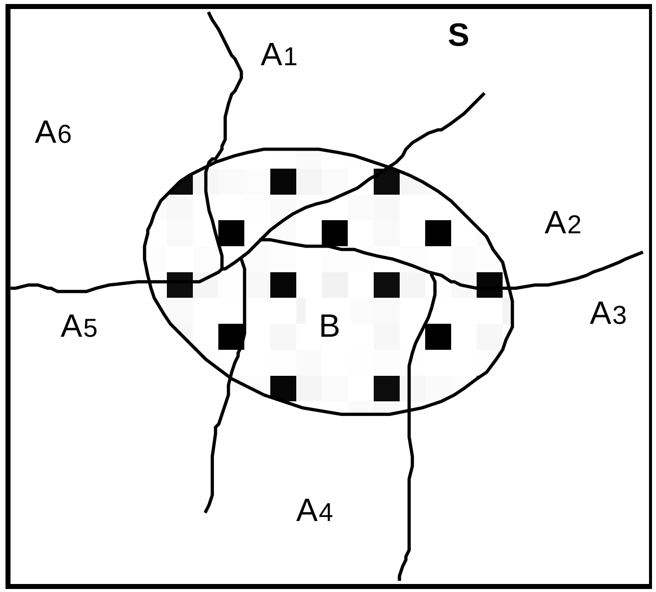
Os teoremas válidos para as probabilidade são também válidos para as probabilidades condicionadas.

$$P(A|H)+P(\overline{A}|H)=1$$
$$P(\phi|H)=0$$
$$P(A\cup B|H)=P(A|H)+P(B|H)-P(A\cap B|H)$$

A expressão da probabilidade condicional pode ser generalizada da seguinte forma:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A|B\cap C)\cdot P(B|C)\cdot P(C)$$

Teorema de Bayes



Rev. T. Bayes **1702-1761**

$$P(A_n \mid B) = \frac{P\left(B \middle| A_n\right) \cdot P\left(A_n\right)}{P\left(B \middle| A_1\right) \cdot P\left(A_1\right) + \cdots + P\left(B \middle| A_N\right) \cdot P\left(A_N\right)}$$

jlborges@fe.up.pt

Ex - Diagnosing Testing

Large
Population

(all football
players in
Europe)

1 random Player
with positive doping test

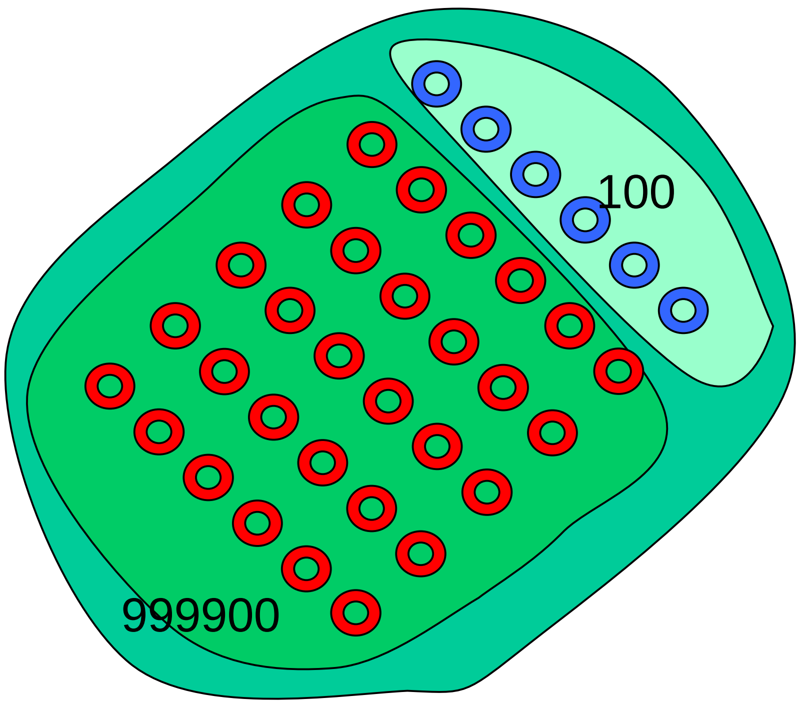
test with 99% accuracy

Question:

What is the probability of him being guilty?

Is it 99%?

- **NO!!** It depends on how common or rare doping is.
- Suppose it affects 1 player in 10,000 and the population has 1,000,000 players



If we test all the players we get the following results:

True positives = 0.99 x 100 = 99

False positives = 0.01 x 999,900 = 9,999

Of those who test positve only

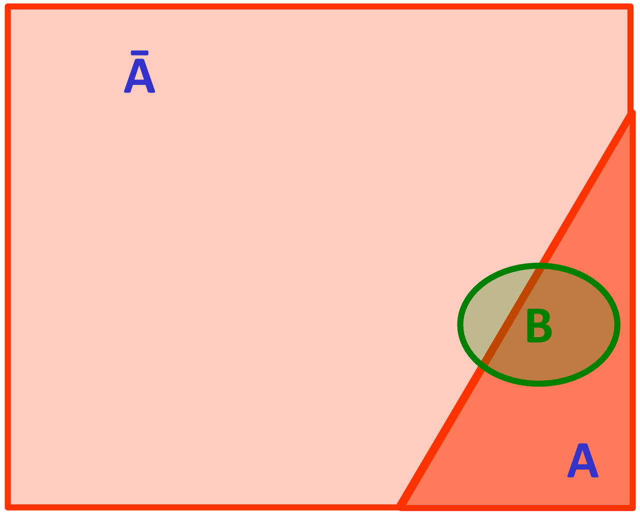
$$\frac{99}{99+9999}=0.0098$$

are guilty!

- Key intuition
- once we know the test is positive
- weight up the plausibility of the two competing explanations
- Hip 1: player not doped (high prob.) and the test gets it wrong (low prob.)
- Hip 2: player doped (low prob.) and the test gets it right (high prob.)

- 0.0098 measures how likely is hip 2 relatively to hip 1

jlborges@fe.up.pt



A: Tem doping
B: Teste positivo

P(A) = 100/1 000 000 = 0.0001
P(B| A) = 0.99 (resultado correto)
P(B| Ā) = 0.01 (resultado incorreto)

P(A| B)=?

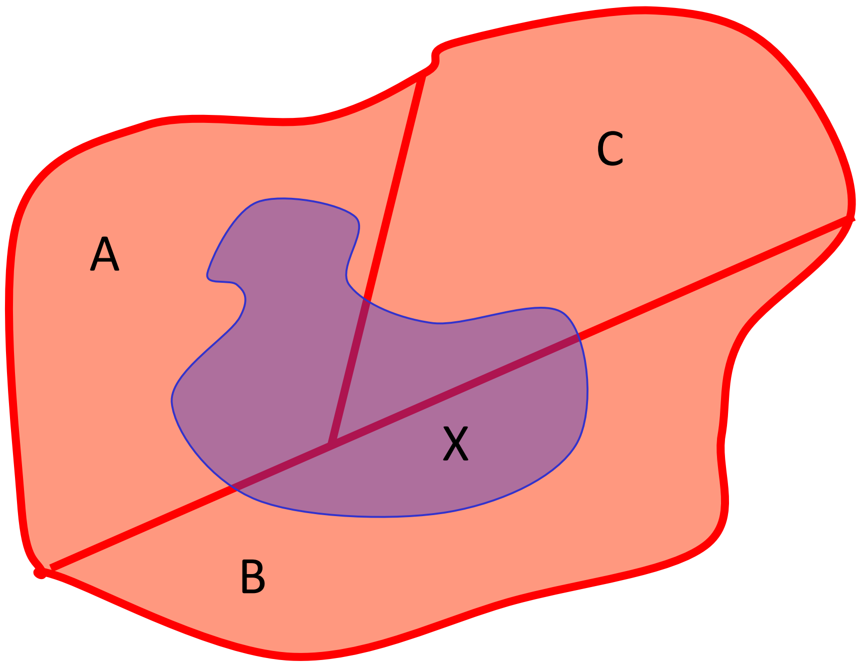
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = p(B \mid A) \cdot P(A)$$

$$P(B) = P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid \overline{A}) \cdot P(\overline{A})$$

$$P(A \mid B) = \frac{p(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid \overline{A}) \cdot P(\overline{A})} = \frac{0.99 \cdot 0.0001}{0.99 \cdot 0.0001 + 0.01 \cdot (1 - 0.0001)}$$

$$P(A \mid B) = 0.0098\%$$



$$P(A|X)=\frac{P(X|A)\cdot P(A)}{P(X|A)\cdot P(A)+P(X|B)\cdot P(B)+P(X|C)\cdot P(C)}$$

jlborges@fe.up.pt

Uma simplificação de um exemplo muito conhecido de aplicação do **Bayes classifier**

http://shatterline.com/blog/2013/09/12/not-so-naive-classification-with-the-naive-bayes-classifier/

Day	Temperature	Humidity	*PlayTennis*?
1	Hot	High	No
2	Hot	High	No
3	Hot	High	Yes
4	Mild	High	Yes
5	Cool	Normal	Yes
6	Cool	Normal	No
7	Cool	Normal	Yes
8	Mild	High	No
9	Cool	Normal	Yes
10	Mild	Normal	Yes
11	Mild	Normal	Yes
12	Mild	High	Yes
13	Hot	Normal	Yes
14	Mild	High	No

se <hot, high> PlayTennis?

Probabilidades não condicionadas:

P(Yes) = 9/14

P(No) = 5/14

será a melhor estimativa se não conhecer as previsões.

Day	Temperature	Humidity	*PlayTennis?*
1	Hot	High	No
2	Hot	High	No
3	Hot	High	Yes
4	Mild	High	Yes
5	Cool	Normal	Yes
6	Cool	Normal	No
7	Cool	Normal	Yes
8	Mild	High	No
9	Cool	Normal	Yes
10	Mild	Normal	Yes
11	Mild	Normal	Yes
12	Mild	High	Yes
13	Hot	Normal	Yes
14	Mild	High	No

Probabilidades condicionadas:

Temperature	
p(hot | Yes) = 2/9	P(hot | No) = 2/5
P(mild | Yes) = 4/9	P(mild | No) = 2/5
P(cool | Yes) = 3/9	P(cool |No) = 1/5

Humidity	
P(high | Yes) = 3/9	P(high | No) = 4/5
P(normal | Yes) = 6/9	P(normal | No) = 2/5

P(Yes) = 9/14

P(No) = 5/14

Temperature	
p(hot | Yes) = 2/9	P(hot | No) = 2/5
P(mild | Yes) = 4/9	P(mild | No) = 2/5
P(cool | Yes) = 3/9	P(cool |No) = 1/5

Humidity	
P(high | Yes) = 3/9	P(high | No) = 4/5
P(normal | Yes) = 6/9	P(normal | No) = 2/5

assumindo a independencia da temperatura e da humidade

$$P(\,Yes \mid hot, high) = \frac{P(Yes) \cdot P(hot|Yes) \cdot P(high|Yes)}{P(hot, high)}$$

$$P(\,No \mid hot, high) = \frac{P(No) \cdot P(hot|No) \cdot P(high|No)}{P(hot, high)}$$

para comparar podemos ignorar P(hot, high)

P(Yes | (hot , high)) = 9/14 · 2/9 · 3/9 = 0.048

P(No| X) = 5/14 · 2/5 · 4/5 = 0.114

Sabendo as previsões é mais provável não jogar!

Decisão contrária à que tomaríamos na ausência da previsão.

http://en.wikipedia.org/wiki/Naive_Bayes_spam_filtering

Article Talk Read Edit View history Sear

Naive Bayes spam filtering

From Wikipedia, the free encyclopedia

Naive Bayes classifiers are a popular statistical technique of e-mail filtering. They typically use bag of words features to identify spam e-mail, an approach commonly used in text classification.

Naive Bayes classifiers work by correlating the use of tokens (typically words, or sometimes other things), with spam and non-spam e-mails and then using Bayes' theorem to calculate a probability that an email is or is not spam.

Naive Bayes spam filtering is a baseline technique for dealing with spam that can tailor itself to the email needs of individual users and give low false positive spam detection rates that are generally acceptable to users. It is one of the oldest ways of doing spam filtering, with roots in the 1990s.

Contents [hide]

1 History
2 Process

A BAD GRAPHIC

More Damned Lies AND Statistics; Joel Best; University of California Press, Ltd.; 2004

…

The data, which are very simple, show that women who drink more have somewhat greater difficulty becoming pregnant.

Whereas 64% of women who had fewer than Five drinks per week became pregnant within six months after stopping use of contraception,

only 55% of those who reported having more than ten drinks per week became pregnant within the same period.

At First glance, this is confusing—why use the smaller image to represent the higher pregnancy rate? But then all becomes clear: fewer than five drinks gets five glasses; ten or more drinks gets ten glasses!

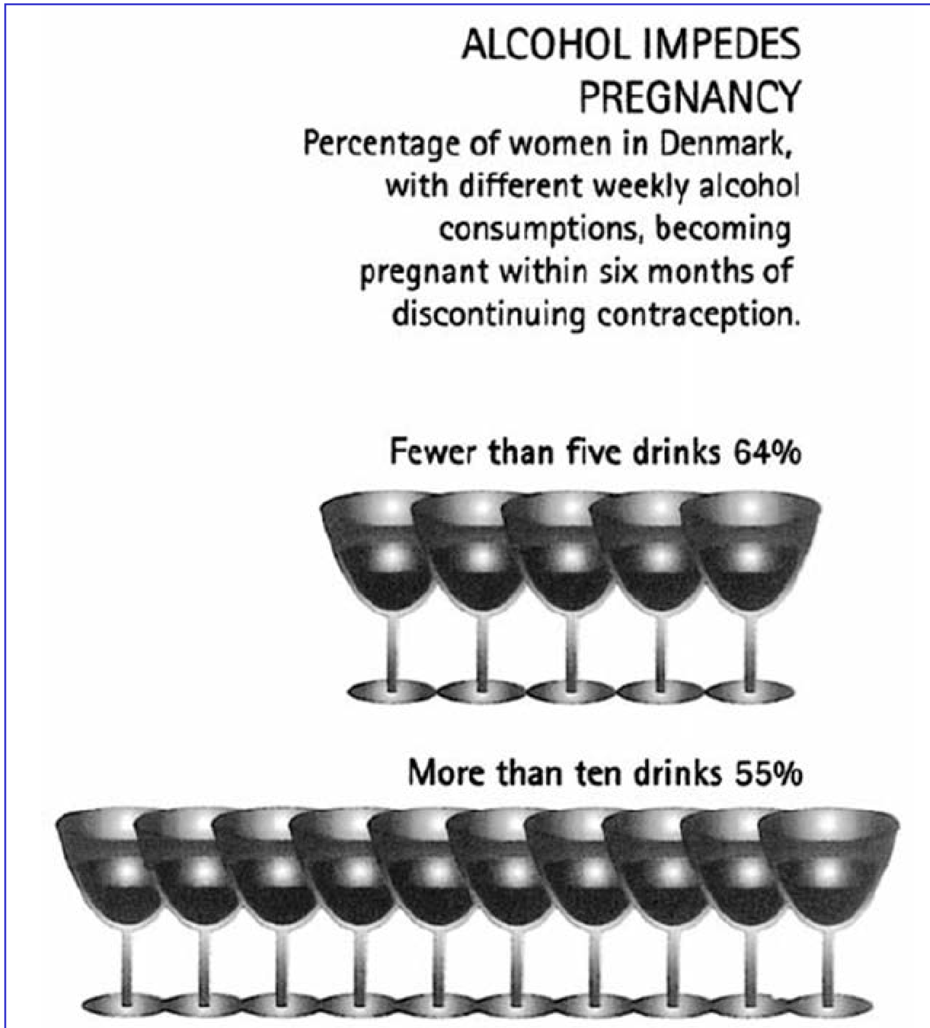
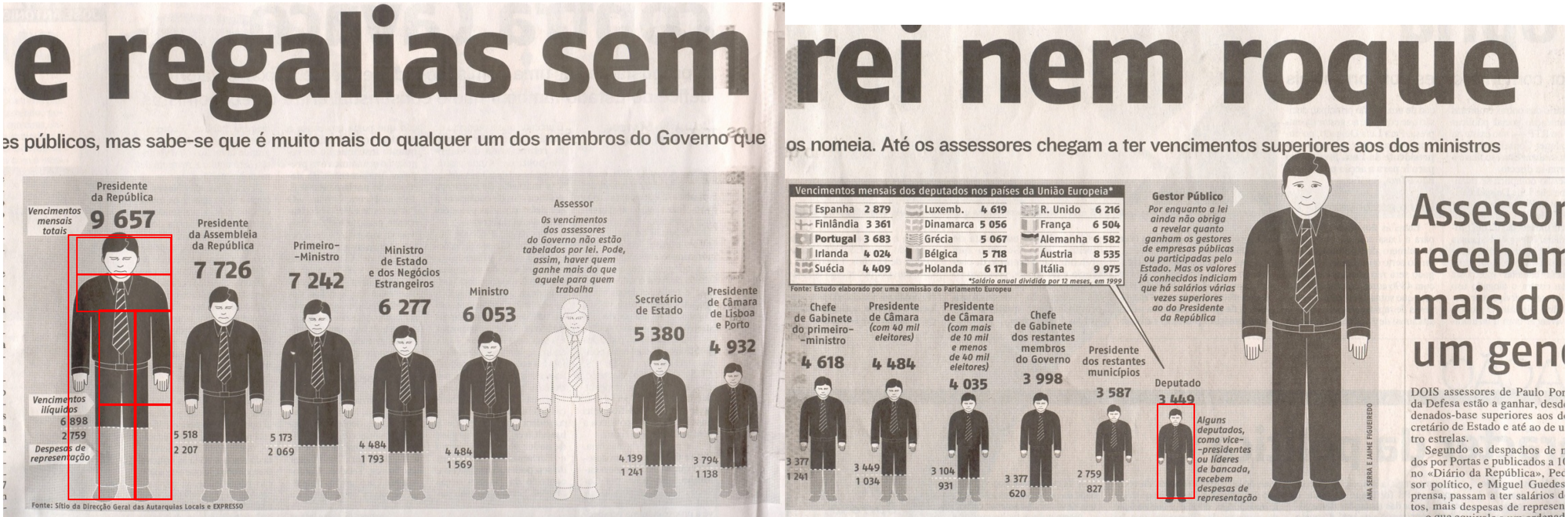


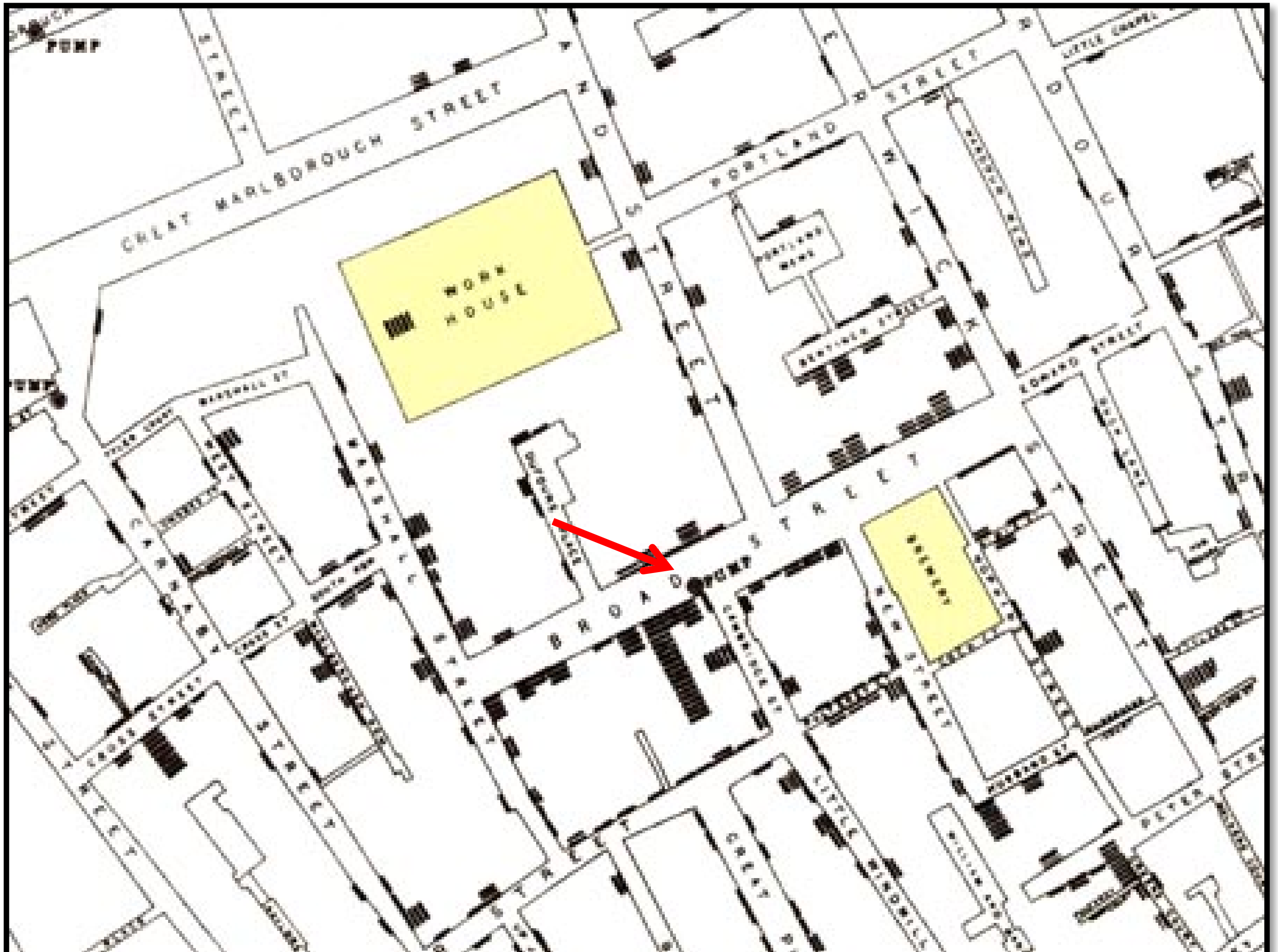
FIGURE 9. A visual display that graphs the scale instead of the data. (*Source:* Judith Mackay, *The Penguin Atlas of Human Sexual Behavior* [New York: Penguin, 2000], p. 47; graphics © 2000 Myriad Editions, Ltd., used by permission of Viking Penguin.)



Expresso – 18 Jan. 2003

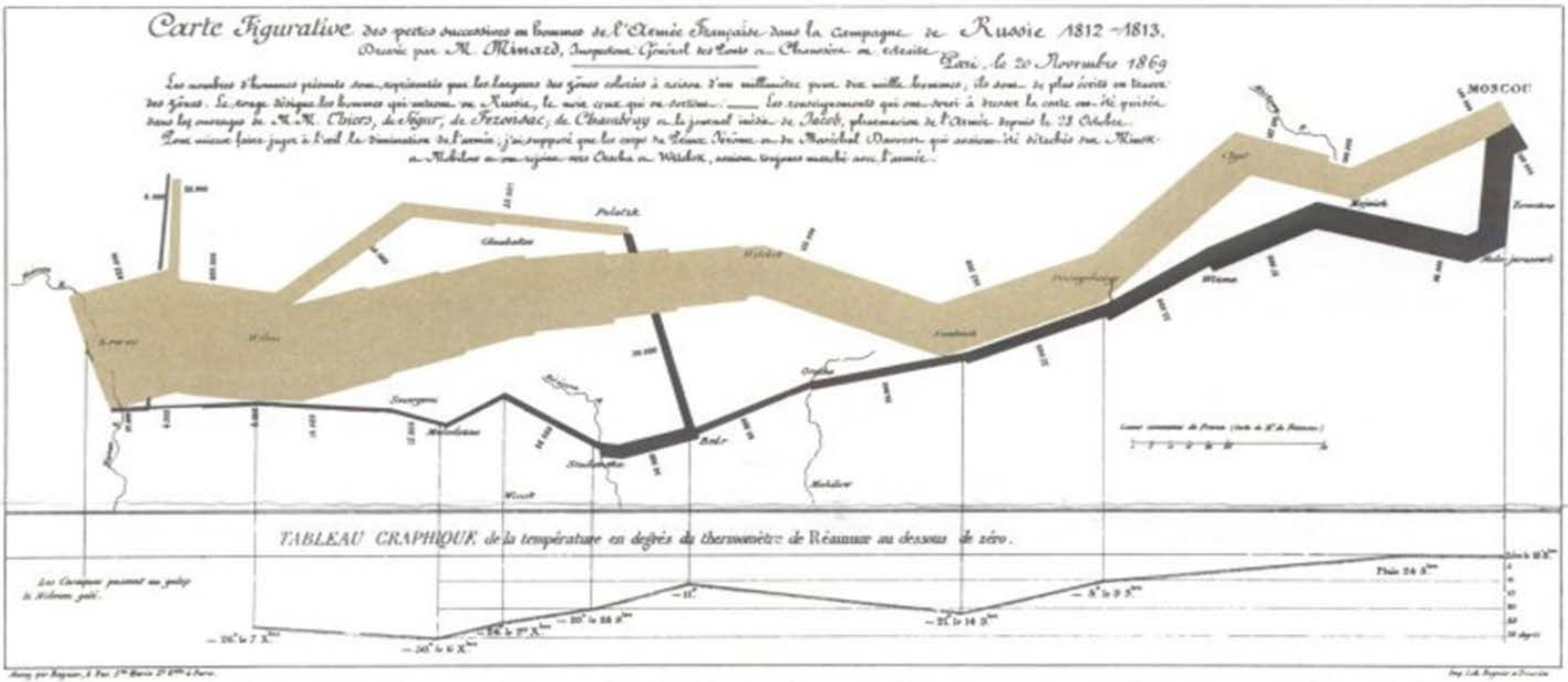
$$\frac{9657}{3449} = 2.8$$

Classical example of how to lie with statistics.



John Snow’s map in which each death from cholera is indicated by a black bar.
Cholera is spread by infected water. There were outbreaks of cholera in 1832, 1848 and 1854 which killed thousands of people across Britain. People at the time believed that cholera was caused by miasma (bad smells) in the air which caused disease.
In 1843, John Snow made a breakthrough. He proved that there was a link between cholera and the water supply. Snow studied a particluar water pump in London on Broad Street. He drew up a map showing the number of deaths surrounding the water pump. He then removed the handle from the water pump so that people coud not drink from it. Unsuprisingly, the number of deaths in the aread dropped dramatically.

A VERY GOOD GRAPHIC

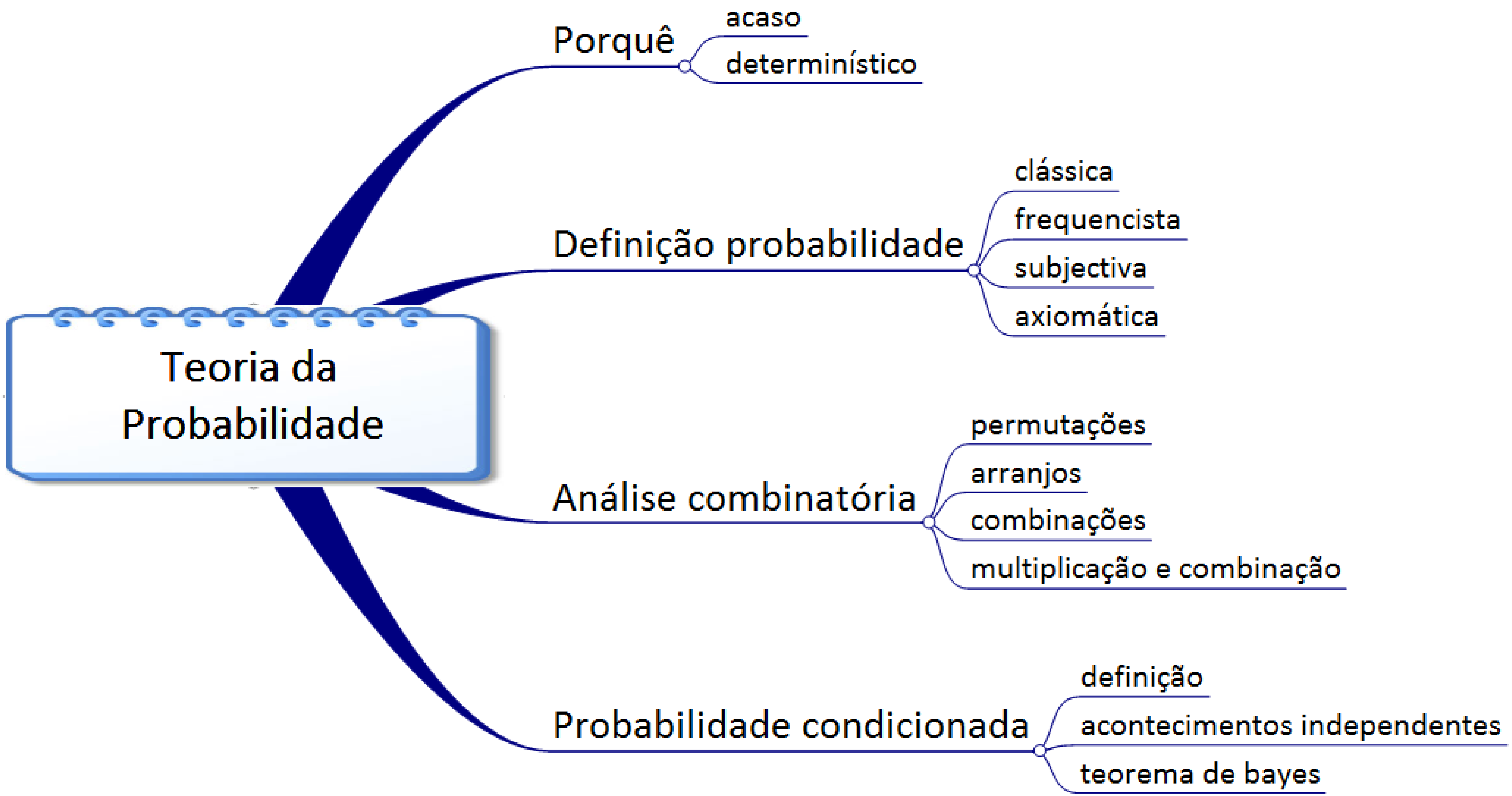


This map drawn by Charles Joseph Minard portrays the losses suffered by Napoleon's army in the Russian campaign of 1812. Beginning at the left on the Polish-Russian border near the Niemen, the thick band shows the size of the army (442,000 men) as it invaded Russia. The width of the band indicates the size of the army at each position. In September, the army reached Moscow with 100,000 men. The path of Napoleon's retreat from Moscow in the bitterly cold winter is depicted by the dark lower band, which is tied to temperature and time scales. The remains of the Grande Armée struggled out of Russia with 10,000 men. Minard's graphic tells a rich, coherent story with its multivariate data, far more enlightening than just a single number bouncing along over time. Six variables are plotted: the size of the army, its location on a two-dimensional surface, direction of the army's movement, and temperature on various dates during the retreat from Moscow. It may well be the best statistical graphic ever drawn.

Variables shown: size of the army; its location on a two-dimensional surface, direction of the army´s movement, the temperature during retreat

Resultados de Aprendizagem

- Definir espaço amostral e acontecimentos de uma experiência aleatória
- Compreender e saber quando aplicar as diferentes definições de probabilidade (clássica, frequencista, subjetiva, axiomática)
- Calcular o número de resultados possíveis e favoráveis de uma experiência aleatória. Análise combinatória (permutações, arranjos, combinações) e árvores de resultados.
- Calcular probabilidade condicionada de um acontecimento
- Verificar se acontecimentos são, ou não, independentes
- Saber quando se deve aplicar o teorema de bayes e calcular as respetivas probabilidades


Teoria da Probabilidade
Porquê
acaso
determinístico
Definição probabilidade
clássica
frequencista
subjectiva
axiomática
Análise combinatória
permutações
arranjos
combinações
multiplicação e combinação
Probabilidade condicionada
definição
acontecimentos independentes
teorema de bayes