

ESTATÍSTICA I

4.º TESTE DE AVALIAÇÃO (2009.12.16)

Duração: 1h 50 / Com consulta

(As diferentes questões deverão ser respondidas em folhas separadas)

1. Uma tabaqueira afirma que a quantidade de nicotina contida em cada um dos cigarros de uma marca por si comercializada é uma variável aleatória, com média 0.50 mg e desvio padrão 0.068 mg. Com o objectivo de verificar a veracidade da afirmação da tabaqueira, foi recolhida uma amostra aleatória de 64 cigarros e verificou-se que a média amostral da quantidade de nicotina por cigarro era de 0.53 mg. Calcule a probabilidade de, no caso de ser verdadeira a afirmação da tabaqueira, a média amostral ser igual ou superior a 0.53 mg, numa amostra idêntica àquela que foi recolhida. Comente o resultado obtido. (2 VALORES)

2.

- (a) Seja X_1, X_2, \dots, X_N uma amostra aleatória retirada de uma população que segue uma distribuição uniforme entre 0 e θ ($X \sim U(0, \theta)$). Considere os seguintes estimadores de θ :

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{2 \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_N)}{N} \quad \hat{\Theta}_2 = \max(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

$\hat{\Theta}_2$ é o estimador de máxima verosimilhança de θ , do qual se conhecem o valor esperado e a variância:

$$E[\hat{\Theta}_2] = \frac{N}{N+1} \cdot \theta \quad \text{Var}[\hat{\Theta}_2] = \frac{N \cdot \theta^2}{(N+2) \cdot (N+1)^2}$$

Verifique qual dos dois estimadores é o mais eficiente. Interprete o resultado obtido. (3 VALORES)

- (b) A variável X segue uma distribuição com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, & x > 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases}$$

onde θ é um parâmetro positivo desconhecido. A partir da amostra aleatória constituída pelas 6 observações seguintes

{12.0, 11.2, 13.5, 12.3, 13.8 e 11.9},

determine a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro θ . (3 VALORES)

3. A empresa Indus Trial faz regularmente descargas de efluentes num rio próximo. Para estes efluentes, a legislação em vigor impõe um limite máximo para a quantidade de um certo produto poluente por litro de efluente descarregado. Para não ultrapassar este limite, a Indus Trial trata os efluentes antes de os descarregar no rio e, mensalmente, recolhe amostras aleatórias de tais efluentes. Admita que o número de unidades de produto poluente por litro de efluente, X , segue uma distribuição Normal. Na última amostra recolhida, registaram-se os seguintes valores: $N = 9$, $\bar{x} = 315.3$ unidades / litro e $s^2 = 7.43^2$ (unidades / litro)².

- (a) Construa um intervalo de confiança a 95% para o valor esperado da quantidade do produto poluente em causa por litro de efluente. (3 VALORES)
- (b) Construa um intervalo de confiança para a variância da quantidade de poluente por litro de efluente, com um grau de confiança de 90%. (3 VALORES)
- (c) Uma organização de protecção ambiental acusou a Indus Trial de efectuar descargas de efluentes com quantidades de poluente por litro superiores ao permitido. A Indus Trial nega tal acusação, já que confia no seu sistema de tratamento de efluentes.

Face a este diferendo, as autoridades competentes decidiram efectuar a seguinte análise: recolher simultaneamente e comparar a presença do produto poluente em amostras aleatórias da água do rio a montante e a jusante do local de descarga. Os valores das dimensões das amostras, das médias e dos desvios padrões amostrais (ambos expressos em partes por milhão, ppm) foram os seguintes:

	Rio a jusante	Rio a montante
N	51	51
\bar{x}	3.33	3.29
s^2	0.93 ²	0.55 ²

Construa um intervalo de confiança para a diferença entre os valores esperados das quantidades de poluente na água a montante e a jusante do local das descargas (expressos em ppm), com um grau de confiança de 95%. Comente e interprete o resultado obtido. (3 VALORES)

4. Uma intoxicação alimentar decorrente da presença de salmonelas foi atribuída a um determinado tipo de gelados de uma marca, levando o produtor correspondente a retirá-lo do mercado. Após este incidente, e apesar desta medida, muitos consumidores potenciais continuam a recusar-se a comprar gelados do mesmo tipo, mesmo que de outra marca.

Outro produtor, decidiu efectuar um estudo de mercado sobre a aceitação dos gelados do tipo em causa, um ano após a ocorrência da intoxicação alimentar registada. O produtor pretende conhecer a evolução da proporção de consumidores potenciais que ainda não compram o tipo de gelados que lhe esteve na origem.

Numa amostra piloto seleccionada aleatoriamente, constituída por 200 consumidores potenciais daqueles gelados, 70 deles responderam que não compravam tais gelados devido ao perigo de intoxicação alimentar.

De que dimensão deverá ser uma amostra aleatória a recolher para que, recorrendo a um intervalo de confiança a 95%, se possa obter uma estimativa com uma semi-amplitude inferior a 0.03 para a proporção de consumidores potenciais que ainda se recusam a comprar o tipo de gelado em causa? (3 VALORES)