

**ESTATÍSTICA I**  
**ÉPOCA DE RECURSO (2015.02.05)**  
**Duração: 2h 20m / Com consulta**

Em todas as suas respostas defina, com clareza, a terminologia que adoptar e as hipóteses subjacentes aos diferentes passos da sua análise.

1. (3 VALORES) Considere uma linha de montagem de produtos finais que inclui uma máquina automática de embalar. Esta máquina é responsável por etiquetar e embalar correctamente os produtos finais de forma a serem enviados directamente para os clientes. O correcto funcionamento da máquina de embalar é fundamental para manter o elevado ritmo de produção da linha. A máquina tem um componente crítico muito sensível e cuja substituição é bastante demorada. Para evitar a paragem da linha em caso de avaria do componente crítico, a máquina tem incorporado um mecanismo com um componente de reserva que entra automaticamente em funcionamento assim que o componente crítico avaria (este mecanismo permite também a substituição do componente crítico avariado com a máquina a funcionar). Sabe-se que o componente crítico, quando está em operação, tem 25% de probabilidade de avariar e que o mecanismo com o componente de reserva está apenas disponível em 95% do tempo em que a máquina está a funcionar. Calcule a probabilidade de a linha de montagem ter de parar.

2. (5 VALORES) Num grande aeroporto existe um sistema automático de atendimento de chamadas de verificação dos horários de voos. O sistema apresenta problemas no atendimento de chamadas feitas de telemóveis com pouca rede, levando à necessidade de repetir várias vezes o código do voo. Numa experiência destinada a avaliar a gravidade destes problemas registaram-se a intensidade do sinal no telemóvel ( $X$ ) e o número de vezes que foi necessário dizer o código do voo ( $Y$ ). Com base nos resultados da experiência obteve-se a seguinte função de probabilidade conjunta  $f_{X,Y}(x,y)$ :

$f_{X,Y}(x,y)$		$X$			
		1	2	3	4
$Y$	1	0.00	0.01	0.02	0.25
	2	0.00	0.02	0.03	0.20
	3	0.01	0.01	0.10	0.05
	4	0.02	0.05	0.05	0.05
	5	0.03	0.05	0.05	0.00

- a) Calcule a probabilidade de ser necessário repetir o código do voo sabendo que a intensidade do sinal no telemóvel não é máxima.  
b) Verifique se as duas variáveis são independentes.  
c) Calcule o coeficiente de correlação entre as variáveis  $X$  e  $Y$  e interprete o seu resultado.  
d) Considere a seguinte medida ( $Z$ ) de qualidade de funcionamento do sistema de atendimento automático de chamadas:

$$Z = \frac{X}{4} \times \frac{(6.5 - Y)^2}{25}$$

Calcule, mesmo que aproximadamente, o valor esperado e o desvio padrão de  $Z$

3. (5 VALORES) Uma repartição de finanças dispõe de 2 balcões de atendimento aos utentes com um sistema de fila única. O tempo, expresso em minutos, que um funcionário, em qualquer um dos balcões, despende a atender um utente segue uma distribuição exponencial negativa com valor médio igual a 10 minutos.

- a) Sabe-se que um utente está a ser atendido à 8 minutos no balcão 1 e outro utente começou a ser atendido no balcão 2. Determine a probabilidade de:  
i. o tempo de atendimento ao utente do balcão 1 ser superior a 18 minutos;  
ii. o tempo de atendimento ao utente do balcão 2 ser superior a 10 minutos.  
b) Escolhidos 8 utentes ao acaso determine a probabilidade de pelo menos 2 serem atendidos em menos de 8 minutos.  
c) Calcule o número médio de utentes que um balcão consegue atender em 60 minutos.  
d) Sabendo que o balcão 1 está aberto 7 horas por dia e que o balcão 2 está aberto apenas 6 horas e um quarto por dia, calcule a probabilidade de o número de utentes atendidos num mês (28 dias) no balcão 2 ser superior ao número de utentes atendidos no mesmo período no balcão 1.

4. (4 VALORES) O refeitório de uma grande unidade industrial é utilizado pela totalidade dos 600 funcionários da empresa. Os funcionários podem ser classificados por género e por tipo de trabalho, sendo que relativamente ao género 400 são do sexo masculino e 200 do sexo feminino, enquanto relativamente ao tipo de trabalho há 60 funcionários administrativos e 540 operários fabris. Os responsáveis da unidade industrial necessitam de tomar uma decisão relativamente à renovação ou não do contrato de concessão do refeitório com uma empresa especializada. Para tal perguntaram a 80 funcionários seleccionados aleatoriamente se estavam satisfeitos com a qualidade do serviço prestado pela concessionária no refeitório, tendo 49 respondido que sim.

- a) Construa um intervalo de confiança bilateral a 95% para a proporção de funcionários satisfeitos com a qualidade do serviço prestado pela concessionária no refeitório.  
b) Os responsáveis da unidade industrial planeiam alterar a disposição das mesas do refeitório de forma a incentivar o convívio quer entre funcionários masculinos e femininos quer entre administrativos e operários. Pretendem assim estimar, através de um intervalo de confiança, a proporção de funcionários favoráveis a tal alteração. Calcule a dimensão da amostra a recolher caso se pretenda uma margem de erro não superior a 0.05. Indique também que precauções deverão ser tomadas no procedimento de selecção da amostra a recolher.

5. (3 VALORES) Seja  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma amostra aleatória obtida de uma população que segue uma distribuição uniforme no intervalo  $[0, \theta]$ . Considere os seguintes estimadores de  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_1 = 2\bar{X} \quad \hat{\theta}_2 = \left(\frac{n+1}{n}\right) \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Sabe-se que,

$$\mu_{\hat{\theta}_2} = E(\hat{\theta}_2) = \theta \quad \sigma_{\hat{\theta}_2}^2 = V(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

Determine e justifique qual dos dois estimadores é o mais eficiente na estimação do parâmetro  $\theta$ .