RESOLUÇÃO ASSISTIDA DE PROBLEMAS

CAPÍTULO 5 – DISTRIBUIÇÕES CONJUNTAS DE PROBABILIDADE

PROBLEMA 5.1

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Não aplicável. ■

Apoio 2 (sugestão)

Procure definir sobre o espaço amostral (constituído pelos resultados da experiência lançamento da moeda E-C três vezes ao ar) duas aplicações, em que uma delas especifica a variável aleatória X e a outra especifica a variável aleatória Y. De seguida, na secção 5.1, veja qual a definição de função conjunta de probabilidade. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Na tabela seguinte representam-se os resultados possíveis.

Resultados	X	Y
EEE	2	0
ECE	1	1
EEC	2	1
ECC	1	2
CEE	1	0
CCE	0	1
CEC	1	1
CCC	0	2

A função conjunta de probabilidade das variáveis X e Y, $p_{x,y}(x,y)$, é dada por:

$\forall\, x, y : p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x\, , Y = y)\, .$

Na tabela seguinte apresentam-se os valores desta função.

		$p_{x,y}(x,y)$		
Y	2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
		0	1	2
			X	

■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Não aplicável. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 5.4 veja qual a definição de função condicional de probabilidade de duas variáveis discretas. Note que, para este cálculo, é necessário recorrer à função marginal de probabilidade da variável *X*. ■

Apoio 3 (resolução completa)

A probabilidade condicional de *Y* dado que $X = 1$ é dada por

$$p_{Y|X}\left(Y \mid X=1\right)=\frac{p_{X,Y}\left(X=1,Y\right)}{p_X\left(X=1\right)}.$$

Para calcular tal probabilidade falta determinar $p_X(X=1)$. Seja $p_x(x)$ a função marginal de probabilidade da variável *X*. Então

$$\forall\, x: p_X(x)=\sum_y p_{X,Y}(x,y).$$

Do mesmo modo, para a função marginal de probabilidade da variável *Y*, $p_y(y)$, vem

$$\forall\, y: p_Y(y)=\sum_x p_{X,Y}(x,y).$$

Na tabela seguinte apresentam-se os valores destas funções.

		$p_{x,y}(x,y)$			$p_y(y)$
Y	2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
		0	1	2	

	X	
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$P_x(x)$

Assim,

Y	$p_{Y\mid X}(Y \mid X=1)$
0	$\frac{1/8}{1/2}=\frac{1}{4}$
1	$\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}$
2	$\frac{1/8}{1/2}=\frac{1}{4}$

■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$-\frac{1}{2}$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 5.6 veja qual a definição covariância (γ_{xy}) e de coeficiente de correlação populacional (ρ_{xy}). Recorde que ambas são medidas de relacionamento linear entre duas variáveis. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$\rho_{XY} = \frac{\gamma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

- Cálculo dos valores esperados e dos desvios padrões das variáveis X e Y

$$\mathrm{E}(X) = \mu_X = \sum_x x \cdot p_X(x) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y = \sum_y y \cdot p_Y(y) = \mu_X = 1$$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_x (x-\mu_X)^2 \cdot p_X(x) = (0-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + (2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma_Y = \sigma_X .$$

- Cálculo da covariância γ_{xy}

$$\gamma_{XY} = \mathrm{E}[(x-\mu_X)\cdot(y-\mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)\cdot(y-\mu_Y)\cdot p_{X,Y}(x,y)$$

$$\gamma_{XY} = (0-1)\cdot(2-1)\cdot\frac{1}{8} + (2-1)\cdot(0-1)\cdot\frac{1}{8} = -\frac{1}{4}$$

- Cálculo da correlação ρ_{xy}

$$\rho_{XY} = \frac{\gamma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{-1/4}{\sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{2}/2} = -\frac{1}{2} \,. \blacksquare$$

PROBLEMA 5.2

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$f_X(x) = 2x$

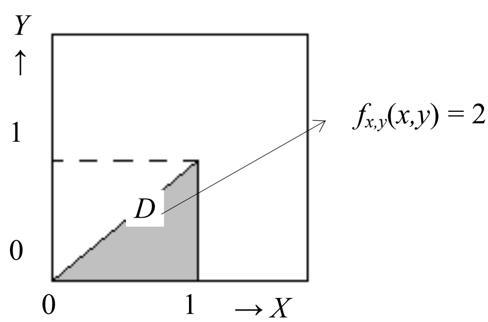
$f_Y(y) = 2(1-y)$. ■

Apoio 2 (sugestão)

A distribuição marginal de probabilidade para cada uma das variáveis é calculada a partir da função conjunta de densidade de probabilidade. ■

Apoio3 (resolução completa)

De acordo com o enunciado



Assim,

$$f_X(x) = \int_0^x f_{X,Y}(x,y)\cdot dy = \int_0^x 2dy = 2[y]_0^x = 2x$$

[verificação: $\int_0^1 f_X(x)\cdot dx = \int_0^1 2xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$].

Do mesmo modo,

$$f_Y(y) = \int_y^1 f_{X,Y}(x,y)\cdot dx = \int_y^1 2dx = 2[x]_y^1 = 2\cdot(1-y)$$

[verificação: $\int_0^1 f_Y(y)\cdot dy = \int_0^1 2(1-y)\cdot dy = 2[y]_0^1 - 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2-1 = 1$]. ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$\frac{1}{3}$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Os valores esperados de cada variável são calculados a partir das respectivas distribuições marginais de probabilidade. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)\cdot dx = \int_0^1 x\cdot f_X(x)\cdot dx = \int_0^1 2x^2\cdot dx = 2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\mu_y = \int_0^1 y\cdot f_Y(y)\cdot dy = \int_0^1 2\cdot y(1-y)\cdot dy = 2\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 - 2\cdot\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$ ■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$$f_{X|Y}(x\,|\,y) = \frac{1}{1-y}$$

$f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x) = \dfrac{1}{x}$. ■

Apoio 2 (sugestão)

A distribuição condicional de probabilidade para variáveis contínuas pode ser definida pela razão da função conjunta de densidade de probabilidade e da função marginal de probabilidade. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2\cdot(1-y)} = \frac{1}{1-y}$$

[verificação: $\int_y^1 \dfrac{1}{1-y}\cdot dx = \dfrac{1}{1-y}\cdot\left[x\right]_y^1 = \dfrac{1-y}{1-y} = 1$].

$$f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

[verificação: $\int_0^x \dfrac{1}{1x}\cdot dy = \dfrac{1}{x}\cdot\left[y\right]_0^x = \dfrac{x}{x} = 1$. ■

Alínea (iv)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$\dfrac{1}{36}$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Rever o Capítulo 5 sobre Distribuições Conjuntas de Probabilidade, dando especial destaque à Secção 5.6 - Covariância e Correlação - para variáveis contínuas. Para o cálculo da covariância considere os desvios a partir do ponto (μ_x, μ_y). ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{E}\left[(x-\mu_x)\cdot(y-\mu_y)\right] \\ &= \iint_D \left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(y-\frac{1}{3}\right)\cdot 2\cdot dxdy\end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3} \right) \cdot dx \int_0^x \left(y - \frac{1}{3} \right) \cdot dy$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3} \right) \cdot dx \left\{ \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^x - \frac{1}{3} [y]_0^x \right\}$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3} \right) \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) \cdot dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} \right) \cdot dx$$

$$= 2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 - \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \frac{2}{9} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 \right\}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) = 2 \cdot \frac{1}{72} = \frac{1}{36}.$$

Como se esperava a covarância é diferente de zero (neste caso, positiva). Pode concluir-se que existe uma relação linear entre as variáveis X e Y. ■

PROBLEMA 5.3

Apoio 1 (apenas a solução)

Valor esperado: 0.01

Desvio padrão: $1.75 \cdot 10^{-3}$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Uma vez que se está perante uma relação não linear, verifique se ela pode ser considerada aproximadamente linear em torno dos valores esperados das variáveis originais (R e C). Na secção 5.7 veja quais as expressões do valor esperado e da variância neste tipo de transformações. ■

Apoio 3 (resolução completa)

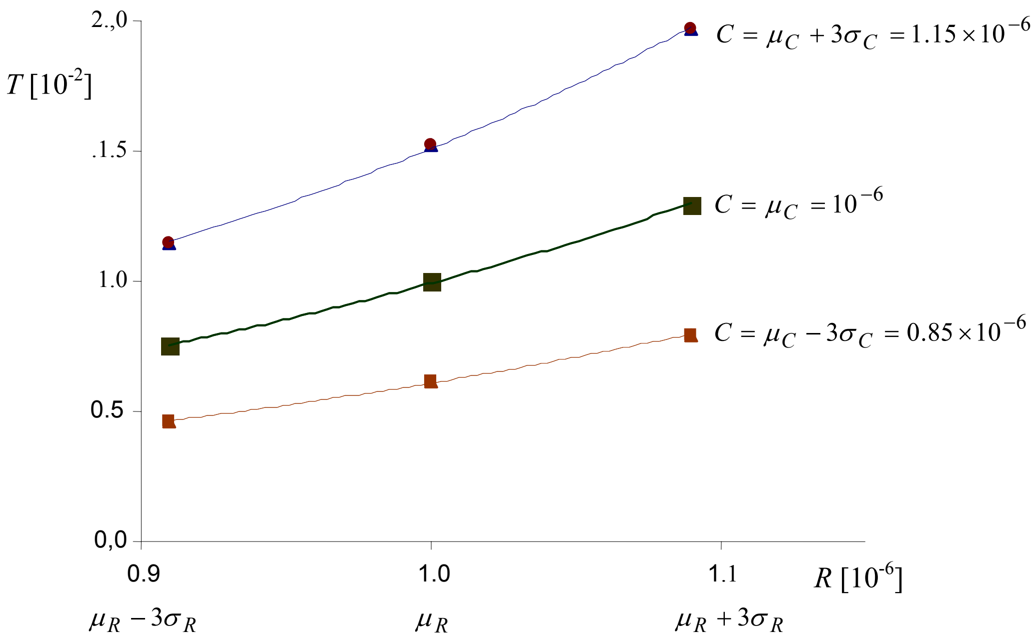
Como

$T = \phi(R, C)$

verifica-se em seguida se será razoável aproximar $\phi(R,C)$ por uma relação linear em torno do ponto $\left(R=\mu_R, C=\mu_C\right)$.

R	C	T
$\mu_R = 10^6$	$\mu_C = 10^{-6}$	$10^{-2}\cdot 10^{-18}\cdot 10^{18} = 10^{-2}$
$\mu_R = 10^6$	$\mu_C - 3\sigma_C = 0.85\cdot 10^{-6}$	$10^{-2}\cdot 10^{-18}\cdot 0.85^3\cdot 10^{18} = 0.61\cdot 10^{-2}$
$\mu_R = 10^6$	$\mu_C + 3\sigma_C = 1.15\cdot 10^{-6}$	$10^{-2}\cdot 10^{-18}\cdot 1.15^3\cdot 10^{18} = 1.52\cdot 10^{-2}$
$\mu_R - 3\sigma_R = 0.91\cdot 10^6$	$\mu_C = 10^{-6}$	$0.91^3\cdot 10^{-2} = 0.75\cdot 10^{-2}$
$\mu_R - 3\sigma_R = 0.91\cdot 10^6$	$\mu_C - 3\sigma_C = 0.85\cdot 10^{-6}$	$0.91^3\cdot 0.85^3\cdot 10^{-2} = 0.46\cdot 10^{-2}$
$\mu_R - 3\sigma_R = 0.91\cdot 10^6$	$\mu_C + 3\sigma_C = 1.15\cdot 10^{-6}$	$0.91^3\cdot 1.15^3\cdot 10^{-2} = 1.15\cdot 10^{-2}$
$\mu_R + 3\sigma_R = 1.09\cdot 10^6$	$\mu_C = 10^{-6}$	$1.09^3\cdot 10^{-2} = 0.75\cdot 10^{-2}$
$\mu_R + 3\sigma_R = 1.09\cdot 10^6$	$\mu_C - 3\sigma_C = 0.85\cdot 10^{-6}$	$1.09^3\cdot 0.85^3\cdot 10^{-2} = 0.80\cdot 10^{-2}$
$\mu_R + 3\sigma_R = 1.09\cdot 10^6$	$\mu_C + 3\sigma_C = 1.15\cdot 10^{-6}$	$1.09^3\cdot 1.15^3\cdot 10^{-2} = 1.97\cdot 10^{-2}$

No diagrama seguinte ilustra-se o andamento da função T nos pontos $\left(R=\mu_R, C=\mu_C\right)$ e $\left(R=\mu_R \pm 3\sigma_R, C=\mu_C \pm 3\sigma_C\right)$.



Se a relação $T=\phi(R,C)$ fosse linear as curvas representadas corresponderiam a rectas paralelas equiespaçadas. A aproximação linear de $T=\phi(R,C)$ corresponde a substituir as três curvas por três rectas paralelas, sendo a distância que separa a primeira da segunda igual à que separa a segunda da terceira. Dado que as gamas de valores R e C incluem pontos muito extremos $(\mu \pm 3\sigma)$ e tendo em conta a forma e a posição relativa das curvas representadas no diagrama anterior, a aproximação linear parece ser razoável.

Nestas condições,

$$\mathrm{E}(T) \approx \frac{1}{100} \cdot [\mathrm{E}(R)]^3 \cdot [\mathrm{E}(C)]^3 = 10^{-2} \cdot 10^{18} \cdot 10^{-18} = 10^{-2} = 0.01$$

$$\mathrm{Var}(T) \approx \left[\frac{\partial T}{\partial R} \,\middle|\, \mu_R, \mu_C \right]^2 \cdot \mathrm{Var}(R) + \left[\frac{\partial T}{\partial C} \,\middle|\, \mu_R, \mu_C \right]^2 \cdot \mathrm{Var}(C)$$

$$\frac{\partial T}{\partial R} \,\Big|\, \mu_R, \mu_C = \frac{3}{100} \cdot \mu_R^2 \cdot \mu_C^3 = \frac{3}{100} \cdot 10^{12.} \cdot 10^{-18} = 3 \cdot 10^{-8}$$

$$\frac{\partial T}{\partial C} \,\Big|\, \mu_R, \mu_C = \frac{3}{100} \cdot \mu_R^3 \cdot \mu_C^2 = \frac{3}{100} \cdot 10^{18} \cdot 10^{-12} = 3 \cdot 10^{4}$$

$$\mathrm{Var}(R) = \left(0.03 \cdot 10^{6}\right)^2 = 9 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{12} = 9 \cdot 10^{8}$$

$$\mathrm{Var}(C) = \left(0.05 \cdot 10^{-6}\right)^2 = 25 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-12} = 2.5 \cdot 10^{-15}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(T) &\approx \left(3 \cdot 10^{-8}\right)^2 \cdot 9 \cdot 10^{8} + \left(3 \cdot 10^{4}\right)^2 \cdot 2.5 \cdot 10^{-15} \\
&= 9 \cdot 9 \cdot 10^{-8} + 9 \cdot 2.5 \cdot 10^{-7} \\
&= 0.81 \cdot 10^{-6} + 2.25 \cdot 10^{-6} \\
&= 3.06 \cdot 10^{-6}.
\end{aligned}$$

$$\sigma_T \approx \sqrt{3.06} \cdot 10^{-3} = 1.75 \cdot 10^{-3}. \ ■$$

PROBLEMA 5.4

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

Valor esperado: 920 [toneladas]

Desvio padrão: 6.79 [toneladas]. ■

Apoio 2 (sugestão)

Procure explicitar a variável "peso do carvão seco" em função das variáveis "peso do carvão húmido" e "teor de humidade". Uma vez que se está perante uma transformação não linear, verifique se esta pode ser aproximada por segmentos de recta em torno dos valores esperados das variáveis originais. Na secção 5.7 veja quais as expressões do valor esperado e da variância neste tipo de transformações. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Sejam,

H : peso do carvão húmido [toneladas]

S : peso do carvão seco [toneladas]

t : teor de humidade [%].

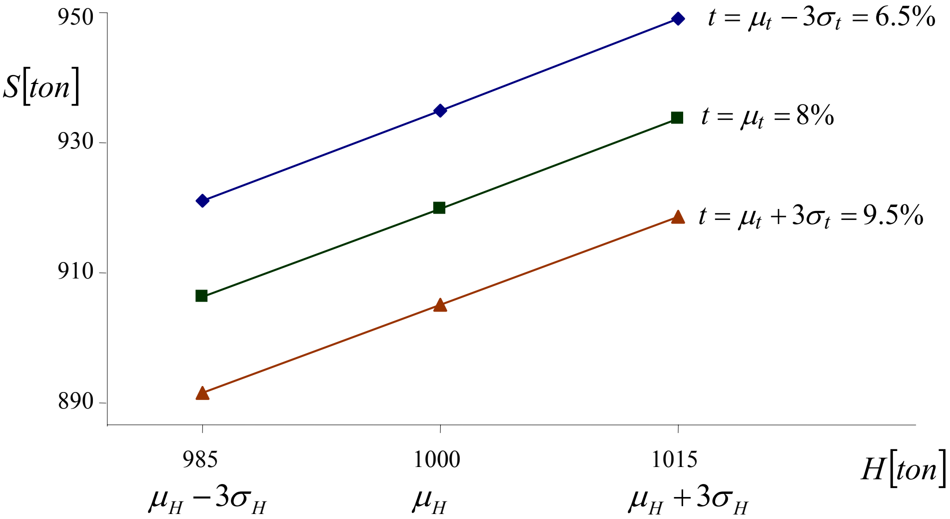
Então,

$$S = \frac{(100-t)}{100} \cdot H = H - \frac{t}{100} \cdot H = \left(1 - \frac{t}{100}\right) \cdot H \,.$$

A função $S = \phi(t, H)$ será aproximada por uma relação linear em torno do ponto $(t = \mu_t\,, \mathrm{H} = \mu_H)$.

- Verificação da razoabilidade desta aproximação

O diagrama que se apresenta seguidamente – no qual se definem valores de $S = \phi(t, \mathrm{H})$ para diferentes combinações de H $(\mu_H, \ \mu_H - 3\sigma_H, \ \mu_H + 3\sigma_H)$ e de t $(\mu_t, \mu_t - 3\sigma_t, \ \mu_t + 3\sigma_t)$ – mostra que não se cometerão erros apreciáveis aproximando $S = \phi(t, H)$ por uma relação linear.



Nota: μ_H e μ_t não são conhecidos; os seus valores foram substituídos pelas estimativas $\hat{\mu}_H = 1000$ toneladas e $\hat{\mu}_t = 8$ %.

Nestas condições,

$$\mathrm{E}(\mathrm{S}) \approx \left(1 - \frac{\mathrm{E}(t)}{100}\right) \cdot \mathrm{E}(\mathrm{H}) = \left(1 - \frac{8}{100}\right) \cdot 1000 = 920 \text{ [toneladas]}$$

$$\mathrm{Var}(S) \approx \left[\left.\frac{\partial S}{\partial H}\right|_{\mu_H, \mu_t} \right]^2 \cdot \mathrm{Var}(H) + \left[\left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{\mu_H, \mu_t} \right]^2 \cdot \mathrm{Var}(t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial H} = 1 - \frac{t}{100} \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial H}\right|_{\mu_H,\mu_t} = 1 - \frac{8}{100} = 0.92$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{H}{100} \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial t}\right|_{\mu_H,\mu_t} = -\frac{1000}{100} = -10$$

$\mathrm{Var}(H) = 5^2 = 25$

$\mathrm{Var}(t) = 0.5^2 = 0.25$

$\mathrm{Var}(S) \approx 0.92^2 \cdot 25 + (-10)^2 \cdot 0.25 = 46.16$

$\sigma_S = \sqrt{46.16} = 6.79$ [toneladas]. ■

PROBLEMA 5.5

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$Cov(X_i - \overline{X}, \overline{X}) = 0.$ ■

Apoio 2 (sugestão)

Rever o capítulo 5.7 - Variáveis Transformadas, dando especial destaque às secções 5.7.2 e 5.7.3. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$\mathrm{E}(X_i) = \mu$ e $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$.

Como $X_i \, (i = 1, \ldots, n)$ são mutuamente independentes, vem

$$\mathrm{Cov}(X_i - \overline{X}, \overline{X}) = \mathrm{E}\left[\left(X_i - \overline{X} - \mu_{x_i - \bar{x}}\right) \cdot \left(\overline{X} - \mu_{\overline{X}}\right)\right].$$

Dado que

$$\mu_{\overline{X}} = \mathrm{E}(\overline{X}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \mu = \mu$$

e

$$\mu_{X_i - \overline{X}} = \mathrm{E}\left(X_i - \overline{X}\right) = E(X_i) - E\left(\overline{X}\right) = \mu - \mu = 0,$$

resulta:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(X_i - \overline{X}, \overline{X}\right) &= \mathrm{E}\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\cdot\left(\overline{X} - \mu\right)\right] \\ &= \mathrm{E}\left(X_i \overline{X} - \mu \cdot X_i - \overline{X}^2 + \mu \cdot \overline{X}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(X_i \overline{X}\right) - \mu^2 - \mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right) + \mu^2 \\ &= \mathrm{E}\left(X_i \overline{X}\right) - \mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right). \qquad (1)\end{aligned}$$

Ora,

$$\mathrm{E}\left(X_i \overline{X}\right) = \mathrm{E}\left(X_i \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} X_j\right) = \frac{1}{N} \cdot \left[E\left(X_i X_i\right) + (N-1) \underset{j \neq i}{\mathrm{E}} (X_i X_j)\right]$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \left[\mathrm{E}\left(X_i^{\,2}\right) + (N-1) \cdot \underset{j \neq i}{\mathrm{E}}\left(X_i X_j\right)\right]. \qquad (2)$$

Determine-se agora $\mathrm{E}(X_i^{\,2})$ e $\underset{j \neq i}{E}(X_i X_j)$. Como

$$\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2 = \mathrm{E}\left[(X_i - \mu)^2\right] = \mathrm{E}\left(X_i^2\right) - 2 \cdot \mu \cdot \mathrm{E}\left(X_i\right) + \mu^2 = \mathrm{E}\left(X_i^2\right) - \mu^2,$$

vem

$$\mathrm{E}\left(X_i^{\,2}\right) = \sigma^2 + \mu^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(X_i X_j\right) &= \mathrm{E}\left[\left(X_i - \mu\right)\cdot\left(X_j - \mu\right)\right] = \mathrm{E}\left(X_i X_j\right) - \mu \cdot \mathrm{E}\left(X_i\right) - \mu \cdot \mathrm{E}\left(X_j\right) + \mu^2. \\ &= \mathrm{E}\left(X_i X_j\right) - \mu^2.\end{aligned}$$

Mas, uma vez que X_i, X_j são independentes, $\mathrm{Cov}\left(X_i X_j\right) = 0$. Assim

$$\mathrm{E}\left(X_i X_j\right) = \mu^2.$$

Substituindo $\mathrm{E}\left(X_i^2\right)$ e $\mathrm{E}\left(X_i X_j\right)$ em (2), resulta:

$$\mathrm{E}\left(X_i \overline{X}\right) = \frac{1}{N}\left[\sigma^2 + \mu^2 + (N-1)\cdot \mu \ \ \right] = \frac{\sigma^2}{N} + \mu^2.$$

Para resolver a equação (1) falta ainda determinar $\mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right)$. Ora,

$$\mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right) = \mathrm{E}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2\right] = \frac{1}{N^2} \cdot \left[N \cdot \mathrm{E}\left(X_i^2\right) + N \cdot (N-1) \cdot \underset{j \neq i}{\mathrm{E}}(X_i X_j)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left(\sigma^2 + \mu^2\right) + \frac{N-1}{N} \cdot \mu^2 = \frac{1}{N}\sigma^2 + \mu^2.$$

Substituindo $\mathrm{E}\left(X_i \overline{X}\right)$ e $\mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right)$ em (1), obtém-se

$\mathrm{Cov}\left(X_i - \overline{X}, \overline{X}\right) = 0$.

Interpretação do resultado

$\left(X_i - \overline{X}\right)$ não está correlacionado com $\overline{X}$, uma vez que

(a) $\overline{X}$ tem uma posição central em relação aos $X_i^{'}s$, o que implica que qualquer desvio positivo $X_i - \overline{X}$ é compensado por um desvio negativo.

(b) tal sucede independentemente de $\overline{X}$ se desviar de μ num ou noutro sentido. ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$\mathrm{Cov}\left(X_i - \overline{X}, X_i\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \sigma^2$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Rever o capítulo 5.7 - Variáveis Transformadas, dando especial destaque às secções 5.7.2 e 5.7.3■

Apoio 3 (resolução completa)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(X_i - \overline{X}, X_i\right) &= \mathrm{E}\left[(X_i - \overline{X} - 0) \cdot (X_i - \mu)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[(X_i - \overline{X}) \cdot (X_i - \mu)\right] \\
&= \mathrm{E}\left(X_i^2\right) - \mu \cdot \mathrm{E}\left(X_i\right) - \mathrm{E}\left(X_i \overline{X}\right) + \mu \cdot \mathrm{E}\left(\overline{X}\right) \\
&= \left(\sigma^2 + \mu^2\right) - \mu^2 - \left(\frac{\sigma^2}{N} + \mu^2\right) + \mu^2 \\
&= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \sigma^2 .
\end{aligned}$$

Interpretação do resultado

$\mathrm{Cov}\left(X_i - \overline{X}, X_i\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \sigma^2$

Quando $N \geq 2$ a covariância é positiva e será tanto maior quanto maior for N. De facto, quando um valor de X_i se desvia muito significativamente de μ, o valor de $\overline{X}$ tem tendência a desviar-se de μ no mesmo sentido. Mas o desvio será em média menor do que o de X_i, pois $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_i X_i$ fica "preso" pelos restantes valores $X_j\,(j \neq i)$. Quando $N \to \infty$ então $\overline{X} \to \mu$ e o desvio de $\overline{X}$ em relação a μ será nulo. Assim, a um valor positivo de $X_i - \mu$ estará, em princípio, associado um valor positivo de $X_i - \overline{X}$. A covariância será então positiva. Note-se que,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(X_i - \overline{X}, X_i\right) &= \mathrm{E}\left[\left(X_i - \overline{X} - 0\right)\cdot\left(X_i - \mu\right)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\cdot\left(X_i - \mu\right)\right].\end{aligned}$$

Ora, quando N tende para infinito $\overline{X}$ tende para μ, o que implica que:

$\mathrm{E}\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\cdot\left(X_i - \mu\right)\right] = \sigma^2$ (este resultado está de acordo com $\lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\cdot\sigma^2 = \sigma^2$). ■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$$\mathrm{Cov}\left(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X}\right) = -\frac{\sigma^2}{N}\,. \blacksquare$$

Apoio 2 (sugestão)

Rever o capítulo 5.7 - Variáveis Transformadas, dando especial destaque às secções 5.7.2 e 5.7.3. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X}\right) &= \mathrm{E}\left[\left(X_i - \overline{X} - 0\right)\cdot\left(X_j - \overline{X} - 0\right)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\left(X_i - \overline{X}\right)\cdot\left(X_j - \overline{X}\right)\right] \\ &= \mathrm{E}\left(X_i X_j\right) - \mathrm{E}\left(X_i \overline{X}\right) - \mathrm{E}\left(X_j \overline{X}\right) + \mathrm{E}\left(\overline{X}^2\right) \\ &= \mu^2 - 2\cdot\left(\frac{\sigma^2}{N} + \mu^2\right) + \left(\frac{\sigma^2}{N} + \mu^2\right) \\ &= \mu^2 - \frac{\sigma^2}{N} - \mu^2 \\ &= -\frac{\sigma^2}{N}\,.\end{aligned}$$

Interpretação do resultado

A soma dos desvios $\sum_{k=1}^{N}(X_k - \overline{X})$ é sempre nula. Então, se para um valor particular X_i se verificar $X_i - \overline{X} > 0$, os restantes desvios $X_j - \overline{X}(j \neq 0)$ têm um valor esperado negativo, ou seja: $\left[\mathrm{E}\left(X_j - \overline{X}\right) \middle| \left(X_i - \overline{X}\right) > 0\right] < 0$. Por outro lado, se $X_i - \overline{X} < 0$ também $\left[\mathrm{E}\left(X_j - \overline{X}\right) \middle| \left(X_i - \overline{X}\right) < 0\right]$ será negativo. Então a covariância entre $\left(X_i - \overline{X}\right)$ e $\left(X_j - \overline{X}\right)$ será necessariamente negativa.

Esta covariância tenderá a anular-se quando N tende para infinito, pois, neste caso, $\left[\mathrm{E}\left(X_j - \overline{X}\right) \middle| \left(X_i - \overline{X}\right) > 0\right] \to 0$ e $\left[\mathrm{E}\left(X_j - \overline{X}\right) \middle| \left(X_i - \overline{X}\right) < 0\right] \to 0$. De facto, a compensação do desvio $X_i - \overline{X}$ será diluída por um número infinito de desvios $X_j - \overline{X}(j \neq i)$, pelo que o valor esperado de cada um destes desvios tenderá para zero. ■

PROBLEMA 5.6

APOIOS À RESOLUÇÃO

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Não aplicável. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 5.3 veja qual a definição de função marginal de probabilidade. Note-se que, a menos do procedimento através do qual é obtida, nada distingue a função marginal de uma variável da função de probabilidade dessa variável. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja:

$p_X(x)$: função marginal de probabilidade da variável X

$\forall\, x : p_X(x) = \sum_{y} p_{X,Y}(x,y)$

$p_Y(y)$: função marginal de probabilidade da variável Y.

$\forall\, y : p_Y(y) = \sum_{x} p_{X,Y}(x,y)$.

Na tabela seguinte apresentam-se as funções marginais de probabilidade das variáveis X e Y.

		$p_{X,Y}(x,y)$					$p_X(x)$
	1000	0.20	0.04	0.01	0		0.25
X [euros]	2000	0.10	0.36	0.09	0		0.55
	3000	0	0.05	0.10	0		0.15
	4000	0	0	0	0.05		0.05
		1000	2000	3000	4000		
		Y [euros]					
		0.30	0.45	0.20	0.05		$p_Y(y)$

■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

80%. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 5.4 veja qual a definição de função condicional de probabilidade de duas variáveis discretas. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja $p_{X|Y}(X = 2000 \mid Y = 2000)$ a probabilidade de o marido ter um rendimento mensal de 2000 euros, admitindo que a mulher tem um rendimento idêntico.

$$p_{X|Y}(X = 2000 \mid Y = 2000) = \frac{p_{X,Y}(X = 2000\,, \mathrm{Y} = 2000)}{p_Y(\,\mathrm{Y} = 2000)} = \frac{0.36}{0.45} = 0.80\,.$$ ■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Valor esperado de X: 2000 [euros]

Valor esperado de Y: 2000 [euros]

Desvio padrão de X: 774.6 [euros]

Desvio padrão de Y: 836.7 [euros]. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 4.4 veja quais as definições e as respectivas expressões, do valor esperado e do desvio padrão de uma variável aleatória discreta. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$\mathrm{E}\,(X) = \mu_X = \sum_x x \cdot p_X(x) = 1000 \bullet 0.25 + 2000 \bullet 0.55 + 3000 \bullet 0.15 + 4000 \bullet 0.05 = 2000.$$

$$\mathrm{E}\,(Y) = \mu_Y = \sum_y y \cdot p_Y(y) = 1000 \bullet 0.30 + 2000 \bullet 0.45 + 3000 \bullet 0.20 + 4000 \bullet 0.05 = 2000.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(X) = \sum_x (x-\mu_X)^2 \cdot p_X(x) &= (1000-2000)^2 \cdot 0.25 + (2000-2000)^2 \cdot 0.55 + \\ &+ (3000-2000)^2 \cdot 0.15 + \\ &+ (4000-2000)^2 \cdot 0.05 = 600000 \ [\text{euros}^2].\end{aligned}$$

$$\sigma_X = \sqrt{600000} = 774.6 \ [\text{euros}].$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(Y) = \sum_y (y-\mu_Y)^2 \cdot p_Y(y) &= (1000-2000)^2 \cdot 0.30 + (2000-2000)^2 \cdot 0.45 + \\ &+ (3000-2000)^2 \cdot 0.20 + \\ &+ (4000-2000)^2 \cdot 0.05 = 700000 \ [\text{euros}^2].\end{aligned}$$

$$\sigma_Y = \sqrt{700000} = 836.7 \ [\text{euros}]. \ \blacksquare$$

Alínea (iv)

Apoio 1 (apenas o resultado)

As variáveis X e Y são dependentes. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 5.5 veja qual a definição de independência entre duas variáveis. ■

Apoio 3 (resolução completa)

As variáveis X e Y são independentes se se verificarem as seguintes condições:

$$\left.\begin{aligned} p_{X|Y}(x \mid y) &= \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = p_X(x) \\ p_{Y|X}(y \mid x) &= \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = p_Y(x) \end{aligned}\right\} \text{(para todos os valores de } x \text{ e } y\text{)}$$

donde,

$$\forall\, x, y : p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y).$$

Ora, uma vez que, por exemplo, $p_{X|Y}(X=2000 \mid Y=2000)=0.80$ (ver alínea (ii)), e que $p_X(X=2000)=0.55$, conclui-se que as variáveis não são independentes. ■

Alínea (v)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Cov (X, Y) = 510000

Corr (X, Y) = 0.787. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 5.6 veja qual a definição covariância (γ_{XY}) e de coeficiente de correlação populacional (ρ_{XY}). Recorde que ambas são medidas de relacionamento linear entre duas variáveis. ■

Apoio 3 (resolução completa)

A covariância populacional é dada por

$$\gamma_{XY} = \mathrm{E}\left[(x-\mu_X)\cdot(y-\mu_Y)\right] = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)\cdot(y-\mu_Y)\cdot p_{X,Y}(x,y).$$

Substituindo, vem

$$\begin{aligned}\gamma_{XY} = {} & (1000-2000)\cdot(1000-2000)\cdot 0.20 + (1000-2000)\cdot(2000-2000)\cdot 0.04 + \\ & + (1000-2000)\cdot(3000-2000)\cdot 0.01 + (2000-2000)\cdot(1000-2000)\cdot 0.10 + \\ & + (2000-2000)\cdot(2000-2000)\cdot 0.36 + (2000-2000)\cdot(3000-2000)\cdot 0.09 + \\ & + (3000-2000)\cdot(2000-2000)\cdot 0.05 + (3000-2000)\cdot(3000-2000)\cdot 0.10 + \\ & + (4000-2000)\cdot(4000-2000)\cdot 0.05 = 510000.\end{aligned}$$

A correlação entre X e Y, medida através do coeficiente de Pearson, será então:

$$\rho_{XY} = \frac{\gamma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{510000}{774.6 \cdot 836.7} = 0.787. \;■$$

Alínea (vi)

Apoio 1 (apenas o resultado)

a) Valor esperado de R: 4000 [euros]

Desvio padrão de R: 1523.15 [euros]

b) Valor esperado de I: 600 [euros]

Desvio padrão de I: 226.72 [euros]. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 5.7 veja quais as expressões do valor esperado e da variância de variáveis transformadas. Repare que em ambas as alíneas se está perante transformações lineares. ■

Apoio 3 (resolução completa)

a)

Denote-se por R o rendimento total em euros. Então

$R = X + Y$

$\mathrm{E}(R) = \mu_R = \mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) = 2000 + 2000 = 4000$ [euros].

$\mathrm{Var}(R) = \sigma_R^2 = \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Var}(Y)$.

Assim,

$\mathrm{Var}(R) = 600000 + 2 \cdot 510000 + 700000 = 2320000$ [euros^2]

$\sigma_R = \sqrt{2320000} = 1523.15$ [euros]

b)

Denote-se por I o imposto sobre o rendimento familiar em euros. Neste caso

$I = 0.20 \bullet X + 0.10 \bullet Y$

$\mathrm{E}(I) = \mu_I = \mathrm{E}(0.20X + 0.10Y) = 0.20 \cdot \mathrm{E}(X) + 0.10 \cdot \mathrm{E}(Y) = 600$ [euros].

$\mathrm{Var}(I) = \sigma_I^2 = \mathrm{Var}(0.20X + 0.10Y) = 0.20^2 \cdot \mathrm{Var}(X) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y) + 0.10^2 \cdot \mathrm{Var}(Y)$

$\mathrm{Var}(I) = 0.04 \cdot 600000 + 2 \cdot 0.20 \cdot 0.10 \cdot 510000 + 0.01 \cdot 700000 = 51400$ [euros^2].

$\sigma_I = \sqrt{51400} = 226.72$ [euros]. ■

PROBLEMA 5.7

APOIOS À RESOLUÇÃO

Apoio 1 (apenas o resultado)

Valor esperado de R: 8.5 [%]

Desvio padrão de R: 5.16 [%]. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 5.7 veja quais as expressões do valor esperado e da variância de variáveis transformadas (repare que se está perante uma transformação linear). Note que para este cálculo é necessário recorrer às funções marginais de probabilidade das variáveis X e Y. ■

Apoio 3 (resolução completa)

- Cálculo das funções marginais de probabilidade das variáveis *X* e *Y*.

  $p_X(x)$: função marginal de probabilidade da variável *X*

  $\forall\, x : p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x,y)$

  $p_Y(y)$: função marginal de probabilidade da variável *Y*

  $\forall\, y : p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y)$

		$p_{X,Y}(x,y)$				$p_X(x)$
X: taxa de rentabilidade dos fundos de investimento	6 %	0.10	0.10	0	0	0.20
	8 %	0	0.10	0.30	0.20	0.60
	10 %	0	0	0.10	0.10	0.20
		-10 %	0 %	10 %	20 %	
		Y: taxa de rentabilidade das acções				
		0.10	0.20	0.40	0.30	$p_Y(y)$

- Cálculo do valor esperado e do desvio padrão das variáveis *X* e *Y*.

  $\mathrm{E}\,(X) = \mu_X = \sum_x x.p_X(x) = 6 \cdot 0.20 + 8 \cdot 0.60 + 10 \cdot 0.20 = 8$ [%].

  $\mathrm{E}\,(Y) = \mu_Y = \sum_y y.p_Y(y) = (-10) \cdot 0.10 + 0 \cdot 0.20 + 10 \cdot 0.40 + 20 \cdot 0.30 = 9$ [%].

  $\mathrm{Var}\,(X) = \sum_x (x-\mu_X)^2.p_X(x) = (6-8)^2 \cdot 0.20 + (8-8)^2 \cdot 0.60 + (10-8)^2 \cdot 0.20 = 1.6$.

  $\sigma_X = \sqrt{1.6} = 1.25$ [%].

  $$\mathrm{Var}\,(Y) = \sum_y (y-\mu_Y)^2.p_Y(y) = (-10-9)^2 \cdot 0.10 + (0-9)^2 \cdot 0.20 + (10-9)^2 \cdot 0.40 +$$
  $$+ (20-9)^2 \cdot 0.30 = 89\,.$$

  $\sigma_Y = \sqrt{89} = 9.43$ [%].

- Cálculo do valor esperado e do desvio padrão da variável transformada *R*.

  Seja *R* a taxa de rentabilidade da poupança. Assim,

  $$R = \frac{500 \cdot X + 500 \cdot Y}{1000} = 0.5X + 0.5Y\,,$$

  donde:

  $\mathrm{E}\,(R) = \mu_R = \mathrm{E}\,(0.5X + 0.5Y) = 0.5 \cdot \mathrm{E}\,(X) + 0.50 \cdot \mathrm{E}\,(Y) = 0.5 \cdot 8 + 0.5 \cdot 9 = 8.5$ [%]

  e

$\mathrm{Var}\,(R) = \sigma_R^2 = \mathrm{Var}\,(0.5X + 0.5Y) = 0.5^2 \cdot \mathrm{Var}\,(X) + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot \mathrm{Cov}\,(X, Y) + 0.5^2 \cdot \mathrm{Var}\,(Y)$.

A covariância entre X e Y é dada por

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \gamma_{XY} = \mathrm{E}\big[(x - \mu_X)\cdot(y - \mu_Y)\big] = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)\cdot(y - \mu_Y)\cdot p_{X,Y}(x, y)$$

pelo que

$$\gamma_{XY} = (6-8)\cdot(-10-9)\cdot 0.10 + (6-8)\cdot(0-9)\cdot 0.10 + (10-8)\cdot(10-9)\cdot 0.10 + \\ + (10-8)\cdot(20-9)\cdot 0.10 = 8\,.$$

Substituindo,

$$\mathrm{Var}\,(R) = 0.5^2 \cdot 1.6 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot 8 + 0.5^2 \cdot 89 = 26.65$$

e, finalmente

$\sigma_R = \sqrt{26.65} = 5.16$ [%]. ■