# <u>RESOLUÇÃO ASSISTIDA DE PROBLEMAS</u>

# <u>CAPÍTULO 4 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS. DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE</u>

## <u>PROBLEMA 4.1</u>

*APOIOS À RESOLUÇÃO*

<u>Alínea (i)</u>

<u>Apoio 1</u> (apenas o resultado)

Não aplicável. ■

<u>Apoio 2</u> (sugestão)

Na secção 4.3 veja qual a definição de espaço amostral. ■

<u>Apoio 3</u> (resolução completa)

Espaço amostral: conjunto constituído pelos seguintes elementos:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| AB | AC | AD | AE | AF | AG |
| | BC | BD | BE | BF | BG |
| | | CD | CE | CF | CG |
| | | | DE | DF | DG |
| | | | | EF | EG |
| | | | | | FG |

<u>Alínea (ii)</u>

<u>Apoio 1</u> (apenas o resultado)

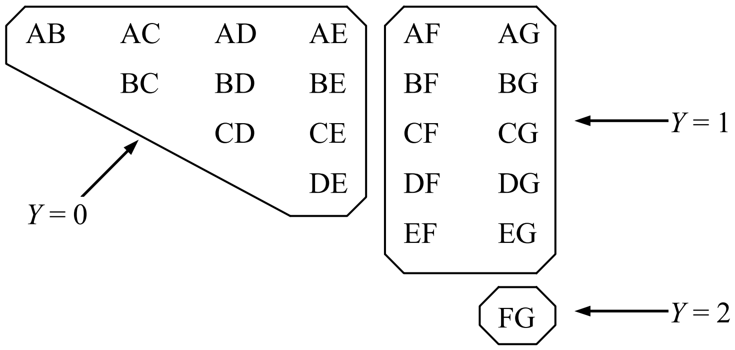
Não aplicável. ■

<u>Apoio 2</u> (sugestão)

Na secção 4.1 veja como definir uma aplicação de um espaço amostral sobre um conjunto de chegada qualquer (que corresponde ao conceito de variável aleatória). ■

<u>Apoio 3</u> (resolução completa)

A variável aleatória $Y$ corresponde ao número de mulheres. No diagrama seguinte indicam-se os valores que a variável $Y$ toma para todos os elementos do espaço amostral.




■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Não aplicável. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 4.2 veja qual a definição de função de probabilidade (denotada por p($y$)) e de função de distribuição (F($y$)) de uma variável aleatória discreta $Y$. Note que a função de distribuição corresponde a uma função de probabilidade acumulada. ■

Apoio 3 (resolução completa)

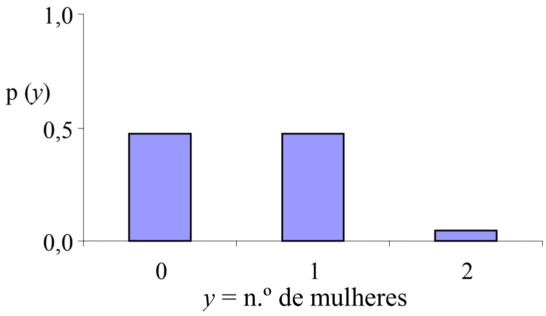
p($y$): função de probabilidade de $Y$

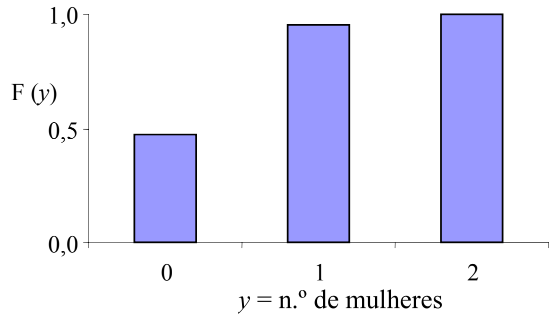
F($y$): função de distribuição de $Y$

Representação na forma tabular:

| $Y$ | P($y$) | F($y$) |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{10}{21} = 0.476$ | $\frac{10}{21} = 0.476$ |
| 1 | $\frac{10}{21} = 0.476$ | $\frac{20}{21} = 0.952$ |
| 2 | $\frac{1}{21} = 0.048$ | 1.000 |

Representação através de diagramas de barras:






Alínea (iv)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Valor esperado: 0.572

Desvio padrão: 0.584

Coeficiente de assimetria: 0.442. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 4.4 veja quais as definições e as respectivas expressões dos parâmetros valor esperado (que se denota por $\mu_Y$), desvio padrão ($\sigma_Y$) e coeficiente de assimetria ($\gamma_{1Y}$) de uma variável aleatória discreta $Y$. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$\mathrm{E}(Y) = \mu_Y = \sum_{y=0}^{2} y.p(y) = 0\cdot 0.476 + 1\cdot 0.476 + 2\cdot 0.048 = 0.572$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \sigma_Y^2 = \sum_{y=0}^{2}(y-\mu_Y)^2.p(y) = (0 - 0.572)^2\cdot 0.476 + (1 - 0.572)^2\cdot 0.476 + \\ + (2 - 0.572)^2\cdot 0.048 = 0.341$$

$$\sigma_Y = \sqrt{0.341} = 0.584$$

$$\gamma_{1Y} = \frac{\mu_3}{\sigma_Y^3} = \frac{\sum_{y=0}^{2}(y-\mu_Y)^3\cdot p(y)}{\sigma_Y^3} =$$

$$= \frac{1}{0.584^3}\left[(0-0.572)^3\cdot 0.476 + (1-0.572)^3\cdot 0.476 + (2-0.572)^3\cdot 0.048\right]$$

$$= 0.442.$$ ■

## PROBLEMA 4.2

*APOIOS À RESOLUÇÃO*

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$P(\Delta t > 2) = 0.135$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 4.3 veja qual a definição de função densidade de probabilidade e qual a expressão que traduz a probabilidade de uma variável aleatória contínua qualquer tomar um valor situado num intervalo [a, b]. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$P(\Delta t > 2) = \int_{2}^{+\infty} e^{-\Delta t} \cdot d\Delta t = -e^{-\Delta t}\Big|_{2}^{\infty} = 0 + e^{-2} = 0.135 .$$ ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$P(\Delta t > 3) = 4.98\%$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 4.3 veja qual a definição de função densidade de probabilidade e qual a expressão que traduz a probabilidade de uma variável aleatória contínua qualquer tomar um valor situado num intervalo [a, b]. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$P(\Delta t > 3) = \int_{3}^{+\infty} e^{-\Delta t} \cdot d\Delta t = -e^{-\Delta t}\Big|_{3}^{\infty} = 0 + e^{-3} = 0.0498 .$$ ■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

13.5%. ■

Apoio 2 (sugestão)

A probabilidade pretendida é condicional (ver definição na secção 3.1, expressão 3.10). ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$P(\Delta t > 3 \mid \Delta t > 1) = \frac{P(\Delta t > 3 \cap \Delta t > 1)}{P(\Delta t > 1)} = \frac{P(\Delta t > 3)}{P(\Delta t > 1)} =$$

$$= \frac{e^{-3}}{e^{-1}} = e^{-2} = P(\Delta t > 2) = 0.135$$

Em geral, $P(\Delta t > t + T \mid \Delta t > t) = \dfrac{e^{-(t+T)}}{e^{-t}} = e^{-T} = P(\Delta t > T)$. ■

## PROBLEMA 4.3

*APOIOS À RESOLUÇÃO*

Alínea (i)

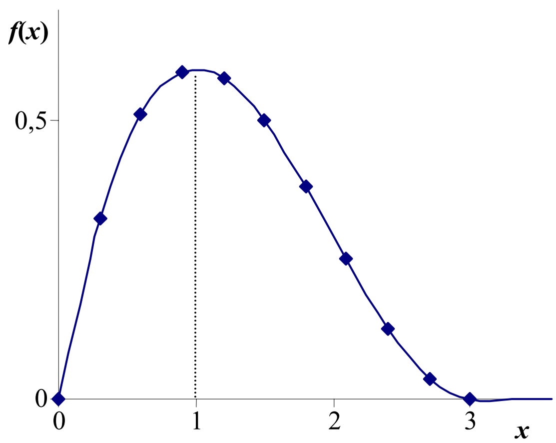
Apoio 1 (apenas o resultado)

Não aplicável. ■

Apoio 2 (sugestão)

Não aplicável. ■

Apoio 3 (resolução completa)



Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$P(X \le 1.50) = 68.8\%$

$P(X \ge 2.0) = 11.1\%$

$P(1.0 \le X \le 2.5) = 57.7\%$. ■

Apoio 2 (sugestão)

As probabilidades pretendidas correspondem às áreas delimitadas pela função densidade de probabilidade e pelos limites em questão da variável aleatória. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$P(X \le 1.50) = \int_0^{1.5} \left(\frac{4}{27}\right) \cdot \left(9x - 6x^2 + x^3\right) \cdot dx$$

$$= \left[\frac{4}{27} \cdot \frac{9}{2} x^2 - \frac{4}{27} \cdot \frac{6}{3} x^3 + \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{4} x^4\right]_0^{1.5}$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{27} x^3 + \frac{1}{27} x^4\right]_0^{1.5}$$

$$= 0.688 .$$

$$P(X \ge 2.0) = 1 - P(X < 2.0)$$

$$= 1 - \left[\frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{27} x^3 + \frac{1}{27} x^4\right]_0^{2}$$

$$= 1 - 0.889 = 0.111 .$$

$$P(1.0 \le X \le 2.5) = P(X \le 2.5) - P(X \le 1.0)$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{27} x^3 + \frac{1}{27} x^4\right]_{1.0}^{2.5}$$

$$= 0.984 - 0.407 = 0.577 .$$ ■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Não aplicável. ■

Apoio 2 (sugestão)

A função de distribuição corresponde a uma função de probabilidade acumulada, que pode ser obtida integrando a função de densidade. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) \cdot du$$

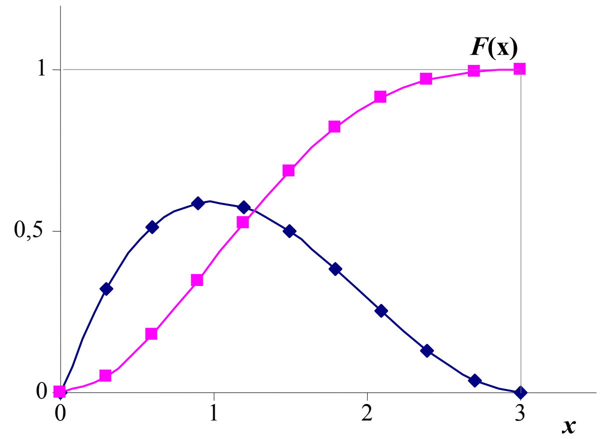
$$F(x) = \int_{0}^{x} \left(\frac{4}{27}\right) \cdot \left(9x - 6x^2 + x^3\right) \cdot dx = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{27}x^3 + \frac{1}{27}x^4$$

Para verificar se esta expressão está correcta recorde-se que

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot du = 1 .$$

Neste caso,

$$F(3) = \frac{2}{3}3^2 - \frac{8}{27}3^3 + \frac{1}{27}3^4 = 1 .$$




■

## PROBLEMA 4.4

*APOIOS À RESOLUÇÃO*

Apoio 1 (apenas o resultado)

$\mu_Y = 67.2$ ºC

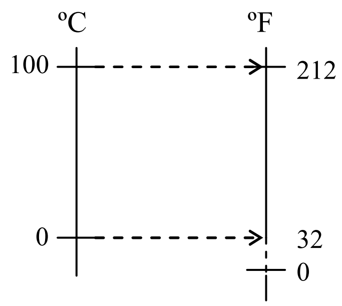
$\sigma_Y = 3.89$ ºC. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 4.5 veja como se calculam os parâmetros valor esperado e desvio padrão de uma variável transformada a partir dos parâmetros correspondentes da distribuição da variável original respectiva. Note que neste exercício a transformação é linear. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Considere a correspondência entre a escala centígrada e a escala Fahrenheit:




Se $Y$ representar temperatura em ºC e $X$ a temperatura em ºF, a expressão que permite efectuar a conversão de uma escala na outra é a seguinte:

$$\frac{Y}{100} = \frac{X-32}{180} \Leftrightarrow Y = \frac{5}{9}X - 17.8 .$$

Assim,

$$E(Y) = \frac{5}{9}E(X) - 17.8 = \frac{5}{9}\cdot 153 - 17.8 = 67.2 \ {}^{\circ}C ,$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \left(\frac{5}{9}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = \frac{25}{81}\cdot 7^2 = 15.12$$

e

$$\sigma_{\mathrm{Y}} = \sqrt{15.12} = 3.89 \ {}^{\circ}\mathrm{C} .$$ ■

## PROBLEMA 4.5

*APOIOS À RESOLUÇÃO*

Apoio 1 (apenas o resultado)

$\mu_N = 124.46$

$\sigma_N = 0.771$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Uma vez que se está perante uma transformação $N = \phi(V)$ não-linear, verifique se esta pode ser aproximada em torno do valor esperado de $V$. Na secção 4.7 veja quais as expressões do valor esperado e da variância neste tipo de transformações. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja,

$N$: cota a montante [m]

$V$: volume de água armazenada [$10^6$ $m^3$]

$V_0 = 400\,[10^6\,\mathrm{m}^3]$.

Sabe-se que

$E(\Delta V) = 20$

e que

$\mathrm{Var}\,(\Delta V) = 225$.

Ora,

$V = V_0 + \Delta V$,

e portanto

$E(V) = E(V_0) + E(\Delta V) = 400 + 20 = 420$.

Do mesmo modo

$\mathrm{Var}(V) = \mathrm{Var}(V_0) + \mathrm{Var}(\Delta V) = \mathrm{Var}(\Delta V) = 225$.

Sabendo que

$N = \phi(V) = 75.22 + 0.2511 \cdot V - 0.000481 \cdot V^2 + 0.386 \cdot 10^{-6} \cdot V^3$,

vem

$E(N) = E[\phi(V)] \approx \phi[E(V)]$

$E(N) \approx 75.22 + 0.2511 \cdot E(V) - 0.000481 \cdot E(V)^2 + 0.386 \cdot 10^{-6} \cdot E(V)^3$

$$E(N) \approx 75.22 + 0.2511 \cdot 420 - 0.000481 \cdot 420^2 + 0.386 \cdot 10^{-6} \cdot 420^3$$

$$= 124.46.$$

Do mesmo modo

$$Var(N) = Var[\phi(V)] \approx \left[ \left.\frac{dN}{dV}\right|_{V=E(V)} \right]^2 \cdot Var(V).$$

Como

$$\frac{dN}{dV} = 0.2511 - 2 \cdot 0.000481 \cdot V + 3 \cdot 0.386 \cdot 10^{-6} \cdot V^2$$

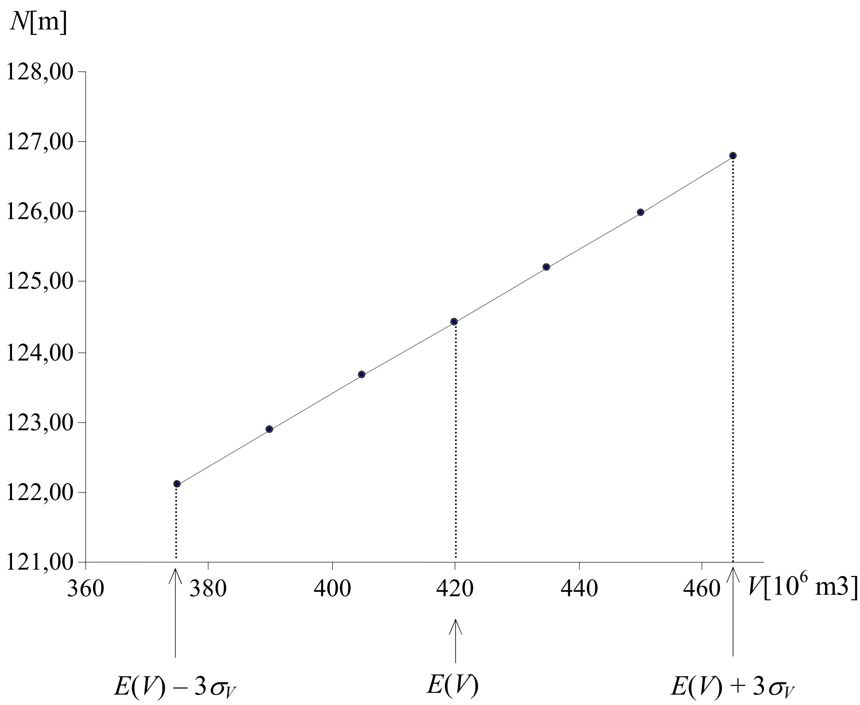
$$\left.\frac{dN}{dV}\right|_{V=E(V)} = 0.2511 - 2 \cdot 0.000481 \cdot 420 + 3 \cdot 0.386 \cdot 10^{-6} \cdot 420^2 = 0.0514,$$

resulta

$$Var(N) \approx 0.0514^2 \cdot 225 = 0.59$$

$$\sigma_N \approx \sqrt{0.59} = 0.771.$$

Note que a transformação $N = \phi(V)$ é não-linear, mas os cálculos foram efectuados com base numa aproximação linear da relação entre $V$ e $N$ em torno do ponto $v = \mu_V$. A razoabilidade desta opção pode verificar-se no diagrama seguinte.




Na tabela que se segue apresentam-se os valores assinalados no gráfico.

| *N* | *V* |
|---|---|
| 122.10 | 375 |
| 122.89 | 390 |
| 123.66 | 405 |
| 124.46 | 420 |
| 125.20 | 435 |
| 125.99 | 450 |
| 126.79 | 465 |

■

## PROBLEMA 4.6

*APOIOS À RESOLUÇÃO*

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

33000. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 4.4 veja qual a definição e a respectiva expressão, do parâmetro valor esperado (que se denota por $\mu_Y$) de uma variável aleatória discreta $Y$. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja $Y$ a variável aleatória que "número de espectadores". Então

$$E(Y) = \mu_Y = \sum_{y=0}^{3} y.p(y) = 5000 \bullet 0.20 + 20000 \bullet 0.20 + 30000 \bullet 0.10 + 50000 \bullet 0.50$$

$$= 33000.$$

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

A organização deve realizar o concerto desde que não se importe de correr riscos. ■

Apoio 2 (sugestão)

O lucro corresponde à diferença entre receitas e custos. Se o valor esperado do lucro for positivo a organização deverá avançar com o concerto. Na secção 4.5 veja como se calcula o valor esperado de uma variável transformada a partir dos parâmetros das distribuições das variáveis originais. Note que se está perante uma transformação linear. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja,

$Y$: n.º de espectadores

$L$: lucro do concerto [contos].

Ora,

Lucro ($L$) = Receitas – Custos.

Como

Receitas = $4.5 \cdot Y$ [euros]

Custos = $1.0 \cdot Y + 75000 + 30000$ [euros],

resulta

Lucro = $4.5 \cdot Y - (1.0 \cdot Y + 105000) = 3.5 \cdot Y - 105000$ [euros],

cujo valor esperado é:

$E(L) = \mu_L = 3.5 \cdot E(Y) - 105000 = 3.5 \cdot 33000 - 105000 = 10500$ [euros]

Uma vez que o valor esperado do lucro é positivo, se a organização for indiferente ao risco deve realizar o concerto. Note-se que só deverá haver concerto se o número de espectadores for superior a 30000, dado que a partir deste nível o valor esperado do lucro é positivo.

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

A organização não deve avançar com o concerto, desde que não se importe de correr riscos. ■

Apoio 2 (sugestão)

Compare o valor esperado do lucro que se obtém com a realização do concerto com o que resulta do seu cancelamento. A situação que corresponde a um lucro maior é a que se recomenda. Registe-se que ambas as situações podem levar a perdas, devendo, neste caso, ser seleccionada a alternativa que minimiza as perdas. ■

Apoio 3 (resolução completa)

Seja,

$Y$: n.º de espectadores

$L$: lucro do concerto.

De acordo com as novas previsões atmosféricas, o valor esperado do número de espectadores será:

$$E(Y) = \mu_Y = \sum_{y=0}^{3} y.p(y) = 5000 \bullet 0.30 + 20000 \bullet 0.20 + 30000 \bullet 0.20 + 50000 \bullet 0.30 = 26500.$$

O lucro do concerto será dado por

Lucro ($L$) = Receitas – Custos.

Considerem-se separadamente as seguintes situações:

- O concerto realiza-se.

  Receitas = $4.5 \bullet Y$ [euros]

  Custos = $1.0 \bullet Y + 75000 + 30000$ [euros]

  Lucro = $4.5 \bullet Y - (1.0 \bullet Y + 105000) = 3.5 \cdot Y - 105000$ [euros]

  $E(L) = \mu_L = 3.5 \bullet E(Y) - 105000 = 3.5 \bullet 26500 - 105000 = -12250$ [euros]

- O concerto é cancelado.

  Receitas = 0 [euros]

  Custos = 15000 + 7500 = 22500 [euros]

  Lucro = -22500 [euros]

Se a organização não for avessa ao risco em demasia, deverá avançar com a realização do concerto. Embora apresente um lucro com valor esperado negativo (prejuízo), corresponde à situação que minimiza o valor esperado das perdas, com um valor de 22500 euros.

## PROBLEMA 4.7

*APOIOS À RESOLUÇÃO*

Alínea (i)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$P(0) = 0.00075$ $\quad F(0) = 0.00075$

$P(1) = 0.02525$ $\quad F(1) = 0.026$

$P(2) = 0.24725$ $\quad F(2) = 0.27325$

$P(3) = 0.72675$ $\quad F(3) = 1$ ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 4.2 veja qual a definição de função de probabilidade (denotada por p($y$)) e de função de distribuição (F($y$)) de uma variável aleatória discreta $Y$. Note que a disponibilidade de um veículo é independente da dos outros. ■

Apoio 3 (resolução completa)

A variável aleatória $Y$ representa o número de veículos disponíveis por dia. Considerem-se os seguintes acontecimentos:

VN: o veículo mais novo encontra-se disponível num determinado dia

VA: o veículo mais antigo encontra-se disponível num determinado dia

VT: o terceiro veículo encontra-se disponível num determinado dia.

Note que VN, VA e VT são acontecimentos independentes. Assim, a função probabilidade vem:

$$P(Y=0)=P\left(\overline{\mathrm{VN}}\cap\overline{\mathrm{VA}}\cap\overline{\mathrm{VT}}\right)=P\left(\overline{\mathrm{VN}}\right)\cdot P\left(\overline{\mathrm{VA}}\right)\cdot P\left(\overline{\mathrm{VT}}\right)$$

$$P\left(\overline{\mathrm{VN}}\right)=1-P(\mathrm{VN})=1-0.95=0.05$$

$$P\left(\overline{\mathrm{VA}}\right)=1-P(\mathrm{VA})=1-0.85=0.15$$

$$P\left(\overline{\mathrm{VT}}\right)=1-P(\mathrm{VT})=1-0.90=0.10$$

$$P(Y=0)=0.05\cdot 0.15\cdot 0.10=0.00075$$

$$P(Y=1)=P\left[\left(\mathrm{VN}\cap\overline{\mathrm{VA}}\cap\overline{\mathrm{VT}}\right)\cup\left(\overline{\mathrm{VN}}\cap\mathrm{VA}\cap\overline{\mathrm{VT}}\right)\cup\left(\overline{\mathrm{VN}}\cap\overline{\mathrm{VA}}\cap\mathrm{VT}\right)\right]$$

$$=0.95\cdot 0.15\cdot 0.10+0.05\cdot 0.85\cdot 0.10+0.05\cdot 0.15\cdot 0.90=0.02525$$

$$P(Y=2)=P\left[\left(\mathrm{VN}\cap\mathrm{VA}\cap\overline{\mathrm{VT}}\right)\cup\left(\mathrm{VN}\cap\overline{\mathrm{VA}}\cap\mathrm{VT}\right)\cup\left(\overline{\mathrm{VN}}\cap\mathrm{VA}\cap\mathrm{VT}\right)\right]$$

$$=0.95\cdot 0.85\cdot 0.10+0.95\cdot 0.15\cdot 0.90+0.5\cdot 0.85\cdot 0.90=0.24725$$

$$P(Y=3)=P(\mathrm{VN}\cap\mathrm{VA}\cap\mathrm{VT})=P(\mathrm{VN})\cdot P(\mathrm{VA})\cdot P(\mathrm{VT})$$

$$=0.95\cdot 0.85\cdot 0.90=0.72675.$$

Calcule-se agora a função distribuição:

$$F(0)=P(Y\le 0)=P(Y=0)=0.00075$$

$$F(1)=P(Y\le 1)=P(Y=0)+P(Y=1)=0.00075+0.02525=0.026$$

$$F(2)=P(Y\le 2)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)$$

$$=0.00075+0.02525+0.24725=0.27325$$

$$F(3)=P(Y\le 3)=1\,.$$ ■

Alínea (ii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

$\mu_Y = 2.7$

$\sigma_Y = 0.515$. ■

Apoio 2 (sugestão)

Na secção 4.4 veja quais as definições e respectivas expressões dos parâmetros valor esperado (que se denota por $\mu_{\mathrm{Y}}$) e desvio padrão ($\sigma_{\mathrm{Y}}$) de uma variável aleatória discreta *Y*. ■

Apoio 3 (resolução completa)

$$\mu_Y = \sum_{y=0}^{3} y.p(y) = 0.02525 \cdot 1 + 0.024725 \cdot 2 + 0.72675 \cdot 3 = 0.02525 + 0.4945 + 2.18025 = 2.7$$

$$\sigma_Y^2 = \sum_{y=0}^{3} (y - \mu_Y)^2 .p(y) = \sum_{y=0}^{3} \left[y^2 .p(y)\right] - \mu_Y^2$$

$$= 0.02525 \cdot 1 + 0.24725 \cdot 2^2 + 0.72675 \cdot 3^2 - \mu_Y^2$$

$$= 0.02525 + 0.989 + 6.54075 - 7.29 = 0.265$$

$\sigma_Y = \sqrt{0.265} = 0.515$. ■

Alínea (iii)

Apoio 1 (apenas o resultado)

Valor esperado: 135 [€/dia]

Desvio Padrão: 25.7 [€/dia]. ■

Apoio 2 (sugestão)

O lucro é uma função linear da variável *Y*. Na secção 4.5 veja como se calculam o valor esperado e o desvio-padrão de uma variável transformada a partir dos parâmetros das distribuições das variáveis originais. ■

Apoio 3 (resolução completa)

O lucro líquido diário é $L = 50 \cdot Y$. O respectivo valor esperado e desvio padrão vêm:

$E(L) = 50 \cdot E(Y) = 50 \times 2.7 = 135$ [€/dia]

$\sigma_L = \sqrt{\mathrm{Var}(L)} = \sqrt{50^2 \cdot \mathrm{Var}(Y)} = \sqrt{662.5} = 25.7\left[€/\mathrm{dia}\right]$. ■