

## ESTATÍSTICA I

## ÉPOCA NORMAL (2013.01.08)

## Duração: 2h 00m / Com consulta

Em todas as suas respostas defina, com clareza, a terminologia que adotar e as hipóteses subjacentes aos diferentes passos da sua análise.

1. Os responsáveis por uma cidade pretendem estudar a fluidez de tráfego num dos principais cruzamentos da cidade. A principal questão prende-se com as viragens à esquerda da rua principal para a rua de acesso à praça principal da cidade. O cruzamento em questão tem semáforos a regular o trânsito e limitações de espaço. A função distribuição de probabilidade conjunta do número de autocarros ( $X$ ) e do número de automóveis ( $Y$ ) que, num ciclo de luzes dos semáforos, pretendem virar à esquerda apresenta-se na tabela seguinte:

$f_{XY}(x, y)$		$y$					
		0	1	2	3	4	5
$x$	0	0.025	0.050	0.125	0.150	0.100	0.050
	1	0.015	0.030	0.075	0.090	0.060	0.030
	2	0.010	0.020	0.050	0.060	0.040	0.020

- a) Calcule o valor esperado do número total de veículos (*i.e.*, autocarros mais automóveis) que, num ciclo de luzes dos semáforos, pretendem virar à esquerda e a variância do número de autocarros que, num ciclo de luzes dos semáforos, pretendem também virar à esquerda. (2 VALORES)
- b) Considere agora que a capacidade da faixa que permite virar à esquerda é de cinco automóveis e que um autocarro equivale a três automóveis. Calcule a probabilidade de, num ciclo de luzes dos semáforos, a capacidade da faixa que permite virar à esquerda ser ultrapassada. (2 VALORES)
- c) O número equivalente de veículos ( $Z$ ) é dado pela fórmula:  $Z = 3X + Y$ . Calcule o valor esperado do número equivalente de veículos que, num ciclo de luzes dos semáforos, pretendem virar à esquerda e o valor esperado do número de veículos equivalentes que, num ciclo de luzes dos semáforos, ultrapassam a capacidade da faixa de virar à esquerda. (2 VALORES)
2. Com base em registos históricos, uma empresa de *telemarketing* considera que a duração, em minutos, de uma chamada para potenciais clientes segue a seguinte distribuição triangular:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right), & \text{para } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \left(\frac{4}{45}\right)\left(\frac{21}{4} - x\right), & \text{para } \frac{3}{4} < x \leq \frac{21}{4} \\ 0, & \text{para outros valores} \end{cases}$$

A distribuição é assimétrica à direita, uma vez que as chamadas para pessoas que se tornam clientes necessitam de maior duração do que as não atendidas ou para pessoas não interessadas.

O valor esperado da duração de uma chamada é igual a 2.083 minutos, enquanto o desvio padrão é igual a 1.124 minutos

- a) Calcule a probabilidade de, num conjunto de dez chamadas selecionadas aleatoriamente, haver pelo menos quatro a durar mais de 3 minutos. (2 VALORES)
- b) Calcule a probabilidade de a primeira chamada com duração superior a 3 minutos ocorrer depois da quarta tentativa. (2 VALORES)
- c) A empresa de telemarketing estabelece uma quota diária de 220 chamadas, a ser cumprida num período de 8 horas. Assumindo que a lista de números de telefone atribuída a um funcionário é obtida por um processo aleatório simples, calcule a probabilidade desse funcionário cumprir ou ultrapassar a quota estabelecida pela empresa. (2 VALORES)
3. O responsável por um centro de saúde está a preparar o fornecimento de vacinas da gripe para o próximo Inverno. Para tal, selecionou uma amostra aleatória de 350 utentes do centro de saúde aos quais perguntou se pretendiam tomar a vacina da gripe, tendo 126 deles afirmado que sim. Sabendo que o centro de saúde tem no total 3000 utentes, construa um intervalo de confiança a 95% para a proporção de utentes do centro de saúde que pretendem vir a tomar a vacina da gripe e estime, sob a forma de um intervalo, o número de vacinas a adquirir. (2 VALORES)
4. Uma grande empresa está a desenvolver uma nova versão do seu principal produto com o objectivo de melhorar a usabilidade. A expectativa seria que a nova versão exigisse menor força de atuação do que a versão atual. Como forma de avaliar a usabilidade da nova versão, realizou-se uma experiência onde se mediu a intensidade da força necessária para provocar uma resposta pré-determinada nas duas versões. Cinquenta e uma unidades de cada versão foram testadas e as forças de atuação necessárias para obter a resposta pré-determinada registadas (valores expressos em  $10^{-3} N$ ). Os resultados obtidos estão resumidos na tabela seguinte:

Versão	Dimensão da amostra	$\bar{x}$ ( $10^{-3} N$ )	$s$ ( $10^{-3} N$ )
Atual	51	5.459	0.7626
Nova	51	3.507	0.6826

Construa intervalos de confiança a 95% para:

- a razão entre as variâncias das intensidades de força aplicadas às duas versões;
- a diferença entre os valores esperados das intensidades de força aplicadas às duas versões.

Interprete os resultados obtidos atendendo a que uma menor intensidade de força e uma variabilidade reduzida são duas características desejáveis. (4 VALORES)

5. Considere uma estação meteorológica de recolha de dados situada num local remoto e de difícil acesso. O funcionamento da estação depende de um componente eletrónico cujo tempo de vida segue uma distribuição exponencial negativa. Dado tratar-se de um componente crucial, a estação possui um segundo componente de reserva que entra automaticamente em funcionamento em caso de avaria do primeiro. O tempo de funcionamento da estação é, assim, o resultado do efeito de duas distribuições exponenciais negativas, sendo dado pela expressão

$$f_X(x, \theta) = \frac{1}{\theta^2} \cdot x \cdot e^{-(x/\theta)}, \quad 0 \leq x < \infty; 0 < \theta < \infty$$

Determine o estimador de máxima verosimilhança do parâmetro  $\theta$  com base numa amostra aleatória de dimensão  $N$ . (2 VALORES)