Diferencial

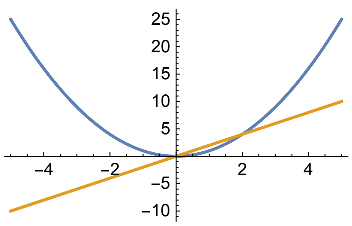
Morrey p. 144.

$$\mathrm{df}(x, h) = f'(x) \cdot h.$$

In[1]:=
```
f1[x_]:=x^2
```

In[◦]:=
```
Plot[{f1[x], 2 x}, {x, -5, 5}, ImageSize → Small]
```

Out[◦]=



In[◦]:=
```
D[f1[x], x]
```

Out[◦]= 2 x

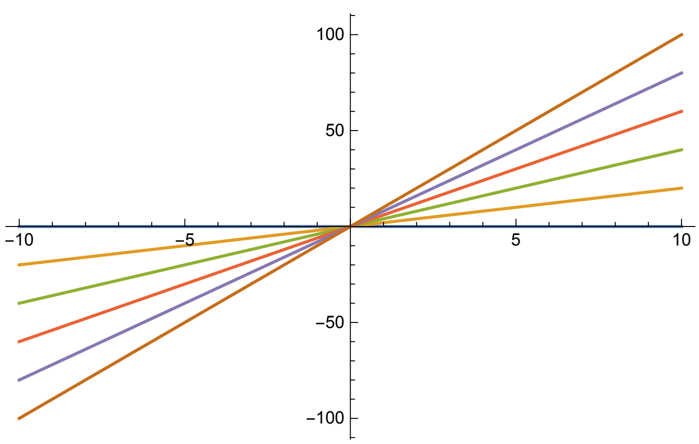
Multiplicação de derivadas/funções.

In[◦]:=
```
Table[D[f1[x], x] * h, {h, 0, 5}]
```

Out[◦]= {0, 2 x, 4 x, 6 x, 8 x, 10 x}

In[◦]:=
```
Plot[{0, 2 x, 4 x, 6 x, 8 x, 10 x}, {x, -10, 10}]
```

Out[◦]=



Estes são os diferenciais de $f(x) = x^2$:

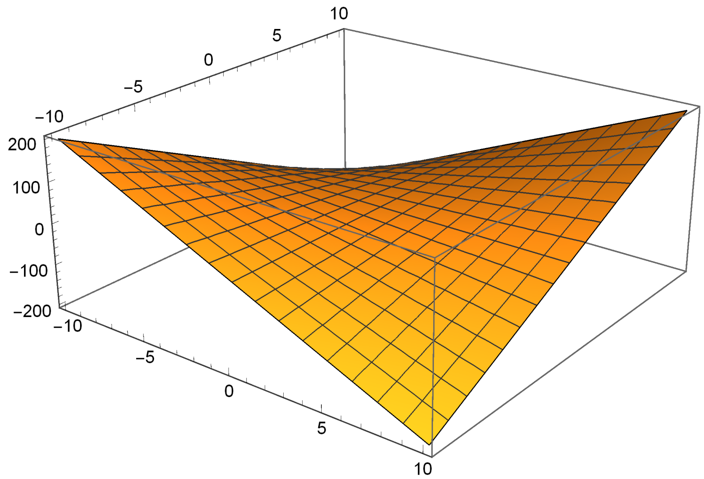
$$\mathrm{df}(x, h) = 2\,x \cdot h,$$

executados para diversos h (multiplicador).

O multiplicador é o segundo parâmetro do diferencial, logo o diferencial é uma família de funções multiplicadas da derivada da função.

In[ ]:=
```
Plot3D[2 x * h, {x, -10, 10}, {h, -10, 10}, ImageSize → Medium]
```

Out[ ]=



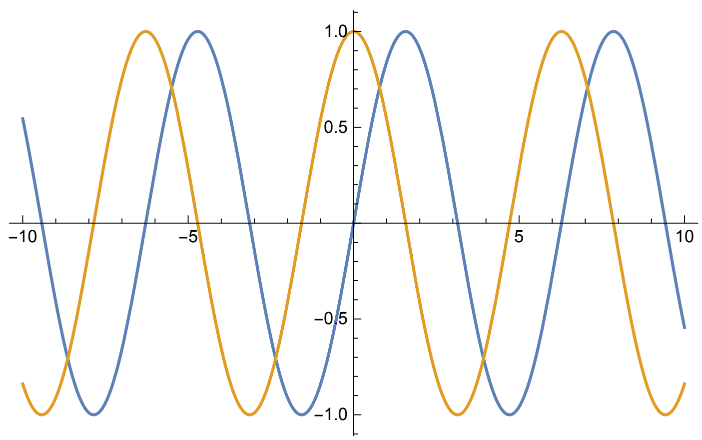
Esse é o diferencial de X^2 variando as duas variáveis.

In[ ]:=
```
D[Sin[x], x]
```

Out[ ]=
```
Cos[x]
```

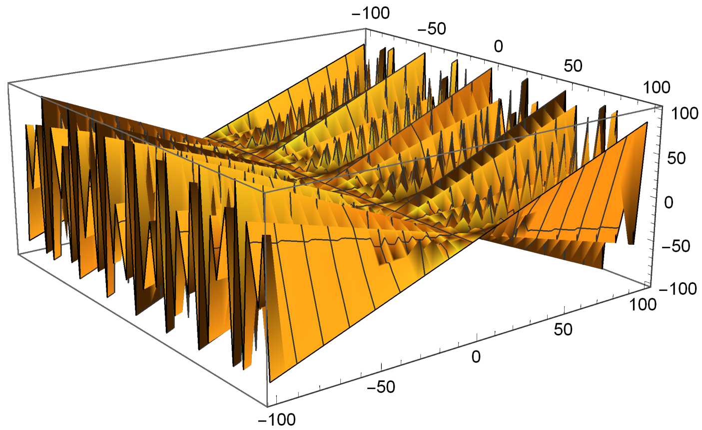
In[ ]:=
```
Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, -10, 10}]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
Plot3D[Cos[x] * h, {x, -100, 100}, {h, -100, 100}, ImageSize → Medium]
```

Out[ ]=



Mas o fato de ser uma função de duas variáveis/plot tridimensional é apenas incidental. Ele é um criador de uma família da derivada de *f*. Inclusive, uma das funções da família é a própria derivada.

Para $f(x) = \sin x$,

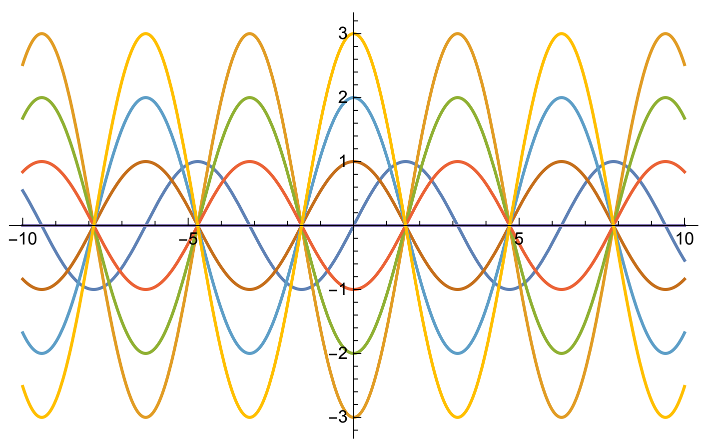
$$\mathrm{df}(x, h) = \cos x \cdot h.$$

In[ ]:=
```
Table[Cos[x] * h, {h, -3, 3, 1}]
```

Out[ ]=
```
{-3 Cos[x], -2 Cos[x], -Cos[x], 0, Cos[x], 2 Cos[x], 3 Cos[x]}
```

In[ ]:=
```
Plot[{Sin[x], -3 Cos[x], -2 Cos[x], -Cos[x], 0, Cos[x], 2 Cos[x], 3 Cos[x]}, {x, -10, 10}]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
f3[x_] = x^2 + 2 x + 4
```

Out[ ]= $4 + 2x + x^2$

In[ ]:=
```
D[f3[x], x]
```

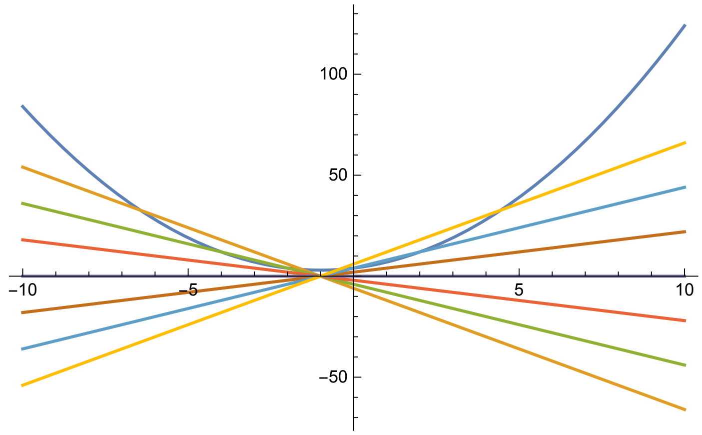
Out[ ]= $2 + 2x$

In[ ]:=
```
Table[(2 + 2 x) * h, {h, -3, 3, 1}]
```

Out[ ]=
```
{-3 (2 + 2 x), -2 (2 + 2 x), -2 - 2 x, 0, 2 + 2 x, 2 (2 + 2 x), 3 (2 + 2 x)}
```

In[ ]:=
```
Plot[{x^2 + 2 x + 4, -3 (2 + 2 x), -2 (2 + 2 x),
  -2 - 2 x, 0, 2 + 2 x, 2 (2 + 2 x), 3 (2 + 2 x)}, {x, -10, 10}]
```

Out[ ]=



Se $f(x) = x^2 + 2x + 4$,

$\mathrm{df}(x) = (2x + 2) \cdot h$.

O diferencial num ponto é uma família de multiplicadores da derivada (naquele ponto) (e um deles é a derivada). Os demais diferem mais ou menos da derivada.

h é x_1

Então se $f(x) = x^2 + 2x + 4$,

$$f'(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \ldots$$

Assumir $x_1 = x_0 + \Delta x$ é expressar o numerador somente em termos de x_0.

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \left((x_0+\Delta x)^2 + 2\,(x_0+\Delta x) + 4 - (x_0{}^2 + 2\,x_0 + 4)\right) / (x_0 + \Delta x - x_0) = \frac{1}{\Delta x}\left(x_0{}^2 + 2\,x_0\,\Delta x + \Delta x^2 + 2\,x_0 + 2\,\Delta x + 4 - x_0{}^2 - 2\,x_0 - 4\right) = \frac{2\,x_0\,\Delta x + \Delta x^2 + 2\,\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2\,x_0 + \Delta x + 2)}{\Delta x} = 2\,x_0 + \Delta x + 2$$

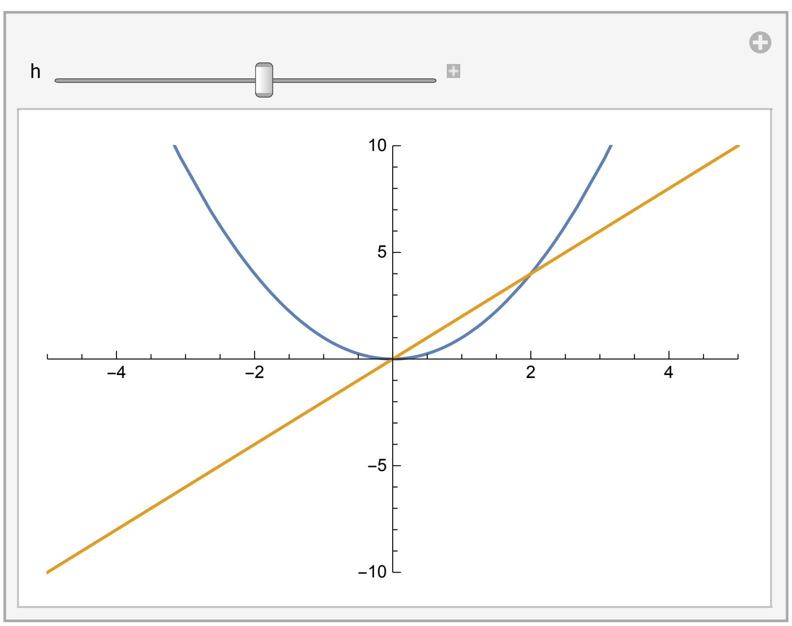
, que tende a $2\,x_0 + 2$ conforme Δx tende a zero.

Aqui, não temos mais x_1 na função, exceto na forma de $\Delta x = x_1 - x_0$ que tende a zero.

$x_1 - x_0$ tende a zero porque x_1 se aproxima de x_0, mas enquanto $x_1 \neq 0$,
$\mathrm{df}(x, x_1) \neq f'(x)$.

In[∘]:=
```
Manipulate[
 Plot[{x^2, 2 x * h}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-5, 5}, {-10, 10}}], {h, -10, 10, .5}]
```

Out[∘]=



Mas aqui eu estou manipulando $f'(x) \cdot h$... e não $f'(x + x_1)$ (?).

Esses são os possíveis diferenciais, para qualquer X_1.

Agora preciso manipular X_1.

In[•]:=
```
Table[D[x^2 + x0, x], {x0, 1, 5}]
```

Out[•]=
```
{2 x, 2 x, 2 x, 2 x, 2 x}
```

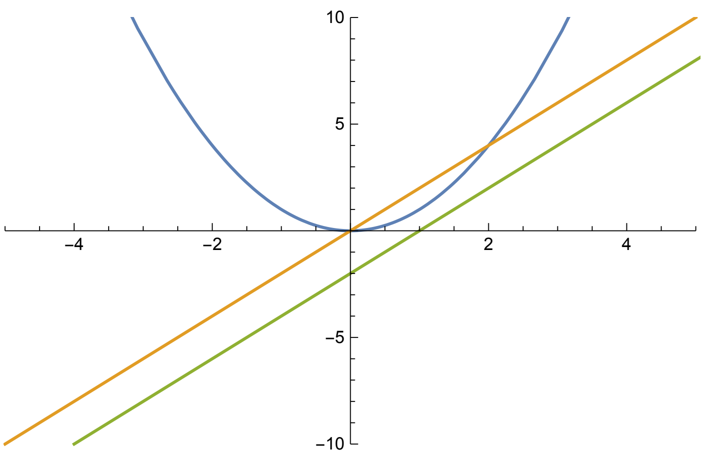
A derivada é fixa para apenas diferenças de constante, mas o diferencial varia.
O diferencial é ignorar a anulação das constantes?

Por isso o diferencial não é derivar $f(X) + X_1$... É multiplicar $f'(X)$ por X_1.
O manipulate acima está correto... é só

1) Desenhar o X_1 referente;

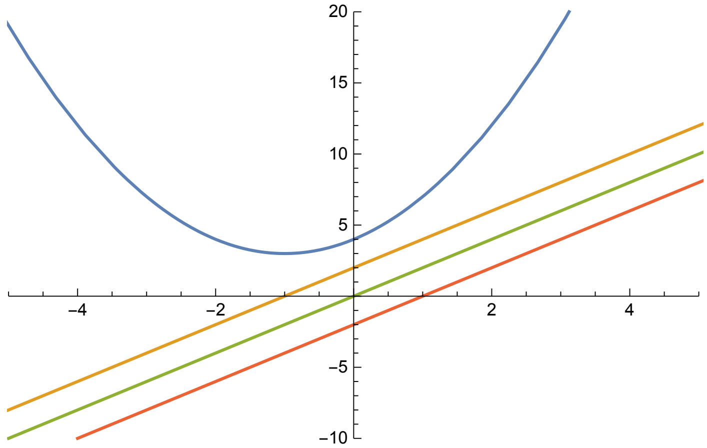
2) Deslocar o diferencial (o que pode ser uma forma de referenciar o X_1) em proporção a X_1.
Depois que fizer isso, poderei desenhar a derivada para comparar com o diferencial.

In[•]:=
```
Plot[{x^2, 2 x, 2 x - 2}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-5, 5}, {-10, 10}}]
```

Out[•]=


Como deslocar horizontalmente a função em proporção a um X?

In[ ]:=
```
Plot[{x^2 + 2 x + 4, 2 x + 2, 2 x + 2 - 2, 2 x - 2}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-5, 5}, {-10, 20}}]
```

Out[ ]=


$$f(x) = 2x + 2$$

$$f(x) + 2 = 2x + 2 \Rightarrow$$

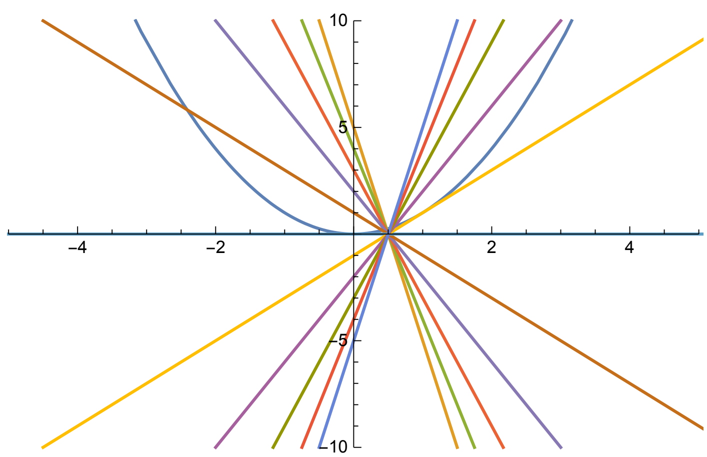
$$f(x) = 2x$$

Eu acho que essa correção não vai (mas poderia) fazer tangenciar o diferencial.

In[ ]:=
```
Table[(2 x * h) - h, {h, -5, 5}]
```

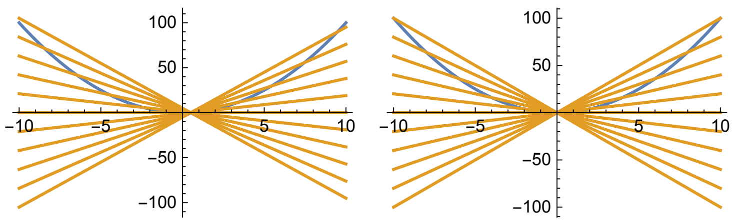
Out[ ]= {5 − 10 x, 4 − 8 x, 3 − 6 x, 2 − 4 x, 1 − 2 x, 0, −1 + 2 x, −2 + 4 x, −3 + 6 x, −4 + 8 x, −5 + 10 x}

In[ ]:=
```
Plot[{x^2, 5 - 10 x, 4 - 8 x, 3 - 6 x, 2 - 4 x, 1 - 2 x, 0, -1 + 2 x, -2 + 4 x,
   -3 + 6 x, -4 + 8 x, -5 + 10 x}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-5, 5}, {-10, 10}}]
```

Out[ ]=


In[∘]:=
```
GraphicsRow[{
  Plot[{x^2, Table[(2 x * h) - h, {h, -5, 5}]}, {x, -10, 10}, ImageSize → Small],
  Plot[{x^2, Table[(2 x * h), {h, -5, 5}]}, {x, -10, 10}, ImageSize → Small]
 }]
```

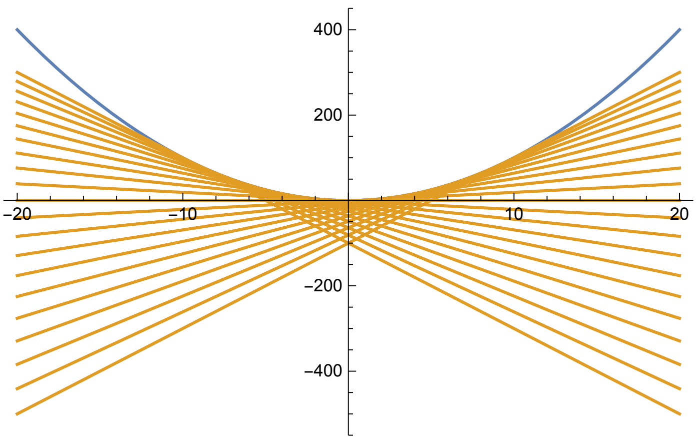
Out[∘]=



1.

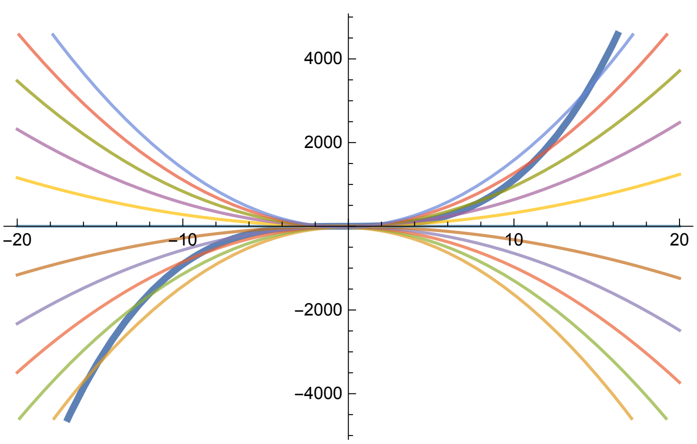
In[∘]:=
```
Plot[{x^2, Table[(2 x * h) - h^2, {h, -10, 10}]}, {x, -20, 20}, ImageSize → Medium]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Plot[{x^3 + x^2 + x, Evaluate[Table[(D[x^3 + x^2 + x, x] * h) - h^2, {h, -5, 5}]]},
 {x, -20, 20}, PlotStyle → Flatten[{m, Table[s, 11]}]]
```

Out[∘]=

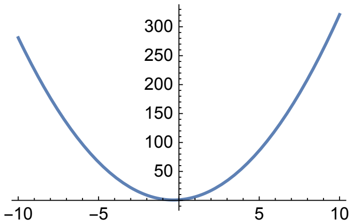


In[∘]:=
```
D[x^3 + x^2 + x, x]
```

Out[∘]= $1 + 2x + 3x^2$

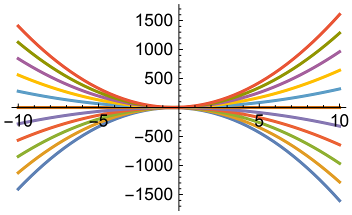
In[◦]:=
```
Plot[1 + 2 x + 3 x^2, {x, -10, 10}, ImageSize → Small]
```

Out[◦]=



In[◦]:=
```
Plot[Evaluate[Table[(1 + 2 x + 3 x^2) * a, {a, -5, 5, 1}]], {x, -10, 10}, ImageSize → Small]
```

Out[◦]=

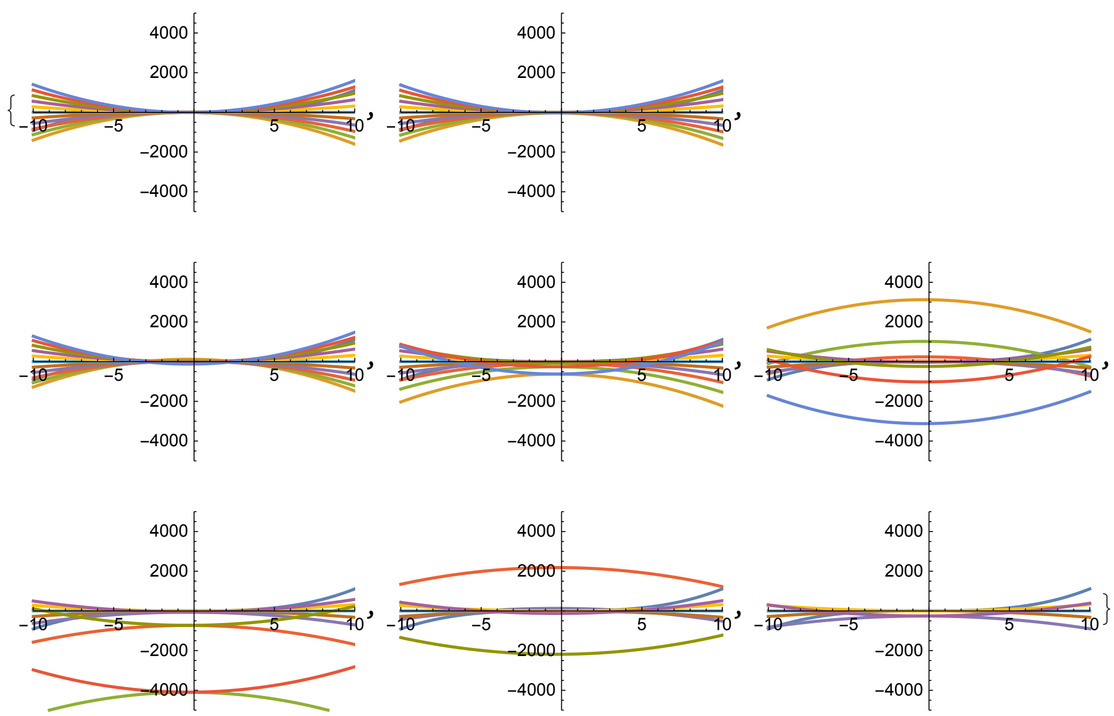


Um, já sabemos que a multiplicação da parábola a agudece, ou suaviza até inverter a concavidade...

O que está parecendo é que o diferencial é uma fórmula arbitrária, e que o h (multiplicador) deve ser de grau 1 menor que o da função.

In[◦]:=
```
Table[Plot[{x^3 + x^2 + x, Evaluate[Table[((1 + 2 x + 3 x^2) * h) - h^n, {h, -5, 5, 1}]]},
  {x, -10, 10}, ImageSize → Small, PlotRange → {{-10, 10}, {-5000, 5000}}], {n, 1, 8, 1}]
```

Out[◦]=



```
In[∘]:= D[x^4 + x^3 + x^2 + x, x]
Out[∘]= 1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3

In[∘]:= Table[((1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3) * h) - h, {h, -5, 5, 1}]
Out[∘]= {5 - 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), 4 - 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), 3 - 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  2 - 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -2 x - 3 x^2 - 4 x^3, 0, 2 x + 3 x^2 + 4 x^3, -2 + 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  -3 + 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -4 + 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -5 + 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3)}

In[∘]:= Table[((1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3) * h) - h^2, {h, -5, 5, 1}]
Out[∘]= {-25 - 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -16 - 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -9 - 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  -4 - 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -2 - 2 x - 3 x^2 - 4 x^3, 0, 2 x + 3 x^2 + 4 x^3, -4 + 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  -9 + 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -16 + 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -25 + 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3)}

In[∘]:= Table[((1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3) * h) - h^3, {h, -5, 5, 1}]
Out[∘]= {125 - 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), 64 - 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), 27 - 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  8 - 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -2 x - 3 x^2 - 4 x^3, 0, 2 x + 3 x^2 + 4 x^3, -8 + 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  -27 + 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -64 + 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -125 + 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3)}

In[2]:= m=Directive[Opacity[1],Thickness[.01]]
        s=Directive[{Opacity[.7]}]

Out[2]= Directive[Opacity[1], Thickness[0.01]]

Out[3]= Directive[{Opacity[0.7]}]
```

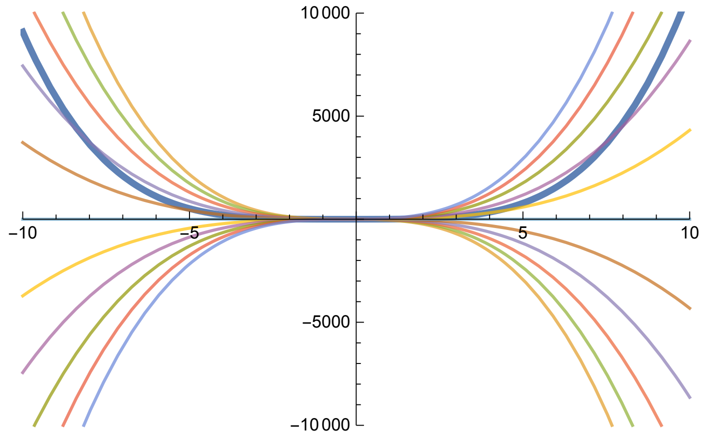
- Família de derivadas de *f* de grau *n* = 4 (grau 3) multiplicadas por constantes elevadas a 1 (*n* – 3)

```
In[∘]:= Flatten[{m, Table[s, 11]}]
Out[∘]= {Directive[Opacity[1], Thickness[0.01]], Directive[{Opacity[0.7]}],
  Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}],
  Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}],
  Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}],
  Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}]}

In[∘]:= Prepend[Table[s, 11], m]
Out[∘]= {Directive[Opacity[1], Thickness[0.01]], Directive[{Opacity[0.7]}],
  Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}],
  Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}],
  Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}],
  Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}], Directive[{Opacity[0.7]}]}
```

In[∘]:=
```
Plot[{x^4 + x^3 + x^2 + x, 5 - 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), 4 - 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), 3 - 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  2 - 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -2 x - 3 x^2 - 4 x^3, 0, 2 x + 3 x^2 + 4 x^3, -2 + 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  -3 + 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -4 + 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -5 + 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3)},
 {x, -10, 10}, PlotRange → {{-10, 10}, {-10000, 10000}},
 ImageSize → Medium, PlotStyle → Prepend[Table[s, 11], m]]
```

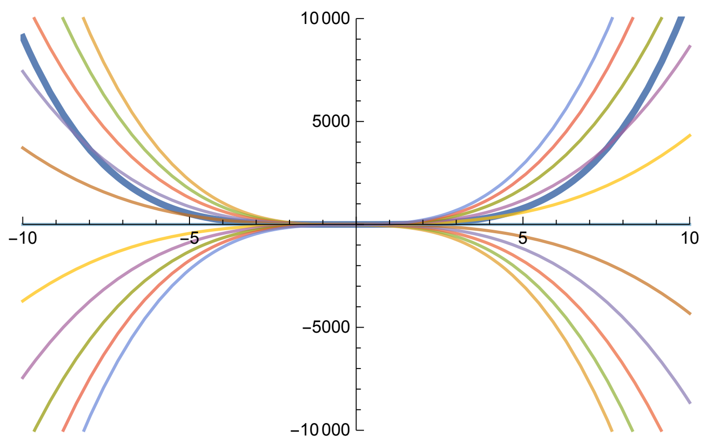
Out[∘]=



- Família de derivadas de *f* de grau $n = 4$ (grau 3) multiplicadas por constantes elevadas a 2 ($n - 2$)

In[∘]:=
```
Plot[{x^4 + x^3 + x^2 + x, -25 - 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -16 - 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  -9 - 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -4 - 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -2 - 2 x - 3 x^2 - 4 x^3,
  0, 2 x + 3 x^2 + 4 x^3, -4 + 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -9 + 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
  -16 + 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -25 + 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3)},
 {x, -10, 10}, PlotRange → {{-10, 10}, {-10000, 10000}},
 ImageSize → Medium, PlotStyle → Prepend[Table[s, 11], m]]
```

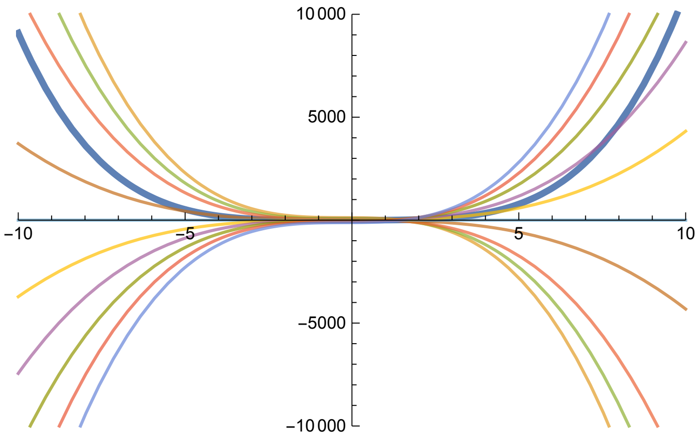
Out[∘]=



- Família de derivadas de *f* de grau $n = 4$ (grau 3) multiplicadas por constantes elevadas a 3 ($n - 1$)

```
In[•]:= Plot[{x^4 + x^3 + x^2 + x, 125 - 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), 64 - 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
    27 - 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), 8 - 2 (1 + 2 xF + 3 x^2 + 4 x^3), -2 x - 3 x^2 - 4 x^3, 0,
    2 x + 3 x^2 + 4 x^3, -8 + 2 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -27 + 3 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3),
    -64 + 4 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3), -125 + 5 (1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3)},
   {x, -10, 10}, PlotRange → {{-10, 10}, {-10000, 10000}},
   ImageSize → Medium, PlotStyle → Prepend[Table[s, 11], m]]
```

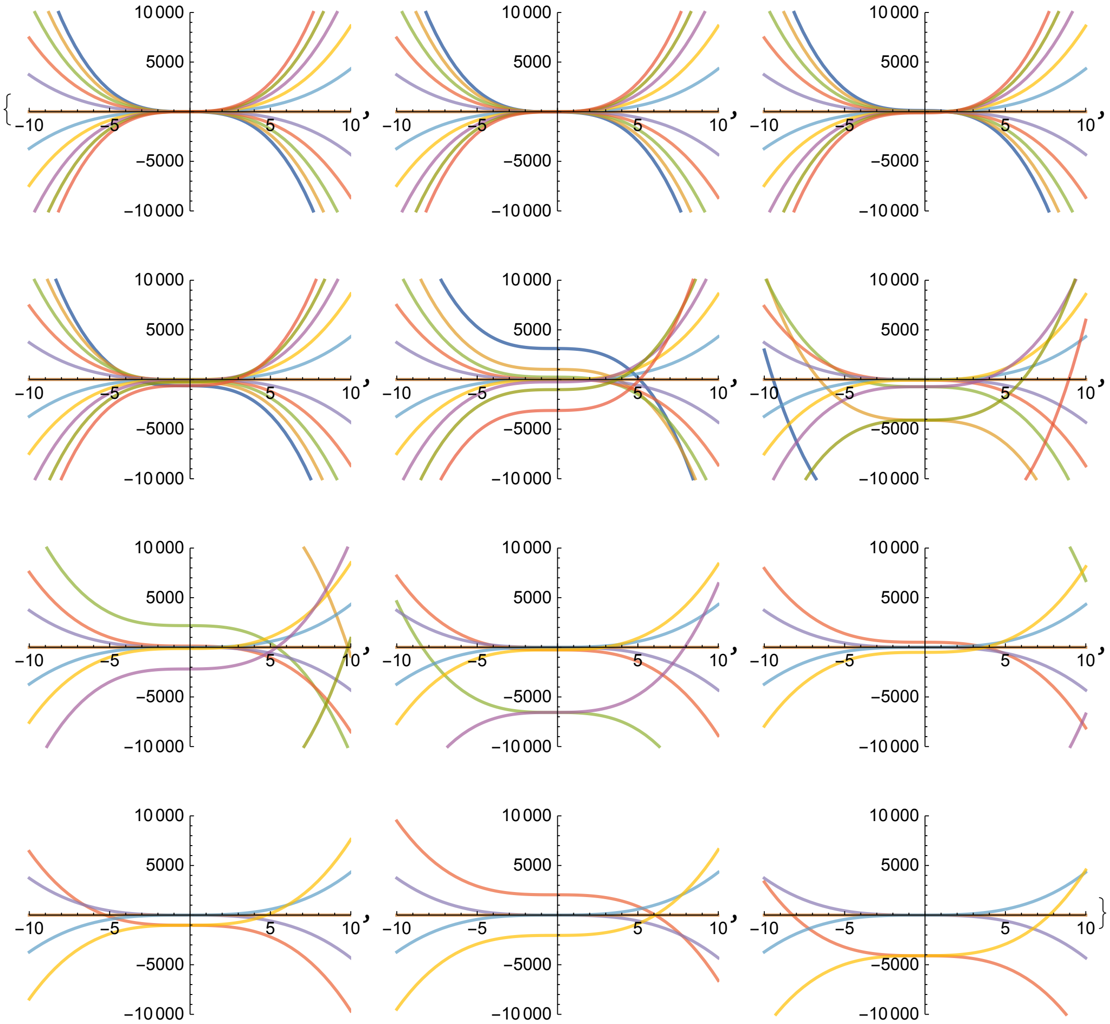
Out[•]=



Comparando as famílias de derivadas.

In[ ]:=
```
Table[Plot[Evaluate[Table[((1 + 2 x + 3 x^2 + 4 x^3) * h) - h^n, {h, -5, 5, 1}]],
   {x, -10, 10}, ImageSize → Small, PlotRange → {{-10, 10}, {-10000, 10000}},
   PlotStyle → Prepend[Table[s, 11], m]], {n, 1, 12, 1}]
```

Out[ ]=

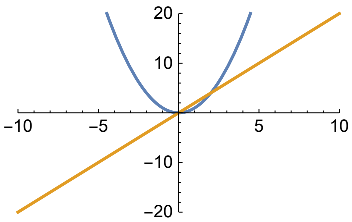


Tudo isso era tentativa de entender 1.. Mas não parece ser reproduzível. Tentei deslocar cada diferencial de acordo com x subtraindo x de f'. Porém isso resulta na mesma subtração para todo f', pelo menos no gráfico. Mesmo sendo subtraído h, que varia. (O motivo é que h é igual à constante de f'.)

Tangenciamento da derivada da parábola

Dada uma parábola x^2 e a derivada $2\,x$...

In[ ]:=
```
Plot[{x^2, 2 x}, {x, -10, 10}, ImageSize → Small, PlotRange → {{-10, 10}, {-20, 20}}]
```

Out[ ]=


A derivada é o limite conforme $\Delta x \to 0 = x_1 - x_0 \to 0$.

Silverman p. 55. “The derivative $f'(x_0)$ is just the slope of the tangent to the curve $f(x)$ at the point with abscissa x_0.”

Então a questão é que cada ponto *tem* uma derivada que é um número, mas este número não é a secante, ele é a *razão instantânea* entre y e x na função, e *essa razão* é o *slope* da linha secante.

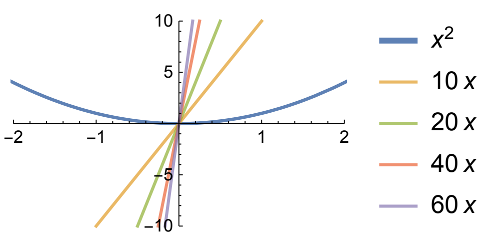
Então em $x = 5$, $f'(x) = 10$ e a secante é $y = 10\,x$. (I had completely forgotten this!)

Em $x = 10$, $f'(x) = 20$ e a secante é $y = 20\,x$.

$f'(20) = 40 \Rightarrow y = 40\,x$;

$f'(30) = 60 \Rightarrow y = 60\,x$.

In[ ]:=
```
Plot[{x^2, 10 x, 20 x, 40 x, 60 x}, {x, -10, 10},
 ImageSize → Small, PlotStyle → Prepend[Table[s, 4], m],
 PlotRange → {{-2, 2}, {-10, 10}}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[ ]=


Agora, como deslocar estas secantes. Em $x = 5$, a secante $10\,x$... $f(5) = 25$.

Precisamos da secante de slope $10\,x$ que passa por $y = 25$.

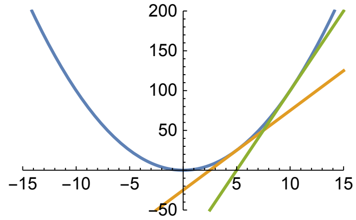
Mas a secante em $x = 5$ é 50. $50 - 25 = 25$. Na verdade é subtração de y de f pelo da secante.

$25 - 50 = -25$.

Outra... Em $x = 10$, $f(10) = 100$, $f'(10) = 200$. $100 - 200 = -100$.

In[ ]:=
```
Plot[{x^2, 10 x - 25, 20 x - 100}, {x, -15, 15},
 ImageSize → Small, PlotRange → {{-15, 15}, {-50, 200}}]
```

Out[ ]=



Agora fazer o mesmo para os diferenciais.

Silverman:

1) Havendo derivada, a derivada é onde o ratio chega a zero.

2) Se o ratio chega a zero, o ratio variável menos o ratio final (a derivada) tende a zero.

3) Os dois ratios são sobre a mesma quantidade, a diferença em X, que chega a zero. Logo, se um ratio (o da derivada) se estabiliza em um valor, o outro ratio (variável) também se estabiliza em um valor.

4) A diferença nos valores em que se estabilizam é pequena (tende a zero) por 2). (?) Logo, um é uma boa aproximação do outro.

Está errado. O diferencial não é um ratio, é uma quantidade no eixo y (imagem), assim como o incremento (Δy). A diferença entre os dois tende a zero conforme o incremento no eixo x (Δx) tende a zero.

> Nota: para cada *x*, há *uma* derivada e *um* diferencial.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{df}(x, h) = \\
&\quad f'(x) \cdot h = \\
&\quad\quad \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \cdot h = \\
&\quad\quad\quad \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot h\right) = \\
&\quad\quad\quad\quad \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y \cdot h \Delta x}{\Delta x}\right).
\end{aligned}
$$

Δy é o incremento.

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Para x^2, $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. (Estava correto.)

Para $x_0 = 5$, $\Delta y = x_1{}^2 - 25 = (x_0 + \Delta x)^2 - 25 = (5 + \Delta x)^2 - 25 = \Delta x^2$.

$$25 + 10\,\Delta x + \Delta x^2 - 25 = \Delta x^2 + 10\,\Delta x$$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1{}^2 - 25) \cdot 5}{x_1 - 5} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^2 \cdot 5}{x_0 + \Delta x - 5} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\,\Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 5\,\Delta x = 5$.

Errado. O limite apenas permite afirmar a proximidade do diferencial com a derivada. Mas ele "some" da equação do diferencial, porque é igualado a zero (?). A equação diz:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot h \Delta x}{\Delta x} = 0$.

Onde $h = x_1$. Errado. $h = \Delta x$.

Mas eu comecei do ponto errado. Reboot (Silverman).

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$$
$$\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) - f'(x) = 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} -$$

(não é para processar $f'(x)$)

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = 0$.

Agora, sim... A diferença entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e $\frac{\Delta y - f'(x)\,\Delta x}{\Delta x}$ ou melhor,
$\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y - f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta y - \Delta y + f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = \frac{f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = f'(x)$.

Mas não é esse o ponto. Porque não é a diferença absoluta entre a derivada e esta razão: a derivada é o valor/limite quando $\Delta x \to 0$, e o limite desta razão é zero. O ponto é que ambas as razões são um limite sobre ("denominador") a mesma quantidade, Δx. Sendo tal, a atenção se volta ao numerador. E aí

$\Delta y - (\Delta y - f'(x)\,\Delta x) = f'(x)\,\Delta x$, ou seja, (o numerador da) segunda razão apenas é diferente (do numerador da) derivada em $f'(x)\,\Delta x$.

Considerando que o limite da derivada conforme $\Delta x \to 0$ tende a um n e o limite da segunda razão conforme $\Delta x \to 0$ é 0, elas não são absolutamente iguais.

Mas, considerando globalmente que a diferença entre as duas é $f'(x)\,\Delta x$...

$\frac{df}{dx} = f'(x)$;

$$df = dy = f'(x)\,\Delta x.$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

A comparação é entre o incremento e o diferencial... não entre a derivada e o diferencial. Por isso, a comparação entre os numeradores... porque o numerador da derivada é o incremento.

Ou seja, eu preciso passar a visualizar não só o diferencial, mas o incremento...

Agora sim, temos uma comparação par a par, porque o incremento e o diferencial são das mesmas variáveis, x_0 e x_1.

É inclusive necessário escrever ambos em termos destas variáveis pois atribuiremos um x_0 em comum entre os dois e variaremos x_1.

$$f'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

$$df(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x_1 - x_0).$$

Para $f(x) = x^2$ e $x_0 = 5$,

$f'(x) = 2x$ e

$$df(x) = 2x \cdot (x_1 - 5).$$

Nota: o limite que tende a 0 **não** é a diferença entre a derivada e o diferencial. O diferencial **surge** desta diferença, que é entre a derivada e a derivada (?).

O diferencial é o valor da derivada multiplicado pelo deslocamento em x.

O incremento (Δy) com relação à derivada?

A derivada é $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. A razão entre os incrementos em y e x.

O **incremento** é o valor exato da mudança em y dado um Δx.

O **diferencial** é um valor aproximado da mudança em y dado o mesmo Δx.

Se sabemos a derivada e sabemos Δx, sabemos o incremento em Δx.

E o diferencial é calculado a partir da derivada, portanto ela não é prescindível.

Mas sabendo uma derivada, como calculo um incremento?

Supondo $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$.

$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, para $\Delta x = 5, 2\,x = \frac{\Delta y}{5} \Rightarrow$.

$$\Delta y = 10\,x$$

Mais rigorosamente...

$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Para $x_0 = 2$ e $x_1 = 7$,

$2\,x_0 = \frac{y_1 - y_0}{5} \Rightarrow$ ...

$$y_1 - y_0 = 10\,x_0$$

Preciso primeiro derivar x^2 com x_0 e x_1.

$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ (Limite) $= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0}$. Essa é uma boa fórmula.

Para $x_0 = 2$, $f'(2) = \lim_{x_1 \to 2} \frac{x_1^2 - 4}{x_1 - 2}$. Boas fórmulas!

Agora sim estabelecendo $x_1 = x_0 + \Delta x$,

$$f'(2) = \lim_{x_0 + \Delta x \to 2} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - 4}{(x_0 + \Delta x) - 2} =$$

$$\lim_{2 + \Delta x \to 2} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{(2 + \Delta x) - 2} =$$

O quê ocorreu aqui? A substituição de x_1 por x_0 (que é conhecido) + um valor desconhecido deixa a função apenas em função do valor desconhecido.

Por algum motivo, isso vem a eliminar/agrupar a fórmula em torno do valor desconhecido, por ele estar presente em todos os termos (não eliminados) do numerador, e no denominador.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\,\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \ .$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 4 + \Delta x =$$

$$4$$

Esse valor desconhecido é também o valor especificado no limite, reduzindo a fórmula a um número.

Mas a pergunta é... o incremento é apenas (neste caminho)

$$\Delta y = \ .$$

$$y_1 - y_0 =$$

$$f(x_1) - f(x_0)$$

Para $x_0 = 5$,

$$\Delta y = f(x_1) - f(5) = \qquad ?$$

$$f(x_1) - 25 =$$

$$f(x_0 + \Delta x) - 25 =$$

$$f(5 + \Delta x) - 25 =$$

$$(5 + \Delta x)^2 - 25 =$$

$$25 + 10\,\Delta x + \Delta x^2 - 25 =$$

$$10\,\Delta x + \Delta x^2$$

In[4]:=
```
deltay1[deltax_]:=10*deltax+deltax^2
```

In[◦]:=
```
Table[deltay1[deltax], {deltax, {2, 5, 15}}]
```
Out[◦]=
```
{24, 75, 375}
```

Esses são todos incrementos para $x_0 = 5$.

Quais são os incrementos, com mesmo Δx, para $x_0 = 9$?

$$\Delta y = \Delta y(x_0) =$$

O incremento é apenas uma função sobre x_0...

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \qquad .$$

$$f(9 + \Delta x) - f(9) =$$

$$(9 + \Delta x)^2 - 81 =$$

$$81 + 18\,\Delta x + \Delta x^2 - 81 =$$

$$18\,\Delta x + \Delta x^2$$

In[5]:=
```
deltay2[deltax_]:=18*deltax+deltax^2
```

In[◦]:=
```
Table[deltay2[deltax], {deltax, {2, 5, 15}}]
```
Out[◦]=
```
{40, 115, 495}
```

(Visualizar os incrementos)

Agora, ao invés dos incrementos, vamos calcular os diferenciais nos mesmos x_0 e para os mesmos

Δx.

Primeiro, quais foram as características do cálculo dos incrementos? Foi necessário executar a função duas vezes, uma algebricamente (realizando fatoração algébrica) e outra numericamente, para se chegar na função Δy para se executar (numericamente) para cada Δx.

1) A fórmula do diferencial, resgatar porquê ela é assim.
2) Executá-la.
3) Plotar incrementos, diferenciais, e compará-los.

Funções

Primeiro, o **incremento** é uma função de uma função, um x_0 e um x_1 (sendo $\Delta x = x_1 - x_0$, ou seja:

$\Delta f(f, x_0, x_1) = f(x_0 + (x_1 - x_0)) - f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$ ou

$\Delta f(f, x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

A **derivada** é uma função de f, x_0, o incremento, e o mesmo Δx. Ou, absolutamente,

A derivada é uma função de f, x_0, x_1, igualmente.

$$f'(f, x_0, x_1) = \frac{f(x_0+(x_1-x_0))-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

ou

$$f'(f, x_0, \Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

O **incremento** é a medida do deslocamento em y para f e x_0 e x_1.

A derivada é a razão do incremento para o deslocamento entre x_1 e x_0.

De forma similar, o “diferencial” tem um incremento?

$f'(x) \cdot \Delta x = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$?

O diferencial é só o numerador da derivada? Se for, é igual a Δy.

Piskunov, p. 114: “A derivada pode ser considerada a razão do diferencial de y com o diferencial de x”.

$\Delta y = dy + \alpha \Delta x$.

Sendo $\alpha \Delta x$ a diferença entre o incremento e o diferencial de $y = f$.

Ou seja, o diferencial não é Δy.

Tanto x quanto y têm um diferencial.

α implicando a diferença entre os dois, o que é α?

α é a diferença entre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ enquanto $\Delta x > 0$.

In[6]:=
```
Clear[fratiodeltas]
fratiodeltas[f_,x0_,x1_]:=(f[x1]-f[x0])/(x1-x0)
```

In[∘]:=
```
Table[fratiodeltas[Function[x, x^2], 2, x1], {x1, {3, 6, 11}}]
```
Out[∘]=
```
{5, 8, 13}
```

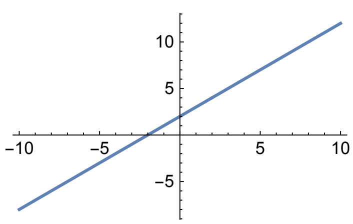
In[∘]:=
```
Limit[fratiodeltas[Function[x, x^2], 2, x1], x1 → 0]
```
Out[∘]=
```
2
```

Vemos que 5, 8 e 13 são valores da razão que tendem a 2.

In[∘]:=
```
Table[fratiodeltas[Function[x, x^2], 2, x1], {x1, {1, 0.5, 0.1, 0.0001}}]
```
Out[∘]=
```
{3, 2.5, 2.1, 2.0001}
```

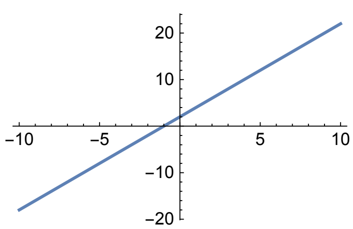
Vamos plotar esta tendência.

In[∘]:=
```
Plot[fratiodeltas[Function[x, x^2], 2, x1], {x1, -10, 10}, ImageSize → Small]
```
Out[∘]=



Obviamente, eu estou apenas plotando a derivada da função em $x_0 = 2$...

In[∘]:=
```
Plot[2 x + 2, {x, -10, 10}, ImageSize → Small]
```
Out[∘]=



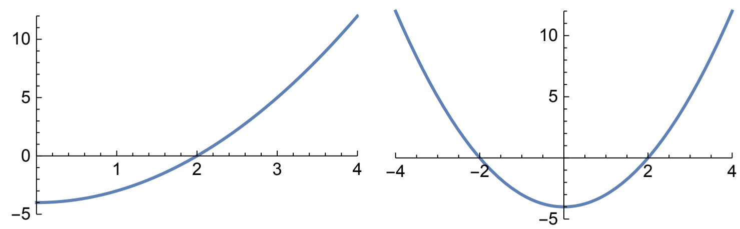
Mas uma coisa é que **infinitesimal não deveria ser uma função não-linear**?

Talvez eu esteja plotando a razão e o infinitesimal é só o numerador...

In[8]:=
```
Clear[fdeltay]
fdeltay[f_,x0_,x1_]:=f[x1]-f[x0]
```

In[ ]:=
```
Table[fdeltay[Function[x, x^2], 2, x1], {x1, {5, 3, 2.5, 2.001}}]
```
Out[ ]=
```
{21, 5, 2.25, 0.004001}
```

In[ ]:=
```
GraphicsRow[{
   Plot[fdeltay[Function[x, x^2], 2, x1],
    {x1, 0, 4}, ImageSize → Small, PlotRange → {{0, 4}, {-5, 12}}],
   Plot[fdeltay[Function[x, x^2], 2, x1], {x1, -4, 4},
    ImageSize → Small, PlotRange → {{-4, 4}, {-5, 12}}]
  }]
```
Out[ ]=



Agora sim...

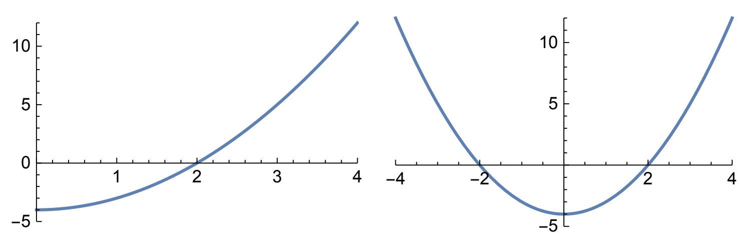
Wtf are we visualizing here? O incremento em y (Δy) conforme x_1 se aproxima de x_0.

No eixo x, conforme x_1 se aproxima de 2, Δy se aproxima de 0.

Mas o vértice da parábola não está em 2.

Esse gráfico, claro, é apenas o da função $f(x)$... Mas é “deslocada” na imagem em $x_0 = 2$... Tem um deslocamento de $f(2) = 2^2$ na imagem.

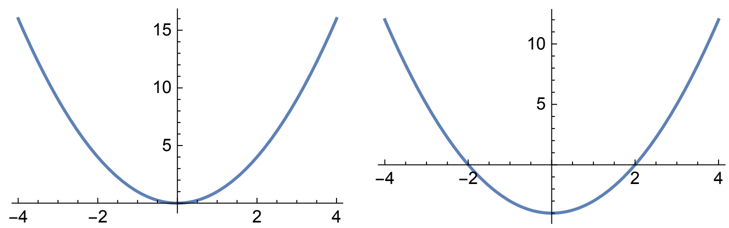
In[ ]:=
```
GraphicsRow[{
   Plot[x^2 - 4, {x, 0, 4}, ImageSize → Small, PlotRange → {{0, 4}, {-5, 12}}],
   Plot[x^2 - 4, {x, -4, 4}, ImageSize → Small, PlotRange → {{-4, 4}, {-5, 12}}]
  }]
```
Out[ ]=



Então no caso desta função deslocada ($x_0 = 2$), o incremento Δy tende a -4 conforme x_1 tende a 0.

In[ ]:=
```
GraphicsRow[{
  Plot[x^2, {x, -4, 4}, ImageSize → Small],
  Plot[fdeltay[Function[x, x^2], 2, x1], {x1, -4, 4}, ImageSize → Small]
 }]
```

Out[ ]=

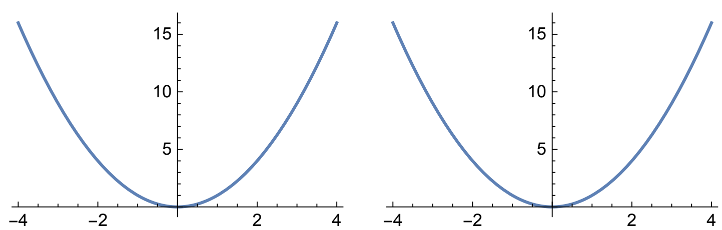


A relação entre a função e o seu incremento...

Se a função não for deslocada ($x_0 = 0$), são idênticos...

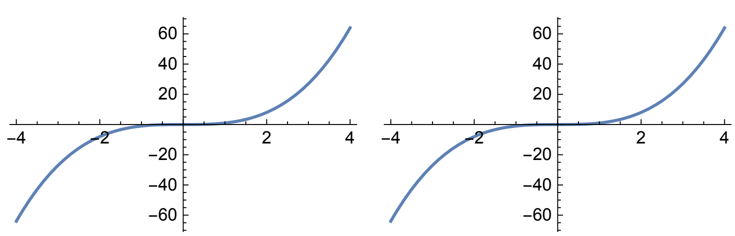
In[ ]:=
```
GraphicsRow[{
  Plot[x^2, {x, -4, 4}, ImageSize → Small],
  Plot[fdeltay[Function[x, x^2], 0, x1], {x1, -4, 4}, ImageSize → Small]
 }]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
GraphicsRow[{
  Plot[x^3, {x, -4, 4}, ImageSize → Small],
  Plot[fdeltay[Function[x, x^3], 0, x1], {x1, -4, 4}, ImageSize → Small]
 }]
```

Out[ ]=



Ou seja, o incremento **é** $y = f$ variado ao longo do domínio, **em termos relativos**: ele varia conforme varia x_0.

O que f absolutamente não faz... Δy é um **espelho** de f, deslocado em imagem por x_0.

Agora vem o diferencial de *y*.

Se $\Delta y = dy + \alpha \Delta x$,

$dy = \alpha \Delta x - \Delta y$.

O diferencial de *y* não existe.

$y = f(x)$.

$\Delta y = \Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$.

O diferencial de y é o diferencial de f (assim como a derivada é a derivada de f... mas a derivada é de y / x, e o diferencial é de y, mas y depende de x — y é como um x modificado).

O diferencial de x não existe, também (pois só existe o de f como um todo), a não ser no caso de x ser considerado como f, como veremos, para explicar dy / dx.

Apesar disso, o diferencial de f é um número, assim como f'. Mas o número da derivada expressa uma razão, e o do diferencial não diretamente, mas indiretamente, estando contido no diferencial a derivada. O diferencial é uma multiplicação arbitrária da derivada, por uma constante "que funciona" (Δx), em termos de aproximar os números.

O fato dos dois números se aproximarem é devido ao limite na definição da derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

"A derivada é o limite da razão". Por simples álgebra,

$$\Rightarrow \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) - f'(x) = 0$$

Agora a propriedade decisiva.

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)\right) = 0$$

Esta "associatividade" transforma o limite que era da derivada apenas no da equação.

Agora podemos fatorar o "limitando".

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y - f'(x)\,\Delta x}{\Delta x} = 0$$

Aqui há uma informação importante.

Ia dizer que o numerador e denominador tendem à igualdade, mas não é verdadeiro... seria se a razão tendesse a 1.

Δx tende a zero. Quando Δx "chegar a zero", ou melhor, nunca chegará, mas conforme Δx se aproxima de zero, $\Delta y - f'(x)\,\Delta x$ se aproxima do que seria, com $\Delta x = 0$, Δy. E a equação toda se aproxima de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, que "em" ou "conforme" $\Delta x \to 0$, é exatamente a derivada.

Ou seja, conforme, nesta equação, $\Delta x \to 0$, a razão tende à

derivada.
E, como a diferença entre a razão e a derivada é apenas o numerador, $\Delta y - f'(x)\,\Delta x \to \Delta y$.
Como Δy é o incremento, temos uma quantidade que tende ao incremento (no mesmo “ponto”).
Podemos dar um nome a esta quantidade, “diferencial”.
Mas ela não é derivável diretamente do incremento, nem vice-versa (não são “análogos” de “nada”).

O incremento deriva diretamente da função, x_0, e x_1.
O diferencial deriva de uma **propriedade dos limites** sobre a definição da derivada.
Ou seja, o diferencial vem **depois** da derivada. Até por isso, ele contém a derivada na sua definição.
Isso significa que o diferencial (na sua aplicação) não **evita** o cálculo da derivada.
Ele “economiza computação” de outra forma.

Vamos imaginar que precisamos calcular as tangentes, ou secantes, de uma série de pontos em uma função.
Poderemos fazer:
Em $x_0 = a, f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{x_1 - a}$.
Em $x_1 = b, f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{x_1 - b}$.
Em $x_0 = c, f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{x_1 - c}$, etc.
Mas, tendo que...

Primeiro, como conforme $\Delta x \to 0$ $\frac{dy}{\Delta x} \to \frac{\Delta y}{\Delta x}$, (além de $dy \to \Delta y$), essa outra razão também tende à derivada. Portanto é uma boa aproximação da derivada no mesmo x_0.

Tendo que $\frac{dy}{\Delta x} \to \frac{\Delta y}{\Delta x}$, podemos calcular este. Vamos olhar o que é dy.

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x.$$

O valor de dy, que é próximo a Δy... Nomenclatura completa.

$$dy = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0).$$

Para calcular a derivada, precisamos calcular uma derivada em cada x_0 ou exatamente nos pontos desejados.

Para calcular o diferencial, podemos fixar um x_0 qualquer e “sobra” a variável $\Delta x = x_1 - x_0$.

Podemos calcular a derivada para x_0 uma vez e calcular os Δx e portanto os diferenciais:

Em $x_0 = a, f'(a) = \gamma$.

Em $x_1 = b, dy = f'(a) \cdot \Delta x = \gamma \cdot (b - a)$.

Em $x_1 = c, dy = f'(b) \cdot \Delta x = \gamma \cdot (c - a)$.

Em $x_1 = d, dy = f'(c) \cdot \Delta x = \gamma \cdot (d - a)$.

Estamos calculando apenas uma subtração e multiplicação.
(Testar em plot.)

df = dy ou df = $\frac{dy}{\Delta x}$?

Já não ficou claro de novo.

O limite da subtração de duas razões é zero.
Portanto, as duas razões tendem à igualdade (no limite).
As duas razões têm denominador igual.
Isso significa que os numeradores tendem à igualdade (no limite)?
Se sim,
$\frac{dy}{\Delta x} \to \frac{\Delta y}{\Delta x}$ conforme $\Delta x \to 0$ e
$dy \to \Delta y$ conforme $\Delta x \to 0$.

Sim, mas talvez não seja essa a equivalência entre dy e Δy.
Aparentemente, há duas coisas sendo chamadas de diferencial.
Uma é uma razão, que tende à derivada.
A outra, é só o numerador, que tende ao incremento.
Aparentemente, as duas são verdade, mas qual é o diferencial?
Se o diferencial é uma multiplicação (família) da derivada, é a razão.
Se o diferencial é $f'(x) \cdot \Delta x$, é o numerador.
Agora ficou aparente... $f'(x)\,\Delta x = dy$ é família da derivada. $\frac{dy}{\Delta x}$ (a razão) não.
Mas agora a pergunta se coloca como sendo o numerador o que tende à derivada, $\frac{dy}{\Delta x} \to \frac{\Delta y}{\Delta x}$ con-

forme $\Delta x \to 0$. Isso deve ser falso, porque $dy \to \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Vou deixar essa indagação por aqui (considerando $df = dy$).

Continuando

In[10]:=
```
Clear[f1,f1der,f1points]
f1=Function[x,x^2]
f1der=Function[x,Evaluate[D[f1[x],x]]]
f1points={.5,.8,1.2,2,3.4}
```

Out[11]= Function[x, x^2]

Out[12]= Function[x, 2 x]

Out[13]= {0.5, 0.8, 1.2, 2, 3.4}

Primeiro as derivadas (translatadas)...

Primeiro os slopes em cada x_0.

In[14]:=
```
Clear[f1ders]
f1ders=Table[f1der[x0],{x0,f1points}]
```

Out[15]= {1., 1.6, 2.4, 4, 6.8}

In[ ]:= `f1der[2]`

Out[ ]= 4

Depois, as funções dos slopes (secantes).

O slope é $\frac{y}{x}$. Logo se $\frac{y}{x} = n$, $y = xn$.

Em $x = 0.5$, o slope é 1. Logo $\frac{y}{n} = 1 \Rightarrow y = n$. A função slope é $s(x) = x$.

Em $x = 0.8$, o slope é 1.6. Logo $\frac{y}{n} = 1.6 \Rightarrow y = 1.6\,n$. A função slope é $s(x) = 1.6\,x$.

In[16]:=
```
Clear[MakeSlope]
MakeSlope=Function[x,Evaluate[Function[n,n*x]]]
```

Out[17]= Function[x, Function[n, n x]]

In[181]:= `MakeSlope[2][x]`

Out[181]= 2 x

In[ ]:= `MakeSlope[f1der[2]][x]`

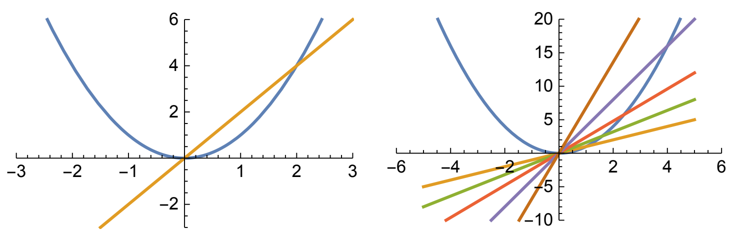
Out[ ]= 4 x

In[18]:=
```
Clear[slopefs]
slopefs=Table[MakeSlope[f][x],{f,f1ders}]
```

Out[19]=
```
{1. x, 1.6 x, 2.4 x, 4 x, 6.8 x}
```

In[∘]:=
```
GraphicsRow[{
  Plot[{x^2, 2 x}, {x, -5, 5}, PlotRange → {{-3, 3}, {-3, 6}}, ImageSize → Small],
  Plot[{x^2, slopefs}, {x, -5, 5}, PlotRange → {{-6, 6}, {-10, 20}}, ImageSize → Small]
 }]
```

Out[∘]=

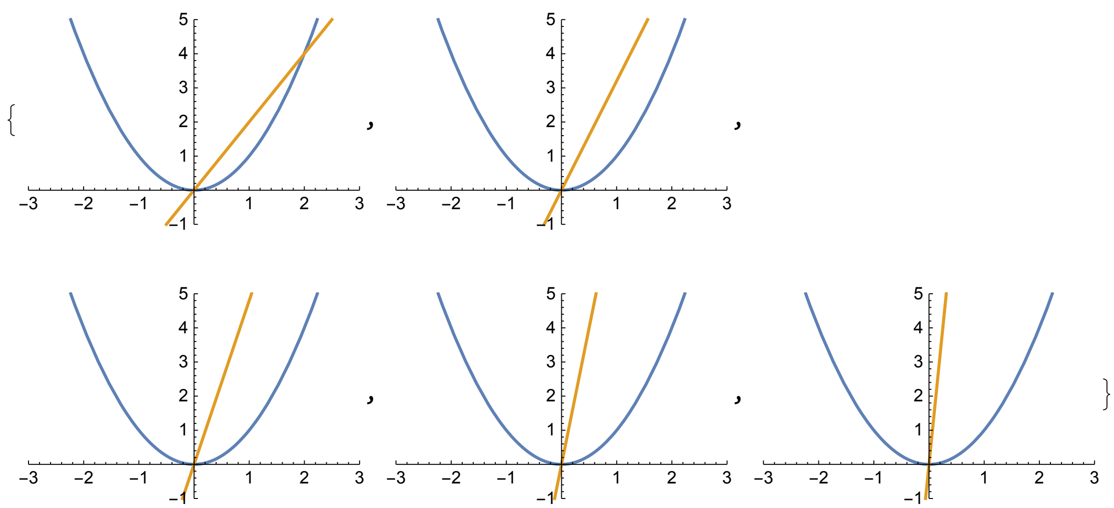


In[20]:=
```
Clear[slopes]
slopes=Table[MakeSlope[f1der[n]][x],{n,f1ders}]
```

Out[21]=
```
{2. x, 3.2 x, 4.8 x, 8 x, 13.6 x}
```

In[∘]:=
```
Table[Plot[{f1[x], tf}, {x, -5, 5},
  PlotRange → {{-3, 3}, {-1, 5}}, ImageSize → Small], {tf, slopes}]
```

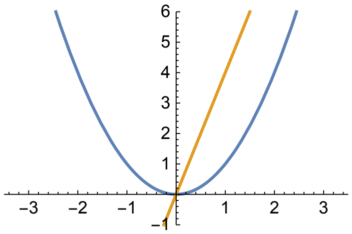
Out[∘]=



Graficamente, isto está batendo (funções slope)? Um caso bom é o $x_0 = 2$.

Em $x_0 = 2$, $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$. A função slope é $f(x) = 4\,x$.

In[ ]:=
```
Plot[{x², 4 x}, {x, -5, 5}, PlotRange → {{-3.5, 3.5}, {-1, 6}}, ImageSize → Small]
```

Out[ ]=


Parece ok.

Agora, as funções deslocadas dos slopes (tangentes).

A translação é a diferença entre o y de $f(x_0)$ e o y de $s(x_0)$, em que S é a função slope da derivada $f'(x_0)$.

Não... a translação é... Eu preciso que a reta S passe por um ponto (x, y) definido por f. x está definido e é o valor onde foi tirada a derivada (x_0). Com esse x tenho y de f, e substituo na equação de S:

Em $x_0 = 2$,

$f(2) = 2^2 = 4$.

$y / x = 4 \Rightarrow y = s = 4\,x$.

Talvez seja diferença de x naquele y.

Sabemos que $f(2) = 4$. Mas se quiser calcular x, $4 = x^2 \Rightarrow x = 2$.

Agora mesmo para S.

$4 = 4\,x \Rightarrow x = 1$.

Agora eu tenho a diferença entre o x em que a derivada (secante) está no y em que eu *quero* (tangenciar) e o $x = x_0$ em que a derivada *foi tomada*.

É só deslocar a derivada (secante) por esta diferença.

A diferença está em x; é preciso converter x em y em termos de S para saber a diferença em y, que é o que será somado a S (pois somamos à variável independente).

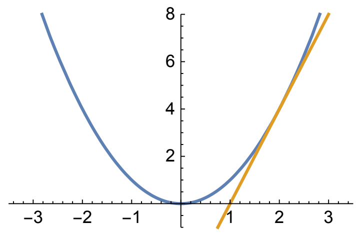
$\Delta x = 2 - 1 = -1$.

$s(-1) = 4 \cdot -1 = -4.$

$t(x) = 4\,x - 4.$

In[∘]:=
```
Plot[{x², 4 x - 4}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-3.5, 3.5}, {-1, 8}}, ImageSize → Small]
```

Out[∘]=



Suscita a pergunta... não é possível verificar diretamente a diferença em y?

Em $x_0 = 2$,

$f(2) = 2^2 = 4.$

$y / x = 4 \Rightarrow y = s = 4\,x.$

Agora, y em s é $s(2) = 8.$

Vamos apenas deslocar a imagem de s por essa diferença.

$\Delta y = 4 - 8 = -4.$

$= f(x_0) - s(x_0)$

Agora vamos fazer este cálculo sumariamente.

Em $x_0 = 2$,

$f'(2) = 4,$

$s = 4\,x,$

$f(2) - s(2) = 4 - 8 = -4,$

$t = s + -4 = 4\,x - 4.$

Em $x_0 = 3.4$,

$f'(3.4) = 6.8,$

$s = 6.8\,x,$

$f(3.4) - s(3.4) = 11.56 - 23.12 = -11.56,$

$t = s + -11.56 = 6.8\,x - 11.56.$

In[∘]:= 6.8 * 3.4

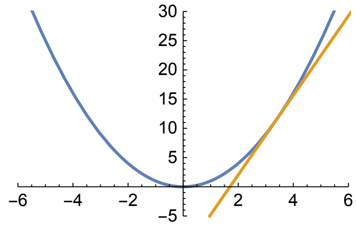
Out[∘]= 23.12

In[∘]:= 11.56 - 23.12

Out[∘]= -11.56

In[∘]:= Plot[{x^2, 6.8 x - 11.56}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-6, 6}, {-5, 30}}, ImageSize → Small]

Out[∘]=



In[22]:=

```
f1der
Clear[f1x0,f1x0s,f1x0ydif,f1x0t]
f1x0=3.4
f1der[f1x0]
f1x0s=MakeSlope[f1der[f1x0]];
f1x0s[x]
f1x0ydif=f1[f1x0]-f1x0s[f1x0]
f1x0t=f1x0s[x]+f1x0ydif
```

Out[22]= Function[x, 2 x]

Out[24]= 3.4

Out[25]= 6.8

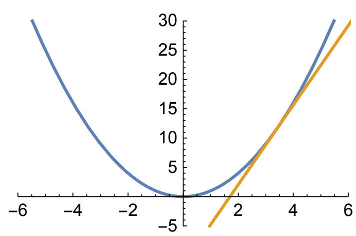
Out[27]= 6.8 x

Out[28]= -11.56

Out[29]= -11.56 + 6.8 x

In[∘]:= Plot[{f1[x], f1x0t}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-6, 6}, {-5, 30}}, ImageSize → Small]

Out[∘]=



In[30]:=

```
Clear[GetTangent]
GetTangent[f_,x0_]=Module[{fder,der,s,ydif,t},
     fder=Function[x,Evaluate[D[f[x],x]]];
     der=fder[x0];
     s=MakeSlope[der];
     ydif=f[x0]-s[x0];
     t=s[x]+ydif;
     t
];
```

In[∘]:=

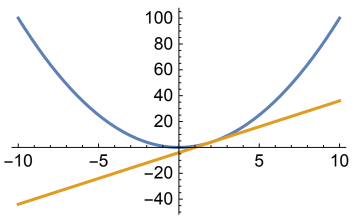
```
Clear[f1x0t]
f1x0t = GetTangent[Function[x, x^2], 2]
```

Out[∘]= $-4 + 4\,x$

In[∘]:=

```
Plot[{x^2, f1x0t}, {x, -10, 10}, ImageSize → Small]
```

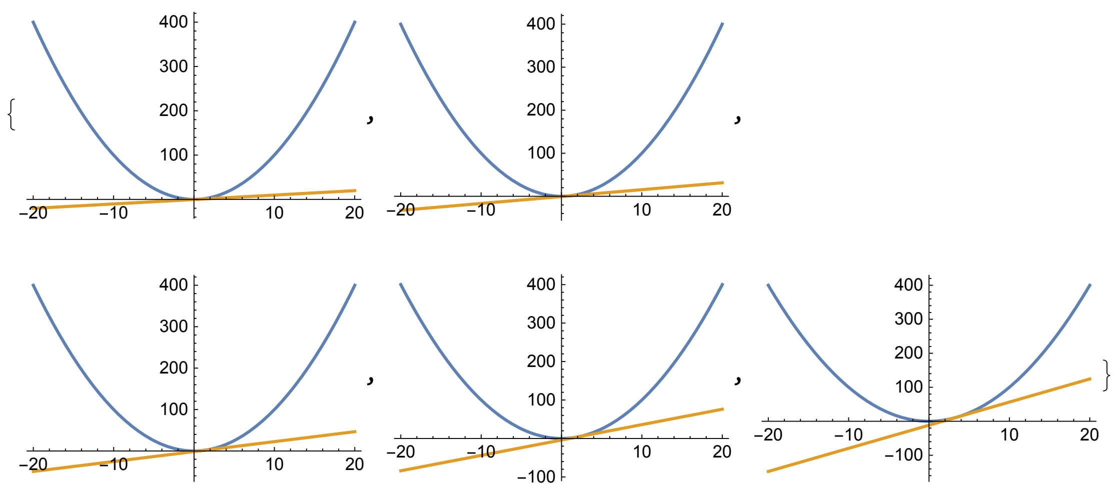
Out[∘]=



In[∘]:=

```
Table[Plot[{f1[x], GetTangent[f1, x0]}, {x, -20, 20}, ImageSize → Small], {x0, f1points}]
```

Out[∘]=



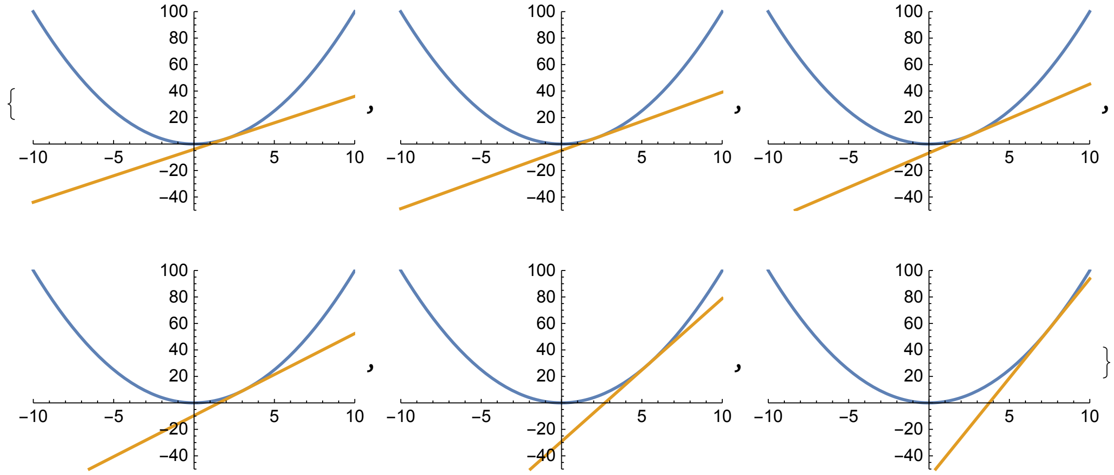
In[∘]:=

```
GetTangent[Function[x, x^2], γ]
```

Out[∘]= $2\,x\,\gamma - \gamma^2$

In[ ]:=
```
Table[Plot[{f1[x], GetTangent[f1, x0]}, {x, -10, 10}, ImageSize → Small,
  PlotRange → {{-10, 10}, {-50, 100}}], {x0, {2, 2.2, 2.6, 3.1, 5.4, 7.5}}]
```

Out[ ]=



Agora os diferenciais.

Estamos tomando as derivadas em diversos x_0 (executando a função GetTangent(), que é a 'computação'). Agora iremos fixar **um** x_0, tomar a derivada e calcular os diferenciais com Δx em função deste x_0.

Em $x_0 = 2, f'(2) = 4$.

O diferencial está definido como $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Para $x_1 = 2, dy = 4 \cdot (2 - 2) = 0$. (?)

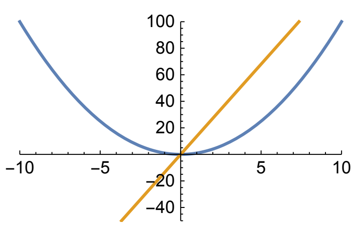
Para $x_1 = 5.4, dy = 4 \cdot (5.4 - 2) = 13.6$.

In[ ]:=
```
4 * (5.4 - 2)
```

Out[ ]=
```
13.6
```

In[ ]:=
```
Plot[{x^2, 13.6 x}, {x, -10, 10}, ImageSize → Small, PlotRange → {{-10, 10}, {-50, 100}}]
```

Out[ ]=



O diferencial tem de ser deslocado assim como a derivada! (?)

Vamos chamar o diferencial "secante" de ds e o diferencial "tangente" de ts.

Em $ds = 13.6x, y = ds(5.4) = 73.44$.

$f(5.4) = 29.16.$

$f(x_0) - \text{ds}(x_0) = -44.28.$

Então iremos deslocar verticalmente o diferencial por isto.

In[∘]:= **5.4 * 13.6**

Out[∘]= 73.44

In[∘]:= **5.4^2**

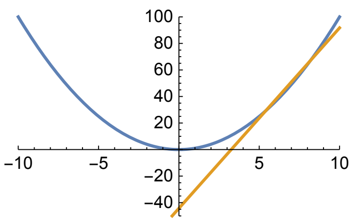
Out[∘]= 29.16

In[∘]:= **29.16 - 73.44**

Out[∘]= -44.28

In[∘]:=
```
Plot[{x^2, 13.6 x - 44.28}, {x, -10, 10},
 ImageSize → Small, PlotRange → {{-10, 10}, {-50, 100}}]
```

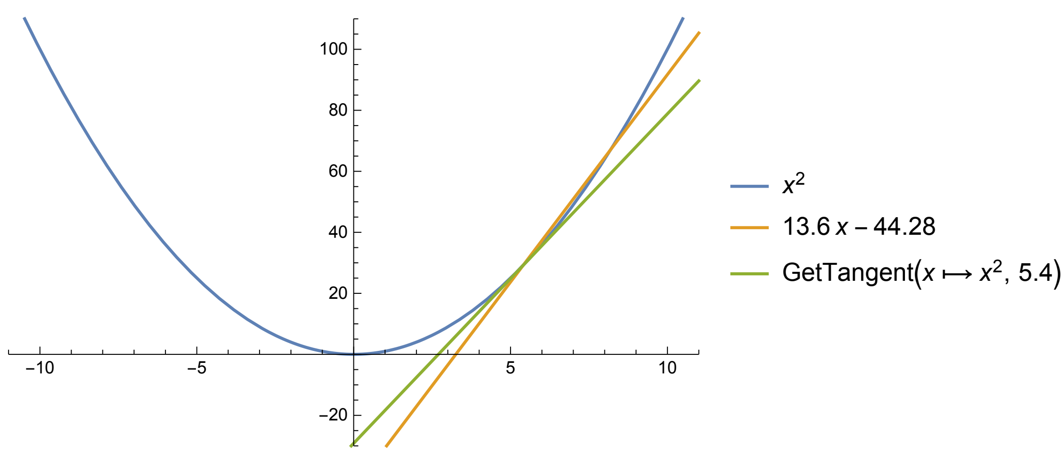
Out[∘]=



Seems it worked?

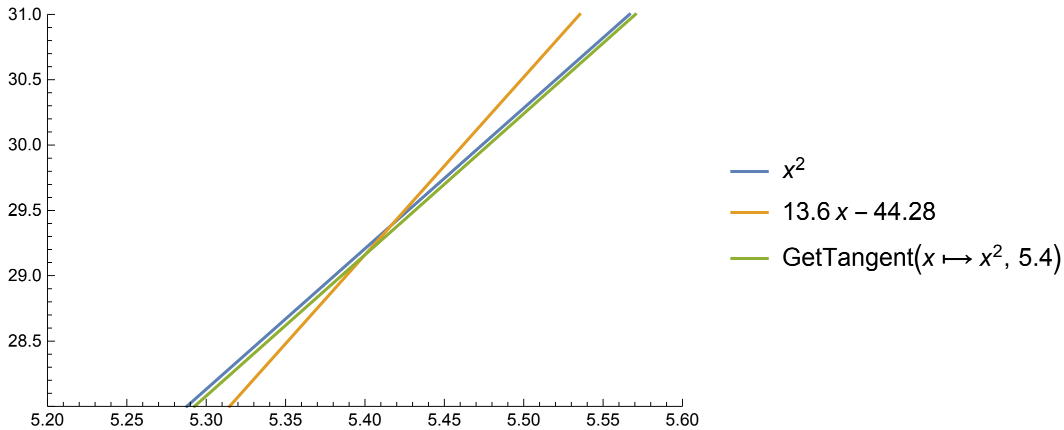
In[∘]:=
```
Plot[{x^2, 13.6 x - 44.28, GetTangent[Function[x, x^2], 5.4]}, {x, -11, 11},
 ImageSize → Medium, PlotRange → {{-11, 11}, {-30, 110}}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[∘]=



In[•]:=
```
Plot[{x^2, 13.6 x - 44.28, GetTangent[Function[x, x^2], 5.4]}, {x, -11, 11},
 ImageSize → Medium, PlotRange → {{5.2, 5.6}, {28, 31}}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[•]=



Parece que sim pois se cruzam em X_0.

E, agora, para outro X_1 (ainda na mesma derivada)...

Para $x_1 = 2.2$, $\mathrm{dy} = 4 \cdot (2.2 - 2) = 0.8$.

$\mathrm{ds}(2.2) = 0.8\,x$.

$f(2.2) - \mathrm{ds}(2.2) = 3.08$.

$\mathrm{dt}(2.2) = 0.8\,x + 3.08$.

In[•]:=
```
4 * (2.2 - 2)
```

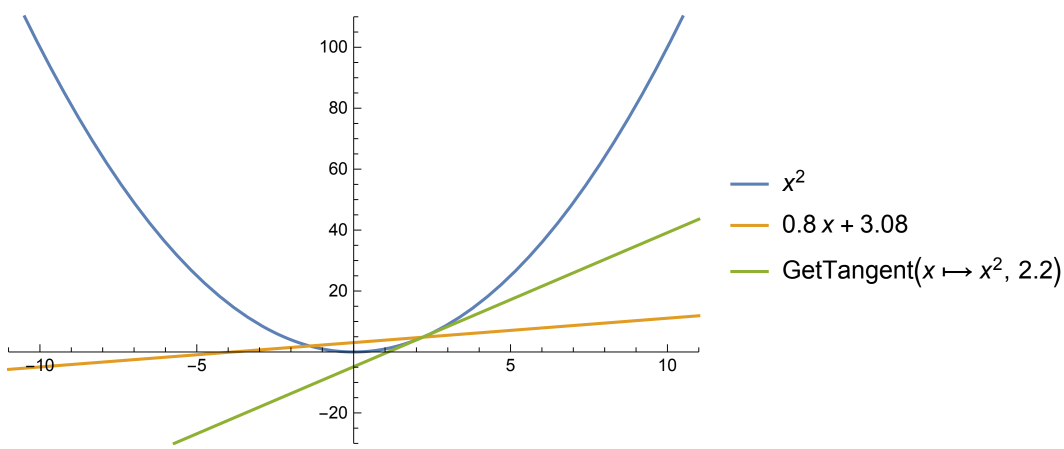
Out[•]= 0.8

In[•]:=
```
(2.2^2) - (0.8 * 2.2)
```

Out[•]= 3.08

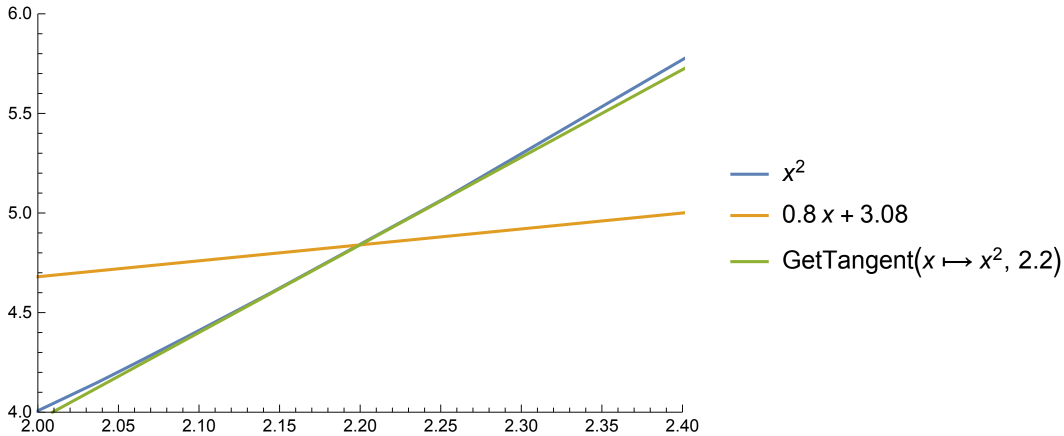
In[•]:=
```
Plot[{x^2, 0.8 x + 3.08, GetTangent[Function[x, x^2], 2.2]}, {x, -11, 11},
 ImageSize → Medium, PlotRange → {{-11, 11}, {-30, 110}}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[•]=



In[◦]:=
```
Plot[{x², 0.8 x + 3.08, GetTangent[Function[x, x²], 2.2]}, {x, -11, 11},
 ImageSize → Medium, PlotRange → {{2.0, 2.4}, {4, 6}}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[◦]=



Podemos ver que a derivada e o diferencial **não** se cruzam em x_0.

E, este diferencial está muito diferente da derivada.

Se, por exemplo, eu tomasse a derivada em $x_0 = 3$ e Δx fosse 2.4 ($x_1 = 5.4$), o diferencial seria igual?

$$f'(3) = 6\,x.$$

$$ds = 6\,x \cdot 2.4 = 14.4\,x.$$

In[◦]:=
```
6 * 2.4
```

Out[◦]=
```
14.4
```

Não. São curvas diferentes, e apenas estou tangenciado no mesmo ponto, curvas arbitrárias.

A minha dúvida (que me fez pensar em diferencial "relativo" e não "fixado" em x_0) era como tomaríamos o diferencial, se ele é infinitesimalmente pequeno conforme $\Delta x \to 0$. Isso significa que não poderíamos tomar $\Delta x = 0$, o que faríamos, tomaríamos um Δx arbitrariamente pequeno? (Eu odiaria este arbítrio.)

Acontece que sim. O diferencial é tomado em um x_0 (igual ao da derivada) e multiplica a derivada por um Δx arbitrariamente pequeno.

Portanto, em $x_0 = 2.2$, $dy = 4.4 \cdot 0.1 =$...

O diferencial não substitui a derivada. Substitui o **incremento**.

Feita a substituição, podemos dividir o diferencial (assim como o incremento) por Δx e obter o slope?

Em $x_0 = 2.2$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = ...$

Ah, entendi. Para **a derivada**, também, um Δx arbitrariamente pequeno é tomado (para comparar com o diferencial).

Os dois valores ficam **aproximados** do slope "real" da derivada.

Em $x_0 = 2.2$ e com $\Delta x = 0.1$,

$\Delta y = f(2.2 + 0.1) - f(2.2) = 0.45$.

$dy = f'(2.2) \cdot 0.1 = 0.44$.

In[ ]:=
```
f1[2.3] - f1[2.2]
```
Out[ ]= 0.45

In[ ]:=
```
4.4 * 0.1
```
Out[ ]= 0.44

Temos agora os slopes?

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4.5$.

$\frac{dy}{\Delta x} = 4.4$.

E a derivada "real" em $x_0 = 2.2$ é $2\,x(2.2) = 4.4$. Igual ao diferencial e diferente da derivada "aproximada".

Estranho que o diferencial não devia ser **igual**, porque $\Delta x \neq 0$.

Vamos tomar alguns diferenciais de x^2.

In[32]:=
```
Clear[incr]
incr=Function[{f,x0,x1},f[x1]-f[x0]];
incr[Function[x,x^2],2,x1]
```
Out[34]= $-4 + x1^2$

In[35]:=
```
Clear[incrratio]
incrratio=Function[{f,x0,x1}, incr[f,x0,x1]/(x1-x0)];
incrratio[Function[x,x^2],2.2,2.3]
```
Out[37]= 4.5

In[38]:=
```
Clear[deriv]
deriv=Function[{f,x0},Limit[incrratio[f,x0,x1],x1→x0]];
deriv[Function[x,x^2],10]
```

Out[40]= 20

In[∘]:=
```
deriv[Function[x, x^2], 2.2]
```

Out[∘]= 4.4

Foi estranho que o slope do diferencial

$$dy = f'(2.2) \cdot 0.1 = 0.44 \Rightarrow$$

$$ds = 0.44 / 0.1 = 4.44$$

ficou igual à derivada

$$2\,x(2.2) = 4.4.$$

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x =$$

$$2\,x(2.2) \cdot 0.1 =$$

$$4.4 \cdot 0.1 = 0.44 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{\Delta x} = \frac{0.44}{0.1} = 4.4$$

Mas vamos primeiro montar a função do diferencial.

In[41]:=
```
Clear[difer]
difer=Function[{f,x0,deltax},deriv[f,x0]*deltax];
```

In[∘]:=
```
Table[difer[Function[x, x^2], 2.2, deltax], {deltax, {0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1}}]
```

Out[∘]= {0.00044, 0.0044, 0.044, 0.44, 4.4}

In[43]:=
```
Clear[diferratio]
diferratio=Function[{f,x0,deltax}, difer[f,x0,deltax]/deltax];
```

In[∘]:=
```
Table[diferratio[Function[x, x^2], 2.2, deltax], {deltax, {0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1}}]
```

Out[∘]= {4.4, 4.4, 4.4, 4.4, 4.4}

Todos os ratios dos diferenciais são iguais à derivada. Why the f*?

Claro... porque estou multiplicando (no diferencial) por Δx e depois dividindo por ele mesmo. Sobra só a derivada, ridículo.

Mas isso não deveria funcionar?

Bom... disto vemos que, como o ratio do diferencial é igual à derivada, $\frac{dy}{\Delta x} = f'$. Daí a nomenclatura, mas não só por isso... Porque também o diferencial de x como $f(x) = x$ é

$f'(x) = 1 \Rightarrow dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.

Como $dx = \Delta x$,

$\frac{dy}{\Delta x} = f' = \frac{dy}{dx}$. (Resta ver a ressalva citada no Piskunov.)

O ratio do diferencial é igual à derivada porque como ele é um multiplicador por Δx e o ratio um divisor por Δx eles se anulam **mas** não deveria ser estranhado isso porque o diferencial deriva da derivada, ele "sabe quem a derivada é".

O que estou tentando fazer é obter o **slope** do diferencial. Como na derivada ele é a razão (instantânea), no diferencial... se o slope do diferencial (calculado) é igual à derivada, ambos não podem ser a mesma linha. Portanto (por lógica), a razão do diferencial **não é** o seu slope.

O slope do diferencial é **só o diferencial**, que entrega a linha proposta. $\frac{dy}{\Delta x}$ perde o significado de slope. Mas... $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ **é** o slope da derivada. E $\frac{dy}{dx} = f' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x}$? Um não é slope e o outro é.

Se $\frac{dy}{dx}$ **é** a derivada, que é um slope, e é também $\frac{dy}{\Delta x}$, que é a razão do diferencial, que **não** é um slope, qual está correto? Que $\frac{dy}{dx}$ é $\frac{dy}{\Delta x}$ está certo. Logo, ou é falso que $\frac{dy}{dx}$ é um slope, ou é falso que $\frac{dy}{\Delta x}$ não é um slope. Que $\frac{dy}{dx}$ é um slope é verdade, logo é falso que $\frac{dy}{\Delta x}$ não é um slope. Mas... é falso mesmo, porque $\frac{dy}{\Delta x}$ é (igual à) derivada, que é um slope. Então de onde eu tirei que $\frac{dy}{\Delta x}$ não era um slope?

Eu tirei que "se o slope do diferencial é igual à derivada, ambos não podem ser a mesma linha". "Portanto a razão do diferencial não é seu slope". Dizer isso diz que a razão do diferencial é igual à derivada. O que é verdade.

Mas se o slope do diferencial (calculado) é igual à derivada, eles *são* a mesma linha. Portanto, o slope do diferencial *não* pode ser igual à derivada. Isso implica que suas razões são diferentes.

Mas a razão do diferencial é dy, e a da derivada, $\frac{dy}{\Delta x}$. Portanto eles *são* diferentes.

Mas se eles são diferentes, como $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\Delta x}$? Se isso for verdade, $\frac{dy}{dx} = dy$.

Há alguma falsidade na afirmação $\frac{dy}{dx} = f' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{\Delta x}$. (Tudo isso começou quando estabelecemos $\frac{dy}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$.)

Anyways, agora podemos plotar os diferenciais.

Aliás, diferenciais não são ou têm razões. Nem são slopes, linhas, ou podem ser plotados como tal. O “número” que resulta da computação do diferencial em um X_0 **NÃO** é uma linha. Esse número aproxima o incremento Δy, não a derivada $f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

É claro que há uma linha para este incremento, mas ela **não** é o diferencial, e eu não sei como defini-la.

Piskunov, p. 118: O “incremento” é a mudança em *y* para um Δx. O diferencial é também uma mudança em *y* para um Δx, mas de outra função: a tangente/secante/derivada em x_0 (por isso ele é o numerador da derivada — a derivada é uma relação — razão — entre seu próprio *y* e *x* e o diferencial é a mudança neste *y*). O incremento é a mudança na própria função, outro na sua derivada. Em x_0 (a “origem”), os dois são iguais. Conforme se distanciam (Δx aumenta), diferem. A diferença passa a ser o “erro”.

Em um dado x_0, é possível tomar a derivada; mas também é possível, já tendo a derivada naquele ponto, “aproximar” x_1 de x_0, sem alcançá-lo; obtendo um valor próximo. (E porque eu faria isso — ao invés de calcular a derivada?)

Isso parece ter a ver com... como garantimos que em um dado X_0 (diferenciável) a função e sua derivada têm mesmo slope? Garantimos porque a derivada em um X_0 **é** o slope da função.

A derivada é a “permanência” da taxa de mudança de uma função em um ponto, na forma de uma reta (falando em duas dimensões) (por isso a Hallet chama de “linearização”). A função, porém, segue seu caminho e ele diverge da derivada arbitrariamente (pode voltar a tangenciar a derivada por coincidência).

O diferencial é o quanto esta “tendência” local a X_0 é manifesta em qualquer X_1; ou seja, continuar na reta, por isso apenas multiplicando a mudança em y que ocorreu em X_0 pelo o quanto queremos andar em X_0.

Deste ponto, temos uma diferença arbitrária com em quanto a função f está em x_1; a diferença é o "erro". A única coisa que sabemos é o que o erro tende a zero conforme x_1 tende a x_0. (Em outras palavras, o erro é o quanto a função está divergindo de sua derivada tomada em um ponto.)

O "ratio" do diferencial não funciona porque o seu denominador é "fantasma", porque o numerador também contém o denominador: é redundante dizer que o diferencial é $\frac{dy}{\Delta x}$, porque dy contém Δx.

A notação $\frac{dy}{dx}$ vem de $f'(x) = \frac{f'(x) \cdot \Delta x}{\Delta x}$. É um jeito alternativo (a $f'(x)$) de denotar a derivada, sem perder a explicitação da variável independente. **Mas, ao contrário da primeira notação, essa tem a propriedade que ela explicita "os" diferenciais envolvidos ("os" porque o do denominador é "virtual").**

Bom, então em x^2, em:

$$x_0 = 2, f'(2) = 4, \mathrm{sd}(x) = 4\,x, dy = 4 \cdot \Delta x.$$

Expressando de outra forma, em $x_0 = 2$ a função x^2 segue na direção $4\,x$ (ou com uma razão instantânea de 4). Em se tratando do cálculo do diferencial, podemos abandonar a notação x_0 e Δx, pois Δx será atribuído. Temos x_n com n inicial em 1.

Em $x_1 = 2$, com $y = 4$, x^2 segue para $4\,x$. Em $x_2 = 3$, por exemplo, x^2 já está em $3^2 = 9$ (a diferença de y entre x_1 e x_2 foi de $9 - 4 = 5$ — que é o incremento).

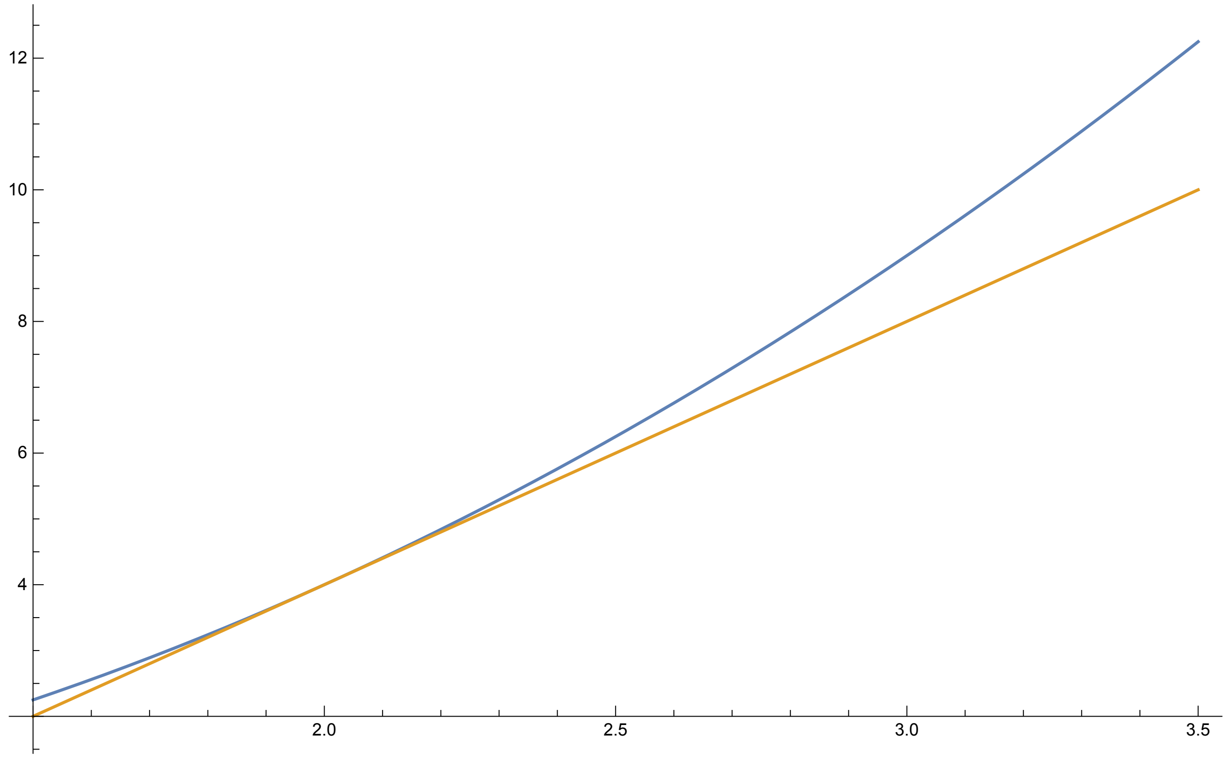
Porém entre x_1 e x_2, o y da derivada (que é $4\,x \cdot 3 = 12$ em x_2) variou $12 - 4 = 8$ — o diferencial. (Poderíamos chamar de incremento de f e incremento de f'.) Portanto temos um erro de 3.

Não está batendo (no gráfico) porque acima está a secante; a tangente em x_1 deve ser deslocada em $f(x) - f'(x) = 4 - 8 = -4$, o que resulta na tangente $4\,x - 4$.

Então a diferença em y da tangente (o diferencial) foi em $t(3) - t(2) = 8 - 4 = 4$. Logo o erro em x_2 (que é zero em x_1) é $5 - 4 = 1$.

In[∘]:=
```
Clear[f];
f = Function[x, x^2];
Plot[{f[x], GetTangent[f, 2]}, {x, 1.5, 3.5}, ImageSize → Full, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[∘]=



Ver o que ocorre agora em $x_3 = x_1 + 0.1$.

Em $x_3 = 2.1$, o diferencial será $4 \cdot 0.1 = 0.4$ (não é $4\,x \cdot 0.1$, a função secante, é $4 \cdot 0.1$, a derivada slope). Novamente, o diferencial não é a linha, é o incremento. Em $x = 3$, o diferencial é $4 \cdot 1 = 4$.

In[∘]:=
```
GetTangent[Function[x, x^2], 2]
```

Out[∘]= $-4 + 4\,x$

Mas estou perdendo o ponto da **aplicação** do diferencial. O ponto é “reduzir a computação” tomando o incremento da derivada em um ponto próximo do desejado **onde se tiraria a derivada exata**. Vamos supor, $x = 3$ e um $\Delta x = 0.1$.

O limite diz que a diferença entre o incremento da função em $x = 3$ com $\Delta x = 0.1$ e o incremento da derivada em $x = 3$ com $\Delta x = 0.1$ será um infinitesimal. E realmente, nada a ver, é só a diferença do incremento entre a função e a derivada, que obviamente convergem no mesmo x.

Bem, o incremento da função é $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$... ***não vou nem usar essa “maldita”***

fórmula. Em $x = 3.1$, $y = 3.1^2 = 9.61$. Em $x = 3$, $y = 9$. O incremento foi de 0.61.

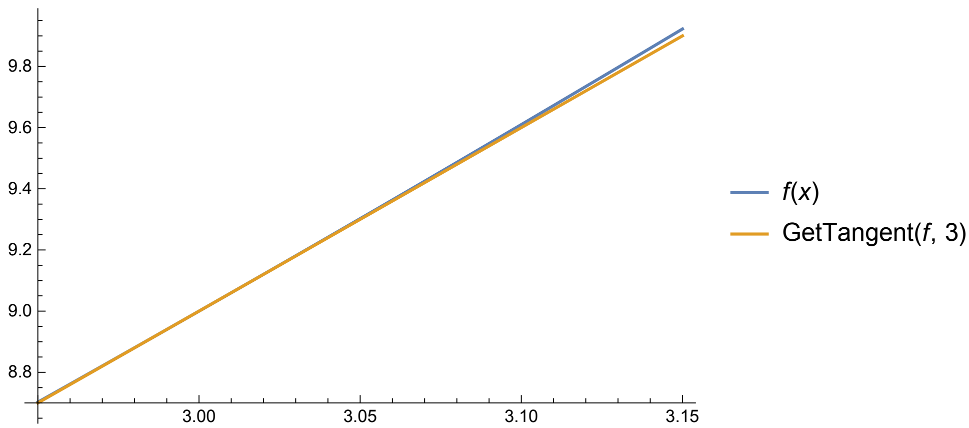
Já a derivada (slope) em $x = 3$ é $2\,x(3) = 6$. Isso significa que sua função secante é $s(x) = 6\,x$.

Esta secante está em qualquer abscissa x, o incremento é independente disto. O incremento de $6\,x$

(obviamente em $\Delta x = 0$ é 0) em $\Delta x = 0.1$ é... ***também não vamos usar a fórmula do incremento***. Em $x = 3.1$, $y = 6\,x(3.1) = 18.6$. Em $x = 3$, $y = 18$, o incremento é 0.6.

In[∘]:=
```
3.1^2
```
Out[∘]=
```
9.61
```

In[∘]:=
```
Clear[f];
f = Function[x, x^2];
Plot[{f[x], GetTangent[f, 3]}, {x, 2.95, 3.15},
 ImageSize → Medium, PlotLegends → "Expressions"]
```
Out[∘]=



Está certinho. Vamos ver alguns incrementos (de f').

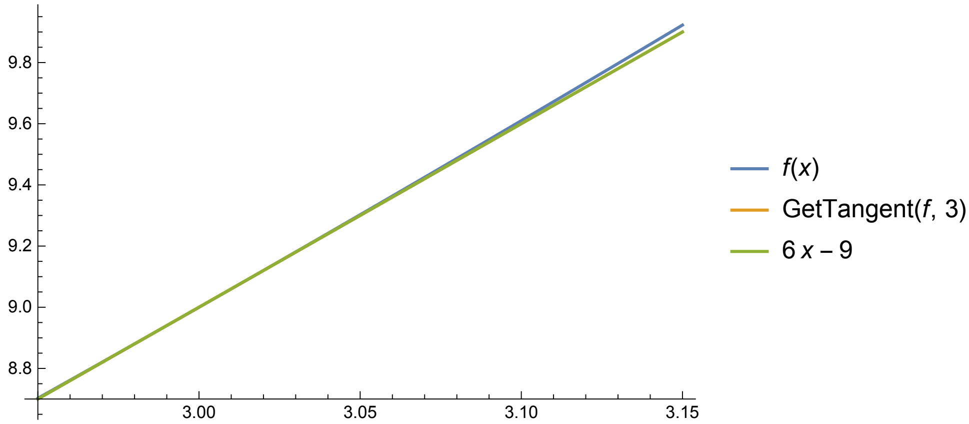
In[∘]:=
```
Table[Function[{x0, deltax}, 6 * (x0 + deltax) - 6 * x0][3, deltax],
 {deltax, {0, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1}}]
```
Out[∘]=
```
{0, 0.0006, 0.006, 0.06, 0.6, 6}
```
Out[∘]=
```
3.5
```

Para “plotar” o diferencial , é preciso reconstituir sua reta. Ela tangencia em $x_0 = 3$.

Aqui, a secante é $6\,x$. Em $x = 3$, $y = 18$. A função f, em $x = 3$, tem $y = 9$. Vamos acrescentar -9 à secante: $6\,x - 9$.

In[∘]:=
```
Clear[f];
f = Function[x, x^2];
Plot[{f[x], GetTangent[f, 3], 6 x - 9},
 {x, 2.95, 3.15}, ImageSize → Medium, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[∘]=



Vamos ver algumas diferenças entre incrementos de f e f'.

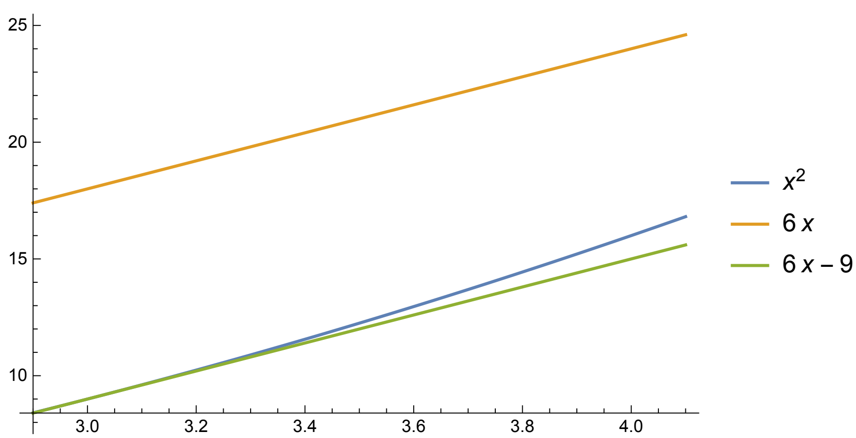
In[∘]:=
```
Table[Function[{x0, deltax}, ((x0 + deltax)^2 - x0^2) - (6 * (x0 + deltax) - 6 * x0)][3, deltax],
 {deltax, {0, 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1, 1}}]
```

Out[∘]= $\{0, 1. \times 10^{-8}, 1. \times 10^{-6}, 0.0001, 0.01, 1\}$

De acordo com esta tabela, a diferença entre $X = \{3, 4\}$ nos incrementos é de 1.

In[∘]:=
```
Clear[f];
f = Function[x, x^2];
Plot[{x^2, 6 x, 6 x - 9}, {x, 2.9, 4.1}, ImageSize → Medium, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[∘]=



In[∘]:= (16 - 9) - (15 - 9)

Out[∘]= 1

O incremento da derivada é independente do tangenciamento portanto devia bater.

O quê está errado? Em $X_0 = 3, f(3) = 9; f(4) = 16. \Delta y = 7.$

$f'(3) = 6.\ s3 = 6\,x.\ s3(3) = 18;\ s3(4) = 24.\ dy = 6.$

$7 - 6 = 1$. É o **gráfico** que não bate. E eu que tinha “medido com os olhos” errado.

Plotar o diferencial não é apenas plotar a derivada: apenas porque o diferencial usa um Δx (mas ele é essa derivada com esse Δx). Logo plotar a comparação da derivada com o diferencial (que **são** diferentes) é plotar duas derivadas, uma com Δx no limite em 0, e outra com $\Delta x > 0$. (É uma derivada e uma razão.)

Plotar o diferencial **é** plotar a derivada, porque ele é o(s) incremento(s) da derivada. Tomar um incremento destes $\neq 0$ e tomar seu $\Delta x \neq 0$ e **montar o ratio**, ou seja, o slope de uma nova reta, é plotar a “nova reta montada a partir do diferencial”, que **não é** o diferencial. Essa reta é como a derivada, uma razão/slope, mas tomada com uma diferença; enquanto que a derivada é tomada sem diferença.

```
In[∘]:= deriv
Out[∘]= Function[{f, x0}, Limit[incrratio[f, x0, x1], x1 -> x0]]

In[∘]:= incr
Out[∘]= Function[{f, x0, x1}, f[x1] - f[x0]]

In[∘]:= incrratio
Out[∘]= Function[{f, x0, x1}, incr[f, x0, x1] / (x1 - x0)]

In[∘]:= deriv[Function[x, x^2], 3]
Out[∘]= 6

In[∘]:= MakeSlope[6][x]
Out[∘]= 6 x
```

Out[∘]= $\text{Function}\left[\{f, x0\}, \lim\limits_{x1\to x0} \text{incrratio}[f, x0, x1]\right]$

Out[∘]= $\text{Function}\left[\{f, x0, x1\}, \dfrac{\text{incr}[f, x0, x1]}{x1 - x0}\right]$

Ou seja (passos):

1) Calcular a derivada em um x_0.

2) Tangenciar e plotar a derivada.

3) Tomar um $\Delta x \neq 0$.

4) Calcular um novo ratio do incremento em y de f sobre o incremento em x de f; mas agora sem o

incremento tender a zero, mas sim ser sobre o intervalo Δx.

5) Tangenciar este slope em $y = f(x_0)$.

6) Plotar esta tangente.

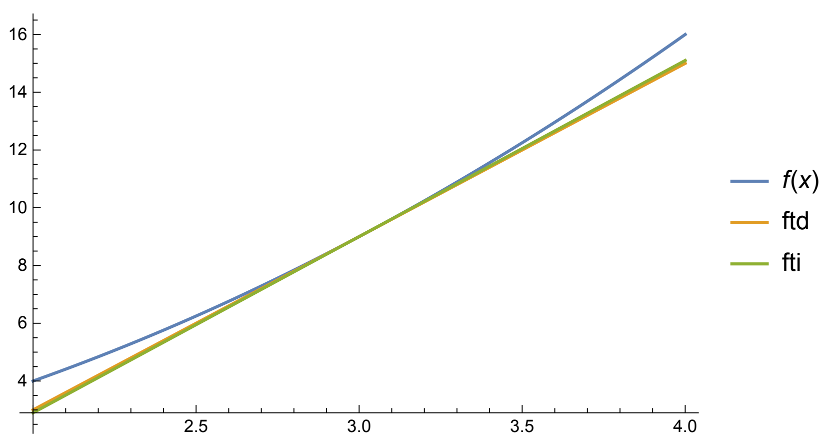
In[45]:=
```
incrratio[Function[x, x^2], 3, 0.1]
```
Out[45]= 3.1

Podemos fazer uma GetTangent mais geral; passando qual incremento.

In[405]:=
```
Clear[GetAnyTangent]
GetAnyTangent[f_,fsec_,x0_]=Module[{s,ydif,t},
    s=MakeSlope[fsec];
    ydif=f[x0]-s[x0];
    t=s[x]+ydif;
    t
];
```

In[431]:=
```
Clear[f, ftd, fti];
f = Function[x, x^2];
ftd = GetAnyTangent[f, f'[3], 3]
fti = GetAnyTangent[f, incrratio[f, f'[3], 0.1], 3]
```
Out[433]= $-9 + 6\,x$

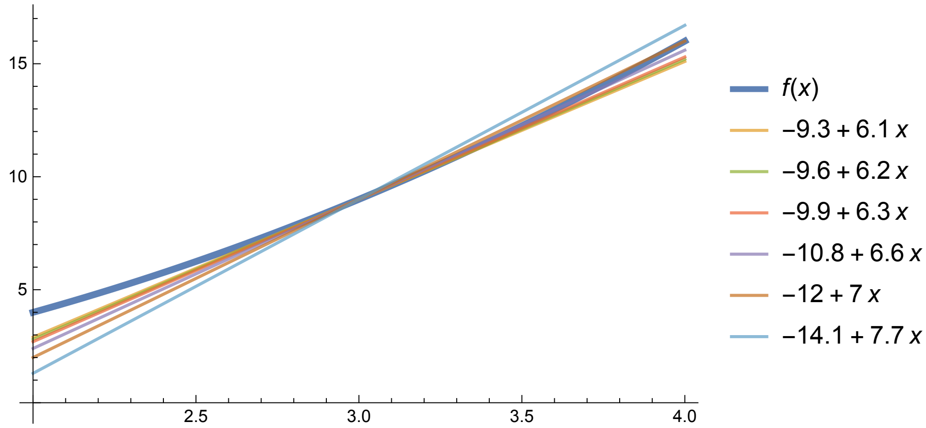
Out[434]= $-9.3 + 6.1\,x$

In[435]:=
```
Plot[{f[x], ftd, fti}, {x, 2, 4}, PlotLegends → "Expressions"]
```
Out[435]=


In[446]:=
```
Clear[if1]
if1 = Table[GetAnyTangent[f, incrratio[f, f'[3], i], 3], {i, {0.1, 0.2, 0.3, 0.6, 1, 1.7}}]
```
Out[447]= {$-9.3 + 6.1\,x$, $-9.6 + 6.2\,x$, $-9.9 + 6.3\,x$, $-10.8 + 6.6\,x$, $-12 + 7\,x$, $-14.1 + 7.7\,x$}

In[450]:=
```
Plot[{f[x], if1}, {x, 2, 4},
 PlotLegends → "Expressions", PlotStyle → Prepend[Table[s, 100], m]]
```

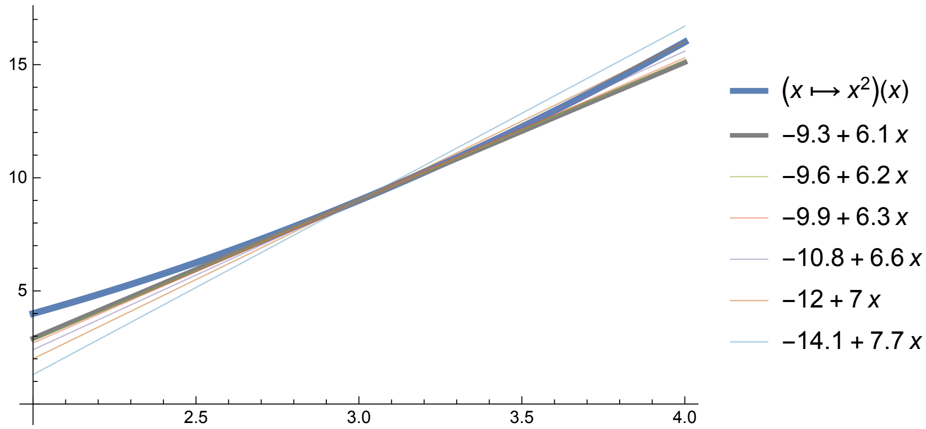
Out[450]=



In[564]:=
```
Clear[PltDerAndIncrs];
PltDerAndIncrs=Function[{f,x0,incrs,radius},
    Module[{incrfs},
        incrfs=Table[
            GetAnyTangent[f,incrratio[f,f'[x0],i],x0],
            {i,incrs}
        ];
        Plot[
            {f[x],incrfs},
            {x,x0-radius,x0+radius},
            PlotLegends→"Expressions",
            PlotStyle→Prepend[Prepend[Table[
                Directive[Opacity[.5],Thickness[.002]]
                ,100],
                Directive[Opacity[1],Thickness[.0075],LineColor→Gray]],
                Directive[Opacity[1],Thickness[.01]]
            ],
            ImageSize→Medium
        ]
    ]
];
```

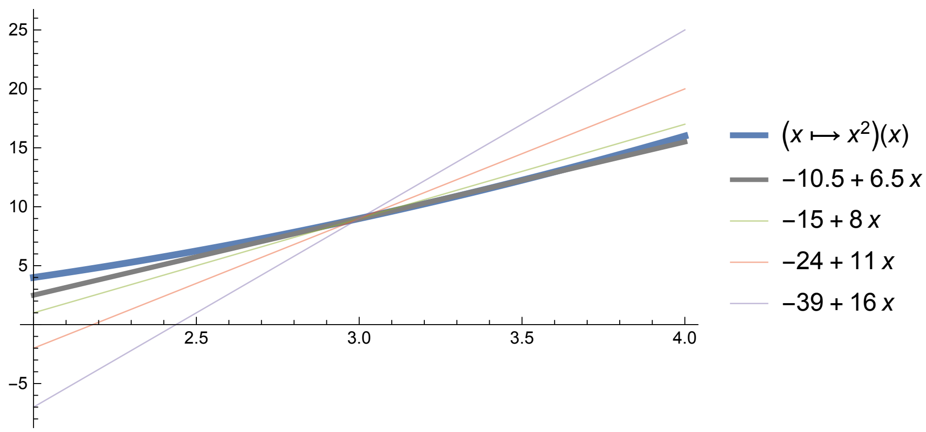
In[566]:=
```
PltDerAndIncrs[Function[x, x^2], 3, {0.1, 0.2, 0.3, 0.6, 1, 1.7}, 1]
```

Out[566]=



In[567]:=
```
PltDerAndIncrs[Function[x, x^2], 3, {0.5, 2, 5, 10}, 1]
```

Out[567]=



Concepção original de Leibniz

O incremento dx é um infinitesimal único. Em função desse incremento, temos o incremento dy na imagem da função, de forma que a razão (assim como na derivada) é $\frac{dy}{dx}$. Se essa razão é infinitesimalmente pequena, ela pode ser considerada *igual* a $f'(x)$. Essa razão, porém, não é infinitesimal (é um número real)[1]. Definição da derivada como *apenas* esta razão (o limite da razão ainda não fazia parte da definição).

Cauchy, o incremento agora varia; no limite do incremento zero, temos a derivada.

$$dy = f'(x)\,dx \Rightarrow .$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

O diferencial é definido *a partir* da derivada. dy e dx são números reais, e não mais infinitesimais.

Reducionismo

A relação entre derivação e integração. A derivação é o limite do slope conforme Δx tende a zero, a integração é o limite da área conforme Δx tende a zero. Qual a relação entre o slope e a área? O slope é a linha diagonal de um retângulo, e a área, o produto dos lados. Ou o slope é a hipotenusa e a área, o produto dos catetos: triângulo.

Visão função

Ambos números são sobre x_0, ou seja $\mathrm{df}(x)$, $f'(x)$.

---

1 Wikipedia (https://en.wikipedia.org/wiki/Differential_of_a_function)