PROJETO DE ESTUDOS

Pedro Oliveira Sobota

Tema

O presente projeto de estudos se dará sobre o tema geral da Música, ou mais especificamente, a Harmonia Musical. Apesar de não necessariamente ser derivado de estudos existentes de Harmonia Musical, mas sim, de um enfoque matemático sobre a mesma inspirado pelo estudo de áreas específicas elementares da Matemática.

Questões

O enfoque será na investigação de relações entre as escalas da Harmonia Musical e que tipos de números podemos atribuir às mesmas de forma a analisar de uma forma mais numérica o conteúdo da Harmonia Musical.

Problema

O problema motivador do estudo é a análise das escalas musicais por um modelo convertido do modelo dos Modos Gregos e de outras relações harmônicas, com um enfoque numérico.

Planejamento de ações

O estudo será dividido inicialmente em algumas etapas ou áreas de investigação.

- Estudo de relações entre escalas
- Estudo de progressões de escalas
- Criação de exemplos
- Mapeamento de objetivos e conclusões

ANÁLISE NUMÉRICA MUSICAL

No estudo da Música algumas estruturas de classificação, ou mesmo objetos teóricos, surgem naturalmente como forma de classificar as relações entre as notas ou mesmo grupos de notas e permitir ao músico trabalhar com estes conceitos dentro das áreas da composição e improviso.

Um dos modos de classificação de escalas musicais, referido tradicionalmente por Modos Gregos, associa diversos desenhos de escalas (relações de distâncias entre notas) com nomes, permitindo o uso das mesmas estruturas independentemente da nota raiz (qualquer uma das 12 notas musicais).

O presente estudo tenta esclarer algumas relações harmônicas, como a das escalas supracitadas, em termos numéricos, de forma a possivelmente quantificar algumas relações ou possivelmente identificar padrões.

INTRODUÇÃO

Uma escala é um conjunto de notas dentro de um intervalo de uma oitava musical.

A oitava é compreendida fisicamente entre intervalos de frequência de onda sonora, quando a mesma dobra. Na música, esse fenômeno é entendido como “a mesma nota, apenas alterando a oitava”. Portanto, as notas se repetem em oitavas e entre estes intervalos as diferentes distâncias, ou saltos entre notas, medidos em semitons, são agrupados em conjuntos chamados “escalas”.

As escalas são conjuntos de n notas, as distâncias entre as quais conferem a identidade da escala, por exemplo:

Escala de dó maior: Dó (0), Ré (2), Mi (4), Fá (5), Sól (7), Lá (9), Si (11).
(O 12º semitom seria a subsequente oitava de Dó.)

Observamos que nesta escala o intervalo entre Fá (5) e Mi (4) é de apenas 1 semitom, o mesmo acontece com o intervalo entre Si (11) e o próprio Dó (0) (já que 0 = 12). As demais notas têm intervalo de 2.

Estes intervalos conferem a “identidade musical” de cada escala, e convencionalmente na música Ocidental, são determinados por um sistema criado na Grécia antiga que define escalas derivadas dos intervalos da escala anterior, assim até chegar novamente na oitava (Modos Gregos). Por exemplo, nos modos gregos da escala maior:

Maior: Dó (0), Ré (2), Mi (4), Fá (5), Sól (7), Lá (9), Si (11) ou apenas,
0, 2, 4, 5, 7, 9, 11.

Segundo modo: usamos os intervalos presentes em 0, 2, 4, 5, 7, 9, 11 adiantando a segunda posição para a primeira e a denominando como o zero, ou tido de outra forma, subtraindo este primeiro intervalo dos valores, resultando: 0 – 2 = 12 – 2 = 10 (não temos números negativos),

2 – 2 = 0,

4 – 2 = 2,

5 – 2 = 3,

7 – 2 = 5,

9 – 2 = 7,

11 – 2 = 9,

e ordenando a partir do zero:
0, 2, 3, 5, 7, 9, 10.

Observamos as diferenças entre esta escala e a escala anterior, da qual derivamos, em semitons: na terceira posição, temos um intervalo de 1 apenas, e na 7ª posição, temos um intervalo de 2, maior, para a próxima oitava. Essas diferenças nos intervalos serão ponto de interesse. Assim por diante, seguimos com os outros 5 modos gregos da escala maior:

0, 1, 3, 5, 7, 8, 10.

Aqui o primeiro intervalo é 1 e subtraímos dos valores:

0, 2, 4, 6, 7, 9, 11.

Novamente em intervalo 2:

0, 2, 4, 5, 7, 9, 10.

0, 2, 3, 5, 7, 8, 10.

0, 1, 3, 5, 6, 8, 10.

Assim a oitava é atingida, concluindo os 6 modos gregos derivados da maior.

DIFERENÇA HARMÔNICA

Em cada uma destas escalas, temos uma ou mais notas diferentes das mesmas posições nas outras escalas. Se tabelarmos as escalas e a quantidade de diferenças em relação à escala anterior, obteremos:

Escala	Notas diferentes (para a raiz)	Diferença (para a raiz)
0, 2, 4, 5, 7, 9, 11	Raiz	0
0, 2, 3, 5, 7, 9, 10	3 (3), 7 (10)	2
0, 1, 3, 5, 7, 8, 10	2 (1), 3 (3), 6 (8), 7 (10)	4
0, 2, 4, 6, 7, 9, 11	4 (6)	1
0, 2, 4, 5, 7, 9, 10	6 (10)	1
0, 2, 3, 5, 7, 8, 10	3 (3), 6 (8), 7 (10)	3
0, 1, 3, 5, 6, 8, 10	2 (1), 3 (3), 5 (6), 6 (8), 7 (10)	5

Há escalas pouco diferentes, como o 3º e 4º modos (diferença 1) – como mudanças suaves musicalmente –, e uma escala bastante diferente (o 6º modo – diferença 5) – instável.
Este “índice” permite avaliação da distância entre escalas arbitrárias. Iremos estudar outros exemplos para verificação do comportamento.

ESCALAS TRANSPOSTAS

Vamos considerar a seguinte escala maior já usada:

0, 2, 4, 5, 7, 9, 11.

Vamos transpor (somar um) a todas a notas de forma a obter:

1, 3, 5, 6, 8, 10, 0 ou 0, 1, 3, 5, 6, 8, 10.

Esta escala apresenta as mesmas distâncias entre as notas individuais, podendo ser considerada a mesma escala a um semitom acima, mas iremos tratá-la como qualquer outra escala a fim de avaliarmos as diferenças como um referencial absoluto. Repetiremos o procedimento com todas as escalas transpostas, semitom a semitom, a partir da escala maior raiz.

0, 2, 4, 5, 7, 9, 11

1, 3, 5, 6, 8, 10, 0

2, 4, 6, 7, 9, 11, 1

3, 5, 7, 8, 10, 0, 2

4, 6, 8, 9, 11, 1, 3

5, 7, 9, 10, 0, 2, 4

6, 8, 10, 11, 1, 3, 5

7, 9, 11, 0, 2, 4, 6

8, 10, 0, 1, 3, 5, 7

9, 11, 1, 2, 4, 6, 8

10, 0, 2, 3, 5, 7, 9

11, 1, 3, 4, 6, 8, 10

Tabelamos estas escalas para calcular as diferenças de cada uma com a raiz:

							d
0	2	4	5	7	9	11	0
1	3	5	6	8	10	0	5
2	4	6	7	9	11	1	2
3	5	7	8	10	0	2	3
4	6	8	9	11	1	3	4
5	7	9	10	0	2	4	1
6	8	10	11	1	3	5	5
7	9	11	0	2	4	6	1
8	10	0	1	3	5	7	4
9	11	1	2	4	6	8	3
10	0	2	3	5	7	9	2
11	1	3	4	6	8	10	5

Em cada escala, verificamos as notas que não constam da escala raiz, somando a **d**.

A primeira observação que fazemos é que existe uma simetria de d em torno da linha de nº. 6, com os mesmos valores de **d** sendo refletidos para cima e para baixo. Ao compararmos com as escalas derivadas em Modo Grego:

							d
0	2	4	5	7	9	11	0
0	2	3	5	7	9	10	2
0	1	3	5	7	8	10	4
0	1	4	6	7	9	11	1
0	2	4	5	7	9	10	1
0	2	3	5	7	8	10	3
0	1	3	5	6	8	10	5

Verificamos que a mesma simetria não ocorre, o motivo sendo que a derivação pelo modo grego não é regular: ela segue os intervalos da escala raiz, e não um intervalo fixo.
Por esse motivo, adotamos aqui escalas transpostas como ferramenta mais adequada para comparação destas relações. Os Modos Gregos ainda são utilizados como escalas raiz das transposições.

Iremos agora transpor dois modos gregos – segundo e quarto derivados da escala maior – e comparar o comportamento das diferenças.

							d
0	2	3	5	7	9	10	0
1	3	4	6	8	10	11	5
2	4	5	7	9	11	0	2
3	5	6	8	10	0	1	3
4	6	7	9	11	1	2	4
5	7	8	10	0	2	3	1
6	8	9	11	1	3	4	5
7	9	10	0	2	4	5	1
8	10	11	1	3	5	6	4
9	11	0	2	4	6	7	3
10	0	1	3	5	7	8	2
11	1	2	4	6	8	9	5

							d
0	2	4	6	7	9	11	0
1	3	5	7	8	10	0	5
2	4	6	8	9	11	1	2
3	5	7	9	10	0	2	3
4	6	8	10	11	1	3	4
5	7	9	11	0	2	4	1
6	8	10	0	1	3	5	5
7	9	11	1	2	4	6	1
8	10	0	2	3	5	7	4
9	11	1	3	4	6	8	3
10	0	2	4	5	7	9	2
11	1	3	5	6	8	10	5

Podemos classificar os saltos pelas menores distâncias:

d = i

1 = 5, 7

2 = 2, 10

3 = 3, 9

4 = 4, 8

5 = 1, 6, 11

Com base nesta tabela, partindo de uma escala maior qualquer, sabemos sempre para onde pode se dirigir o deslocamento, mantendo a mesma escala, para obter a distância desejada. Subentende-se que a igualdade na tabela de **d** entre escalas diferentes reflete o fato de que está sendo feita a comparação pelo mesmo desenho da escala raiz de ambas. Alteraremos uma nota na escala raiz para verificação:

De 0 – 2 – 4 – 5 – 7 – 9 – 11

para 0 – 2 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11.

A 2ª e 4ª derivadas agora seriam

0, 1, 3, 5, 7, 9, 10 e 0, 2, 4, 6, 8, 9, 11.

							d
0	1	3	5	7	9	10	0
1	2	4	6	8	10	11	5
2	3	5	7	9	11	0	2
3	4	6	8	10	0	1	3
4	5	7	9	11	1	2	3
5	6	8	10	0	2	3	3
6	7	9	11	1	3	4	3
7	8	10	0	2	4	5	3
8	9	11	1	3	5	6	3
9	10	0	2	4	6	7	3
10	11	1	3	5	7	8	2
11	0	2	4	6	8	9	5

							d
0	2	4	6	8	9	11	0
1	3	5	7	9	10	0	5
2	4	6	8	10	11	1	2
3	5	7	9	11	0	2	3
4	6	8	10	0	1	3	3
5	7	9	11	1	2	4	3
6	8	10	0	2	3	5	3
7	9	11	1	3	4	6	3
8	10	0	2	4	5	7	3
9	11	1	3	5	6	8	3
10	0	2	4	6	7	9	2
11	1	3	5	7	8	10	5

Aprofundamento

- Cada distância incorpora **d** notas diferentes entre as escalas. É possível a identificação algorítmica de notas?
- Que conjuntos de notas distintos dos tratados permitem agrupamento em escalas-raízes e cálculo de diferenças?
- Qual o universo de escalas possíveis, consideradas certas restrições, como 12 notas, ou apenas de escalas que possuem certos intervalos?
- Considerado o domínio contínuo, incorporando a faixa de frequências sonoras, ao invés de notas discretas, como é possível definir este sistema?
- Existência de relação entre os intervalos de uma dada escala e o desenho das diferenças de suas transposições. Considerando estes intervalos como distribuições, de que forma a sua regularidade ou irregularidade afeta as diferenças geradas?
- A evolução das diferenças ao longo do tempo, e a medida do grau de conclusão de uma harmonia (retorno à diferença **d** 0) ao longo do tempo.

CONCLUSÃO

É possível observar que as notas neste sistema, consideradas números, e de forma similar, as escalas ("agrupamentos" de notas), tratadas como intervalos numéricos, permitem classificações de relações harmônicas, gerando quantificações que possam ser úteis no contexto prático da harmonia musical ou identificados em campos matemáticos.