Teorema

Definição formal de limite:

> Existe valor-limite y_1 em $f(x)$ conforme x tende a x_1 se para todo $\varepsilon > 0$ (epsilon) existe um δ (delta) tal que:
>
> Sempre que o módulo de $x - x_1$ estiver entre 0 e δ,
>
> O módulo de $y - y_1$ seja menor que o ε.

Exemplo: a função logarítmica. Em $\log x - 1$, sabemos que há um limite em $x = 1$ (onde o log se tornaria $\log 0$). Então,

> Existe valor-limite y_1 em $\log x$ conforme x tende a 1 se para todo $\varepsilon > 0$ existe um δ tal que:
>
> Sempre que o módulo de $x - 1$ estiver entre 0 e o δ,
>
> O módulo de $y - y_1$ seja menor que o ε.

A linha

> Sempre que o módulo de $x - 1$ estiver entre 0 e o δ,

quer dizer

> Na faixa de $|x - 1|$ entre 0 e o δ,

(Incompleto.)

Aprimorando.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$. y se aproxima de y_0 conforme x se aproxima de x_0. Equivalentemente: $|y - y_0|$ é reduzido conforme $|x - x_0|$ é reduzido.

ε (epsilon) e δ (delta). Dado um ε, encontrar um δ. Existe um δ tal que $|y - y_0| < \varepsilon$ sempre que $|x - x_0|$ estiver entre 0 e δ. Ou, dado um ε, existe um d tal que $|\Delta y| < \varepsilon$ sempre que $|\Delta x|$ está entre 0 e δ. Ou, dado um ε, nos $|\Delta x|$ entre 0 e δ (que sempre existe), $|\Delta y| < \varepsilon$. ε: eixo y. δ: eixo x. Exemplo: $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. Verificação. Dado qualquer $\varepsilon > 0$ (eixo y), ou… ${}^{|x|}\!/_{x}$ tem limite em $x = 0$? Escolhendo um $\varepsilon = {}^1\!/_2$. Existe um $\delta > 0$ tal que $|y - A|$ (A é o limite) $< \varepsilon = {}^1\!/_2$, sempre que $0 < |x| < \delta$?

Ou seja, escolhendo um ε, deve haver um $\delta > 0$ e, para esse δ, $|y - A|$ tem de ser $< \varepsilon$ no intervalo de x entre 0 e δ.

[Ou seja, ε é eixo y e δ, eixo x.] Ou seja… Escolhendo um ε no eixo y, deve haver um δ, no eixo x, > 0 e, para esse δ, $|y - A|$ deve ser $< \varepsilon$ em todos x entre 0 e δ. (Sendo $y = f(x)$.)

Ou… escolhendo um ε no eixo y, deve haver um δ, no eixo x, em que em todos x entre 0 e ele, $\lvert y - A\rvert$ seja $< \varepsilon$.

Testar. Demonstrar.

A característica da busca é que δ "não seja grande demais", ou seja "suficientemente pequeno".

Mais exemplos Silverman, p. 55-57.

Um teorema que é um limite:

> *Kac e Ulam, p. 53.* This theorem ("the weak law of large numbers") states that no matter what (positive) ϵ is chosen, we can make the probability that the deviation between the frequency and the probability exceeds ϵ arbitrarily small by taking a sufficiently large number of trials. *[ϵ é a "probabilidade que a frequência de faces no sorteio de uma moeda em n experimentos diferirá de $1/2$ por mais de ϵ".]*
>
> (...) a statement that holds only *in the limit as the number of tosses becomes infinite*.

Definição e continuidade

- Existe limite lateral ou completo, e continuidade lateral ou completa;
- Limites existem em pontos, e continuidade em pontos ou intervalos, incluindo intervalos abertos ou fechados;
- O limite pode existir sem y existir, e vice-versa;
- Mas a continuidade só existe com y *E* limite;
- Há limite em descontinuidade se for $\neq y$ (se for $= y$, é continuidade); se não houve limite, é descontínua; há limite em descontinuidade *sem* y? (Abaixo.)
- (Verificar o mesmo para limites e continuidade laterais;)
- Não há continuidade sem limite, e não há derivada sem limite, portanto limite permite continuidade e derivada, mas não depende destes; ~~e a função "completamente sem limite~~"? Há contínua sem derivada: função Weierstrass. (E contínuas com derivadas são exceções - Wikipedia.)

  > Naïvely it might be expected that a continuous function must have a derivative, or that the set of points where it is not differentiable should be "small" in some sense. According to Weierstrass in his paper, earlier mathematicians including Gauss had often assumed that this was true. This might be because it is difficult to draw or visualise a continuous function whose set of nondifferentiable points is something other than a countable set of points. Analogous results for better behaved classes of continuous functions do exist, for example the Lipschitz functions, whose set of non-differentiability points must be a Lebesgue null set (Rademacher's theorem). When we try to draw a general continuous function, we usually draw the graph of a function which is Lipschitz or otherwise well-behaved.

- Há derivada em descontinuidade? ~~Como há limite em descontinuidade, sim, se o limite for completo (?)~~. Não há.

  > (Silverman p. 72) We have already encountered a function ($|x|$) which fails to have a derivative at a point (namely $x = 0$) where it is continuous. On the other hand, a function is automatically continuous at any point where it has a derivative.
  >
  > (https://www.zweigmedia.com/RealWorld/calctopic1/contanddiffb.html) Suppose that f is differentiable at the point $x = a$. Then we know that $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ exists, and equals $f'(a)$.

  Esta é a implicação de não haver derivada em descontinuidade, a inexistência da razão pela inexistência de y.

  No módulo em $x = 0$ não há o limite... por isso não há derivada. Mas porquê não pode existir uma tangente em um ~~ponto não contínuo~~, se houver limite? Não existe ponto não contínuo, estamos falando de um limite ao invés de ponto.

  Sobre uma derivada em uma descontinuidade *sem* y... A derivada localizada é a razão em um ponto, e a razão pressupõe um y, portanto não haveria derivada. Mas se houver um limite a derivada não poderia ser tomada sobre o *limite* de y?

  Dito de outra forma, descontinuidades poderiam ser definidas como por deslocamento do ponto ou por ausência do ponto; em ambos casos o limite existiria e seria o mesmo, e por consequência, a derivada. y não existe, mas a derivada justamente busca a tendência conforme a *aproximação* de x_0 (e como existe limite para x_0, não há porque não considerar o limite para y_0).

  Seria uma "derivada com limite em y, além de x". Testar isso criando esta descontinuidade, limite e derivada, com e sem ponto. *[Notebook.]*

  Funcionou, o DQL é:

  $$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - \lim_{x_1\to 0} x + x_1}{\Delta x}.$$

  É apenas o uso de $\lim(y)$ ao invés de y. Ambos os DQs operam sobre f e x_0.

- Há derivada em ponto com limite lateral?

- O que é isto? https://www.researchgate.net/post/Can_we_find_the_derivative_of_a_function_at_a_point_as_a_limit_of_the_derived_function_at_that_point

Fatoração de polinômios

Seja $P(x)$ um polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

sendo $a_0, a_1, \ldots, a_n$ números reais chamados de coeficientes e n é o grau do polinômio. Suponha que x_1, $x2$, $x3$ sejam as raízes do polinômio, o polinômio $P(x)$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$P(x) = a_n (x - x_1).(x - x_2).\ldots.(x - x_n).$$

Exemplo. Resolver a inequação $x^2 + 3x - 10 > 0$.

Obtendo as raízes (pontos relevantes), $x = 2$ e $x = 5$.

Reescrevendo o polinômio como $x^2 + 3x - 10 = (x - 2)(x - (-5)) = (x - 2)(x + 5)$. O que foi feito?

~~Encontrar os coeficientes comuns mais o "offset". $x(x + 3) - 10 =$ na verdade, buscar dividir o x^2 em dois x. $(x + 3x)(x - 10)$~~? Não.

Foi feito uma regra de, sabendo as raízes, verificar o segundo sinal e multiplicar por x cada raiz.

Resolvendo da minha forma. Sendo as raízes 2 e -5, o centro está em $x = -1$ e nele, $y = (-1)^2 + 3 \dot{-} 1 - 10 = 1 - 3 - 10 = -12$, a parábola é côncava para cima, $y > 0$ em $x < -5 \cup x > 2$. Correto. Ignorar a fatoração de polinômios. (Neste exercício.)

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{i_2} - x_{i-1}^3).(f(\epsilon_i))$$

Exemplo. Resolva a inequação $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$.

> **Solving polynomial equations**
>
> If you're solving an equation, you can throw away any common constant factor. (But if you're factoring a polynomial, you must keep the common factor.) Example:
>
> $-2x^3 - 15x^2 - 6x + 7 = (-1)(2x^3 + 15x^2 + 6x) - 7$, means
>
> $-2x^3 - 15x^2 - 6x + 7 = 0 \Rightarrow 2x^3 + 15x^2 + 6x - 7 = 0$.

Neste caso não temos fator comum.

> **Remainder theorem**: (...) dividing the polynomial by some "linear factor" (meaning a degree 1 factor) $x - a$, (...) ending up with a **quotient** polynomial and a **remainder** polynomial. From "long division" of regular numbers, remainder must be < quotient. In polynomial long division, remainder must be a number (meaning a lesser degree term).

$x^3 - x^2 - x + 1 = x(x^2 - x - 1) + 1$. $q(x) = x^2 - x - 1$, $r(x) = 1$.

O remainder theorem/factor theorem são só formas alternativas de avaliar uma equação de polinomial (por exemplo, em busca de raízes) sem a executar. A ideia é encontrar um fator perfeito $x - a$ que resultará em resto zero. É o multiplicador do quociente em

$$p(x) = \mathbf{(x - a)}\, q(x) + r(x).$$

O algoritmo cita o método do remainder/factor theorem (**divisão sintética**) como forma (manual) mais ágil de testar por raízes, em que caso $x - a$ seja uma raiz, a versão reduzida do polinômio (quociente) já estará em mãos. Este método abrevia a avaliação de raízes de algumas formas, buscando o polinomial reduzido. Deixando a busca das raízes de lado, tendo as raízes:

$x \in \{-1, 1\}$.

Em que $x\,y > 0$? Seria preciso saber a concavidade... Mas o ponto aqui parece ser *não contar com a geometria*. Os seguintes passos são seguidos:

O polinômio é fatorado como a multiplicação de $x - a$ para cada uma de suas raízes (há duas raízes 1): $(x-1)(x-1)(x+1) = (x-1)^2(x+1)$.

É procedida a análise da inequação nesta forma. $(x-1)^2(x+1) > 0$. A análise é algébrica: $(x-1)^2$ é sempre $\geqslant 0$, portanto $x + 1$ há de ser > 0 porque, de outra forma, $(x-1)^2$ seria $\leqslant 0$. (Contando com uma propriedade de potência fracional, arbitrário.)

Sabemos que $(x-1)^2 \geqslant 0$ ***E*** $x + 1 > 0$. Processando,

$(x-1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$ (~~agora sim uma parábola~~) (ou ainda algébrico?)

Digressão. O que significa que $n^2 \geqslant 0$? Potência par inteira maior ou igual a zero, isso é sempre verdade (para todo n). Portanto $(x-1)^2 \geqslant 0$ também é sempre verdade.

O não entendimento é pelo trecho (p. 46) que diz: "se $(x-1)^2 > 0$, então $x - 1 \neq 0$ ou $x \neq 1$." Resultado correto – porquê $(x-1)^2 > 0$?

O trecho está com escrita confusa. $(x-1)^2 > 0$ porque se $(x-1)^2(x+1) > 0$, se um dos dois fatores for zero o polinômio não é maior que zero > 0; e não por propriedade de n^2.

Portanto algebricamente, ambos os fatores têm de ser > 0. Para $(x-1)^2$ ser > 0, $x - 1$ tem de ser $\neq 0$, pois $n^2 > 0$ se $n \neq 0$. Logo $x \neq 1$. E para $x + 1 > 0$, $x > -1$. Logo $S = \{x > -1 \cup x \neq 1\}$ *[Notebook]*.

Esta é uma resolução por propriedades dos conjuntos numéricos. O que é álgebra.

Mais exemplos de fatoração em *Unisul, p. 112-117*.

Qual a relação entre operar limites em indeterminações $(^0/_0)$ e fatoração de polinômios?

Conjugado da raiz.

O conjugado ou recíproco de $\sqrt{a+b} + c$ é $\sqrt{a+b} - c$.

Significado geométrico.

Resolução de inequação racional

Exercício (p. 46). Encontre a solução da inequação $\frac{3x+1}{x-3} < 1$.

$\frac{3x+1-(x-3)}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{2x+4}{x-3} < 0$. Achar as raízes.

$\frac{2x+4}{x-3} = 0 \Rightarrow 2x+4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$. E para isso, $x \neq 3$.

Como já sabemos, temos uma assíntota vertical em $x = 3$.

Método Khan Academy: propriedade dos números de que positivos $\div$ positivos e negativos $\div$ negativos são positivos. Logo para ${}^{a}/_{b}$ ser positivo $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$.

$2x+4 > 0 \wedge x-3 > 0 \Rightarrow 2x > -4 \wedge x > 3 \Rightarrow x > -2 \wedge x > 3$. Mesmo para $<$ $(x < -2 \wedge x < 3)$.

Então esta resolução dispensa encontrar as raízes. No primeiro, $x > -2$ e no segundo, $x < 3$; como $x < 3$ já inclui $x \neq 3$, $\boldsymbol{S = -2 < x < 3}$. *[Notebook.]*

Nota. Encontrar o limite de y em $x = 3$ envolve a relação *(Silverman p. 91)* entre $f(x)$ e $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Ou $f(x)$ e $f(x^{-1})$, que implica apenas a inversão do sinal do exponente: por exemplo, entre $(x+2)^2$ e $(x+2)^{-2} = \frac{1}{(x+2)^2}$. A relação é que se $f(x^n)$ tende a ∞ conforme x tende a zero, $f(x^{-n})$ tende a zero conforme x tende a ∞. Confirmar. Portanto o "limite infinito é convertido em um limite finito". Aplicar.

Desenvolvimento do Mathematica.

Encontrar os pontos. $\frac{2x+4}{x-3} = 0 \Rightarrow 2x+4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Também, $x \neq 3$. Seja qualquer curva, há raiz em -2 e não tem domínio em $x = 3$.

~~(Por isso, não tem imagem em $y = \frac{6+4}{3-3}$... É uma assíntota horizontal.) Poderíamos tirar o limite para descobrir o y~~. *[Notebook.]*

Não poderíamos, porque é uma assíntota (é infinita). Assíntota vertical em $x = 3$. Saber, conforme x se distancia de 3, onde y se estabiliza. Esse é o limite.

Sabendo isso, é possível saber se essa (imagem) inclui $y = 0$.

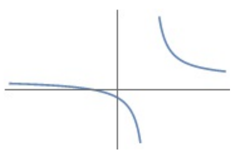


Figure. $\frac{2x+4}{x-3}$.

Essa é uma função de grau fracional. Qual sua derivada? ~~Parece ser~~ $\cancel{\frac{2}{1}}$. [*Notebook*.]

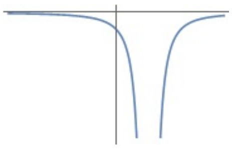


Figure. $-\frac{10}{(-3+x)^2}$.

Certamente não é.

Mas, o limite em y não tem a ver com a resposta. A resposta envolve $x = 3$, onde há a assíntota, e $\boldsymbol{x = -2}$, a raiz da equação. ~~O problema é não conhecermos a curva.~~. Poderíamos tomar pontos em volta. Mas não sabemos intervalos de crescimento/decrescimento; um ponto vizinho apenas poderia ser insuficiente. ~~Há de haver uma regra para esse tipo de função com fração de polinômios~~. Se trata de propriedade ${}^{x}/_{y} > 0$ se $(x > 0 \land y > 0) \lor (x < 0 \land y < 0)$.

Exercício. Qual a solução da inequação $x^2 + x - 2 \geqslant 0$?

Tentar a resolução sem geometria.

Inversão do sinal do expoente da variável independente

Desenvolvimento teste.

Para encontrar o limite horizontal do exercício acima.

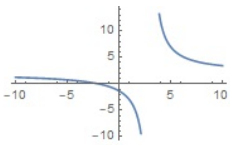


Figure. $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$

Assíntota de interesse... conforme $x \neq 3$ (assíntota por divisor 0), a quanto y tende. A raiz é $x = -2$.

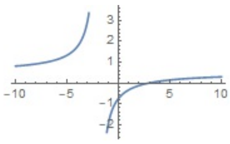


Figure. $f(x)^{-1} = \frac{x-3}{2x+4}$

-2 era raiz. Agora, é 3. -2 agora é a assíntota, de horizontal para vertical. ~~Mas agora, podemos tirar o limite, conforme x se aproxima de -2, em y~~? $\frac{-3-2}{4+2.-2} = -\frac{5}{0}$. Não.

Observação *Unisul p. 123*. Razões.

Isto tem a ver com o conceito da divisão de polinomiais (que tem a ver com as funções racionais). $\lim_{x\to 6+} \frac{3x-1}{x-6} = \frac{17}{0^-} = +\infty$. Observemos o denominador se aproximando de zero neste exemplo, e o valor total da razão tendendo a infinito. Quanto mais o denominador se aproxima de zero, independente do numerador (finito), mais a razão tende ao infinito. (Ou seja, quanto menor o denominador, [ou seu módulo?], maior a razão.) Quanto maior o *numerador*, maior a razão. O crescimento do numerador e denominador impõe efeitos opostos sobre o valor da razão. (E o denominador zero é justamente o ponto de atingimento do infinito — levanta a questão, qualquer razão, afora o zero ser indeterminado no denominador, tende ao infinito conforme o denominador tende a zero? I.e., independente do numerador (finito)?)

Dá a imaginar que a "função" do denominador, ou da divisão, é... é a exponenciação ao contrário, o infinitamente pequeno no denominador é o infinitamente grande na razão, o que é o inverso do numerador, onde o infinitamente grande é o infinitamente grande da razão. Então o denominador, ou a divisão, é como um "contrapeso" que se põe ao "número puro", (numerador), que, iniciando em 1, passa a aumentá-lo novamente até o seu infinito, caso ele permaneça constante, ou impor um "jogo de equilíbrio" caso ele se altere.

Isso tem relação com a "inversão do sinal do expoente", no contexto do **limite**, que é exatamente o que esta operação faz, passar a variar o valor (x? y?) em sentido oposto.

E, possivelmente, tem relação com o significado das funções racionais, a divisão de polinômios.

É interessante notar que o denominador age em um espaço de 1 a 0, que é tanto fixo quanto "pequeno", figurativamente em relação ao numerador que significativamente (em módulo) vai de 0 a infinito. No denominador, este espaço equivalente está compreendido em um espaço fixo e "curto", figurativamente, da unidade (1) ao infinito (0).

O que é uma razão

Ilustração: Quanto é o seno de 0? Basta enxergar a função seno como uma função razão entre o cateto oposto e a hipotenusa. A razão completa pode ser pensada como um equilíbrio ou proporção entre o numerador e o denominador, mas, considerando que o denominador não mude, quanto maior for o numerador, maior é o número, e quanto maior o denominador, menor o número. Mas, pensando em um denominador 1, obviamente o número é o numerador sozinho. O denominador 1 é o equilíbrio. Com um numerador fixo, quanto mais o denominador aumenta, mais a razão diminui (ou aumenta, se negativa) em direção a zero. Quanto mais o denominador diminui, mais o a razão tende ao infinito, negativo ou positivo.

Mas uma razão só chega a zero com um denominador infinito; o inverso poderia se pensar. Só chega ao infinito com um denominador zero. E isso (parece ser) parcialmente verdade, detalhes aparte. Mas, independentemente de chegar, é verdade que **tende** ao infinito com denominador tendendo a zero.

Nota posterior: isso assume uma função contínua. Em uma função discontínua, a razão pode se tornar infinita, com denominador zero em um único ponto.

Mas o seno de 0… em 0 graus de inclinação, o cateto oposto é zero e a hipotenusa é “total”, ou 1. O denominador 1 é a *ausência* de razão, é apenas o número. Mas também poderia ser pensado que a hipotenusa é *infinitamente* maior que o cateto oposto. ~~**Afinal, esta razão é zero ou infinito?**~~ O cateto é que está dividindo a hipotenusa, ele *infinitamente menor* que a hipotenusa, o que é o número zero. E o “máximo” desta função?

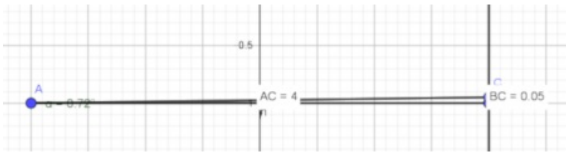


Figure.

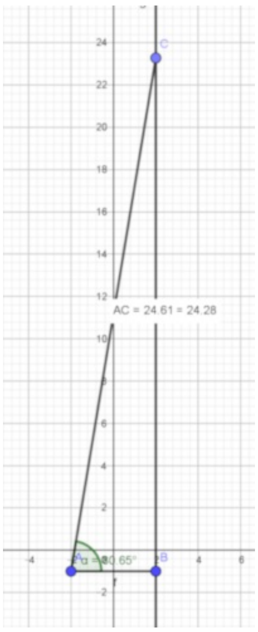


Figure.

A hipotenusa sempre é maior que o cateto conforme o cateto cresce, esta é uma relação geométrica que implica na função/fórmula razão. O cateto atinge o tamanho da hipotenusa (ou seja, é atingida a razão $^1/_1$) somente no infinito (que corresponde a 90^o). Então este é o máximo da razão sob o ponto de vista do cateto sobre a hipotenusa, $\mathbf{1}$. Para esta função razão geométrica em particular, seno, a imagem em módulo varia de 0 a 1.

Se medíssemos a proporção **inversa**, a hipotenusa sobre o cateto oposto, veríamos que a hipotenusa se torna infinitamente maior que o cateto quando do ângulo de 0^o, apenas porque o cateto, que é o denominador, se tornou zero. *Neste ponto, novamente, a razão é dita inexistente, mas a tendência é esta.* Esta função razão vai de ∞ a $\mathbf{1}$.

Como qualquer razão pode ser reduzida a uma não-razão (denominador 1) (pode?), operando-se a divisão... (Dúvida pertinente - números irracionais?) Vamos supor que sim. Então é demonstrado que qualquer alteração no numerador ainda é o equivalente a uma alteração de um numerador sobre um denominador **um**. E como já vimos esta função se reduz ao numerador, tendo uma imagem $\cancel{\mathbb{R}}$ $\mathbb{Q}$ (racionais). (Ou seja, esta função é apenas uma função com imagem equivalente a uma função x.)

Mas, ao fixar o numerador e variar o denominador, e considerando também uma redução sempre possível ao denominador 1, temos a imagem do próprio valor até o valor sobre 0, ou seja, infinito. E esta é a "verdadeira" função razão, (porque não se reduz ao numerador, mantém uma relação entre duas quantidades). E esta função variação do denominador é, supondo redução do numerador a 1, $\dfrac{1}{x}$.

Portanto isso descreve uma função racional.

Descartes, La Geometrie, p. 2 (minha ênfase):

> Taking one line which I shall call *unity* in order to relate it as closely as possible to numbers (nota: o um como linha), (...) and having given two other lines, to find a fourth line which shall be to one of the given lines as the other is to unity (which is the same as *multiplication*); or, again, to find a fourth line which is to one of the given lines as unity is to the other (which is equivalent to *division*).

A função racional é a variação da "segunda" linha das duas dadas no segundo exemplo acima (da divisão). A quarta linha é o resultado da divisão, que é a razão, e muda com esta mudança da segunda linha dada, enquanto a primeira linha dada permanece em mesma proporção com a linha unitária. **Só que a função racional também inclui mais que linhas (curvas).**

Mais aspectos... a "inversão" do limite não é uma conversão em função racional? Isto está comentado aparentemente em *Silverman, p. 90*, sobre a **redução de problemas de limites no infinito ou infinitos em problemas de limites finitos** envolvendo duas funções recíprocas $x = \dfrac{1}{t}$ e $t = \dfrac{1}{x}$:

> If x takes "larger and larger" positive values, then its reciprocal t takes "smaller and smaller" positive values, and conversely, while if x takes "larger and larger" negative values, t takes "smaller and smaller" negative values.

Derivadas são limites

O limite da razão entre Δy e Δx conforme x tende a zero.

Há a derivada em um ponto (1 grau menor) e a derivada de mesmo grau (qualquer ponto).

Limites em pontos e limites de funções. Resultados pontos e resultados funções? Dimensionalidade dos tipos de limites.

$f(x) = x^2 + 2.$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11.$

$\lim_{x \to 3} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 3} \frac{f(x+3) - f(3)}{x+3-3} = \frac{(x+3)^2 + 2 - (3^2+2)}{x} = \frac{x^2 + 6x + 9 + 2 - 11}{x} = \frac{x^2 + 6x}{x} = \frac{x(x+6)}{x} = x + 6.$

Estamos, no primeiro caso, tomando limite de uma função em um ponto.

No segundo caso, não deixa de ser a mesma coisa, mas é uma função racional... É uma segunda função que tem a ver com a primeira e com o ponto do limite como argumento. **Cada ponto de limite monta uma função distinta.**

A dúvida é porque um resultou em uma função constante e outro em uma função que não é quadrática, parece linear racional.

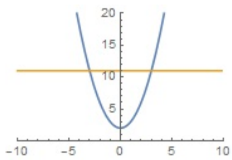


Figure. $f(x) = x^2 + 2.$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 11.$

O difference quotient (derivada) precisa ser tomado por um limite *~~apenas~~ para cobrir o caso da função não ser definida, ou seja, descontínua, em* x_0. Não apenas isso, mas necessariamente para obter y_0 quando x_1 se aproxima de zero, **sem** se tornar zero, porque x_1 está no **denominador** do DQ.

Anatomia do difference quotient

- Não é uma função composta porque função composta recebe um x, passa o resultado para outra função, que devolve o y, e essa recebe uma função e devolve outra função.

- Uma interpretação é que é simplesmente a descrição da operação de verificar a mudança na proporção entre y (o resultado) e x (o parâmetro). Entre dois pontos, mas da seguinte forma: o primeiro ponto é definido. Pela lei da função, temos o resultado. **O segundo ponto é uma variável, mas pela lei da função, também temos o resultado, também em termos de variável.** A função apenas é a subtração e divisão (*difference quotient*) prontos em termos destes dois "termos", que são seus parâmetros.

Portanto, o DQ é uma função com dois parâmetros: uma **função**; e um **ponto definido** (basta um x mas poderia ser um y também).

$\mathrm{dcf}(f,x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$. Quando essa função é executada, como um x é informado, é retornada uma função com uma variável dependente (x_1). Por exemplo: sendo $f = x^2$, $x = 3$, $\mathrm{dcf} = \dfrac{x_1^2 - 9}{x_1 - 3}$. O **limite** parece ser apenas para cobrir funções descontínuas... Vamos executar e plotar este caso, com $x_1 = 0$ que tem y definido.

$\mathrm{dcf}(f,0) = \dfrac{-9}{-3} = 3$. Essa é a razão da diferença entre y_1 e y_0 e x_1 e x_0 em $x_0 = 3$, e como $x_1 = 0$, isso é $\dfrac{y}{x}$ neste ponto. *(Está correto: $f(3) = 9$.)*

Isso é o DQ. Vamos testar só mais um ponto $\neq 0$. $\mathrm{dcf}(f,4) = \dfrac{16-9}{4-3} = 7$. $\cancel{\dfrac{f(4)}{4} = \dfrac{16}{4} = 4.}$ ~~Não bateu. Isso é a razão em~~ $\cancel{x_1}$. Isso deveria ser a razão da diferença em $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ (~~ou~~ $\cancel{x_1 = 7?}$) Bem, y em 3 é 9 e y em 4 é 16. $\dfrac{16-9}{4-3} = 7$. Correto.

Mais um ponto. $\mathrm{dcf}(f,14) = \dfrac{144-9}{14-3} = \dfrac{135}{11} = 12.2727$. y em 14 é 144. $\dfrac{144-9}{14-3} = \dfrac{135}{11}$. Bateu. Plotar estas soluções para conferir.

Na verdade, dcf está fornecendo exatamente a mesma "conta" que tomar y nos dois pontos e fazer a razão manualmente ($^{\Delta y}/_{\Delta x}$). dcf é uma simplificação algébrica da fórmula de representar o y_0 na forma do enunciado da função e calcular e subtrair o y_0, e dividir pelo x_1 menos o x_0 informado. A **"parte dinâmica"** não é o y_1; é o y_0, que é calculado no momento da construção (e é o que muda para cada x_0).

Então o dcf olha o y_0 para o x_0 e isso permite comparar com outros y_1 ao longo da função para calcular a taxa de mudança na razão – e o limite, aparentemente, porque y_0 pode *não estar definido*. dcf não calcula a razão em um ponto – somente pré-calcula um y_0 e uma função razão em um x_0. (? sobre pré-calcular.)

Animar DQ com $x_1 \geqslant 0$ e x_0 dinâmicos.

- Por essa característica de deixar a "fórmula pronta" para um x, o DQ é uma *fórmula*, não um *conceito*. Calcular o DQ de funções de cada maior grau em um ponto é gradualmente mais trabalhoso, e calcular uma vez para qualquer x_1 economiza isso. Talvez por isso também as regras de derivação; poderiam vir de uma busca por uma abreviação destes trabalhos, mas ambos não são conceitos. (? Calcular alguns DQs de funções de graus maiores.)

- Como o DQ é sempre dividido por x_1, a parte "interessante", que "muda" com a função é o numerador, $f(x_1) - f(x)$, q~~ue é o diferencial ou d~~x.

- Há dois "tempos" no DQ: execução para a função e x_0 e execução para x_1, ou "construção" e "execução". Na construção, é montado o numerador (~~diferencial~~), com base em f e y_0, que é uma função de x. Na execução, é encontrado o y para esse x.

- O mesmo x_1 resultado na construção será substituído como x na execução; por isso, o y da execução não é denominado y_1; y_1 ainda era o valor (algébrico) de f encontrado na construção para um x_1 também algébrico; y agora é o valor (numérico) para a execução da função que inclui este y_1 algébrico como polinômio em x_1.

Exemplo. Para $f(x) = 3x^2$ e $x_0 = 4$, o diferencial $D = f(x_0 + x_1) - f(x_0) = f(4 + x_1) - f(4) = 3(4 + x_1)^2 - 48 = 3(16 + 8x_1 + x_1^2) - 48 = 3x_1^2 + 24x_1$. O "segundo" y_1 agora será a execução desta função... Para desambiguar com o y_1 anterior, poderíamos chamar os x_1 de x, mas o x_1 ainda é exatamente a mesma variável que da construção... Então perderíamos sentido; o correto seria ser uma função em $y = f(x_1)$. E a razão DQ $= \dfrac{f(x_1)}{x_1} = \dfrac{3x_1^2 + 24x_1}{x_1} = 3x_1 + 24$.

Então em $x_1 = 11$, DQ (que quer dizer a razão entre a variação em y e em x) $=55$. Tomando $y = 363$, $\Delta y = 363 - 48 = 315$ e $\Delta x = 7$, ${}^{\Delta y}/_{\Delta x} = 45$. ~~**Não bateu.**~~ Não bateu porque $x_0 \neq 0$? ~~(O difference quotient vale para $x_0 \neq 0$?)~~ Sim, deveria valer.

Para $f(x) = 3x^2$ e $x_0 = 0$, DQ $= \dfrac{f(x_1) - f(0)}{x_1} = \dfrac{3x_1^2}{x_1} = 3x_1$. Em $x_1 = 9$, DQ $= 27$. $y_1 = 243$, ${}^{\Delta y}/_{\Delta x} = 243/9 = 27$. **Bateu.** Mas ainda desconfiado...

As duas derivadas.

A derivada de $3x^2$ é $6x$. Em $x = 5$, $\dfrac{f(5)}{5} = 6$? $\dfrac{75}{5} = 6$? Não. ~~Então a derivada não dá a razão em f em x~~. Nem deveria... A derivada dá a **mudança** da razão.

Vamos achar esta derivada tomando o DQ sem especificar x_0. DQ $= \dfrac{3(x_0 + x_1)^2 - 3(x_0)^2}{x_1} = \dfrac{3(x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2) - 3x_0^2}{x_1} = \dfrac{3x_0^2 + 6x_0x_1 + 3x_1^2 - 3x_0^2}{x_1} = \dfrac{x_1(6x_0 + 3x_1)}{x_1} = 6x_0 + 3x_1$, que tende a $6x_0$ conforme x_1 tende a zero.

Agora, a "derivada" em um $x_0 = 4 = 6.4 = 24$. ~~$y_0 \neq 48$~~. y neste x não tem mais qualquer relação com a derivada. Ela só expressa o quanto ${}^{y}/_{x}$ está *mudando*, o que é o *y da derivada*. Esta "mudança" precisamos conferir tomando dois pontos de f e subtraindo os y e dividindo pelos x. [O único jeito de isto dar certo é esse resultado ser independente do x_1, ou seja, a razão para um x_0 ser a mesma para qualquer x_1 ao longo da função.] Vamos testar em três pontos: $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ e $x_2 = 7$.

Em $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Em $x_1 = 4$, (agora sim) $y_1 = 48$. Em $x_2 = 7$, $y_2 = 147$. O DQ entre x_1 e x_0 é $48 \div 4 = 16$, e entre x_2 e x_0 é $147 \div 7 = 21$. DQ não está refletindo a mudança na razão.

Voltando à derivada localizada. Pela fórmula da derivada, em $x = 4$, y da derivada é 24. Pelo DQ "localizado"? (Essa é a comparação necessária.) DQ $= \dfrac{f(4 + x_1) - f(4)}{x_1} = \dfrac{3(4 + x_1)^2 - 48}{x_1} = \dfrac{3(16 + 8x_1 + x_1^2) - 48}{x_1} = \dfrac{24x_1 + 3x_1^2}{x_1} = 3x_1 + 24$. Se x_1 tende a zero, DQ tende a 24. **Bateu.** Em $x = 7$? y da derivada é 42. DQ $= \dfrac{f(7 + x_1) - f(7)}{x_1} = \dfrac{3(7 + x_1)^2 - 147}{x_1} = \dfrac{3(49 + 14x_1 + x_1^2) - 147}{x_1} = \dfrac{3x_1^2 + 42x_1}{x_1} = 3x_1 + 42$, que tende a 42 conforme x_1 tende a zero. **Bateu.** Então **em cada x_1, a taxa de mudança da razão dele (y_1 e x_1) para um x_0/y_0 é diferente. Na verdade, em cada x_0 a razão é diferente, e isto seria suficiente se não precisássemos da *tendência*, e por isso tomamos um x_1. Essa tendência (${}^{y}/_{x}$) é o valor da *derivada localizada* em x_0. O ponto é especificado em x_0, não x_1. x_1 é para o limite tendendo a zero e é anulado.**

O cálculo acima está dizendo: entre $x_0 = 4$ e $x_1 \longrightarrow 0$, $\mathrm{DQ} = 24$. Entre $x_0 = 7$ e $x_1 \longrightarrow 0$, $\mathrm{DQ} = 42$. Basicamente, é a inclinação da secante em cada um destes pontos. Faz sentido, a secante é mais inclinada em $x = 7$ mais longe do centro da parábola.

Alguns valores tendem a n conforme Δx tende a zero: y ou Δy ou $^{y}/_{x}$ ou ainda $^{\Delta y}/_{\Delta x}$. Todos estes valores tendem a algum valor conforme Δx tende a zero. y tenderá a $f(x_0)$, que, nem por x ser "zero", implica em um valor 0. Δx é o único valor que tende a zero, obviamente, conforme Δx tende a zero. E, caso y não esteja definida em x_0, o valor será o do limite (de y). Δy tenderá a $y_1 - y_0$. $^{y}/_{x}$ tenderá a $^{f(x_0)}/_{x_0}$, a razão simples em x_0, que, ao contrário das outras, não tende a zero, mas a um número definido. $^{\Delta y}/_{\Delta x}$ tenderá a $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Como a razão simples, um número $\neq 0$, mas agora o deslocamento; novamente, implicando y, tende a um valor sem relação com 0, conforme Δx tende a 0. Este deslocamento da razão é exatamente o que a *derivada (localizada)* representa, um valor qualquer distinto da razão e de zero.

O diferencial

Silverman p. 63-64. Leva à notação d.... O importante é manter os zeros nos x nas notações:

$$\Delta y = \Delta f(x) \text{ no sentido } \Delta f(x_0) = \cancel{f(x_1) - f(x_0) =} f(x_0 + x_1) - f(x_0)$$

(diferença de y entre dois pontos), e

$$\mathrm{dy} = \mathrm{df}(x) = f,(x).\Delta x \text{ no sentido } f,(x_0).\Delta x$$

(derivada localizada de f em x_0 multiplicada pela diferença em x).

Gengebrar o diferencial.

Diminuição do grau

É evidente que $^{y}/_{x}$ perde um grau porque divide uma função de x por x. Então a diminuição de grau da derivada é por ser uma divisão por linha. (Continuado no Pesquisas.nb.)

~~Limites são relações~~

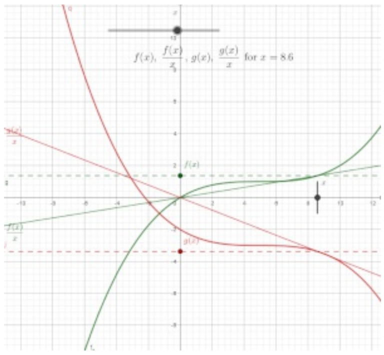
~~Limites são relações entre valores em cada eixo/dimensão~~.

Enquanto um valor tende a um m finito ou infinito, outro valor tende a um n finito ou infinito.

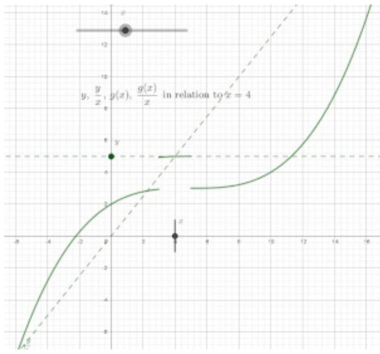
Podem haver então 4 combinações de tendências, finito com finito, finito com infinito, infinito com finito, infinito com finito, (?)

A questão é que as proporções das mudanças entre os valores dependentes são diferentes, mas é garantido que atinjam os limites simultaneamente.

Mas a relação não seria a função em si? (O limite só cobre as descontinuidades.) A ideia é que não porque a quantidade dependente não precisa ser $f(x)$, pode ser $y_1 - y_0$ ou ${}^{\Delta y}/_{\Delta x}$ (tangente), por exemplo. Porém, essas duas quantidades derivam da função… Poderia ser definida uma relação de proporção entre duas quantidades arbitrárias porém estaríamos definindo uma função.



GeoGebra. Limites em contínuas e razões.



GeoGebra. Limites em descontínua (bug).

Propriedades de limites

> (p. 110) Usando a definição de limites, podemos demonstrar diversas propriedades e teoremas que podem nos servir para calcular os limites de forma mais rápida. (…) propriedades operatórias de limite, para encontrar o valor do limite de uma função sem a necessidade do uso formal da definição. *(Também Silverman p. 66.)*

Também interessante que as propriedades são demonstradas formalmente com o uso do teorema (ou vêm dele).

(É outra forma válida de encontrar os limites "no outro eixo"?)

Essas propriedades são para não ter de recorrer ao teorema para solucionar os casos "problemáticos" (porque na situação "normal" o limite apenas é y), e é isso que é testado na disciplina. Portanto, o correto seria calcular os limites com base no teorema, que abrange todos os casos, depois pelas abreviações. Os programas de computador também usam as abreviações para calcular, aparentemente não há nenhuma **prática do teorema**.

E a fim de demonstração seria correto demonstrar as propriedades a partir da decomposição de polinômios usando o teorema de continuidade, este a partir do teorema de limites (ou estrutura semelhante).

Racionais

Exercício. (Unisul p. 113) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$. ~~Tentei fatorar em $x-2$: $(x-2)^2 = x^2 - 2.x.2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$. $x^2 - 5x + 6 - (x^2 - 4x + 4) = x^2 - 5x + 6 - x^2 + 4x - 4 = -x + 2$, portanto $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-2)-x+2}{x-2}$ = já não posso simplificar~~. Olhando os polinômios, parábola − linha = linha. Como é linha, não é assíntota (investigar isso), apenas $f(2)$ não existe. Mas queremos o limite, que existe perfeitamente. Mas sem tomar pontos. Tomando os limites individuais, $\frac{4-10+6}{2-2}\ldots$ o denominador zero continua. O livro diz: encontrar o fator em comum e retirá-lo da função, dividindo ambos os polinômios por ele. Operando a divisão dos polinômios no Wolfram, o resultado é $x-3$, do qual o limite em 2 é -1, o que está correto. Deve ser então o maior fator em comum, para "simplificar" a função ao máximo possível. (Parece que isso que o Ruffini faz... é a "long division" de polinômios.)

Esta função é $\frac{0}{0}$. Quando temos uma função que se reduziu a um $\frac{0}{0}$ em um limite de a, os polinômios SÃO divisíveis por $x-a$: neste caso o denominador já é $x-2$ se tornando 1. Então eu tenho de ver 1) como dividir E fatorar polinômios e 2) o que aconteceria se o numerador não desse em 0, apenas o denominador.

Divisão de polinômios: tem a **long division**, que é a original similar à aritmética e a **synthetic division**, que é mais abreviada, e das quais (para denominadores lineares/grau 1) o **Ruffini** é um caso particular.

Resultado, como o long division é o algoritmo mais geral, usar **ele**. A operação que "transforma" a função racional (permitindo o denominador $\neq 0$ no limite) é a ~~**divisão**~~ da razão, na verdade, a simplificação da razão em algo que era divisível sem resto, tornando o denominador da razão 1, e a tomando apenas como um número, no caso, um polinomial simples. (Era um "inteiro" disfarçado de razão – ou seja, atribuindo nomes mais apropriados, **apenas uma fração** – distinto de uma verdadeira razão.) E, ao reduzirmos a fração ao "inteiro" que é, eliminamos o denominador e podemos tomar o limite. Ou seja, nota paralela, **fração não é razão**, seja em números, seja em polinomiais. (Então esta função não é **nem** racional – é "inteira", em termos de polinômios. Qual o nome oficial disto?) Este procedimento consistiu no equivalente a tomarmos 3 para $\frac{6}{2}$, mas para um polinômio, em que a redução é menos aparente.

~~A "regra" diz que, ao obtermos limite $\frac{0}{0}$, temos redução~~. É *indeterminação* em um limite a específico, e há redução de ambos os polinomiais por $x-a$.

A questão da fatoração dos polinomiais nas funções racionais está coberta em *Silverman, p. 92*:

> As generally true, a rational function approaches infinity at precisely those points where its denominator equals zero, provided, of course, that all common factors of the numerator and denominator have been cancelled out.

Essa forma "fatorada" é que permite analisar os limites infinitos das racionais.

Resumo

$\lim\limits_{x\to a} x = a$. $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \times f(x), f(x) \div g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \times \div g(x)$.

$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$. Ex.: $\lim\limits_{x\to 1} 3x^2 = 3\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 3.1 = 3$.

$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$. Ex.: $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{3x^2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 3} 3x^2} = \sqrt{3.3^2} = \sqrt{27}$.

$\lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \ln \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Ex.: $\lim\limits_{x\to 2} \ln x^2 = \ln \lim\limits_{x\to 2} x^2 = \ln 4$.

$\lim\limits_{x\to a} \text{sen}\, f(x) = \text{sen} \lim\limits_{x\to a} f(x)$; mesmo para cos.

$\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

Funções modulares são funções "piecewise". Reescrever na forma piecewise.

Ao calcular um limite, ter em mente o domínio. Raízes $\geqslant 0$ e denominadores $\neq 0$. Ex.: e, $f(x) = \sqrt{x-2}$, $x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$. Então o limite $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ não existe, pois não há nada < 2.

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$: razão fatorável por $x - a$. (Divisão.)

Conjugado de $\sqrt{x+a} + b = \sqrt{x+a} - b$. (Troca de sinal.) Obs.: ainda, somente necessário quando temos esta indeterminação.

$\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x^2 + 1 = 2(+\infty)^2 + 1 = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$.

Indeterminação $\dfrac{\infty}{\infty}$. Dividir numerador e denominador pelo termo de maior grau. $\sqrt{x^2}$: x.

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_{0x^n}}.$$

Limites infinitos: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \left\{\begin{array}{c} +\infty \text{ se } n \text{ par} \\ -\infty \text{ se } n \text{ ímpar} \end{array}\right\}$.

Temas

- p. 69 continuidade de operações sobre funções. 2.64 o que a continuidade implica para polinômios como somas/subtrações de funções (e racionais como divisões?).
- p. 68 continuidade em um ponto implica que o limite naquela ponto é igual ao valor naquele ponto. Portanto podemos usá-los de forma intercambiável, para, por exemplo:
  - Teorema sobre operações sobre funções com (?)
- p. 66 o teorema das operações sobre funções com limites (calculados), advindo da definição formal, é usado para "dividir" funções em subfunções para calcular os limites compostos.
  - p.67 isso inclui funções polinomiais, como somas/subtrações de funções... isso implicaria que polinomiais são por definição operações sobre "sub"-funções?