Cálculo de auto-valor

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Subtração de λ.

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

Determinante: diagonal normal – diagonal secundária.

$((1-\lambda)\times(4-\lambda)) - (1\times -2) =$

$4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 =$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6.$

Polinômio característico.

Auto-valor: igualar determinante a zero.

Toda matriz quadrada possui um determinante.

Se o determinante da matriz for igual a zero, a matriz não tem inversa.

$\det C = (1\times 4) - (1\times -2) = 4 = 2 = 6 \neq 0.$

O determinante da matriz λ (polinômio característico) deve ser igual a, ou é igualado a, zero.

Objetivo: diagonalizar a matriz C, ou torná-la uma matriz que tem apenas a diagonal principal.

$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$

Usando soma e produto, para 2 e 3, o produto é 6 e a soma, 5.

A solução do polinômio característico são os autovalores.

Encontrando o auto-vetor

Substituir o λ pelo auto-valor.

Para $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

A matriz dos auto-valores multiplicada pelo vetor das variáveis (x, y) deve resultar no vetor nulo.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linha por coluna. $-x + y = 0$ e $-2x + 2y = 0$.

Uma equação é múltipla da outra. O sistema tem infinitas soluções pois é indeterminado (há mais variáveis que linhas no sistema).

As soluções do sistema são todas as soluções do tipo (x, y), porém, com $x = y$. Então y substitui x.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Este é o auto-vetor referente ao auto-valor $\lambda = 2$.

Fazer o mesmo para o auto-valor $\lambda = 3$.

$\begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Em álgebra linear, notação $(a, b, \ldots) = 0$ (vetor igualado a zero) significa igualdade ao *vetor zero*: $(a, b, \ldots) = (0, 0, \ldots)$.

$-2x + y = 0$ e $-2x + y = 0$.

$2x = y \Rightarrow x = \dfrac{y}{2}$.

A solução do tipo (x, y), com $\dfrac{y}{2}$ no lugar de x, é $\left(\dfrac{y}{2}, y\right)$. Ou

$y\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Este é o auto-vetor referente ao auto-valor $\lambda = 3$.

Matriz diagonalizante

Montar matriz com os auto-vetores.

O vetor $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Transpor os vetores, que são colunas, em linhas.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz diagonalizante na matriz original $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Transposição: trocar linhas por colunas.

Diagonalização

Igualar a matriz original (C) à multiplicação da matriz diagonalizante (P) pela matriz desconhecida J e pela matriz inversa de P. Encontrar a matriz J.

A matriz inversa de $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ é

(...)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$D = P \times J \times P^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times J \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos eliminar P multiplicando ambos os lados à esquerda por P^{-1}.

$P^{-1} \times C = \color{red}{P^{-1} \times P} \times J \times P^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times J \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A multiplicação da matriz identidade por qualquer matriz é a matriz, então

$$\begin{pmatrix} 2+2 & 2-4 \\ -1-2 & -1+4 \end{pmatrix} = J \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = J \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Iremos isolar J multiplicando ambos os lados pela inversa do segundo termo do lado direito.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = J \Rightarrow$$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 4-4 \\ -3+3 & -3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

J é a *matriz diagonalizada* de C.