Aluno: Pedro Sobota

Exemplos

$A = (0, 1)$.

$x = 0 \Rightarrow x \in A'$?
$0 = \inf A \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A | 0 < a < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\forall \dot{O}(0)\colon \dot{O}(0) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in A'$.

$x = 1 \Rightarrow x \in A'$?
$1 = \sup A \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A | 1 - \varepsilon < a < 1 \Leftrightarrow$
$\forall \dot{O}(1)\colon \dot{O}(1) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in A'$.

$x \in A \Rightarrow x \in A'$?
$x \in A \Rightarrow$
$\forall \dot{O}(x)\colon \dot{O}(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in A'$.

Exercícios

Ex 1. $A = \mathbb{R} \Rightarrow A' = ?$

Suponha $A' \neq A$. Então $\exists x \notin A = \mathbb{R}$, absurdo.
$A' = \mathbb{R}$.

Ex 2. $A = \mathbb{Q} \Rightarrow A' = ?$

$A' = \mathbb{Q}$.

Ex 3. $A = \mathbb{N} \Rightarrow A' = ?$

$\forall a, b \in \mathbb{N}\colon \exists c \in [a, b] | \dot{O}(c) = \varnothing$. Então $A' = \varnothing$.

Ex 4. $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \Rightarrow A' = ?$

$A = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots.\right\}, \lim_{n \to \infty} \left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$.
$A = (0, 1] \Rightarrow A' = [0, 1]$.

Ex 5. $A \subset [a, b]$, A é conj. infinito. Provar que $\exists$ ao menos um ponto limite de A que $\in [a, b]$.

A negação da afirmação é "todo ponto limite de $A \notin [a, b]$".
Encontrar a implicação de que ser ponto limite faz $\in [a, b]$.
Ser ponto limite está em (1).
Qual a relação de toda vizinhança perfurada de um ponto-limite x com $[a, b]$?

Seja o ponto-limite x.

Seja $A = [a_1, b_1]$.
$x \in A' \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}: (x - \varepsilon, x) \cup (x, x + \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}: \exists a' \in A | (x - \varepsilon < a' < x) \vee (x < a' < x + \varepsilon)$.

(x não necessariamente $\in A$ e não é necessariamente $\leqslant b_1$!)
Se $a' < x$, como $x \leqslant b$, então $a' < b$.
Se $a' > x$, como $x \geqslant a$, então $a' > a$.

Afirmação:
$\exists a' \in A' | a' \in [a, b] \Rightarrow$
$\exists a' \in \mathbb{R} | x - \varepsilon < a' < x + \varepsilon, \forall x$

Contradição: $\forall a' \in A': a' \notin [a, b]$.
$\forall a' \in \mathbb{R} | x - \varepsilon < a' < x + \varepsilon$

Contradição: $\neg(\exists x \in A' | x \in [a, b]) = \forall x \in A': x \notin [a, b]$.
$x \in A' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}: \exists x' \in A | x < x' < x + \varepsilon \vee x > x' > x - \varepsilon$.

Então,
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}: \exists x' \in A | (x < x' < x + \varepsilon \wedge x < a) \vee (x > x' > x - \varepsilon \wedge x > b)$.

Para $x = a - n$, tome $\varepsilon = \left|\frac{a - x}{2}\right|$.

$\neg(\forall \varepsilon: \exists x' | P(x')) = \exists \varepsilon | \forall x': \neg P(x')$.

Então,
$\forall x' \in \mathbb{R} | x < x' < x + \varepsilon: x' < a \Rightarrow x' \notin [a, b]$.