AE1 - Análise Real

1. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$, definida em $A \subset \mathbb{R}$, é contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in A$ e $|x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   Com base na definição acima, seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$.

   Para f ser contínua no ponto a, devemos tomar:

   1. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$
   2. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$
   3. $\delta = \varepsilon$
   4. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$
   5. A função não é contínua.

A função é contínua, mas com derivada constante.

Se $\delta = 3$, toda distância $|x - a|$, onde $0 < x < 3$ deve resultar em distância $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$.

Por exemplo, em $x = 2$, $|2 - a|$ deve implicar $|7 - f(a)| < \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$.

A relação de $3x + 1$ de 7 para 2 não é a mesma entre ε e δ que 1), 2), ou 4), portanto 3).

---

3. Considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} | -5 \leq 2x + 1 < 9\}$ e as afirmações:

   1. X é enumerável.
   2. O ínfimo de X é -5.
   3. O supremo de X é 4.

   São falsas:

   1. 1 e 2
   2. 2
   3. 1 e 3
   4. 1
   5. 3

X não é enumerável.

$2x + 1 \geq -5 \Rightarrow 2x \geq -6 \Rightarrow x \geq -3.$

X é fechado à esquerda, com ínfimo -3.

$2x + 1 < 9 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4.$

X é aberto à direita, com supremo 4.

---

4. Seja o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Z} | -5 \leq 2x + 1 < 9\}$ e considere as afirmações abaixo:

   1. X é enumerável.
   2. O ínfimo de X é -3.
   3. A cardinalidade de X é 8.

   São falsas:

   1. 1
   2. 2 e 3
   3. 2
   4. 1 e 2
   5. 3

X é enumerável pois é discreto.

$2x + 1 \geq -5 \Rightarrow 2x \geq -6 \Rightarrow x \geq -3.$

$2x + 1 < 9 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow x < 4.$

---

5. Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definida em $A \subset \mathbb{R}$, é contínua no ponto $a \in \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in A$ e $|x - a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

   Com base na definição acima, seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 - 2x$.

   Para f ser contínua no ponto a, devemos tomar:

   1. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$
   2. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$
   3. $\delta = \varepsilon$
   4. $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$
   5. A função não é contínua.

Igual à questão 1). Mesma resposta.