Substituição. $\int u \cdot du$, como multiplicação, **com compensação em u**, em que $du = u' \, dx$.

Ex.: integrais tipo razão: $\int \text{sen} \frac{x}{2} \neq \cos \frac{x}{2}$: $u = \frac{x}{2}$, $du = \frac{1}{2} dx$.

Como $du = \frac{dx}{2}$, substituímos du por $2\,du$.

$\int \text{sen} \frac{x}{2} = \int \text{sen}(u) \cdot 2\,du = 2 \int \text{sen}\, u\, du = -2 \cos u = -2 \cos \frac{x}{2}$.

Substituição trigonométrica. Substituir u, uma função em x, para u, uma função em θ (uma das três); e du, o diferencial em x, por $d\theta$, o diferencial em θ. Isolar x e substituir pelo valor trigonométrico. Integrar sobre a função trigonométrica.

Se o integrando contém $a^2 - x^2$, seja $x = a \sin\theta$ e use a identidade $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$.

Se o integrando contém $a^2 + x^2$, seja $x = a \tan\theta$ e use a identidade $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$.

Se o integrando contém $x^2 - a^2$, seja $x = a \sec\theta$ e use a identidade $\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$.

Se a integral contém $\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$, use a substituição $x = \frac{a}{b} \sec\theta$.

Se a integral contém $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$, use a substituição $x = \frac{a}{b} \sin\theta$.

Se a integral contém $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$, use a substituição $x = \frac{a}{b} \tan\theta$.

Exemplo: $\sqrt{2\,(x-1)^2 - 9}$, com $x = x - 1$, $b = \sqrt{2}$ e $a = 3$,

$= \sqrt{b^2 x^2 - a^2} \Rightarrow x - 1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \sec\theta \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{2}}{2} \sec\theta$.

Ou

$\int \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 4x - 7}}\, dx$.

$2x^2 - 4x - 7 = 2\left(x^2 - 2x - \frac{7}{2}\right) =$

$$2\left(x^2 - 2x + 1 - 1 - \frac{7}{2}\right) = 2\left[\left(x^2 - 2x + 1\right) - 1 - \frac{7}{2}\right] = 2\left[(x-1)^2 - \frac{9}{2}\right] = 2\,(x-1)^2 - 9.$$

(Fatoração.)

$\int \frac{x}{\sqrt{2\,(x-1)^2 - 9}}\, dx$. $x = \frac{a}{b} \sec\theta$. $x = x - 1$, $a = 3$, $b = \sqrt{2}$.

(Substituição trigonométrica.)

$x - 1 = \frac{3}{\sqrt{2}} \sec\theta \Rightarrow dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \sec\theta \tan\theta \, d\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{3}$.

(Isolando x e a função trigonométrica.)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2\,(x-1)^2 - 9}}\, dx = \int \frac{1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \sec\theta}{\sqrt{2\left(1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \sec\theta - 1\right)^2 - 9}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \sec\theta \tan\theta \, d\theta\right). \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1. \ldots$$

(Substituindo x e trocando uma função trigonométrica.)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2\,(x-1)^2 - 9}}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\,|\sec\theta + \tan\theta| + \frac{3}{2} \tan\theta + C.$$

$\sec\theta = \frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{3} + \tan\theta\right| + \frac{3}{2}\tan\theta + C.$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{2x^2-4x-7}}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\,(x-1)}{3} + \frac{\sqrt{2x^2-4x-7}}{3}\right| + \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2x^2-4x-7}}{3}\right) + C.$

Encontrando a função trigonométrica em função de x.

Algumas integrais podem ser resolvidas por substituição trigonométrica porém pode ser necessário completar o quadrado ou realizar substituições de u anteriormente.

Trigonometria.

Inversas: arcsin = $\sin^{-1}$, arccos = $\cos^{-1}$, arctan = $\tan^{-1}$, arcsec = $\sec^{-1}$, arccsc = $\csc^{-1}$, arccot = $\cot^{-1}$.

↓ in terms of →	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
$\sin\theta$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\frac{1}{\csc\theta}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$
$\cos\theta$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$		$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\pm\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$
$\tan\theta$	$\pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$		$\pm\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$	$\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\frac{1}{\cot\theta}$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$		$\pm\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}$
$\sec\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\pm\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$		$\pm\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$
$\cot\theta$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\pm\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\pm\sqrt{\csc^2\theta-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta-\sin(3\theta)}{4} \qquad \cos^3\theta = 3\,\frac{\cos\theta+\cos(3\theta)}{4}$$

$$\sin^4\theta = \frac{3-4\cos(2\theta)+\cos(4\theta)}{8} \qquad \cos^4\theta = \frac{3+4\cos(2\theta)+\cos(4\theta)}{8}$$

$$\sin^5\theta = \frac{10\sin\theta-5\sin(3\theta)+\sin(5\theta)}{16} \qquad \cos^5\theta = \frac{10\cos\theta+5\cos(3\theta)+\cos(5\theta)}{16}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (true for any θ, i.e. a polynomial)

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\sin 2t = 2\sin t\cos t$, in reverse, can significantly reduce the complexity of some Calculus problems.

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2(x) - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, useful for eliminating even powers of cosines.

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, useful for eliminating even powers of sines.

Partes.

$\mathbb{d}u = u' \mathbb{d}x = \frac{\mathbb{d}u}{\mathbb{d}x} \mathbb{d}x = \mathbb{d}u.$

$\int u \cdot v' \mathbb{d}x = \int u \cdot \mathbb{d}v = u \cdot v - \int v \cdot \mathbb{d}u.$

Reconhecer um diferencial de qualquer f (ao contrário da substituição).

Frações parciais.

- Coeficiente do termo de maior grau de $Q(x)$ é 1, ou dividir o numerador e denominador por ele.
- Grau de $P(x)$ menor que o de $Q(x)$, caso contrário dividir $P(x)$ por $Q(x)$.
- Descobrir as raízes do denominador.
- Montar como $(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$.
- O $(x - r_n)$ de cada raiz é multiplicado pela constante daquela raiz (A, B...) para totalizar o numerador original.
- O isolamento de x na equação, que coloca a equação em simetria, forma um sistema.
- Resolvendo o sistema, temos os numeradores para a decomposição da fração, que pode ser integrada.

Exemplo.

$\frac{2x-3}{x^2+3x-10}.\ x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2) \Rightarrow$

$\frac{2x-3}{x^2+3x-10} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+5)}{(x+5)(x-2)} \Rightarrow$

$$2x - 3 = A(x-2) + B(x+5) \Rightarrow$$

$$2x - 3 = Ax - 2A + Bx + 5B \Rightarrow$$

$$2x - 3 = x(A+B) - 2A + 5B \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -2A + 5B = -3 \end{cases}.$$

Ou, com três raízes (polinômio de 3^o grau) (p. 35).

$\frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-2)(x+2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+2)}.$

Alternativa ao sistema pra obter A, B, C. Aplicar os valores na expressão.

Para $x = -1, -2 = A(-3)(1) \Rightarrow A = \frac{2}{3}$.

Para $x = 2, 1 = B \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow B = \frac{1}{12}$.

Para $x = -2, -3 = C(-1)(-4) \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$.

Raízes que se repetem.

Exemplo: $\frac{1}{x^3-4x^2} \equiv \frac{A}{(x-0)^2} + \frac{B}{(x-0)^1} + \frac{C}{x-4}$.

Quadrático irredutível sem repetição.

Exemplo: $\frac{x-1}{x^3-2x^2+x-2}$. Raiz $x - 2 = 0$, outra complexa $x^2 + 1 = 0$; $Q(x) = (x-2)(x^2+1)$.

$\frac{x-1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+1)}.$

O numerador do tipo é $Ax + B$, sendo A e B constantes a serem determinadas.

$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ pode ser integrado completando o quadrado e usando $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ (a resposta fica com o arctan).

Quadráticos irredutíveis repetidos é a combinação.

Áreas.

Orientação.

$A = \int_{x=a}^{x=b} f(x) - g(x)\,dx$, onde $f(x)$ é a função “de cima”.

$A = \int_{y=a}^{y=b} f(y) - g(y)\,dy$, onde $f(y)$ é a função “da direta”.

Pontos de intersecção. Se tornam o intervalo $[a, b]$. Ou um intervalo dado. Igualar as funções.
Pontos de intersecção invertem as funções “de cima/de baixo” e “da esquerda/da direita”.
Se torna a soma de áreas.

$A = \int_{x=a}^{x=c} f(x) - g(x)\,dx + \int_{x=c}^{x=b} g(x) - f(x)\,dx$, primeira orientação. Ou

$A = \int_{y=a}^{y=c} f(y) - g(y)\,dy + \int_{y=c}^{y=b} g(y) - f(y)\,dy$, segunda orientação.

Polar. To convert (a point) from rectangular to polar coordinates, use

$x = r\cos\theta$,

$y = r\sin\theta$.

To convert from polar to rectangular coordinates, use

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$\theta = \arctan\frac{y}{x}$.

Revolução. Washer (buraco no meio, duas funções), disk (sem buraco no meio, uma função), cylindrical shell (rotação perpendicular - $f(x)$ rotacionado em torno do eixo y e $g(y)$ em torno do eixo x).

Eixo rev.	**Disks**	**Washers**	**Shells**
	$\int$ área largura	$\int$ área largura	$\int$ circunferência altura largura
Eixo x $(y = 0)$	$\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$	$\int_a^b \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2\,dx$	$\int_c^d 2\pi y[f(y) - g(y)]\,dy$
$y = -k$		$\int_a^b \pi[k + f(x)]^2 - \pi[k + g(x)]^2\,dx$	$\int_c^d 2\pi(y + k)[f(y) - g(y)]\,dy$
$y = k$		$\int_a^b \pi[k - g(x)]^2 - \pi[k - f(x)]^2\,dx$	$\int_c^d 2\pi(k - y)[f(y) - g(y)]\,dy$
Eixo y $(x = 0)$	$\int_c^d \pi[f(y)]^2\,dy$	$\int_c^d \pi[f(y)]^2 - \pi[g(y)]^2\,dy$	$\int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]\,dx$
$x = -k$		$\int_c^d \pi[k + f(y)]^2 - \pi[k + g(y)]^2\,dy$	$\int_a^b 2\pi(x + k)[f(x) - g(x)]\,dx$
$x = k$		$\int_d^d \pi[k - g(y)]^2 - \pi[k - f(y)]^2\,dy$	$\int_a^b 2\pi(k - x)[f(x) - g(x)]\,dx$

```
In[•]:= 103 + 126 + 94
Out[•]= 323
```