Operações

- Rotacionar vetor no plano
- Rotacionar vetor no espaço
- Produto misto entre vetores

Obter matriz da transformação linear.

Álgebra linear distanciando da álgebra e adotando matrizes.

Exemplo 1

Dada uma transformação linear, "tirar a álgebra" da transformação. Obter a matriz da transformação linear.

Exemplo: rotação. Quadrantes. Levar o vetor $(2, 3)$ do primeiro ao quarto quadrante. Do primeiro ao quarto quadrante, x é preservado e y é multiplicado por -1.

Matriz de entrada: $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, base canônica R^2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercícios p. 127

1. Se $T : V \to W$, $v \in V$ e $w \in W$, encontre o domínio V e o contradomínio W da transformação definida pelas equações e determine se T é linear.

$$\begin{cases} w_1 = x + 2y \\ w_2 = -y \\ w_3 = x + y \end{cases}$$

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (-5x + z, y + z, 3x + y)$. Utilize os vetores $u = (1, -1, 3)$ e $v = (0, 4, -3)$ para mostrar que $T(2u - v) = 2T(u) - 3T(v)$.
3. Verifique quais das seguintes funções são transformações lineares:
    1. $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T_1(x, y, z) = (2x - 1, 2z - x)$
    2. $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T_2(x, y) = (5x, y^2)$
    3. $T_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T_3(x, y) = (x + y, x - y, 0)$

    Verificar os dois axiomas: $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u} + \vec{v})$ e $T(\alpha\vec{v}) = \alpha T(\vec{v})$. ($\alpha$ é escalar.)
4. Dada $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, represente geometricamente um vetor genérico $v = (x, y) \in V$ se $T(x, y) = (-3x, 2y)$.
5. Dados os seguintes operadores lineares, determine a matriz canônica $[T]$ de suas transformações lineares:
    1. $T_1(x, y) = (x - 2y, x + y)$
    2. $T_2(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$
6. Dada a matriz canônica $T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ de uma transformação linear, use-a para obter $T(-1, 1, 3)$.
7. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sabendo que $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 1, 0)$.
8. Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(3, 2, 1) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0)$, determine:
    1. $T(x, y)$
    2. $v \in V$ tal que $T(v) = (1, 1)$
    3. $v \in V$ tal que $T(v) = (0, 0)$
        1. Transformação linear injetora, leva ao vetor 0.
9. Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios de ordem 2 $ax^2 + bx + c$. Se representamos qualquer elemento u deste espaço como $u = (a, b, c)$, determine se $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$ é transformação linear.

$T(1), T(x), T(x^2)$

$T((a,b,c)) = T((x^2, x, 1))$

$T((a,b,c)) = \boxed{(2x^2+x, 1-x^2, x)}$ $\quad (a,b,c) \quad (0,0,1) \quad 2x^2+1x+0c =$

$T(u+v) = T(u) + T(v)$

$T((2a_1^2+a_1, 1-b_1^2, c_1) + (2a_2^2+a_2, 1-b_2^2, c_2)) =$ $\quad (2,1,0)$

$T(2(a_1^2+a_2^2)+a_1+a_2, 2-b_1^2-b_2^2, c_1+c_2) =$

$(2a_1^2+a_1, 1-a_1^2, a_1) + (2a_2^2+a_2, 1-a_2^2, a_2) =$

$x^2 \to (2,1,0)$
$x \to (-1,0,1)$
$1 \to (0,1,0)$

$(a,b,c) = ax^2+bx+c$

$T((a,b,c)) = T(ax^2) + T(bx) + T(c)$

$T((a,b,c)) = aT(x^2) + bT(x) + T(c)$

$T((a,b,c)) = a(2x^2+x) + b(1-x^2) + cx$

$T(u+v) = T(u) + T(v)$

$u = (a,b,c), \; v = (d,e,f)$