Fonte: FLEMMING, Diva Marília; WAGNER, Christian. Conjuntos e Elementos da Análise Real. Palhoça: Unisul Virtual, 2015.

Capítulo 1

Seção 1

Exemplo. Demonstrar o princípio da boa-ordenação.

Exemplo. Usando indução, provar que a soma dos n primeiros números naturais é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exemplo. Qual a cardinalidade de $\{x \in \mathbb{R}$ tais que $|5x-3|=7\}$?

Exemplo. Estabelecer a cardinalidade do conjunto $A=\{x \in \mathbb{Z}$ tais que $2 \leqslant 2x+9 \leqslant 8\}$.

Exemplo. São conjuntos infinitos:

O conjunto dos números reais.

O conjunto das parábolas que passam pelo ponto $(0,0)$.

O conjunto dos números pares.

Exemplo. O conjunto I dos números inteiros positivos ímpares é enumerável.

Exemplo. Verificar se o conjunto dos números inteiros é enumerável.

Seção 2

Exemplo. $|12|=12$.

Exemplo. $|-12|=\max\{12,-12\}$.

Exemplo. $|12|=\sqrt{12^2}$.

Exemplo. Determinar os valores de x tais que $|x-a|<\varepsilon$.

Exemplo. Provar que $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

Exemplo. Provar que $|xy| \leqslant |x|\,|y|$.

Exemplo. Provar que $|x|-|y| \leqslant ||x|-|y|| \leqslant |x-y|$.

Exemplo. Resolver a inequação $2x+1<7$.

Exemplo. Determine se os conjuntos são limitados superiormente ou inferiormente, ou limitados, em $\mathbb{Q}$.

$\{1,3,5,7\}$;

$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\{-3n, n \in \mathbb{N}\}$;

Um conjunto finito qualquer.

Exemplo. $\mathbb{R}$ é limitado?

Exemplo. O supremo de $A = \{2,4,6,8\}$ é 8.

Exemplo. Dados $[2,5]$; $(2,5)$; e $[2,5)$, $n = 5$ é cota superior e $n < 5$ não é cota superior de todos.

Exemplo. O ínfimo de $A = \{2,4,6,8\}$ é 2.

Exemplo. Dados $[2,5]$; $(2,5)$; e $[2,5)$, $n = 2$ é cota inferior e $n > 2$ não é cota inferior de todos.

Exemplo. Determine o supremo e ínfimo.

Corpo ordenado $\mathbb{Q}$;

$\{2,5,7,9\}$;

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$;

$\left\{\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\left\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\{2,4,6,8,....\}$.

Seção 3

Exemplo. O corpo $\mathbb{Q}$ é ordenado e não completo.

Exemplo. O corpo $\mathbb{R}$ é completo.

Exemplo. Todo conjunto finito não é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo. O conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ não é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo. O conjunto complementar de $\mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo. Verifique o princípio dos intervalos encaixados para a família de intervalos $I_n = \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

Capítulo 2

Seção 1

Exemplo. $(0,1)$ é aberto.

Exemplo. (a,b), onde $a<b$, é aberto.

Exemplo. $(0,1)\cup(3,4)$ é aberta.

Exemplo. $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ são abertos.

Exemplo. $[0,1]$ não é aberto.

Exemplo. $(-1,1)$ é vizinhança de 0.

Exemplo. $[-1,1]$ é vizinhança de 0, pois $0\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\subset[-1,1]$.

Exemplo. $\operatorname{int}(0,1)=(0,1)$.

Exemplo. $\operatorname{int}[0,2]=(0,2)$.

Exemplo. $\operatorname{int}\mathbb{Q}=\varnothing$.

Exemplo. $\operatorname{int}\{1,2,3,4,\ldots\}=\varnothing$.

Exemplo. $A=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$ é fechado.

Exemplo. $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ são fechados.

Exemplo. $[a,b]$, com $a,b\in\mathbb{R}$, é fechado.

Exemplo. $\{a\}$, com $a\in\mathbb{R}$, é fechado.

Exemplo. Determine se os conjuntos são abertos, fechados, abertos e fechados, ou nenhum dos dois.

$\mathbb{R}$;

$\varnothing$;

$[0,1]\cup[4,5]$;

$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{n},1\right)$;

$(0,\infty)$;

$[0,\infty)$;

$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$.

Exemplo. Seja $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. A não é fechado pois seu complementar não é aberto (não é possível encontrar uma vizinhança de 0 contida em A^c). Porém, A é uma união infinita de conjuntos unitários: $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n}\right\}$, com cada conjunto unitário $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ fechado.

Exemplo. Dado qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}$, todo ponto $a \in A$ é ponto de aderência de A, pois $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ onde $x_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo. Seja $A = (0, 1]$. Então 0 é aderente a A, pois $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} \in (0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo. Qual o fecho do intervalo semiaberto $A = (0, 1]$?

Exemplo. São fechos:

De $[a, b)$, $[a, b]$;

De $(a, b]$, $[a, b]$;

De $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$;

De $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$;

De $[a, b]$, $[a, b]$;

De $[a, +\infty)$, $[a, +\infty)$;

De $(-\infty, b]$, $(-\infty, b]$.

Exemplo. Qual o fecho de $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$? Este conjunto é fechado?

Exemplo. O fecho de qualquer conjunto unitário é ele próprio. Por exemplo, $X = \{2\} \Rightarrow \bar{X} = \{2\}$.

Seção 2

Exemplo. $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Então, $A' = \{0\}$.

Exemplo. Se A é um conjunto finito, então $A' = \varnothing$.

Exemplo. $\mathbb{Z}' = \varnothing$.

Exemplo. Determine os pontos de acumulação e aderência dos conjuntos (se houverem).

$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\mathbb{Q}$;

(a, b).

Exemplo. Determine se todos os pontos dos conjuntos são isolados.

$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\mathbb{N}$;

$(0, 1)$.

Seção 3

Exemplo. Sejam:

$X = [0, 1]$;

$C_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

$C_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$; e

$C_3 = \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right)$.

$C = \{C_1, C_2, C_3\}$ é cobertura aberta de X.

$C' = \{C_1, C_2\}$ é subcobertura aberta de X.

$C'' = \{C_1, C_3\}$ é subcobertura aberta de X.

$C''' = \{C_2, C_3\}$ não é subcobertura de X.

Exemplo. O conjunto finito $K = \{1, 2, ..., n\}$ é compacto.

Exemplo. Qualquer conjunto finito é compacto.

Exemplo. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ é compacto?

Exemplo. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são compactos?

Exemplo. $\mathbb{R}$ não é compacto.

Exemplo. $[0, 1)$ é compacto?

Seção 4

Exemplo. Mostre que a função $f(x) = 2x - 5$ é contínua no ponto $a = 2$.

Exemplo. Mostre que a função $f(x) = x^2$ é contínua no ponto $a = 2$.

Capítulo 3

Seção 1

Exemplo. A derivada da função constante é igual a zero.

Exemplo. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$. Então para todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $f'(x) = a$.

Exemplo. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^n$ com n um número inteiro positivo. Então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Exemplo. Calcule as derivadas das funções.

$f(x) = x^2 - 3x + 1$;

$f(x) = (x-2)(x^2 - 5x)$;

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$;

$h(x) = (x^2 - 2x + 3)^4$;

$y = \cos(4 - 2x)$.

Seção 2

Exemplo. Seja $f(x) = 2x - 1$. Determine a derivada da função inversa.

Solução. Pelo teorema:

> Seja $f\colon A \to B$ uma bijeção com inversa $g = f^{-1}\colon B \to A$. Se f é derivável no ponto $a \in A \cap A'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$, então g é derivável no ponto b se e somente se $f'(a) \neq 0$. Neste caso, $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Como $f'(x) = 2$,

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo. Seja $f\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$. f é derivável em $(-1,1)$ e $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Solução. Com o conceito de função inversa,

$$y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow x = g(y) = \operatorname{sen} y, \text{ com } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Como

$$(\operatorname{sen} y)' \neq 0 \text{ para qualquer } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

então, pelo teorema:

> Seja $f\colon A \to B$ uma bijeção com inversa $g = f^{-1}\colon B \to A$. Se f é derivável no ponto $a \in A \cap A'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$, então g é derivável no ponto b se e somente se $f'(a) \neq 0$. Neste caso, $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Para todo $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, usando a identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}.$$

e substituindo na equação anterior,

$$f'(x) = \frac{1}{(\operatorname{sen} y')} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}}.$$

Como $x = \operatorname{sen} y$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

para todo $x \in (-1, 1)$.

Exemplo. A função $f(x) = x^2$ não possui derivada inversa no ponto $x = 0$.

Solução. $f'(x) = 2x$, e neste, $f'(0) = 0$, contradizendo a hipótese do teorema:

> Seja $f\colon A \to B$ uma bijeção com inversa $g = f^{-1}\colon B \to A$. Se f é derivável no ponto $a \in A \cap A'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$, então g é derivável no ponto b se e somente se $f'(a) \neq 0$. Neste caso, $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Exemplo. Seja $f(x) = 27x^3$. Calcule a derivada da função inversa.

Solução. A inversa de f é dada por

$$x = g(y) = \frac{1}{27}\sqrt[3]{y}.$$

Como

$$f'(x) = 81x^2 > 0 \text{ para todo } x \neq 0,$$

$$g'(y) = \frac{1}{81x^2} = \frac{1}{81\left(\frac{1}{27}\sqrt[3]{y}\right)} = \frac{1}{9y^{\frac{2}{3}}}.$$

Mudando a notação,

$$g'(x) = \frac{1}{9x^{\frac{2}{3}}}.$$

Note que não podemos aplicar o teorema:

> Seja $f\colon A \to B$ uma bijeção com inversa $g = f^{-1}\colon B \to A$. Se f é derivável no ponto $a \in A \cap A'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$, então g é derivável no ponto b se e somente se $f'(a) \neq 0$. Neste caso, $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

pois neste caso $y = 0$ e $y' = 0$.