Aluno: Pedro Sobota

Exercícios

Q 1. $A=[0,1]$. $A_i=?$

$A_i=(0,1)$.

Q 2. $A=(0,1)$. $A_i=?$

$A_i=(0,1)$.

O interior de um aberto é o próprio conjunto.

Todo ponto em A tem vizinhança contida em A.

Q 3. $A=\mathbb{N}$. $A_i=?$

$A_i=\{2,3,...\}$.

Para $B=\{1,2,3\}$, $B_i=\{2\}$, e para $C=\{n,n+1,....\}$, $C_i=\{n+1,n+2,....\}$.

Q 4. $A=(0,1)$. $A_e=?$

$A_e=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$.

Nenhum ponto em A_e tem vizinhança com intersecção não-vazia com A.

Q 5. $A=\mathbb{Q}$. $A_e=?$

$A_e=\varnothing$.

Q 6. $A_e=(\mathcal{C}A)_i$. Demonstrar.

Se A é aberto:

- O complemento de A é fechado e o interior do complemento é aberto.
- O exterior de A é aberto.

Se A é fechado:

- O complemento de A é aberto e o interior do complemento é o próprio complemento.
- O exterior de A é aberto.

$\mathcal{C}A = x \notin A$.

$(\mathcal{C}A)_i = x | x \notin A \wedge \exists O(x) \not\subset A$.

- $x \notin A$ é implicado por $\exists O(x) \not\subset A$.

$A_e = x | \exists O(x) \not\subset A \Rightarrow$

$A_e = (\mathcal{C}A)_i$.

Q 7. $A = (0,1)$. $\partial A = ?$

$\partial A = \{0, 1\}$.

Todos os pontos de A têm vizinhança sem intersecção com $\mathcal{C}A$, então $\partial A \subset \mathcal{C}A$.

Q 8. $A = \mathbb{N}$. $\partial A = ?$

$\mathcal{C}A = \mathbb{R} - \mathbb{N} = ... \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup ...$

$\partial A = \{..., -1, 0, 1, ...\}$.

Q 9. $A = \mathbb{Q}$. $\partial A = ?$

$\mathcal{C}A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. (?)

Q 10. $A = (0,1)$. $\bar{A} = ?$

$\bar{A} = [0, 1] = A \cup A' = (0, 1) \cup \{0, 1\}$.

Q 11. $A = (-\infty, 0] \cup \{1, 2\}$. $\bar{A} = ?$

Os pontos limite de $(-\infty, 0]$ são $(-\infty, 0]$. Os pontos limite de $\{1, 2\}$ são $\varnothing$, pois nenhum ponto tem toda vizinhança furada com intersecção com $\{1, 2\}$. Então $\bar{A} = (-\infty, 0]$.

Ou

O interior de $(-\infty, 0]$ é $(-\infty, 0)$. Como $\{1, 2\}$ não está contido em $(-\infty, 0]$, seu interior importa, e é $\varnothing$ pois há vizinhança de todos os pontos em $\{1, 2\}$ sem intersecção com $\{1, 2\}$. O ponto limite de $(-\infty, 0]$ é $\{0\}$, então $\bar{A} = (-\infty, 0) \cup \{0\} = (-\infty, 0]$.

Q 12. $A = [0, 1]$. Quais são os pontos isolados de A (A_I)?

$A_I = \varnothing$.

Nenhum ponto em A tem vizinhança sem intersecção com A.

Q 13. $A = (0, 1)$. Quais são os pontos isolados de A (A_I)?

$A_I = \varnothing$.

Idem.

Q 14. $A = \mathbb{N}$. Quais são os pontos isolados de A (A_I)?

$A_I = \mathbb{N}$.

Todos os pontos de $\mathbb{N}$ têm vizinhança sem intersecção com $\mathbb{N}$.

Q 15. $A = \mathbb{Q}$. Quais são os pontos isolados de A (A_I)?

$A_I = \mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, qualquer intervalo em $\mathbb{Q}$ contém pontos de $\mathbb{Q}$.

Q 16. $A = (-\infty, 0] \cup \{1, 2\}$. Quais são os pontos isolados de A (A_I)?

$(-\infty, 0]_I = \varnothing$, pois todo ponto não tem vizinhança sem intersecção com $(-\infty, 0]$.

$\{1, 2\}_I = \{1, 2\}$, pois todos os pontos têm vizinhanças sem intersecção com $\{1, 2\}$.

$A_I = \{1, 2\}$.

Q 17. $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. $A' = ?$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Para todo $\varepsilon > 0$, $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, então $0 \in A'$.

Para qualquer $n < \infty$, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $(n - \varepsilon, n + \varepsilon) \cap A = \varnothing$.

Por exemplo, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, qualquer $(n - \varepsilon, n + \varepsilon) \cap A = \varnothing$.

Então $A' = 0$.

Proposições

P 1. *O fecho de um conjunto fechado é o próprio conjunto.*

P 2. *O interior de um conjunto aberto é o próprio conjunto.*

P 3. *O fecho de um conjunto aberto é a união do próprio conjunto com seus pontos-limite.*

P 4. $(a,b)=[a,b]_i$.

P 5. *A união de um aberto com seu fecho é igual à união de seu fecho com o interior de seu fecho.*

P 6. *Um ponto isolado é um ponto não-limite.*

P 7. *Um conjunto discreto é formado por apenas pontos isolados.*

P 8. *Um conjunto aberto é formado por apenas pontos limite. (?)*

P 9. *Se um conjunto é discreto não é aberto, e vice-versa.*

P 10. *Um conjunto aberto é uma vizinhança (aberta) de cada um de seus pontos.*

P 11. *Um conjunto aberto é a união dos conjuntos abertos que contêm cada um de seus pontos.*

P 12. *Os pontos limite de um aberto são seus pontos fronteira.*

P 13. *O exterior de um conjunto aberto é aberto.*

P 14. *O interior do complemento de um conjunto aberto é igual ao interior do complemento de seu fecho. (Questão 6)*

O interior do complemento do fecho de um conjunto aberto é igual ao complemento do fecho, então a proposição pode ser reduzida a

O interior do complemento de um conjunto aberto é igual ao complemento de seu fecho.

x tal que existe vizinhança contida no complemento $=$ x tal que x não pertence ao fecho

x tal que existe vizinhança contida no complemento $=$ x tal que $\neg$(toda vizinhança furada tem intersecção)

x tal que existe vizinhança sem intersecção $=$ x tal que existe vizinhança furada sem intersecção,

sempre verdade porque uma vizinhança não ter intersecção $\Leftrightarrow$ a vizinhança furada de mesmo centro não ter intersecção.