```
In[]:= golfshots = {66, 67, 67, 68, 68, 68, 68, 69, 69, 69, 69, 70, 70, 71, 71, 72, 73, 75}
Out[]= {66, 67, 67, 68, 68, 68, 68, 69, 69, 69, 69, 70, 70, 71, 71, 72, 73, 75}

In[]:= N[golfshots - Mean[golfshots]]
Out[]= {-3.44444, -2.44444, -2.44444, -1.44444, -1.44444,
  -1.44444, -1.44444, -0.444444, -0.444444, -0.444444, -0.444444,
  0.555556, 0.555556, 1.55556, 1.55556, 2.55556, 3.55556, 5.55556}

In[]:= {-3.4444444444444446`, -2.4444444444444446`, -2.4444444444444446`, -1.4444444444444444`,
  -1.4444444444444444`, -1.4444444444444444`, -1.4444444444444444`,
  -0.4444444444444444`, -0.4444444444444444`, -0.4444444444444444`,
  -0.4444444444444444`, 0.5555555555555556`, 0.5555555555555556`, 1.5555555555555556`,
  1.5555555555555556`, 2.5555555555555554`, 3.5555555555555554`, 5.555555555555555`}
Out[]= {-3.44444, -2.44444, -2.44444, -1.44444, -1.44444,
  -1.44444, -1.44444, -0.444444, -0.444444, -0.444444, -0.444444,
  0.555556, 0.555556, 1.55556, 1.55556, 2.55556, 3.55556, 5.55556}

In[]:= N[Total[(golfshots - Mean[golfshots]) ^2] / (Length[golfshots] - 1)]
Out[]= 5.20261

In[]:= N[Variance[golfshots]]
Out[]= 5.20261

In[]:= N[Sqrt[Total[(golfshots - Mean[golfshots])^2] / (Length[golfshots] - 1)]]
Out[]= 2.28092

In[]:= N[StandardDeviation[golfshots]]
Out[]= 2.28092

In[]:= onlyone = {66, 69}
Out[]= {66, 69}

In[]:= N[Mean[onlyone]]
Out[]= 67.5

In[]:= N[onlyone - Mean[onlyone]]
Out[]= {-1.5, 1.5}

In[]:= N[(onlyone - Mean[onlyone]) ^2]
Out[]= {2.25, 2.25}

In[]:= N[Total[(onlyone - Mean[onlyone]) ^2]]
Out[]= 4.5
```

Era por causa do -1...

In[•]:=
```
N[Total[(onlyone - Mean[onlyone])^2] / (Length[onlyone] - 1)]
```
Out[•]=
```
4.5
```

In[•]:=
```
N[Variance[onlyone]]
```
Out[•]=
```
4.5
```

Amostragem

Dados: temperatura horária em dias randômicos de Julho e Agosto/2018.

In[•]:=
```
ts := WeatherData[São Paulo CITY, "Temperature", {{2018, 7, 1, 0}, {2018, 7, 1, 23}}]
```

In[•]:=
```
ts["Path"]
```
Out[•]=
```
{{3 739 392 000, 19 °C}, {3 739 395 600, 18 °C}, {3 739 399 200, 16 °C}, {3 739 424 400, 13 °C},
 {3 739 428 000, 13 °C}, {3 739 431 600, 13 °C}, {3 739 435 200, 18 °C}, {3 739 438 800, 19 °C},
 {3 739 442 400, 21 °C}, {3 739 446 000, 23 °C}, {3 739 449 600, 25 °C}, {3 739 453 200, 25 °C},
 {3 739 456 800, 26 °C}, {3 739 460 400, 26 °C}, {3 739 464 000, 25 °C},
 {3 739 467 600, 21 °C}, {3 739 471 200, 23 °C}, {3 739 474 800, 20 °C}}
```

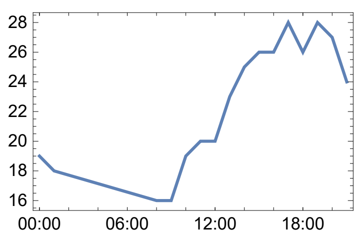
In[•]:=
```
qm = QuantityMagnitude[ts["Values"]]
```
Out[•]=
```
{19, 18, 16, 13, 13, 13, 18, 19, 21, 23, 25, 25, 26, 26, 25, 21, 23, 20}
```

In[•]:=
```
Head[qm]
```
Out[•]=
```
List
```

In[•]:=
```
qm[[1]]
```
Out[•]=
```
19
```

Plots dinâmicos

In[•]:=
```
DateListPlot[WeatherData[São Paulo CITY,"Temperature",Today],ImageSize→Small]
```
Out[•]=

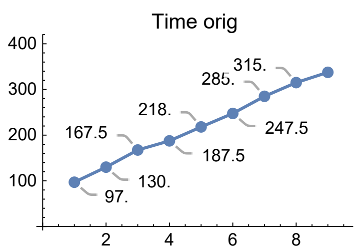


Exemplo do MatLab

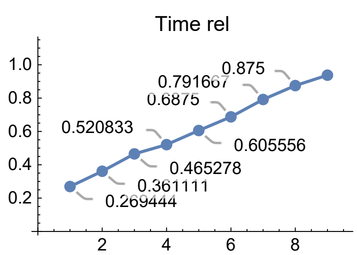
In[•]:=
```
v = {102, 96.8, 97, 92.5, 95, 93, 99.4, 99.8, 105.5}
```
Out[•]=
```
{102, 96.8, 97, 92.5, 95, 93, 99.4, 99.8, 105.5}
```

360 significa dividir todos os valores por 360. Para obter uma escala de 0 a 1 (frequência relativa).

In[•]:=
```
t = {97., 130., 167.5, 187.5, 218., 247.5, 285., 315., 337.5}
ListPlot[t, Joined → True, Mesh → All,
 LabelingFunction → (#1 &), PlotLabel → "Time orig", ImageSize → Small]
t2 = t / 360
ListPlot[t2, Joined → True, Mesh → All,
 LabelingFunction → (#1 &), PlotLabel → "Time rel", ImageSize → Small]
```
Out[•]=
```
{97., 130., 167.5, 187.5, 218., 247.5, 285., 315., 337.5}
```

Out[•]=


Out[•]=
```
{0.269444, 0.361111, 0.465278, 0.520833, 0.605556, 0.6875, 0.791667, 0.875, 0.9375}
```

Out[•]=


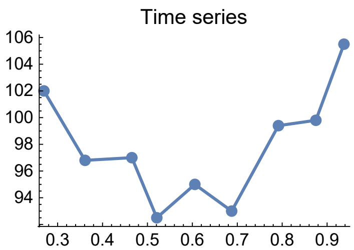
Média dos valores.

In[•]:=
```
Mean[v]
```
Out[•]=
```
97.8889
```

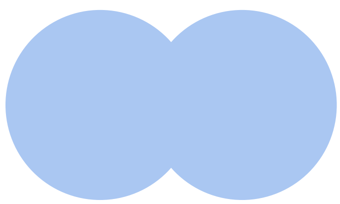
Std. deviation do tempo.

In[∘]:=
```
StandardDeviation[t]
ListPlot[{TimeSeries[v, {t2}]}, Joined → True,
 Mesh → All, PlotLabel → "Time series", ImageSize → Small]
```

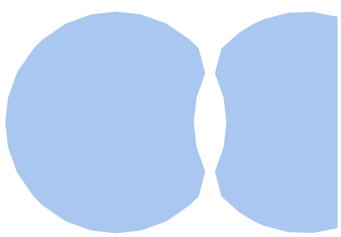
Out[∘]= 82.8064

Out[∘]=


In[∘]:=
```
Region[BooleanRegion[Or, {Disk[{0, 0}, 1], Disk[{1.5, 0}, 1]}], ImageSize → Small]
```

Out[∘]=


In[∘]:=
```
Region[RegionSymmetricDifference[Disk[{0, 0}, 1], Disk[{1.7, 0}, 1]], ImageSize → Small]
```

Out[∘]=


Inferência estatística

[1] Estimação de parâmetros; testes de hipóteses; e predição.

Estimação

Estimando um parâmetro da população.
Parâmetro: uma constante desconhecida (letras gregas).
Hat (^) acima do nome do parâmetro: estimativa, ao invés de representar o valor verdadeiro na população.
A estimação de parâmetro busca encontrar um *intervalo* de valores apropriados para representar um parâmetro desconhecido.
A largura do intervalo representa a precisão do experimento: menos largo, mais preciso; mais largo, menos preciso.

Alargar um intervalo com um grau de confiança *x aumenta* o grau de confiança. Diminuir o intervalo diminui o grau de confiança. Há um equilíbrio entre “quanta confiança” e “quão estreito” o intervalo queremos obter.

Variação estocástica (randômica): sempre presente, mas a ser reduzida o máximo possível no modelo pela introdução de variáveis que expliquem as variações de outra forma.

Exemplo p. 25.

In[∘]:=
```
Clear[s1,s2]
s1={177,169,170,167,176,174,170,174,176,168};
s2={173,174,171,173,170,172,174,170,172,172};
```

In[∘]:=
```
{N[Mean[s1]], N[Mean[s2]]}
```

Out[∘]=
```
{172.1, 172.1}
```

São duas amostras retiradas de populações diferentes.
As médias são iguais, mas...

In[∘]:=
```
{N[Total[(s1 - Mean[s1])^2] / (Length[s1] - 1)],
 N[Total[(s2 - Mean[s2])^2] / (Length[s2] - 1)]}
```

Out[∘]=
```
{13.6556, 2.1}
```

In[∘]:=
```
{N[Variance[s1]], N[Variance[s2]]}
```

Out[∘]=
```
{13.6556, 2.1}
```

As variâncias são muito diferentes. O desvio padrão é na unidade dos dados, vamos calcular.

In[∘]:=
```
{Sqrt[N[Total[(s1 - Mean[s1])^2] / (Length[s1] - 1)]],
 Sqrt[N[Total[(s2 - Mean[s2])^2] / (Length[s2] - 1)]]}
```

Out[∘]=
```
{3.69534, 1.44914}
```

In[∘]:=
```
{N[StandardDeviation[s1]], N[StandardDeviation[s2]]}
```

Out[∘]=
```
{3.69534, 1.44914}
```

Mesmo assim, da primeira amostra é quase o dobro. Portanto a “confiança básica” da primeira amostra é menor que a da segunda amostra.

Resultados antecipados:
Sobre a estimativa da média nas populações.

Tomando um intervalo, p.e., $(171.1, 173.1)$.
Através da amostra 1, podemos ter 95% de confiança que a média está neste intervalo na **população 1** (de onde a amostra veio).
Na amostra 2, porém, a variância é significativamente maior. Isto *reduz* o grau de confiança de que a média na população 2 está dentro do mesmo intervalo, **mesmo a média sendo igual nas duas amostras**. O grau de confiança para o mesmo intervalo na população 2 é de 58%. Para aumentar o grau de confiança, p.e. para o mesmo da população 1, 95%, seria necessário expandir o intervalo

(acompanhando a variância), para (169.5, 174.7).

A diferença nos desvios padrão (que são na mesma unidade destes intervalos) é de 2.2462; a diferença nos intervalos é de 3.2.

```
In[]:= N[StandardDeviation[s2] - StandardDeviation[s1]]
Out[]= -2.2462
```

```
In[]:= (173.1 - 171.1) - (174.7 - 169.5)
Out[]= -3.2
```

```
In[]:= Clear[sb1, sb2]
sb1 = {{177, 27.9}, {169, 24.2}, {170, 25.2}, {167, 26.0}, {176, 26.4},
   {174, 26.8}, {170, 26.9}, {174, 28.1}, {176, 29.0}, {168, 25.3}};
sb2 = {{169, 27.4}, {162, 23.9}, {157, 25.0}, {164, 26.2}, {164, 26.3},
   {163, 27.1}, {161, 27.2}, {171, 27.6}, {171, 28.2}, {166, 26.0}};
```

Plotar os primeiros como *x* e os segundos como *y*.

```
In[]:= {sb1[[All, 1]], sb1[[All, 2]], sb2[[All, 1]], sb2[[All, 2]]}
Out[]= {{177, 169, 170, 167, 176, 174, 170, 174, 176, 168},
  {27.9, 24.2, 25.2, 26., 26.4, 26.8, 26.9, 28.1, 29., 25.3},
  {169, 162, 157, 164, 164, 163, 161, 171, 171, 166},
  {27.4, 23.9, 25., 26.2, 26.3, 27.1, 27.2, 27.6, 28.2, 26.}}
```

Inverter *x* com *y* para este gráfico.

```
In[]:= {MatrixForm[sb1], MatrixForm[sb2]}
```

Out[]= $\left\{\begin{pmatrix} 177 & 27.9 \\ 169 & 24.2 \\ 170 & 25.2 \\ 167 & 26. \\ 176 & 26.4 \\ 174 & 26.8 \\ 170 & 26.9 \\ 174 & 28.1 \\ 176 & 29. \\ 168 & 25.3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 169 & 27.4 \\ 162 & 23.9 \\ 157 & 25. \\ 164 & 26.2 \\ 164 & 26.3 \\ 163 & 27.1 \\ 161 & 27.2 \\ 171 & 27.6 \\ 171 & 28.2 \\ 166 & 26. \end{pmatrix}\right\}$

In[∘]:=
```
{MatrixForm[Table[sb1[[i]][[
     Which[j == 1, 2, j == 2, 1]
    ]], {i, 10}, {j, 2}]],
 MatrixForm[Table[sb2[[i]][[
     Which[j == 1, 2, j == 2, 1]
    ]], {i, 10}, {j, 2}]]}
```

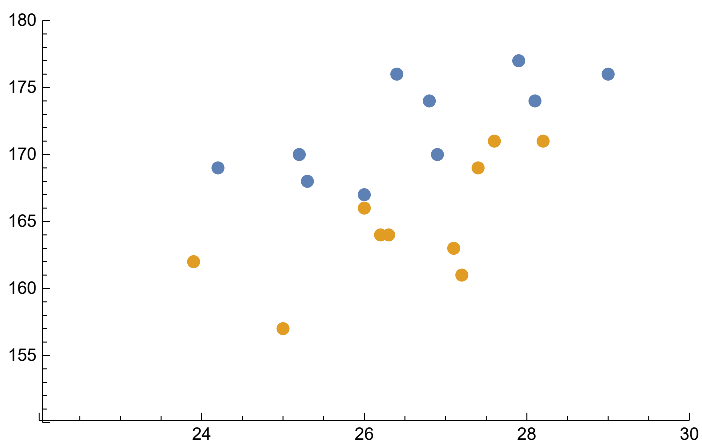
Out[∘]=

$$\left\{\begin{pmatrix} 27.9 & 177 \\ 24.2 & 169 \\ 25.2 & 170 \\ 26. & 167 \\ 26.4 & 176 \\ 26.8 & 174 \\ 26.9 & 170 \\ 28.1 & 174 \\ 29. & 176 \\ 25.3 & 168 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27.4 & 169 \\ 23.9 & 162 \\ 25. & 157 \\ 26.2 & 164 \\ 26.3 & 164 \\ 27.1 & 163 \\ 27.2 & 161 \\ 27.6 & 171 \\ 28.2 & 171 \\ 26. & 166 \end{pmatrix}\right\}$$

In[∘]:=
```
Clear[sb1inv,sb2inv]
sb1inv=Table[sb1[[i]][[
    Which[j==1,2,j==2,1]
]],{i,10},{j,2}];
sb2inv=Table[sb2[[i]][[
    Which[j==1,2,j==2,1]
]],{i,10},{j,2}];
```

In[∘]:=
```
ListPlot[{sb1inv, sb2inv}, PlotRange → {{22, 30}, {150, 180}}, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```

Out[∘]=



Saber se **sb1** e **sb2** diferem na população. O grau de confiança que as **médias** na população diferem por **entre** 3.4 e 11.2, ou seja, que o intervalo da diferença das médias é até (3.4, 11.2) é 95%.

Em ambos os exemplos, estamos com duas populações diferentes (embora no segundo seja um experimento/condição diferente na segunda população). No primeiro, estamos estimando médias para duas populações diferentes e comparando graus de confiança e intervalos. No segundo, estamos estimando a diferença entre as médias.

Exemplo do ponto crítico: ao aumentar a confiança da diferença entre as médias para 99%, o intervalo cresce para (2.0, 12.6). Ao aumentar para 99.9%, o intervalo aceitável entre as médias chega no limiar inferior a 0: $(0,\ 14.5)$. Neste ponto, a diferença poderia concebivelmente não existir e anulou-se a **hipótese** que um medicamento seria *sempre* superior ao outro. Aumentando mais a confiança, 99.91%, aceita-se a hipótese que o segundo medicamento possa (embora com chance remota) ser melhor que o primeiro.

O *teste da hipótese* que o segundo medicamento é *sempre* melhor que o primeiro é encontrar o *valor* que determina essa condição e calcular o intervalo que termina neste valor e o seu respectivo grau de confiança.

Por exemplo: a diferença entre as médias ser ≥ 0 (em favor de B). Ela é ≥ 0 em um intervalo de médias $(0,\ 14.5)$ e para este intervalo o nível de confiança é 99.9%. **Quanto maior o intervalo de confiança** neste caso, mais “convincente” a hipótese.
Portanto este é um caminho, achar o “valor crítico” e testar a hipótese.
A “significância estatística” está em 95% de confiança (resultado “estatisticamente significante”).
P-value: $1 - c / 100$: grau de confiança 95, p-value 0.05.
Então pode ser reportado o intervalo de confiança resultante, ou o grau de confiança deste intervalo.

Testes de hipóteses

Tomar um valor para o parâmetro e *verificar* se ele é “razoável”: aceito ou rejeitado.
Geralmente, como há *n* valores inclusos em uma estimativa com um certo grau de confiança, um valor de teste de hipótese tem um significado especial (maior que *apenas* estar em um intervalo) — valores críticos. Geralmente um valor contribuído por uma *teoria*. Teste com valor específico sem significado é irrelevante — sendo os intervalos preferíveis neste caso.

Likelihood

Qual a probabilidade de um valor de parâmetro ser *x em uma distribuição*. Por exemplo, a distribuição “gerada” por um valor específico de um (outro) parâmetro.

Cada distribuição tem uma probabilidade para cada valor. Encontrar a distribuição que tem um valor *x* com probabilidade *y*?
Likelihood function: a função com todos os possíveis valores do parâmetro em todas as possíveis distribuições? (Para identificar valores específicos.)

Match de distribuição × dados (“fit” de distribuição a dados). Qual a distribuição que melhor se “encaixa” nos dados? Em dois passos: 1) a média; 2) o desvio padrão (os dois parâmetros que “descrevem” a distribuição normal). Ou seja, primeiro ajustar o centro, depois a “agudez”.

No cálculo das probabilidades, alteramos a “posição” para obter a probabilidade (área) dada uma distribuição (média, desvio padrão).
No cálculo dos “likelihoods”, alteramos a distribuição para obter, em uma posição, a probabilidade (valor de *y*).[2]

Notações:

pr (dados | distribuição) e

L (distribuição | dados), respectivamente.

1 Diggle, Chetwynd. Statistics and Scientific Method - An Introduction for Students and Researchers. 2011 Oxford University Press

2 StatQuest: Probability vs Likelihood https://www.youtube.com/watch?v=pYxNSUDSFH4