Crítica: Modelagem matemática e simulação numérica computacional de um pêndulo linear amortecido não forçado

“Na mecânica, os sistemas dinâmicos apresentam uma representação característica visto que, devido às leis do movimento, a maior derivada existente corresponde à aceleração, isto é, uma derivada de segunda ordem.”

As equações:

$$m\, l\, \frac{d^2\theta}{dt^2} + c\, l\, \frac{d\theta}{dt} + m\, g \sin\theta = 0$$

$$m\, l\, \frac{d^2\theta}{dt^2} + c\, l\, \frac{d\theta}{dt} + m\, g\, \theta = 0$$

Equações diferenciais. (A segunda é ordinária — linear — e pode ser resolvida *analiticamente*.)

Comparação de soluções analíticas e numéricas: a solução da segunda equação pelo método analítico é usado para comparar as soluções numéricas citadas. As “simulações” numéricas são executadas no MatLab.

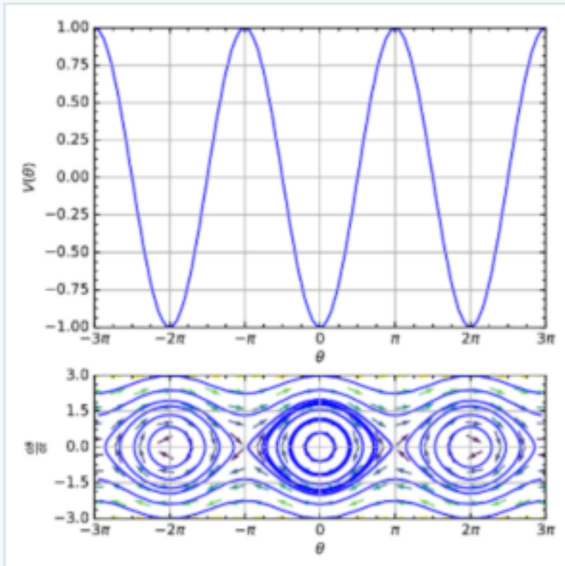
O paper é sobre a aplicação de uma propriedade do cálculo para linearizar uma PDE não linear (com seno) e possibilitar, assim, a sua resolução analítica, que é aproximada.
Neste processo, a PDE é convertida de uma equação diferencial parcial para uma equação diferencial ordinária. (Quem disse?)
Ok, mas não, o paper é sobre a comparação dos métodos numéricos.

A equação nesta forma tem uma limitação no valor de uma variável (θ). A equação na forma não-linear não tem esta limitação e é denominado representativo do problema físico real.

Subsequentemente, a forma não linear da equação é resolvida por métodos numéricos variados, que são comparados.

A PDE não linear advém diretamente da modelagem do problema.

É dada uma introdução sobre as características do sistema não-linear, principalmente no que tange à representação do *retrato de fase* de tal sistema. (O que é um retrato de fase?)



Potential energy and phase portrait of a simple pendulum. Note that the x-axis, being angular, wraps onto itself after every 2π radians.

É dada também uma introdução sobre as características dos sistemas dinâmicos na área estudada, da Mecânica.

A equação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sqrt{\frac{g}{l}}^{\,2} \sin\theta = 0$$ (Beléndez)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$ (Russell[1], Ballard[2], Brown[3])

E a equação anterior...

$$-m\,g \sin\theta\,L \;=\; m\,L^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$ (Russell)

$$-m\,g \sin\theta = m\,l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$ (Brown)

Variáveis...

m = massa da ponta do pêndulo

g = aceleração da gravidade

L = comprimento do cordão

θ = ângulo inicial

O que é a variável c no original? Unidade: $N * s / m$.

Paper Beléndez[4]

Undamped = não amortecido. O original é amortecido.

The differential equation modelling the free undamped simple pendulum is

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0{}^2 \sin\theta = 0, \text{ onde}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Because of the presence of the trigonometric function $\sin\theta$, this is a nonlinear differential equation. Although straightforward in appearance, is in fact rather difficult to solve because of the nonlinearity of the term $\sin\theta$.

As we can see, for amplitudes $\theta_0 < 0.75\,\pi$ ($135\,^{\circ}$) it would be possible to use the approximate expression

$$\theta(t) = 2\arcsin\left\{\sin\frac{\theta_0}{2}\, s\, n\left[K\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right) - \omega_0\, t;\ \sin^2\frac{\theta_0}{2}\right]\right\}$$

for the angular displacement of the pendulum and this equation corresponds to a simple harmonic oscillator (...).

However, for larger initial amplitudes it is easy to see that the angular displacement does not correspond to a simple harmonic oscillator and the exact expression must be considered.

We can conclude that for amplitudes as high as $135\,^{\circ}$ the effect of the nonlinearity is seen only in the fact that the angular frequency of the oscillation ω depends on the amplitude θ_0 of the motion. For these amplitudes the harmonic function provides an excellent approximation to the periodic solution of (the first equation).

Linearidade

Wikipedia[5]:

Sistema não linear: a taxa de mudança na saída não é proporcional à taxa de mudança na entrada. (Básico.)

Sistemas dinâmicos lineares, descrevendo mudanças em variáveis sobre o tempo, podem parecer caóticos, imprevisíveis, ou contraintuitivos, em contraste a sistemas lineares mais simples.

Em um sistema não linear de equações, as equações não podem ser escritas como combinações lineares de suas **variáveis ou funções**.

Uma equação diferencial é dita linear se é linear em termos da **função desconhecida e suas derivadas**, mesmo se for não-linear em termos das suas demais variáveis.

Como equações dinâmicas não-lineares são difíceis de resolver, sistemas não-lineares são comumente aproximados por equações lineares (linearização).

Problemas envolvendo equações diferenciais não-lineares são extremamente diversos, e os métodos de solução ou análise são dependentes dos problemas.

Uma das maiores dificuldades com problemas não-lineares é não ser sempre possível combinar soluções conhecidas na formação de novas soluções (princípio da superposição). É geralmente possível encontrar diversas soluções específicas para equações não-lineares, porém a falta do princípio da superposição não possibilita a construção de novas soluções.

It may be shown that the motion of a pendulum can be described by the *dimensionless* nonlinear equation $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin\theta = 0$, where θ is the angle the pendulum forms with its rest position.

One approach to “solving” this equation is to use $\frac{d\theta}{dt}$ as an *integrating factor*, which would eventually yield $\int \frac{d\theta}{\sqrt{C_0 + 2\cos\theta}} = t + C_1$, which is an implicit solution involving an *elliptic integral*. It does not generally have many uses because most of the nature of the solution is hidden in the *nonelementary integral*.

Another way to approach the problem is to linearize any nonlinearities (**the sine function** term in this case) at the various points of interest through *Taylor expansions*. For example, the linearization at $\theta = 0$, called the **small angle approximation**, is $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0$, since $\sin\theta \approx \theta$ for $\theta \approx 0$.

This is a simple harmonic oscillator corresponding to oscillations of the pendulum near the bottom of its path.

```
In[∘]:= {D[x^3, {x, 1}], D[x^3, {x, 2}]}
Out[∘]= {3 x^2, 6 x}

In[∘]:= D[θ, {t, 2}]
Out[∘]= 0

In[∘]:= D[θ, {t, 2}] + Sin[θ] == 0
Out[∘]= Sin[θ] == 0

DSolve[D[θ, {t, 2}] + Sin[θ] == 0,
```

[6]: Solving a differential equation consists essentially in finding the form of an unknown function.
In standard mathematical notation, one typically represents solutions to differential equations by explicitly introducing “dummy variables” to represent the arguments of the functions that appear. If all you need is a symbolic form for the solution, then introducing such dummy variables may be conve-

nient. However, if you actually intend to use the solution in a variety of other computations, then you will usually find it better to get the solution in pure-function form, without dummy variables. Notice that this form, while easy to represent in the Wolfram Language, has no direct analog in standard mathematical notation.

You can add constraints and boundary conditions for differential equations by explicitly giving additional equations such as `y[0]==0`.

If you ask the Wolfram Language to solve a set of differential equations and you do not give any constraints or boundary conditions, then the Wolfram Language will try to find a *general solution* to your equations. This general solution will involve various undetermined constants. One new constant is introduced for each order of derivative in each equation you give. The default is that these constants are named `C[n]`, where the index `n` starts at 1 for each invocation of `DSolve`.

The general solution of a fourth-order equation involves four undetermined constants. Each independent initial or boundary condition furnished reduces the number of undetermined constants by one.

You should realize that finding exact formulas for the solutions to differential equations is a difficult matter. In fact, there are only fairly few kinds of equations for which such formulas can be found, at least in terms of standard mathematical functions.

If you have only a single linear differential equation, and it involves only a first derivative of the function you are solving for, then it turns out that the solution can always be found just by doing integrals. But as soon as you have more than one differential equation, or more than a first-order derivative, this is no longer true. However, some simple second-order linear differential equations can nevertheless be solved using various special functions from “Special Functions”. For nonlinear differential equations, only rather special cases can usually ever be solved in terms of standard mathematical functions.

This is Airy’s equation, which is solved in terms of Airy functions. (...) This equation comes out in terms of Bessel functions. (...) This requires Mathieu functions. (...) And this Legendre functions. (...) Occasionally second-order linear equations can be solved using only elementary functions. (...) Beyond second order, the kinds of functions needed to solve even fairly simple linear differential equations become extremely complicated. At third order, the generalized `MeijerG` function can sometimes be used, but at fourth order and beyond absolutely no standard mathematical functions are typically adequate, except in very special cases.

For nonlinear differential equations, only rather special cases can usually ever be solved in terms of standard mathematical functions. Nevertheless, `DSolve` includes fairly general procedures which allow it to handle almost all nonlinear differential equations whose solutions are found in standard reference books.

`DSolve` is set up to handle not only *ordinary differential equations* in which just a single independent variable appears, but also *partial differential equations* in which two or more independent variables appear.

The basic mathematics of partial differential equations is considerably more complicated than that of ordinary differential equations. One feature is that whereas the general solution to an ordinary differential equation involves only arbitrary constants, the general solution to a partial differential equation, if it can be found at all, must involve arbitrary functions. Indeed, with *m* independent variables, arbitrary

functions of *m* – 1 arguments appear. **`DSolve`** by default names these functions **`C[n]`**.
For an ordinary differential equation, it is guaranteed that a general solution must exist, with the property that adding initial or boundary conditions simply corresponds to forcing specific choices for arbitrary constants in the solution. But for partial differential equations this is no longer true. Indeed, it is only for linear partial differential and a few other special types that such general solutions exist. Other partial differential equations can be solved only when specific initial or boundary values are given, and in the vast majority of cases no solutions can be found as exact formulas in terms of standard mathematical functions.
Most of the time, ODEs are accompanied by boundary and initial conditions. Thus, evaluation of derivatives of functions for specific values of variables needs to be used frequently.

---

[2]: “This is where MATLAB can prove to be a great asset because (the non-linear) equation cannot be solved in terms of elementary functions.”

Este paper tem uma comparação de métodos. Verificar se compara com a comparação de métodos do original. Como se encaixam os métodos descritos em cada paper?

Problemas ou coisas a adicionar?

- As citações [1, 2] são vagas, a livros inteiros, e as afirmações feitas também são múltiplas. Seria interessante apontar os capítulos ou páginas e as afirmações exatas citadas nos trabalhos.
- Os resultados obtidos pelos métodos numéricos não são apontados numericamente, apenas graficamente, via em que é necessário estimar os valores visualmente. Seria interessante uma quantificação numérica da comparação dos resultados, por exemplo...
- Não é apresentada a resolução da equação analítica e fim de comparar o resultado analítico com o método numérico.
- Poderia ser interessante a apresentação de um retrato de fase do sistema em análise, a fim de ilustrar a complexidade.
- As premissas do sistema não foram listadas. Exemplo: fricção com o ar nula, movimento do pêndulo em duas dimensões (e não três), braço esticado e sem massa, gravidade da Terra.
- As variáveis que compõem a equação inicial (obtida da figura) não foram citadas (por exemplo, a gravidade não está na figura).
- Os eixos verticais nos gráficos não estão rotulados.

1 https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/Pendulum/Pendula.html

2 https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/nmf/Njihalo.pdf

3 https://webhome.phy.duke.edu/~rgb/Class/phy51/phy51/node22.html

4 http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172007000400024

5 https://en.wikipedia.org/wiki/Nonlinear_system

6 howto/UseDerivativesForSettingUpDifferentialEquations