Questões sobre transformações lineares

De que forma funções arbitrárias podem ser expressas como transformações lineares?

O domínio e codomínio da função devem ser convertidos em espaços vetoriais.

Por exemplo, $f(x) = x$.

O ponto x é o vetor $(0, x)$.

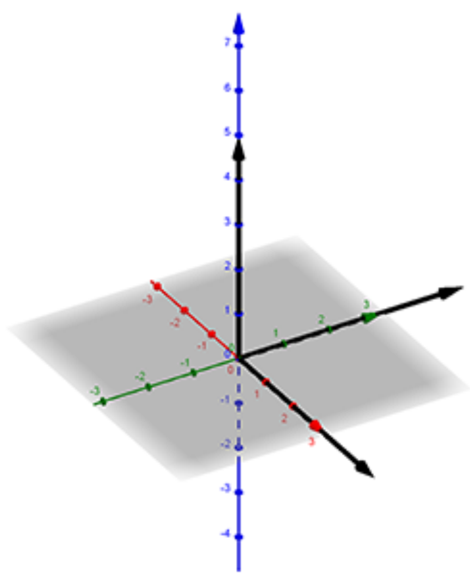
O ponto $f(x)$ é o vetor $(0,\ f(x))$.

Então, pela função $f(x)$ os vetores $(0, x)$ são convertidos em vetores $(0, f(x))$.

Dimensão

Um vetor é uma lista de elementos, cada elemento relativo a uma *dimensão*. Em um vetor numérico, os elementos denotam coordenadas, ou *distâncias* de uma *origem*, naquela dimensão. Por exemplo, o vetor $(2, 1, 4)$ denota o conjunto das três coordenadas: $(0, 2)$ no plano da dimensão formada pelos vetores $(1, 0,\ 0)$ e $(0, 1, 0)$; $(0, 1)$ no plano da dimensão formada pelos vetores $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$; e $(0, 4)$ no plano da dimensão formada pelos vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Cada uma das dimensões se forma por um par de vetores *linearmente independentes* (a ver), e um trio de vetores linearmente independentes forma, por combinação, *três* dimensões.

Out[ ]=



Base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ {(0, 0, 5), (0, 5, 0), (5, 0, 0)}

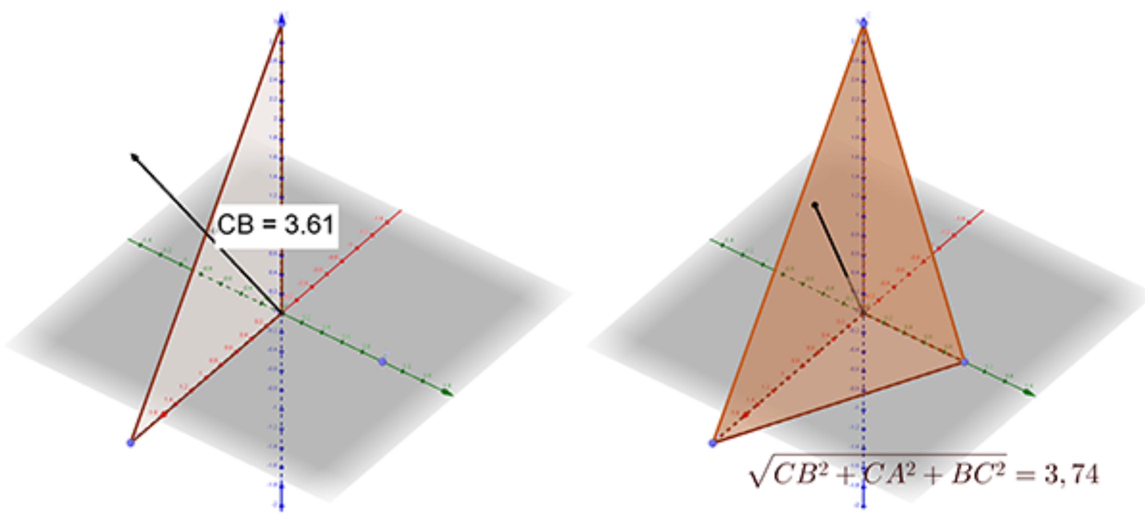
Produto escalar

Um espaço vetorial admite algumas operações diferentes de produto: uma é o produto *escalar*, em que “escalar” não se refere a um dos operandos ser um escalar (os operandos são vetores), mas sim ao resultado ser um escalar, e que é a soma das multiplicações de cada elemento:

Out[∘]=
```
        Produto escalar
{a,b}·{c,d}=a c + b d
{a,b,c}·{d,e,f}=a d + b e + c f
{2,3}·{5,2}=16
{2,3}·{-5,-2}=16
{0,0}·{0,0}=0
{1,2,3}·{4,5,6}=32
```

Magnitude

Um vetor forma um polígono ou volume, dependendo em sua dimensionalidade. Por exemplo, o vetor $(2, 3)$ forma um triângulo. A *magnitude* do vetor é a distância euclidiana entre os componentes não-origem do vetor. Por exemplo:



In[∘]:= $\{N@\sqrt{2^2+3^2}, N@\sqrt{1^2+2^2+3^2}\}$

Out[∘]= {3.60555, 3.74166}

O produto escalar entre dois vetores representa a multiplicação das magnitudes dos vetores. Por exemplo:

In[∘]:= $\{N[\sqrt{1^2+2^2+3^2} \times \sqrt{4^2+5^2+6^2}], N[\{1, 2, 3\}.\{4, 5, 6\}]\}$

Out[∘]= {32.8329, 32.}

Um vetor *gera* outro quando é uma *multiplicação escalar* do outro. Ex.:

$4 \cdot (0, 0, 5) = (0, 0, 20)$, então $(0, 0, 5)$ *gera* $(0, 0, 20)$.

Produto vetorial

Outro produto é o produto *vetorial*, que é um vetor.

Out[ ]= Produto vetorial

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,d \\ b\,e \\ c\,f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix}$$

O *produto misto* é primeiro, o produto vetorial de dois vetores, depois o produto escalar deste vetorial com outro vetor.

Out[ ]= Produto misto

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,d \\ b\,e \\ c\,f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = a\,d\,g + b\,e\,h + c\,f\,i$$

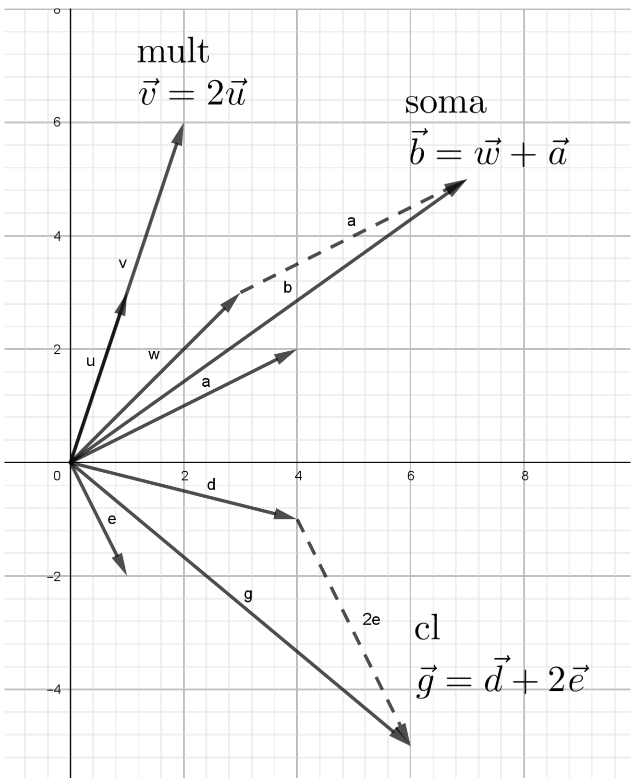
$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 270$$

Dependência linear

A soma de vetores pode descrever vetores arbitrários em uma dimensão de um espaço vetorial.
Aos vetores gerados ou expressos como soma de outros vetores, denominamos vetores linearmente dependentes destes.

Para utilizarmos vetores diferentes dos vetores-base na soma, porém, é necessário gerar os demais vetores que não os base.
Os demais vetores podem ser gerados através da multiplicação dos vetores da base.
Assim, todos os vetores somáveis em múltiplos são obtidos e formam uma *dimensão*.

Out[ ]=



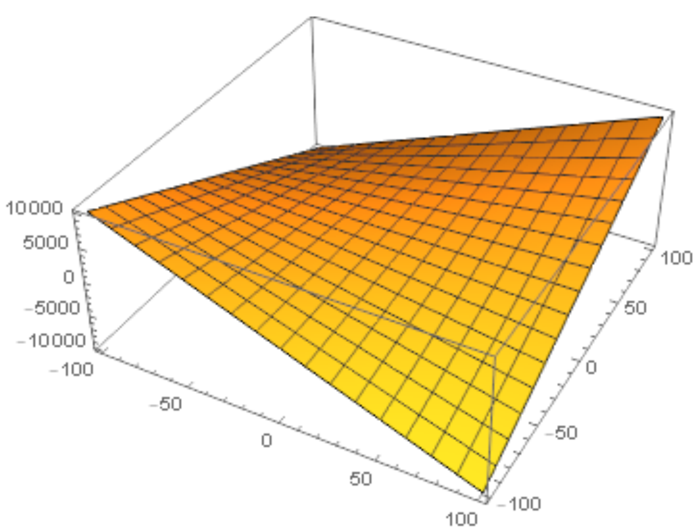
(Vetores multiplicados, somados e somados em múltiplos)

O espaço vetorial é a combinação de uma ou mais dimensões.

Espaço dos produtos escalares

Estes são os produtos escalares dos vetores de tamanho um:

Out[39]=



Produtos escalares$(a)\cdot(b)$

O espaço dos produtos escalares entre vetores de tamanho n tem $2\,n$ dimensões.

Porquê os produtos escalares são positivos?