Recap derivadas. Hallet, p. 116.

Derivada de uma função multiplicada por uma constante.

$$\frac{d}{dx} c\, f(x) = c\, f'(x).$$

Derivada de soma e subtração.

$$\frac{d}{dx} f(x) \pm g(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

Derivada de exponentes (“power rule”).

$$\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1}.$$

Derivadas de polinomiais (combinar (?)).

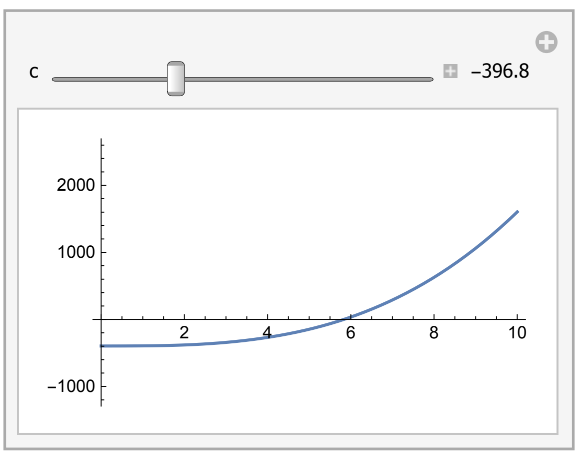
$$\left(5 x^2 + 3 x + 2\right)' = 10 x + 3.$$

$$\left(\sqrt{3 x^7} - \frac{x^5}{5} + \pi\right)' =$$

$$\left(3 x^{7 \cdot \frac{1}{2}}\right)' - 5 x^4 = \frac{7}{2} \cdot 3 x^{\frac{7}{2}-1} - 5 x^4 = \frac{7}{2} \cdot 3 x^{\frac{5}{2}} - 5 x^4 = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{3 x^5} - 5 x^4 = 7 \sqrt{3 x^5} - 10 x^4.$$

In[ ]:=
```
Manipulate[Plot[2 x^3 + Sin[2 x]/3 + c, {x, 0, 10}, ImageSize → 250, PlotRange → {-1300, 2700}],
 {{c, 0}, -1000, 1000, .1, Appearance → "Labeled"}]
```

Out[ ]=

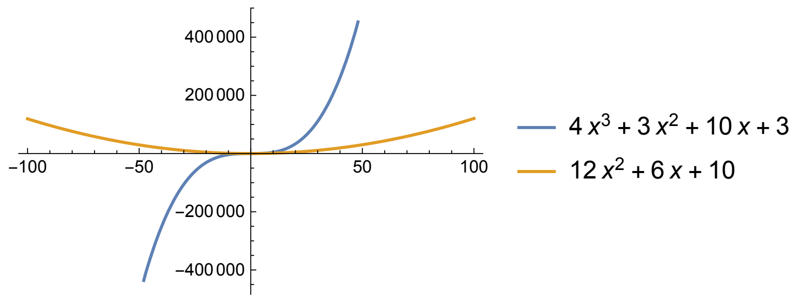


Webaula 1: $\frac{2}{\sqrt{x}} = 2 x^{-\frac{1}{2}}$. Porque $\frac{2}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x}\right)^{-1} = 2 x^{-\frac{1}{2}}$.

Integral indefinida é a família de antiderivadas da função.
Integral definida é dado um intervalo no domínio de uma função, a área sob a função.
(Ou, mais geralmente, uma região no domínio da função, representando a área, volume, massa, etc. da função na região.)

Lembrando a geometria do cálculo diferencial... Cada derivada tira um grau de cada variável no polinômio.

In[ ]:=
```
Plot[{4 x^3 + 3 x^2 + 10 x + 3, 12 x^2 + 6 x + 10},
  {x, -100, 100}, ImageSize → 250, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[ ]=


Portanto, cada integral indefinida adiciona um grau a cada variável no polinômio.

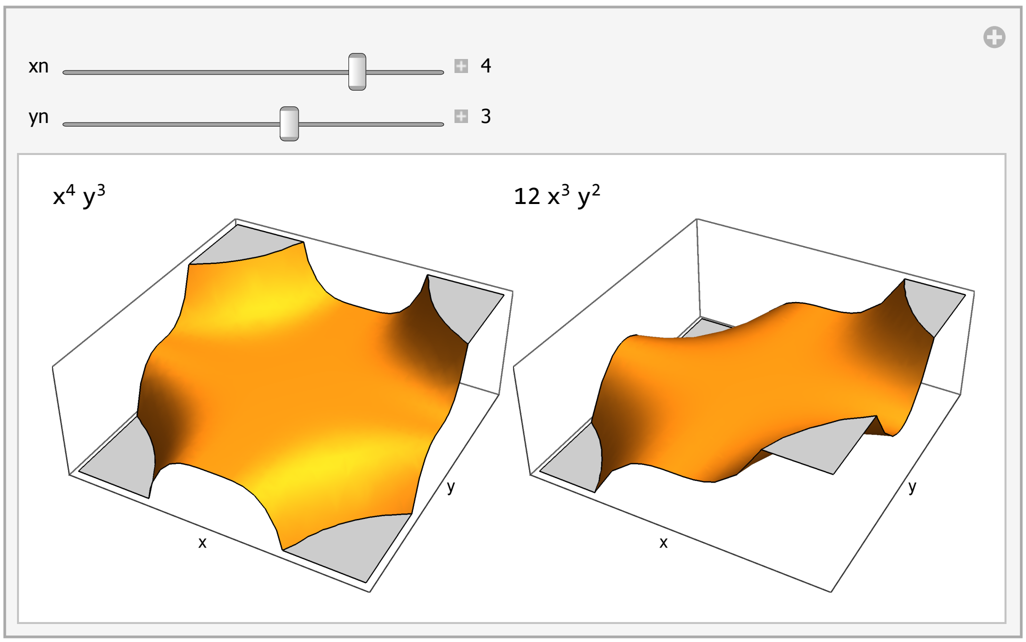
Derivada é taxa de mudança, tira um grau da função por causa disso.
Integral indefinida é o contrário, adiciona um grau à função.
Integral definida porém é um cálculo numérico. É área da linha, volume do plano, “massa” do volume, etc..

Porém, há grau, e variáveis (dimensões).

Função não tem grau, dimensão tem. Função tem um grau para cada dimensão.
A derivada ou integral indefinida é operada sobre todas as dimensões da função, então a relação dos graus das variáveis é mantida.

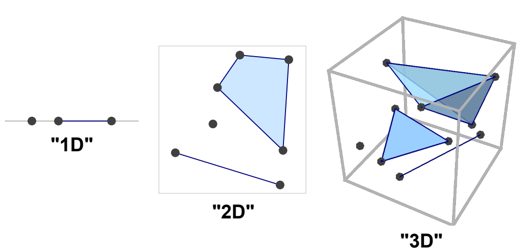
In[•]:=
```
Manipulate[
 Row[{
   Column[{
     x^xn y^yn,
     Plot3D[x^xn y^yn, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, ImageSize → 240,
      AxesLabel → {"x", "y"}, PlotTheme → "Minimal"]
    }],
   Column[{
     D[x^xn y^yn, x, y],
     Plot3D[Evaluate[D[(x^xn y^yn), x, y]], {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
      ImageSize → 240, AxesLabel → {"x", "y"}, PlotTheme → "Minimal"]
    }]
  }]
 , {{xn, 2}, 0, 5, 1, Appearance → "Labeled"}, {{yn, 3}, 0, 5, 1, Appearance → "Labeled"}]
```

Out[•]=



Derivação consecutiva (sobre a ordem) é chamada derivação dupla, tripla, etc. Integração dupla, tripla, etc. já é sobre a quantidade de variáveis.

Uma **região** é uma generalização do **intervalo**.



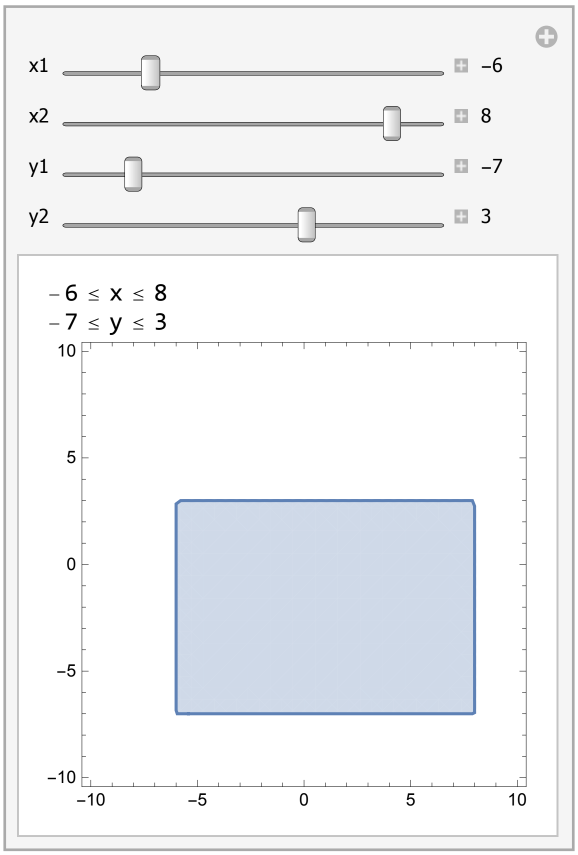
A integração de uma função unidimensional é feita em uma região de 1 dimensão.
A integração de uma função bidimensional é feita em uma região de 2 dimensões.

Etc...

Essas regiões dizem respeito a que seção da função se está integrando, e assume-se ser a função contínua nesta região.

In[ ]:=
```
Manipulate[
 Column[{
   x1 ≤ x ≤ x2,
   y1 ≤ y ≤ y2,
   RegionPlot[x1 ≤ x ≤ x2 && y1 ≤ y ≤ y2, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, ImageSize → 250]
  }]
 , {{x1, -6}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{x2, 8}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{y1, -7}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{y2, 3}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"}]
```

Out[ ]=



dA é uma nomenclatura idiota para $dx\,dy$, porque em 2 dimensões a região é uma área (“A”). Em qualquer número de dimensões $\neq 2$ a nomenclatura não vale mais portanto é idiota.

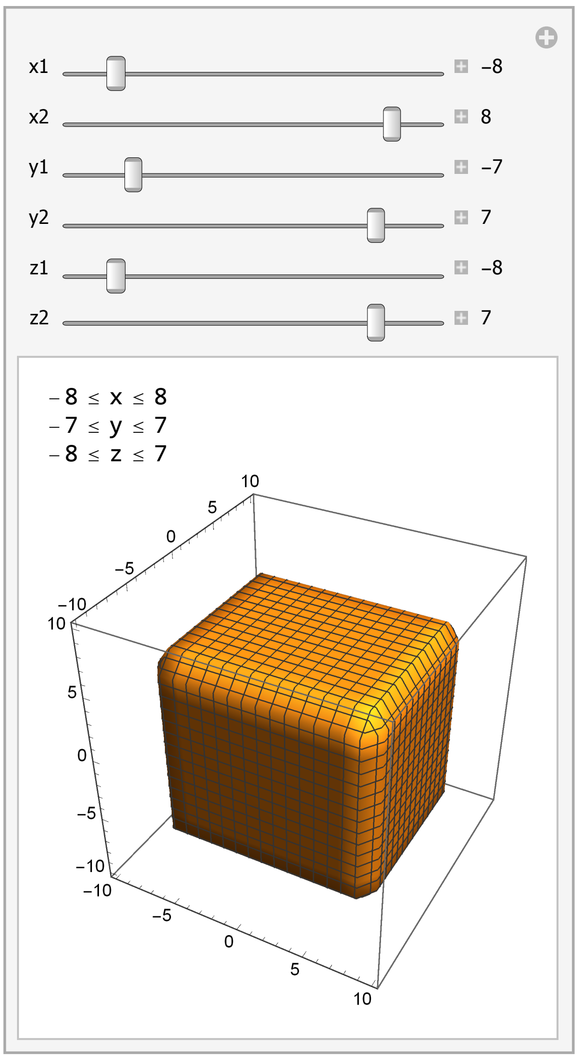
Uma integral definida é definida (ou não) em uma região para uma função. Em uma linha,

$\int_a^b f(x)\, dx$; em um plano, $\int\int_R f(x,\, y)\, dx\, dy$, etc..

Ou seja, $a,\, b$ na integral é mais uma notação idiota. Essas notações só existem por causa das aplicações. O certo é R, toda integral definida é definida em uma região de n dimensões, deveria ser: $\int_{R_1} f(x)\, dx$ e $\int_{R_2} f(x,\, y)\, dx\, dy$, etc., e para especificar, $\int_{[a,b[} f(x)\, dx$ e $\int_{\substack{[a,b[\\ ]c,d]}} f(x,\, y)\, dx\, dy$, por exemplo.

In[ ]:=
```
Manipulate[
 Column[{
   x1 ≤ x ≤ x2,
   y1 ≤ y ≤ y2,
   z1 ≤ z ≤ z2,
   RegionPlot3D[x1 ≤ x ≤ x2 && y1 ≤ y ≤ y2 && z1 ≤ z ≤ z2,
    {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, {z, -10, 10}, ImageSize → 250]
  }]
 , {{x1, -8}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{x2, 8}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{y1, -7}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{y2, 7}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{z1, -8}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{z2, 7}, -10, 10, 1, Appearance → "Labeled"}]
```

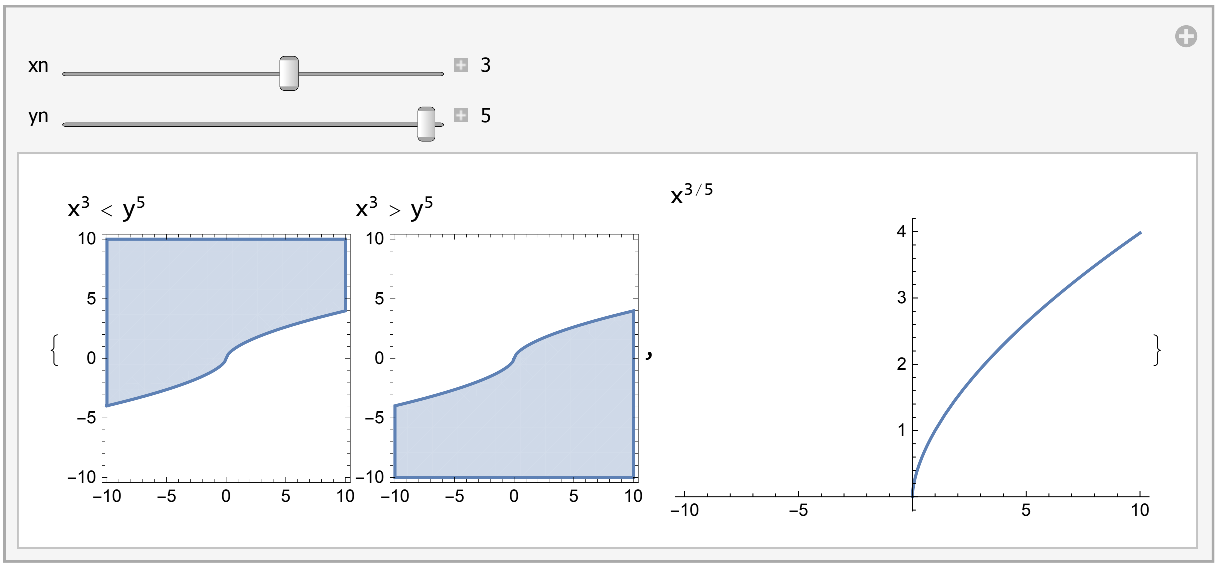
Out[ ]=



Regiões definidas por funções.

São inequações, que é a definição que eu tinha de ser uma função incompleta ou equação abrangente.

In[ ]:=
```
Manipulate[
 {Row[{
    Column[{x^xn < y^yn,
      RegionPlot[x^xn < y^yn, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, ImageSize → 150]}],
    Column[{x^xn > y^yn,
      RegionPlot[x^xn > y^yn, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, ImageSize → 150]}]
   }],
  Row[{
    Column[{(*x^xn=y^yn*) x^(xn/yn),
      Plot[x^(xn/yn), {x, -10, 10}, ImageSize → 250]}](*,
    Column[{x^xn=y^yn,
      Plot[x^xn≠y^yn,{x,-10,10},{y,-10,10},ImageSize→250]}]*)
   }]}
 , {{xn, 1}, 0, 5, 1, Appearance → "Labeled"}, {{yn, 1}, 0, 5, 1, Appearance → "Labeled"}]
```

Out[ ]=


Como plotar uma equação? A equação é o mais restrito, reduz em 1 dimensão.

$x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow -x = y \Rightarrow y = -x = f(x)$ é uma função linear. A variável dependente vira o resultado da função e tira uma variável.

$$x^m = y^n \Rightarrow y = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = f(x).$$

Cada dimensão em uma região é expressada por uma inequação.
Uma região delimitada por uma função de uma variável (de duas dimensões) são duas inequações, uma é estipulada (por exemplo, no eixo X: X_0 e X_1) e outra é relativa a essa primeira (em

$y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$).

Uma região delimitada por mais de uma função é a intersecção das áreas das funções. (Ou seja, a subtração das áreas.) No caso, a segunda função age como a região da primeira função. Por isso, ao invés de estipulada, a primeira inequação (da primeira região) é determinada pela intersecção entre as funções.

Mas, ao invés de calcular as áreas das funções envolvidas e as subtrair, o método é calcular as áreas por partição, horizontal ou vertical.

E o que é a integral múltipla nisto? De acordo com o parágrafo acima, seria possível calcular a área de regiões delimitadas por várias funções tomando a integral simples de cada uma por vez depois somando ou subtraindo. As funções simultâneas são apenas a delimitação da região de integração, o primeiro passo. A integração está, neste exemplo, em obter as áreas sob as funções; seja uma por vez ou por partição.

“Antiderivatives are related to definite integrals through the fundamental theorem of calculus: the definite integral of a function over an interval is equal to the difference between the values of an antiderivative evaluated at the endpoints of the interval.”[1]

“Since the concept of an antiderivative is only defined for functions of a single real variable, the usual definition of the indefinite integral does not immediately extend to the multiple integral.”[2] Porquê apenas uma variável?

A antiderivada é a família de funções com uma determinada derivada. Uma função de duas variáveis não tem derivada? Cada dimensão tem um grau. Mas cada dimensão pode ser diferenciada separadamente? Não, porque o coeficiente de cada termo (contendo todas as variáveis) é um só.

A diferenciação de função de múltiplas variáveis até agora tratada é a parcial. Isso significa fixar todas as variáveis independentes menos uma, efetivamente reduzindo a função a uma de uma variável. Neste sentido, é uma derivação “de apenas uma das variáveis”, mas não é uma derivação <u>verdadeira</u>. Uma derivação de todas as variáveis independentes simultaneamente é outra coisa e não foi tratada até agora. (No plot acima a objeto da direita é a derivada não-parcial da função de duas variáveis da esquerda.)

Como funções multivariável “não têm” derivada, também não têm integral (indefinida — antiderivada). Então surge a integral múltipla.
Não haver integral indefinida para integral múltipla implica que não há substituição, fração etc.. para esta integral?

Integração por substituição

u vai ser uma função e du uma função que multiplica dx, tirando dx temporariamente do problema. O du que fica serve como dx na função original, para executar integrais da tabela. (Pois agora a integral é de u com du.)

Depois, substitui u e du de volta (ou apenas u? E pra onde vai o du?).

Substitui apenas u de volta. O lance é que du na substituição tem que ser realmente o diferencial de u, que é a derivada de u vezes dx. Isso dá conta de sumir com du da resolução.

Exemplo da AD1 ($\text{sen}\,\frac{x}{3}$): acontece que a derivada de $\frac{x}{3}$ é $\frac{1}{3}$. Portanto $u = \frac{x}{3}$ e $du = \frac{1}{3}\,dx$. $\int \text{sen}\,\frac{x}{3} = \int \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \int 3\,u\,du$. Porquê $\times 3$? Porque fazer a substituição do du divide u por 3 (porque é $\frac{1}{3}$). Para compensar, $\times 3$. (É errado dizer que a integral se torna $\int u\,du$, porque ela não se torna isso automaticamente; pode haver a necessidade de compensação como esta.) Agora a integral é $\int 3\,\text{sen}\,u\,du = 3 \int \text{sen}\,u\,du$, que é $3\;-\cos u + C$. Agora substituindo u de volta, é $-3\cos\frac{x}{3} + C$.

Integração por partes

Unisul p. 24.

$[f(x) \cdot g(x)]' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$. Derivada do produto.

$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x)$. Isolando o $f(x) \cdot g'(x)$:

$a = b + c \Rightarrow -b = c - a \Rightarrow b = -c + a \Rightarrow b = a - c$.

Integrando ambos os lados:
$\int f(x) \cdot g'(x)\,dx = \int [f(x) \cdot g(x)]' - g(x) \cdot f'(x)\,dx$
$= \int [f(x) \cdot g(x)]'\,dx - \int g(x) \cdot f'(x)\,dx$
$= f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x)\,dx$.

Diferenciais?

p. 20: "(...) du é a diferencial de u, portanto é a derivada da função $u(x)$ vezes dx."

$du = u'\,dx = \frac{du}{dx}\,dx = du$.

Logo, $\int g(x) \cdot f'(x)\,dx = \int v \cdot u'\,dx = \int v \cdot du$.

Implica $f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot f'(x)\,dx = u \cdot v - \int v \cdot du$ e
$\int u \cdot v'\,dx = \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

Reconhecer um diferencial no integrando.

A diferença para o diferencial da substituição é que este diferencial não precisa ser de f. Pode ser de qualquer outra função.

Integração por frações parciais

Unisul p. 30.

```
In[∘]:= FullSimplify@(x^2 + 2 x - 3) / (x - 1)
Out[∘]= 3 + x
```

```
In[∘]:= FullSimplify@(5 x + 3) / (x + 3)
```

$$\text{Out[∘]=}\ \frac{3 + 5\,x}{3 + x}$$

```
In[∘]:= Solve[x^2 + 2 x - 3 == 0, x]
Out[∘]= {{x → -3}, {x → 1}}
```

- Descobrir as raízes do denominador.
- Montar como $(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)$.
- o $(x - r_n)$ de cada raiz é multiplicado pela constante desconhecida da raiz para totalizar o numerador original, formando um sistema.

Exemplo.

$\frac{2x-3}{x^2+3x-10}$. O denominador $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$.

$$\frac{2x-3}{x^2+3x-10} = \frac{A(x+5)+B(x-2)}{(x+5)(x-2)} \Rightarrow$$

$$2x - 3 = A(x+5) + B(x-2).$$

```
In[∘]:= Solve[x^2 + 3 x - 10 == 0, x]
Out[∘]= {{x → -5}, {x → 2}}
```

Integração múltipla

É necessário traduzir a forma geométrica da região de integração em um dos tipos (abaixo) e reescrever a integral (de múltipla para iterada... que significa colocar os limites de integração em cada dimensão na respectiva integral).

$$\text{In[∘]:=}\ \int_3^5 (2\,x + y)\,dx$$

```
Out[∘]= 16 + 2 y
```

p. 92.

$$\int_1^2\int_3^5 2x + y\, dx\, dy =$$

$$\int_1^2\left(2\int_3^5 x\, dx + \int_3^5 y\, dx\right) dy =$$

$$\int_1^2 2\,\frac{x^2}{2}\Big|_{x=3}^{x=5} + y\,x\Big|_{x=3}^{x=5}\, dy =$$

$$\int_1^2 2\left(\frac{25}{2} - \frac{9}{2}\right) + y\,2\, dy =$$

$$\int_1^2 16 + 2\,y\, dy =$$

$$\int_1^2 16\, dy + \int_1^2 2\,y\, dy =$$

$$16\,y\Big|_{y=1}^{y=2} + 2\,\frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{y=2} =$$

$$16 + 3 = 19.$$

Regiões de integração

Dalmo:
São dois tipos de região de integração:
- Na primeira Região I - os limites de integração são constantes.
- Na segunda Região II - os limites de integração podem ser funções e constantes. São duas possibilidades - (Região II (a))se a função estiver em função de x (y=f(x)), ou seja é delimitada superior e inferiormente por funções em função de x. Se a função estiver em função de y (x=g(x)) (Região II (b)), ou seja, é delimitada a esquerda e a direita por funções em função de y.

Muitas vezes para definir a região de integração é conveniente inverter a função, ou seja, escrever ela em função de y ou vice versa. Fica mais fácil de resolver a integração definida.
Por exemplo na situação: x = Vy (raiz de y), então escreve-se y=x2 e então, usa-se a Região II de integração (a).

Krista:
We can define the region R as Type I, Type II, or a mix of both. Type I curves are curves that can be

defined for y in terms of x and lie more or less “above and below” each other. On the other hand, Type II curves are curves that can be defined for x in terms of y and lie more or less “left and right” of each other.
Type I regions can be broken up into vertical slices, and Type II regions can be broken up into horizontal slices.
Sometimes a region can be considered both Type I and Type II, in which case you can choose to evaluate it either way.
(...) Now we need to decide if D is a Type I or Type II region. Since we can get uniform slices either way (vertical slices if we treat it as a Type I region, or horizontal slices if we treat it as a Type II region), we can choose which type we want to use, and we’ll get the same answer with both methods. We’ll solve it as a Type II region, which means we’ll use horizontal slices of region D. To solve as Type II, the equations that define the lines that are the edges of region D need to be defined for x in terms of y. For a Type II region, we’ll integrate first with respect to x, then with respect to y.

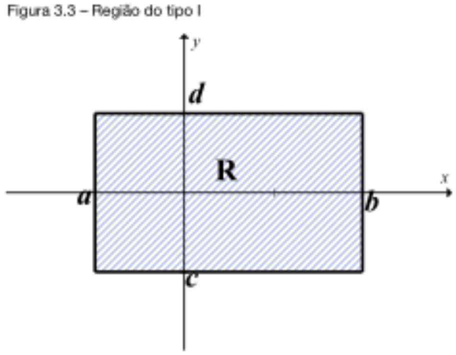
Diva:
Vamos basicamente ter dois tipos de região de integração:

Tipo I - retangulares - $a \leq x \leq b$ e $c < y < d$;

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$ ou

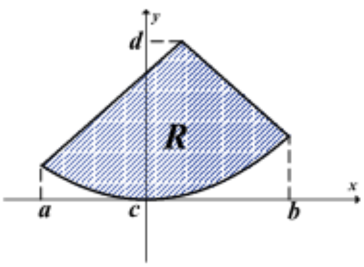
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

Figura 3.3 – Região do tipo I



Tipo II - com formatos geométricos que envolvem diversas funções.
Quanto temos uma região de integração definida por um conjunto de funções que se interceptam, dependendo da forma:

Figura 3.4 – Região do tipo II



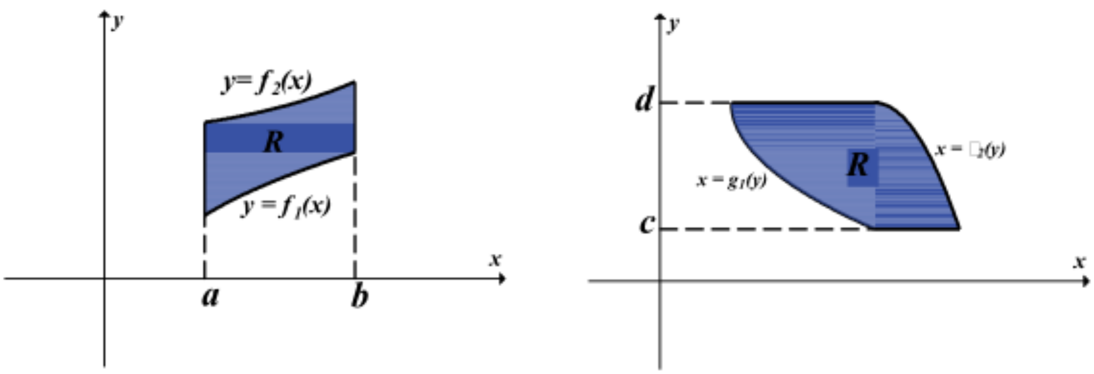
Tipo II a: $f(x) \leq y \leq g(x)$, em $a \leq x \leq b$;

$$\int_{a}^{b} \int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Tipo II b: $f(y) \leq x \leq g(y)$, em $c \leq y \leq d$.

$$\int_{c}^{d} \int_{f(y)}^{g(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Figura 3.5 – Regiões do tipo II (a) e (b)



1 https://en.wikipedia.org/wiki/Antiderivative

2 https://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_integral