[1], p. 343.

Somas de termos trigonométricos do tipo

$$a_1 \cos(n\,t + \epsilon_1) + a_2 \cos(2\,n\,t + \epsilon_2) + a_3 \cos(3\,n\,t + \epsilon_3) + \ldots \tag{0.1}$$

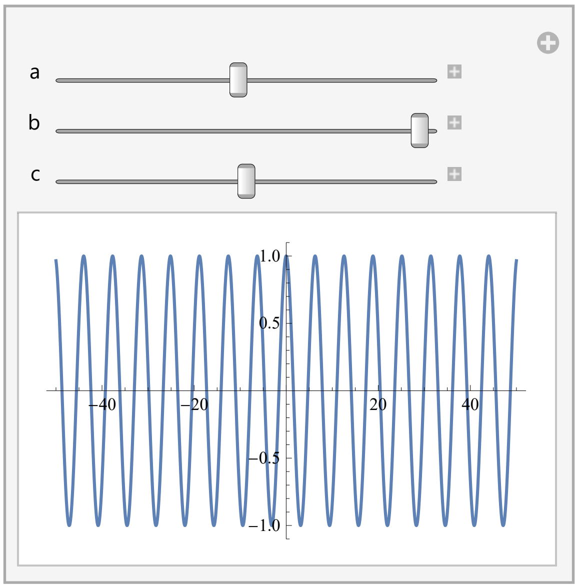
Sendo $t$ o tempo, mas irrelevante; $\epsilon$ a fase.

O termo é:

$$a \cos(b\,x + c) \tag{0.2}$$

In[∘]:=
```
Manipulate[Plot[a Cos[b x + c], {x, -50, 50}, PlotRange → {-1.1, 1.1}, ImageSize → 250],
  {{a, 1}, .1, 2, .1}, {{b, 1}, .1, 1, .1}, {{c, 0}, -1, 1, .1}]
```

Out[∘]=




$a$ amplitude, $b$ período, $c$ fase.

Eixo $x$ é o tempo; por isso a expressão (0.1) é uma função de $x$.

(Diz que $a$ corresponde à posição na corda de um instrumento ou barra de um diapasão.)

$\epsilon_n$ então é irrelevante, pois é só um deslocamento.

(Tratando $a$ como irrelevante pois não é o que muda.)

Diapasão:

$$a_1 \cos(n_1\,t + \epsilon_1) + a_2 \cos(n_2\,t + \epsilon_2) + a_3 \cos(n_3\,t + e_3) + \ldots \tag{0.3}$$

Aqui, a diferença é a evolução de $n_n$, que é o **período em função do tempo**. Onde em (0.1), era uma evolução linear e agora não é; por isso, a função como um todo não mais é periódica sobre $t$. Mas é **constituída por elementos que são**, cada termo somado.

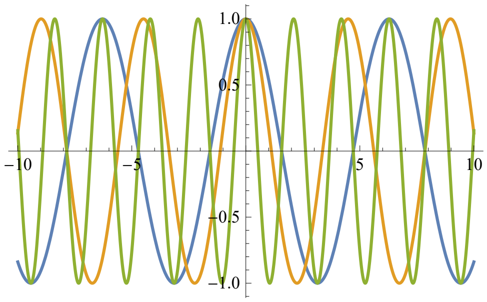
A questão é a soma de funções trigonométricas, cada uma com um período independente da outra. (Ou seja, $n_n$ é arbitrário.)

In[333]:=
```
Simplify[Cos[x] + Cos[1.4 x] + Cos[3 x]]
```

Out[333]=
```
Cos[x] + Cos[1.4 x] + Cos[3 x]
```

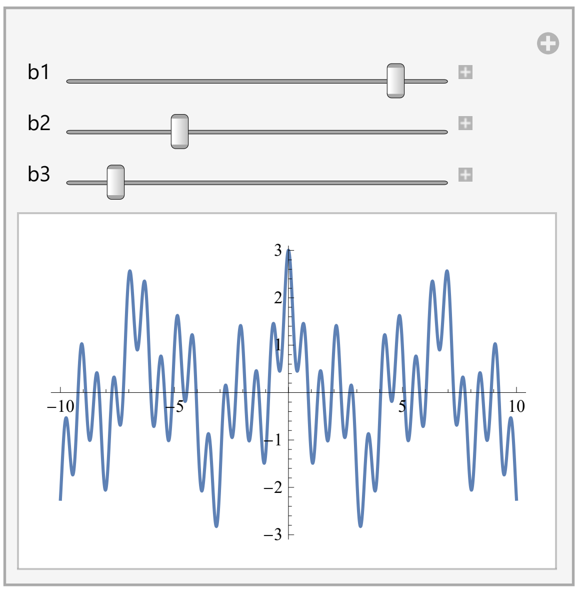
In[520]:=
```
Plot[{Cos[x], Cos[1.4 x], Cos[3 x]}, {x, -10, 10}, ImageSize → 250]
```

Out[520]=




In[341]:=
```
Manipulate[Plot[Cos[b1 x] + Cos[b2 x] + Cos[b3 x], {x, -10, 10}, PlotRange → {-3.1, 3.1},
  ImageSize → 250], {{b1, 1}, .1, 10, .1}, {{b2, 4.9}, .1, 10, .1}, {{b3, 9.2}, .1, 10, .1}]
```

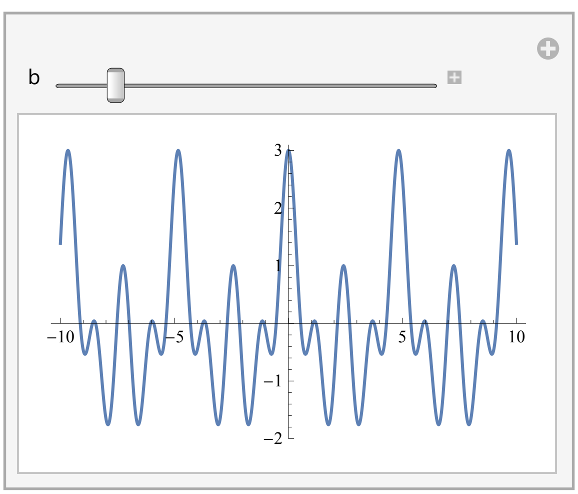
Out[341]=




E no caso anterior, dos períodos apenas múltiplos entre si...

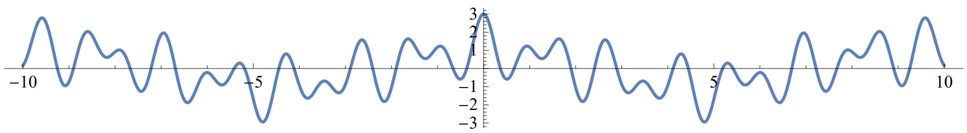
In[357]:=
```
Manipulate[Plot[Cos[b x] + Cos[2 b x] + Cos[4 b x],
  {x, -10, 10}, PlotRange → {-2, 3.1}, ImageSize → 250], {{b, 1}, .1, 10, .1}]
```

Out[357]=

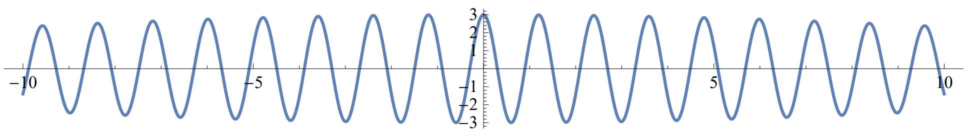


In[371]:=
```
Module[{values, getValue},
 getValue = Function[, RandomVariate[NormalDistribution[5, 2.5], 1]];
 Column[Table[
   values = {b1 → getValue[], b2 → getValue[], b3 → getValue[]};
   Print[values];
   Print[Plot[Cos[b1 x] + Cos[b2 x] + Cos[b3 x] /. values,
     {x, -10, 10}, ImageSize → 500, AspectRatio → 1 / 8]];
   , 10]]
]
```

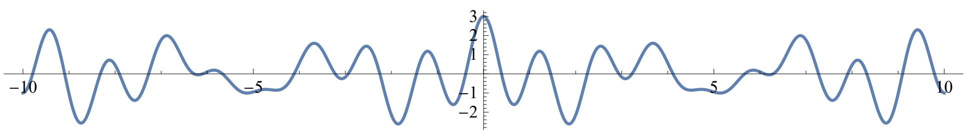
{b1 → {7.2421}, b2 → {0.67316}, b3 → {4.5302}}



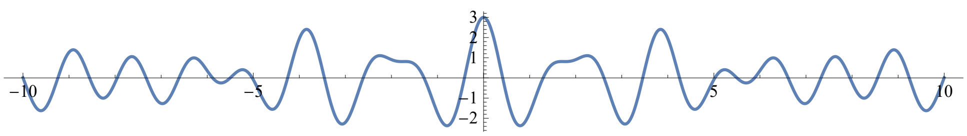

{b1 → {5.17073}, b2 → {5.33787}, b3 → {5.23905}}



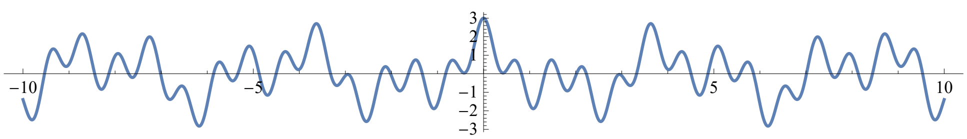

{b1 → {1.87622}, b2 → {5.33017}, b3 → {4.71264}}



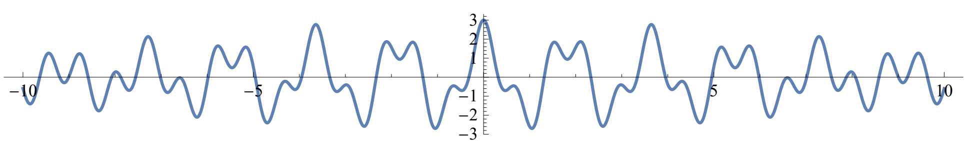

{b1 → {3.42831}, b2 → {4.93033}, b3 → {3.02541}}



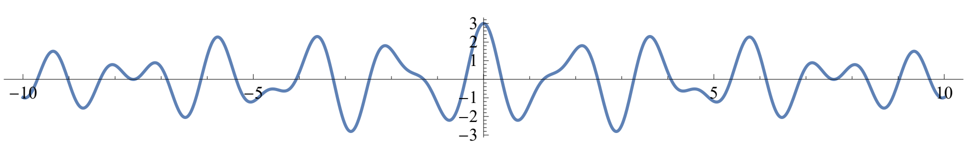

{b1 → {3.47277}, b2 → {-1.51719}, b3 → {8.68621}}



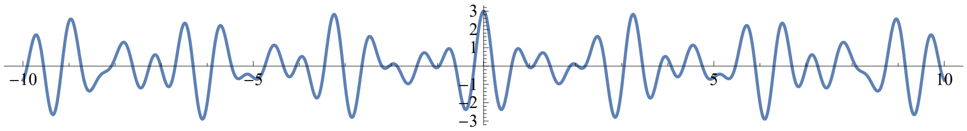

{b1 → {3.57553}, b2 → {8.62765}, b3 → {3.3102}}



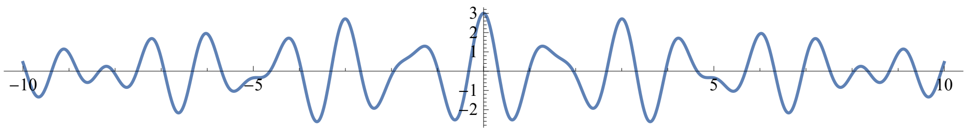

{b1 → {5.38679}, b2 → {3.45954}, b3 → {3.18275}}



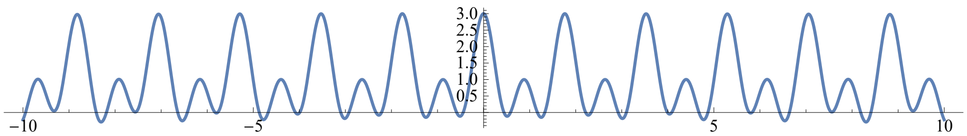

{b1 → {9.74385}, b2 → {7.78252}, b3 → {5.63946}}




{b1 → {4.12044}, b2 → {4.40715}, b3 → {6.16591}}

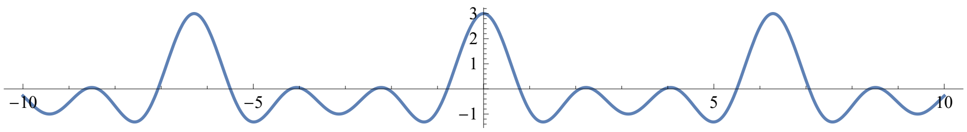



{b1 → {3.54577}, b2 → {−0.0165038}, b3 → {7.13112}}

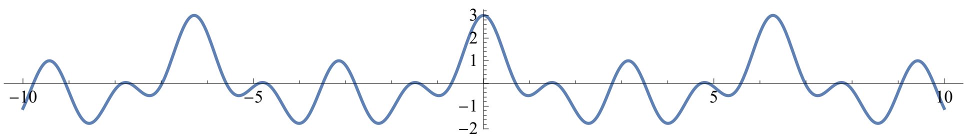



In[380]:=
```
Module[{i, vals},
 i = 1;
 vals = {
   {b1 → 1, b2 → 2, b3 → 3},
   {b1 → 1, b2 → 2, b3 → 4},
   {b1 → 1, b2 → 3, b3 → 4},
   {b1 → 1, b2 → 3, b3 → 5},
   {b1 → 1, b2 → 3, b3 → 8},
   {b1 → 1, b2 → 3, b3 → 9},
   {b1 → 2, b2 → 3, b3 → 4},
   {b1 → 2, b2 → 4, b3 → 6}
  };
 Column[Table[
   Print[i, ". ", values];
   Print[Plot[Cos[b1 x] + Cos[b2 x] + Cos[b3 x] /. values,
     {x, -10, 10}, ImageSize → 500, AspectRatio → 1 / 8]];
   i++;
   , {values, vals}]]
]
```

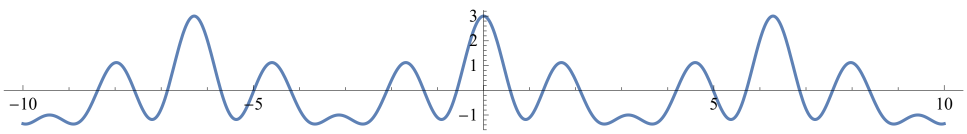
1. {b1 → 1, b2 → 2, b3 → 3}



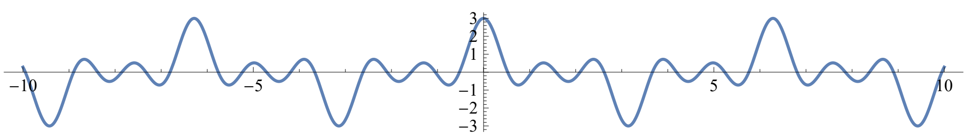

2. {b1 → 1, b2 → 2, b3 → 4}



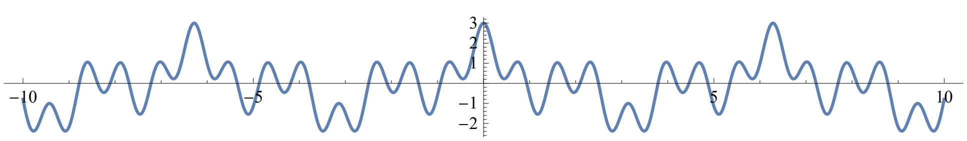

3. {b1 → 1, b2 → 3, b3 → 4}



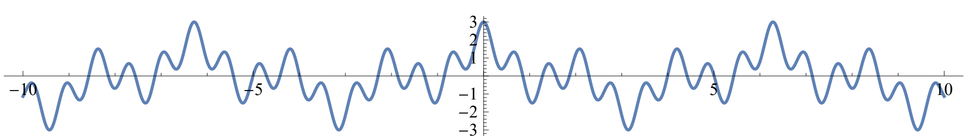

4. {b1 → 1, b2 → 3, b3 → 5}



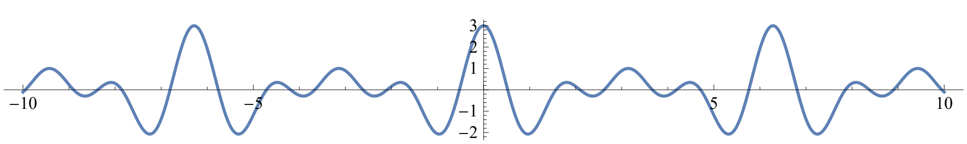

5. {b1 → 1, b2 → 3, b3 → 8}



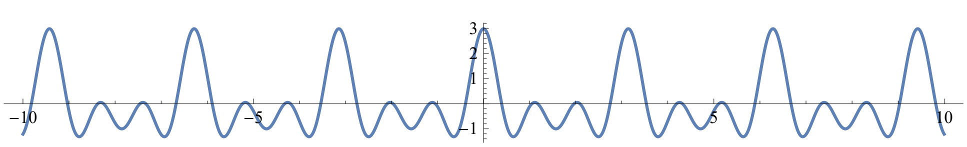

6. {b1 → 1, b2 → 3, b3 → 9}




7. {b1 → 2, b2 → 3, b3 → 4}




8. {b1 → 2, b2 → 4, b3 → 6}




A função (1) é periódica sobre $x$? E a função (2) não o é mais?

"(...) (corda de instrumento) não mais temos $n_2$ igual ao dobro de $n_1$, ou $n_3$ igual ao triplo de $n_1$; de fato, as razões $n_1 : n_2 : n_3 : \ldots$ são iguais a $3.52 \ldots : 22.03 \ldots : 61.70 \ldots : \ldots$. A soma de uma série deste tipo não é evidentemente uma função periódica de $t$, mas podemos defini-la como constituída de elementos periódicos, os períodos dos quais são $\frac{2\pi}{n_1}$, $\frac{2\pi}{n_2}$, etc.."

Anyway, verificamos que a "periodicidade" permanece em dois casos, $\{1, 2, 3\}$ e $\{2, 4, 6\}$, e que o motivo da periodicidade, portanto, é o incremento regular dos coeficientes. (Também na última função de coeficientes randômicos se verifica a proximidade a este resultado.)

As funções ((1), (8)) aparentemente são periódicas, sendo a fase regular, ficando apenas a amplitude variável. (E as outras não têm a fase regular? Precisava medir isso — parece que é exatamente o que o periodograma faz.)

São as outras, portanto, a que ele se refere como constituídas por termos trigonométricos independentes.

Mas se parte da observação dos dados e da tentativa de se descobrir os constituintes. Mas, desde início, incluindo o ruído na equação.

O objetivo é descobrir os períodos, para então avaliar a amplitude e fase.

### ■ Periodicidade

Irrespectivo da série, um período proposto $p$ produz uma sequência de restos da divisão dos inteiros por ele:

$$0,\ R\left(\frac{1}{p}\right),\ R\left(\frac{2}{p}\right),\ R\left(\frac{3}{p}\right),\ \ldots \tag{0.4}$$

In[687]:=
```
Clear[pRem];
pRem=Function[p,Table[QuotientRemainder[i,p][[1]],{i,20}]];
```

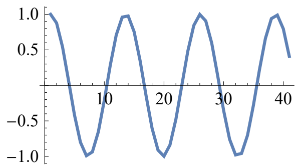
In[410]:=
```
Column[Table[PaddedForm[p, 2] → pRem[p], {p, 10}]]
```

Out[410]=
```
 1 → {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}
 2 → {0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10}
 3 → {0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6}
 4 → {0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5}
 5 → {0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4}
 6 → {0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3}
 7 → {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}
 8 → {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2}
 9 → {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2}
10 → {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2}
```

A correlação entre estas séries e os valores da série de dados.

In[555]:=
```
Module[{data, len, parts, sums, means, meansStdDev, stdDev, corr},
    SeedRandom[1];
    data = Table[Cos[x], {x, 0, 20, .5}];
    len = Length[data];
   Print[data, " (", len, ")"];
   Print[ListLinePlot[data, ImageSize → 150]];
    parts = Partition[data1, 6];
    Print[Grid[parts]];
    sums = Table[Total[part], {part, parts}];
    Print["sums: ", sums];
    means = Table[Mean[part], {part, parts}];
    Print["means: ", means];
    meansStdDev = StandardDeviation[means];
    Print["means std. dev.: ", meansStdDev];
    stdDev = StandardDeviation[data];
    Print["data std. dev.: ", stdDev];
    corr = N[meansStdDev / stdDev];
    Print["correlation: ", corr];
]
```

```
{1., 0.877583, 0.540302, 0.0707372, -0.416147, -0.801144, -0.989992, -0.936457,
  -0.653644, -0.210796, 0.283662, 0.70867, 0.96017, 0.976588, 0.753902, 0.346635, -0.1455,
  -0.602012, -0.91113, -0.997172, -0.839072, -0.475537, 0.0044257, 0.483305, 0.843854,
  0.997798, 0.907447, 0.594921, 0.136737, -0.354924, -0.759688, -0.978453, -0.957659,
  -0.702397, -0.275163, 0.21944, 0.660317, 0.939525, 0.988705, 0.795815, 0.408082} (41)
```




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | 0.877583 | 0.540302 | 0.0707372 | -0.416147 | -0.801144 |
| -0.989992 | -0.936457 | -0.653644 | -0.210796 | 0.283662 | 0.70867 |
| 0.96017 | 0.976588 | 0.753902 | 0.346635 | -0.1455 | -0.602012 |
| -0.91113 | -0.997172 | -0.839072 | -0.475537 | 0.0044257 | 0.483305 |
| 0.843854 | 0.997798 | 0.907447 | 0.594921 | 0.136737 | -0.354924 |
| -0.759688 | -0.978453 | -0.957659 | -0.702397 | -0.275163 | 0.21944 |

```
sums: {1.27133, -1.79856, 2.28978, -2.73518, 3.12583, -3.45392}

means: {0.211889, -0.299759, 0.381631, -0.455863, 0.520972, -0.575654}

means std. dev.: 0.465438

data std. dev.: 0.720639

correlation: 0.645868
```

In[756]:=

```
Clear[corr];
corr=Function[{data,period,dbg},Module[{parts,means,meansStdDev,stdDev},
    If[dbg,Print["*period: ",period]];
    parts=Partition[data,period];
    If[dbg,Print["parts: ",parts]];
    means=Table[Mean[part],{part,parts}];
    If[dbg,Print["means: ",means]];
    meansStdDev=StandardDeviation[means];
    If[dbg,Print["meansStdDev: ",meansStdDev]];
    stdDev=StandardDeviation[data];
    If[dbg,Print["stdDev: ",stdDev]];
    N[stdDev/meansStdDev]
]];
```

In[745]:=

```
Module[{data},
    SeedRandom[1];
    data = Table[Cos[x], {x, 0, 20, .5}]; (*mesmo acima*)
    Table[corr[data, period, False], {period, 5, 15}]
]
```

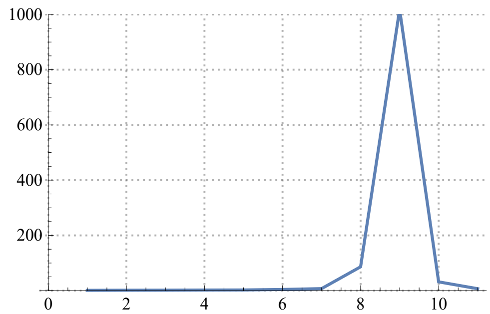
Out[745]=

```
{1.16258, 1.5483, 1.75543, 2.24329, 2.49994, 4.30637, 7.35694, 86.3958, 1017.75, 31.8717, 7.03287}
```

In[771]:=
```
Clear[periodogram]
periodogram=Function[{data,periodRange,plotWidth,plotRange,dbg},Module[{periods,corrs},
    If[dbg,Print[data," (",Length[data],")"]];
    corrs=Table[corr[data,period,False],{period,periodRange}];
    If[dbg,Print["corrs: ",corrs]];
    ListLinePlot[corrs,ImageSize→plotWidth,PlotRange→plotRange,PlotTheme→"Grid"]
]];
```

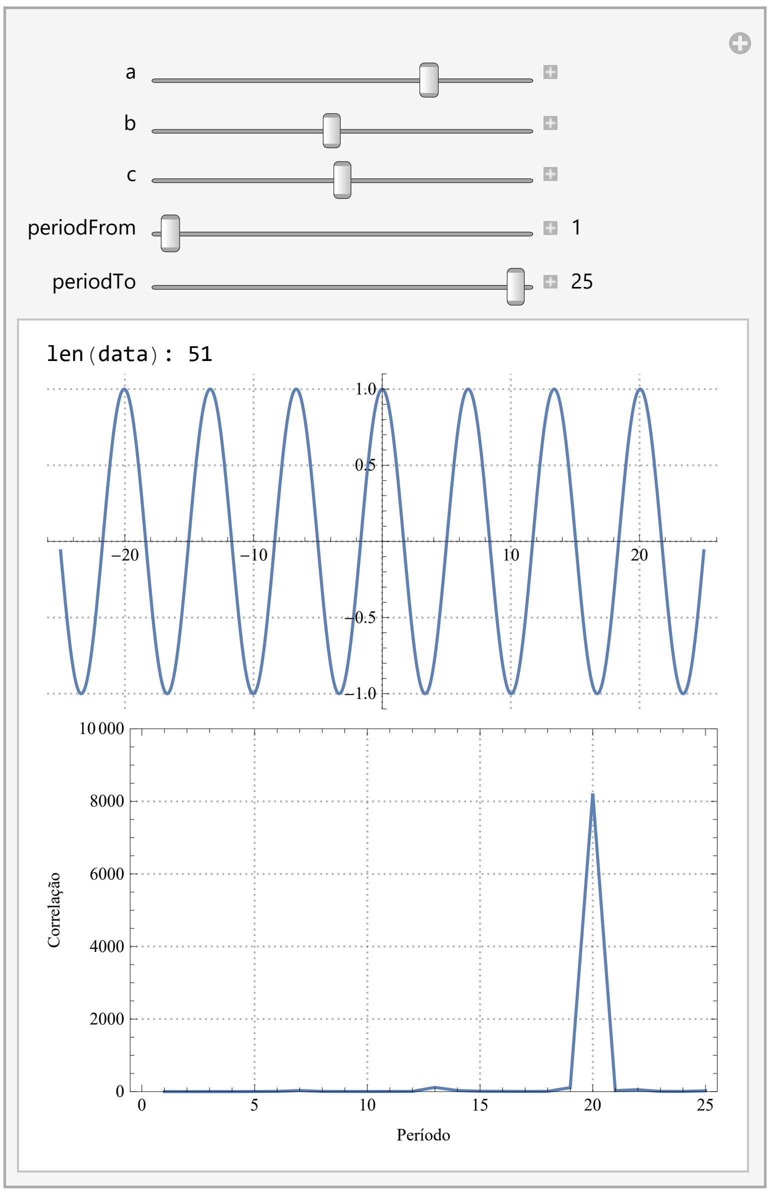
In[740]:=
```
Module[{data},
 data = Table[Cos[x], {x, 0, 20, .5}];
 periodogram[data, Range[5, 15], 250, {0, 1000}, False]
]
```

Out[740]=



In[845]:=
```
Manipulate[Module[{fun, data},
  fun = Function[{a, b, c, x}, a Cos[b x + c]];
  data = Table[fun[a, b, c, x], {x, -25, 25}];
  Column[{
    "len(data): " <> ToString[Length[data]], Plot[fun[a, b, c, x], {x, -25, 25},
     PlotRange → {-1.1, 1.1}, ImageSize → 350, AspectRatio → 1/2, PlotTheme -> "Grid"],
    periodogram[data, Range[periodFrom, periodTo], 350, {0, 10000}, False]}
  ]
 ],
 {{a, 1}, -2, 2, .1},
 {{b, 0.94}, .01, 2, .01},
 {{c, 0}, -5, 5, .1},
 {{periodFrom, 1}, 1, 25, 1, Appearance → "Labeled"},
 {{periodTo, 25}, 1, 25, 1, Appearance → "Labeled"}]
```

Out[845]=



- O período máximo válido deve ser $n/2$ para que haja mais de uma partição.
- Quanto maior o intervalo de períodos abrangidos, maior a visualização sobre possíveis picos progressivamente maiores.
- Alterar a fase altera a amplitude, mas não posição dos picos.
- Alterar a amplitude (previsivelmente) não altera os picos (a não ser que ela se torne zero).

Um componente de período $p$ (componente é um padrão na onda inteira) ao ser particionado terá a mesma fase em todas as linhas de cada coluna. A sequência das médias, portanto, formará uma onda, e sua variância será máxima. Em um componente de período $\neq p$, as fases diferentes formarão médias com pouca variação, pois as diferenças entre as fases, por serem em princípio “uniformes”, formarão médias com tendência à uniformidade. E portanto menos dispersas.

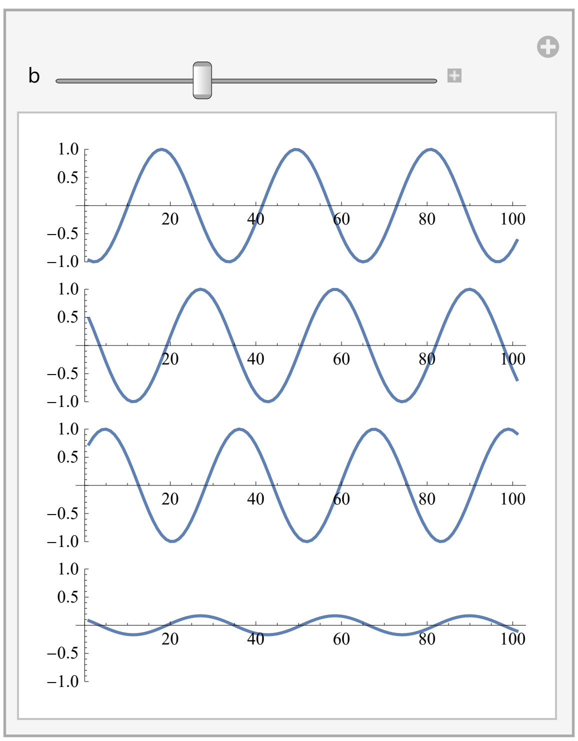
Dúvida. Essa oscilação de dispersão não deveria ser linear? Os picos porém são grandes.

Whittaker p. 348: “(Pela equação do periodograma) é possível observar que com um valor suficiente de $m$ (número de linhas), o valor de correlação $n$ é uma fração pequena, exceto quando $p$ está próximo do período $T$ (...) em que a curva do periodograma tem um pico de largura $\frac{2T}{m}$ cercado por picos menores em ambos os lados.” Esta parte do Whittaker explica.

O princípio é exatamente o reproduzido abaixo (de **epoch_check**).

In[663]:=
```
Manipulate[Module[{datas, mean},
  datas = Table[Table[Sin[x + b * (n * .7)], {x, 0, 20, .2}], {n, 3}];
  mean = Mean /@ Transpose[datas];
  Column[Table[ListLinePlot[data, ImageSize → 250, PlotRange → {-1, 1}, AspectRatio → 1 / 4],
    {data, Join[datas, {mean}]}]]
 ], {{b, -1.5}, -10, 10, .05}]
```

Out[663]=




Basicamente, o periodograma movimenta este slide de período e plota a amplitude da onda resultante × período.

Basicamente, a amplitude é um número maximizado do dado resultante quando há o alinhamento dos períodos. Mas há alguma outra situação que provoca o mesmo máximo? E que portanto falha o processo.

A equação do periodograma nesta forma é

$$n^2 = \frac{S_M{}^2}{\sigma^2}$$

em que:

$n$ é o coeficiente de correlação;

$S_M$ é o desvio padrão das médias das colunas;

$\sigma$ é o desvio padrão dos valores (todos, não particionados).

Que é a fórmula já utilizada.

Há também desenvolvimentos do numerador e denominador, baseados em uma modelagem da onda como dois componentes, um periódico e um não-periódico, na seguinte forma

$$u_x = u_{1_x} + u_{2x}$$

em que $u_x$ é a onda resultante, $u_{1_x}$ é o componente periódico e $u_{2_x}$ é o componente não-periódico.

Estes componentes podem ser descritos como

$$u_{1_x} = a \sin \frac{2\,\pi\,x}{T},$$

$$u_{2_x} = b_x$$

em que:

$a$ é amplitude,

$T$ é o período de um ciclo do componente,

$b_x$ são os elementos do componente não-periódico (um deslocamento),

de forma que

$$u_x = a \sin \frac{2\,\pi\,x}{T} + b_x.$$

Dessa forma, o desenvolvimento do numerador e denominador é

$$S_M{}^2 = \frac{a^2}{2\,m^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{m\,\pi\,p}{T}}{\sin^2 \frac{\pi\,p}{T}} + \frac{\sigma_b{}^2}{m},$$

$$\sigma^2 = \frac{a^2}{2} + \sigma_b{}^2$$

em que:

$m$ é a quantidade de partições (linhas) dos dados;

$p$ é o período de uma partição;

$\sigma_b$ é o desvio padrão de $b_x$;

Parsear esta equação.

## Referências

A. [1] Whittaker, Robinson. The calculus of observations. London, 1924