Well-ordering. Schramm, p. 54: "Definição. Se m e n são números naturais, dizemos que $m < n$ se

a) n está entre os naturais $m+1, m+1+1, m+1+1, \ldots.$

b) nenhuma função com domínio igual a um conjunto com m elementos e imagem igual a um conjunto com n elementos é ***onto***."

Stoll, p. 35: "Uma função f é ***into*** Y sse a imagem de f é um subconjunto de Y, e ***onto*** sse a imagem é igual a Y. Relativo ao domínio, f é ***on*** X se o seu domínio é igual a X."

Portanto a condição b) acima significa... tomando um conjunto A com m elementos, e outro B com n elementos... todas as funções f_n com domínio A e imagem B são ***into***, ou seja, há elementos em B que não são imagem de nenhuma $f_n: A \to B$.

Ou seja, há elementos em B que função alguma estritamente de A para B "acessa". O elemento poderia ser acessado uma função de A para um subconjunto de B (mas não para B). E m e n são os números de elementos nos conjuntos (qualquer número n é considerado um conjunto de n elementos). (Isso implica que cada "número" contém os "números" menores?)

Schramm, p. 28: "One must be careful using the words 'smallest' and 'largest' in this context. The **smallest** set with a given property is that set (if any) that 1) has the property and 2) *is contained* in any set having the property. The **largest** set with a given property is that set (if any) that 1) has the property, and 2) *contains* any set having the property."

A frase original era: "Show that the union of a collection of sets is the smallest set that contains all the sets in the collection".

Primeira coisa: a análise real é a análise da matemática a partir da teoria dos conjuntos e certos axiomas. Analisar o quanto ZF precisa participar da análise real. ZFC quer dizer Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha ("C"); sem este axioma, seria ZF.

urelement: elemento de um conjunto que não é um conjunto. ZF é um sistema de **conjuntos puros**. O que significa ausência de urelements. A característica dos elementos de um conjunto serem conjuntos é denominada **hereditariedade**. Wikipedia [1]: "ZFC é uma teoria em lógica de primeira ordem (predicativa). As "relações básicas" são igualdade e pertencimento e há apenas um "sort" ou tipo, o conjunto."

Voltando ao well-ordering... Unisul, p. 15: "m é menor que n quando existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$". Ou seja, $m, n, p \in \mathbb{N}$. Depois, a soma de dois elementos m, p é a soma de dois conjuntos, que é a soma de seus elementos, que é a conjunção dos conjuntos. (?)

Definição de sequências em ZFC.

Diferenças e similaridades: injetivo, sobrejetivo; into, onto, one-to-one.

Injetivo é “um para um” no domínio: a função não produz resultados em comum entre elementos da imagem. Cada “mapeamento” produzido na imagem a partir do domínio é distinto.

Into é implícito em toda função; significa que há imagem (não é injetivo).

Onto é o mesmo que sobrejetivo, não há imagem não aproveitada, ao invés de ser apenas into, é também completamente correspodente em todos os elementos com imagem no domínio da função.

One-to-one e bijetivo são o mesmo; onto ou sobrejetivo também; mas injetivo não tem equivalente na linguagem “into/onto”.

Em $f\colon X \to Y$, X é assumido como domínio de f. Se X é dominio de f, nenhum elemento de X não está associado a um elemento em Y. Um superconjunto X_p de X, diferente de X, não tem f definida.

Mas e a imagem? A diferença está entre a imagem e o codomínio. A imagem são os elementos efetivos, e o codomínio inclui os elementos não resultantes. “Geralmente, a imagem é um subconjunto do codomínio. Uma função não-sobrejetiva tem elementos no codomínio para os quais $f(x) = y$ não tem solução”. [3] Então, na definição de uma função sobrejetiva o segundo conjunto $A \to B$ é o codomínio? E nas demais?

Características:

- Enumerável/não enumerável
- Contável/não contável
- Finito/infinito
- Injetivo/sobrejetivo/bijetivo
- Aberto/fechado/semiaberto/semifechado
- Limitado/não limitado (bounded)
- Unitário/não unitário
- Denso/não denso?
- Compacto/não compacto?

  “When a set X is dense in a set Y, the intuition is that X “almost” fills up Y. A closure of a set X is X together with the set of X's limit points. A limit point of X is *almost* but *not quite* in X.

> So the closure – *all* the limit points – is in a vague sense not much more than the original set. Thus, if the closure of X is all of Y, then X is somehow already "most" of Y.
>
> About compactness (...) the definition "every open cover has a finite subcover" is usually one of the more inscrutable concepts young math students see by the time they see it. It might be perfectly comprehensible, but it's unclear what it *means*.
>
> If a set X is compact, it *kind of* means that the set X is bounded. I.e., it fits in a box. That's not *quite* what is means, but often the intuition is helpful." [2]

- (Depois) Corte, corte de Dedekind, gap

Operações:

- União/intersecção, finita/infinita, enumerável/não enumerável, aberta/fechada, disjunta

  Estes são apenas tratados como conjuntos, por isso as mesmas classificações.

- Complemento

Representações:

- Funções como séries

- Intervalos como conjuntos

Outros:

- Ponto interior e interior de conjunto

- Ponto isolado

- Intervalo centrado

- Famílias de conjuntos

A pergunta era... sobre o corolário 2 do teorema 1.1 (p. 19). "Seja um conjunto finito. Uma aplicação $f\colon X \to X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva". A aplicação é injetiva se cada elemento da imagem tem apenas um do domínio (1:1 neste aspecto). A aplicação é sobrejetiva se não há nenhum elemento na imagem sem domínio. A pergunta é... se ela não for sobrejetiva, ou seja, haver elemento na imagem sem domínio, ela não pode ser injetiva mesmo assim?

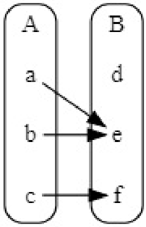

Figura 1.

Esta aplicação não é injetiva? A questão é se o domínio de f é $\{a, b, c\}$ ou $\{b, c\}$. Na verdade, o exemplo do livro é uma aplicação $X \to X$, e não $A \to B$. Mas primeiro $A \to B$, se a aplicação $A \to B$, a não pode estar sem imagem. Mas se a aplicação é do subconjunto de A $\{b, c\}$ para o subconjunto de $B\{e, f\}$, ela está ok… mas pode ser dita uma aplicação de $A \to B$? Poderia-se dizer que obviamente não (pois a fica sem imagem), mas no seguinte caso:

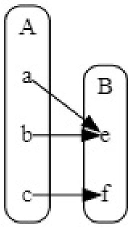

Figura 2.

f ainda é $A \to B$, mas não é sobrejetiva. **Mas ela não poderia ser dita também $\boldsymbol{A \to \{e, f\}}$ (um subconjunto de $\boldsymbol{B}$)?** Ou seja, uma aplicação não-sobrejetiva não teria exatamente como ter sua imagem exata delineada. (A não ser que a imagem seja algo especificado a priori — o que talvez seja o caso, pela definição de relação como pares ordenados "materializados".)

Efetivamente, f é $\{\{a, e\}, \{b, e\}, \{c, f\}\}$. Isso implica imagem$\{e, f\} \neq B$.

Se f for definida como $A \to B$, ela não é sobrejetiva. Se for definida como $A \to \{e, f\}$, ela é sobrejetiva. Isso significa que f em (0) não pode ser definida $A \to B$; pode ser definida $\{b, c\} \to B$ (ou $\{b, c\} \to \{e, f\}$). Em $\{b, c\} \to \{e, f\}$, é sobrejetiva (e, sendo definida exatamente como $\{b, e\}, \{c, f\}$, é injetiva, ou seja, é bijetiva). Em $\{b, c\} \to B$, não é sobrejetiva; ~~mas é injetiva~~.

~~Isso contraria o teorema 1.1 que diz que só é injetiva se é sobrejetiva~~. Excluindo o caso da não-sobrejeção:

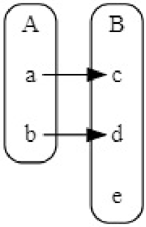

Figura 3.

Ela é não-sobrejetiva e injetiva; o teorema se refere **somente** a relações $X \to X$.

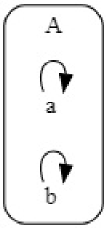

Figura 4.

Bijetiva $A \to A$.

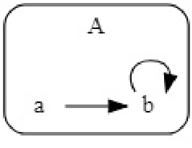

Figura 5.

Não-sobrejetiva (a livre), ~~mas injetiva. Novamente, contraria o teorema 1.1. A função é $\{\{a,b\},\{b,b\}\}$. O domínio é $\{a,b\}$, a imagem é $\{b\}$~~. Não é injetiva. Injetiva é não haver domínio livre; cada domínio ter apenas uma imagem.

Voltando ao teorema 1.1. Um subconjunto próprio de I_n.

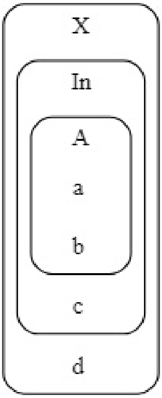

Figura 6.

Não irá existir uma bijeção $A \to I_n$ ~~porque para ser bijeção teria de ser sobrejeção e o elemento c ficaria sobrando (na imagem)~~. Falso. Algumas funções possíveis $A \to I_n$.

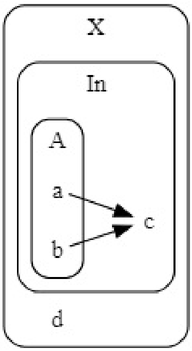

Figura 7.

$f = \{\{a, c\}, \{b, c\}\}$

$\mathrm{dom}(f) = \{a, b\}$

$\mathrm{im}(f) = \{c\}$

É sobrejetiva, mas não é injetiva.

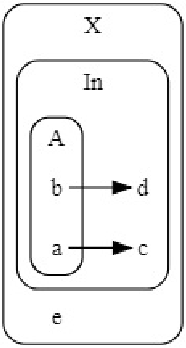

Figura 8.

$f = \{\{b, d\}, \{a, c\}\}$

$\mathrm{dom}(f) = \{b, a\}$

$\mathrm{im}(f) = \{d, c\}$

O problema é que $a, b \in I_n$, portanto para ser uma bijeção $A \to I_n$, $\mathrm{im}(f)$ deveria ser $\{a, b, c, d\}$. a, b seriam elementos da imagem sem domínio e a função não seria sobrejetora. (Mas é injetora.)

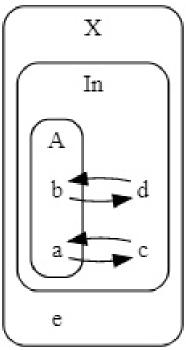

Figura 9.

$f = \{\{b, d\}, \{d, b\}, \{a, c\}, \{c, a\}\}$

$\mathrm{dom}(f) = \{b, d, a, c\}$

$\mathrm{im}(f) = \{d, b, c, a\}$

Não é uma função $A \to I_n$: o domínio contém elementos não pertencentes a A, e a imagem contém elementos não pertencentes a I_n.

É impossível a bijeção $A \to I_n$ havendo elementos x em I_n externos a A. Tal elemento pertence à imagem da função e podem haver alguns casos:

- No exemplo, $x = d$;
- O exemplo (5);

Mais:

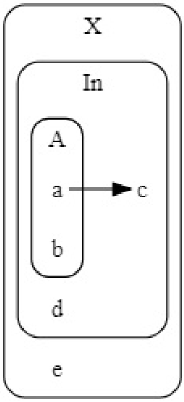

Figura 10.

ou

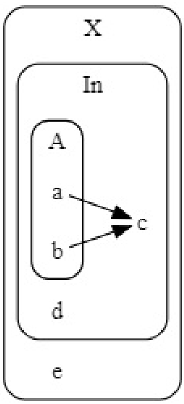

Figura 11.

triviais, em que d não é apontado, e a função não é sobrejetiva (e a segunda função não é injetiva);

- O exemplo da figura 7, com a função não-injetiva;

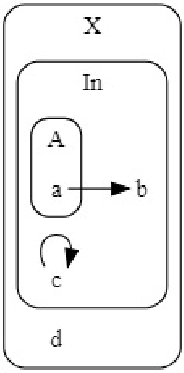

Figura 12.

em que $C \notin A$, o que não permite evitar a não-sobrejeção.

Um elemento b fora de A cai na imagem de f e cria a necessidade de ser imagem de um elemento de A; porém, ao fazê-lo, como no exemplo reduzido abaixo

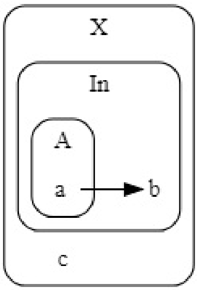

Figura 13.

ocupa a com a função de ser domínio de a (e impede a de ser parte da imagem?).

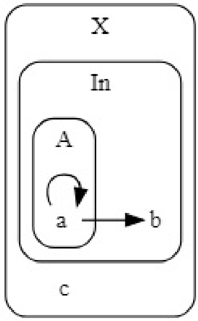

Figura 14.

$$\mathrm{dom}(f) = \{a\}$$

$$\mathrm{im}(f) = \{a, b\}$$

Não é uma função: a se relaciona com mais de um elemento na imagem (a relação é $\{\{a, a\}, \{a, b\}\}$).

Explicação do teorema 1.1. (Expressar como prova.)

b “ocupa” a com o papel de ser seu domínio e a só poderia ser imagem (o que necessita ser) de si mesmo, pois b como seu domínio tornaria a função não mais $A \rightarrow I_n$, caso no qual a relação não seria mais uma função. Ilustrado abaixo.

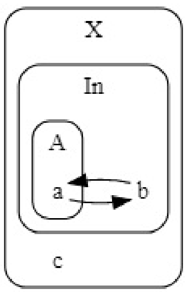

Figura 15.

Vizinhança/conjunto aberto $\longrightarrow$ pontos aderentes $\longrightarrow$ fecho

Neighborhood/open set $\longrightarrow$ contact points $\longrightarrow$ closure

1 Ponto de aderência

Limite de uma sequência de pontos.

---

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Hereditary_set

2. https://www.quora.com/What-does-it-mean-for-a-set-to-be-dense-or-compact

3. https://en.wikipedia.org/wiki/Codomain