Well-ordering. Schramm, p. 54: “Definição. Se m e n são números naturais, dizemos que $m < n$ se

a) n está entre os naturais $m + 1$, $m + 1 + 1$, $m + 1 + 1 + 1$, ...

b) nenhuma função com domínio igual a um conjunto com m elementos e imagem igual a um conjunto com n elementos é ***onto***.”

Stoll, p. 35: “Uma função f é ***into*** Y sse a imagem de f é um subconjunto de Y, e ***onto*** Y sse a imagem é igual a Y. Relativo ao domínio, f é ***on*** X se o seu domínio é igual a X.”

Portanto a condição b) acima significa... tomando um conjunto A com m elementos, e outro B com n elementos... todas as funções f_n com domínio A e imagem B são ***into***, ou seja, há elementos em B que não são imagem de nenhuma $f_n : A \to B$.

Ou seja, há elementos em B que função alguma estritamente de A para B “acessa”. O elemento poderia ser acessado por uma função de A para um subconjunto de B (mas não para B). E m e n são os números de elementos nos conjuntos (qualquer número n é considerado um conjunto de n elementos). (Isso implica que cada “número” contém os “números” menores?)

Schramm, p. 28: “One must be careful using the words ‘smallest’ and ‘largest’ in this context. The **smallest** set with a given property is that set (if any) that 1) has the property and 2) *is contained* in any set having the property. The **largest** set with a given property is that set (if any) that 1) has the property, and 2) *contains* any set having the property.”

A frase original era: “Show that the union of a collection of sets is the smallest set that contains all the sets in the collection”.

Primeira coisa: a análise real é a análise da matemática a partir da teoria dos conjuntos e certos axiomas. Analisar o quanto o ZF precisa participar da análise real. ZFC quer dizer Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha (“C”); sem este axioma seria ZF.

urelement: elemento de um conjunto que não é um conjunto. ZF é um sistema de **conjuntos puros.** o que significa a ausência de urelements. A característica dos elementos de um conjunto serem conjuntos é denominada **hereditariedade**. Wikipedia[1]: “nas formulações de teoria dos conjuntos para interpretação no Universo de von Neumann ou expressão da teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel, *todos* os conjuntos são hereditários, porque o único tipo de objeto candidato a elemento de um conjunto é um conjunto. A noção de hereditariedade de conjuntos é relevante apenas em contextos em que podem haver urelements.”

Wikipedia[2]: “ZFC é uma teoria em lógica de primeira ordem (predicativa). As “relações básicas” são igualdade e pertencimento e há apenas um “sort” ou tipo, o conjunto.”

Voltando ao well-ordering... Unisul, p. 15: "m é menor que n quando existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $m + p = n$." Ou seja, $m, n, p \in \mathbb{N}$. Depois, a soma de dois elementos m, p é a soma de dois conjuntos, que é a soma de seus elementos, que é a conjunção dos conjuntos. (?)

Diferenças e similaridades: injetivo, sobrejetivo, bijetivo; into, onto, one-to-one.

Injetivo é "um para um" no domínio: a função não produz resultados em comum entre elementos da imagem. Cada "mapeamento" produzido na imagem a partir do domínio é distinto.

Into é implícito em toda função, significa que há imagem (não é injetivo).

Onto é o mesmo que sobrejetivo, não há imagem não aproveitada, ao invés de ser apenas into, é também completamente correspondente em todos os elementos com imagem no domínio da função.

One-to-one e bijetivo são o mesmo; onto ou sobrejetivo também; mas injetivo não tem equivalente na linguagem "into/onto".

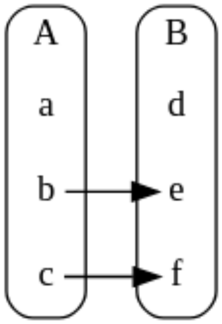
Em $f: X \to Y$, X é assumido como domínio de f. Se X é domínio de f, nenhum elemento de X não está associado a um elemento em Y. Um superconjunto X_p de X, diferente de X, não tem f definida.

Mas e a imagem? A diferença está entre imagem e codomínio. A imagem são os elementos efetivos, e codomínio inclui os elementos não resultantes. "Geralmente, a imagem de uma função é um subconjunto do codomínio. Uma função não-sobrejetiva tem elementos no codomínio para os quais $f(x) = y$ não tem solução".3 Então, na definição de uma função sobrejetiva o segundo conjunto $A \to B$ é o codomínio? E nas demais?

Enumerável/não enumerável, contável/não contável, finito/infinito, injetivo/sobrejetivo/bijetivo: combinações.

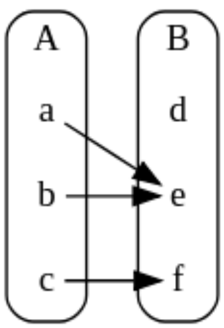
A pergunta era... sobre o corolário 2 do teorema 1.1 (p. 19). "Seja um conjunto finito. Uma aplicação $f: X \to X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva". A aplicação é injetiva se cada elemento da imagem tem apenas um do domínio (1 para 1 neste aspecto). A aplicação é sobrejetiva se não há nenhum elemento na imagem sem domínio. A pergunta é... se ela não for sobrejetiva, ou seja, haver elemento na imagem sem domínio, ela não pode ser injetiva mesmo assim?

(0)



Esta aplicação não é injetiva? A questão é se o domínio de f é $\{a, b, c\}$ ou $\{b, c\}$. Na verdade, o exemplo do livro é uma aplicação $X \to X$, e não $A \to B$. Mas primeiro $A \to B$, se a aplicação é de $A \to B$, a não pode estar sem imagem. Mas se a aplicação é do subconjunto de A $\{b, c\}$ para o subconjunto de B $\{e, f\}$, ela está ok... mas ela pode ser dita uma aplicação de $A \to B$? Poderia-se dizer que obviamente não (pois a fica sem imagem), mas no seguinte caso:

(1)

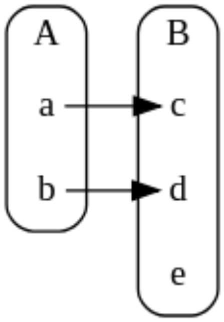


f ainda é $A \to B$, mas não é sobrejetiva. **Mas ela não poderia ser dita também $A \to \{e, f\}$ (um subconjunto de B)?** Ou seja, uma aplicação não-sobrejetiva não teria exatamente como ser delineada sua imagem exata. (A não ser que a imagem seja algo especificado a priori, o que talvez seja o caso, pela definição de relação como pares ordenados "materializados".)

Efetivamente, f é $\{\{a, e\}, \{b, e\}, \{c, f\}\}$. Isso implica imagem $\{e, f\} \neq B$.

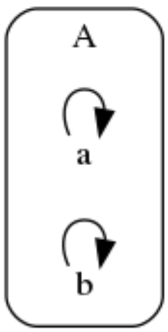
Se f for definida como $A \to B$, ela não é sobrejetiva. Se for definida como $A \to \{e, f\}$, ela é sobrejetiva. Isso significa que f em (0) não pode ser definida $A \to B$; pode ser definida $\{b, c\} \to B$ (ou $\{b, c\} \to \{e, f\}$). Em $\{b, c\} \to \{e, f\}$, é sobrejetiva (e, sendo definida exatamente como $\{b, e\}, \{c, f\}$, é injetiva, ou seja, bijetiva). Em $\{b, c\} \to B$, não é sobrejetiva; mas é injetiva.

Isso contraria o teorema 1.1 que diz que só é injetiva se é sobrejetiva. Excluindo o caso da não-sobrejeção:



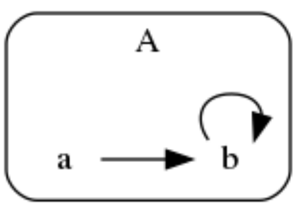
Ela é não-sobrejetiva e injetiva; o teorema se refere **somente** a relações $X \to X$.

(2)



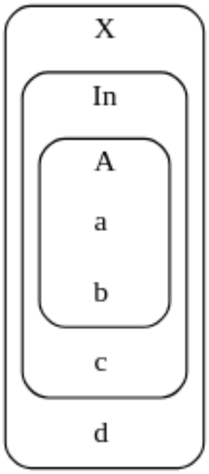
Função bijetiva $A \to A$.

(3)



Não-sobrejetiva (a livre), mas injetiva. Novamente, contraria o teorema 1.1. A função é $\{\{a, b\}, \{b, b\}\}$. O domínio é $\{a, b\}$, a imagem é $\{b\}$. Não é injetiva. Injetiva não é não haver domínio livre, é cada domínio ter apenas uma imagem.

Voltando ao teorema 1.1. Um subconjunto próprio de I_n.

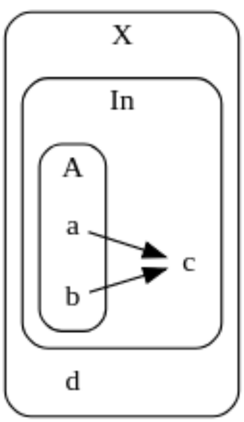


Não irá existir uma bijeção $A \to I_n$ porque para ser bijeção teria de ser sobrejeção e o elemento c ficaria sobrando (na imagem). Falso, ver abaixo.

Algumas funções possíveis $A \to I_n$.

(4)

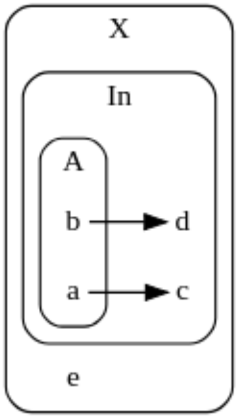
$f = \{\{a, c\}, \{b, c\}\}$,
$D(f) = \{a, b\}$,
$I(f) = \{c\}$:



É sobrejetiva, mas não é injetiva.

(5)

$f = \{\{b, d\}, \{a, c\}\}$,
$D(f) = \{b, a\}$,
$I(f) = \{d, c\}$:



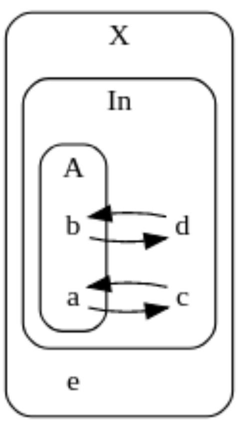
Qual o problema aqui? O problema é que $a, b \in I_n$, portanto para ser uma bijeção $A \to I_n$, $I(f)$ deveria ser $\{a, b, c, d\}$. Portanto a, b seriam elementos da imagem sem domínio e a função não seria sobrejetora. (Mas é injetora.)

(6)

$f = \{\{b, d\}, \{d, b\}, \{a, c\}, \{c, a\}\}$,

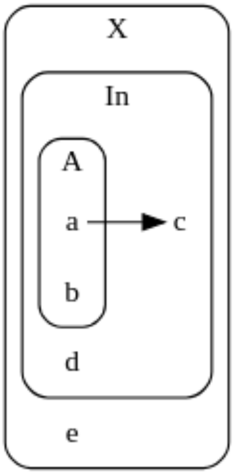
$D(f) = \{b, d, a, c\}$,

$I(f) = \{d, b, c, a\}$:

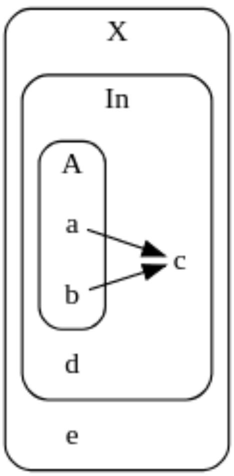


Isto não é uma função $A \to I_n$: O domínio contém elementos que não percentem a A, e a imagem contém elementos que não pertencem a I_n.

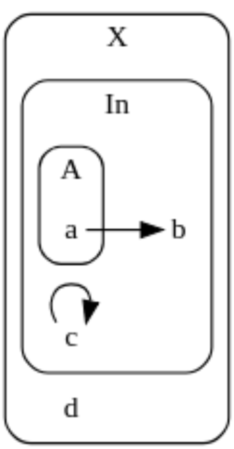
É impossível a bijeção $A \to I_n$ sendo que há elementos x em I_n externos a A. Tal elemento pertence à imagem da função e podem haver alguns casos (no exemplo, $x = d$); um, o exemplo (5); mais



ou

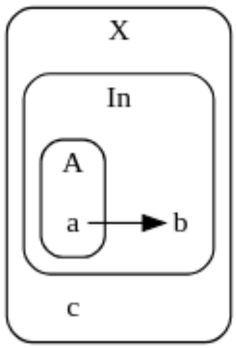


, triviais, em que d não é apontado, e a função não é sobrejetiva (a segunda função também não é injetiva); o exemplo da figura (4), em que a função não é injetiva; e

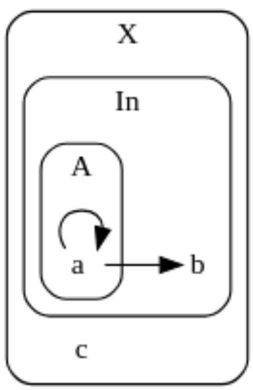


, em que $c \notin A$, o que não lhe permite evitar a não-sobrejeção.

Essencialmente, um elemento b que está fora de A cai na imagem de f e “cria” a necessidade de ser imagem de um elemento de A, mas, ao fazê-lo, como no exemplo mais reduzido abaixo



, “ocupa” a com a função de ser seu domínio (e impede a de ser parte da imagem?).



Esta função tem:

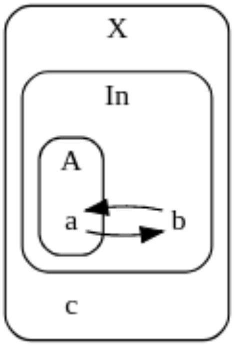
$D(f) = \{a\}$;

$I(f) = \{a, b\}$.

Não é uma função: a se relaciona com mais de um elemento na imagem (a relação é $\{\{a, a\}, \{a, b\}\}$).

Exatamente, b “ocupa” a com o “papel” de ser seu domínio e a próprio só poderia ser imagem (o que necessita ser) de si mesmo (pois b como seu domínio tornaria a função não mais $A \to I_n$*), caso no qual a relação não é mais uma função.

*: ilustrando este caso:



Essa é a explicação do teorema 1.1. (Reexpressar como uma prova.)

1 https://en.wikipedia.org/wiki/Hereditary_set

2 https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo%E2%80%93Fraenkel_set_theory

3 https://en.wikipedia.org/wiki/Codomain