Questões sobre transformações lineares.

De que forma funções arbitrárias podem ser expressas como transformações lineares?

O domínio e codomínio da função devem ser convertidos em espaços vetoriais.

Por exemplo, $f(x) = x$.

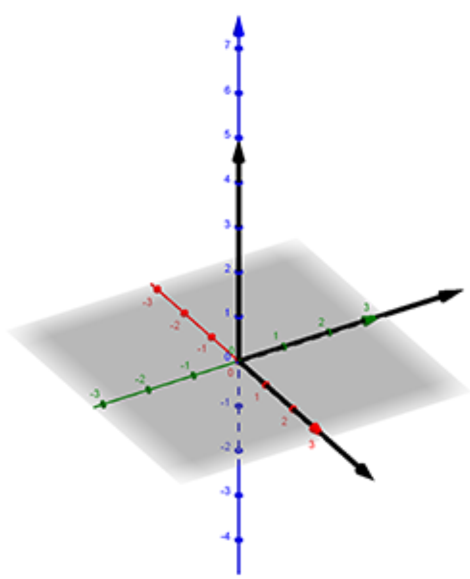
O ponto x é o vetor $(0, x)$.

O ponto $f(x)$ é o vetor $(0,\ f(x))$.

Então, pela função $f(x)$ os vetores $(0, x)$ são convertidos em vetores $(0, f(x))$.

Dimensão

Um vetor é uma lista de elementos, cada elemento relativo a uma *dimensão*. Em um vetor numérico, os elementos denotam coordenadas, ou *distâncias* de uma *origem*, naquela dimensão. Por exemplo, o vetor $(2, 1, 4)$ denota o conjunto das três coordenadas: $(0, 2)$ no plano da dimensão formada pelos vetores $(1, 0,\ 0)$ e $(0, 1, 0)$; $(0, 1)$ no plano da dimensão formada pelos vetores $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$; e $(0, 4)$ no plano da dimensão formada pelos vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$. Cada uma das dimensões se forma por um par de vetores *linearmente independentes* (a ver), e um trio de vetores linearmente independentes forma, por combinação, *três* dimensões.



(Base do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ $\{(0, 0, 5), (0, 5, 0), (5, 0, 0)\}$)

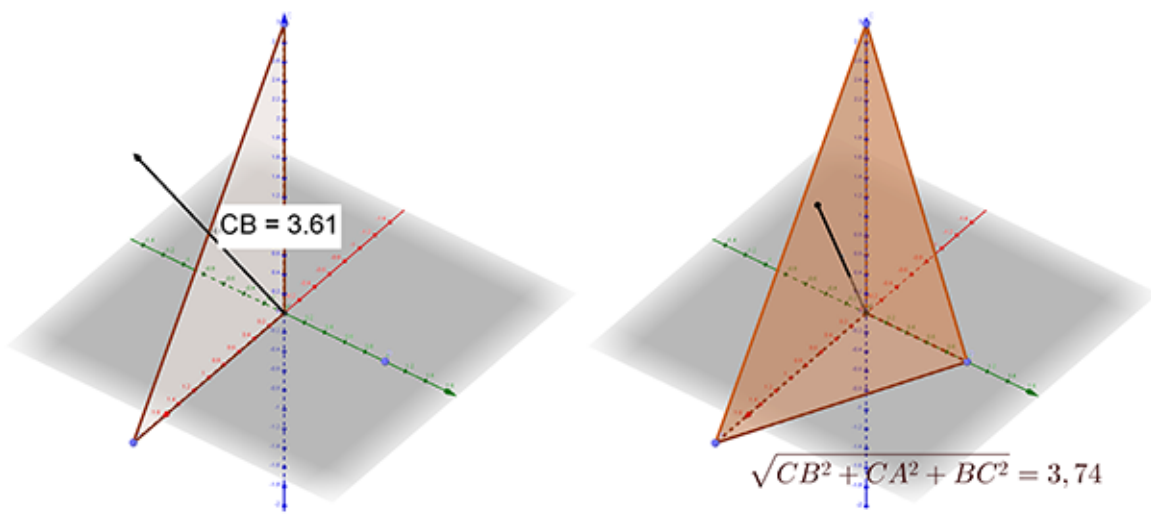
Produto

Um espaço vetorial admite algumas operações diferentes de produto: uma é o produto *escalar* ou *vetorial*, em que “escalar” não se refere a um dos operandos ser um escalar (os operandos são vetores), mas sim ao resultado ser um escalar, e que é a soma das multiplicações de cada elemento:

In[25]:=
```
Labeled["Produto escalar", Column@{
   "{a,b,c}·{d,e,f}=" <> ToString[{a, b, c}.{d, e, f}],
   "{1,2,3}·{4,5,6}=" <> ToString[{1, 2, 3}.{4, 5, 6}]
  }]
```

Out[25]=
```
        Produto escalar
{a,b,c}·{d,e,f}=a d + b e + c f
{1,2,3}·{4,5,6}=32
```

Um vetor forma um polígono ou volume. Por exemplo, o vetor $(2, 3)$ forma um triângulo. A *magnitude* do vetor é a distância euclidiana entre os elementos não-origem do vetor. Por exemplo:



In[33]:= $\{N@\sqrt{2^2+3^2}, N@\sqrt{1^2+2^2+3^2}\}$

Out[33]= {3.60555, 3.74166}

O produto escalar entre dois vetores representa a multiplicação das magnitudes dos vetores. Por exemplo:

In[37]:= $\{N[\sqrt{1^2+2^2+3^2} \times \sqrt{4^2+5^2+6^2}], N[\{1, 2, 3\}.\{4, 5, 6\}]\}$

Out[37]= {32.8329, 32.}

Um vetor *gera* outro quando é uma *multiplicação escalar* do outro. Ex.:

$5 \times (0, 0, 5) = (0, 0, 25)$. $(0, 0, 5)$ *gera* $(0, 0, 5)$.

Combinação linear

Um vetor é uma *combinação linear* de outro vetor ou vetores quando é uma soma da multiplicação escalar individual destes vetores. Estes vetores podem ser um só, ou seja, apenas uma multiplicação do próprio vetor. Por exemplo: $(2, 4)$ é uma combinação linear de $(1, 2)$ pois $(1, 2) \times 2 = (2, 4)$. Ou podem ser uma soma de n vetores multiplicados individualmente: $(a, b, \ldots) = m(c, d, \ldots) + n(e, f, \ldots) + \ldots$.

Um vetor é *linearmente independente* de outro, ou seja, não é uma combinação linear de outro, quando nenhuma operação de multiplicação escalar ou soma multiplicada aplicada sobre o primeiro vetor produz o segundo vetor. Da mesma forma n vetores são linearmente independentes entre si se nenhum deles é uma soma multiplicada dos outros, em quaisquer combinações. Por exemplo, se entre três vetores, alguma combinação deles somada em múltiplos resulta em alguma outra combinação deles, os vetores não são todos linearmente independentes entre si.

Um espaço vetorial é fechado sob adição e multiplicação de vetores. Portanto, todos os vetores em um espaço vetorial serão combinações lineares uns dos outros?

Todo vetor na forma $(0, 0, x)$ será independente linearmente de qualquer vetor na forma $(0, x, 0)$, e o mesmo para os vetores da forma $(x, 0, 0)$.

Um espaço vetorial ser formado significa um conjunto de vetores linearmente independentes ser reunido e cada um deles gerar todos os seus vetores linearmente dependentes, que serão como seus vetores-base todos linearmente independentes de todos os outros vetores gerados de outros vetores-base.