Procedimento para calcular a metragem cúbica (volume) que obterá de um tronco após o “corte”.

1) Estimar o ponto central (longitudinal) do tronco.

2) Medir a circunferência naquele ponto.

O comprimento do círculo naquele ponto.

Vamos supor uma medida $m = 12$. Não podemos supor uma medida pois o procedimento começa *medindo* a medida de um círculo (que não pode ser desenhado pelo comprimento). Precisamos, também, medir um círculo arbitrário.

Comprimento do círculo $= 2\,\pi \cdot R$.

O comprimento medido foi $m = 47.69$.

3) Dividir a circunferência por quatro.

Aqui, o comprimento de um quarto do círculo.

$m_2 = 3$.

```
In[∘]:= 47.69 / 4
Out[∘]= 11.9225
```

4) Elevar isto ao quadrado.

Isto é montar um quadrado com lado igual a este comprimento (“esticado”). GeoGebra.

A área do quadrado é $m_3 = 9$.
Como estamos estabelecendo o quadrado pela medida e não geometricamente, seria interessante comparar geometricamente este quadrado com o círculo.

5) Multiplicar isto pela altura do tronco (obtendo o “volume”).

Calcularei a altura do **cone** a partir da diferença no raio entre a base e o topo do tronco e a altura do tronco.

Se a base tem raio 0.5 e o topo, 0.2, e o tronco tem 9 de altura...

A razão entre topo e raio é $\frac{0.2}{0.5} = \frac{0.2}{1/2} = 0.2 \cdot 2 = 0.4$.

Quando o topo será 0? Em 9 m, o raio caiu de 0.5 a 0.2. Mas essa é uma relação linear, uma subtração. O raio caiu 0.3 (e não uma porcentagem do raio original) em 9.

Em quanto o raio cairá mais 0.2? $\frac{0.2}{0.3} = \frac{x}{9} \Rightarrow 0.3\,x = 1.8 \Rightarrow x = 6$.

Então a altura do cone é $9 + 6 = 15$.

Ou $\frac{R_t}{R_b} = \frac{h_c - h_t}{h_t} \Rightarrow$

$$(h_c - h_t)\, R_b = R_t\, h_t \Rightarrow$$

$$h_c - h_t = \frac{R_t\, h_t}{R_b} \Rightarrow$$

$$h_c = \frac{R_t\, h_t}{R_b} + h_t = \frac{(R_t\, h_t) + (h_t\, R_b)}{R_b} = \frac{h_t\,(R_t + R_b)}{R_b}.$$

Onde:

R_t = raio do tronco

R_b = raio da base

h_c = altura do cone (completo)

h_t = altura do tronco

Testando.

In[ ]:=
$$\frac{9 * (0.2 + 0.5)}{0.5}$$

Out[ ]= 12.6

Obter o volume do cone desta altura com mesma base (cone completo), obter o volume do cone de base R_t e altura $h_2 = h_c - h_t$, e subtrair o volume do primeiro pelo do segundo.

O volume do cone (Geometria II p. 204) é $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$, em que r é o raio e h altura.

Cone completo:

Primeiro, a altura do cone...

In[1]:=
```
Clear[ConeAlt];
ConeAlt=Function[{htronco,Rtopo,Rb}, htronco*(Rtopo+Rb)/Rb];
```

In[ ]:=
```
ConeAlt[9, 0.2, 0.5]
```

Out[ ]= 12.6

O volume do cone completo...

In[3]:=
```
Clear[ConeVol];
ConeVol=Function[{r,h}, π*r^2*h/3];
```

In[ ]:=
```
ConeVol[0.5, 12.6]
```

Out[ ]= 3.29867

O volume do cone topo...

In[ ]:=
```
ConeVol[0.2, 12.6 - 9]
```

Out[ ]= 0.150796

Subtração dos volumes.

In[∘]:=
```
ConeVol[0.5, ConeAlt[9, 0.2, 0.5]] - ConeVol[0.2, ConeAlt[9, 0.2, 0.5] - 9]
```
Out[∘]=
```
3.14788
```

Este é o volume do “tronco do cone”.
Agora, como unir isto em uma função?

Função do volume de um tronco de cone. Estas são medidas do tronco (de cone). A altura é, coincidentemente, igual à do tronco (de madeira).

$$V(r_b, r_t, h) = \mathrm{ConeVol}\left[r_b, \frac{h\cdot(r_b+r_t)}{r_b}\right] - \mathrm{ConeVol}\left[r_t, \frac{h\cdot(r_b+r_t)}{r_b} - h\right] =$$
$$\left(\pi\cdot r_b{}^2\cdot\frac{h\cdot(r_b+r_t)}{r_b}\cdot\frac{1}{3}\right) - \left[\pi\cdot r_t{}^2\cdot\left(\frac{h\cdot(r_b+r_t)}{r_b} - h\right)\cdot\frac{1}{3}\right] =$$
$$\left(\pi\cdot r_b{}^2\cdot\frac{h\cdot(r_b+r_t)}{3\,r_b}\right) - \left[\pi\cdot r_t{}^2\cdot\frac{h\cdot(r_b+r_t) - h\cdot r_b}{3\,r_b}\right] =$$
$$\frac{3\,r_b\cdot\pi\cdot 3\,r_b{}^3\cdot h\cdot(r_b+r_t)}{3\,r_b} - \frac{3\,r_b\cdot\pi\cdot 3\,r_b\,r_t{}^2\cdot h\cdot(r_b+r_t-r_b)}{3\,r_b} =$$
$$9\,r_b{}^4\cdot\pi\cdot h\cdot(r_b+r_t) - 9\,r_b{}^2\cdot\pi\cdot r_t{}^2\cdot h\cdot r_t.$$

In[5]:=
```
Clear[ConeTVolM];
ConeTVolM=Function[{rb,rt,h},9*rb^4*π*h*(rb+rt)-9*rb^2*π*rt^2*h*rt];
```

In[∘]:=
```
ConeTVolM[0.5, 0.2, 9]
```
Out[∘]=
```
10.6241
```

In[7]:=
```
ConeTVol=Function[{rb,rt,h},ConeVol[rb,ConeAlt[h,rt,rb]]-
    ConeVol[rt,ConeAlt[h,rt,rb]-h]];
```

In[∘]:=
```
ConeTVol[rb, rt, h]
```
Out[∘]=
$$\frac{1}{3}\,h\,\pi\,rb\,(rb+rt) - \frac{1}{3}\,\pi\,rt^2\left(-h + \frac{h\,(rb+rt)}{rb}\right)$$

In[∘]:=
$$\mathrm{Simplify}\left[\frac{1}{3}\,h\,\pi\,rb\,(rb+rt) - \frac{1}{3}\,\pi\,rt^2\left(-h + \frac{h\,(rb+rt)}{rb}\right)\right]$$
Out[∘]=
$$\frac{h\,\pi\,(rb^3 + rb^2\,rt - rt^3)}{3\,rb}$$

In[∘]:=
```
ConeTVol[0.5, 0.2, 9]
```
Out[∘]=
```
3.14788
```

Vamos por partes.

In[∘]:=
$$\mathrm{ConeVol}\left[rb, \frac{h * (rb+rt)}{rb}\right]$$
Out[∘]=
$$\frac{1}{3}\,h\,\pi\,rb\,(rb+rt)$$

$$\text{ConeVol}\left[r_b, \frac{h\cdot(r_b+r_t)}{r_b}\right] = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot {r_b}^2\cdot\frac{h\cdot(r_b+r_t)}{r_b} =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r_b\cdot h\cdot(r_b+r_t).$$

Entendi, tudo.

(h = altura do tronco de cone.)

$$V(r_b, r_t, h) =$$

$$\left(\pi\, {r_b}^2\cdot\frac{h\,(r_b+r_t)}{r_b}\cdot\frac{1}{3}\right) - \pi\, {r_t}^2\left(\frac{h\,(r_b+r_t)}{r_b} - h\right)\cdot\frac{1}{3} =$$

$$\frac{1}{3}\,\pi\, r_b\cdot h\,(r_b+r_t) - \frac{1}{3}\,\pi\, {r_t}^2\left(\frac{h\,(r_b+r_t) - h\, r_b}{r_b}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\,\pi\, r_b\cdot h\,(r_b+r_t) - \frac{1}{3}\,\pi\, {r_t}^2\cdot\frac{h\, r_t}{r_b} =$$

$$\frac{1}{3}\,\pi\left[r_b\, h\,(r_b+r_t) - {r_t}^2\cdot\frac{h\, r_t}{r_b}\right] =$$

$$\frac{1}{3}\,\pi\left[\frac{{r_b}^2\, h\,(r_b+r_t) - {r_t}^2\, h\, r_t}{r_b}\right] =$$

$$\frac{\pi\, h\left({r_b}^2\,(r_b+r_t) - {r_t}^3\right)}{3\, r_b} =$$

$$\frac{\pi\, h\left({r_b}^3 + {r_b}^2\, r_t - {r_t}^3\right)}{3\, r_b}.$$

In[8]:=
```
Clear[ConeTVolM];
ConeTVolM=Function[{rb,rt,h}, 1/3*π*(h*(rb^3+rb^2*rt-rt^3))/rb];
```

In[∘]:=
```
ConeTVolM[0.5, 0.2, 9]
```

Out[∘]= 3.14788

In[∘]:=
$$\frac{\pi\, 9\,\left(0.5^2\times 0.7 - 0.2^3\right)}{3\times 0.5}$$

Out[∘]= 3.14788

Então, se for pela média (meio do tronco) para o cilindro, este teria raio:

In[ ]:= $0.2 + \frac{0.5 - 0.2}{2}$

Out[ ]= 0.35

E volume:

In[ ]:= $0.35^2 * \pi * 9$

Out[ ]= 3.46361

In[ ]:= 3.4636059005827464 - 3.14788

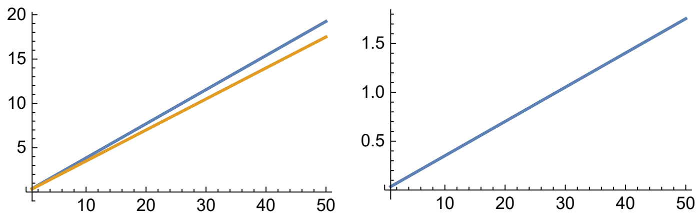
Out[ ]= 0.315726

Seria esta diferença linear com o aumento das dimensões das bases e altura do tronco?

In[10]:=
```
Clear[MediumVol]
MediumVol=Function[{rb,rt,h}, ((rb+rt)/2)^2 *π*h];
```

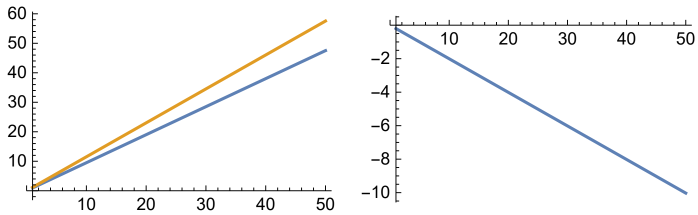
Altura do tronco de 1 a 50...

In[ ]:=
```
Module[{rb, rt}, rb = 0.5; rt = 0.2;
 GraphicsRow[{
   Plot[{MediumVol[rb, rt, h], ConeTVolM[rb, rt, h]}, {h, 1, 50}],
   Plot[MediumVol[rb, rt, h] - ConeTVolM[rb, rt, h], {h, 1, 50}]
  }]
]
```

Out[ ]=


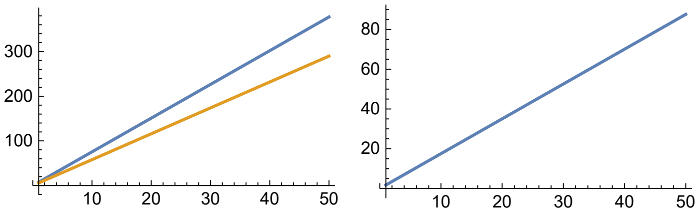
Raios mais diferentes?

In[ ]:=
```
Module[{rb, rt}, rb = 1; rt = 0.1;
 GraphicsRow[{
   Plot[{MediumVol[rb, rt, h], ConeTVolM[rb, rt, h]}, {h, 1, 50}],
   Plot[MediumVol[rb, rt, h] - ConeTVolM[rb, rt, h], {h, 1, 50}]
  }]
]
```

Out[ ]=


Mesma diferença, medida deslocada?

In[ ]:=
```
Module[{rb, rt}, rb = 2; rt = 1.1;
 GraphicsRow[{
   Plot[{MediumVol[rb, rt, h], ConeTVolM[rb, rt, h]}, {h, 1, 50}],
   Plot[MediumVol[rb, rt, h] - ConeTVolM[rb, rt, h], {h, 1, 50}]
  }]
]
```

Out[ ]=


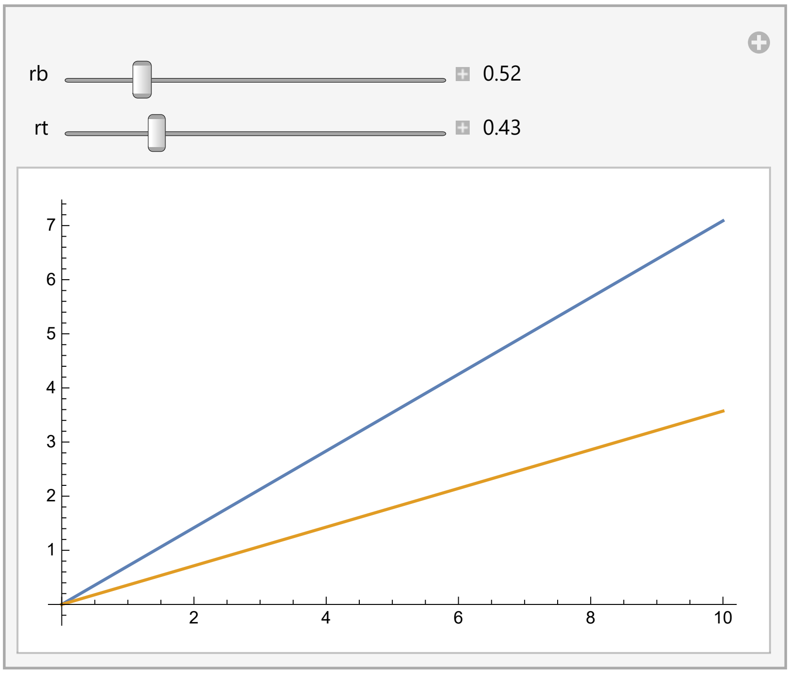
Ou seja, não é só diferença, quanto maiores os raios (e também a diferença), maior a discrepância...

Reverificar.

Antes das derivadas...

Variando r_b.

In[ ]:=
```
Manipulate[Plot[{MediumVol[rb, rt, h], ConeTVolM[rb, rt, h]}, {h, 0, 10}],
 {{rb, .5}, 0, 3, .01, Appearance → "Labeled"},
 {{rt, .2}, 0, 2, .01, Appearance → "Labeled"}]
```

Out[ ]=


MediumVol: volume do cilindro tomado pelo raio na média entre o raio da base e do topo.
ConeTVolM: volume do tronco do cone com raios base e topo.
Ambos de mesma altura.
Todo:

Marcar o valor das duas funções em $h = 9$.

Restringir $r_t \geq r_b$.

Comparações manuais (GeoGebra).
A função do volume do cilindro estava errada?

In[∘]:=
```
{MediumVol[33.49, 23.58, 10.6], ConeTVolM[33.49, 23.58, 10.6]}
```

Out[∘]= {27 115.1, 16 870.1}

O volume do cilindro (Geometria II p. 193) é $\pi r^2 h$, não $r h$.

Função diferença.

In[∘]:=
```
ConeTVolM[rb, rt, h] - MediumVol[rb, rt, h]
```

Out[∘]= $-\frac{1}{4} h \pi (rb + rt)^2 + \frac{h \pi (rb^3 + rb^2 rt - rt^3)}{3 rb}$

In[∘]:=
```
Simplify[ConeTVolM[rb, rt, h] - MediumVol[rb, rt, h]]
```

Out[∘]= $\frac{h \pi (rb^3 - 2 rb^2 rt - 3 rb rt^2 - 4 rt^3)}{12 rb}$

Derivadas

Seria legal descobrir a função discrepância e achar o máximo e mínimo.
O problema é que são três variáveis. Mas podemos achar as derivadas parciais.

Dessa forma, a função discrepância é apenas a subtração combinada das duas medidas.

In[∘]:=
```
Simplify[MediumVol[rb, rt, h] - ConeTVolM[rb, rt, h]]
```

Out[∘]= $\frac{h \pi (-rb^3 + 2 rb^2 rt + 3 rb rt^2 + 4 rt^3)}{12 rb}$

In[36]:=
```
Clear[Discr]
Discr=MediumVol[rb,rt,h]-ConeTVolM[rb,rt,h]
```

Out[37]= $\frac{1}{4} h \pi (rb + rt)^2 - \frac{h \pi (rb^3 + rb^2 rt - rt^3)}{3 rb}$

In[25]:=
```
Clear[DiscrRb,DiscrRt,DiscrH];
DiscrRb[rb_,rt_,h_]=∂rbDiscr;
DiscrRt[rb_,rt_,h_]=∂rtDiscr;
DiscrH[rb_,rt_,h_]=∂hDiscr;
Head[DiscrRb];
DiscrRb;
DiscrRb[rb,rt,h];
DiscrRb[rb,0.5,10];
```

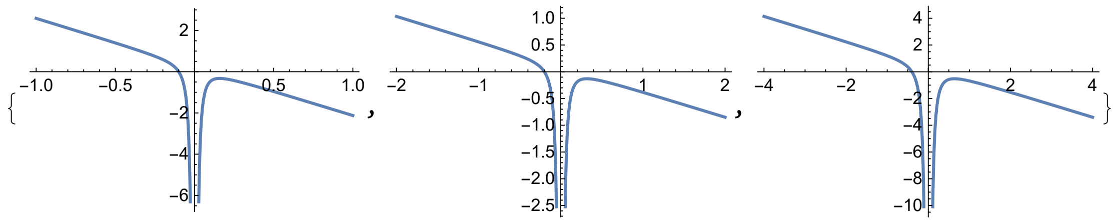
In[∘]:=
```
DiscrRb[rb, rt, h]
DiscrRt[rb, rt, h]
DiscrH[rb, rt, h]
```

Out[∘]= $$\frac{1}{2} h \pi (rb + rt) - \frac{h \pi (3 rb^2 + 2 rb\, rt)}{3 rb} + \frac{h \pi (rb^3 + rb^2 rt - rt^3)}{3 rb^2}$$

Out[∘]= $$\frac{1}{2} h \pi (rb + rt) - \frac{h \pi (rb^2 - 3 rt^2)}{3 rb}$$

Out[∘]= $$\frac{1}{4} \pi (rb + rt)^2 - \frac{\pi (rb^3 + rb^2 rt - rt^3)}{3 rb}$$

In[∘]:=
```
{
 Plot[{DiscrRb[rb, 0.1, 4.5]}, {rb, -1, 1}, ImageSize → Small],
 Plot[{DiscrRb[rb, 0.2, 0.9]}, {rb, -2, 2}, ImageSize → Small],
 Plot[{DiscrRb[rb, 0.4, 1.8]}, {rb, -4, 4}, ImageSize → Small]
}
```

Out[∘]=


In[38]:=
```
N[Solve[DiscrRb[rb, 0.1, 4.5] == 0]]
N[Solve[DiscrRb[rb, 0.2, 0.9] == 0]]
N[Solve[DiscrRb[rb, 0.4, 1.8] == 0]]
```

Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[38]= {{rb → -0.1}, {rb → 0.1 - 0.1 i}, {rb → 0.1 + 0.1 i}}

Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

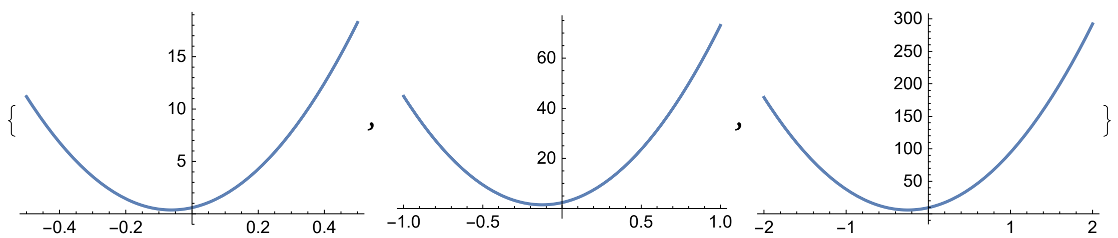
Out[39]= {{rb → -0.2}, {rb → 0.2 - 0.2 i}, {rb → 0.2 + 0.2 i}}

Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[40]= {{rb → -0.4}, {rb → 0.4 - 0.4 i}, {rb → 0.4 + 0.4 i}}

Só tem solução negativa. O que isso quer dizer?

In[∘]:=
```
{
 Plot[{DiscrRt[0.25, rt, 4.5]}, {rt, -0.5, 0.5}, ImageSize → Small],
 Plot[{DiscrRt[0.5, rt, 9]}, {rt, -1, 1}, ImageSize → Small],
 Plot[{DiscrRt[1, rt, 18]}, {rt, -2, 2}, ImageSize → Small]
}
```

Out[∘]=


In[∘]:=
```
N[Solve[DiscrRt[0.25, rt, 4.5] == 0]]
N[Solve[DiscrRt[0.5, rt, 9] == 0]]
N[Solve[DiscrRt[1, rt, 18] == 0]]
```

Out[∘]=
```
{{rt → -0.0625 - 0.0806872 ⅈ}, {rt → -0.0625 + 0.0806872 ⅈ}}
```

Out[∘]=
```
{{rt → -0.125 - 0.161374 ⅈ}, {rt → -0.125 + 0.161374 ⅈ}}
```

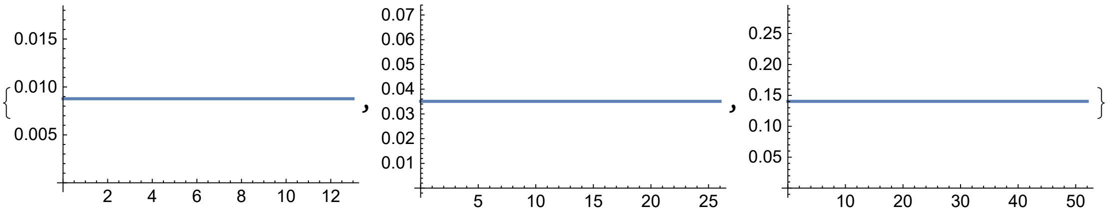
Out[∘]=
```
{{rt → -0.25 - 0.322749 ⅈ}, {rt → -0.25 + 0.322749 ⅈ}}
```

Só tem solução complexa.

Plotar a antiderivada. (?)

In[∘]:=
```
{
 Plot[{DiscrH[0.25, 0.1, h]}, {h, 0, 13}, ImageSize → Small],
 Plot[{DiscrH[0.5, 0.2, h]}, {h, 0, 26}, ImageSize → Small],
 Plot[{DiscrH[1, 0.4, h]}, {h, 0, 52}, ImageSize → Small]
}
```

Out[∘]=



Essa ausência de soluções indica que as variáveis não têm mínimos.

As três parciais (cada uma em uma variável) foram um sistema de três equações em três variáveis para resolver?

GeoGebra

A circunscrição do hexágono no círculo foi feita da seguinte forma (Cubagem3.ggb):
- Foi definido o ponto central do círculo;
- Foi medido o raio de um ponto no círculo ao ponto central e traçado um segundo círculo do ponto no círculo passando pelo ponto central, cruzando o primeiro círculo (compasso)
- No ponto de cruzamento, foi traçado outro círculo com o mesmo raio e cruzando o primeiro círculo novamente
- E assim sucessivamente até seccionar o círculo em seis arcos.
- Foi traçado o hexágono unindo os seis pontos.

Fontes:
Geometria I e II - Disciplina na modalidade a distância - Unisul Virtual, 2011
Kelen Regina Salles Silva e Christian Wagner.

Circunscrição do hexágono no círculo: Geometria I págs. 48 e 61
Área do hexágono regular: Geometria I pág. 168
Área do círculo: Geometria I pág. 183
Volume do cone: Geometria II pág. 204