Aluno: Pedro Sobota

Exemplos

$A = (0,1)$.

$x = 0 \Rightarrow x \in A'$?
$0 = \inf A \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A | 0 < a < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\forall \dot{O}(0)\colon \dot{O}(0) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in A'$.

$x = 1 \Rightarrow x \in A'$?
$1 = \sup A \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \exists a \in A | 1 - \varepsilon < a < 1 \Leftrightarrow$
$\forall \dot{O}(1)\colon \dot{O}(1) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in A'$.

$x \in A \Rightarrow x \in A'$?
$x \in A \Rightarrow$
$\forall \dot{O}(x)\colon \dot{O}(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in A'$.

Exercícios

Ex 1. $A = \mathbb{R} \Rightarrow A' = ?$

Suponha $A' \neq A$. Então $\exists x \notin A = \mathbb{R}$, absurdo.
$A' = \mathbb{R}$.

Ex 2. $A = \mathbb{Q} \Rightarrow A' = ?$

$A' = \mathbb{Q}$.

Ex 3. $A = \mathbb{N} \Rightarrow A' = ?$

$\forall a, b \in \mathbb{N}\colon \exists c \in [a,b] | \dot{O}(c) = \varnothing$. Então $A' = \varnothing$.

Ex 4. $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \Rightarrow A' = ?$

$A = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots.\right\}, \lim_{n \to \infty} \left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$.
$A = (0,1] \Rightarrow A' = [0,1]$.

Ex 5. $A \subset [a,b]$, A é conj. infinito. Provar que $\exists$ ao menos um ponto limite de A que $\in [a,b]$.

$A' = A$ e $A \subset [a,b]$. Então $x \in A \Rightarrow x \in [a,b]$.

Ou:

$\dot{O}_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x) \cup (x, x+\varepsilon)$.

$b \in \dot{O}_\varepsilon(x) \Rightarrow$
$x - \varepsilon < b < x \vee x < b < x + \varepsilon$.

$\dot{O}_\varepsilon(x) \cap B \neq \varnothing \Rightarrow$
$((x-\varepsilon, x) \cup (x, x+\varepsilon)) \cap B \neq \varnothing \Rightarrow$
$\exists z \in \mathbb{R} | (x - \varepsilon < z < x \vee x < z < x + \varepsilon) \wedge z \in B$.

(1)
$x \in A' \Rightarrow$
$\forall \dot{O}_\varepsilon(x) \colon \dot{O}_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \colon \dot{O}_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \colon ((x-\varepsilon, x) \cup (x, x+\varepsilon)) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \colon \exists z \in \mathbb{R} | (x - \varepsilon < z < x \vee x < z < x + \varepsilon) \wedge z \in A$.

$x \in [a, b] \Rightarrow$
$a \leqslant x \leqslant b$.

$\exists x \in \mathbb{R} | x \in A' \wedge x \in [a, b] \Rightarrow$
$\exists x \in \mathbb{R} | (\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \colon \exists z \in \mathbb{R} | (x - \varepsilon < z < x \vee x < z < x + \varepsilon) \wedge z \in A) \wedge a \leqslant x \leqslant b$.

Contradição:

$\neg(\exists x \in \mathbb{R} | x \in A' \wedge x \in [a, b]) =$
$\forall x \in \mathbb{R} \colon \neg(x \in A') \vee \neg(x \in [a, b]) =$
$\forall x \in \mathbb{R} \colon x \notin A' \vee x \notin [a, b]$.

$x \notin [a, b] \Rightarrow$
$x < a \vee x > b$.

$\dot{O}_\varepsilon(x) \cap B = \varnothing \Rightarrow$
$((x-\varepsilon, x) \cup (x, x+\varepsilon)) \cap B = \varnothing \Rightarrow$
$\forall z \in \mathbb{R} \colon \neg((x - \varepsilon < z < x \vee x < z < x + \varepsilon) \wedge z \in B) \Rightarrow$
$\forall z \in \mathbb{R} \colon \neg(x - \varepsilon < z < x \vee x < z < x + \varepsilon) \vee \neg(z \in B) \Rightarrow$
$\forall z \in \mathbb{R} \colon \neg(x - \varepsilon < z < x) \wedge \neg(x < z < x + \varepsilon) \vee z \notin B \Rightarrow$
$\forall z \in \mathbb{R} \colon \neg(x - \varepsilon < z \wedge z < x) \wedge \neg(x < z \wedge z < x + \varepsilon) \vee z \notin B \Rightarrow$
$\forall z \in \mathbb{R} \colon (\neg(x - \varepsilon < z) \vee \neg(z < x)) \wedge (\neg(x < z) \vee \neg(z < x + \varepsilon)) \vee z \notin B \Rightarrow$
$\forall z \in \mathbb{R} \colon (x - \varepsilon \geqslant z \vee z \geqslant x) \wedge (x \geqslant z \vee z \geqslant x + \varepsilon) \vee z \notin B$.

$x \notin A' \Rightarrow$
$\neg(x \in A') \Rightarrow$

$\neg(\forall\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \dot{O}_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow$
$\exists\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \dot{O}_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing \Rightarrow$
$\exists\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \forall z \in \mathbb{R}\colon (x - \varepsilon \geqslant z \vee z \geqslant x) \wedge (x \geqslant z \vee z \geqslant x + \varepsilon) \vee z \notin A.$

$\forall x \in \mathbb{R}\colon x \notin A' \vee x \notin [a, b] \Rightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}\colon [\exists\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} | \forall z \in \mathbb{R}\colon (x - \varepsilon \geqslant z \vee z \geqslant x) \wedge (x \geqslant z \vee z \geqslant x + \varepsilon) \vee z \notin A] \vee (x < a \vee x > b).$

Ou:
$\forall x \in \mathbb{R}\colon x \notin A' \vee x \notin [a, b] \Rightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}\colon (\exists\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} | \dot{O}_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing) \vee x \notin [a, b].$

Deve haver um absurdo.

Para todo x: ou $x \notin [a, b]$ ou x tem uma vizinhança perfurada sem intersecção com A.

Se isso for verdade, não há contradição. Se isso não for verdade, é verdade o contrário?
Para isso não ser verdade, ambas devem ser falsas?

$\forall x \in \mathbb{R}\colon \neg[(\exists\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} | \dot{O}_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing) \vee x \notin [a, b] \Rightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}\colon \neg(\exists\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} | \dot{O}_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing) \wedge \neg(x \notin [a, b]) \Rightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}\colon [\forall\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \neg(\dot{O}_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing)] \wedge x \in [a, b] \Rightarrow$
$\forall x \in \mathbb{R}\colon (\forall\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\colon \dot{O}_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing) \wedge x \in [a, b].$

Se isso for sempre verdade, provamos a contradição.
Para todo x: $x \in [a, b]$ e toda vizinhança perfurada de x tem intersecção com A.
Para todo x: $x \in [a, b]$ e x é ponto limite de A.

A negação da afirmação é "todo ponto limite de $A \notin [a, b]$".
Encontrar a implicação de que ser ponto limite faz $\in [a, b]$.
Ser ponto limite está em (1).
Qual a relação de toda vizinhança perfurada de um ponto-limite x com $[a, b]$?
Uma perna dela tem um ponto em A, ou seja, $x + \varepsilon \geqslant a_1 \wedge x + \varepsilon \leqslant b_1$.
Mas se $x + \varepsilon \geqslant a_1$, então $x + \varepsilon \geqslant a$, e se $x + \varepsilon \leqslant b_1$, então $x + \varepsilon \leqslant b$.
Portanto $x + \varepsilon \in [a, b]$.

Afirmação:
$\exists a' \in A' | a' \in [a,b] \Rightarrow$
$\exists a' \in \mathbb{R} | x - \varepsilon < a' < x + \varepsilon, \forall x$

Contradição: $\forall a' \in A' \colon a' \notin [a,b]$.
$\forall a' \in \mathbb{R} | x - \varepsilon < a' < x + \varepsilon$

Contradição: $\neg(\exists x \in A' | x \in [a,b]) = \forall x \in A' \colon x \notin [a,b]$.
$x \in A' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \colon \exists x' \in A | x < x' < x + \varepsilon \vee x > x' > x - \varepsilon$.

Então,
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \colon \exists x' \in A | (x < x' < x + \varepsilon \wedge x < a) \vee (x > x' > x - \varepsilon \wedge x > b)$.

Para $x = a - n$, tome $\varepsilon = \left|\frac{a-x}{2}\right|$.

$\neg(\forall \varepsilon \colon \exists x' | P(x')) = \exists \varepsilon | \forall x' \colon \neg P(x')$.

Então,
$\forall x' \in \mathbb{R} | x < x' < x + \varepsilon \colon x' < a \Rightarrow x' \notin [a,b]$.