# Sequências e séries

## Definição

### PA

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Variáveis: $a_1$ e $d$.

In[84]:=
```
Table[Nest[Function[{a}, a + d], 1, n], {n, 0, 10}]
```

Out[84]= $\{1, 1+d, 1+2d, 1+3d, 1+4d, 1+5d, 1+6d, 1+7d, 1+8d, 1+9d, 1+10d\}$

```
Clear[PA];
(*Esta função é um table que retorna sequências para valores de d*)
PA=Function[{a0,d},
    Table[Nest[
        Function[{a},a+d],a0,n],{n,0,10}
    ]
];
```

In[∘]:=
```
PA[1, 1]
```

Out[∘]= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}

In[∘]:=
```
PA[1, 2]
```

Out[∘]= {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21}

In[∘]:=
```
PA[2, 2]
```

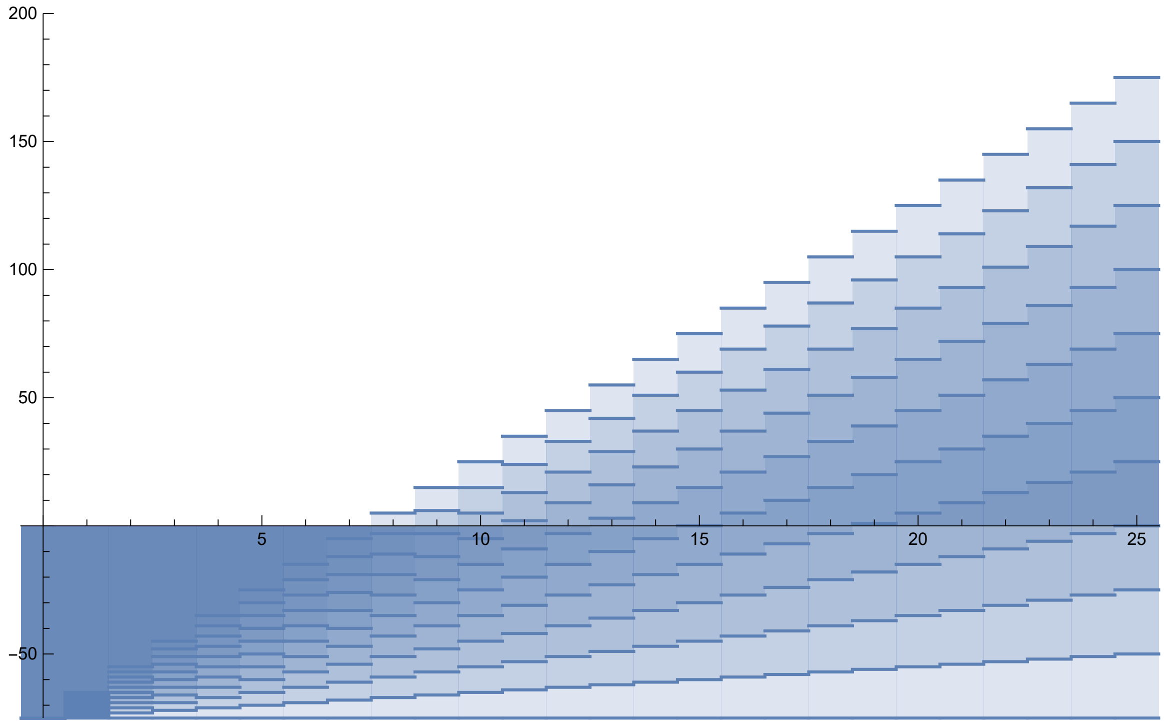
Out[∘]= {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22}

Assumindo $x \in \mathbb{N}$.

P.A.s $a + x$ com $a = -75$, $-20 \leq x \leq 30$:

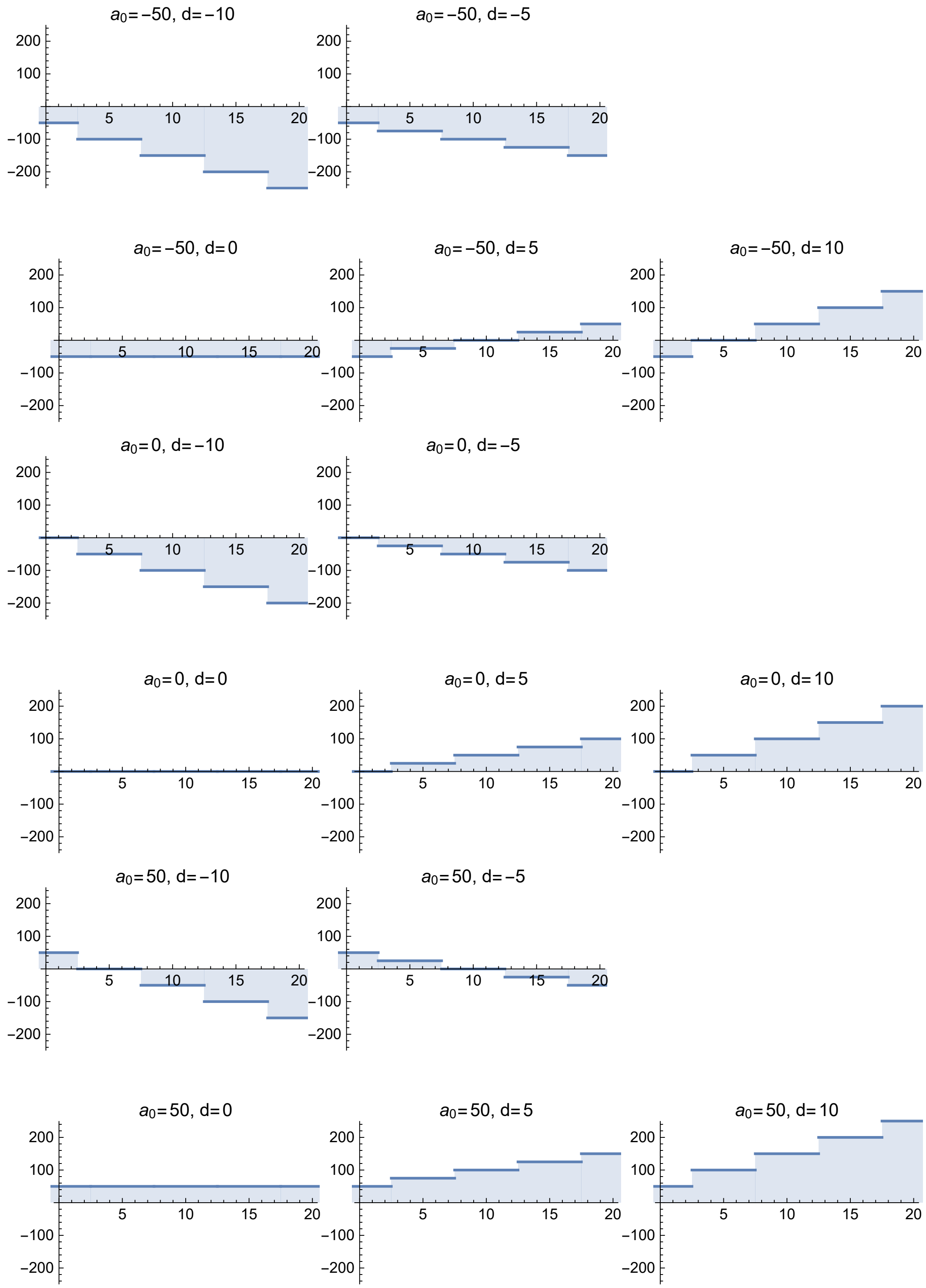
In[130]:=
```
DiscretePlot[PA[-75, d], {d, -25, 25}, ExtentSize → Full,
 PlotRange → {-75, 200}, RegionFunction → Function[{x, y}, x ≥ 0], ImageSize → 600]
```

Out[130]=



In[131]:=
```
Column@Table[Row@Table[DiscretePlot[a0 + x d, {x, -20, 20, 5}, ExtentSize → Full,
    RegionFunction → Function[{x, y}, x ≥ 0], ImageSize → 180, PlotRange → {-250, 250},
    PlotLabel → StringForm["a0=``, d=``", a0, d]], {d, -10, 10, 5}], {a0, -50, 50, 50}]
```

Out[131]=



# PG

Cada termo ($b$) é o anterior $\times q$.

$$b_n = b_{n-1} \cdot q.$$

Variáveis: $b_1$ e $q$.

PAs apenas são constantes ou não dependendo de se $d = 0$.

In[95]:=

```
Clear[PG];
(*Esta função é um table que retorna sequências para valores de d*)
PG=Function[{b0,q},
    Table[Nest[
        Function[{b},b*q],b0,n],{n,0,10}
    ]
];
```

In[3]:=

```
PG[1, 2]
```

Out[3]= {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024}

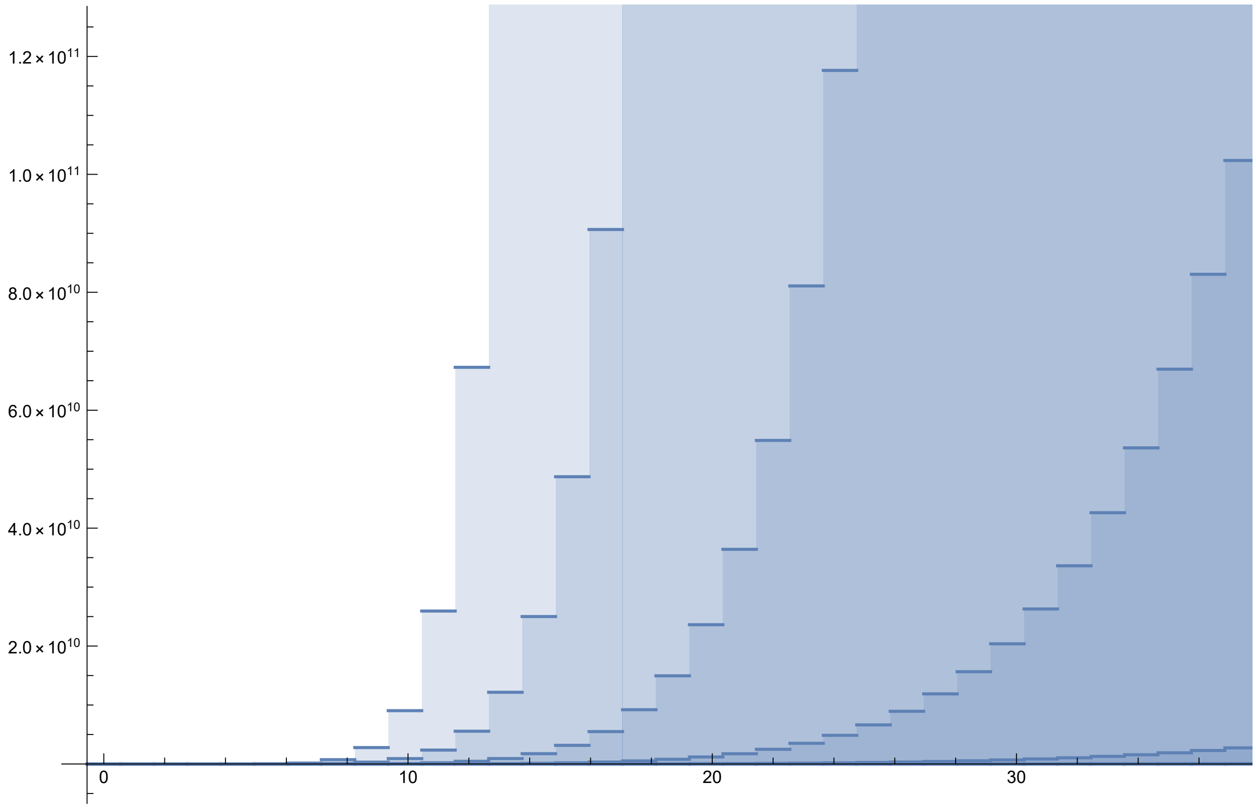
In[ ]:=

```
PG[1, 3]
```

Out[ ]= {1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19 683, 59 049}

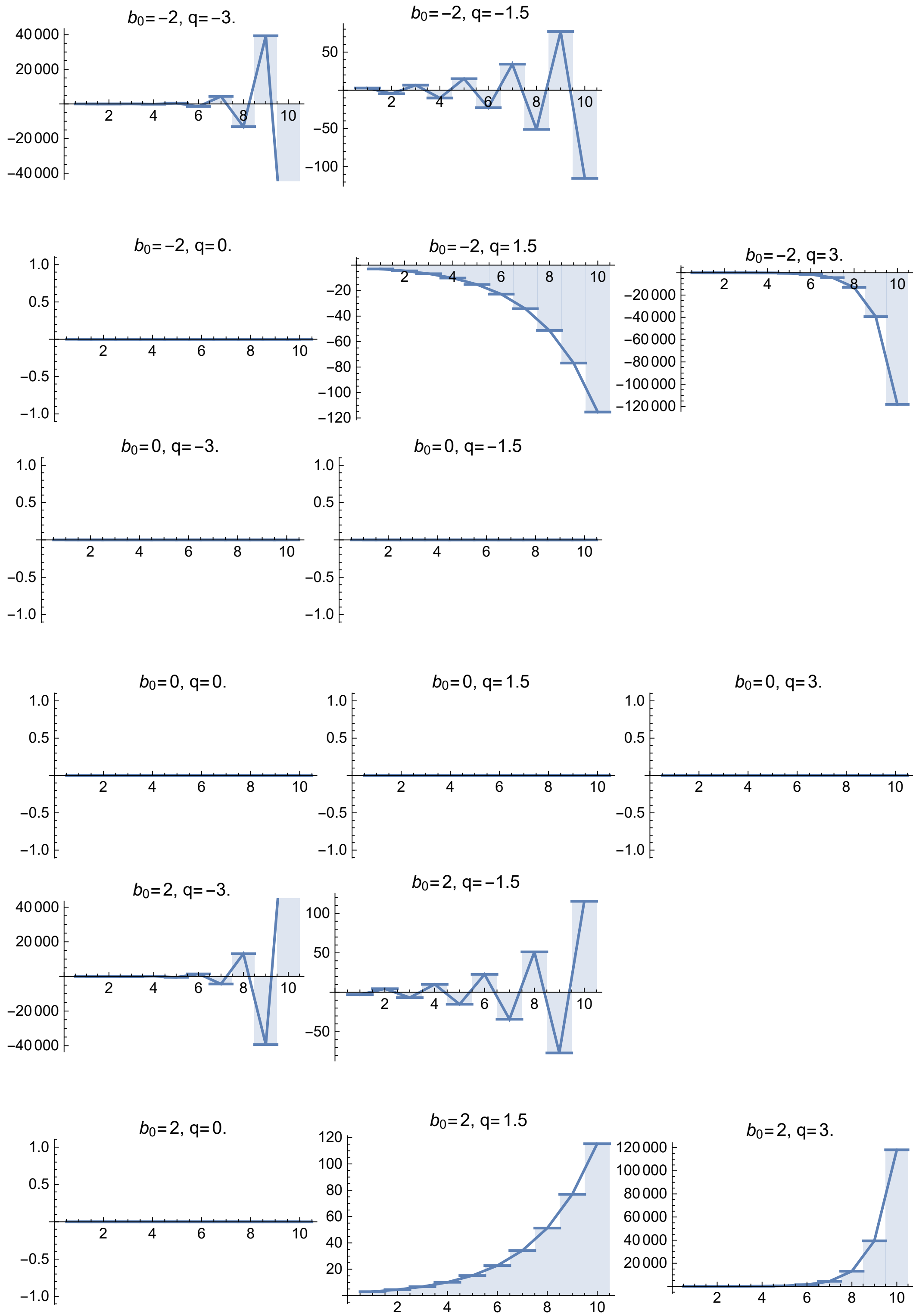
In[132]:=
```
DiscretePlot[PG[1, q], {q, 0, 40, 1.1}, ExtentSize → Full,
 RegionFunction → Function[{x, y}, x ≥ 0], ImageSize → 700]
```

Out[132]=



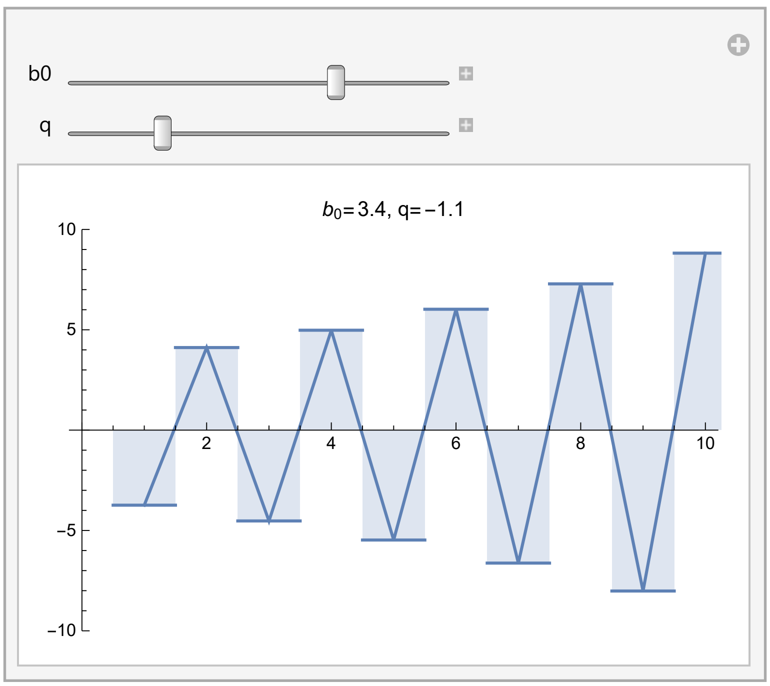
In[134]:=
```
Column@Table[Row@Table[DiscretePlot[Nest[Function[{b}, b * q], b0, n], {n, 1, 10},
    ExtentSize → Full, Joined → True, ImageSize → 180, (*PlotRange→{-125,125},*)
    PlotLabel → StringForm["b0=``, q=``", b0, q]], {q, -3, 3, 1.5}], {b0, -2, 2, 2}]
```

Out[134]=



- PGs com $q$ negativo não “convergem” (“divergem”) (porque o sinal está sempre trocando porque o multiplicador é negativo);
- PGs com $q = 0$ são constantes exceto o primeiro termo;
- PGs com $q = 1$ são constantes;
- PGs com $0 < q < 1$ "convergem" para $0$;
- PGs com $q > 0$ "convergem" para $\pm\infty$ dependendo do sinal de $b_0$.

In[136]:=
```
Manipulate[
    DiscretePlot[Nest[Function[{b},b*q],b0,n],{n,1,10},ExtentSize→Full,Joined→True,ImageSize→35
    PlotLabel→StringForm["b₀=``, q=``",b0,q]],{{b0,-3.5},-7.5,7.5,.1},{{q,.8},-2,2,.1}
]
```

Out[136]=



## Fórmulas

PA termo. $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Porquê $n-1$? Porque supomos $n$ indexado em 1. E o primeiro termo não tem diferença para $a_1$. Se usarmos indexado em $0$, $a_n = a_0 + d\,n$, ou seja, é **só uma reparação sobre a fórmula trivial**.

PG termo. $b_n = b_{n-1} \cdot q$. Isso é a fórmula dado um termo $b_{n-1}$, não a geral. Na geral, o termo inicial é multiplicado por $q$ $n-1$ vezes. A quantidade de vezes que um número é multiplicado por si mesmo é o número elevado à quantidade: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$. Agora se um número $a$ é multiplicado por outro $b$ $n$ vezes... $a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = a \cdot b^4 = a \cdot b^n$. Então temos o valor do termo $n$ como $b_1 \cdot q^n$? Novamente, se indexado em $1$, o $n$-ésimo termo tem uma multiplicação a menos, pois o primeiro termo não é multiplicado. Então $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. (Se fosse indexado em $0$, seria $b_0 \cdot q^n$, ou seja, o **mesmo que a fórmula da PA porém multiplicando o primeiro termo ao invés de somando e exponenciada a razão ao invés de multiplicada**.)

PA soma dos $n$ primeiros termos. $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$. Demonstração não trivial.

PG soma dos $n$ primeiros termos. $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ (com $q \neq 1$). Entender a fórmula. Demonstrada na aula 02.

Segundo [2], se $|q| < 1$, a soma geral da PG $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ tem limite (ou é igual a?) $\frac{1}{1-q}$ é $\frac{b_1}{1-q}$ (isto está na aula 00).

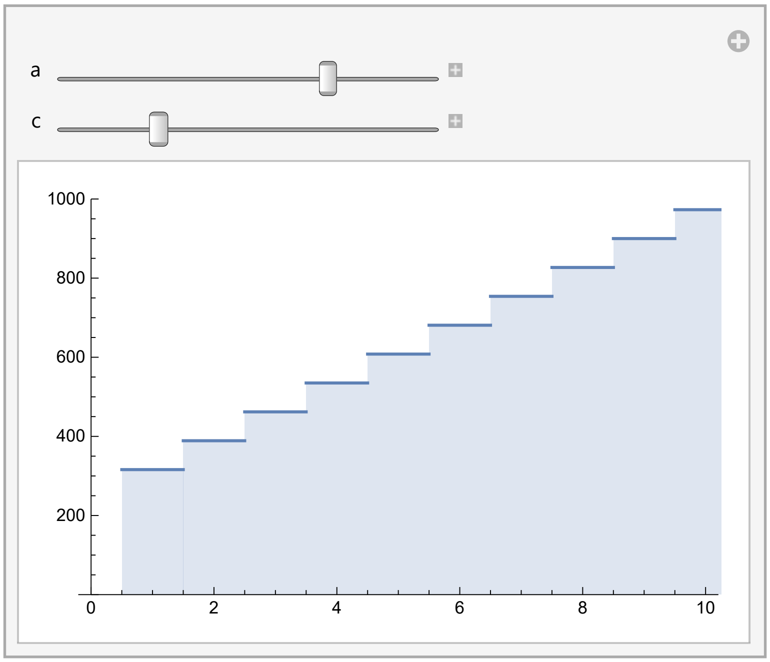
## Parâmetros

### Progressão aritmética

$(n) \to a\, n + c$, com $1 \leq n \leq 10$

In[143]:=
```
Manipulate[
 Module[{seq},
  seq = Function[{n}, a n + c];
  DiscretePlot[seq[n], {n, 1, 10},
   ExtentSize → Full, ImageSize → 350, PlotRange → {0, 1000}]
 ],
 {{a, 1}, 0, 100, 1},
 {{c, 0}, 0, 1000, 1}
]
```

Out[143]=

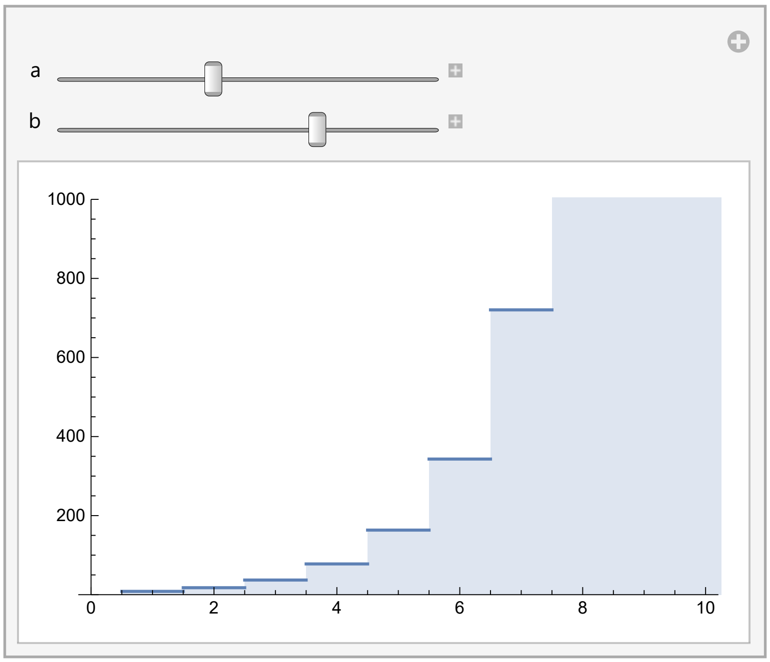



## Progressão geométrica

$(n) \to a\, b^n$, com $1 \leq n \leq 10$

In[145]:=
```
Manipulate[
 Module[{seq},
  seq = Function[{n}, a b^n];
  DiscretePlot[seq[n], {n, 1, 10},
   ExtentSize → Full, ImageSize → 350, PlotRange → {0, 1000}]
 ],
 {{a, 1}, 0, 10, 1},
 {{b, 1}, 0, 3, .1}
]
```

Out[145]=




## Provas

- Fórmula do termo da PA. Por indução.

Primeiro, para $k = 1$: $a_1 = a_1 + d(1-1) = a_1$□.

Sendo válido para $n = k$, provar para $n = k + 1$.

$a_{k+1} = a_1 + d(k+1-1) = a_1 + d\,k$ .

Agora, $a_n = a_{n-1} + d$ sempre. Então $a_{k+1} = a_{k+1-1} + d = a_k + d$.

Logo, $a_k + d = a_1 + d\,k$. (?)

$a_1 + d\,k = a_{k+1} = a_k + d$.

De novo.

Para $k = 1$, $a_1 = a_1 + d\,0 = a_1$ □.

Para $k + 1$, $a_{k+1} = a_1 + d\,k$.

$a_k = a_1 + d(k-1)$.

$a_1 + d(k-1) - a_1 - d\,k = d(k-1-k) = d$. Mas isso prova? Sim, pois esta é a definição de PA.

Temos que provar que $a_{k+1} = a_k + d$.

$$a_1 + d\,k = a_1 + d(k-1) + d \Rightarrow$$

$$d\,k = (d\,k) - d + d\,\square.$$

- Fórmula da soma da PA, por indução.

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}.$$

Para o caso $n = k = 1$,

$$S_1 = \frac{(a_1+a_1)\cdot 1}{2} = \frac{2\,a_1}{2} = a_1.$$

Para $n = k+1$,

$S_{k+1} = \dfrac{(a_1+a_{k+1})\cdot(k+1)}{2}$. Como $S_n = S_{n-1} + d$ errado. $S_n = S_{n-1} + n$.

$S_{k+1} = S_k + d = \dfrac{(a_1+a_k)\cdot n}{2} + d$. Logo,

$$\frac{(a_1+a_{k+1})\cdot n}{2} = \frac{(a_1+a_k)\cdot n}{2} + d \Rightarrow$$

$$(a_1 + a_{k+1})\cdot n = (a_1 + a_k)\cdot n + 2\,d \Rightarrow$$

$$n\,a_1 + n\,a_{k+1} = n\,a_1 + n\,a_k + 2\,d \Rightarrow$$

$$n\,a_{k+1} = n\,a_k + 2\,d \Rightarrow$$

$$n\,a_k + d = n\,a_k + d + d.$$

Estamos tentando provar que? $S_{n+1} - S_n = d$? Neste caso,

$$\frac{(a_1+a_{n+1})\cdot n}{2} - \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} = d \Rightarrow$$

$$n(a_1 + a_n + d + a_1 + a_n) = 2\,d \Rightarrow$$

$$n(2\,a_1 + 2\,a_n + d) = 2\,d \Rightarrow ?$$

Provar que $S_{n+1} - S_n = n$. Errado. $S_n - S_{n-1} = n$. Porém, $S_{n+1} - S_n = n + 1$.

$$\frac{(a_1 + a_{k+1}) \cdot (k+1)}{2} - \frac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} = k + 1 \Rightarrow$$

$$(a_1 + a_{k+1}) \cdot (k+1) - (a_1 + a_k) \cdot k = 2\,k + 2\,.$$

Expressar $a_{k+1}$ em termos de $a_k$.

$$(a_1 + a_k + d) \cdot (k+1) - (a_1\,k + a_k\,k) = 2\,k + 2 \Rightarrow$$

$$a_1\,k + a_1 + a_k\,k + a_k + d\,k + d - a_1\,k - a_k\,k = 2\,k + 2 \Rightarrow$$

$$a_1 + a_k + d\,k + d = 2\,k + 2\,.$$

$$a_{k+1} = a_1 + k\,d \Rightarrow a_k = a_1 + (k-1)\,d\,.$$

$$a_1 + a_1 + (k-1)\,d + d\,k + d = 2\,k + 2 \Rightarrow$$

$$2\,a_1 + d(k - 1 + k + 1) = 2\,k + 2 \Rightarrow$$

$$2\,a_1 + 2\,d\,k = 2\,k + 2 \Rightarrow$$

$$a_1 + d\,k = k + 1\,.$$

Como $a_1 + d\,k = a_{k+1}$,

$a_{k+1} = k + 1$?

De novo. Seguindo [1], a fórmula para $n = k + 1$ é apenas a fórmula para $n = k$ acrescida do último termo, $a_{k+1}$.

(1) $S_{k+1} = \dfrac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} + a_{k+1}$.

Temos algumas substituições.

$a_n = a_{n-1} + d$.

$a_n = a_{n+1} - d$.

$a_{n+1} = a_n + d$.

$a_{n-1} = a_n - d$.

$S_n = S_{n-1} + n$.

$S_n = S_{n+1} - n.$

$S_{n+1} = S_n + n + 1.$

$S_{n-1} = S_n - (n+1).$

$a_n = a_1 + (n-1)\, d.$

$a_{n+1} = a_1 + n\, d.$

$a_{n-1} = a_1 + (n-1)\, d.$

As “trocas de variável” envolvem trocar $a_n$ por $a_{n\pm x}$ ou $S_n$ por $S_{n\pm x}$ ou $a_n$ por $a_1 \pm x$.

Substituindo dois desses em (1),

$$S_{k+1} = \frac{(a_1 + a_1 + (k-1)\, d)\cdot k}{2} + a_1 + k\, d.$$

Fizemos duas trocas de $a_k$ por $a_1 + x$.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (2\, a_1 + k\, d - d)\, k + 2\, a_1 + 2\, k\, d = \\ &2\, a_1\, k + k^2\, d - k\, d + 2\, a_1 + 2\, k\, d = \\ &k(2\, a_1 + k\, d - d + 2\, d) + 2\, a_1 = \\ &k(2\, a_1 + k\, d + d) + 2\, a_1\,. \end{aligned}$$

De novo.

Estamos tentando provar que $S_{k+1} = \dfrac{(a_1 + a_{k+1})\cdot(k+1)}{2}$.

Primeira substituição $a_k$ por $a_{k+1} - d$.

$$S_{k+1} = \frac{(a_1 + a_{k+1} - d)\, k}{2} + a_{k+1}.$$

Segunda substituição de $a_{k+1}$ por $a_1 + k\, d$.

Basicamente, as minhas substituições foram ao contrário.

$$S_{k+1} = \frac{(a_1+a_{k+1}-d)\,k}{2} + a_1 + k\,d =$$

$$\frac{a_1\,k+a_{k+1}\,k-d\,k+a_1+k\,d}{2} =$$

$$\frac{k(a_1+a_{k+1}-d+d)+a_1}{2} =$$

$$\frac{k(a_1+a_{k+1})+a_1}{2}.$$

Substituindo $a_{k+1}$ por $a_1 + k\,d$, (porquê?)

$$\frac{k(a_1+a_1+k\,d)+a_1}{2} =$$

$$\frac{k(2\,a_1+k\,d)+a_1}{2}.$$

$$\frac{(a_1+a_{k+1})\cdot(k+1)}{2} = \frac{k(2\,a_1+k\,d)+a_1}{2}?$$

$$(a_1 + a_{k+1})\cdot(k+1) = k(2\,a_1 + k\,d) + a_1?$$

Voltando a antes desta última substituição.

$$\frac{(a_1+a_{k+1})\cdot(k+1)}{2} = \frac{k(a_1+a_{k+1})+a_1}{2}?$$

$$(a_1 + a_{k+1})\cdot(k+1) = k(a_1 + a_{k+1}) + a_1?$$

$$a_1\,k + a_{k+1}\,k + a_1 + a_{k+1} = a_1\,k + a_{k+1}\,k + a_1?$$ Não.

Prova desenvolvida no papel.

- Fórmula do termo da PG, por indução.
- Fórmula da soma da PG, por indução.
- Fórmula da soma da PG, pela demonstração de Gauss.
- Minha fórmula PG termo com base em termo arbitrário.

$$b_{m+n} = b_n\,q^m = b_m\,q^n.$$

$$b_{m-n} = b_n\,q^{-m} = b_m\,q^{-n}.$$

## Exercícios

In[•]:= $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^6, \frac{16}{189}, \text{Module}\left[\{q\}, q = -\frac{1}{2}; \frac{1-q^6}{1-q}\right]\right\}$

Out[•]= $\left\{\frac{1}{64}, \frac{16}{189}, \frac{21}{32}\right\}$

In[•]:=
```
Column@{"0,0" -> PG[0, 0], "-1,0" -> PG[-1, 0], "-1,-.1" -> PG[-1, -.1],
  "0,-.1" -> PG[0, -.1], "0,.1" -> PG[0, .1], "1,-.1" -> PG[1, -.1],
  "1,0" -> PG[1, 0], "1,.1" → PG[1, .1], "1,1" -> PG[1, 1], "2,1" -> PG[2, 1]}
```

Out[•]=
```
0,0 → {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
-1,0 → {-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
-1,-.1 → {-1, 0.1, -0.01, 0.001, -0.0001,
  0.00001, -1. × 10^-6, 1. × 10^-7, -1. × 10^-8, 1. × 10^-9, -1. × 10^-10}
0,-.1 → {0, 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.}
0,.1 → {0, 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.}
1,-.1 →
 {1, -0.1, 0.01, -0.001, 0.0001, -0.00001, 1. × 10^-6, -1. × 10^-7, 1. × 10^-8, -1. × 10^-9, 1. × 10^-10}
1,0 → {1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
1,.1 → {1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 1. × 10^-6, 1. × 10^-7, 1. × 10^-8, 1. × 10^-9, 1. × 10^-10}
1,1 → {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}
2,1 → {2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2}
```

In[•]:=
```
Module[{pg}, pg = PG[2, 2];
 {pg, {pg[[4]], pg[[2]] * 2^2}, {pg[[8]], pg[[5]] * 2^3},
  {pg[[8]], pg[[3]] * 2^5}, {pg[[5]], pg[[8]] * 2^-3}}]
```

Out[•]= {{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048}, {16, 16}, {256, 256}, {256, 256}, {32, 32}}

In[•]:= $\left\{2^{-2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2^2}, 42/3, 49*4\right\}$

Out[•]= $\left\{\frac{1}{4}, \sqrt{2}, \frac{1}{4}, 14, 196\right\}$

In[•]:= $\left\{\sqrt{324}, 2^{13}, 4/-1, \text{Sum}\left[2^x, \{x, 0, 12\}\right], \frac{1-2^{13}}{1-2}, 2^6, 8191/63, \frac{1-2^6}{1-2}, \frac{\text{Sum}[2^x, \{x, 0, 12\}]}{\text{Sum}[2^x, \{x, 0, 5\}]}\right\}$

Out[•]= $\left\{18, 8192, -4, 8191, 8191, 64, \frac{8191}{63}, 63, \frac{8191}{63}\right\}$

In[•]:= $\{1.34 - 1.33, 1.344 - 1.333, 1.3444 - 1.3333, 1.344444 - 1.333333, .1^2, .1^3, .1^2 + .1^3,$
$\text{Sum}[.1^n, \{n, 2, 2\}], \text{Sum}[.1^n, \{n, 2, 3\}], \frac{1}{3} + \text{Sum}[.1^n, \{n, 2, 10\}], \frac{1}{3} + \text{Sum}[.1^n, \{n, 0, 10\}],$
$\frac{1}{3} + \text{Sum}[.1^n, \{n, 0, 10\}] - .1^1, \frac{1}{3} - \frac{1}{10}, \frac{7}{30} + \text{Sum}[.1^n, \{n, 0, 10\}], \frac{363}{270}, \frac{7}{30} + \frac{1}{1-\frac{1}{10}}\}$

Out[•]= $\{0.01, 0.011, 0.0111, 0.011111, 0.01, 0.001, 0.011,$
$0.01, 0.011, 0.344444, 1.44444, 1.34444, \frac{7}{30}, 1.34444, \frac{121}{90}, \frac{121}{90}\}$

In[∘]:= $\left\{\frac{1}{6^7}, \left(\frac{1}{6}\right)^7, \text{N@6 / 5}, \sqrt{72}, \text{Simplify}\left[a^2+a^3\right], \left(\frac{7}{3}\right)^3+\frac{7}{3}, \text{Simplify}\left[\frac{1-a^3}{1-a^2}\right], \frac{7}{30}+\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right\}$

Out[∘]= $\left\{\frac{1}{279936}, \frac{1}{279936}, 1.2, 6\sqrt{2}, a^2\,(1+a), \frac{406}{27}, \frac{1+a+a^2}{1+a}, \frac{121}{90}\right\}$

In[∘]:= $\{\text{Simplify}\left[a\,(1+q^3)*a^2\,q^3\right], 14-336+14+336+14, \sqrt{336}, 14-\sqrt{336}+14+14+\sqrt{336}, 42/3, \sqrt{98}\}$

Out[∘]= $\{a^3\,q^3\,(1+q^3), 42, 4\sqrt{21}, 42, 14, 7\sqrt{2}\}$

In[∘]:= $\{a^3\,q^3\,(1+q^3), 42, 4\sqrt{21}, 42, 14, 7\sqrt{2}, 7-\sqrt{98}+7+7\sqrt{98}, \sqrt{98}, 14^2, 14^4, 2^{14}, 16383/127, 121*180/90, 19^2, \sqrt{361-28}, \sqrt{72}, \text{Roots}\left[d^2-10\,d+7==0, d\right]\}$

Out[∘]= $\{a^3\,q^3\,(1+q^3), 42, 4\sqrt{21}, 42, 14, 7\sqrt{2}, 14+42\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 196, 38416, 16384, 129, 242, 361, 3\sqrt{37}, 6\sqrt{2}, d==5-3\sqrt{2}\ ||\ d==5+3\sqrt{2}\}$

In[∘]:= $\left\{\left(10-\frac{10+\sqrt{72}}{2}\right)*7+\frac{49}{\frac{10+\sqrt{72}}{2}}, \left(\frac{10\pm\sqrt{72}}{2}\right)*7, \frac{119+7\sqrt{72}}{2}, \text{N@}\frac{119+7\sqrt{72}}{2},\right.$
$56*\left(\frac{10\pm\sqrt{72}}{2}\right), \text{N}\left[56*\left(\frac{10\pm\sqrt{72}}{2}\right)\right], \text{Simplify}\left[a^3\,q^3+a^3\,q^6\right], \frac{a^3\,q^3+a^3\,q^6}{a\,q^3},$
$\left.\left(49/\left(\frac{10\pm\sqrt{72}}{2}\right)\right)+\left(7*\left(\frac{10\pm\sqrt{72}}{2}\right)\right), \text{Roots}\left[q^4-3\,q^2==10, q\right], \text{Roots}\left[q^2-3\,q==10, q\right]\right\}$

Out[∘]= $\left\{\frac{98}{10+6\sqrt{2}}+7\left(10+\frac{1}{2}\left(-10-6\sqrt{2}\right)\right), \frac{7}{2}\left(10\pm6\sqrt{2}\right), \frac{1}{2}\left(119+42\sqrt{2}\right),\right.$
$89.1985, 28\left(10\pm6\sqrt{2}\right), 28.\left(10.\pm8.48528\right), a^3\,q^3\,(1+q^3), \frac{a^3\,q^3+a^3\,q^6}{a\,q^3},$
$\left.\frac{98}{10\pm6\sqrt{2}}+\frac{7}{2}\left(10\pm6\sqrt{2}\right), q==i\sqrt{2}\ ||\ q==-i\sqrt{2}\ ||\ q==\sqrt{5}\ ||\ q==-\sqrt{5}, q==-2\ ||\ q==5\right\}$

## Referências


[1] https://www.purplemath.com/modules/series6.htm

[2] https://math.stackexchange.com/a/2495425/479728