1. Calcule as integrais múltiplas iteradas:

a) $\int_0^3 \int_{-2}^0 x^2 y - 2xy \, dy \, dx$.

$$\int_{-2}^0 x^2 y - 2xy \, dy = \int_{-2}^0 x^2 y \, dy - 2 \int_{-2}^0 xy \, dy =$$

$$x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{y=-2}^{y=0} - 2x \frac{y^2}{2} \Big|_{y=-2}^{y=0} =$$

$$x^2(0-2) - 2x(0-2) =$$

$$-2x^2 + 4x.$$

$$\int_0^3 -2x^2 + 4x \, dx =$$

$$-2 \int_0^3 x^2 \, dx + 4 \int_0^3 x \, dx =$$

$$-2 \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=3} + 4 \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=3} =$$

$$-2(9-0) + 4\left(\frac{9}{2} - 0\right) =$$

$$-18 + 18 = 0.$$

In[ ]:=
```
Integrate[x^2 y - 2 x y, {x, 0, 3}, {y, -2, 0}]
```

Out[ ]=
```
0
```

b) $\iiint_T x + 2y + 3z \, dV$, onde

$$T = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \\ 1 \le z \le 3 \end{cases}.$$

Qualquer ordem de integração; então x, y, z.

$$\int_1^3\int_0^3\int_0^2 x+2\,y+3\,z\,d v=$$

$$\int_1^3\int_0^3\int_0^2 x+2\,y+3\,z\,d x\,d y\,d z=$$

$$\int_1^3\int_0^3 \frac{x^2}{2}+2\,x\,y+3\,x\,z\,\Big|_{x=0}^{x=2}\,d y\,d z=$$

$$\int_1^3\int_0^3 2+4\,y+6\,z\,d y\,d z=$$

$$\int_1^3 2\,y+2\,y^2+6\,y\,z\,\Big|_{y=0}^{y=3}\,d z=$$

$$\int_1^3 6+18+18\,z\,d z=$$

$$6\,z+18\,z+9\,z^2\,\Big|_1^3=$$

$$18+54+81-(6+18+9)=$$

$$153-33=120.$$

```
In[]:= {Integrate[x + 2 y + 3 z, {x, 0, 2}, {y, 0, 3}, {z, 1, 3}],
  Integrate[x + 2 y + 3 z, x], 18 + 27 + 81 - (6 + 9 + 9), Integrate[x + 2 y + 3 z, x],
  Integrate[2 + 4 y + 6 z, y], Integrate[24 + 18 z, z], 18 + 54 + 81 - (6 + 18 + 9)}
```

Out[]= $\left\{120, \frac{x^2}{2}+2\,x\,y+3\,x\,z, 102, \frac{x^2}{2}+2\,x\,y+3\,x\,z, 2\,y+2\,y^2+6\,y\,z, 24\,z+9\,z^2, 120\right\}$

2. Dada a integral $I=\int_0^1\int_{x^2}^{x} d y\,d x$:

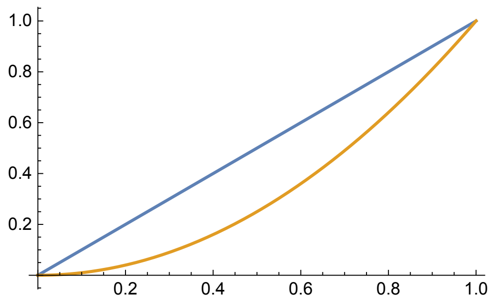
a) Descreva analiticamente a região de integração.

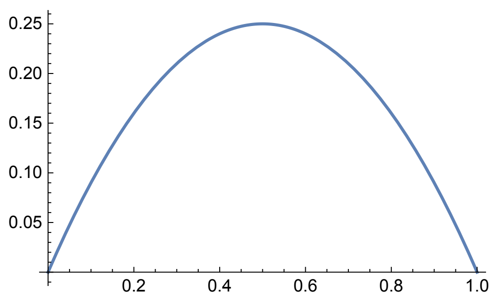
A região de integração é a região delimitada no eixo y pelas funções $y=x$ e $y=x^2$ e no eixo x pelo intervalo $0\le x\le 1$. Ou $x^2\le y\le x \wedge 0\le x\le 1$.

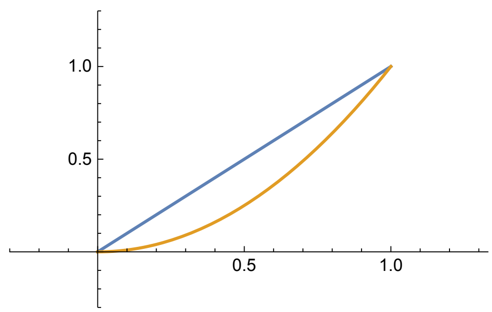
b) Descreva graficamente a região de integração.

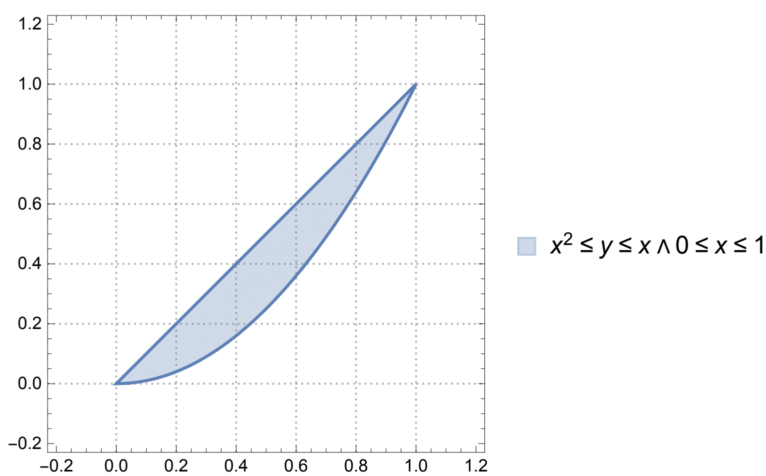
In[∘]:=
```
Row[{Plot[{x, x^2}, {x, 0, 1}, ImageSize → 250],
  Plot[x - x^2, {x, 0, 1}, ImageSize → 250], Plot[{x, x^2}, {x, -0.3, 1.3},
   PlotRange → {-0.3, 1.3}, RegionFunction → Function[{x}, 0 ≤ x ≤ 1], ImageSize → 250],
  RegionPlot[x^2 ≤ y ≤ x && 0 ≤ x ≤ 1, {x, -0.2, 1.2}, {y, -0.2, 1.2},
   ImageSize → 250, PlotTheme → "Detailed"]}, Spacer[10]]
```

Out[∘]=









c) Calcule a integral utilizando uma “ordem” escolhida.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx =$$

$$\int_0^1 y \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx =$$

$$\int_0^1 x - x^2\, dx =$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 =$$

$$\frac{3x^2 - 2x^3}{6} \Big|_0^1 =$$

$$\frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}.$$

In[ ]:=
```
{Integrate[1, {y, x², x}, {x, 0, 1}], Integrate[x - x², {x, 0, 1}]}
```

Out[ ]= $\left\{x - x^2, \frac{1}{6}\right\}$

3. Determine a área da região limitada pelas curvas $y = x + 1$ e $y = 3 + 2x - x^2$ (usando obrigatoriamente uma integral dupla). Represente a região graficamente.

$f(x) = x + 1$,

$g(x) = 3 + 2x - x^2$.

$$x + 1 = 3 + 2x - x^2 \Rightarrow$$

$$-x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot -1 \cdot 2}}{-2} =$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}.$$

$f(1) = 2$ e $g(1) = 4$.

$g(x) > f(x)$.

$$\int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\, dx = \int_{-1}^{2} -x^2 + 2x + 3 - x - 1\, dx = \int_{-1}^{2} -x^2 + x + 2\, dx =$$

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right) =$$

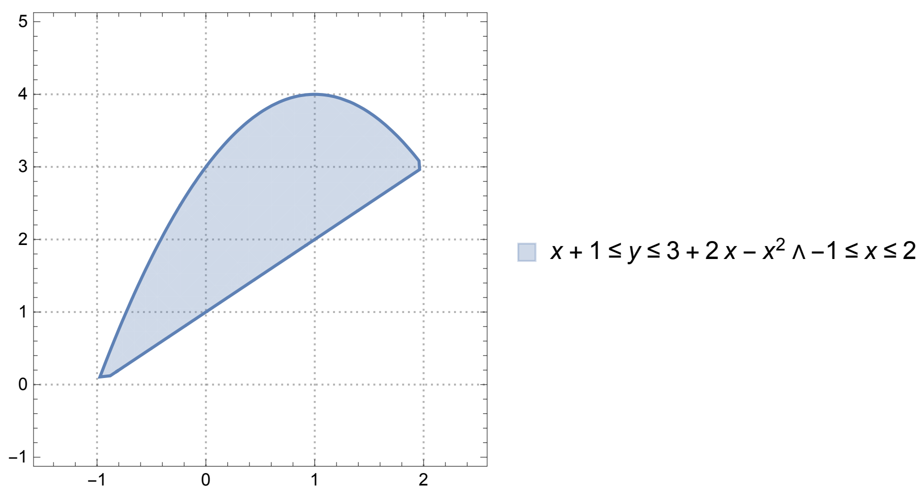
$$\frac{-8+6+12}{3} - \left(\frac{2+3-12}{6}\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6}.$$

In[∘]:=
```
{Solve[-x^2 + x + 2 == 0, x], # + 1 &@@1, 3 + (2 #) - (#^2) &@@1, Function[x, 3 + 2 x - x^2][1],
 3 + 2 x - x^2 - (x + 1), Integrate[-x^2 + x + 2, x], Integrate[-x^2 + x + 2, {x, -1, 2}]}
```

Out[∘]= $\left\{\{\{x \to -1\}, \{x \to 2\}\}, 1, 1, 4, 2 + x - x^2, 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \frac{9}{2}\right\}$

In[∘]:=
```
RegionPlot[x + 1 ≤ y ≤ 3 + 2 x - x^2 && -1 ≤ x ≤ 2,
 {x, -1.5, 2.5}, {y, -1, 5}, ImageSize → 250, PlotTheme → "Detailed"]
```

Out[∘]=



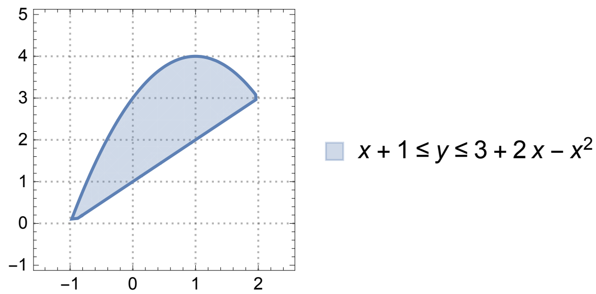
Professor: "(a integral dupla) pode ser usada para calcular área: $\int\int 1\, dx\, dy$..."

$$\int\int dx\, dy = \int x\, dy = x\, y.$$

"A região de integração fica..." Ficaria $\int\int_R dx\, dy$, em que $R = x + y < y < 3 + 2x - x^2$.

In[ ]:=
```
RegionPlot[x + 1 ≤ y ≤ 3 + 2 x - x^2, {x, -1.5, 2.5},
 {y, -1, 5}, ImageSize → 150, PlotTheme → "Detailed"]
```

Out[ ]=



Eu passei os pontos de intersecção na região acima, mas sem passar a região é exatamente a mesma, pois é “a única” área entre as duas funções. Se a região tivesse mais áreas entre as funções, eu estaria limitando artificialmente, portanto deveria considerar em toda sua extensão... ou a equalização das funções já expressa *todos* os pontos de intersecção, e por isso há confiança que são apenas estes.

Convertendo esta região em integrais iteradas...

$$\int_{x+1}^{3+2x-x^2}\int_{-1}^{2} dx\, dy =$$

$$\int_{x+1}^{3+2x-x^2} 3\, dy =$$

$$3\int_{x+1}^{3+2x-x^2} dy =$$

$$3\cdot y\Big|_{x+1}^{3+2x-x^2} =$$

$$3\cdot[3+2x-x^2-(x+1)] =$$

$$3\cdot(2+x-x^2) = 6+3x-3x^2.$$ Não.

Eu acho que é o contrário.

$$\int_{-1}^{2}\int_{x+1}^{3+2x-x^2} dx\, dy =$$

$$\int_{-1}^{2} x \Big|_{x+1}^{3+2x-x^2} dy =$$

$$\int_{-1}^{2} 3 + 2x - x^2 - (x+1)\, dy =$$

$$\int_{-1}^{2} 2 + x - x^2\, dy =$$

$$2xy + \frac{x^2}{2} y - \frac{x^3}{3} y \Big|_{y=-1}^{y=2} =$$

$$4x + x^2 - \frac{2}{3} x^3 - \left(-2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) =$$

$$4x + x^2 - \frac{2}{3} x^3 + 2x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{3} =$$

$$6x + \frac{4}{3} x^2 - x^3$$. Não.

ou

$$\int_{-1}^{2}\int_{x+1}^{3+2x-x^2} dy\, dx =$$

$$\int_{-1}^{2} y \Big|_{x+1}^{3+2x-x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^{2} y(3+2x-x^2) - y(x+1)\, dx =$$

$$\int_{-1}^{2} 3y + 2yx - yx^2 - yx - y\, dx =$$

$$\int_{-1}^{2} 2y + yx - yx^2\, dx =$$

$$2yx + y\frac{x^2}{2} - y\frac{x^3}{3} \Big|_{x=-1}^{x=2} =$$

$$4y + 2y - \frac{8}{3}y - \left(-2y + \frac{y}{2} + \frac{y}{3}\right) =$$

$$\frac{10}{3}y + \frac{7}{6}y = \frac{27}{6}y.$$

In[ ]:=
```
{Integrate[1, {y, x + 1, 3 + 2 x - x^2}],
 Integrate[1, {y, x, 2 x}], Expand@Integrate[1, {y, x + 1, 3 + 2 x - x^2}, {x, -1, 2}],
 Expand@Integrate[1, {x, x + 1, 3 + 2 x - x^2}, {y, -1, 2}],
 Expand@Integrate[1, {x, -1, 2}, {y, x + 1, 3 + 2 x - x^2}](*esse*),
 Expand@Integrate[1, {y, -1, 2}, {x, x + 1, 3 + 2 x - x^2}]}
```

Out[ ]= $\left\{2 + x - x^2,\ x,\ 6 + 3x - 3x^2,\ 6 + 3x - 3x^2,\ \frac{9}{2},\ 6 + 3x - 3x^2\right\}$

Por algum motivo, $y \Big|_{x}^{2x} = 2x - x = x$, e não $y(2x - x) = yx$.

Compreender este operador melhor, ele é uma espécie de aplicação e não substituição.

$$\int_{-1}^{2}\int_{x+1}^{3+2x-x^2} dy\, dx =$$

$$\int_{-1}^{2} y \Big|_{x+1}^{3+2x-x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^{2} 3+2x-x^2-(x+1)\, dx =$$

$$\int_{-1}^{2} 2+\ x-\ x^2\, dx =$$

$$2x+\ \frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} =$$

$$4+2-\frac{8}{3}-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=$$

$$\frac{10}{3}+\frac{7}{6}=\frac{27}{6}.$$

4. Determine o volume do prisma cuja base é o triângulo no plano $x\ y$ limitado pelo eixo x e pelas retas $y = x$ e $x = 2$ e cujo topo está no plano $z = f(x,\ y) = 4 - x - y$.

$$\iint_R 4-x-y\, dV, R=\begin{cases} y=x \\ x=2 \end{cases}.$$

A primeira integral $\int 4-x-y\, dx$. Em respeito a x... é preciso encontrar as intersecções. No caso, no eixo x com o eixo y e o eixo z. y e x se encontram em $(2,\ 2)$. Neste ponto, $z = 0$. O outro limite de x está no enunciado, em $x = 0$. Então $\int_0^2 4-x-y\, dx$.

A segunda integral $\int 4-x-y\, dy$. Em respeito a y, em $x = 0$, $y = 0$, e em $x = 2$, $y = 2$. Então $\int_0^2 4-x-y\, dy$.

(Obviamente, z **já é** o limite em função de x e y.)

Em $x = 0$, $y = 0$ e em $x = 2$, $y = 2$.

$$\int_0^2 \int_0^2 4 - x - y \, dx \, dy =$$

$$\int_0^2 4x - \frac{x^2}{2} - y\,x \Big|_{x=0}^{x=2} dy =$$

$$\int_0^2 8 - 2 - 2\,y \, dy =$$

$$6\,y - y^2 \Big|_0^2 = 8.$$

$$\int_0^x \int_0^2 4 - x - y \, dx \, dy =$$

$$\int_0^x 4x - \frac{x^2}{2} - y\,x \Big|_{x=0}^{x=2} dy =$$

$$\int_0^x 8 - 2 - 2\,y \, dy =$$

$$6\,y - y^2 \Big|_{y=0}^{y=x} =$$

$$3\,x^2 - \frac{x^3}{3}.$$

Na outra ordem de integração.

$$\int_0^2\int_0^x 4-x-y\,dy\,dx=$$

$$\int_0^2 4y-xy-\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=x}dx=$$

$$\int_0^2 4x-x^2-\frac{x^2}{2}\,dx=$$

$$2x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=$$

$$8-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=4.$$

```
In[]:= {Integrate[y, x], Integrate[4 - x - y, {x, 0, 2}, {y, 0, 2}],
  Integrate[6 y - y^2, {y, 0, x}], Integrate[4 - x - y, {y, 0, x}],
  Integrate[4 - x - y, y], Integrate[4 - x - y, {y, 0, x}, {x, 0, 2}],
  Integrate[4 x - x^2 - x^2/2, x], Integrate[4 x - x^2 - x^2/2, {x, 0, 2}], Integrate[x^2/2, x]}

Out[]= {x y, 8, 3 x^2 - x^3/3, (4 - x) x - x^2/2, 4 y - x y - y^2/2, 6 x - x^2, 2 x^2 - x^3/2, 4, x^3/6}
```

5. Calcule a integral $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$, onde R é a região semicircular limitada pelo eixo X e pela curva $y=\sqrt{1-x^2}$.

Em $x=0$, $y=1$.

$$\sqrt{1-x^2}=x\Rightarrow 1-x^2=x^2\Rightarrow 2x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Em $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx =$$

In[ ]:= $\left\{\sqrt{\frac{1}{2}},\ \text{N@}\frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{Integrate}[e^{x}, x],\ \text{Integrate}[e^{a\,x}, x],\right.$
$\text{Integrate}[e^{x^2}, x],\ \text{Integrate}[e^{x^2+y^2}, y],\ \text{Integrate}[e^{x}, x],\ \text{Integrate}[e^{x^2}, x],$
$\text{Red@Integrate}\left[e^{x^2+y^2}, \left\{y, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{x, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right],\ \text{Blue@}\frac{1}{a^{-(x+y)}},\ \text{Integrate}[e^{-(x^2+y^2)}, x],$
$\text{Integrate}[e^{-x^2}, x],\ \text{Integrate}[e^{-(x^2+y^2)}, \{x, -\infty, \infty\}, \{y, -\infty, \infty\}],$
$\left.\text{Integrate}[e^{-x^2}, \{x, -\infty, \infty\}],\ \text{Integrate}\left[e^{-x^2}, \left\{x, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right]\right\}$

Out[ ]= $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0.707107,\ e^{x},\ \frac{e^{a\,x}}{a},\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\text{Erfi}[x],\ \frac{1}{2}e^{x^2}\sqrt{\pi}\,\text{Erfi}[y],\right.$
$e^{x},\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\text{Erfi}[x],\ (\blacksquare)\left[\frac{1}{4}\pi\,\text{Erfi}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\left(-\text{Erfi}[1]+\text{Erfi}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right)\right],$
$\left.(\blacksquare)\left[a^{x+y}\right],\ \frac{1}{2}e^{-y^2}\sqrt{\pi}\,\text{Erf}[x],\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\text{Erf}[x],\ \pi,\ \sqrt{\pi},\ \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\text{Erf}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\right\}$

Wolfram[1]: The error function **Erf[z]** is the integral of the Gaussian distribution, given by $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\, dt$. The imaginary error function **Erfi[z]** is given by $\operatorname{erfi}(z) = \frac{\operatorname{erf}(i\,z)}{i}$. The generalized error function **Erf[z0,z1]** is defined by the integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z_0}^{z_1} e^{-t^2}\, dt$. The error function is central to many calculations in statistics.

Wikipedia[2]:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, e^{-y^2}\, dx\, dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy.$$

(Porquê $dx\, dy$ e não $dy\, dx$?)

Caminho reverso:

$$\int\int e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dx\, dy =$$

$$\int\int e^{-x^2}\, e^{-y^2}\, dx\, dy =$$

$$\int e^{-x^2}\, dx \int e^{-y^2}\, dy =$$

$$\left(\int e^{-x^2}\, dx\right)^2.$$

No caso do exercício,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{x^2+y^2}\,dy\,dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{e^{-(x^2+y^2)}}\,dy\,dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{x^2}\,e^{y^2}\,dy\,dx =$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{e^{-x^2}}\,\frac{1}{e^{-y^2}}\,dy\,dx = \text{nada.}$$

Só que

$$\int e^x\,dx = e^x + C \Rightarrow$$

$$\left(\int e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(e^{-x^2}\right)^2 + C = e^{-x^4} + C? \text{ Não.}$$

E por isso é necessária a integração polar.

O eixo x significa $\theta = 0$.

A curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ significa...

$$\sqrt{1 - x^2} =$$

$$\sqrt{1 - (r\cos\theta)^2} =$$

$$\sqrt{1 - r^2\cos^2\theta} =$$

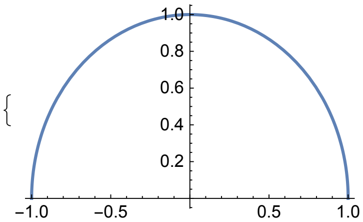
$$\sqrt{1 -}$$

“Esta questão deve ser resolvida por coordenadas polares: $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq r \leq 1$ e

$\int\int r\, e\, r^2\,dr\,d\theta$. A representação gráfica (software) fica $y = \sqrt{1 - x^2}$ que dá um semi circulo na parte positiva. Vai fechar o resultado."

In[49]:= $\{\text{Plot}[\sqrt{1-x^2}, \{x, -1, 1\}]\}$

Out[49]= {



}

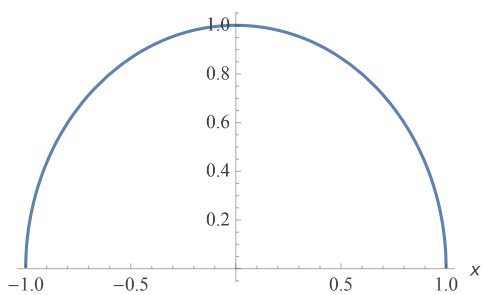
In[48]:= Sqrt[1-x^2]

Input:

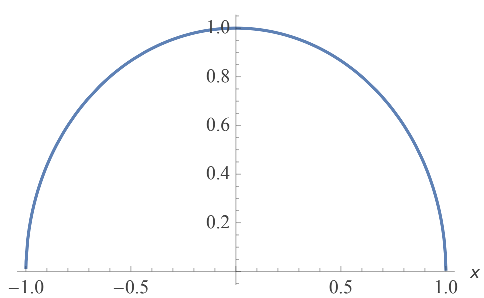
$$\sqrt{1-x^2}$$

Plots:

Real–valued plots



min max



min max

Alternate form:

$$\sqrt{1-x}\ \sqrt{x+1}$$

Roots:

Step–by–step solution

$x = -1$

$x = 1$

Properties as a real function:

Domain:

$\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$

Range:

$\{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$

Parity:

even

$\mathbb{R}$ is the set of real numbers »

Series expansion at x = −1:

$$\sqrt{2}\,\sqrt{x+1} - \frac{(x+1)^{3/2}}{2\sqrt{2}} - \frac{(x+1)^{5/2}}{16\sqrt{2}} + O\left((x+1)^{7/2}\right)$$

(Puiseux series)

Big-O notation »

Series expansion at x = 0:

$$1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O\left(x^5\right)$$

(Taylor series)

Big-O notation »

Series expansion at x = 1:

$$\sqrt{2-2x} + \frac{\sqrt{1-x}\,(x-1)}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1-x}\,(x-1)^2}{16\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1-x}\,(x-1)^3}{64\sqrt{2}} - \frac{5\sqrt{1-x}\,(x-1)^4}{1024\sqrt{2}} + O\left((x-1)^5\right)$$

(generalized Puiseux series)

Big-O notation »

Series expansion at x = ∞:

$$\sqrt{-x^2} - \frac{\sqrt{-x^2}}{2x^2} + O\left(\left(\frac{1}{x}\right)^4\right)$$

(Puiseux series)

Big-O notation »

Derivative:

Step–by–step solution

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Indefinite integral:

Step–by–step solution

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\,x + \sin^{-1}(x)\right) + \text{constant}$$

$\sin^{-1}(x)$ is the inverse sine function »

Global maximum:

Step-by-step solution

$$\max\left\{\sqrt{1-x^2}\right\} = 1 \text{ at } x = 0$$

Global minima:

Step-by-step solution

$$\min\left\{\sqrt{1-x^2}\right\} = 0 \text{ at } x = -1$$

$$\min\left\{\sqrt{1-x^2}\right\} = 0 \text{ at } x = 1$$

Series representations:

More

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^{-k} \binom{\frac{1}{2}}{k} \quad \text{for } |x|^2 > 1$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-x^2)^k \left(-\frac{1}{2}\right)_k}{k!} \quad \text{for } |x|^2 < 1$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-x^2)^{-k} \left(-\frac{1}{2}\right)_k}{k!} \quad \text{for } |x|^2 > 1$$

$\binom{n}{m}$ is the binomial coefficient »

$|z|$ is the absolute value of z »

$n!$ is the factorial function »

$(a)_n$ is the Pochhammer symbol (rising factorial) »

More information »

WolframAlpha

---

6. Calcule o comprimento da cardioide $r = 3 + 3\cos\theta$.

$\theta_0 = 0, \theta_1 = \pi$.

$f'(\theta) = \frac{d3+3\cos\theta}{d\theta} = -3\,\text{sen}\theta$.

$$s = 2\int_0^\pi \sqrt{(-3\,\text{sen}\theta)^2 + (3 + 3\cos\theta)^2}\, d\theta =$$

$$2\int_0^\pi \sqrt{9\,\text{sen}^2\,\theta + 9 + 18\cos\theta + 9\cos^2\,\theta}\, d\theta =$$

$$2\int_0^\pi \sqrt{9\left(\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta\right) + 9 + 18\cos\theta}\, d\theta =$$

$$2\int_0^\pi \sqrt{18 + 18\cos\theta}\, d\theta =$$

$$2\int_0^\pi \sqrt{18\,(1 + \cos\theta)}\, d\theta =$$

$$2\int_0^\pi \sqrt{18}\, \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta =$$

$$\sqrt{36}\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta =$$

$$\sqrt{36}\int_0^\pi \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta =$$

$$2\sqrt{36}\int_0^\pi \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta =$$

$$2\sqrt{36}\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

$$u = \frac{\theta}{2}, du = \frac{1}{2}\, dx.$$

$$\int \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = \int \cos(u)\cdot 2\, du = 2\int \cos u\, du = 2\,\text{sen}\,u = 2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}.$$

$$2\sqrt{36}\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$2\sqrt{36}\left(2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^\pi = 24.$$

No livro (p. 145):

$$\text{sen}^2\,\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\,\theta =$$

$$1 + 1 + 2\cos\theta.$$

A regra é a "identidade Pitagoreana" de que $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$.

E:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\; d\theta =$$

$$\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\; d\theta.$$

É porque

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\; d\theta =$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2\,(1 + \cos\theta)}\; d\theta =$$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2}\,\sqrt{1 + \cos\theta}\; d\theta =$$

$$\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\; d\theta.$$

$\sqrt{a\,b} = (a\,b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$. Está no Algebra.

Finalmente, a relação $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$?

Dá para fatorar a relação.

$$\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = \left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} \Rightarrow$$

$$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta.$$

Que é a relação aludida (novamente sem qualquer comentário) na p. 145.
É uma "half-angle formula".

Final... $2 \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 4$. É porque $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$.

Mas antes,

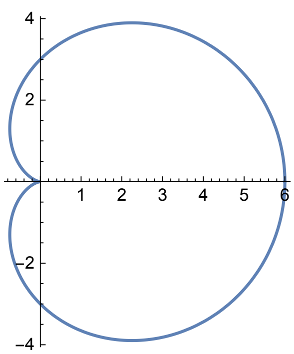
$\int \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta \neq \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$;

$\int \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$. Porque?

Porque é uma substituição. Como na AD1, em $\operatorname{sen} \frac{x}{3}$, procurar uma função que multiplique sua derivada. Resolvido na questão.

In[∘]:=
```
PolarPlot[3 + 3 Cos[θ], {θ, 0, 2 π}, ImageSize → 150]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
{D[Cos[θ], θ], D[3 Cos[θ], θ], D[3 + 3 Cos[θ], θ], (-√a)^2, Sin[0],
 Sin[π], Sin[π/2], Integrate[√((-3 Sin[θ])^2 + (3 + 3 Cos[θ])^2), {θ, 0, π}],
 Expand[(-3 Sen[θ])^2 + (3 + 3 Cos[θ])^2],
 Integrate[√(18 (1 + Cos[θ])), {θ, 0, π}], Integrate[Cos[θ/2], θ]}
```

Out[∘]=
```
{-Sin[θ], -3 Sin[θ], -3 Sin[θ], a, 0, 0,
 1, 12, 9 + 18 Cos[θ] + 9 Cos[θ]^2 + 9 Sen[θ]^2, 12, 2 Sin[θ/2]}
```

7. Determine o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo X da região limitada por $y = x^2 + 1$ e a reta $y = x + 3$.

$x^2 + 1 = x + 3 \Rightarrow$

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$.

$$V=\int_{-1}^{2}\pi(x+3)^2-\pi(x^2+1)^2\,dx=$$

$$\int_{-1}^{2}\pi(x^2+6x+9)-\pi(x^4+2x^2+1)\,dx=$$

$$\int_{-1}^{2}\pi(x^2+6x+9-x^4-2x^2-1)\,dx=$$

$$\pi\int_{-1}^{2}-x^4-x^2+6x+8\,dx=$$

$$\pi\left(-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right)\Big|_{-1}^{2}=$$

$$\pi\left(-\frac{32}{5}-\frac{8}{3}+12+16\right)-\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+3-8\right)=$$

$$\pi\left(\frac{-96-40+180+240}{15}\right)-\pi\left(\frac{3+5+45-120}{15}\right)=$$

$$\pi\left(\frac{284}{15}\right)-\pi\left(\frac{-67}{15}\right)=\frac{351\pi}{15}.$$

In[39]:=
```
{Expand[π (x + 3)^2 - π (x^2 + 1)^2], -96 - 40 + 180 + 240,
 Integrate[π (x + 3)^2 - π (x^2 + 1)^2, {x, -1, 2}], 351 / 3}
```

Out[39]= $\left\{8\pi+6\pi x-\pi x^2-\pi x^4,\ 284,\ \frac{117\pi}{5},\ 117\right\}$

8. Fórum 2. Pesquisar e apresentar situação problema com a resolução usando software matemático. Escreva um comentário de ao menos 8 linhas sobre a importância da utilização desse software nesta solução.

Diva: “a tecnologia, quando bem aplicada, nos ajuda nos momentos consideradas “braçais”, ou seja, nos momentos em que as técnicas e os longos algebrismos nos levam à uma rotina em que os métodos se sobrepõem ao raciocínio e a lógica.”

Out[ ]= NotebookObject[Untitled-6]

Uma torta de maçã precisa de 1 kg de maçãs para ser confeccionada. Quantas maçãs são necessárias adquirir, sendo que:

- A maçã é um sólido de revolução de uma curva cardióide descrita por $r=1-\operatorname{sen}\theta$;

- O centro da maçã deve ser desprezado e é descrito por um cilindro de largura 1.2.
- A densidade da maçã é de $n\,g/\text{cm}^3$.

Converteremos a cardióide de coordenadas polares para retangulares:

$$r = 1 - \text{sen}\theta \Rightarrow$$
$$r^2 = r - r\,\text{sen}\theta \Rightarrow$$
$$r^2 = r - y \Rightarrow$$
$$y = -r^2 - r \Rightarrow$$
$$y = -\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$y = -(x^2 + y^2) - \sqrt{x^2 + y^2}$$. Não.

$$r = 1 - \text{sen}\theta \Rightarrow$$
$$r^2 = r - r\,\text{sen}\theta \Rightarrow$$
$$r^2 = r - y \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = r - y \Rightarrow$$
$$r = x^2 + y^2 + y \Rightarrow$$
$$r^2 = (x^2 + y^2 + y)^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 + y)^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = x^4 + 2\,x^2\,y + y^2 + 2\,x^2\,y^2 + 2\,y^3 + y^4 \Rightarrow$$
$$y^2 = x^4 + 2\,x^2\,y + y^2 + 2\,x^2\,y^2 + 2\,y^3 + y^4 - x^2$$ ... Não.

```
In[ ]:= {Expand@(x^2 + y^2)^2, Expand@(x^2 + y^2 + y)^2, FullSimplify@x^4 + 2 x^2 y + y^2 + 2 x^2 y^2 + 2 y^3 + y^4 - x^2}
Out[ ]= {x^4 + 2 x^2 y^2 + y^4, x^4 + 2 x^2 y + y^2 + 2 x^2 y^2 + 2 y^3 + y^4, -x^2 + x^4 + 2 x^2 y + y^2 + 2 x^2 y^2 + 2 y^3 + y^4}
```

$$y = -a - \sqrt{a} \Rightarrow$$

$$y = -\left(a + \sqrt{a}\right) \Rightarrow$$

$$y = -\left(a^1 + a^{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$y^2 = -\left(a^1 + a^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = -\left(a^2 + 2\,a\,a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}\,2}\right) \Rightarrow$$

$$y^2 = -\left(a^2 + 2\,a^{\frac{3}{2}} + a\right) \Rightarrow$$

$$y^2 = -a\left(a + 2\,a^{\frac{1}{2}} + 1\right).$$ Não.

$$r = 1 - \operatorname{sen}\theta \Rightarrow$$

$$r = 1 - \frac{y}{r} \Rightarrow$$

$$r^2 = r - y \Rightarrow$$

$$y = -r^2 + r \Rightarrow$$

$$y = -\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$y = -(x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Está correta. Curva implícita.

Ou com tamanho dobrado...

$$r = 2 - 2\,\text{sen}\theta \Rightarrow$$

$$r = 2 - 2\,\frac{y}{r} \Rightarrow$$

$$r = \frac{2\,r - 2\,y}{r} \Rightarrow$$

$$r^2 = 2\,r - 2\,y \Rightarrow$$

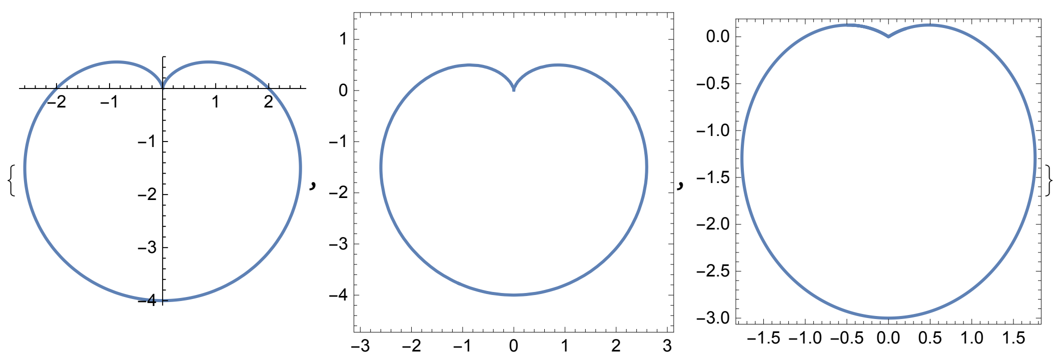
$$y = \frac{-r^2 + 2\,r}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + 2\,\sqrt{x^2+y^2}}{2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{-(x^2+y^2) + 2\,\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

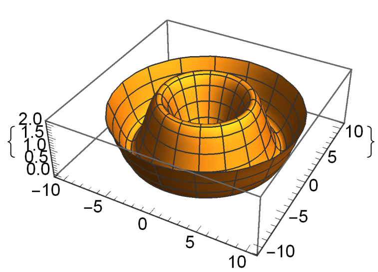
In[25]:=
```
{PolarPlot[2 - 2 Sin[θ], {θ, 0, 2 π}, ImageSize → 150],
 ContourPlot[(-(x^2 + y^2) + 2 Sqrt[x^2 + y^2])/2 == y, {x, -3, 3}, {y, -4.6, 1.4}],
 RegionPlot[ImplicitRegion[(-(x^2 + y^2) + Sqrt[x^2 + y^2])/2 == y, {x, y}]]}
```

Out[25]=



In[29]:=
```
{RevolutionPlot3D[1 - Sin[t], {t, 1, 10}]}
```

Out[29]=



1 tutorial/SpecialFunctions

2 https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_integral