1.

- Em uma cidade há 250 indústrias. Qual o tamanho mínimo da amostra (amostragem aleatória simples) para erro amostral de até 4%?

$$n_0 = \frac{1}{0.04^2} = \frac{1}{0.0016} = 625.$$

$$n = \frac{250 \cdot 625}{250+625} = \frac{156\,250}{875} = 150.$$

In[∘]:= {0.04², 1 / 0.0016, 250 * 625, 250 * 525 / 875}

Out[∘]= {0.0016, 625., 156 250, 150}

- No estado de Santa Catarina existem 24.500 indústrias, qual o tamanho da amostra necessário para o mesmo erro (4%)?

$$n = \frac{24\,500 \cdot 625}{24\,500+625} = \frac{15\,312\,500}{25\,125} = 609.453.$$

In[∘]:= {24 500 * 625, 24 500 + 625, N@24 500 * 625 / (24 500 + 625)}

Out[∘]= {15 312 500, 25 125, 609.453}

- Na região Sul há 91.230 indústrias. Qual o tamanho da amostra para o mesmo erro (4%)?

$$n = \frac{91\,230 \cdot 625}{91\,230+625} = 620.747.$$

In[∘]:= {91 230 * 625, 91 230 + 625, N@91 230 * 625 / (91 230 + 625)}

Out[∘]= {57 018 750, 91 855, 620.747}

- Se no estado do Rio Grande do Sul se acumulam 35% das indústrias, “qual a solução mais adequada para realizar a amostragem” (considerando todos os dados)? Indique os valores a serem amostrados em cada estado para a solução indicada.

$$\frac{35 \cdot 91\,230}{100} = 28\,281.$$

To do.

In[∘]:= {N@ (31 * 91 230) / 100}

Out[∘]= {28 281.3}

---

2. 50 amostras de água foi medida a quantidade de fluoreto, em mg/L, e obtida a distribuição:

Fluoreto	Frequência
[1.3; 1.4)	3
[1.4; 1.5)	9
[1.5; 1.6)	15
[1.6; 1.7)	10
[1.7; 1.8)	8
[1.8; 1.9]	5

$[a;\ b)$ significa a pertence, b não pertence.

- Determinar média e desvio-padrão.

$$\overline{x} = \frac{1.35 \cdot 3+1.45 \cdot 9+1.55 \cdot 15+1.65 \cdot 10+1.75 \cdot 8+1.85 \cdot 5}{3+9+15+10+8+5} = 1.602.$$

$$\sigma^2 = [(1.35 - 1.602)^2 \cdot 3 + (1.45 - 1.602)^2 \cdot 9 + (1.55 - 1.602)^2 \cdot 15 + (1.65 - 1.602)^2 \cdot 10 + (1.75 - 1.602)^2 \cdot 8 + (1.85 - 1.602)^2 \cdot 5] / 50 = 0.18896.$$

$$s = \sqrt{0.18896} = 0.137463.$$

In[ ]:=
```
{3 + 9 + 15 + 10 + 8 + 5, (1.35 * 3 + 1.45 * 9 + 1.55 * 15 + 1.65 * 10 + 1.75 * 8 + 1.85 * 5) / 50,
 ((1.35 - 1.602)^2 * 3 + (1.45 - 1.602)^2 * 9 + (1.55 - 1.602)^2 * 15 +
   (1.65 - 1.602)^2 * 10 + (1.75 - 1.602)^2 * 8 + (1.85 - 1.602)^2 * 5) / 50, √0.018896}
```

Out[ ]=
```
{50, 1.602, 0.018896, 0.137463}
```

- Definir um intervalo de 95% de confiança para a média populacional e expressar em palavras o significado deste intervalo.

$$(a, b) = \overline{x} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \begin{cases} 1.60 + 1.96 \cdot \frac{0.137463}{50} = 1.60539 \\ 1.60 - 1.96 \cdot \frac{0.137463}{50} = 1.5835 \end{cases}.$$

In[ ]:=
```
{1.6 + 6 * 0.137463/50, 1.6 - 6 * 0.137463/50}
```

Out[ ]=
```
{1.6165, 1.5835}
```

$$(a, b) = \overline{x} \pm t_{\alpha,n-1} \cdot \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \begin{cases} 1.602 + \frac{1.676 \cdot 0.137463}{\sqrt{50}} = 1.63458 \\ 1.602 - \frac{1.676 \cdot 0.137463}{\sqrt{50}} = 1.56942 \end{cases}.$$

O intervalo expressa que há 95% de confiança que o valor da média populacional se situa entre 1.56942 e 1.63458.

In[ ]:=
```
{1.602 + 1.676 * 0.137463/√50, 1.602 - 1.676 * 0.137463/√50}
```

Out[ ]=
```
{1.63458, 1.56942}
```

- Definir um intervalo de confiança de 95% para a proporção populacional de valores $< 1.5\ \mathrm{mg}/L$ (observe que o fato descrito é monocaudal).

$$n = 3 + 9 + 15 + 10 + 8 + 5 = 50.$$

$$\hat{p} = \frac{3+9}{n} = 0.24.$$

$$(a, b) = \hat{p} \pm Z_\alpha \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \begin{cases} 0.24 + 3.92 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{50}} = 0.476763 \\ 0.24 - 3.92 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{50}} = 0.00323719 \end{cases}.$$

In[ ]:=
```
{N@(3 + 9) / (3 + 9 + 15 + 10 + 8 + 5), N@4 / 20, 3 + 9 + 15 + 10 + 8 + 5,
 N@12 / 50, N@0.24 + 3.92 * √(0.24 * 0.76/50), N@0.24 - 3.92 * √(0.24 * 0.76/50)}
```

Out[ ]=
```
{0.24, 0.2, 50, 0.24, 0.476763, 0.00323719}
```

3. Pesados sete pacotes: 25.4, 25.2, 25.6, 25.3, 25.0, 25.4, 25.5 g. O desvio padrão inputado pela balança utilizada é de 0.3 g.

- Determine os intervalos de confiança (para média) para probabilidades de 90% e 95%, expressando em palavras os seus significados.

$$\overline{x} = \frac{25.4+25.2+25.6+25.3+25.0+25.4+25.5}{7} = 25.3429.$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\left((25.4-25.3429)^2 + (25.2-25.3429)^2 + (25.6-25.3429)^2 + (25.3-25.3429)^2 + (25.0-25.3429)^2 + (25.4-25.3429)^2 + (25.5-25.3429)^2\right) = 0.0395238.$$

$$s = \sqrt{0.0395238} = 0.198806.$$

$$s = 0.3 + \sqrt{0.0395238} = 0.498806.$$

Para 90%:

$$(a, b) = 25.3429 \pm 1.65 \cdot \frac{0.198806}{\sqrt{7}} = (25.4669, 25.2189).$$

$$(a, b) = 25.3429 \pm 1.65 \cdot \frac{0.498806}{\sqrt{7}} = (25.654, 25.0318).$$

$$(a, b) = \overline{x} \pm t_{\alpha,n-1} \cdot \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \begin{cases} 25.3429 + 1.440 \cdot \frac{0.498806}{\sqrt{7}} = 25.6144 \\ 25.3429 - 1.440 \cdot \frac{0.498806}{\sqrt{7}} = 25.0714 \end{cases}.$$

O intervalo significa que há 90% de confiança que o valor da média populacional se situe entre 25.0714 e 25.6144.

Para 95%:

$$(a, b) = 25.3429 \pm 1.96 \cdot \frac{0.198806}{\sqrt{7}} = (25.4902, 25.1956).$$

$$(a, b) = 25.3429 \pm 1.96 \cdot \frac{0.498806}{\sqrt{7}} = (25.7124, 24.9734).$$

$$(a, b) = \overline{x} \pm t_{\alpha,n-1} \cdot \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \begin{cases} 25.3429 + 1.943 \cdot \frac{0.498806}{\sqrt{7}} = 25.7092 \\ 25.3429 - 1.943 \cdot \frac{0.498806}{\sqrt{7}} = 24.9766 \end{cases}.$$

O intervalo significa que há 95% de confiança que o valor da média populacional se situe entre 24.9766 e 25.7092.

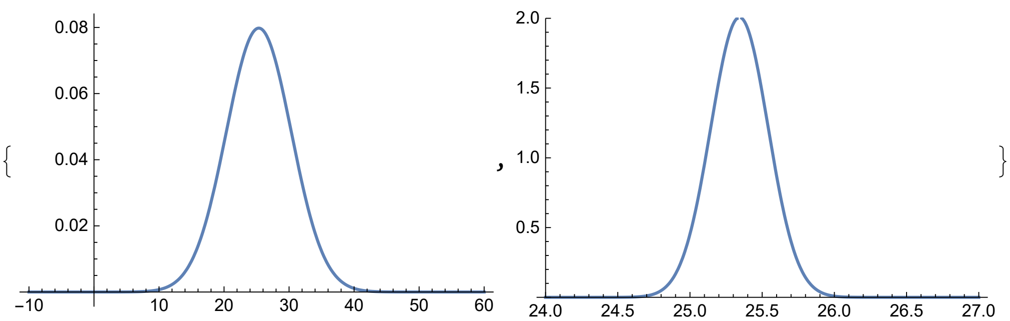
In[•]:=
```
{(25.4 + 25.2 + 25.6 + 25.3 + 25.0 + 25.4 + 25.5) / 7,
 "μ" → Mean@{25.4, 25.2, 25.6, 25.3, 25.0, 25.4, 25.5}, 1/6 ((25.4 - 25.3429)^2 + (25.2 - 25.3429)^2 +
    (25.6 - 25.3429)^2 + (25.3 - 25.3429)^2 + (25.0 - 25.3429)^2 + (25.4 - 25.3429)^2 + (25.5 - 25.3429)^2),
 "σ²" → Variance@{25.4, 25.2, 25.6, 25.3, 25.0, 25.4, 25.5}, "σ" → 0.3 + √0.039523809523809614,
 "σ" → StandardDeviation@{25.4, 25.2, 25.6, 25.3, 25.0, 25.4, 25.5},
 25.3429 + 1.65 * 0.198806/√7, 25.3429 - 1.65 * 0.198806/√7, 25.3429 + 1.96 * 0.198806/√7,
 25.3429 - 1.96 * 0.198806/√7, 0.198806 + 0.3, 25.3429 + 1.65 * 0.498806/√7, 25.3429 - 1.65 * 0.498806/√7,
 25.3429 + 1.96 * 0.498806/√7, 25.3429 - 1.96 * 0.498806/√7, 25.3429 + 1.440 * 0.498806/√7,
 25.3429 - 1.440 * 0.498806/√7, 25.3429 + 1.943 * 0.498806/√7, 25.3429 - 1.943 * 0.498806/√7}
```

Out[•]=
```
{25.3429, μ → 25.3429, 0.0395238, σ² → 0.0395238, σ → 0.498806, σ → 0.198806, 25.4669, 25.2189, 25.4902,
 25.1956, 0.498806, 25.654, 25.0318, 25.7124, 24.9734, 25.6144, 25.0714, 25.7092, 24.9766}
```

- Desenhe os valores padronizados obtidos, pintando as áreas das probabilidades calculadas, em dois gráficos diferentes da distribuição normal, no GeoGebra em anexo.

In[•]:=
```
{Plot[PDF[NormalDistribution[25.3429, 5], x], {x, -10, 60}, ImageSize → 250],
 Plot[PDF[NormalDistribution[25.3429, 0.198806], x], {x, 24, 27}, ImageSize → 250, PlotRange → {0, 2}]}
```

Out[•]=



- Determine e explique qual dos intervalos é mais rigoroso.

O intervalo com 90% de confiança é mais rigoroso, pois é mais preciso (com menor amplitude) que o intervalo com 95% de confiança:

$$25.6144 - 25.0714 = 0.543 < 25.7092 - 24.9766 = 0.7326.$$

In[•]:=
```
{25.4902 - 25.1956, 25.4669 - 25.2189, 25.654 - 25.0318,
 25.7124 - 24.9734, 25.6144 - 25.0714, 25.7092 - 24.9766}
```

Out[•]=
```
{0.2946, 0.248, 0.6222, 0.739, 0.543, 0.7326}
```

---

4. Medidas 12 peças: 194, 196, 193, 193, 195, 195, 197, 194, 195, 194, 196, 194 mm. Supondo distribuição normal:

- Determinar os intervalos de confiança da média para 95%, expressando descritivamente os seus significados.

$$\overline{X} = \frac{194+196+193+193+195+195+197+194+195+194+196+194}{12} = 194.667.$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{11}\big((194 - 194.667)^2 + (196 - 194.667)^2 + (193 - 194.667)^2 + (193 - 194.667)^2 + (195 - 194.667)^2 + (195 - 194.667)^2 + (197 - 194.667)^2 + (194 - 194.667)^2 + (195 - 194.667)^2 + (194 - 194.667)^2 + (196 - 194.667)^2 + (194 - 194.667^2)\big) = 1.51515.$$

$$s = \sqrt{1.51515} = 1.23091.$$

$$(a, b) = \overline{x} \pm t_{\alpha,n-1} \cdot \frac{s(x)}{\sqrt{n}} = \begin{cases} 194.667 + 1.796 \cdot \frac{1.23091}{\sqrt{12}} = 195.305 \\ 19 \times 4. \times 6 \times 67 - 1. \times 7 \times 96 \cdot \frac{1.23091}{\sqrt{12}} = 194.029 \end{cases}.$$

O intervalo significa que há 95% de confiança que o valor da média populacional se situa entre 194.029 e 195.305.

In[ ]:=

$$\Big\{N@\frac{194+196+193+193+195+195+197+194+195+194+196+194}{12},$$
$$N@Mean@\{194, 196, 193, 193, 195, 195, 197, 194, 195, 194, 196, 194\},$$
$$\frac{1}{11}\big((194-194.667)^2+(196-194.667)^2+(193-194.667)^2+(193-194.667)^2+(195-194.667)^2+(195-194.667)^2+(197-194.667)^2+(194-194.667)^2+(195-194.667)^2+(194-194.667)^2+(196-194.667)^2+(194-194.667)^2\big),$$
$$N@Variance@\{194, 196, 193, 193, 195, 195, 197, 194, 195, 194, 196, 194\}, \sqrt{1.51515},$$
$$N@StandardDeviation@\{194, 196, 193, 193, 195, 195, 197, 194, 195, 194, 196, 194\},$$
$$194.667 + 1.96 * \frac{1.23091}{\sqrt{12}}, 194.667 - 1.96 * \frac{1.23091}{\sqrt{12}},$$
$$194.667 + 1.796 * \frac{1.23091}{\sqrt{12}}, 194.667 - 1.796 * \frac{1.23091}{\sqrt{12}}\Big\}$$

Out[ ]=

```
{194.667, 194.667, 1.51515, 1.51515, 1.23091, 1.23091, 195.363, 193.971, 195.305, 194.029}
```

- Desenhar em gráfico da distribuição normal todos os “valores padronizados” obtidos, pintando as áreas das probabilidades. (O que é “valor padronizado”?)
- Supondo um desvio padrão conhecido da média populacional de 0.7 mm, qual o intervalo de confiança de 95% da média populacional? Explique porquê a diferença para os intervalos calculados no primeiro item (sem desvio padrão conhecido) e qual o intervalo mais “apurado”.

$$(a, b) = \overline{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \begin{cases} 194.667 + 1.96 \cdot \frac{0.7}{\sqrt{12}} = 195.063 \\ 194.667 - 1.96 \cdot \frac{0.7}{\sqrt{12}} = 194.271 \end{cases}.$$

A diferença se dá porque a estatística da média possui incerteza maior em comparação ao parâmetro média, requerendo uma correção de probabilidade fornecida pela distribuição t-Student, com uma distribuição diferente de probabilidade para amostras pequenas.
O intervalo formado com o desvio padrão da população é mais preciso e tem menor amplitude pois este parâmetro proporciona mais confiabilidade ao cálculo.

In[ ]:= **1123 * 5**

Out[ ]= 5615

In[ ]:= $$\left\{194.667 + 1.96 * \frac{0.7}{\sqrt{12}},\ 194.667 - 1.96 * \frac{0.7}{\sqrt{12}}\right\}$$

Out[ ]= {195.063, 194.271}