Fonte: FLEMMING, Diva Marília; WAGNER, Christian. Conjuntos e Elementos da Análise Real. Palhoça: Unisul Virtual, 2015.

Capítulo 1

Seção 1

Exemplo. Demonstrar o princípio da boa-ordenação.

Exemplo. Usando indução, provar que a soma dos n primeiros números naturais é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exemplo. Qual a cardinalidade de $\{x \in \mathbb{R}$ tais que $|5x-3|=7\}$?

Exemplo. Estabelecer a cardinalidade do conjunto $A=\{x \in \mathbb{Z}$ tais que $2 \leqslant 2x+9 \leqslant 8\}$.

Exemplo. São conjuntos infinitos:

O conjunto dos números reais.

O conjunto das parábolas que passam pelo ponto $(0,0)$.

O conjunto dos números pares.

Exemplo. O conjunto I dos números inteiros positivos ímpares é enumerável.

Exemplo. Verificar se o conjunto dos números inteiros é enumerável.

Seção 2

Exemplo. $|12|=12$.

Exemplo. $|-12|=\max\{12,-12\}$.

Exemplo. $|12|=\sqrt{12^2}$.

Exemplo. Determinar os valores de x tais que $|x-a|<\varepsilon$.

Exemplo. Provar que $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

Exemplo. Provar que $|xy| \leqslant |x|\,|y|$.

Exemplo. Provar que $|x|-|y| \leqslant ||x|-|y|| \leqslant |x-y|$.

Exemplo. Resolver a inequação $2x+1<7$.

Exemplo. Determine se os conjuntos são limitados superiormente ou inferiormente, ou limitados, em $\mathbb{Q}$.

$\{1, 3, 5, 7\}$;

$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\{-3n, n \in \mathbb{N}\}$;

Um conjunto finito qualquer.

Exemplo. $\mathbb{R}$ é limitado?

Exemplo. O supremo de $A = \{2, 4, 6, 8\}$ é 8.

Exemplo. Dados $[2, 5]$; $(2, 5)$; e $[2, 5)$, $n = 5$ é cota superior e $n < 5$ não é cota superior de todos.

Exemplo. O ínfimo de $A = \{2, 4, 6, 8\}$ é 2.

Exemplo. Dados $[2, 5]$; $(2, 5)$; e $[2, 5)$, $n = 2$ é cota inferior e $n > 2$ não é cota inferior de todos.

Exemplo. Determine o supremo e ínfimo.

Corpo ordenado $\mathbb{Q}$;

$\{2, 5, 7, 9\}$;

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$;

$\left\{\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\left\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\{2, 4, 6, 8, ...\}$.

Seção 3

Exemplo. O corpo $\mathbb{Q}$ é ordenado e não completo.

Exemplo. O corpo $\mathbb{R}$ é completo.

Exemplo. Todo conjunto finito não é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo. O conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ não é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo. O conjunto complementar de $\mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Exemplo. Verifique o princípio dos intervalos encaixados para a família de intervalos $I_n = \left[\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

Capítulo 2

Seção 1

Exemplo. $(0, 1)$ é aberto.

Exemplo. (a, b), onde $a < b$, é aberto.

Exemplo. $(0, 1) \cup (3, 4)$ é aberta.

Exemplo. $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ são abertos.

Exemplo. $[0, 1]$ não é aberto.

Exemplo. $(-1, 1)$ é vizinhança de 0.

Exemplo. $[-1, 1]$ é vizinhança de 0, pois $0 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset [-1, 1]$.

Exemplo. $\operatorname{int}(0, 1) = (0, 1)$.

Exemplo. $\operatorname{int}[0, 2] = (0, 2)$.

Exemplo. $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \varnothing$.

Exemplo. $\operatorname{int}\{1, 2, 3, 4, ...\} = \varnothing$.

Exemplo. $A = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ é fechado.

Exemplo. $\mathbb{R}$ e $\varnothing$ são fechados.

Exemplo. $[a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é fechado.

Exemplo. $\{a\}$, com $a \in \mathbb{R}$, é fechado.

Exemplo. Determine se os conjuntos são abertos, fechados, abertos e fechados, ou nenhum dos dois.

$\mathbb{R}$;

$\varnothing$;

$[0, 1] \cup [4, 5]$;

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$;

$(0, \infty)$;

$[0, \infty)$;

$A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$.

Exemplo. Seja $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. A não é fechado pois seu complementar não é aberto (não é possível encontrar uma vizinhança de 0 contida em A^c). Porém, A é uma união infinita de conjuntos unitários: $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\frac{1}{n}\right\}$, com cada conjunto unitário $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ fechado.

Exemplo. Dado qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}$, todo ponto $a \in A$ é ponto de aderência de A, pois $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ onde $x_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo. Seja $A = (0,1]$. Então 0 é aderente a A, pois $0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} \in (0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo. Qual o fecho do intervalo semiaberto $A = (0,1]$?

Exemplo. São fechos:

De $[a,b)$, $[a,b]$;

De $(a,b]$, $[a,b]$;

De $(a,+\infty)$, $[a,+\infty)$;

De $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$;

De $[a,b]$, $[a,b]$;

De $[a,+\infty)$, $[a,+\infty)$;

De $(-\infty,b]$, $(-\infty,b]$.

Exemplo. Qual o fecho de $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$? Este conjunto é fechado?

Exemplo. O fecho de qualquer conjunto unitário é ele próprio. Por exemplo, $X = \{2\} \Rightarrow \bar{X} = \{2\}$.

Seção 2

Exemplo. $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$. Então, $A' = \{0\}$.

Exemplo. Se A é um conjunto finito, então $A' = \varnothing$.

Exemplo. $\mathbb{Z}' = \varnothing$.

Exemplo. Determine os pontos de acumulação e aderência dos conjuntos (se houverem).

$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\mathbb{Q}$;

(a,b).

Exemplo. Determine se todos os pontos dos conjuntos são isolados.

$\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;

$\mathbb{N}$;

$(0, 1)$.

Seção 3

Exemplo. Sejam:

$X = [0, 1]$;

$C_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

$C_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$; e

$C_3 = \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{4}\right)$.

$C = \{C_1, C_2, C_3\}$ é cobertura aberta de X.

$C' = \{C_1, C_2\}$ é subcobertura aberta de X.

$C'' = \{C_1, C_3\}$ é subcobertura aberta de X.

$C''' = \{C_2, C_3\}$ não é subcobertura de X.

Exemplo. O conjunto finito $K = \{1, 2, ..., n\}$ é compacto.

Exemplo. Qualquer conjunto finito é compacto.

Exemplo. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ é compacto?

Exemplo. $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ são compactos?

Exemplo. $\mathbb{R}$ não é compacto.

Exemplo. $[0, 1)$ é compacto?

Seção 4

Exemplo. Mostre que a função $f(x) = 2x - 5$ é contínua no ponto $a = 2$.

Exemplo. Mostre que a função $f(x) = x^2$ é contínua no ponto $a = 2$.

Capítulo 3

Seção 1

Exemplo. A derivada da função constante é igual a zero.

Exemplo. Seja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=ax+b$. Então para todo $x\in\mathbb{R}$ temos que $f'(x)=a$.

Exemplo. Seja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=x^n$ com n um número inteiro positivo. Então $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$.

Exemplo. Calcule as derivadas das funções.

$f(x)=x^2-3x+1$;

$f(x)=(x-2)(x^2-5x)$;

$f(x)=\dfrac{x-1}{x+2}$;

$h(x)=(x^2-2x+3)^4$;

$y=\cos(4-2x)$.

Seção 2

Exemplo. Seja $f(x)=2x-1$. Determine a derivada da função inversa.

Exemplo. Seja $f\colon[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ definida por $f(x)=\operatorname{arcsen}(x)$. f é derivável em $(-1,1)$ e $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exemplo. A função $f(x)=x^2$ não possui derivada inversa no ponto $x=0$.

Exemplo. Seja $f(x)=27x^3$. Calcule a derivada da função inversa.