Aluno: Pedro Sobota

Exemplos

$A = (0, 1)$.

$x = 0 \Rightarrow x \in A'$?
$0 = \inf A \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}: \exists a \in A | 0 < a < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\forall \dot{O}(0): \dot{O}(0) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in A'$.

$x = 1 \Rightarrow x \in A'$?
$1 = \sup A \Rightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}: \exists a \in A | 1 - \varepsilon < a < 1 \Leftrightarrow$
$\forall \dot{O}(1): \dot{O}(1) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in A'$.

$x \in A \Rightarrow x \in A'$?
$x \in A \Rightarrow$
$\forall \dot{O}(x): \dot{O}(x) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow$
$x \in A'$.

Exercícios

Ex 1.

$A = \mathbb{R} \Rightarrow A' = ?$
Suponha $A' \neq A$. Então
$\exists x \in A' | x \notin A \vee \exists x \in A | x \notin A' \Rightarrow$
$(\exists x \in A | \forall \dot{O}(x): \dot{O}(x) \cap A \neq \varnothing \wedge x \notin A) \vee (\exists x \in A | \exists \dot{O}(x): \dot{O}(x) \cap A = \varnothing) \Rightarrow$
Falso $\vee (\exists x \in A | \exists \dot{O}(x): \dot{O}(x) \cap A = \varnothing)$.
Mas toda $\dot{O}(x)$ para $x \in A$ tem intersecção não vazia com A.
$A' = \mathbb{R}$.

Ex 2.

$A = \mathbb{Q} \Rightarrow A' = ?$

Ex 3.

$A = \mathbb{N} \Rightarrow A' = ?$
Se em $\mathbb{N}$ os pontos limite de $[a, b]$ são $[a, b]$ e $\mathbb{N} = [-\infty, \infty]$, então $\mathbb{N}' = \mathbb{N}$.

Lema.

$\forall a, b \in \mathbb{R} | a < b \colon \exists \dot{O}(a, b) | b \in \dot{O}(a, b)$.

Ou

Para quaisquer a, b tais que $a < b$, há uma vizinhança perfurada de centro em a que contém b.

Corolário.

$a < b \wedge b \in A \Rightarrow \dot{O}(a, b) \cap A \neq \varnothing$.

Corolário.

$(\forall a, b, \varepsilon \in \mathbb{R} \colon a < b < a + \varepsilon \wedge b \in A) \Rightarrow (\forall \dot{O}(a, a + \varepsilon) \colon \dot{O}(a, a + \varepsilon) \cap A \neq \varnothing)$.

Definição.

$u = \sup A \Rightarrow u \geqslant a, \forall a \in A \wedge \forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \colon \exists b \in A | u - \varepsilon < b < u$.

Ou

$u = \sup A \Rightarrow u \geqslant a, \forall a \in A \wedge \forall \dot{O}(u) \colon \dot{O}(u) \cap A \neq \varnothing$.