Unidade 1 - Sistemas de numeração

Seção 1 - O homem e o número

Sistema de numeração: conjunto de símbolos.
Base de um sistema: quantidade de símbolos disponíveis.

Posicionalidade: decimal não posicional, romano posicional. Posição do algarismo altera o valor.

Número, numeral e algarismo: número é o valor, numeral é o conjunto de símbolos e algarismo o símbolo (numeral 34 = número 34 no decimal, 28 no octal).

Primeiros meios de contar: correspondência biunívoca (um para um) com objetos físicos.

Egito: sistema de base 10 não aditivo.
Babilônia/Mesopotâmia: < 60 base 10, ≥ 60 base 60, posicional. Horas e ângulos.
Roma: não posicional de base 10. Séculos, capítulos de livros.
Grécia. sistema complicado.
China: base 10 + algarismos para 100, 1000.
Maias: base 20 com barras. Divisão do ano em 18 meses de 20 dias.

Seção 2 - Sistemas de numeração de interesse atual

Atual decimal indo-arábico (inventado na Índia e levado à Europa pelos Árabes). Vários algarismos diferentes ao longo do tempo. Consolidado século XVI.
Outros sistemas atuais. Binário, octal, hexadecimal, qualquer base.

Conversão escrita para forma polinomial.

$412_{b=5} = 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$.

$11\,210_{b=3} = 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$.

$2\,E39_{b=16} = 2 \cdot 16^3 + (\boldsymbol{E = 14}) \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0$. (E é um algarismo, separar em algarismos.)

Conversão polinomial para escrita em base 10: realizar as operações da forma polinomial.

```
In[]:= {4 * 5^2 + 1 * 5^1 + 2 * 5^0,
        1 * 3^4 + 1 * 3^3 + 2 * 3^2 + 1 * 3^1 + 0 * 3^0,
        2 * 16^3 + 14 * 16^2 + 3 * 16^1 + 9 * 16^0}
Out[]= {107, 129, 11833}
```

$N_b = a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$,
onde
N é um natural;
b é uma base > 1;
n é o número de algarismos.
Lei de formação do número $N = (a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0)_b$.

Conversão de base 10 para outras bases: divisão do número natural N em base 10 sucessivamente por b (a base) até o **quociente** 0, anotando os restos.

$25_{b=10}$ em $b = 2$: $25/2 = 12$, $r = 1$; $12/2 = 6$, $r = 0$; $6/2 = 3$, $r = 0$; $3/2 = 1$, $r = 1$; $1/2 = 0$, $r = 1$.
restos⟵$11001_{b=2}$.

$2946_{b=10}$ em $b = 8$: $2946/8 = 368$, $r = 2$; $368/8 = 46$, $r = 0$; $46/8 = 5$, $r = 6$; $5/8 = 0$, $r = 5$. $5602_{b=8}$.

In[•]:=
```
Table[QuotientRemainder[a, 8], {a, {2946, 368, 46}}]
```
Out[•]=
```
{{368, 2}, {46, 0}, {5, 6}}
```

$11\,833_{b=10}$ em

$b = 16$:

$11\,833/16 = 739$, $r = 9$; $739/16 = 46$, $r = 3$; $46/16 = 2$, $r =$ **$14 = E$**; $2/16 = 0$, $r = 2$.

$2\,E39_{16}$. (Novamente, converter em algarismos.)

In[•]:=
```
Table[QuotientRemainder[a, 16], {a, {11833, 739, 46}}]
```
Out[•]=
```
{{739, 9}, {46, 3}, {2, 14}}
```

Forma polinomial de um racional

Questão 1 AD1.

Efetuar $4532_8 - 5\,C0_{16} - 11\,100\,111_2$ e apresentar a resposta em base 2.

Converter todos em 10.

$$4532_8 =$$
$$4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 =$$
$$2048 + 320 + 24 + 2 = 2394_{10}.$$
$$5\,C0_{16} =$$
$$5 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 =$$
$$1280 + 192 = 1472_{10}.$$
$$11\,100\,111_2 =$$
$$1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$
$$128 + 64 + 32 + 4 + 2 + 1 = 231_{10}.$$

$2394 - 1472 - 231 = 691 =$

$691/2 = 345$ resto $1 =$

$345/2 = 172$ resto $1 =$

$172/2 = 86$ resto $0 =$

$86/2 = 43$ resto $0 =$

$43/2 = 21$ resto $1 =$

$21/2 = 10$ resto $1 =$

$10/2 = 5$ resto $0 =$

$5/2 = 2$ resto $1 =$

$2/2 = 1$ resto $0 =$

$1/2 = 0$ resto $1 =$

1010110011_2.

In[∘]:=
```
{BaseForm[12, 10], BaseForm[12, 16], BaseForm[16^^C, 8],
 BaseForm[1472, 16], BaseForm[2394, 8], BaseForm[231, 2], BaseForm[691, 2]}
```

Out[∘]= $\{12, c_{16}, 14_8, 5c0_{16}, 4532_8, 11100111_2, 1010110011_2\}$

In[∘]:=
```
{10^^12, 16^^12, 16^^C, 16^^5C0, 16^^620}
```

Out[∘]= {12, 18, 12, 1472, 1568}

In[∘]:= $\{5*16^2, 12*16, 4*8^3, 5*8^2, 2048+320+24+2, 2^7, 128+64+32+4+2+1, 2394-1472-231\}$

Out[∘]= {1280, 192, 2048, 320, 2394, 128, 231, 691}

Unidade 2 - Introdução à Lógica

Seção 1 - Estudo da Lógica

Seção 2 - Dedução e indução

Seção 3 - Proposição

Condicional ($\longrightarrow$): só é falso se o primeiro for verdadeiro e o segundo for falso (o primeiro deveria implicar o segundo).

Bicondicional ($\longleftrightarrow$): é verdadeiro se ambos são “iguais” (verdadeiros ou falsos); se forem diferentes, é falso.

Exemplo condicional teorema matemático (p. 70):

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente, então $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ **não** significa que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente.

Q não significa P. Apenas P significa Q. Mas P pode ser F.

Q é *necessário* para P (pois se P, Q), mas não suficiente.

P **é** *suficiente* para Q, pois novamente, se P, Q.

$P \to Q = P \Rightarrow Q$.

Bicondicional:

Se $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ implicassse $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$,

então ambos seriam suficientes (e necessários) um para o outro: $P \leftrightarrow Q = P \Leftrightarrow Q$.

Proposição composta

Tautologia, contradição e contingência.
Tautologia é verdadeira independente do valor das proposições componentes.
Contradição é falsa independente do valor das proposições componentes.
Contingência não é tautologia nem contradição.

Basicamente, tautologia seria um "sempre verdade" ou um "óbvio" ou "redundante".
Contradição seria um "sempre falso" ou "mentira", o que também é óbvio ou redundante, mas de ser falso.
Contingência seria tudo em que há dúvidas (ou seja, as proposições compostas "normais").

Exemplos abstratos.

$\neg(p \wedge \neg p)$: (Não contradição)

p	¬ q	p ∧ ¬ q	¬ (p ∧ ¬ p)
V	F	F	V
F	V	F	V

$p \to \neg p$ (isso sempre será verdade), portanto daí já é redundante.

$p \wedge r \to \neg q \vee r$.

Basicamente, isto nunca é falso porque nunca ocorre (na tabela verdade) da primeira ser verdade e a segunda falsa (implicação negada).
Isto nunca ocorre porque as duas não estão interligadas, ou não "há influência de uma em outra".
Poderia-se pensar numa influência acidental, mas onde não é o caso, nunca é falso.
Tem a ver com a relação entre as proposições atômicas puras.

Pode-se pensar num modelo para isto; se houver proposição atômica sem relação com alguma outra proposição atômica por via de uma proposição composta (que contenha as duas), estas duas não "se relacionam" e nunca ocorrerá de uma ser verdade e a outra ser falsa, o que não gerará uma implicação de uma com a outra.
Ou isso, ou pode haver implicação *acidental* (sem serem relacionadas por uma proposição composta).
Pesquisar.

A não-contradição é uma tautologia mas trivial; com apenas uma proposição atômica. Ela só é tautologia porque é comparada a proposição atômica com sua própria negação, de uma forma ou outra. Esta forma pode ser simples ou composta, com formas "elaboradas" que se reduzem à negação da proposição atômica com si mesmo.

A partir de duas proposições atômicas, passa a haver um fator combinatório de elas terem de estar combinadas em proposições compostas. No segundo exemplo, elas não estão, e “resulta” tautologia.
Basicamente, é como se fosse um teorema, mas em uma proposição composta apenas. Se estabelecêssemos antes que uma das proposições atômicas “soltas” se relaciona com a outra “solta”, ou seja, instanciássemos a proposição composta correspondente... apenas fazemos isto conjugando (∧ ou ∨) as proposições em apenas uma proposição composta. Mas é uma montagem de um teorema do mesmo jeito. Ou seja, montar um teorema em várias “linhas” é o mesmo que juntar todas as “linhas” com ∧.
Mas isto é uma digressão (ou antecipação, veja pág. 99). O fator combinatório é, por exemplo, em $p \wedge r \rightarrow \neg q \vee r$, não haver proposição composta (de implicação ou qualquer? qualquer, pois não há implicação entre p e r também.) contendo p e q. E se houvesse? Vamos supor, $p \vee q$, “prependando” à proposição.

$(p \vee q) \wedge (p \wedge r \rightarrow \neg q \vee r)$.

p	q	r	¬ q	p ∨ q	p ∧ r	¬ q ∨ r	p ∧ r → ¬ q ∨ r	(p ∨ q) ∧ (p ∧ r → ¬ q ∨ r)
V	V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	F	V	F	F	V	V	F

Quebrou a tautologia.

Agora, falsificar esta hipótese: outras relações entre p e q, outras faltas de relações entre uma das proposições atômicas. Basicamente, todas as combinações entre estes fatores e verificar se volta, ou não, a ser tautologia, ou ter um resultado final uniforme.

Langer, p. 352: “(...) se p é assumido V, $\neg p$ é falso; mas para qualquer q que não envolva p em sua construção (como faria, se fosse $\neg p$, $r \cdot p$, ou $r \vee p$) nenhum valor-verdade é determinado pelo fato de que p é V. Porém, se q é obtido inteiramente ou parcialmente por operação em p, o valor de q depende inteiramente ou parcialmente de p. (...) Em um sistema de valor-verdade *completo*, os valores-verdade de todos os elementos operacionalmente construídos são determinados pelo de seus constituintes.” (Nota para “completo”, o que não sei o que é e pode ser um conceito útil.)

O que parece é que a dependência de um q em um p varia o valor de q necessariamente, pois o de p varia (pelo algoritmo da tabela-verdade); e a não dependência acarreta um valor único para q, gerando tautologias e contradições.
O mesmo ocorre com a contradição?

$\neg p \wedge (p \wedge \neg q)$. Esta é simples, apenas duas proposições atômicas. Mas parece ser sempre falso porque nunca $\neg p \wedge p$.
Sem exemplos de contradição com mais de duas.

AD

- Questão 4 AD1.

p	q	$p \vee q$
V	F	V
F	V	V
V	V	V
F	F	F

Como p é F e q é V, p ∨ q é V.

p	q	r	$p \longrightarrow q$	$p \longrightarrow r$	$(p \longrightarrow r) \wedge (p \longrightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Como p é V, q é F e r é V:

$p \longrightarrow q$ é F;

$p \longrightarrow r$ é V; e

$(p \longrightarrow r) \wedge (p \longrightarrow q)$ é F.

- Questão 5.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$q \longleftrightarrow p$	$\sim(q \longleftrightarrow p)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \longleftrightarrow p)$
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
V	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V

A forma sentencial é contingência, pois

se $p = V$ e $q = V$,

$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \longleftrightarrow p) = F$.

Mas se $p = V$ e $q = F$,

$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \longleftrightarrow p) = V$.

p	q	r	$p \longrightarrow q$	$q \vee r$	$p \longrightarrow (q \vee r)$	$(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow (q \vee r))$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V

A forma sentencial é tautologia, pois

$(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow (q \vee r)) = V$.

In[ ]:= **Cos** [π]

Out[ ]= -1

In[ ]:= `Sin[π]`

Out[ ]= `0`

In[ ]:= $\sqrt{5} > 1$

Out[ ]= `True`

Unidade 3 - Inferência e quantificadores

Seção 1 - Inferência e equivalência lógica

Implicação ou inferência lógica de P em Q: $P \Rightarrow Q$. Se $Q = V$ sempre que $P = V$.

P é ***suficiente*** para Q.

No sentido de que se P, isso é suficiente para que Q. (Ao invés de se P, algo mais é necessário para Q.)

Q é ***necessário*** para P.

No sentido de que se não Q, não P. (Ao invés de se não Q, mesmo assim talvez P.)

Silogismo ou transitividade.

$[(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow r)] \Rightarrow p \longrightarrow r =$

p	q	r	p → q	q → r	(p → q) ∧ (q → r)	p → r	[(p → q ∧ (q → r)] ⇒ p → r
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tautologia.

$P \Rightarrow Q$ é verdade se (**uma das**) seguintes é verdade:

- $\neg P \wedge Q$ é tautologia (sempre V).

Aqui, a questão é se as proposições **compostas** P e Q são verdades ou não, em primeiro lugar.

$\neg P \wedge Q =$

P	Q	¬ P	(¬ P) ∧ Q	P ∧ Q	¬ P ∧ Q
V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V
F	F	V	F	F	F

Contingência.

É qual dois dois $(\neg P) \wedge Q$ ou $\neg(P \wedge Q)$? R: $(\neg P) \wedge Q$.

Pois pela Lei de De Morgan $\neg (P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q \neq ?$

ou

- $P \wedge \neg Q$ é uma contradição (sempre F).

$P \wedge \neg Q \Rightarrow$

P	Q	¬ Q	P ∧ ¬ Q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Contingência.

ou

- $P \to Q$ é uma tautologia. (Não É.)

Na verdade, a tabela-verdade de $P \to Q$ não importa.
Voltando para definir:

P, Q são proposições compostas;

p, q são *as* proposições simples/atômicas da compostas;

$\to$, $\leftrightarrow$ são entre proposições simples;

$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ são entre proposições compostas **e** "usados somente quando são tautologias" (as proposições compostas).

P. 84. A implicação entre proposições compostas. Duas tabelas-verdade com *arranjos diferentes* dos *mesmos elementos*, que resultam iguais para proposições compostas. Por exemplo.

Dadas as proposições atômicas p e q, iremos montar duas compostas, P e Q, ambas com p e q.

$P = \neg (p \wedge q)$ e $Q = \neg p \wedge \neg q$.

Só que o valor das compostas varia com o valor das simples:

p	q	p ∧ q	¬ (p ∧ q)
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	¬ p	¬ q	¬ p ∨ ¬ q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

As variações das compostas sobre as mesmas simples são iguais para todos os valores das simples.
Isso cria uma tautologia "entre as compostas"?

P. 85: a tautologia é sobre a "condicional" $P \to Q$ ser sempre verdade.

E é?

p	q	¬ (p ∧ q)	¬ p ∨ ¬ q	¬ (p ∧ q) → ¬ p ∨ ¬ q
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

É.

Se $Q \to P$ também for tautologia, $P \Leftrightarrow Q$.

p	q	$\neg(p \land q)$	$\neg p \lor \neg q$	$\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Então $P \Leftrightarrow Q$.

Essa é a **Lei de Morgan**.

Modus Ponens: $p \land (p \to q) \Rightarrow q$:

p	q	$p \to q$	$p \land (p \to q)$	$[p \land (p \to q)] \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

$[p \land (p \to q)] \to q$ é tautologia, portanto $[p \land (p \to q)] \Rightarrow q$.

Obs.: o livro está pulando a etapa de demonstrar as condicionais.

Estas são as **regras de inferência**.
Estas regras são **regras sempre válidas**.
Ou, são **regras que resultam em tautologias**.

Modus Ponens: $p \to q$ só é falso se p e $\neg q$.

Logo, se $p \to q$ é verdade e p é verdade, q é verdade.

Ou se $p \to q$ e p, (então) q.

Ou $(p \to q) \land p \Rightarrow q$.

Se há uma implicação e o implicado, que poderia ser falso caso a premissa seja falsa, tem a premissa verdadeira, então o implicado é verdade.
Ou, se há uma implicação, dependendo apenas da verdade da premissa, e a premissa é verdadeira, o implicado é verdadeiro.
Modus Ponens é primeiro construir a implicação e, depois, estabelecer a verdade da premissa para obter o implicado.

Modus Tollens é o contrário: se há a implicação e o implicado é falso, é porque a premissa é falsa.

Ou se $p \to q$ e $\neg q$, então $\neg p$.

As tautologias estão em verificar que este caso sempre é verdade... o que não pode ser diferente pela definição da relação de implicação.
Ou seja, é meio que verificar que não há “edge cases”.

Porém, notar que estas implicações não são duplas:

No Modus Ponens, se há uma implicação e o implicado é falso, não necessariamente é porque a premissa é falsa. (?)

Não é isso. Não é partir da implicação, é do implicado.

Se o implicado é verdade, não é necessariamente porque a implicação existe E a premissa é verdadeira.
Bom, se a implicação existir e o implicado for verdade, a premissa é verdadeira (Modus Tollens).
Portanto, a implicação não existe, se o implicado é falso. Errado.
A implicação pode existir e a premissa ser falsa, e o implicado verdadeiro. OU
A implicação pode não existir (e a premissa ser qualquer coisa). (?)

No Modus Tollens, o implicado ser falso não é necessariamente porque há a implicação E a premissa é falsa.
A implicação pode existir e... Errado. O Modus Tollens *não é* sobre o implicado (como o Modus Ponens). É sobre a **premissa**.
No Modus Tollens, a premissa ser falsa não implica necessariamente a implicação existir E o implicado ser falso.
A implicação pode existir e o implicado ser verdadeiro, e a premissa ser falsa. (O que é a mesma “exceção” do Modus Ponens!)
A questão da implicação existir é por estar considerando a implicação como apenas mais uma relação, mas parece irrelevante.

O Modus Ponens e Modus Tollens não são implicações duplas pelo mesmo motivo, o fato da premissa poder ser falsa.

Exemplo de implicação dupla (chamada de “**equivalência lógica**”): $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$.
(Notar que no lado direito estão invertidos.)

p	q	¬ p	¬ q	p → q	¬ q → ¬ p	p → q ⇒ ¬ q → ¬ p	¬ q → ¬ p ⇒ p → q	p → q ⇔ ¬ q → ¬ p
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V

O livro não está mostrando a expansão completa das implicações, neste caso, da dupla implicação como composta pelas duas implicações.

Seção 2 - Quantificadores

Sentenças abertas. Não identificam para quais valores das variáveis a sentença tem valor-verdade verdadeiro. Poderiam ser citados sempre os elementos (que somados constituem o **universo de discurso**), mas isto pode ser impraticável. Por isso os **quantificadores**.

∀: universal: todos

∃: existencial: há

∃!: existencial único: há um

¬∀: nenhum

¬∃: nenhum?

¬∃!: nenhum??

Errado.

$\forall x : x = V$

$\exists x : x = V$

$\exists ! x : x = V$

Os opostos são a inversão do quantificador **E** do igual.

O quantificador oposto de $\forall$ é $\exists$.

$$\neg \forall x : x = V \Rightarrow$$
$$\exists x : x = F$$
$$\neg \exists x : x = V \Rightarrow$$
$$\forall x : x = F$$

O quantificador ∃! não tem quantificador oposto portanto nem é citado.

Significado em termo de elementos.

$$\forall x : x = V \Rightarrow$$
$$x_1 = V \wedge x_2 = V \wedge \ldots \wedge x_n = V \Rightarrow$$
$$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n.$$
$$\exists x : x = V \Rightarrow$$
$$x_1 = V \vee x_2 = V \vee \ldots \vee x_n = V \Rightarrow$$
$$x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n.$$

Dado isto, o quantificador existencial único parece menos natural, dado que não tem este tipo de definição...

Negações em termos de elementos. Isto vai explicar **porque** os opostos acima são tais.

Isto é uma operação de classe...

$$\neg (\forall x : x) \Rightarrow$$
$$\neg (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n) =$$
$$\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \ldots \vee \neg x_n =$$
$$\exists x : \neg x.$$
$$\neg (\exists x : x) \Rightarrow$$
$$\neg (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_3) =$$
$$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \ldots \wedge \neg x_n =$$
$$\forall x : \neg x.$$

Dito uma generalização da Lei de De Morgan ($\neg (p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$ e $\neg (p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$).

Generalização porque é ocasionada coletivamente pelo uso do quantificador.

O mais dificultoso destes é a negação do ou: não vários OU ao mesmo tempo significa não E cada um.

Propriedades dos quantificadores

Sendo p uma proposição **aberta** e a um elemento específico:

$$\forall x : p(x) \Rightarrow p(a)$$

"Para todos" inclui "qualquer um".

$$\forall x : p(x) \Rightarrow \exists x\, p(x)$$

“Para todos” inclui “ao menos um”.

Sendo p e q proposições **abertas**:

$$[\forall x : p(x)] \lor [\forall x : q(x)] \Rightarrow \forall x : p(x) \lor q(x)$$

Não é duplo implicado, porque se ou todos p ou todos q, todos p ou q; mas se todos p ou q, poderia ser uma mistura de ps e qs.

$$\forall x : p(x) \land q(x) \Leftrightarrow [\forall x : p(x) \land \forall x : q(x)]$$

Duplo porque todos todos.

$$[\exists x : p(x)] \lor [\exists x : q(x)] \Leftrightarrow \exists x : p(x) \lor q(x)$$

Duplo porque, se há um p ou há um q então há um p ou q; e haver um p ou q há um p ou há um q.

$$\exists x : p(x) \land q(x) \Rightarrow \exists x : p(x) \land \exists x : q(x)$$

Não é duplo porque os x que p e q podem ser distintos.

Ordem de quantificação em mais de uma variável livre

Os não comentados são os triviais.

$$\exists x, \exists y : p(x, y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x : p(x, y)$$
$$\forall x, \forall y : p(x, y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x : p(x, y)$$

$$\forall x, \exists y : p(x, y) \Rightarrow \exists y, \forall x : p(x, y)$$

Este (acima) não é verdade, apenas a implicação contrária:

$$\exists y, \forall x : p(x, y) \Rightarrow \forall x, \exists y : p(x, y)$$

Que é equivalente à abaixo:

$$\exists x, \forall y : p(x, y) \Rightarrow \forall y, \exists x : p(x, y)$$

Que não é bicondicional porque, se para todo y há um x, os x podem ser distintos (que é o mesmo motivo do primeiro não ser verdade).

$$\neg [\forall x, \forall y : p(x, y)] \Leftrightarrow \exists x, \exists y : \neg p(x, y)$$

Acima, “um estraga todos”.

$$\neg [\exists x, \exists y : p(x, y)] \Leftrightarrow \forall x, \forall y : p(x, y)$$

“Mas poderia ser assim”.

$$\neg [\forall x, \exists y : p(x, y)] \Leftrightarrow \forall x, \exists y : \neg p(x, y)$$

Interpretação 1: para nem todo x, há um y que $p(x, y)$. Isso implica que para todo x, há um y que não $p(x, y)$? De forma alguma. Errado. O oposto de todos está sendo aqui “nenhum”, não “alguns”.

O que a primeira negação nega? Que todo x ou que um y?

Se o primeiro:

Para nenhum x há um y que $p(x, y)$. Portanto para todo x há um y que não $p(x, y)$? Se for assumida a existência de y (como acho que é), sim.
Mas, o quantificador oposto de ∀ não era ∃?
A negação inverte o quantificador ou a proposição inteira (a ser interpretado)? Aqui foi inteira.
A segunda interpretação (se negando o tudo como nada):
Para todo x não há nenhum y que $p(x, y)$. Portanto para todo x há um y que não $p(x, y)$? Mesma coisa.

p. 92: “A negação de $\forall x : p(x)$ é $\exists x : \neg p(x)$.

Vamos partir da negação da propriedade:

$$\forall x, \exists y : p(x, y) \Leftrightarrow \neg [\forall x, \exists y : \neg p(x, y)]$$

É verdade pois se para todo x há um y que $p(x, y)$, para *nenhum* x há *algum* y que *não* $p(x, y)$.
O oposto então deveria ser verdade, mas antes, vamos negar a segunda proposição, voltando à original

$\forall x, \exists y : \neg p(x, y)$, em que se assemelha a $\exists x : \neg p(x)$?

Em pouco, então a negação de ∀ tem pouco a ver com a de ∀ , ∃.
Se a negação de

$\forall x : p(x)$ é

$\exists x : \neg p(x)$, a de

$\forall x, \exists y : p(x, y)$ parece ser

$$\neg \forall x, \exists y : p(x, y) =$$
$$\forall x, \exists y : \neg p(x, y).$$

Mas não acho que é isso. Por enquanto, esta vai ficar inexplicada.

$$\neg [\exists x, \forall y : p(x, y)] \Leftrightarrow \forall x \exists y : \neg p(x, y)$$

Similar.
“Se não há um x que para todo y, $p(x, y)$, então para todo x há um y que não $p(x, y)$”.

Primeiro, as interpretações das mais de uma variável livre (p. 96).

$\forall x, \exists y : p(x, y)$: “Todas as pessoas têm um amigo.”
$\exists y, \forall x : p(x, y)$: “Há alguém que é amigo de todas as pessoas.”
$\exists x, \exists ! y : p(x, y)$: “Todas as pessoas têm um único amigo.”

Interpretação de f) e g) de acordo.

$$\neg [\forall x, \exists y : p(x, y)] \Leftrightarrow \exists x, \forall y : \neg p(x, y)$$

“Nem todas as pessoas têm um amigo” é bicondicional de “há alguém que não tem um amigo”.

$$\neg [\exists x, \forall y : p(x, y)] \Leftrightarrow \forall x \exists y : \neg p(x, y)$$

“Ninguém é amigo de todas as pessoas” é bicondicional de “nem todas as pessoas são amigos de alguém”.

A dúvida é se “nem todas as pessoas são amigos de alguém” é o mesmo que “nem todas as pessoas têm um amigo”, ou seja,

$\forall x \exists y : \neg p(x, y) = \neg [\forall x, \exists y : p(x, y)]$. (Perguntado.)

Se for, então "Há alguém que não tem um amigo" é equivalente, ou bicondicional, de "ninguém é amigo de todas as pessoas"? Ou,

$\exists x, \forall y: \neg p(x, y) \Leftrightarrow \forall x \exists y: \neg p(x, y)$? Parece ser.

Última propriedade.

$$\forall x, \forall y: p(x) \lor P(Y) \Leftrightarrow \forall x: p(x) \lor \forall y: p(y)$$

Seção 3 - Métodos de demonstração

São dois: **dedutivo** e **indutivo** apenas.
Demonstrar que é tautologia, ou relacionar a uma regra de inferência.
Regras de inferência são Modus Ponens, etc.. que resultam em tautologias. Por isso equivalem a "demonstrar" diretamente que é uma tautologia.
Praticar todas as regras de inferências e equivalências lógicas (p. 86).
Método dedutivo tem **demonstração direta** e por **contradição ou contraposição ou absurdo**.

Demonstração direta

Exemplo.

$H_1 = \forall x: r(x)$

$H_2 = \forall y: f(x)$

$H_3 = J \in x$

$H_4 = \forall y: \neg r(x)$

$C = J \notin y$

Prova:

$J \in x \quad H_3$

$r(J) \quad H_1 \qquad$ Modus Ponens : $J \in x \land \forall x: r(x) \Rightarrow r(x)$

$J \notin y \quad H_4 \qquad$ Modus Tollens : $\neg\neg r(x) \land \forall y: \neg r(x) \Rightarrow \neg(J \in y)$ □

A descrição formal do Modus Ponens é: $p \land (p \to q) \Rightarrow q$.

E do Modus Tollens é: $\neg q \land (p \to q) \Rightarrow \neg p$.

Contradição ou contraposição ou absurdo

Equivalência lógica contradição ou contraposição: $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$.

Significa que $(p \to q \Rightarrow \neg q \to \neg p) \land (\neg q \to \neg p \Rightarrow p \to q)$.

Tabela-verdade:

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$p \to q \Rightarrow \neg q \to \neg p$	$\neg q \to \neg p \Rightarrow p \to q$	$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg q$
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V

Indução

$\subset$ significa "é subconjunto de". $\supset$ significa "é superconjunto de". E $\not\subset$ e $\not\supset$.

Princípio do menor número inteiro. Usado na **dedução** do primeiro e segundo princípios da indução.

Subconjuntos $L \subset \mathbb{Z}$ não-vazios com um limite inferior em Z ($a \in Z < x \in L$ ou

$\exists\, a \in Z, \forall\, x \in L : a < x$) são ditos com um mínimo.

Exemplo: os inteiros não-negativos é um conjunto com limite inferior e o mínimo é zero.

Primeiro princípio: $p(a)$ e $\forall\, n > a : p(n)$.

Segundo princípio (prova a mesma coisa): $\forall\, n \geq a : p(n)$ (ou $p(a)$?) e

$[\forall\, a \leq k < n : p(k)] \Rightarrow p(n)$.

Em ambos, o objetivo é provar que $p(n)$.

AD

- 1) $P \Leftrightarrow Q =$
  $x = 2 \lor x \geq 5 \Leftrightarrow \neg\,(x < 5 \land x = 2)$.

Temos ou pela definição $p \Leftrightarrow q \Rightarrow (p \land q) \lor \neg\,(p \land q)$ (pág. 65):

x = 2	x ≥ 5	x < 5	x = 2 ∨ x ≥ 5	x < 5 ∧ x = 2	¬ (x < 5 ∧ x = 2)	x = 2 ∨ x ≥ 5 ⇔ ¬ (x < 5 ∧ x = 2)
F	F	F	F	F	V	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V
V	V	V	V	V	F	F

Ou pela definição $p \Leftrightarrow q \Rightarrow p \Rightarrow q \land q \Rightarrow q$, que dá no mesmo valor:

x = 2	x ≥ 5	x < 5	x = 2 ∨ x ≥ 5	x < 5 ∧ x = 2	¬ (x < 5 ∧ x = 2)	x = 2 ∨ x ≥ 5 ⇒ ¬ (x < 5 ∧ x = 2)	¬
F	F	F	F	F	V	V	
V	F	F	V	F	V	V	
F	V	F	V	F	V	V	
F	F	V	F	F	V	V	
V	V	F	V	F	V	V	
V	F	V	V	V	F	F	
F	V	V	V	F	V	V	
V	V	V	V	V	F	F	

In[∘]:=
```
Subsets[{a, b, c}]
```

Out[∘]=
```
{{}, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}
```

Em ambos os casos, a equivalência é válida somente quando:

$x = 2, x$...

Está errado. As proposições são dependentes entre si.

$x=2$	$x\geq 5$	$x<5$	$x=2\lor x\geq 5$	$x<5\land x=2$	$\neg(x<5\land x=2)$	$x=2\lor x\geq 5\Leftrightarrow\neg(x<5\land x=2)$
V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	F

A equivalência lógica é falsa.

- 2) "Joana tem um irmão ou Arthur mora em Florianópolis".

$p \lor q$.

p	q	$\neg q$	$p\lor q$	$q\to p$	$\neg q\to p$	$\neg(q\to p)$	$p\to q$	$\neg(p\to q)$
F	F	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F	V	F

A sentença logicamente equivalente é C) "Se Joana não tem um irmão, então Arthur mora em Florianópolis".

```
In[ ]:= Subsets[{p, q}]
Out[ ]= {{}, {p}, {q}, {p, q}}
```

- 3) $p(x) : x^2 - 7x + 10 = 0$.

```
In[ ]:= Table[Function[x, x^2 - 7 x + 10 == 0][x], {x, {1, 2, 3, 4, 5}}]
Out[ ]= {False, True, False, False, True}
```

```
In[ ]:= Solve[x^2 - 7 x + 10 == 0, x]
Out[ ]= {{x → 2}, {x → 5}}
```

$\forall x : p(x)$ é falso, pois $p(x)$ é falso para $x = 1$.

$\forall x : \neg p(x)$ é falso, pois $p(x)$ é verdadeiro para $x = 2$.

$\exists x : p(x)$ é verdadeiro.

$\exists x : \neg p(x)$ é verdadeiro.

- 4) $P(n) : 2^{2n} - 1$ é divisível por 3 para todo $n \geq 1$?

Primeiro princípio da indução: para cada $n \geq a$, sendo a um número inteiro,

$p(a)$ é uma proposição verdadeira; (o primeiro elemento)

se $p(n)$ é verdadeira, $p(n+1)$ é verdadeira.

Então p é verdadeira para todo n.

Ou seja, basicamente, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ e $p(a)$. Acho que é isso que quizeram dizer.

Mas como provar que $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ para *todo* n? Se provarmos para um a e um $a+1$, terá sido um caso particular. Simples. É uma demonstração algébrica.

Exemplo p. 105.

$$p(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para $n = 1, p(1) = \frac{1\,(1+1)\,(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Ou seja, $1^1 = 1$. Verdade.

Para $n = 2, 2^2 = \frac{2\,(2+1)\,(4+1)}{6} = \frac{2\cdot3\cdot4}{6} = 4$. Verdade.

Para $n = 3, 3^2 = \frac{3\,(3+1)\,(6+1)}{6} = \frac{3\cdot4\cdot7}{6} = 14$. Falso.

In[ ]:= `(3 (3 + 1) (6 + 1)) / 6`

Out[ ]= 14

Supondo que $p(n)$ é verdadeira, vamos mostar $p(n+1)$.

Primeiro, substituimos $n+1$ no lado direito da equação de $p(n)$.

$$p(n+1) = \frac{(n+1)\,(n+1+1)[2\,(n+1)]+1}{6} =$$

$$\frac{(n+1)\,(n+2)\,(2\,n+3)}{6} =$$

$$\frac{(n+1)\left(2\,n^2+3\,n+4\,n+6\right)}{6} =$$

$$\frac{(n+1)\left(2\,n^2+7\,n+6\right)}{6}.$$

In[ ]:= `Simplify[((n + 1) (n + 1 + 1) (2 (n + 1) + 1))/6]`

Out[ ]= $\frac{1}{6}\,(1+n)\,(2+n)\,(3+2\,n)$

Operou a primeira parte da igualdade.

$$1^2 + 2^2 + n^2 + (n+1)^2 = 1 + 4 + n^2 + n^2 + 2\,n + 1 = 6 + 2\,n + 2\,n^2.$$

Não. Houve uma substituição da verdade para n na equação para $n+1$.

“Supondo que $p(n)$ é verdadeira” quer dizer “vamos usar $p(n)$ em $p(n+1)$”.

Agora, substituimos o valor que queremos provar no lado esquerdo da equação de $p(n)$.

$$p(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

$$p(n+1) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 =$$

$$p(n) + (n+1)^2 =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n^2+2n+1)}{6} =$$

$$\frac{(n+1)(2n^2+n)+6n^2+12n+6}{6} =$$

?

Nota-se que $p(n)$ é **parte** do valor de $p(n+1)$.

In[∘]:= `Expand[(n + 1)^2]`

Out[∘]= $1 + 2n + n^2$

In[∘]:= `{Simplify[n (n + 1) (2 n + 1) + 6 (n + 1)^2], FullSimplify[n (n + 1) (2 n + 1) + 6 (n + 1)^2]}`

Out[∘]= $\{6 + 13n + 9n^2 + 2n^3,\ (1+n)(2+n)(3+2n)\}$

In[∘]:= (* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 == \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$ *)

In[∘]:= `{Simplify[n (n + 1) (2 n + 1)/6 + (n + 1)^2], FullSimplify[n (n + 1) (2 n + 1)/6 + (n + 1)^2]}`

Out[∘]= $\left\{(1+n)^2 + \frac{1}{6} n (1+n)(1+2n),\ \frac{1}{6}(1+n)(2+n)(3+2n)\right\}$

Bom, não consegui chegar no mesmo valor de $\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$, mas chego no mesmo valor de $\frac{1}{6}(1+n)(2+n)(3+2n)$ (via o software).

Isto é suficiente para serem iguais.

Mas então.

$P(n) : 2^{2n} - 1$ é divisível por 3 para todo $n \geq 1$?

Primeiro, $P(1) = 2^2 - 1 = 3$ que é divisível por 3.

Agora, para $n+1$. Precisava saber o critério para algo ser divisível por 3.

1) A soma dos dígitos é divisível por 3.
2) O número é divisível por todos os fatores de 3 (não há).

$2^{2(n+1)} = 2^{2n+2}$.

Muito difícil.

Ou... vamos invalidar achando um exemplo contrário.

In[ ]:= **Table[QuotientRemainder[2^{2n} - 1, 3], {n, 1, 50}]**

```
Out[ ]= {{1, 0}, {5, 0}, {21, 0}, {85, 0}, {341, 0}, {1365, 0}, {5461, 0}, {21 845, 0}, {87 381, 0},
 {349 525, 0}, {1 398 101, 0}, {5 592 405, 0}, {22 369 621, 0}, {89 478 485, 0}, {357 913 941, 0},
 {1 431 655 765, 0}, {5 726 623 061, 0}, {22 906 492 245, 0}, {91 625 968 981, 0}, {366 503 875 925, 0},
 {1 466 015 503 701, 0}, {5 864 062 014 805, 0}, {23 456 248 059 221, 0}, {93 824 992 236 885, 0},
 {375 299 968 947 541, 0}, {1 501 199 875 790 165, 0}, {6 004 799 503 160 661, 0}, {24 019 198 012 642 645, 0},
 {96 076 792 050 570 581, 0}, {384 307 168 202 282 325, 0}, {1 537 228 672 809 129 301, 0},
 {6 148 914 691 236 517 205, 0}, {24 595 658 764 946 068 821, 0}, {98 382 635 059 784 275 285, 0},
 {393 530 540 239 137 101 141, 0}, {1 574 122 160 956 548 404 565, 0}, {6 296 488 643 826 193 618 261, 0},
 {25 185 954 575 304 774 473 045, 0}, {100 743 818 301 219 097 892 181, 0}, {402 975 273 204 876 391 568 725, 0},
 {1 611 901 092 819 505 566 274 901, 0}, {6 447 604 371 278 022 265 099 605, 0},
 {25 790 417 485 112 089 060 398 421, 0}, {103 161 669 940 448 356 241 593 685, 0},
 {412 646 679 761 793 424 966 374 741, 0}, {1 650 586 719 047 173 699 865 498 965, 0},
 {6 602 346 876 188 694 799 461 995 861, 0}, {26 409 387 504 754 779 197 847 983 445, 0},
 {105 637 550 019 019 116 791 391 933 781, 0}, {422 550 200 076 076 467 165 567 735 125, 0}}
```

Filho, nunca vai achar um exemplo em contrário.

In[ ]:= **4 + 2 + 2 + 5 + 5 + 2 + 7 + 6 + 7 + 6 + 4 + 6 + 7 + 1 + 6 + 5 + 5 + 6 + 7 + 7 + 3 + 5 + 1 + 2 + 5**

Out[ ]= 116

Correção. Dica. Dizer que n é divisível por 3 é dizer que existe um x tal que $n = 3\,x$. (Mas em que conjunto numérico? A questão não especificou.) Supondo os inteiros.

Bom, passo 1, $P(1)$ está provado.

Passo 2, supondo que $P(n)$ é válido, $\exists\, x : 2^{2\,n} - 1 = 3\,x \Rightarrow 2^{2\,n} = 3\,x + 1$.

Agora, $n + 1$. A pergunta é, $\exists\, x : 2^{2\,(n+1)} - 1 = 3\,x$?

$2^{2\,(n+1)} - 1 = 2^{2\,n+2} - 1 = 2^{2\,n} \cdot 2^{2} - 1$.

Como $2^{2\,n} = 3\,x + 1$ está suposto, $(3\,x + 1) \cdot 2^2 - 1 = 12\,x + 4 - 1 = 12\,x + 3$. Não deu certo.

Estava certo... $12\,x + 3 = 3\,(4\,x + 1)$ é divisível por 3. □ A limpo.

$P(1) = 2^{2\cdot 1} - 1 =$

$2^{2} - 1 =$

$4 - 1 = 3$

é divisível por 3.

Supondo $P(n) = 2^{2\,n} - 1 = 3\,x \Rightarrow$

$2^{2\,n} = 3\,x + 1,$

$$P(n+1) = 2^{2\cdot(n+1)} - 1 =$$
$$2^{2n+2} - 1 =$$
$$2^{2n} \cdot 2^2 - 1 =$$
$$(3x+1) \cdot 4 - 1 =$$
$$12x + 3 =$$
$$3(4x+1),$$

que é divisível por 3.

Ou $12x + 3 = 3x \Rightarrow 9x = -3 \Rightarrow x = -1/3$? Nada a ver.

- 2b) $\forall x, \exists y : x + y = 0$
  $\exists y, \forall x : x + y = 0$

São equivalentes? Depois perguntar. Parecem ser.

Conjunto dos reais. O quê de mais “bizarro” tem nos reais? Os irracionais. $\sqrt{2}$. E pra esse tem o negativo. Isso torna a proposição 1 verdadeira.

Agora, a segunda... são equivalentes. A questão é se há uma **dupla implicação**. Não. Dupla implicação implica poderem ser falsas. A questão é (e não é a primeira vez que o questionamento surge) interpretar ou não o conteúdo (ou apenas a forma). Se interpretar apenas a forma, há a implicação, então é verdade que $p \to q$. Porém, ao interpretar o conteúdo das proposições, verificamos serem sempre verdade, portanto não podendo haver valor falso para p, o que invalida $p \to q$ (e torna apenas $p \wedge q$ verdadeira).

Correção: não são (equivalentes). Ou melhor, são. Mas foi trocado na prova o y por x na segunda proposição, o certo é:

$$\forall x, \exists y : x + y = 0$$
$$\exists x, \forall y : x + y = 0$$

“Para todo x há um y que somado dá zero.” (Ou seja, identidade.) Verdade, sempre.

“Há um x que somado com qualquer y dá zero.” Não é verdade. Nunca? Nunca.

Questionamento conjunção e conjunto resposta

Proposições unidas por $\wedge$ implicitamente, cada uma implicando algo que também é unido para formar o resultado final. Porém, diferente das proposições, os implicados estão todos “contidos” nos próximos (através de uma relação de implicação)? Contendo o último todos os anteriores?

Por exemplo da prova de

$H_1 = \forall x : r(x)$

$H_2 = \forall y : f(x)$

$H_3 = J \in x$

$H_4 = \forall y : \neg r(x)$

$C = J \notin y :$

$J \in x \quad H_3$

$r(J) \quad H_1$ Modus Ponens : $J \in x \land \forall x : r(x) \Rightarrow r(x)$

$J \notin y \quad H_4$ Modus Tollens : $\neg\neg r(x) \land \forall y : \neg r(x) \Rightarrow \neg(J \in y)$ □

Conjunção: o teorema quer dizer

$$\forall x : r(x) \land \forall y : f(x) \land J \in x \land \forall y : \neg r(x) \land J \notin y.$$

E a prova é

$$J \in x \Rightarrow r(J) \Rightarrow J \notin y$$

que significa que

$J \notin y \supset r(J) \supset J \in x$? A ideia é que assumir a última assume todos os outros, mas a relação de implicação já expressa isso.

Unidade 4 - Noções de Álgebra de Boole

Seção 1 - O que é Álgebra de Boole?

- 5) Mostre que $(a \cdot b) + (a' + b') = 1$.
  Um produto mais a soma dos complementos é o universo.

A propriedade em questão é a soma dos complementos ser o universo.

Se a soma de $a \cdot b$ com $a' + b'$ é o universo, $a \cdot b$ e $a' + b'$ são complementos. Como provamos que são?

Expressão dual? $(a + b) \cdot (a' \cdot b') = 0$, o que é verdade. Mas não.

Alguma coisa relaciona o produto de dois elementos com a soma de seus complementos.

Achei, De Morgan, p. 117, e A9, p. 114:

$$[(a \cdot b)' = a' + b'] \land (a + a' = 1) \Rightarrow$$
$$(a \cdot b) + (a \cdot b)' = 1. \ \square$$

$(a \cdot b) + (a' + b')$
$= (a \cdot b) + (a \cdot b)'$ (Lei de De Morgan)
$= 1$ (A9)

Também caderno, já tinha provado.

$(a \cdot b) + (a' + b')$
$= (a' + b') + (a \cdot b)$ (A3)
$= [(a' + b') + a] \cdot [(a' + b') + b]$ (A5)
$= [(a' + a) + b'] \cdot [a' + (b' + b)]$ (Associatividade)
$= (1 + b') \cdot (a' + 1)$ (A9)
$= 1 + (b' \cdot a')$ (A5)
$= 1$ (Teorema 2)

$(a' + b') \cdot (a \cdot b)$
$= [(a \cdot b) \cdot a'] + [(a \cdot b) \cdot b']$ (A6)
$= (a \cdot a' \cdot b) + (b \cdot b' \cdot a)$ (Associatividade)
$= (0 \cdot b) + (0 \cdot a)$ (A9)
$= 0 + 0$ (Teorema 2)
$= 0.$

Seção 2 - Aplicações da Álgebra de Boole