Pedro Sobota

Questão 1. Seja K um corpo ordenado e seja $X \subset K$ um conjunto limitado superiormente. Um elemento $b \in K$ é dito *supremo* de X se:

a) Para qualquer $x \in X$, tem-se $x \leqslant b$;

b) Se $c \in K$ e $x \leqslant c$, $\forall x \in X$, então $b \leqslant c$.

O supremo de X é a menor das cotas superiores de X.

Podemos dizer que o supremo do conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 2x - 8 < 0\}$ é:

a) 0

b) -4

c) 2

d) -2

e) Não possui.

Questão 2. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $x \in A$. x é um *ponto interior* de A se existe uma vizinhança de x contida em A. O conjunto de todos os pontos interiores de A é chamado o *interior* de A e denotado por $\operatorname{int} A$.

Considere os conjuntos $X = (a, b)$ e $Y = [b, c]$ e assinale a alternativa correta:

a) $\operatorname{int} X = [a, b]$ e $\operatorname{int} Y = [b, c]$

b) $\operatorname{int} X \cup \operatorname{int} Y = \operatorname{int}(X \cup Y)$

c) $\operatorname{int} X - \operatorname{int} Y = \varnothing$

d) $\operatorname{int} X \cup Y \subset \operatorname{int} X \cup \operatorname{int} Y$

e) $\operatorname{int} X \cup \operatorname{int} Y \subset \operatorname{int} (X \cup Y)$

Questão 3. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b), então existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Considere as asserções.

I. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Pelo Teorema do Valor Médio, $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leqslant |b - a|\ \forall a, b \in \mathbb{R}$, porque

II. $f(x) = \operatorname{sen} x$ é limitada: $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Assinale a opção correta:

a) I e II são verdadeiras, e II é justificativa de I

b) I e II são verdadeiras mas II não é justificativa de I

c) I é verdadeira e II é falsa

d) I é falsa e II é verdadeira

e) I e II são falsas

Questão 4. Sobre derivadas:

a) Determine, usando a definição, a derivada de $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{2}{x}$.

b) Utilizando a regra da cadeia, determine a derivada de $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{x^3}{\cos x^3}$.

c) Calcule, pela definição e diretamente, $f'(0)$, sabendo que $f(x) = x g(x)$ para g contínua em 0. Apresente a resposta em função de g.

Questão 5. Seja h uma função tal que $h'(x) = \operatorname{sen} x + 1$ e suponha $g(x) = h(x^2)$. Determine $g'(x^2)$.

Questão 6. Determine uma expressão para $(f \circ g)''(x)$.

Questão 7. Suponha $f(0) = 0$ e $|f(x)| \leqslant |x|$ para todo x. Mostre que f é contínua em 0. (Sugestão: escreva a definição de continuidade para f em 0 e encontre um δ em função de ε.)