Proposições

Aula 8

Definição 1. *Um ponto é limite se existe vizinhança furada de centro nele com intersecção com o conjunto.*

Definição 2. *Um ponto é de aderência se existe vizinhança de centro nele com intersecção com o conjunto.*

Definição 3. *O conjunto derivado de um conjunto é o conjunto de seus pontos-limite.*

Definição 4. *O fecho de um conjunto é o conjunto de seus pontos de aderência.*

Aula 9

Proposição 1. *Um conjunto infinito contido em um conjunto fechado tem ao menos um ponto limite naquele conjunto.*

Prova. □

Aula 11

Definição 1. *Um ponto é de fronteira se toda vizinhança tem intersecção com o conjunto e seu complemento.*

Definição 2. *Ponto interno.*

Definição 3. *Ponto externo.*

Definição 4. *Ponto isolado.*

Proposição 5. *O fecho de um conjunto é sua união com seu conjunto derivado.*

Proposição 6. *O complemento do fecho de um conjunto é o exterior do conjunto.*

Proposição 7. *Se uma vizinhança furada não intersecciona um conjunto, a vizinhança de mesmo centro e raio o intersecciona em no máximo um ponto. Provar.*

Dúvida: se um ponto não pertence a um conjunto, existe vizinhança, furada e não-furada, de centro no ponto sem intersecção com o conjunto.

Aula 12

Definição 1. *Um conjunto é denso em outro se qualquer vizinhança de qualquer ponto no primeiro contém um ponto do segundo.*

Definição 2. *Os racionais são densos nos reais, e os irracionais também.*

Proposição 3. *O interior de* $[a, b]$ *é* (a, b).

Prova.

- Se um conjunto está contido em outro e seu complemento não está contido, o conjunto é igual ao outro. (Porquê?)

- (a, b) está contido no interior.

  Todo ponto em (a, b) tem uma vizinhança contida em $[a, b]$.

  Essa vizinhança é a vizinhança simétrica de raio igual ao menor de a distância do ponto a a e a distância do ponto a b.

  Pela definição de interior (definir), tal ponto pertence ao interior de $[a, b]$.

- O complemento de (a, b) não está contido no interior.

  Qualquer ponto no complemento de (a, b) tem toda vizinhança não-contida em $[a, b]$.

  Qualquer vizinhança de tal ponto tem uma perna sem intersecção com $[a, b]$.

  Pela definição de interior, tal ponto não pertence ao interior de $[a, b]$.

□

Proposição 4. *A fronteira dos racionais são os reais.*

Prova.

1. Pela definição da densidade dos racionais e irracionais nos reais (12.2), todo intervalo real contém um racional e um irracional.

2. Então, toda vizinhança de um real contém um racional e um irracional.

3. Então, toda tal vizinhança tem intersecção com os racionais e os irracionais.

4. Como os irracionais são o complemento dos racionais nos reais, toda tal vizinhança tem intersecção com os racionais e seu complemento.

5. Pela definição de ponto de fronteira, todos estes reais são fronteira dos racionais.

□

Aula 13

Definição 1. *Um conjunto é aberto se seu interior é igual a si mesmo.*

(Definição alternativa de aberto: todos os pontos têm vizinhança contida.)

Definição 2. *Um conjunto é fechado se seu conjunto derivado está contido em si mesmo.*

Proposição 3. *A intersecção (finita) de abertos é aberta.*

Prova.

- Caso trivial: a intersecção é vazia.

  Por definição, todos vazios são abertos.

- Senão:

  1. Há ao menos um conjunto não-vazio.
  2. Há um ponto comum a todos (na intersecção).
  3. Todos contêm uma vizinhança de centro neste ponto.
  4. Existe uma vizinhança de centro neste ponto contida em todas estas vizinhanças.
  5. Esta vizinhança está contida na intersecção.
  6. Pela definição de aberto, a intersecção é aberta.

□

Proposição 4. *A união (finita) de fechados é fechada.*

Prova. Suponha uma união não-fechada de fechados.

1. Pela definição de fechado (13.2), a união tem fecho não-contido.
2. Um conjunto não-contido significa que tem um ponto fora. Então há um ponto do fecho da união fora da união.
3. Um ponto fora significa um ponto no complemento, então… resumindo, a intersecção do fecho com o complemento é não-vazia.
4. Pela lei de De Morgan, o complemento da união é a intersecção dos complementos. Então a intersecção do fecho com a intersecção dos complementos é não-vazia.
5. A intersecção do fecho (da união) com a intersecção dos complementos é igual à intersecção dos complementos? Não entendi o passo.
6. Pela definição de aberto (13.1), como os complementos são abertos, existe vizinhança contida em cada complemento.
7. Tal vizinhança também está contida no complemento da união. (Porquê?)
8. Uma vizinhança contida implica uma vizinhança furada contida. Então há uma vizinhança furada de mesmo centro contida no complemento da união.
9. Estar contido no complemento significa sem intersecção. Então esta vizinhança furada não tem intersecção com a união.
10. Vizinhança furada não ter intersecção significa o centro não pertencer ao fecho. Então esta vizinhança contida em cada complemento (passo 6) não pertence ao fecho da união, o que é uma contradição com (?).

□