

Cálculo de auto-valor

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Subtração de λ .

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{pmatrix}$$

Determinante: diagonal normal – diagonal secundária.

$$((1 - \lambda) \times (4 - \lambda)) - (1 \times -2) =$$

$$4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 2 =$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Polinômio característico.

Auto-valor: igualar determinante a zero.

Toda matriz quadrada possui um determinante.

Se o determinante da matriz for igual a zero, a matriz não tem inversa.

$$\det C = (1 \times 4) - (1 \times -2) = 4 + 2 = 6 \neq 0.$$

O determinante da matriz λ (polinômio característico) é igualado a zero.

Objetivo: diagonalizar a matriz C : torná-la uma matriz que tem apenas a diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Usando soma e produto, para 2 e 3, o produto é 6 e a soma, 5.

A solução do polinômio característico são os autovalores.

Encontrando o auto-vetor

Substituir o λ pelo auto-valor.

Para $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

A matriz dos auto-valores multiplicada pelo vetor das variáveis (x, y) deve resultar no vetor nulo.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linha por coluna. $-x + y = 0$ e $-2x + 2y = 0$.

Uma equação é múltipla da outra. O sistema tem infinitas soluções pois é indeterminado (há mais variáveis que linhas no sistema).

As soluções do sistema são todas as soluções do tipo (x, y) , porém, com $x = y$. Então y substitui x .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Este é o auto-vetor referente ao auto-valor } \lambda = 2.$$

Fazer o mesmo para o auto-valor $\lambda = 3$.

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Em álgebra linear, notação $(a, b, \dots) = 0$ (vetor igualado a zero) significa igualdade ao vetor zero: $(a, b, \dots) = (0, 0, \dots)$.

$$-2x + y = 0 \text{ e } -2x + y = 0.$$

$$2x = y \Rightarrow x = \frac{y}{2}.$$

A solução do tipo (x, y) , com $\frac{y}{2}$ no lugar de x , é $\left(\frac{y}{2}, y\right)$. Ou $y \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Este é o auto-vetor referente ao auto-valor $\lambda = 3$.

Matriz diagonalizante

Montar matriz com os auto-vetores.

$$\text{O vetor } \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Transpor os vetores, que são colunas, em linhas.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz diagonalizante na matriz original $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Transposição: trocar linhas por colunas.

Diagonalização

Igualar a matriz original (C) à multiplicação da matriz diagonalizante (P) pela matriz desconhecida J e pela matriz inversa de P . Encontrar a matriz J .

A matriz inversa de $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ é

(...)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D = P \times J \times P^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times J \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos eliminar P multiplicando ambos os lados à esquerda por P^{-1} .

$$P^{-1} \times C = P^{-1} \times P \times J \times P^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times J \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A multiplicação da matriz identidade por qualquer matriz é a matriz, então

$$\begin{pmatrix} 2+2 & 2-4 \\ -1-2 & -1+4 \end{pmatrix} = J \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = J \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Iremos isolar J multiplicando ambos os lados pela inversa do segundo termo do lado direito.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = J \Rightarrow$$

$$J = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 4-4 \\ -3+3 & -3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

J é a matriz diagonalizada de C .