1.1 Integral indefinida

Exemplos

1. Seja $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + 2$. Mostre que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

2. Seja $F(x) = 2x + C$. Encontre a função $f(x)$ tal que $F(x)$ seja sua primitiva. Observe que C é uma constante arbitrária e como sua derivada é nula, ela não determina modificações em $f(x)$. Represente graficamente simulando valores para C e discuta as características gráficas.

3. Calcule as integrais.

a) $\int x^2 + x + 1\, dx$

b) $\int 4x^5\, dx$

c) $\int 2x^3 + 3x^2 - 1\, dx$

d) $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

e) $\int x + \sqrt{x}\, dx$

f) $\int e^x\, dx$

g) $\int \frac{2\,dx}{x}$

h) $\int \frac{\cos x}{3}\, dx$

i) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\, dx$

j) $\int t + \sqrt{t} + \frac{2}{t}\, dt$

Exercícios

a) $\int 5x^3 + 2x - 1\, dx$

b) $\int x^7 + 2\sqrt{x}\, dx$

c) $\int \sqrt{x} + e^x\, dx$

d) $\int \frac{2}{x} + 3e^x\, dx$

1.2

Exemplos

Calcule as integrais.

a) $\int 2\left(3x^2 + 2x - 1\right)^{10}(6x + 2)\, dx$

b) $\int \frac{3x^2}{1+x^3}\, dx$

c) $\int \frac{dx}{(5x-7)^5}$

d) $\int e^{2x-1}\, dx$

e) $\int 2e^{x^2}x\, dx$

f) $\int \frac{(\ln x)^2}{3x}\, dx$

g) $\int e^{-2x} + x^3\, dx$

h) $\int \frac{dx}{x^2+4x+11}$

Exercícios

Calcule usando substituição.

a) $\int \left(5x^3 - 2x + 3\right)^8\left(15x^2 - 2\right) dx$

b) $\int (7x + 20)^7\, dx$

c) $\int \left(x^2 + 2x - 3\right)^4(x + 1)\, dx$

d) $\int \sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}\; x\, dx$

e) $\int 7\, e^{5x+2}\, dx$

f) $\int x \ln x^2 + 1\, dx$

g) $\int \frac{2x+1}{x^2+x-1}\, dx$

h) $\int \frac{2}{x} + \ln x\, dx$

i) $\int x^4 \cdot e^{-x^5}\, dx$

j) $\int x^2 \sqrt{2x^3+4}\; dx$

1.3

Exemplos

Calcule usando integração por partes.

a) $\int x\, e^{-2x}\, dx$

b) $\int \ln x\, dx$

c) $\int x \ln 2x\, dx$

d) $\int t^3\, e^{t^2}\, dt$

e) $\int e^x \cos x\, dx$

Exercícios

Calcule usando integração por partes.

a) $\int x\, e^{4x}\, dx$

b) $\int x \ln 2x\, dx$

c) $\int \sqrt{x}\; \ln x\, dx$

d) $\int x^2\, e^x\, dx$

1.4

Exemplos

Calcule as integrais.

a) $\int \frac{2x-3}{x^2+3x-10}\, dx$

b) $\int \frac{x-1}{x^3+x^2-4x-4}\, dx$

c) $\int \frac{dx}{x^3-4x^2}$

d) $\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}\, dx$

e) $\int \frac{x-1}{x^3-2x^2+x-2}\, dx$

f) $\int \frac{4x^2+8x+8}{4x^2-4x+4}\, dx$

g) $\int \frac{1-x+\frac{1}{2}x^3}{x(x^2+x)^2}\, dx$

Exercícios

a) $\int \frac{2x+3}{x^2-9x+20}\, dx$

b) $\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\, dx$

c) $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\, dx$

d) $\int \frac{x^3}{(x^2+2)^2}\, dx$

1.5 Revisão

Exemplos

a) $\int \frac{\cos x\, dx}{(4-\operatorname{sen} x)^2}$

b) $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}\, dx$

c) $\int 2x^3 \sqrt{4-x^2}\, dx$

d) $\int x \cos^2 x\, dx$

e) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$

f) $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{x^3-1}$

Exercícios

1. Mostre que $F(x) = \frac{5}{4} x^4 + x^3 - 4x + 7$ é uma primitiva de $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 4$.

2. Calcule as integrais indefinidas.

a) $\int \frac{x^4+3x^2+x}{x^4}\, dx$

b) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^3}\, dx$

c) $\int \frac{x^2+1}{x^2}\, dx$

d) $\int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$

e) $\int \cot\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

f) $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\, dt$

g) $\int 6x\sqrt{2x^2+3}\, dx$

h) $\int 3e^x \cos 3e^x\, dx$

i) $\int \sqrt{\cos x}\, \operatorname{sen} x\, dx$

j) $\int \frac{\ln x^3}{x}\, dx$

k) $\int \frac{2\, dt}{t \ln^2 2t}$

l) $\int \frac{2\, dx}{x^2-3x+1}$

m) $\int \frac{2\, dr}{3r^2+9r+9}$

n) $\int 2x^5 e^{3x^6}\, dx$

3. Resolva as integrais usando integração por partes.

a) $\int \ln 2 - 3x\, dx$

b) $\int \ln\sqrt{x}\, dx$

c) $\int x e^{2x}\, dx$

d) $\int x^5 e^{x^3}\, dx$

e) $\int x \cos 3x\, dx$

f) $\int t^3 \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt$

g) $\int \frac{x}{2} \cos e\, c^2(x+1)\, dx$ (?)

h) $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$

4. Calcule as integrais por decomposição em frações parciais.

a) $\int \frac{x^2}{x^2+x}\,dx$

b) $\int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}\,dx$

c) $\int \frac{x-2}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{(x-1)^2 x}$

e) $\int \frac{x^2-2}{x^3-x^2\,dx}$

f) $\int \frac{dx}{2x^3+6x}$

g) $\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx$

h) $\int \frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

2.1 Integral definida

Exemplos

Usando o método da exaustão, calcule a área delimitada pela curva $y = x^2 - 6x + 11$, pelo eixo dos x e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$. Reflita sobre a definição de que a área sob a curva $y = f(x)$ de a a b é definida por $A = \lim_{\max \Delta x\, i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\,\Delta x_i$, sendo $i = 1, 2, \ldots, n$ e C_i um ponto qualquer no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Exercícios

Usando o método da exaustão, calcule a área da figura delimitada pela função $y = 2x + 1$, pelo eixo dos x e pelas retas $x = 1$ e $x = 5$. Faça o gráfico e observe que a área pode ser calculada por geometria elementar. Confronte os resultados obtidos.

2.2

Exemplos

Calcule as integrais definidas.

a) $\int_1^2 x^2 + x - 1\,dx$

b) $\int_2^3 \frac{2\,dx}{x+3}$

c) $\int_0^8 \sqrt{x+1}\,dx$

d) $\int_0^1 x\,e^{-2x}\,dx$

Exercícios

Calcule as integrais definidas.

a) $\int_0^1 2x^3 - 2x + 3\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{2x^2\,dx}{x^3+1}$

c) $\int_0^{14} \sqrt{x-5} - 4\,dx$

d) $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\,dx$

2.3

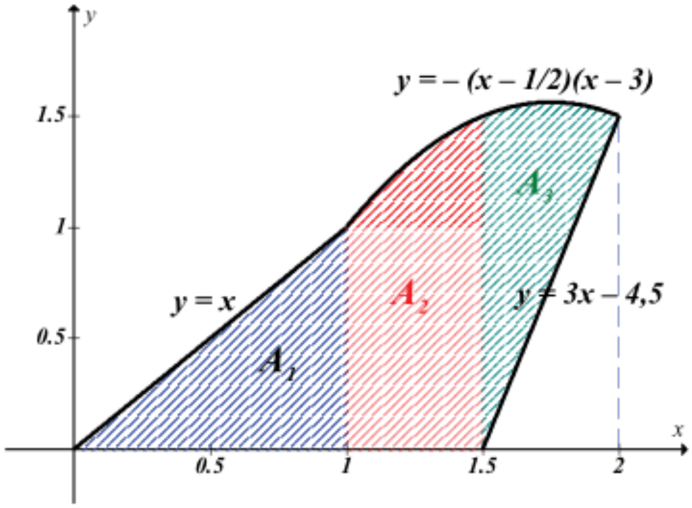
Exemplos

1. Calcule a área da região delimitada por $y = \frac{2}{(x=1)^2}$, o eixo dos x, $x = 2$ e $x = 4$.

2. Calcule a área da região delimitada por $y = (x-2)(x-4)$, o eixo dos x, $x = 2$ e $x = 4$.

3. Calcule a área da região delimitada por $f(x) = -x^2 - 4x + 5$ e $g(x) = 0.5x + 2.5$.

4. Calcule a área da região:



Exercícios

1. Calcule a área da região delimitada por $y = x^2 + 1$, o eixo dos x, $x = -1$ e $x = 1$.

2. Calcule a área da região delimitada entre as funções $y = x^3 + 1$ e $y = 4x + 1$.

3. Calcule a área da região delimitada entre as funções $y = x^2 - 1$ e $y = 3x + 17$ e $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

2.4 Revisão

Exemplos

1. Sem calcular a integral, verifique a desigualdade: $\int_1^3 3x^2 + 4\,dx \geq \int_1^3 2x^2 + 5\,dx$.

2. Sem realizar o cálculo, verifique se o resultado da integral $\int_0^{20} \frac{dx}{x+2}$ é positivo, negativo ou zero.

3. Calcular a integral da função $f(x) = x - \frac{|x|}{2}$, em $[-1,\ 1]$. O resultado representa uma área?

4. Calcular a área da região delimitada por $y = 5 - x^2$ e $y = x + 3$.

5. Calcular a área delimitada por $y = |x - 2|$ e $y = 2 - (x - 2)^2$.

Exercícios

1. Calcule as integrais definidas.

a) $\int_1^2 5x^2 - 2x\,dx$

b) $\int_0^5 \sqrt{x}\ dx$

c) $\int_{-1}^1 (x+2)^2\,dx$

d) $\int_2^3 \frac{2\,dx}{(x+1)^2}$

e) $\int_0^1 e^t\,dt$

f) $\int_0^3 \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\ dx$

g) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

h) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

2. Calcule a área da região delimitada pela parábola $y = 4x - x^2$ e pelo eixo dos x.

3. Calcule a área da região delimitada por $y = \frac{1}{x}$, $y = 8x + 2$, $x = 0$ e $x = 1$.

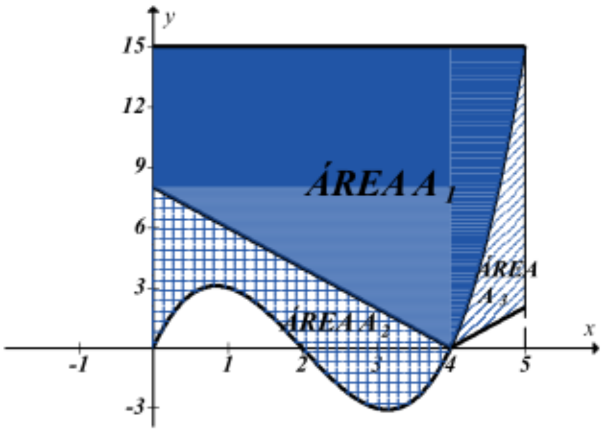
4. Calcule a área delimitada pelas curvas:

a) $y = x^2 - 5x + 1$ e $y = -x^2 - 5x + 3$

b) $y = (x + 4)(x - 2)$ e $y = 5x + 10$

5. Calcule $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$. Interprete geometricamente o resultado.

6. Observe a figura dada. Identifique as três funções $y = (x - 2)(x - 4)x$, $y = |2x - 8|$ e $y = 15$. Calcule a área das regiões A_1, A_2 e A_3.

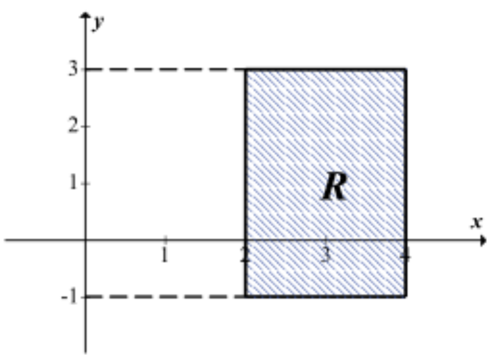


3.1 Integrais múltiplas

Exemplos

1. Calcule $\int_1^2 \int_3^5 (2x + y) \, dx \, dy$.

2. Calcule a integral dupla da função $f(x, y) = 2x^2 y$ na região de integração:



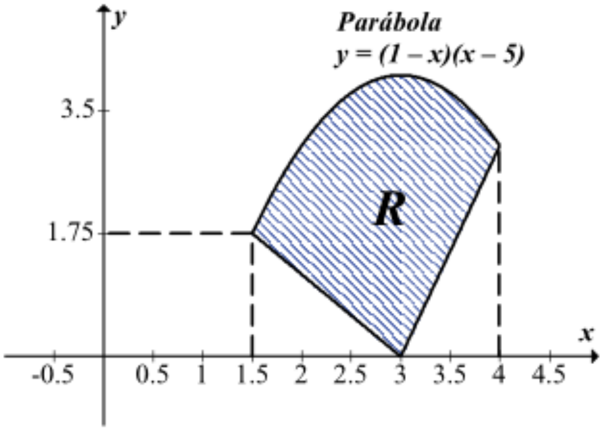
3. Calcule $I = \iint_R x + 2y \, dA$, sendo R a região delimitada por $y = x^2$ e $y = 2x$.

4. Calcule $I = \iint_R x \cos 2xy \, dA$, sendo R o retângulo de vértices $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $(1, \pi)$ e $(0, \pi)$.

5. Calcule $I = \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} \, dy \, dx$.

6. Calcule a área da região R delimitada por $x = y^2 + 2$ e $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

7. Calcule a área da região na figura, delimitada por uma parábola e dois segmentos de reta.



8. Calcular o volume do sólido delimitado por $z = 4x^2$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$.

Exercícios

1. Calcule $\int_0^4 \int_0^3 18 - 3x - 2y \, dx \, dy$.

2. Calcule $\int_0^1 \int_x^1 x + y \, dy \, dx$ e descreva graficamente e analiticamente a região de integração.

3. Determine os limites de integração de $\iint_S f(x, y) \, dx \, dy$ sendo S a região delimitada pela hipérbole $y^2 - x^2 = 1$ e pelas retas $x = 2$ e $x = -2$.

4. Inverta a ordem de integração e verifique a melhor maneira de calcular $\int_{-2}^{1} \int_{x^2+4x}^{3x+2} dy \, dx$.

5. Usando integrais duplas, calcule a área da região delimitada por:

a) $y = 5 - x^2$ e $y = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

b) $y = e^x$, $y = 3 - x$ e os eixos coordenados.

6. Descreva graficamente e analiticamente a região de integração da integral $\int_{-1}^{2} \int_0^{x+1} 2xy^2 \, dy \, dx$. Calcule a integral dupla e interprete o resultado.

7. Usando a integral dupla, calcule a área da região delimitada por $x = 0$, $x = y^2 + 1$, $y = 2$ e $y = -2$.

8. Calcule o volume do tetraedro limitado por $x + 2y + 3z = 6$ e os planos coordenados.

3.2

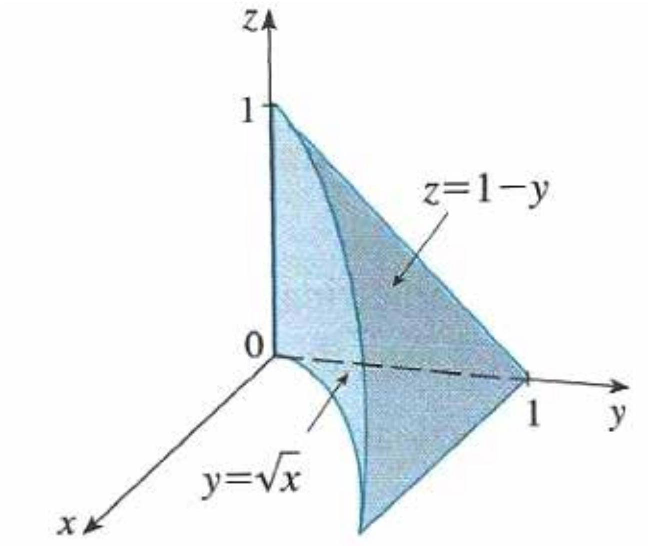
Exemplos

1. Calcule $I = \iiint_T x \, dV$, sendo T a região delimitada pelos planos coordenados e pelo plano $2x + y + z = 1$.

2. Analise e resolva a integral iterada $I = \int_0^5 \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} x + y + z \, dy \, dx \, dz$.

3. Expresse a integral $\iiint_T f(x, y, z) \, dV$ como uma integral iterada de seis modos diferentes, sendo T o sólido limitado por $z = 0$, $z = 1 - y$, $y = 1$, $x = 0$ e $x = 1$.

4. Calcule o volume do sólido da figura.



4. Calcule $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\, dz\, dy$ e descreva analiticamente o sólido definido. O resultado da integral é o volume do sólido?

5. Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 6$ e pela calha $z = 4 - x^2$.

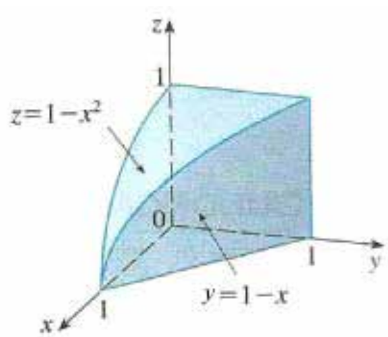
Exercícios

1. Calcule $\iiint_T dV$, sendo T o sólido no primeiro octante delimitado pela calha $x = 4 - y^2$ e pelos planos $z = y$, $x = 0$ e $z = 0$.

2. Calcule $\iiint_T dV$, sendo T o sólido cuja base é a região do plano xy delimitada pela parábola $y = 1 - x^2$ e pela reta $y = 3x$ e cuja parte superior é o plano $z = x + 2$.

3. Calcule a integral iterada $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\, dy\, dx\, dz$.

4. A figura exibe a região de integração de $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} dy\, dz\, dx$. Reescreva a integral como uma integral iterada equivalente nas outras cinco opções possíveis. Calcule usando uma das opções e interprete o resultado.



5. Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

4.1 Áreas, comprimentos, arcos

Exemplos

1. Calcule a área da região limitada pela circunferência $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$.

2. Calcule a área acima do eixo x e entre as elipses $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases}$.

3. Faça um esboço do gráfico de $r = 1 - 2\cos\theta$.

4. Encontre a área da região limitada pelo gráfico $r = 2 + 2\cos\theta$.

Exercícios

1. Calcule a área da região delimitada pela elipse $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\, t \end{cases}$.

2. Calcule a área da região limitada pelas curvas $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t+1 \end{cases}$.

3. Calcule a área delimitada pela elipse $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\,\text{sen}\, t \end{cases}$ que está acima da reta $y = 2$.

4. Calcule a área da parte da elipse $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$ que está acima da reta $y = 1$.

5. Calcule a área da região entre as curvas $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}\, t \end{cases}$.

6. Calcule a área da região delimitada pelas seguintes curvas representadas em coordenadas polares:

a) $r = 2 - 2\,\text{sen}\,\theta$

b) $r = \text{sen}\, 5\,\theta$

7. Calcule a área da região limitada pela curva $r = 2 - \cos\theta$.

8. Calcule a área da intersecção das circunferências $r = 6\cos\theta$ e $r = 6\,\text{sen}\,\theta$.

4.2

Exemplos

1. Calcule o comprimento do arco da curva dada por $y = x^{\frac{2}{3}}$ dos pontos $A = (0,\ -2)$ até $B = (8,\ 2)$.

2. Encontre o comprimento da circunferência $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\, t \end{cases}$, com $t \in [0,\ 2\pi]$.

3. Encontre o comprimento da cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

Exercícios

1. Determine o comprimento de arco das seguintes curvas:

a) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}$ no intervalo $2 \leq x \leq 4$

b) $y = 4\,x - 1$ entre os pontos $A = (1,\ 3)$ e $B = (2,\ 7)$

2. Escreva a integral que representa o comprimento de arco das seguintes curvas:

a) $y = e^x - 1$ de $A = (0,\ 0)$ até $B = \left(2,\ e^2 - 1\right)$

b) $y = \text{sen}\, x$ de $x = 0$ até $x = \pi$.

3. Calcule o comprimento de arco da curva $y = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}$ do ponto $x = 0$ até $x = 1$.

4. Calcule o comprimento de arco da curva $y = \frac{x^4}{8} - \frac{1}{4\,x^2}$ no intervalo $x \in [1,\ 2]$.

5. Calcule o comprimento da curva $\begin{cases} x = e^t - t \\ y = e^{\frac{t}{2}} \end{cases}$, com $0 \leq t \leq 3$.

6. Determine o comprimento da parte da circunferência $\begin{cases} x = 10\cos t \\ y = 10\,\text{sen}\, t \end{cases}$ que está no primeiro quadrante.

7. Calcule o comprimento de arco da curva $\begin{cases} x=3\,t+2 \\ y=t-1 \end{cases}$, com $t \in [0,\ 3]$, e faça um esboço gráfico.

8. Determine o comprimento de arco da curva $r = 3\,\theta^2$, com $\theta \in \left[0,\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

9. Encontre a integral que representa o comprimento total da curva $r = 2 + 3\cos\theta$.

10. Calcule o comprimento da cardióide $r = 2 + 2\cos\theta$.

11. Determine a integral que representa o comprimento da curva $r = 2 - \cos\theta$.

4.3

Exemplos

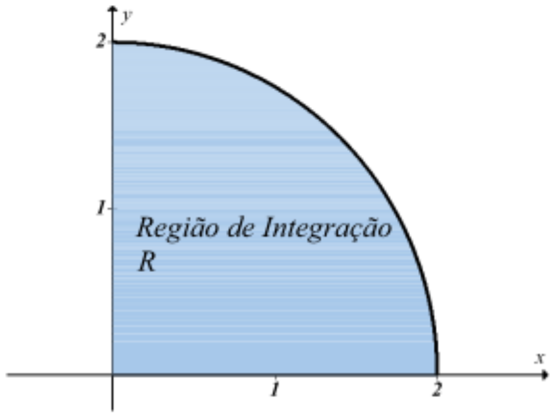
1. Seja uma região R delimitada pelas retas $y = 0$, $y = x$ e $x = 4$. Encontre o volume do sólido gerado a partir da rotação de R em torno do eixo dos x.

2. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos x da região definida pela intersecção de $y = -x^2 + 3$ e $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.

3. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de $x = y^3$, $0 \leq y \leq 1$ em torno do eixo y.

4. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno da reta $y = 2$ da região formada pela intersecção de $y = 2x^2$, $x = 1$, $x = 2$ e $y = 2$.

5. Calcule $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, sendo R a região circular da figura.



6. Calcule o volume do sólido delimitado por $z = 9 - x^2 - y^2$ e o plano xy, no primeiro octante.

Exercícios

1. Determine o volume do sólido gerado pela rotação de $y = \sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$ em torno do eixo x.

2. Calcule o volume do sólido gerado pela região R que gira em torno do eixo x, com $R = \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$.

3. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação da intersecção de $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 2$ em torno do eixo y.

4. Calcule o volume da superfície obtida pela rotação de $y = 4\sqrt{x}$, $\frac{1}{4} \le x \le 4$ em torno do eixo x.

5. Faça girar a região R definida pela intersecção de $y = x^3$, $x = 0$ e $y = 8$ em torno da reta $y = 8$. Encontre o volume do sólido.

6. Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação de $y = 2x + 1$, $y = 0$ e $x = 1$ em torno da reta $x = 1$.

7. Calcule $\iint_R 4 - x - y\, dx\, dy$, sendo R a região circular $x^2 + y^2 = 4$. O resultado obtido pode representar um volume? Justifique sua resposta.

8. Calcule o volume resultante da intersecção dos paraboloides $z = 18 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$.

9. Calcule o volume do sólido resultante da intersecção dos cilindros $x^2 + y^2 = 9$ e $y^2 + z^2 = 9$.

4.4

Exemplos

1. Encontre a massa e o centro de massa de uma barra de 5m de compimento com densidade linear dada por $\rho(x) = (x + 1)$ kg/m.

2. Considere uma barra de 4m de comprimento. A densidade linear num ponto qualquer da barra é proporcional à distância desse ponto a um ponto P, que está sobre o prolongamento da linha da barra, a uma distância de 5m da mesma. Na extremidade mais próxima a P, a densidade linear é de 2 kg/m. Determine a massa e o centro de massa da barra.

3. Qual o trabalho realizado para deslocar um peso de 4 kg do chão até uma mesa com altura 0.8m?

4. Suponha $F(x)$ a força necessária para deslocar um objeto do ponto $x = a$ a $x = b$. Qual o trabalho realizado para mover o objeto de a até b?

5. Um objeto está localizado a uma distância de x metros da origem, e uma força de $x^2 + 1$ N age sobre o objeto. Qual o trabalho realizado para movimentar o objeto de $x = 0$ a $x = 3$?

6. Um tanque em forma de cilindro circular reto de raio 2m e altura 6m está cheio d'água. Qual o trabalho necessário para esvaziar o tanque pela parte superior, considerando que a água deve ser deslocada por meio de um êmbolo, partindo da base do tanque? Considere a densidade da água como $d = 1000\ \text{kg}/m^3$.

Exercícios

1. Usando $\overline{x} = \frac{1}{m} \int_a^b x \rho(x)\, dx$, mostre que o centro de massa de uma barra homogênea de comprimento l está em seu ponto médio, isto é, $\overline{x} = \frac{b+a}{2}$. Considere a barra com extremidades nos pontos a e b.

2. Determine o centro de massa de uma barra de 5m de comprimento, sabendo que num ponto P, que dista $1\,m$ de uma das extremidades, a densidade é de $1\ \text{kg}/m$ e que nos demais pontos ela é dada por $(1 + d)$ kg/m, onde d é a distância até o ponto p. Neste caso, a densidade da barra é dada pela função

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x = 4 \\ 1 + (4 - x) = 5 - x, & 0 \le x \le 4. \\ 1 + (x - 4) = x - 3, & 4 < x \le 5 \end{cases}$$

3. Encontre a massa total e o centro de massa de uma barra de 10cm de comprimento, se a densidade linear da barra num ponto P, que dista x cm da extremidade esquerda, é $2x + 5$ km/cm.

4. Calcule a massa total e o centro de massa de uma barra de 10m de comprimento, sabendo que a densidade linear num ponto qualquer da barra é a distância total deste ponto ao extremo direito da barra. A densidade linear no extremo direito da barra é de 5 kg/m e no meio da barra é de 2 kg/m.

5. Em uma chapa plana com densidade uniforme ρ, o centro de massa é dado por duas coordenadas, $\overline{x}$ e $\overline{y}$, onde $\overline{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x\, f(x)\, dx$ e $\overline{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$, com A sendo a área da chapa e $f(x)$ a função que delimita superiormente a chapa. Encontre o centro de massa de uma placa semicircular de raio r. Lembre-se que $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.

6. Uma pessoa rolando uma pedra emprega uma força de $100 + \operatorname{sen} x$ Newtons quando esta rola x metros. Quanto trabalho esta pessoa deve realizar para a pedra rolar 5 metros?

7. Uma mola tem comprimento natural de 10m. Sob um peso de 5N, ela se distende 3. Determine o trabalho realizado para distender a mola do comprimento natural até 25m.

8. Um tanque cilíndrico circular reto de 2m de diâmetro e 4m de profundidade está cheio e deve ser esvaziado pela parte superior. Determine o trabalho necessário para esvaziar o tanque, através de um êmbolo partindo da base do tanque.

9. Uma partícula é movia ao longo do eixo x por uma força que mede $\frac{2}{(1+x)^2}$ N em um ponto a x metros da origem. Calcule o trabalho realizado ao mover uma partícula da origem até a distância de 10m.

10. Encontre a massa total e o centro de massa de uma barra de 10cm de comprimento, se a densidade linear da barra num ponto P que dista x cm da extremidade esquerda é $2x + 3$ km/cm.