Questão. 2.4. O conjunto $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(1-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+1\right)$ é aberto, fechado, aberto e fechado ou nem aberto e nem fechado? Escrever o resultado da intersecção.

Um aberto tem seu interior igual a si mesmo.

Interior é conjunto dos internos, que são os para os quais existe vizinhança contida.

Em um fechado, os pontos "limítrofes" não têm vizinhança contida.

Fechado é totalmente diferente: seu conjunto derivado (pontos-limite) está contido em si.

Os pontos-limite são os que toda vizinhança furada intersecciona. (Os de aderência, que toda vizinhança não furada, o que inclui as furadas.)

Se toda vizinhança furada de um ponto intersecciona um conjunto fechado, o ponto é o supremo do conjunto, neste caso contido?

Se toda vizinhança furada de um ponto intersecciona um conjunto aberto, o ponto é o supremo do conjunto, neste caso não-contido?

Se toda vizinhança não-furada de um ponto intersecciona um conjunto, ...

O supremo é a menor cota superior.

A cota superior são todos os pontos maiores ou iguais a todos pontos no conjunto.

Por isso o fechado contém a cota superior, porque ela é definida. O aberto não contém porque dos dois lados são "sequências".

Parece que na "maioria dos casos", o ponto-limite é também o supremo. Vamos tomar um supremo de um fechado. Como ele é a menor cota superior, qualquer ponto menor estará contido no fechado, e portanto a respectiva vizinhança furada. Para um aberto, a mesma coisa. O caso falha para um singleton $\{a\}$, porque a é supremo mas não é ponto-limite, porque qualquer vizinhança furada de a *não* intersecciona o conjunto.

Como detalhe, todo ponto-limite de um conjunto é também ponto aderente do conjunto [1].

Aberto?

Cada conjunto interseccionado em A é uma vizinhança não-furada.

$\frac{1}{n}+1$ e $1+\frac{1}{n}$ comutam, portanto é, $\left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$ uma **vizinhança de centro 1 e raio $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$**. Para n natural sem zero, a vizinhança é furada. Para onde convergem? Para $n=1$, a vizinhança é $(-0,2)$; conforme $n\to\infty$, tende à menor vizinhança de centro 1 tende a $\{1\}$, sem portanto atingir. Então, a intersecção destas vizinhanças e é esta menor vizinhança.

Esta vizinhança é aberta, mas como é definida como uma intersecção, é preciso demonstrar que a intersecção de vizinhanças abertas é aberta. Mas só a intersecção finita é aberta. Exemplo de fechada é a intersecção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ que tem vizinhanças $\left(0-\frac{1}{n}, 0+\frac{1}{n}\right)$ de centro 0 e raio $\frac{1}{n}$. Mas porquê essa intersecção é $\{0\}$?

Primeiro, são vizinhanças ou apenas intervalos? ~~**Não são vizinhanças** porque n é natural~~.

No limite de n, a intersecção é o centro. n não ser zero implica os limites exteriores da coleção de intervalos; sem isto, o próximo seria infinitamente grande (e denominador zero).

~~Aqui, a intenção não é usar a definição de aberto ou fechado; é demonstrar o conjunto intersecção e de forma trivial sua abertude ou fechalidade~~.

As demonstrações da p. 56 são sobre conjuntos reais. Terá de ser demonstrado que o limite destas duas sequências é no centro, ou seja, em 1.

$1-\frac{1}{n} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., 1\right\}$. Demonstrar que o limite de $1-\frac{1}{n}=1$.

$1+\frac{1}{n} = \left\{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, ..., 1\right\}$. Demonstrar que o limite de $1+\frac{1}{n}=1$.

Sabemos que não há outra intersecção (que não 1) porque $1-\frac{1}{n}\leqslant 1$ e $1+\frac{1}{n}\geqslant 1$.

Provar que $\{1\}$ não é aberto: definição ε (para os reais, mas aqui aplicando o 1 como se fosse real), "todo ponto tem vizinhança contida". E este ponto não tem vizinhança contida.

Fechado?

P. 59, fechado se o complemento aberto.

Para definir o complemento, é necessário definir o superconjunto. Vamos assumir reais, mas que na verdade apenas com racionais. Então, o complemento será aberto, porque "duas sequências".

> O seu erro é pensar separado cada coordenada do intervalo, note que estamos trabalhando com intervalos e não com dois conjuntos separados, logo isso já nos diz que estamos trabalhando com os reais. Veja para n = 1 temos o primeiro intervalo (0, 2) , ou seja todos os reais neste intervalo, agora construa os intervalos e para n = 2, n = 3 e assim sucessivamente, desta forma você conseguirá entender a intersecção destes infinitos intervalos. Assim você vai conseguir facilmente provar fechado ou aberto, usando a ideia de complementar.

$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

$1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$:

$1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\frac{n}{n+1} > \frac{n-1}{n} \Rightarrow$

$\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} > 0 \Rightarrow$

$\frac{n^2}{n^2+n} - \frac{(n+1)(n-1)}{n^2+n} > 0 \Rightarrow$

$\frac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n^2+n} > 0 \Rightarrow$

$\frac{n^2 - (n^2 - 1^2)}{n^2+n} > 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{n^2+n} > 0 \Rightarrow$

$n^2 + n > 0 \Rightarrow$

$n <$ -1$\vee n > 0$.

Como $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ é sempre verdade.

De forma similar, $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$ é verdade para todo $n \in \mathbb{N}$:

$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n} \Rightarrow$

$\frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} < 0 \Rightarrow$

$\frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n^2+n} < 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{n^2+n} < 0 \Rightarrow$

$n^2 + n < 0 \Rightarrow$

$n < -1 \vee n > 0$.

Como $a > b \wedge c < d \Rightarrow (a, c) \subset (b, d)$ e

$1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$ e $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$, então

$\left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right) \subset \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

Como $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$, então

$\left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right) \cap \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

~~Então~~ $\cancel{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1}\right) =}$

$\cancel{\left(\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n+1}, \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n+1}\right) = (1, 1) = \varnothing}$.

No limite, a intersecção é $\{1\}$.

Provar que 1 pertence a todos e qualquer outro não pertence a todos.

Hipótese: $1 \in A$.

$1 - \frac{1}{n} < 1 < 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$1 - \frac{1}{n} < 1 \Rightarrow$

$\frac{n-1}{n} < 1 \Rightarrow$

$\frac{n-1}{n} - 1 < 0 \Rightarrow$

$\frac{-1}{n} < 0 \Rightarrow$

$-n < 0 \Rightarrow$

$n > 0$. Sempre verdade.

$1 < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow$

$0 < \frac{1}{n} \Rightarrow$

$0 < n$. Sempre verdade.

Na verdade, é só olhar para $\frac{1}{n}$ em ambos os casos: se $\frac{1}{n} > 0$, as inequações são verdadeiras. E $\frac{1}{n} > 0$ quando $n > 0$.

$1 - \frac{1}{n} < 1$ quando $\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow n > 0$, sempre verdade.

$1 < 1 + \frac{1}{n}$ quando $\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow n > 0$, sempre verdade.

Então $1 - \frac{1}{n} < 1 < 1 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $a < b < c \Rightarrow b \in (a, c)$, então $1 \in \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$, então $1 \in A$.

> $x_0 \neq 1 \notin A$: sem perda de generalidade, $x_0 > 1 \Rightarrow x_0 = 1 + \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$.
>
> Fato: para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$.
>
> Dúvida: É por causa da densidade dos racionais nos reais?
>
> Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 + \frac{1}{n_0} < 1 + \varepsilon$.
>
> Como $n_0 \neq 1$, tal $1 + \frac{1}{n_0} \notin A$.
>
> $1 - \frac{1}{n_0} < 1$ análogo.

~~$x \neq 1$ é $1 - \frac{1}{n}$, não n. Provar que $x \neq 1 \notin A$ é pelo mesmo princípio de que $x = 1 \in A$. Os dois lados da inequação são sempre verdade. Aqui, um dos dois lados tem de não ser verdade. Para algum n, a inequação composta não vale. Então ou $1 - \frac{1}{n} \geqslant 1$ para algum n, ou $1 \geqslant 1 + \frac{1}{n}$ para algum n.~~

~~Reduz a:~~

$\cancel{1 - \frac{1}{n} \geqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} \geqslant 0 \Rightarrow -n \geqslant 0 \Rightarrow n \leqslant 0}$.

$\cancel{1 \geqslant 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \geqslant n \Rightarrow n < 0}$. ~~Ambos são falsos (mais que suficiente)~~.

$\cancel{1 - \frac{1}{n} \neq 1}$ ~~quando~~ $\cancel{-\frac{1}{n} \neq 0 \Rightarrow -n \neq 0 \Rightarrow n \neq 0}$. ~~Mas n nunca pode ser 0~~.

Hipótese: $b \neq 1 \notin A \Rightarrow$

$b \neq 1 \Rightarrow \neg\left(1 - \frac{1}{n} < b < 1 + \frac{1}{n}\right)$.

$b \neq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \geqslant b \vee b \geqslant 1 + \frac{1}{n}$.

$b < 1 \vee b > 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \geqslant b \vee b \geqslant 1 + \frac{1}{n}$.

$(a \vee b \Rightarrow c \vee d) \Leftrightarrow$

$(a \vee b) \wedge (c \vee d)$ ou

$\neg(a \wedge b) \wedge (c \vee d)$ ou

$\neg(a \wedge b) \wedge \neg(c \vee d).z$

Substituindo,

$((b<1) \vee (b>1)) \wedge \left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ou

$\neg((b<1) \vee (b>1)) \wedge \left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ou

$\neg((b<1) \vee (b>1)) \wedge \neg\left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right) \Leftrightarrow$

$((b<1) \vee (b>1)) \wedge \left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ou

$(\neg(b<1) \wedge \neg(b>1)) \wedge \left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ou

$(\neg(b<1) \wedge \neg(b>1)) \wedge \left(\neg\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \wedge \neg\left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right) \Leftrightarrow$

$((b<1) \vee (b>1)) \wedge \left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ou

$(b \geqslant 1 \wedge b \leqslant 1) \wedge \left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ou

$(b \geqslant 1 \wedge b \leqslant 1) \wedge \left(1-\frac{1}{n} < b \wedge b < 1+\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow$

$((b<1) \vee (b>1)) \wedge \left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ou

$(b=1) \wedge \left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right)$ ou

$(b=1) \wedge \left(1-\frac{1}{n} < b \wedge b < 1+\frac{1}{n}\right)$.

A terceira proposição:

$(b=1) \wedge \left(\left(1-\frac{1}{n} \geqslant b\right) \vee \left(b \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)\right) \Rightarrow$

$\left(1-\frac{1}{n} \geqslant 1\right) \vee \left(1 \geqslant 1+\frac{1}{n}\right)$.

Para $1-\frac{1}{n} \geqslant 1$, n só pode ser igual a 1.

Para $1 \geqslant 1+\frac{1}{n}$, n só pode ser igual a 1.

Para $n=1$, ambas estão corretas, e a proposição é verdadeira, então a hipótese é verdadeira.

Então, $A=\{1\}$.

~~Negando a inequação: $\neg(a<b<c) = \neg(a<b \wedge b<c) = \neg(a<b) \vee \neg(b<c) = a \geqslant b \vee b \geqslant c$.~~

~~Então $1-\frac{1}{n} \geqslant b \vee b \geqslant 1+\frac{1}{n}$.~~

~~Se esta inequação for falsa para algum $b \neq 1$, está desprovado. Se for verdadeira para todo $b \neq 1$, está provado.~~

$\cancel{1-\frac{1}{n} \geqslant b \Rightarrow -\frac{1}{n} \geqslant b-1 \Rightarrow -n \geqslant \frac{1}{b-1} \Rightarrow n \leqslant -\frac{1}{b-1}}$.

$\cancel{b \geqslant 1+\frac{1}{n} \Rightarrow b-1 \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{b-1} \geqslant n \Rightarrow n \leqslant \frac{1}{b-1}}$.

~~$n \leqslant -a \vee n \leqslant a \Rightarrow n \leqslant a$. Então $n \leqslant \frac{1}{b-1}$.~~

~~$b \neq 1 \Rightarrow b<1 \vee b>1$. Então $n \leqslant \frac{1}{}$ $(\ldots)$~~

~~$\neg\left(1-\frac{1}{n}<1\right), \forall n \in \mathbb{N}$ ou $\neg\left(1<1+\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.~~

~~$1-\frac{1}{n} \geqslant 1, \forall n \in \mathbb{N}$ ou $1 \geqslant 1+\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$.~~

~~$n \leqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Falso.~~

~~$n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Falso.~~

~~Para um n_0 não estar na intersecção, basta $1+\frac{1}{n_0} \neq 1$ ou $1-\frac{1}{n_0} \neq 1$.~~

~~Isto ocorre para *todo* n_0 pois para $1+\frac{1}{n_0}$ ser 1 n_0 só pode ser 1, e analogamente para $1-\frac{1}{n_0}$.~~

~~$x_0 = 1-\frac{1}{n} \neq 1$ para $\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow n > 0$ pois $1-\frac{1}{n} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow n > 0$.~~

~~$x_0 = 1+\frac{1}{n} \neq 1$ para $\frac{1}{n} > 0 \Rightarrow n > 0$ pois $1 < 1+\frac{1}{n} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < n \Rightarrow n \geqslant 0$, com $n \neq 0 \Rightarrow n > 0$.~~

~~Então $1 \notin A$ e $A = \{1\}$.~~

$\left(1-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+1\right)$ é uma função:

$f(n) = \left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)$.

$f(n) = \left\{1-\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1+\frac{1}{n}\right\}$.

É uma função que retorna um conjunto. A imagem da função é uma família de conjuntos. (Álgebra de Borel.)

A definição de **cobertura** é de uma família de conjuntos cuja união contém um conjunto.

Se é nos reais, não são vizinhanças de centro 1?

Proposição. *Se um conjunto é intersecção de uma família de conjuntos, aquela família é uma cobertura do conjunto.*

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = \{1\}$.

$\mathcal{C}\{1\} = \mathbb{R} - \{1\}$.

Complemento aberto? O complemento é $\mathbb{R} - \{1\}$. Todo ponto tem vizinhança contida? Sim.

Para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, existe um ε tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Logo, $\mathcal{C}\{1\}$ é aberto e $\{1\}$, fechado.

~~$\{1\}$ não é aberto: existe $\varepsilon = 1$ tal que $(x-\varepsilon, x+e) = (-2, 0) \not\subset \{1\}$.~~

$\{1\}$ não é aberto: não existe $\varepsilon > 0$ tal que $(1-\varepsilon, 1+e) \subset \{1\}$.

O erro aqui é que não basta existir *uma* vizinhança de um ponto contido não-contida no conjunto: *nenhuma* vizinhança do ponto tem de ser contida para o conjunto não ser aberto.

$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) = \{1\}$.

$\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.

$\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$.

$[1,1]$ está contido em A, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{C}A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Como $\mathcal{C}A$ é aberto, pois é união de abertos, o seu complemento, A, é fechado.

A não é aberto pois não existe $\varepsilon > 0$ tal que $(1-\varepsilon, 1+e) \subset A$.

Questão. 2.3. Seja uma função contínua em um ponto a de um conjunto A para os reais. Mostre que o módulo da função também é contínuo em A.

Funções envolvendo módulo. P. 31: “a notação significa que estamos considerando o maior valor entre dois valores dados”.

Definição de continuidade de $y=f(x)$ em um ponto $a\in A$ (p. 80): para todo $x\in A$ com distância até δ para a, a distância entre y_x e y_a é menor que ε, para qualquer ε.

Ou, o aumento infinitesimal no domínio encarreta um aumento também infinitesimal na imagem.

A hipótese é: A função em módulo também. A "função em módulo" significa a **imagem** da função. Uma função que é em parte negativa, em módulo, tem esta parte positiva. Mas, se ela é contínua em um ponto, a "vizinhança" do ponto, seja ela positiva ou negativa, não tem saltos. Essa "inversão" do sinal negativo não cria um salto? Não... pois o ponto já era "emendado", só continua para o outro lado do eixo.

$f(x)=x\Rightarrow|f(x)|=(f(x)=|x|)$? Se sim, a função modular deve ser a versão distância da função.

Se $|f(x)|$ é contínua em a,

$\forall x\in\mathbb{R}>0\colon ||f(a)|-|f(a-x)||<\varepsilon, \forall\varepsilon>0\in\mathbb{R}$.

P. 31. $|a-b|<\varepsilon\Leftrightarrow a\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$.

E é por isso a importância da função modular...

No teorema da continuidade, $|f(a)-f(a-x)|<\varepsilon, \forall x>0, \forall\varepsilon>0$.

Já sabemos (pelo enunciado) que $|f(a)-f(a-x)|<\varepsilon$. Agora, para $|f(x)|$, $||f(a)|-|f(a-x)||<\varepsilon$.

Pela propriedade:

$|x|-|y|\leqslant ||x|-|y||\leqslant|x-y|$.

Pela propriedade

$||x|-|y||\leqslant|x-y|$ e como

$(a\leqslant b\wedge b<c)\Rightarrow a<c$,

como $||f(a)|-|f(a-x)||\leqslant|f(a)-f(a-x)|$ então

$|f(a)-f(a-x)|<\varepsilon\Rightarrow||f(a)|-|f(a-x)||<\varepsilon$.

Na definição original...

$f\colon A\to\mathbb{R}$ é contínua em a quando para todo $\varepsilon>0$ há um $\delta>0$ tal que $x\in A, |x-a|<\delta$ implica $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

$|f|\colon A\to\mathbb{R}$ é contínua em a quando para todo $\varepsilon>0$ há um

$\delta>0$ tal que $x\in A, |x-a|<\delta$ implica $||f(x)|-|f(a)||<\varepsilon$.

Pela propriedade

$||x|-|y||\leqslant|x-y|$ e como

$(a\leqslant b\wedge b<c)\Rightarrow a<c$,

como $||f(x)|-|f(a)||\leqslant|f(x)-f(a)|$ então

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon\Rightarrow||f(x)|-|f(a)||<\varepsilon$.

Questão. 2.2 a. Determine os pontos de fronteira de $A=(0,2)\cap\mathbb{I}$.

~~P. 79: Todo aberto que contém tem intersecção não-vazia com o conjunto e seu complemento.~~

Aula 11, def. 1. Toda vizinhança tem intersecção com o conjunto e seu complemento.

Aberto que contém = vizinhança.

Os reais são os racionais + irracionais. Então, intersecção de um subconjunto dos reais com os irracionais são somente os irracionais neste subconjunto.

Qualquer ponto interior de A não é de fronteira. Então não importam tais irracionais.

Os irracionais estão definidos como o complemento dos racionais nos reais. ~~Então podemos achar os racionais de fronteira e verificar se seus complementares também são de fronteira~~?

Ponto de fronteira equivale a ponto-limite com exceções. Então assumo que no fechado ou no aberto são o supremo/ínfimo.

Devemos primeiro interseccionar A com os irracionais. Depois, pegar os fronteira. Os fronteira serão **os irracionais que toda vizinhança tem intersecção com os irracionais e os racionais**. Estes não serão pontos extremos, pois os conjuntos são "misturados".

Não serão **todos os irracionais**? Por todos terem um "racional vizinho"? Se existir algum irracional com vizinho irracional, não. Se sim, sim. Olhar p. 58.

Os pontos de fronteira de (a, b) são $\{a, b\}$. a e b são também o supremo e ínfimo do conjunto. São também pontos-limite, pois têm vizinhança furada com intersecção.

O problema é o **complemento**. Estou confundindo união com intersecção. Ao interseccionar com $\mathbb{I}$, ficam só os irracionais neste intervalo (aberto). E o complemento se tornam os racionais neste intervalo. Todas as vizinhanças de centro em irracionais contêm racionais, então todos os *irracionais* do intervalo são fronteira. Agora, lembrando que os fronteira não precisam pertencer ao conjunto. Então, $\{0, 2\}$ são fronteira pois toda vizinhança tem intersecção com $(0, 2)$, incluindo seus racionais e irracionais. Então, também, todos os *racionais* do intervalo também são fronteira da intersecção, embora não pertençam a ela.

Então a resposta é $[0, 2]$.

$A = \{x \in \mathbb{I} | 0 < x < 2\}$.

$\mathcal{C}A = \{x \in \mathbb{Q} | 0 < x < 2\}$.

Para todo $x \in A$, para todo $\varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \mathcal{C}A \neq \varnothing$.

Então todo $x \in A$ é ponto de fronteira de A.

Para todo $x \in \mathcal{C}A$, para todo $\varepsilon > 0$, também $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

Então todo $x \in \mathcal{C}A$ é ponto de fronteira de A.

Para $x \in \{0, 2\}$, para todo $\varepsilon > 0$, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$.

Então $\{0, 2\}$ também são pontos de fronteira de A.

Então os pontos de fronteira são $A \cup \mathcal{C}A \cup \{0, 2\} = [0, 2]$.

Questão. 2.2 b. Determine o conjunto S solução de $x^2 - x - 6 > 0$ e determine S'. Escreva na forma de intervalo.

$x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times -6}}{2} = \{3, -2\}$.

$S = \{x \in \mathbb{R} | x < -2 \vee x > 3\}$.

$S' = \{x \in \mathbb{R} | \forall \varepsilon > 0\colon ((x - \varepsilon) \cup (x + \varepsilon)) \cap S \neq \varnothing\} = (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$.

Questão. 2.2 c. Seja $B = \left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}, n \in \mathbb{N}$. Determine $\bar{B}$ e se B é fechado.

Gerador de números (racionais); sequência (como n é natural e o conjunto não é um intervalo).

Pontos de aderência; toda vizinhança (não-furada) intersecciona. Fecho.

> Diferença para ponto-limite é se o centro pertence ou não ao conjunto. Se for uma vizinhança furada, o centro da vizinhança pode não pertencer ao conjunto, sendo o supremo ou ínfimo. Se a vizinhança for não-furada, se o centro da vizinhança não pertencer ao conjunto, haverá vizinhança (a menor) sem intersecção com o conjunto.
>
> Ou seja, pontos de aderência pertencem ao conjunto; pontos-limite, não necessariamente.
>
> Por outro lado, o centro não-furado (ponto de aderência) permite que pontos de um conjunto discreto sejam pontos de aderência. O mesmo **não** ocorre com pontos-limite. Verificar.
>
> De novo... a diferença da vizinhança fechada é que se o centro for não-contido (supremo ou ínfimo) (o conjunto é aberto) há intersecção. Então o ponto-limite inclui o supremo e ínfimo. Se o ponto for não-contido e for o supremo ou ínfimo, não haverá intersecção (certo?).
>
> **Pontos-limite são o supremo e ínfimo + os pontos interiores.**

O limite da sequência é zero.

Para todo $x_1 \in B$, $\forall \varepsilon > 0\colon (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \cap B \neq \varnothing$. Então $x_1 \in \bar{B}$.

Para todo $x_2 \notin B$, $\exists \varepsilon > 0 | (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon) \cap B = \varnothing$. Então $x_2 \notin \bar{B}$.

$\bar{B} = B$, então B é fechado.

$\bar{S}$ é o fecho, que são os pontos de aderência... S' são os pontos de acumulação, que chamo de pontos-limite, que são "toda vizinhança furada intersecciona". O problema pede o fecho, o professor pede o acumulação. Calcular o acumulação e depois comparar o fecho de B com B.

Os pontos-limite de B não são os interiores, pois nenhumas de suas vizinhanças furadas interseccionam B. Então $B' = \{0\}$.

O fecho são os pontos do conjunto + os pontos-limite. Em um conjunto não-discreto, isto só será diferente dos pontos-limite se o conjunto for aberto e os pontos-limite não pertencerem ao conjunto. Em um conjunto discreto, é só ver este exemplo.

O fecho de B é $B \cup \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = B \cup \{0\} = \left\{\frac{1}{n^2}\right\} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N}$.

O conjunto é diferente de seu fecho, $B \neq \bar{B}$, então B não é fechado.

Provas de ser fechado:

1. O complementar ser aberto

    1. O complementar é aberto se for uma união de abertos

2. Sequência (p. 62): o limite da sequência não pertence ao conjunto e toda vizinhança do limite intersecciona tanto o limite quanto a sequência.

3. p. 64: O conjunto é igual ao seu fecho.

Provas de não ser fechado:

1. Sequência (p. 62): o complementar não é aberto, porque nenhuma vizinhança do limite está contida na sequência.

Provas de não ser aberto:

1. Sequência (p. 62): formada por pontos isolados, e nem toda vizinhança não-furada contida.

Questão. 1.2. Seja $A = \{x \in \mathbb{N}: |5 - 6x| \leqslant 9\}$. Expresse formalmente os elementos e investigue a cardinalidade de A. Monte uma bijeção conforme o livro.

$|x| = 2 \Rightarrow$

$x = 2 \vee x = -2$.

$|x| \leqslant 2 \Rightarrow$

$x \leqslant 2 \wedge x \geqslant -2$.

$|5 - 6x| \leqslant 9 \Rightarrow$

$(5 - 6x \leqslant 9) \wedge (5 - 6x \geqslant -9) \Rightarrow$

$(-6x \leqslant 4) \wedge (-6x \geqslant -14) \Rightarrow$

$x \geqslant -\frac{2}{3} \wedge x \leqslant \frac{7}{3}$.

$-\frac{2}{3} = -0.\bar{6}$

$\frac{7}{3} = 2.\bar{3}$

$A = \{1, 2\}$.

A tem cardinalidade 2.

$f: I_2 \to \mathbb{N}$

$1 \to 1$

$2 \to 2$

Um módulo é uma conjunção sobre o inverso do campo (negativo/positivo). De uma inequação é uma conjunção de inequações inversas.

Questão. 1.3. Sabendo que $(a\,b)^{-1} = a^{-1}\,b^{-1}$, mostre que $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$. Utilize as propriedades dos números reais.

$(a b)^{-1} = \frac{1}{a b}$

$a^{-1} b^{-1} = \frac{1}{a} \frac{1}{b} = \frac{11}{a b}$

O campo define:

- Operações (adição e multiplicação)

  As propriedades das operações são:

  - Associatividade: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
  - Comutatividade: $a \circ b = b \circ a$
  - Elemento neutro: operado com x resulta x: 0 (adição) e 1 (multiplicação)
  - Elemento simétrico (adição) ou inverso (multiplicação): operado com x resulta no elemento neutro

- Elemento inverso: outro elemento que forma um par sob uma operação
- Um subconjunto especial, denominado positivo, contendo:
  - Todos os resultados das operações para todos os pares de elementos
  - Todos os inversos sob as duas operações
  - Zero

Conter os resultados das operações é uma definição indutiva, pois os resultados então têm de ter seus resultados quando operados com outros elementos presentes: $a \circ b \in S \Rightarrow a \circ (a \circ b) \in S$. Então, não parece que um campo possa ser finito.

Em um campo, se $b - a$ pertence ao conjunto dos positivos, então $a < b$. Se $a - b$ pertence aos positivos, então $a > b$. (Se a soma de um elemento com o inverso de outro pertence ao subconjunto dos positivos, o primeiro é maior que o segundo, ou o segundo é menor que o primeiro.)

~~Se isto é verdade para todo par de elementos no campo, então o campo é *ordenado*.~~

Dúvidas sobre isto:

- Poderia haver mais de um subconjunto dos positivos em um campo? Provar que não.
- O quê define exatamente o campo ser ordenado? Para quais elementos a afirmação acima deve ser verdade?

$\frac{1}{a} \frac{1}{b} = \frac{11}{a b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{a c}{b d}$. O que isso diz é que multiplicar a e c primeiro produz o mesmo resultado que dividir a por b primeiro. Ou seja, $(a / b)(c / d) = (a c) / (b d)$. Como $x^{-1} = \frac{1}{x}$, então $(a c) / (b d) = (a c)(b d)^{-1} = (a c)(b^{-1} d^{-1}) = (a c)\left(\frac{1}{b} \frac{1}{d}\right)$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$ é o inverso da exponenciação.

Inverso da multiplicação: $x x^{-1} = 1$.

Talvez seja porque a divisão seja o dual da multiplicação, o que quer dizer que $a b = \frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{a}{b^{-1}}$.

Então $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{a}{c^{-1}} / \frac{b}{d^{-1}} = \frac{a}{c^{-1}} \frac{d^{-1}}{b} \ldots$

$a^{-1} b^{-1} = \frac{1}{a} \frac{1}{b}$.

$\frac{a}{b} = a \frac{1}{b}$.

$(a b)^{-1} = \frac{1}{a b}$.

Se $(a b)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$, então $(a b)^1 = a^1 b^1$. Então $\frac{(a c)^1}{(b d)^1} = \frac{a^1 c^1}{b^1 d^1}$.

> $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = (a b^{-1})(c d^{-1})$, apenas usei o inverso multiplicativo. Continuar a igualdade usando associatividade e comutatividade e finalizar usando o dado do enunciado.

Inverso multiplicativo (p. 28): existe a tal que $x a = 1$. a é escrito como x^{-1}.

Em outras palavras, o inverso multiplicativo é o número que multiplicado pelo número resulta em 1. E este número é exatamente, para x, $\frac{1}{x}$ ou x^{-1}.

Então, o prof. está falando $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \left(a \frac{1}{b}\right)\left(c \frac{1}{d}\right)$.

O enunciado é $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\frac{1}{b}$.

$\cancel{\frac{1}{ab} = 1\frac{1}{ab}}$ ~~(elemento neutro da multiplicação)~~

$\cancel{\frac{1}{ab} = (ab)^{-1}}$

$\cancel{(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}}$

$\frac{a}{b}\frac{c}{d} = (ab^{-1})(cd^{-1})$ (inverso multiplicativo)

$=(ac)(b^{-1}d^{-1})$ (associatividade da multiplicação)

$=(ac)(bd)^{-1}$ (pelo enunciado)

$=(ac)\left(\frac{1}{bd}\right)$ (inverso multiplicativo)

$=\frac{ac}{bd}$ (elemento neutro da multiplicação).

Questão. 1.4. Dado $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, onde $X_n = \left(3 - \frac{1}{n}, 4 + \frac{1}{n}\right)$.

Escreva os cinco primeiros intervalos da família.

$X_1 = \left(3 - \frac{1}{1}, 4 + \frac{1}{1}\right) = (2, 5)$.

$X_2 = \left(3 - \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

$X_3 = \left(3 - \frac{1}{3}, 4 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{13}{3}\right)$.

$X_4 = \left(3 - \frac{1}{4}, 4 + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{11}{4}, \frac{17}{4}\right)$.

$X_5 = \left(3 - \frac{1}{5}, 4 + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{14}{5}, \frac{21}{5}\right)$.

Determine B.

$B = X \in X_n | X \subset X_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$.

$\lim_{n\to\infty}\left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4$.

Como $3 \geqslant 3 - \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, e $4 \leqslant 4 + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$, então $[3, 4] \subset \left(3 - \frac{1}{n}, 4 + \frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}$.

$B = [3, 4]$.

Qual o $\sup B$ e $\inf B$?

$\sup B = x_0 \in \mathbb{R} | (x_0 > x, \forall x \in B) \wedge (\forall \varepsilon > 0\colon (x_0 - \varepsilon) \cap B \neq \varnothing) = 4$.

$\inf B = x_0 \in \mathbb{R} | (x_0 < x, \forall x \in B) \wedge (\forall \varepsilon > 0\colon (x_0 + \varepsilon) \cap B \neq \varnothing) = 3$.

Referências

[1] "How can I show a supremum of a set is also its limit point?", resposta de Xander Henderson. Mathematics Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/q/3027126