Fonte: FLEMMING, Diva Marília; WAGNER, Christian. Conjuntos e Elementos da Análise Real. Palhoça: Unisul Virtual, 2015.

Capítulo 1

Seção 1

Axioma. *O sucessor de n é uma função injetiva $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, com imagem para cada número natural $n \in \mathbb{N}$.*

Axioma. *Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Axioma. *Se $1 \in X$ e $X \subset \mathbb{N}$ e $s(x) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$), então $X = \mathbb{N}$.*

Teorema. *Se A é um subconjunto próprio de I_n, não existe bijeção $f: A \to I_n$.*

Corolário. *Se $f: I_m \to X$ e $g: I_n \to X$ são bijeções, então $m = n$.*

Corolário. *Seja X um conjunto finito. Uma aplicação $f: X \to X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.*

Corolário. *Não existe bijeção entre um conjunto finito e uma parte própria.*

Teorema. *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Teorema. *Dada $f: X \to Y$, se Y é finito e f é injetiva, então X é finito.*

Corolário. *Dada $f: X \to Y$, se X é finito e f é sobrejetiva, então Y é finito.*

Corolário. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.*

Proposição. *Se $f: X \to Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é finito ou enumerável.*

Proposição. *Seja X enumerável. Se $f: X \to Y$ é sobrejetiva, então Y é finito ou enumerável.*

Proposição. *O produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.*

Proposição. *Se X e Y são enumeráveis, $X \times Y$ é enumerável.*

Proposição. *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ conjuntos enumeráveis. A união $X = \bigcup X_m$ é enumerável.*

Proposição. *O conjunto dos números reais não é enumerável.*

Seção 2

Proposição. *Seja K um corpo ordenado. São equivalentes:*

1. *O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} \subset K$ não é limitado superiormente;*

2. *Dados* $a, b \in K$, $a > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a \cdot n > b$;

3. *Dado qualquer* $a > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \dfrac{1}{n} < a$.

Proposição. *Num corpo* K, *se* $x \cdot z = y \cdot z$ *e* $z \neq 0$, *então* $x = y$.

Seção 3

Proposição. *Não existe número racional* p *tal que* $p^2 = 2$.

Proposição. *Sejam*

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}; \text{ e}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{Q} \text{ tal que } y > 0 \text{ e } y^2 > 2\}.$$

Não existe $\sup X$ *em* $\mathbb{Q}$ *e não existe* $\inf Y$ *em* $\mathbb{Q}$.

Proposição. $\mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$.

Proposição. $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *é denso em* $\mathbb{R}$.

Proposição. *Seja* $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ *uma sequência decrescente de intervalos fechados e limitados,* $I_n = [a_n, b_n]$. *Então,* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{\}$, *isto é, existe pelo menos um número real* x *tal que* $x \in I_n$, $\forall n$. *Mais precisamente,* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} = [a, b]$, *onde* $a = \sup\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ *e* $b = \inf\{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$.

Capítulo 2

Seção 1

Proposição. *Sejam* A_1, A_2 *conjuntos abertos em* $\mathbb{R}$. *Então,* $A_1 \cap A_2$ *é aberto.*

Seja A_λ, $\lambda \in L$, *uma família de conjuntos abertos em* $\mathbb{R}$. *Então,* $\bigcup\limits_{\lambda \in L} A_\lambda$ *é aberto.*

Teorema. *Todo conjunto aberto de* $\mathbb{R}$ *é uma união disjunta e enumerável de intervalos abertos.*

Proposição. $A \subseteq \mathbb{R}$ *é aberto se, e somente se,* $\operatorname{int} A = A$.

Proposição. *Sejam* F_1, F_2 *fechados; então,* $F_1 \cup F_2$ *é fechado.*

Seja $\{F_\lambda\}$, $\lambda \in L$, *uma família de conjuntos fechados de* $\mathbb{R}$; *então* $\bigcap\limits_{\lambda \in L} F_\lambda$ *é fechado.*

Proposição. *Um ponto* a *é aderente ao conjunto* X *se, e somente se, toda vizinhança de* a *contém um ponto do conjunto* X.

Proposição. *$F \subseteq \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, $F = \bar{F}$.*

Seção 2

Proposição. *Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, $b \in A'$ se, e somente se, toda vizinhança aberta de b contém ao menos um ponto de A diferente de b.*

Proposição. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Então, $\bar{A} = A \cup A'$, isto é, o fecho de A é a união dos pontos de A com os pontos de acumulação de A.*

Teorema. *Todo conjunto infinito e limitado de números reais possui ao menos um ponto de acumulação.*

Seção 3

Proposição. *Seja $K \subset \mathbb{R}$. K é compacto se, e somente se, toda sequência em K possui subsequência convergente para um ponto de K.*

Teorema. *$K \subset \mathbb{R}$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Proposição. *Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto, então $\inf K$ e $\sup K$ pertencem a K.*

Seção 4

Teorema. *Uma função $f: A \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto a se, e somente se, toda sequência de pontos $x_n \in A$ com $\lim x_n = a$ tem $\lim f(x_n) = f(a)$.*

Teorema. *Se f, $g: A \to \mathbb{R}$ são contínuas em $a \in A$, então:*

1. *$f + g$ é contínua em a;*
2. *$f \cdot g$ é contínua em a;*
3. *$\dfrac{f}{g}$ é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.*

Teorema. *Sejam $f: A \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $a \in A$; $g: B \to \mathbb{R}$ contínua no ponto $b = f(a) \in B$. Seja $f(A) \subset B$, de modo que a composta $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ esteja bem definida. Então, $g \circ f$ é contínua no ponto a.*

Proposição. *Se f é uma função contínua em um domínio compacto A, então $f(A)$ é um conjunto compacto.*

Teorema. *Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se A é compacto, f atinge seu máximo e mínimo em A.*

Teorema. *Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) \leqslant L \leqslant f(b)$, então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = L$.*

Capítulo 3

Seção 1

Teorema. *Seja* $f\colon A \to \mathbb{R}$. f *é derivável no ponto* $a \in A \cap A'$ *se e somente se existe um* $c \in \mathbb{R}$ *com* $a + h \in A$. *Neste caso,* $f(a+h) = f(a) + c \cdot h + r(h)$, *onde* $\lim_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$ *e, portanto,* $c = f'(a)$.

Teorema. *Se uma função é derivável em todos os pontos, ela é contínua nestes pontos.*

Teorema. *Sejam* f, $g\colon A \to \mathbb{R}$ *deriváveis em um ponto* $a \in A \cap A'$; *então a função* $f \pm g$ *é derivável no ponto* a *com* $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.

Teorema. *Sejam* f, $g\colon A \to \mathbb{R}$ *deriváveis em um ponto* $a \in A \cap A'$; *então a função* $f \cdot g$ *é derivável no ponto* a *com* $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$.

Teorema. *Sejam* f, $g\colon A \to \mathbb{R}$ *deriváveis em um ponto* $a \in A \cap A'$; *então a função* $\dfrac{f}{g}$, *com* $g(a) \neq 0$, *é derivável no ponto* a *com* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}$.

Teorema. *Sejam* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *e* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *com:*

1. $a \in A \cap A'$ *e* $b \in B \cap B'$;
2. $f(A) \subset B$ *e*
3. $f(a) = b$.

Se f *é derivável no ponto* a *e* g *é derivável no ponto* b, *então* $(g \circ f)\colon A \to \mathbb{R}$ *é derivável no ponto* a *e* $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Teorema. *Se* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função potência* $f(x) = x^r$, *com* r *racional, então* $f'(x) = r \cdot x^{r-1}$.

Para que esta fórmula determine $f'(0)$, r *deve ser um número tal que* x^{r-1} *esteja definida num intervalo aberto contendo* 0.

Seção 2

Teorema. *Seja* $f\colon A \to B$ *uma bijeção com inversa* $g = f^{-1}\colon B \to A$. *Se* f *é derivável no ponto* $a \in A \cap A'$ *e* g *é contínua no ponto* $b = f(a)$, *então* g *é derivável no ponto* b *se e somente se* $f'(a) \neq 0$. *Neste caso,* $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Teorema. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua, com* $f(a) = f(b)$. *Se* f *é derivável em* (a,b), *então existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Teorema. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Se* f *é derivável em* (a,b), *então existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.