Capítulo 1 - Números reais

Seção 1 - Conjuntos numéricos

Analisando os conjuntos numéricos

- Injetiva: Não há elementos no domínio que "apontam" para o mesmo elemento na imagem.
- Sobrejetiva: Não há elementos na imagem sem elementos no domínio (mas pode ser não-injetiva).
- Bijetiva: injetiva e sobrejetiva, não sobra no domínio e não duplica também, um-para-um.

$\subset$: está contido, é um subset. $\supset$: contém, é um superset.

Definição formal dos números naturais em três proposições (Peano).

- A "relação" de n com o sucessor de n ($n + 1 = o$) como uma função $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ denominada $s(n)$.

  A função é injetiva. Ou seja, cada $n + 1$ tem um único o.
- 1 como um único elemento n em $\mathbb{N}$ que não é $n + 1$ de ninguém. (Sua existência.)
- Princípio da indução: se um conjunto X contido nos naturais N contém 1 e contém as imagens $s(n)$ de todos n que contém, então este conjunto será igual aos naturais. Fórmula: $X \subset N, 1 \in X, \forall\, n : n \in X \Rightarrow s(n) \in X$.

Princípio da indução é a definição (novamente) de indução, pela qual se $P(1)$ (propriedade é válida para o elemento) e $P(n)$, então $P(n + 1)$. Usado para provas sobre os naturais pois implica abrangência em todo $n \in \mathbb{N}$.

$\forall\, n : 1 \in X \wedge n \in X \wedge [P(n) \Rightarrow P(n + 1)] \Rightarrow X = \mathbb{N}$.

Adição e multiplicação como duas operações que associam a cada par $(m,\ n)$ um $o = m + n$ ou $o = m \times n$.

$n = 1 \Rightarrow m + n = s(m)$.

$m + s(n) = s(m + n)$. A aplicação de s sobre um argumento de uma soma é a aplicação de s sobre a soma.

A adição é associativa, distributiva (com a soma) e comutativa. A multiplicação é associativa e comutativa.

Princípio da boa ordenação: todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 <= n$ para todo $n \in A$.

Exemplo 1. Demonstrar o princípio da boa ordenação.

Exemplo 2. Usando indução, provar que a soma dos n primeiros números naturais é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Conjuntos finitos

Definição 1.1: Um conjunto X é dito **finito** se é vazio ou se, para algum n, existe uma bijeção $f: I_n \to X$.

Definição 1.2: Quando um conjunto X tem n elementos, dizemos que a **cardinalidade** de X é igual a n. A bijeção $f: I_n \to X$ também é chamada de contagem dos elementos de X.

Exemplo 1. Seja $X = \{x \in \mathbb{R} \mid |5\,x - 3| = 7\}$. Qual a cardinalidade de X?

Exemplo 2. Estabelecer a cardinalidade de $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq 2\,x + 9 \leq 8\}$.

Exemplo 3. $B = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x(x-2)\,(x+3)\,(x+7) = 0\}$ tem cardinalidade 4.

Teorema 1.1. Se A é subconjunto próprio de I_n, não pode existir uma bijeção $f: A \to I_n$.

Corolário 1. Se $f: I_m \to X$ e $g: I_n \to X$ são bijeções então $m = n$.

Corolário 2. Seja X um conjunto finito. $f: X \to X$ é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva.

Corolário 3. Não existe bijeção entre um conjunto finito e uma parte própria.

Teorema 1.2. Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.

Corolário 1. Dada $f: X \to Y$, se Y é finito e f é injetiva então X é finito.

Corolário 2. Dada $f: X \to Y$, se X é finito e f é sobrejetiva então Y é finito.

Corolário 3. Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.

Conjuntos infinitos

Não é finito. Formalmente, quando não é vazio e não existe uma bijeção $f: I_n \to X$

para nenhum $n \in \mathbb{N}$.

Conjuntos enumeráveis

Definição 1.3. Um conjunto X é dito enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \to X$.

Conjuntos não-enumeráveis

Seção 2 - Conjunto dos números reais

Corpos ordenados

Corpo = campo (field). Reais e racionais (naturais e inteiros não).

Supremo e ínfimo

Menor quota superior e maior quota inferior.

Seção 3 - Corpos ordenados completos (números racionais)

Proposições

Definição de corpo ordenado completo

O corpo ordenado completo dos números reais

Princípio dos intervalos encaixados

Capítulo 2 - Topologia da reta e funções contínuas

Seção 1 - Conjuntos abertos e fechados

Definição e exemplos de conjuntos abertos

Vizinhanças e ponto interior de um conjunto

Definição e exemplos de conjuntos fechados

Pontos de aderência e fecho de um conjunto

Seção 2 - Pontos de acumulação e Teorema de Bolzano-Weierstrass

Pontos de acumulação

Teorema de Bolzano - Weierstrass

Pontos isolados

Seção 3 - Conjuntos compactos

Cobertura de um conjunto

Proposições e teoremas

Seção 4 - Funções contínuas

Definição, exemplos e propriedades

Funções contínuas em domínios compactos

Capítulo 3 - Derivadas

Seção 1 - A noção de derivada e as regras operacionais

Definição de derivada

Continuidade e derivada

As regras da soma, produto e quociente

A regra da cadeia

Seção 2 - Teorema sobre derivadas

Teorema da derivada da função inversa

Teorema do valor médio