Exercícios e consequentes desenvolvimentos.

---

p. 46

- Encontre a solução da inequação $\frac{3x+1}{x-3} < 1$.

$\frac{3x+1-(x-3)}{x-3} < 0 \Rightarrow \frac{2x+4}{x-3} < 0$;

In[∘]:=
```
p = (2 x + 4)/(x - 3)
```

Out[∘]= $\frac{4+2x}{-3+x}$

In[∘]:=
```
Reduce[p < 0]
```

Out[∘]= $-2 < x < 3$

Encontrar os pontos. $\frac{2x+4}{x-3} = 0 \Rightarrow 2x+4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$.

Também, $x \neq 3$. Seja que curva for, tem raiz em −2, e não tem domínio em $x = 3$.

(Por isso, não tem imagem em $y = \frac{6+4}{3-3}$... É uma assíntota horizontal.) Poderíamos tirar o limite para descobrir o y.

In[∘]:=
```
Indeterminate
Limit[p, x → 3]
```

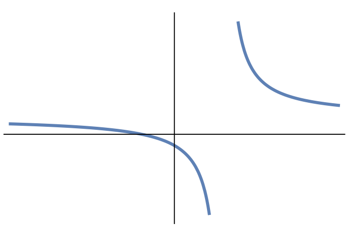
Out[∘]= Indeterminate

Out[∘]= Indeterminate

Não poderíamos, porque é uma assíntota (é infinita). É uma assíntota vertical em $x = 3$. A questão é saber conforme x se diferencia de 3, onde y se estabiliza. Esse é o limite.

Porque sabendo isso, é possível saber se essa (imagem) inclui $y = 0$.

In[∘]:=
```
Plot[p, {x, -10, 10}, PlotTheme → "Minimal", ImageSize → Small]
```

Out[∘]=


Essa é uma função de grau fracional. Qual sua derivada? ~~Parece ser~~ $\cancel{\frac{2}{1}}$.

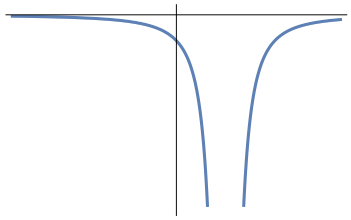
In[∘]:=
```
d = D[p, x]
```

Out[∘]= $\frac{2}{-3+x} - \frac{4+2x}{(-3+x)^2}$

Nem f*dendo.

In[∘]:=
```
Plot[d, {x, -10, 10}, PlotTheme → "Minimal", ImageSize → Small]
```

Out[∘]=



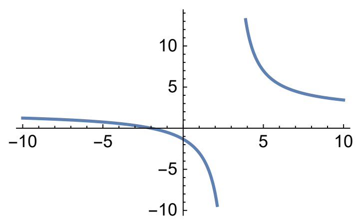
Mas, o limite em y não está envolvido da resposta. A resposta envolve $x = 3$, onde há a assíntota, e $\boldsymbol{x = -2}$. Que é a raiz da equação. O problema é não conhecermos a curva para saber... Poderíamos tomar pontos em volta. É que não sabemos os intervalos de crescimento/decrescimento; um ponto vizinho poderia ser insuficiente. Há de haver uma regra para esse tipo de função com fração de polinômios. Se trata de propriedade $x \div y > 0$ se $(x > 0 \land y > 0) \lor (x < 0 \land y < 0)$.

Inversão do sinal do expoente da variável independente

Para encontrar o limite horizontal do exercício acima.

In[∘]:=
```
Plot[p, {x, -10, 10}, PlotTheme -> "Default", ImageSize → Small]
```

Out[∘]=



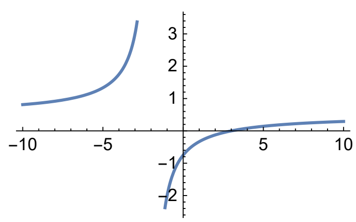
Assíntota de interesse... conforme $x \neq 3$ (assíntota por divisor 0), a quanto y tende. A raiz é $x = -2$.

In[∘]:=
```
pi = p^-1
```

Out[∘]= $\frac{-3 + x}{4 + 2x}$

In[∘]:=
```
Plot[pi, {x, -10, 10}, PlotTheme → "Default", ImageSize → Small]
```

Out[∘]=



−2 era raiz. Agora, é 3. −2 agora é a assíntota, de horizontal para vertical. Mas agora, podemos tirar o limite, conforme x se aproxima de −2, em y? $\frac{-3-2}{4+2.-2} = \frac{-5}{0}$. Não.

Aritmética de limites

É outra forma válida de encontrar os limites “no outro eixo”?

Derivadas são limites

O limite da razão entre Δy e Δx conforme *x* tende a zero.
Há a derivada em um ponto (1 grau menor) e a derivada de mesmo grau (qualquer ponto).

Limites em pontos e limites de funções. Resultados pontos e funções? Dimensionalidade dos tipos de limites.

$f(x) = x^2 + 2.$

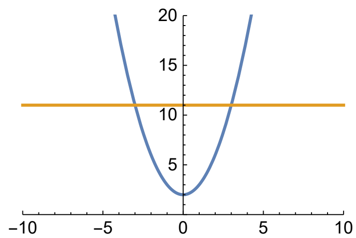
$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11.$

$\lim_{x \to 3} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 3} \frac{f(x+3) - f(3)}{x+3-3} = \frac{(x+3)^2 + 2 - (3^2+2)}{x} = \frac{x^2 + 6x + 9 + 2 - 11}{x} = \frac{x^2 + 6x}{x} = \frac{x(x+6)}{x} = x + 6.$

Estamos , no primeiro caso, tomando limite de uma função em um ponto.
No segundo caso, não deixa de ser a mesma coisa, mas é uma função racional... É uma segunda função que tem a ver com a primeira e com o ponto do limite como argumento. **Cada ponto de limite monta uma função distinta.**
A dúvida é porque um resultou uma função constante e outro uma função que não é quadrática, parece linear racional.

In[ ]:=
```
f = x^2 + 2
```
Out[ ]=
```
2 + x^2
```

In[ ]:=
```
Plot[{f, 11}, {x, -10, 10}, ImageSize → Small, PlotRange → {{-10, 10}, {0, 20}}]
```
Out[ ]=



In[ ]:=
```
Limit[f, x -> 3]
```
Out[ ]=
```
11
```

Anatomia do difference quotient

- Não é uma função composta porque função composta recebe um *x*, passa o resultado para outra função, que devolve o *y*, e essa recebe uma função e devolve outra função.
- Uma interpretação é que é simplesmente a descrição da operação de verificar a mudança na proporção entre *y* (o resultado) e *x* (o parâmetro). Entre dois pontos, mas no seguinte esquema: o primeiro ponto é definido. Pela lei da função, temos o resultado. **O segundo ponto é uma variável, mas pela lei da função, também temos o resultado, também em termos de variável.** A função apenas é a subtração e divisão (difference quotient) prontos em termos destes dois "itens", que são os parâmetros da função difference quotient.

Portanto, o difference quotient é uma função com dois parâmetros:

Uma função; e um **ponto definido** (basta um *x* mas poderia ser um *y* também).

$\mathrm{dcf}(f, x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$. Quando essa função é executada, como um *x* é informado, ela retorna uma função com uma variável dependente (x_1). Por exemplo: sendo $f = x^2,\ x = 3,\ \mathrm{dcf}(f, x) = \frac{x_1{}^2-9}{x_1-3}$. O **limite** parece ser apenas para cobrir funções descontínuas... Vamos executar e plotar este caso, com $x_1 = 0$ que tem y definido.

$\mathrm{dcf}(f, 0) = \frac{-9}{-3} = 3$. Isso é a razão da diferença entre y_1 e y_0 e x_1 e x_0 em $x_0 = 3$, e como $x_1 = 0$, isso é $\frac{y}{x}$ neste ponto. *(Está correto: $f(3) = 9$.)*

Isso é o difference quotient. Vamos testar só mais um ponto $\neq 0$. $\mathrm{dcf}(f, 4) = \frac{16-9}{4-3} = \frac{7}{1} = 7$. $\frac{f(4)}{4} = \frac{16}{4} = 4$. Não bateu. Isso é a razão em x_1. Isso deveria ser a razão da diferença em $x_0 = 3$, $x_1 = 4$ (ou $x_1 = 7$?). Bem, y em 3 é 9, e y em 4 é 16. $\frac{16-9}{4-3} = 7$. Correto.

Mais um ponto. $\mathrm{dcf}(f, 14) = \frac{144-9}{14-3} = \frac{135}{11} = 12.2727$. y em 14 é 144. $\frac{144-9}{14-3} = \frac{135}{11}$. Bateu. Plotar estas soluções para conferir.

Na verdade, dcf está fornecendo exatamente a mesma "conta" que tomar y nos dois pontos e fazer a razão manualmente $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$.

dcf é uma simplificação algébrica da fórmula de representar o y_1 na forma do enunciado da função e calcular e subtrair o y_0, e dividir pelo x_1 menos o x_0 informado. A **"parte dinâmica"** não é o y_1; é o y_0, que é calculado no momento da construção da função (e é o que muda para cada x_0).

Então o dcf olha o y_0 para o x_0 e isso permite comparar com outros y_1 ao longo da função para calcular a taxa de mudança na razão — e o limite parece ser porque y_0 *pode não estar definido*.

dcf não calcula a razão em um ponto — somente pré-calcula um y_0 e uma função razão em um x_0.

Animar difference quotient com $x_1 \geq 0$ e x_0 dinâmicos.

- Por essa característica de deixar a "fórmula pronta" para um x, o difference quotient é uma *fórmula*, não um *conceito*. Calcular o difference quotient de funções de cada maior grau em um ponto é gradualmente mais trabalhoso, e calcular uma vez para qualquer x_1 economiza isso. Talvez por isso também as **regras de derivação**; poderiam vir de uma busca por uma abreviação destes trabalhos, mas ambos não são conceitos.
- Como o DQ é sempre dividido por x_1, a parte "interessante", que "muda" com a função é o numerador, $f(x_1) - f(x)$, que é o "diferencial" ou dx.
- Na verdade temos dois "tempos" no EQ: execução para a função e x_0, e execução para x_1, ou "construção" e "execução". Na construção, é montado o numerador (diferencial), com base em f e y_0, que é uma função em função de x. Na execução, é encontrado o y para esse x.
- O mesmo x_1 resultado na construção será substituído como x na execução; por isso, o y da execução não é denominado y_1; y_1 ainda era o valor (algébrico) de f encontrado na construção para um x_1 também algébrico; y agora é o valor (numérico) para a execução da função que inclui este y_1 algébrico.
  Demonstração: para $f(x) = 3x^2$ e $x_0 = 4$, o diferencial
  $D = f(x_0 + x_1) - f(x_0) =$. O "segundo" $y1$
  $$f(4 + x_1) - f(4) = 3\,(4 + x_1)^2 - 48 = 3\left(16 + 8\,x_1 + x_1{}^2\right) - 48 = 3\,x_1{}^2 + 24\,x_1$$

agora será a execução desta função... Para desambiguar com o y_1 anterior, poderíamos chamar os x_1 de x, mas o x_1 ainda é exatamente a mesma variável que da construção... Então perderíamos sentido; o correto seria ser uma função em $y = f(x_1)$. E a razão $\text{DQ} = \frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{3x_1^2+24x_1}{x_1} = 3x_1 + 24$.

Então em $x_1 = 11$, DQ (que quer dizer a razão entre a variação em y e em x) $= 55$. Tomando $y = 363$, $\Delta y = 363 - 48 = 315$ e $\Delta x = 7$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 45$. **Não bateu.** Não bateu porque $x_0 \neq 0$? (O difference quotient vale para $x_0 \neq 0$?) Sim, deveria valer.

Para $f(x) = 3x^2$ e $x_0 = 0$, $\text{DQ} = \frac{f(x_1)-f(0)}{x_1} = \frac{3x^2}{x_1} = 3x_1$. Em $x_1 = 9$, $\text{DQ} = 27$.
$y_1 = 243$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{243}{9} = 27$. **Bateu.** Mas ainda desconfiado...

As duas derivadas

In[∘]:=
```
48^2
363-48
315/7
243/9
147/7
```

Out[∘]= 2304

Out[∘]= 315

Out[∘]= 45

Out[∘]= 27

Out[∘]= 21

Calcular alguns DQs de funções de graus maiores.

Diminuição do grau

É evidente que $\frac{y}{x}$ perde um grau porque divide uma função de x por x. Então a **diminuição de grau da derivada é por ser uma divisão por linha.** *(Continuado no doc específico.)*

Computação do difference quotient (not working).

In[∘]:=
```
fdq = Function[{fun, x0, x1}, (fun[x0 + x1] - fun[x0]) / (x0 + x1 - x0)]
```

Out[∘]= $\text{Function}\left[\{\text{fun}, \text{x0}, \text{x1}\}, \frac{\text{fun}[\text{x0}+\text{x1}] - \text{fun}[\text{x0}]}{\text{x0}+\text{x1}-\text{x0}}\right]$

In[∘]:=
```
fdq[x, 3, x]
```

Out[∘]= $\frac{-x[3] + x[3+x]}{x}$

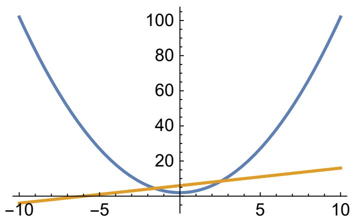
In[◦]:= `fdq[f, 3, x]`

Out[◦]= $\frac{-\left(2+x^2\right)[3]+\left(2+x^2\right)[3+x]}{x}$

In[◦]:= `fdq2 = x + 6`

Out[◦]= $6+x$

In[◦]:= `Plot[{f, fdq2}, {x, -10, 10}, ImageSize → Small]`

Out[◦]=


Na verdade, preciso tender isso a zero, não a 3. E também... o limite constante é ponto, não reta.

(Observando que a razão —difference quotient [Silverman]—implica uma aritmética, mas neste caso, de execuções de funções.)

A aritmética da função difference quotient explica a redução de grau da derivada. A difference quotient é uma função que "tira um grau" de uma função. É uma função composta? Com como parâmetro uma função? Necessariamente com denominador de um grau a menos que o numerador. Portanto um tipo de objeto específico.

Limites são relações

Limites são relações entre valores em cada eixo/dimensão.
Enquanto um valor tende a um *m* finito ou infinito, outro valor tende a um *n* finito ou infinito.
Podem haver então 4 combinações de tendências, finito com finito, finito com infinito, infinito com finito, infinito com infinito. (?)
A questão é que as proporções das mudanças entres os valores dependentes são diferentes, mas é garantido que atinjam os limites simultaneamente.

AD2

- Dada $f(x) = \frac{1}{x+1}$:
  - Calcule $\lim_{x \to -1^+} f(x),\ \lim_{x \to -1} f(x),\ \lim_{x \to +\infty} f(x),\ \lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Racional com assíntota em $x = -1$. Justamente está pedindo o y (isso é computar o limite - é no outro eixo). Agora, o que tem a ver a função difference quotient com isso?

A não ser que seja tomando os pontos... $f(-3) = -0.5$, $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0.5$. O limite tem de ser infinito superior mesmo. Vindo da esquerda, é $-\infty$ (mas não foi perguntado). O limite central não existe.

Agora, o limite conforme x tende a infinito. **Esse** parece ser o do difference quotient.
Porque o que é o difference quotient? É tomar o grau de tendência em relação a um ponto fixo, de qualquer outro ponto. (Isso é feito usando o enunciado da função...)

O que está confundindo é que y tende ao infinito em certo x, mas também a um finito em outro x. E (neste caso) y tende a um infinito em um x finito, e tende a um finito em um x infinito. (Única combinação possível?) Agora, para tomar a quanto *y* tende em $x = \infty$, não é possível...

O lance é que no *x* finito, eu ainda tomei $y = \infty$ por intuição... e não por fórmula. Que é o que o livro (Unisul) começa ensinando: tabelar e plotar e visualizar isto. Aí, ele segue ditando “propriedades” dos limites para **não uso** do teorema formal dos limites. (Mas seria possível resolver pelo teorema formal?)