Quatérnios

Extraído de: Nogueira, Martins, Brenzikofer, Modelos Matemáticos nas Ciências Não Exatas, Blucher, 2008.

Definição e propriedades básicas

Um quatérnio é uma quádrupla de números reais, ou seja, é um elemento do $\mathbb{R}^4$ e, portanto, pode ser escrito como

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3),$$

no qual q_0, q_1, q_2, q_3 são números reais chamados *componentes* do quatérnio.

Outra forma de representar um quatérnio é entendê-lo como sendo composto por uma *parte escalar* ($q_0 \in \mathbb{R}$) e outra *parte vetorial* ($\mathbf{q} = \left(q_1, q_2, q_3\right) \in \mathbb{R}^3$). Nesta representação, o quatérnio é dado por

$$q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k},$$

onde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ satisfazem as propriedades de regras de multiplicação não-comutativas

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \\ &\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \mathbf{ji} = -\mathbf{k} \\ &\mathbf{jk} = \mathbf{i}, \mathbf{kj} = -\mathbf{i} \\ &\mathbf{ki} = \mathbf{j}, \mathbf{ik} = -\mathbf{j} \end{aligned} \tag{1}$$

O conjunto dos quatérnios pode ser munido com duas operações: adição e multiplicação.

Adição de quatérnios

A adição de dois quatérnios é um novo quatérnio obtido da soma das partes escalares e vetoriais, respectivamente, de cada quatérnio. Desta forma, a soma dos quatérnios

$$p = p_0 + \mathbf{p} = p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$$

$$q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$$

será o quatérnio

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)\mathbf{i} + (p_2 + q_2)\mathbf{j} + (p_3 + q_3)\mathbf{k}.$$

A adição de quatérnios assim definida satisfaz as propriedades comutativa ($p + q = q + p$) e associativa ($p + \left(q + r\right) = \left(p + q\right) + r$).

Multiplicação de quatérnios

A multiplicação de dois quatérnios é definida de modo que as relações entre $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ apresentadas em (1) sejam satisfeitas. Desenvolvendo-se a multiplicação, obtém-se:

$$\begin{aligned} &pq \\ &= (p_0 + p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k})(q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}) \\ &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) \\ &+ (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)\mathbf{i} \\ &+ (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)\mathbf{j} \\ &+ (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Ou, usando-se uma notação condensada,

$$pq = p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

na qual os símbolos $\cdot$ e $\times$ representam, respectivamente, as operações do produto escalar e do produto vetorial em $\mathbb{R}^3$.

A multiplicação de quatérnios resulta em um quatérnio e é distributiva em relação à adição ($p(q+r) = pq + pr$) e satisfaz a propriedade associativa $\left(p(qr) = (pq)r\right)$, mas não a comutativa ($pq \neq qp$).

Conjugado, norma e inverso de um quatérnio

O conjugado de um quatérnio $q = q_0 + \mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$, denotado por $q*$, é dado por

$$q* = q_0 - \mathbf{q} = q_0 - q_1\mathbf{i} - q_2\mathbf{j} - q_3\mathbf{k}$$

e a norma, que fornece uma noção do tamanho do quatérnio, escrita como $|q|$, é o número positivo definido por

$$|q| = \sqrt{qq*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Quando $|q| = 1$, o quatérnio q recebe o nome de unitário e, geometricamente, pertence à esfera de raio 1 no $\mathbb{R}^4$. É importante notar que **a um quatérnio unitário pode-se atribuir um ângulo**, pois é possível expressar todo quatérnio q com norma 1 como

$$q = q_0 + \mathbf{q} = cos(\theta + \mathbf{u}sen(\theta)),$$

em que $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $u \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário na direção do vetor $\mathbf{q}$.

Lançando-se mão dos conceitos de conjugado e norma de um quatérnio, é estabelecida uma fórmula para o seu inverso multiplicativo; designado por q^{-1}, satisfaz por definição as equações $q^{-1}q = 1$ e $qq^{-1} = 1$ e, então, é dado por

$$q^{-1} = \frac{q*}{|q|}.$$

Veja que se q é unitário, o inverso é igual a seu conjugado $q*$.

Desta forma, os quatérnios estão inseridos em um ambiente em que é possível realizar as quatro operações básicas conhecidas: adição, subtração, multiplicação e divisão (por elementos não nulos), sendo a multiplicação não comutativa.

Quatérnios e rotações

Quatérnios podem ser usados para representar rotações no espaço tridimensional. Para isso, é necessário obter um operador, definido por meio dos quatérnios, que manipule adequadamente vetores do $\mathbb{R}^3$, ou seja:

- O resultado da ação deste operador sobre um vetor do $\mathbb{R}^3$ deve ser um vetor do $\mathbb{R}^3$
- Deve ser possível associar um ângulo a este operador

Tal operador, aqui chamado de operador quatérnio de rotação, designado como L_q, é dado por:

$$L_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$L_q(\mathbf{v}) = q\mathbf{v}q* .$$

A expressão $q\mathbf{v}q*$ representa produto entre quatérnios, no qual:

- q é quatérnio unitário
- $q*$ é conjugado de q
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ é um quatérnio com parte escalar zero (quatérnio puro)

A ação do operações L_q sobre um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ pode ser interpretada como rotação de um ângulo 2θ tendo $\mathbf{q}$ (parte vetorial de q) como eixo de rotação. Em particular, dado um quatérnio unitário $q = q_0 + \mathbf{q}$, a rotação representada por este quatérnio tem ângulo de rotação θ_{rot} e vetor unitário na direção do eixo de rotação eixo_{rot} dados por

$$\theta_{rot} = 2cos^{-1}(q_0)$$

$$\text{eixo}_{rot} = \frac{\mathbf{q}}{|q|}.$$

Assim, representando-se a rotação por um quatérnio, obtém-se o vetor que define o eixo de rotação e um ângulo de rotação em torno deste eixo.

Relação com outras representações

Na biomecânica, matrizes de rotação e ângulos de Euler são os métodos clássicos para estudar rotações. Estas abordagens devem estar relacionadas algebricamente e pode ser útil relatar a notação dos quatérnios com as outras possibilidades.

Por exemplo, a patir de uma matriz de rotação é possível obter o quatérnio (unitário) que representa a mesma rotação, e vice-versa.

Conversão matriz de rotação - quatérnio

Quando a um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ aplica-se a uma matriz de rotação M, tem-se como resultado um novo vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ que, geometricamente, é o resultante da rotação do vetor por um ângulo em torno de um eixo. A mesma rotação pode ser obtida por meio da teoria dos quatérnios aplicando-se ao vetor o operador quatérnio de rotação L_q. Escreve-se, respectivamente,

$$\mathbf{w} = M\mathbf{v}$$

$$\mathbf{w} = L_q\mathbf{V}.$$

Dessa forma, a conexão entre uma matriz de rotação M e um quatérnio (unitário) q, ambos descrevendo a mesma rotação, é obtida da equação

$$M\mathbf{v} = q\mathbf{v}q*,$$

que pode ser escrita na forma

$$M\mathbf{v} = (2q_0^2 - 1)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v})$$

e, resolvida, leva à igualdade entre matrizes

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2q_0q_0 - 1 + 2q_1q_1 & 2q_1q_2 + 0 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 0 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 0 + 2q_0q_3 & 2q_0q_0 - 1 + 2q_2q_2 & 2q_2q_3 + 0 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 0 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 0 + 2q_0q_1 & 2q_0q_0 - 1 + 2q_3q_3 \end{pmatrix}.$$

As componentes do quatérnio q, em termos dos elementos da matriz de rotação M, são:

$$q_0 = \frac{\sqrt{m_{11} + m_{22} + m_{33} + 1}}{2}$$

$$q_1 = \frac{m_{32} - m_{23}}{4q_0}$$

$$q_2 = \frac{m_{13} - m_{31}}{4q_0}$$

$$q_3 = \frac{m_{21} - m_{12}}{4q_0}.$$

Para obter a matriz de rotação a partir de um quatérnio unitário, basta construir a matriz M, cujos elementos são dados em termos das componentes do quatérnio pela igualdade entre matrizes acima.

Conversão ângulos de Euler - quatérnio

Existem doze sequências possíveis para a representação de uma rotação no espaço tridimensional utilizando os ângulos de Euler. Na sequência *aeroespacial*, roda-se primeiramente sobre o eixo Z, depois sobre o eixo Y' (já rodado inicialmente) e, finalmente, sobre o eixo X'' (também já rodado nas duas operações anteriores). A partir de duas bases ortonomais definidas, obtêm-se os ângulos ϕ, θ e ψ. Por intermédio das equações abaixo, faz-se a conversão dos ângulos de Euler para os quatérnios

$$
\begin{aligned}
q_0 &= cos_2\psi \times cos_2\phi \times cos_2\theta + sen_2\psi \times sen_2\phi \times sen_2\theta \\
q_1 &= sen_2\psi \times cos_2\phi \times cos_2\theta + cos_2\psi \times sen_2\phi \times sen_2\theta \\
q_2 &= sen_2\psi \times cos_2\phi \times sen_2\theta + cos_2\psi \times sen_2\phi \times cos_2\theta \\
q_3 &= cos_2\psi \times cos_2\phi \times sen_2\theta + sen_2\psi \times sen_2\phi \times cos_2\theta,
\end{aligned}
$$

sendo:

- Ângulo de rotação $\theta_{rot} = 2cos^{-1}q_0 \frac{180}{\pi}$
- Latitude $\mathrm{lat} = tan^{-1} \frac{q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} \frac{180}{\pi}$
- Longitude $\mathrm{lon} = tan^{-1} \frac{q_2}{q_1} \frac{180}{\pi}$