DCo Departamento de Computação

Programação Competitiva unesp

Programação Dinâmica
Parte I

Laboratório de Programação Competitiva I

Pedro Henrique Paiola

Rene Pegoraro

Wilson M Yonezawa

Origem

- Introduzido por Richard Bellman da década de 50, em um projeto militar na RAND Corporation.
- O termo foi utilizado para encobrir o propósito do projeto, pois o Secretário de Defesa da época abominava pesquisa matemática.

Departamento de Computação

Programação Competitiva unesp

Origem

"A década de 1950 não foi boa para a pesquisa em matemática. Tivemos um cavalheiro muito interessante em Washington chamado Wilson. Ele foi secretário de Defesa, e realmente tinha um **medo patológico e ódio da palavra 'pesquisa'**. Não estou usando o termo levemente; eu estou usando-o precisamente. Seu rosto ficava vermelho, e ele ficava violento se as pessoas usassem o termo 'pesquisa' em sua presença. **Você pode imaginar como ele se sentia então, sobre o termo 'matemática'**." (Richard Bellman)

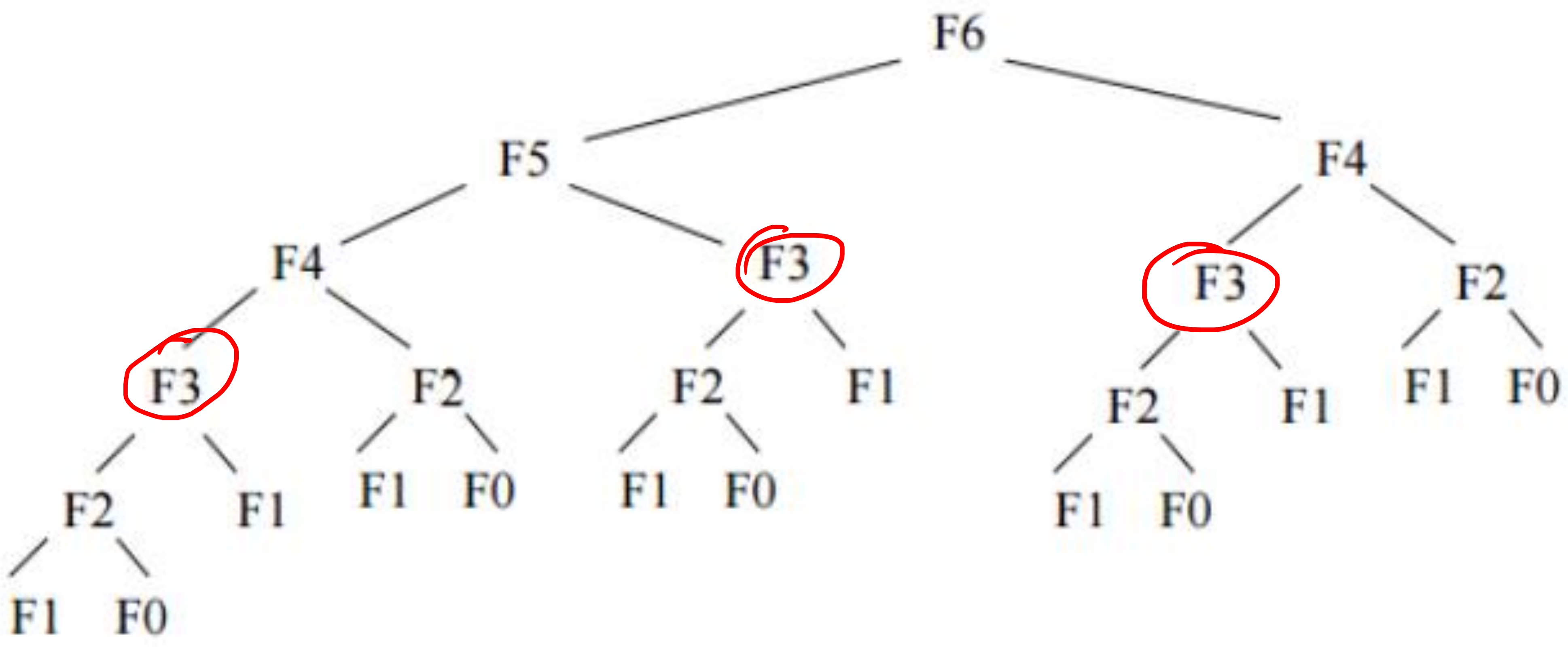
Programação Dinâmica

- Tomemos como exemplo um algoritmo recursivo para solucionar o problema de encontrar o i-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
int fib(int i) {
    if (i == 0 || i == 1)
        return 1;
    return fib(i-1) + fib(i-2);
}
```

Programação Dinâmica

- fib(6)



Programação Dinâmica

- “Quem não se lembra do passado é condenado a repeti-lo”
- Em algoritmos que usam a estratégia da divisão e conquista é comum haver a repetição de subproblemas (*overlapping subproblems*), como exemplificado no algoritmo para calcular termos da sequência de Fibonacci.
- Isso pode acabar gerando muito recálculo.
- A PD vem para tentar resolver este problema.

Programação Dinâmica

- A ideia básica da Programação Dinâmica é armazenar a solução dos subproblemas para serem utilizados no futuro.
- Isso pode ser feito por duas abordagens:
    - Top Down (Memoization)
    - Bottom Up (Tabulation)
- É importante ressaltar: para que esse paradigma possa ser aplicado, é preciso que o problema tenha uma estrutura recursiva, a solução de toda instância do problema deve “conter” soluções de subinstâncias dessa instância.

Memoization (Top Down)

- Do geral para o específico, de cima para baixo.
  - Normalmente essa abordagem é a mais simples de se aplicar, pois ainda faz o uso de algoritmos recursivos.
  - Visita apenas os estados requisitados.
- Método:
  - O problema é dividido em subproblemas.
  - Cada subproblema é resolvido recursivamente.
  - Quando um subproblema é resolvido, o resultado é armazenado para possíveis utilizações no futuro (*memoization*).

Memoization (Top Down)

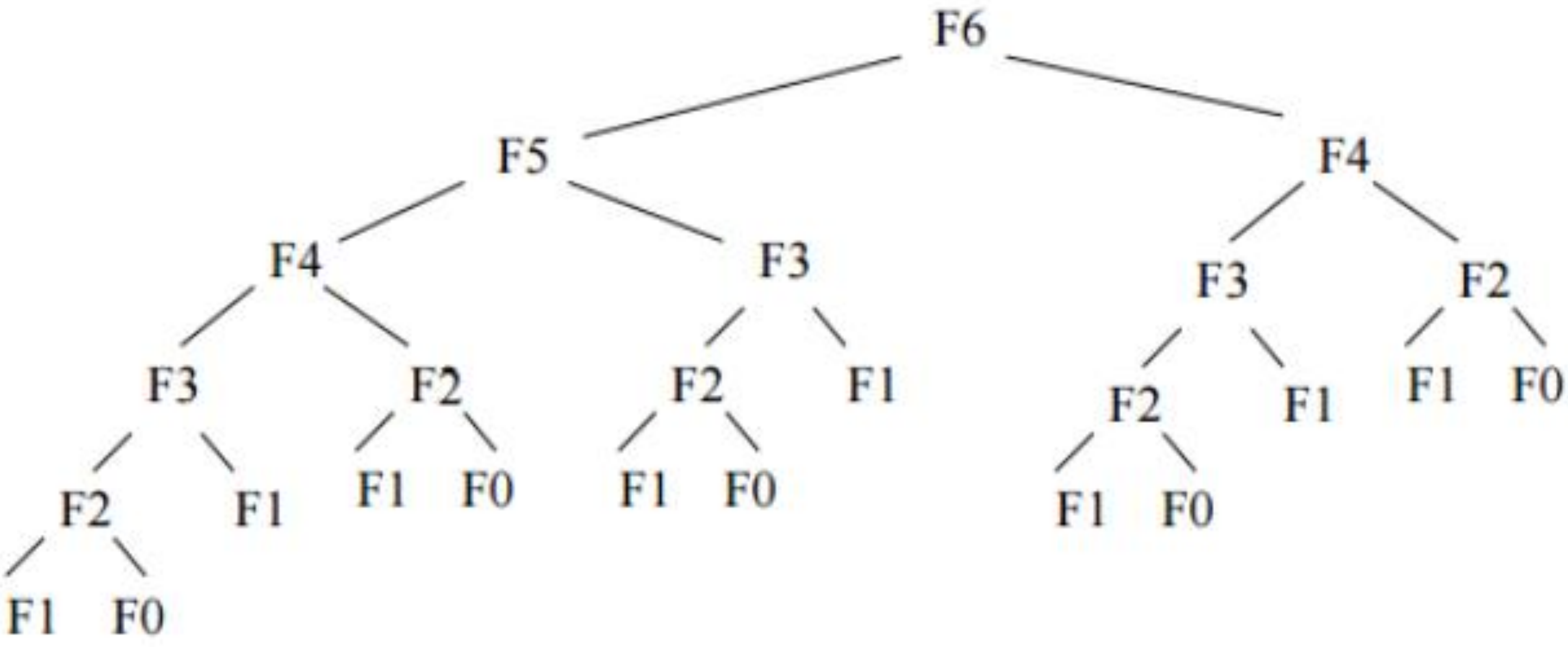
- Fibonacci

```
int memo[] = {1, 1, -1, -1, -1, -1, …} //-1 = não calculado

int fib(int i){
    if (memo[i] == -1)
        memo[i] = fib(i-1) + fib(i-2);
    return memo[i];
}
```

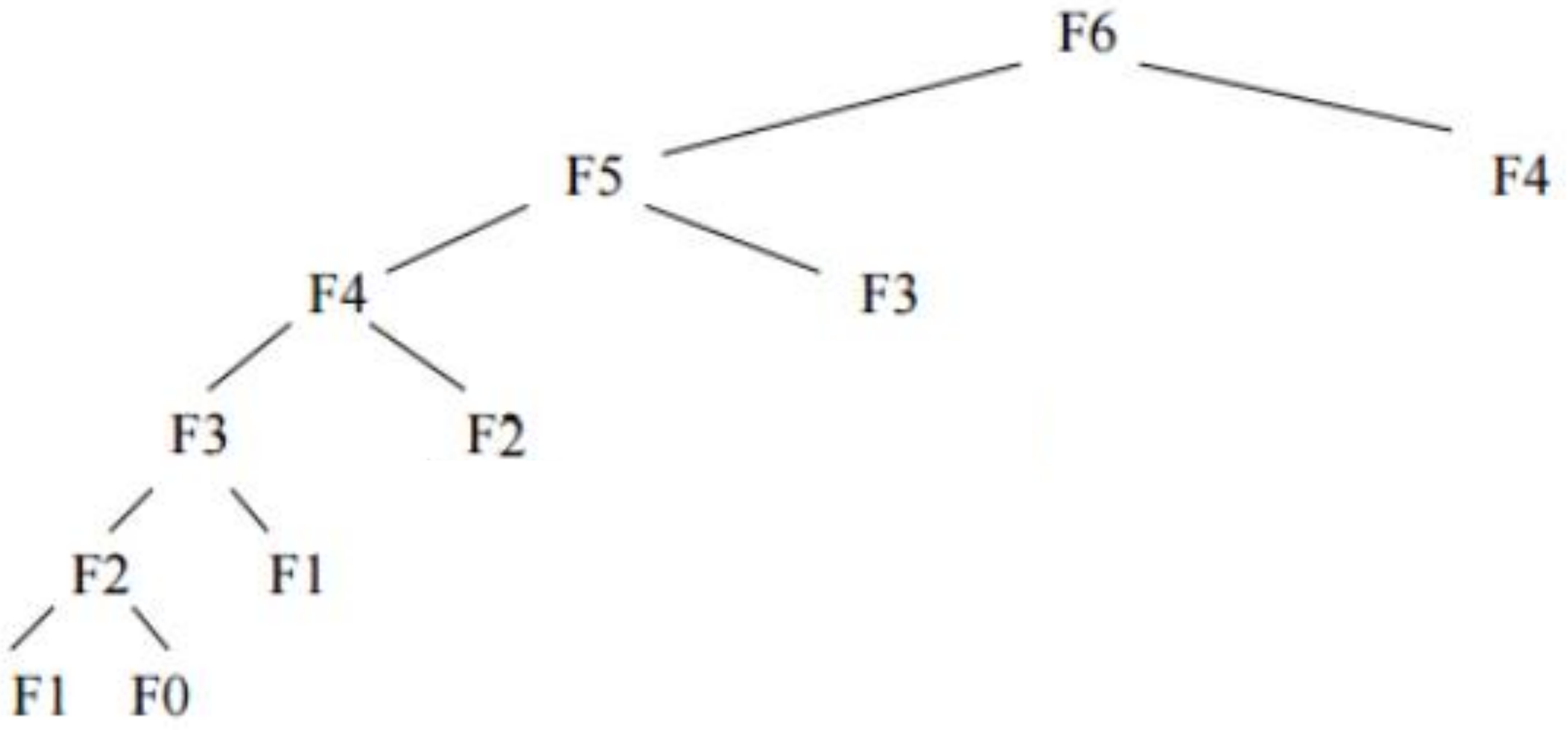
Memoization (Top Down)

- Fibonacci



Memoization (Top Down)

- Fibonacci



Tabulation (Bottom Up)

- Do específico para o geral, de baixo para cima.
  - Visita todos os estados.
- Método:
  - O problema é dividido em subproblemas.
  - Cada subproblema é resolvido, se iniciando pelos que são base para a solução dos seguintes (de forma geral, isso é feito iterativamente).
  - Quando um subproblema é resolvido, o resultado é armazenado para resolver subproblemas futuros, até alcançar o problema original.

Tabulation (Bottom Up)

- Fibonacci

```
int memo[MAXN];

void preprocess(int n){
    memo[0] = memo[1] = 1;
    for(int i = 2; i < n; i++)
        memo[i] = memo[i-1] + memo[i-2];
}

int fib(int i){
    return memo[i];
}
```

Propriedades necessárias

- **Subestrutura ótima:**
  - A solução ótima do problema é composta pela solução ótima de partes menores e mais simples do problema.
- Exemplo:
  - fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)

- Lembrando que, nem sempre é fácil ou intuitivo ver como as soluções dos subproblemas devem ser combinadas para obter a solução do problema original.
  - Exemplo: par de pontos de menor distância

Propriedades necessárias

- **Sobreposição de subproblemas:**
  - É necessário haver a repetição de subproblemas, do contrário, não faz muito sentido armazenar a solução de um subproblema que nunca mais será necessária
- Exemplos:
  - fib(5) = fib(4) + fib(3)
    - fib(4) = fib(3) + fib(2)
      - ...
    - fib(3) = fib(2) + fib(1)
      - ...
  - O problema do par de pontos mais próximos, apesar de apresentar subestrutura ótima, não apresenta sobreposição de subproblemas.

PD x Outros paradigmas

- Algoritmo Guloso
  - Melhor solução local
- *Backtracking*
  - Busca exaustiva
  - Complexidade fatorial/exponencial
- Programação Dinâmica
  - Melhor solução global/solução ótima
  - Busca exaustiva “inteligente”
  - Evita recalcular problemas que já ocorreram
  - Complexidade polinomial

Estratégia geral

- A ideia básica da Programação Dinâmica é simples, o desafio é aplicar isso em diferentes problemas.
- Não existe uma “receita de bolo” para fazer isso, mas existem dicas e estratégias.
- Em especial, temos que nos focam em encontrar padrões de recorrência no nosso problema
- Usos convencionais:
  - Encontrar uma solução ótima
  - Contar o número de soluções possíveis

Estratégia geral

1. Definir os subproblemas
2. Escrever a recorrência que relaciona os subproblemas
3. Reconhecer e solucionar os casos base

- Na próxima aula, vamos tentar detalhar um pouco mais essa estratégia, mas por ora isso é suficiente para analisarmos alguns problemas clássicos.

Estratégia geral

- Aplicando à Sequência de Fibonacci
  1. Definir os subproblemas
     - **fib(i)** -> subproblemas: **fib(i-1)** e **fib(i-2)**
  2. Escrever a recorrência que relaciona os subproblemas
     - **fib(i) = fib(i-1) + fib(i-2)**
  3. Reconhecer e solucionar os casos base
     - **fib(0) = 1** e **fib(1) = 1**

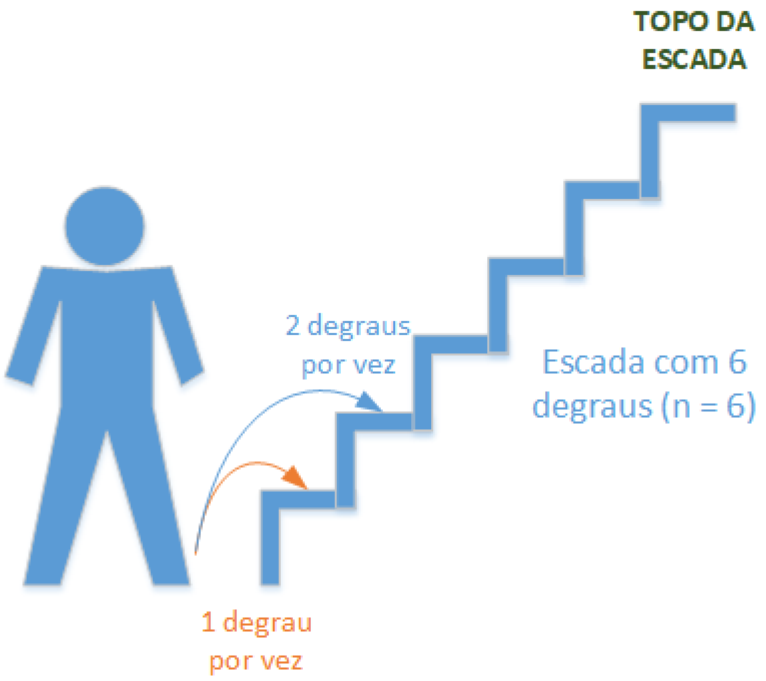
$$fib(i) = \begin{cases} 1, & i = 0 \ ou \ i = 1 \\ fib(i-1) + fib(i-2), & i > 1 \end{cases}$$

Estratégia geral

- Dicas do Thiago Alexandre de como estudar programação dinâmica:
  - Decorar algoritmos não adianta, entenda a lógica e as diferentes técnicas;
  - Estudar, entender e treinar problemas recursivos;
  - Estudar, entender e treinar problemas clássicos de PD;
  - Resolva problemas e compare com outras soluções;
  - O que outras soluções têm de melhor ou pior?

Problema da Escada

- Quantas formas há de subir uma escada de n degraus, sendo que em cada passo pode-se subir 1 ou 2 degraus por vez?



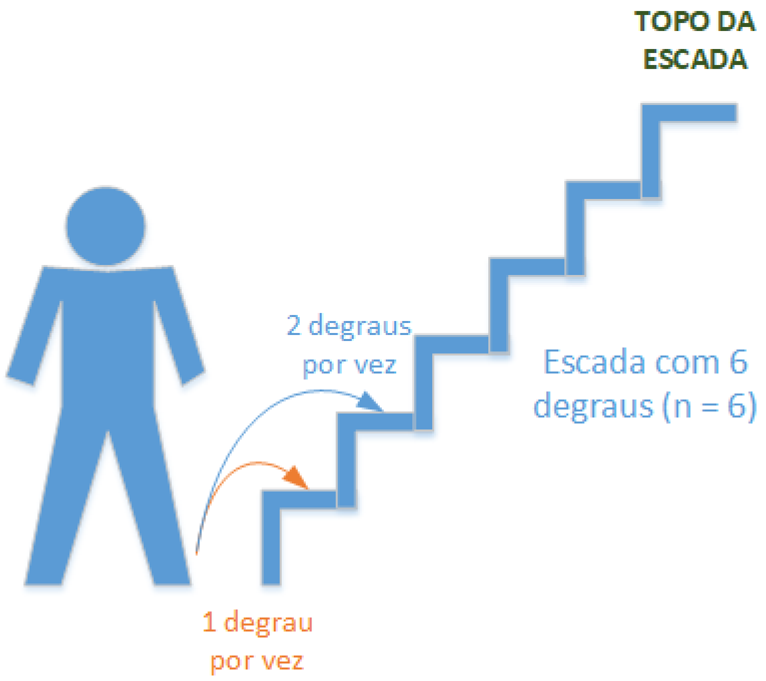
Problema da Escada

- Quantas formas há de subir uma escada de n degraus, sendo que em cada passo pode-se subir 1 ou 2 degraus por vez?
- Exemplos de possibilidades para $n = 6$:
  - 1, 1, 1, 1, 1, 1
  - 2, 1, 1, 1, 1
  - 2, 2, 2
  - 2, 1, 1, 2
  - 1, 1, 1, 1, 2

- Quantas formas há de subir uma escada de n degraus, sendo que em cada passo pode-se subir 1 ou 2 degraus por vez?
- Exemplos de possibilidades para $n = 6$:
  - 1, 1, 1, 1, 1, 1
  - 2, 1, 1, 1, 1
  - 2, 2, 2
  - 2, 1, 1, 2
  - 1, 1, 1, 1, 2

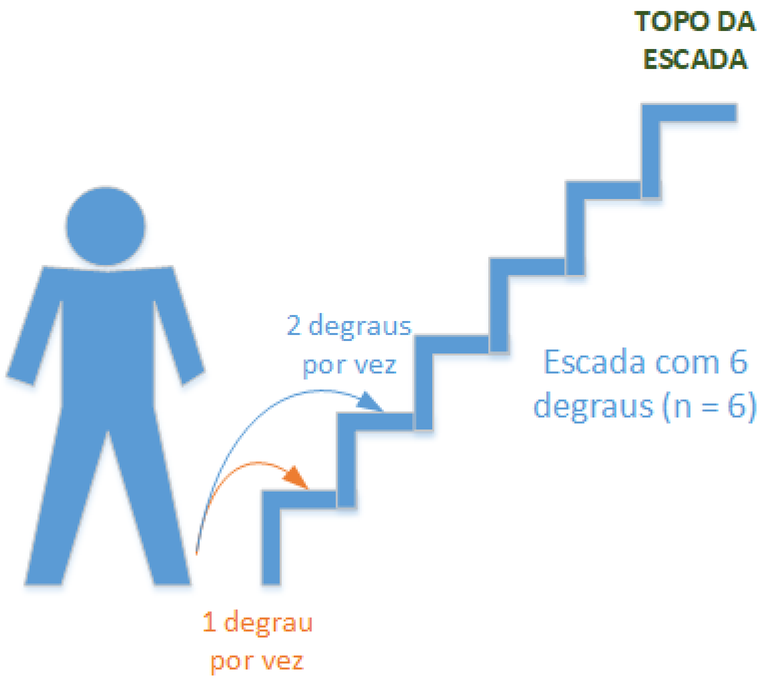
Problema da Escada

- Vamos considerar que nosso problema será resolvido por uma função $f(n)$, onde n é o número de degraus.
- Considerando que já estamos no degrau n, em quais degraus poderíamos estar no passo anterior?



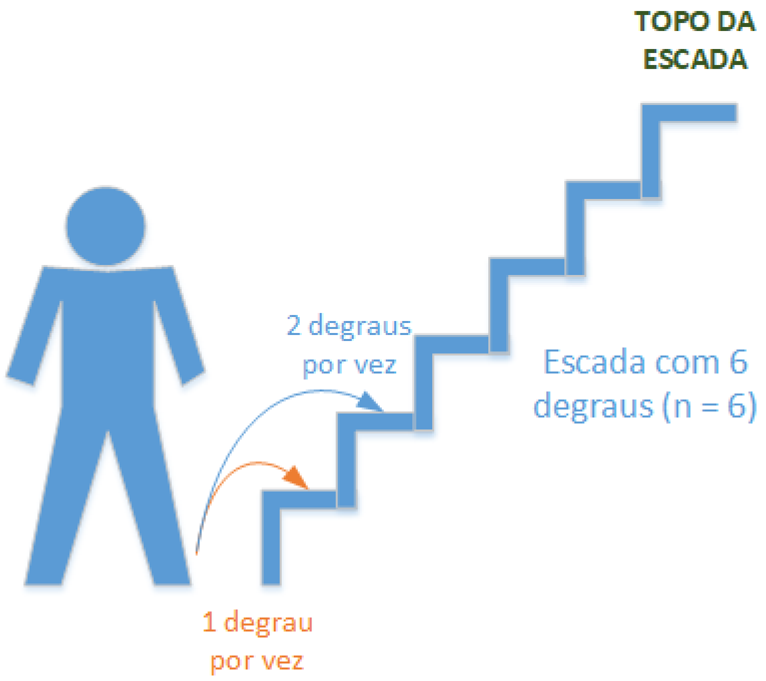
Problema da Escada

- Vamos considerar que nosso problema será resolvido por uma função $\boldsymbol{f(n)}$, onde $\boldsymbol{n}$ é o número de degraus.
- Considerando que já estamos no degrau $\boldsymbol{n}$, em quais degraus poderíamos estar no passo anterior?
  - $n-1$
  - $n-2$
- Dessa forma, o número de possibilidades de chegar no degrau $\boldsymbol{n}$ é a soma do número de possibilidade de chegar no degrau $\boldsymbol{n-1}$ com o número de possibilidades de chegar no degrau $\boldsymbol{n-2}$.



Problema da Escada

$$f(n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 0 \\ 1, & se\ n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2), & se\ n > 1 \end{cases}$$



Problema do Troco

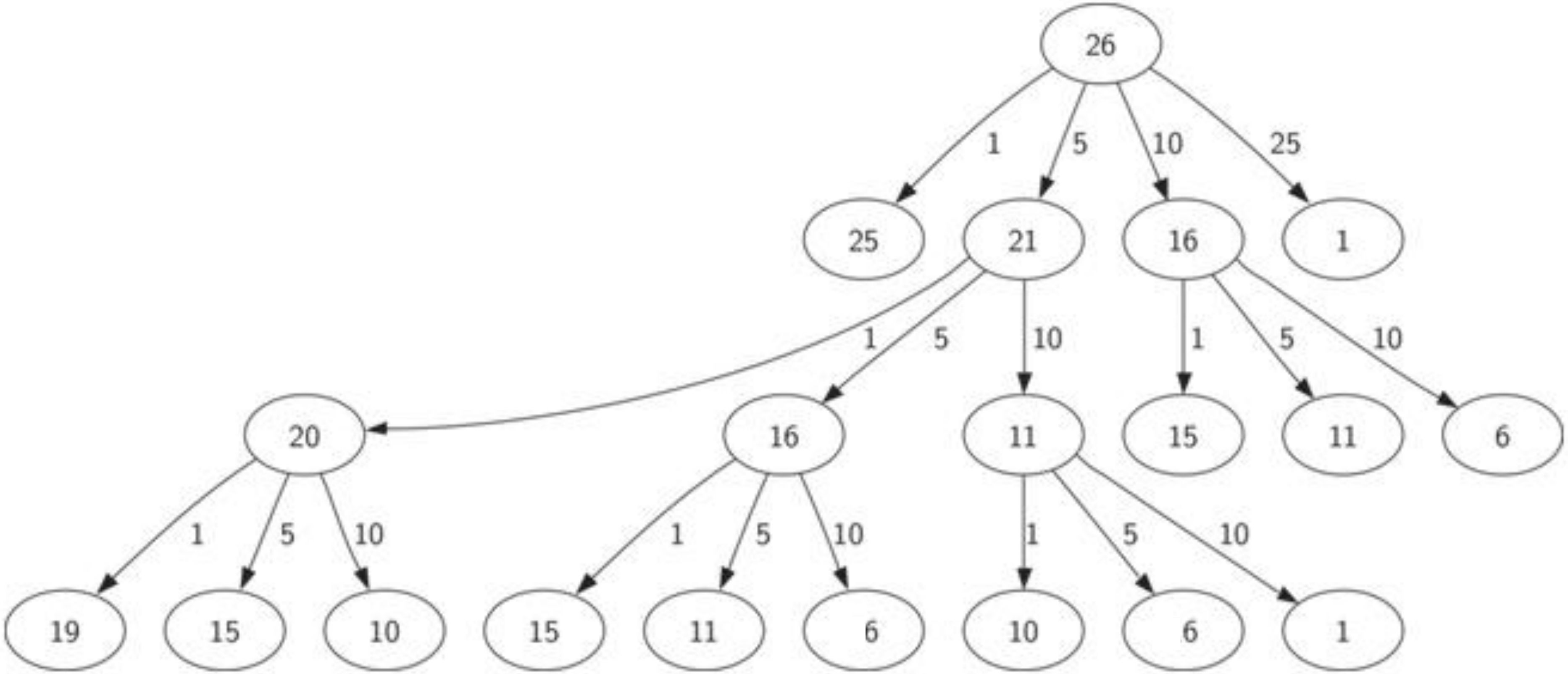
- **Problema:** dar troco de um valor **x** com o menor número de moedas possíveis.
  - Já vimos a solução utilizando *backtracking* e algoritmo guloso.
  - Embora a solução gulosa seja bastante eficiente, ela nem sempre leva a uma solução ótima (dependendo das moedas disponíveis)

Problema do Troco

- **Problema:** dar troco de um valor **x** com o menor número de moedas possíveis.
  - Já vimos a solução utilizando *backtracking* e algoritmo guloso.
  - Embora a solução gulosa seja bastante eficiente, ela nem sempre leva a uma solução ótima (dependendo das moedas disponíveis)
  - A solução por PD irá se basear na solução por *backtracking*, mas memorizando as respostas para lidar com a sobreposição de subproblemas.

Problema do Troco

- Para moedas = {1, 5, 10, 25} e troco = 26 temos a seguinte árvore de recursão:



Problema do Troco

- Relação de recorrência

$$f(w) = \begin{cases} 0 & se \quad w = 0 \\ 1 + \min\{\mathrm{f(w - moeda[i])}\}, & i = 0, \dots, m - 1 \end{cases}$$

Problema do Troco

- Implementação (Top-down):

```
vector<int> moedas = {50, 25, 10, 5, 1};
map<int, int> memo;
```

Problema do Troco

- Implementação (Top-down):

```
int troco(int x){
    if (x == 0)
        return 0;
    if (memo.count(x))
        return memo[x];

    memo[x] = INT_MAX;
    for(int m : moedas){
        if (m > x)
            continue;
        memo[x] = min(memo[x], 1 + troco(x-m));
    }
    return memo[x];
}
```

Problema do Troco

- Implementação (Bottom-up):

```
// Complexidade de tempo: O(N*W)
int minCoins(vector<int>& moedas, int w) {
   int n = moedas.size();
   vector<int> dp(w+1, INT_MAX);

   dp[0] = 0;
   for (int i = 1; i <= w; i++)
       for (int j = 0; j < n; j++)
           if (moedas[j] <= i)
               dp[i] = min(dp[i], dp[i-moedas[j]]+1);
   return dp[w];
}
```

Corte do bastão (*rod cutting*)

- Dado um bastão de madeira de comprimento n e uma tabela p de preços (venda) de cortes de n.
- Objetivo: determinar o valor máximo obtido cortando o bastão e vendendo os pedaços (cortes) ou o bastão inteiro

$n = 4$

Tamanho (cortes)	Preço
1	R$ 1,00
2	R$ 5,00
3	R$ 8,00
4	R$ 9,00

Corte do bastão (*rod cutting*)

- Algumas possibilidades:

- 
  - 8 + 1 = 9
- 
  - 5 + 5 = 10
- 
  - 5 + 1 + 1 = 7
- 
  - 1 + 1 + 1 + 1 = 4

Tamanho (cortes)	Preço
1	R$ 1,00
2	R$ 5,00
3	R$ 8,00
4	R$ 9,00

Corte do bastão (*rod cutting*)

- Tentando encontrar a recorrência do problema:
  - Nosso objetivo é maximizar o valor obtido de um bastão de tamanho $\boldsymbol{n}$, vamos considerar que isso seja o resultado da função $\boldsymbol{rod(n)}$
  - Se fizermos um corte de tamanho $\boldsymbol{i}$ nesse bastão, vamos obter um bastão de tamanho $\boldsymbol{i}$ e um novo bastão de tamanho $\boldsymbol{n - i}$

Corte do bastão (*rod cutting*)

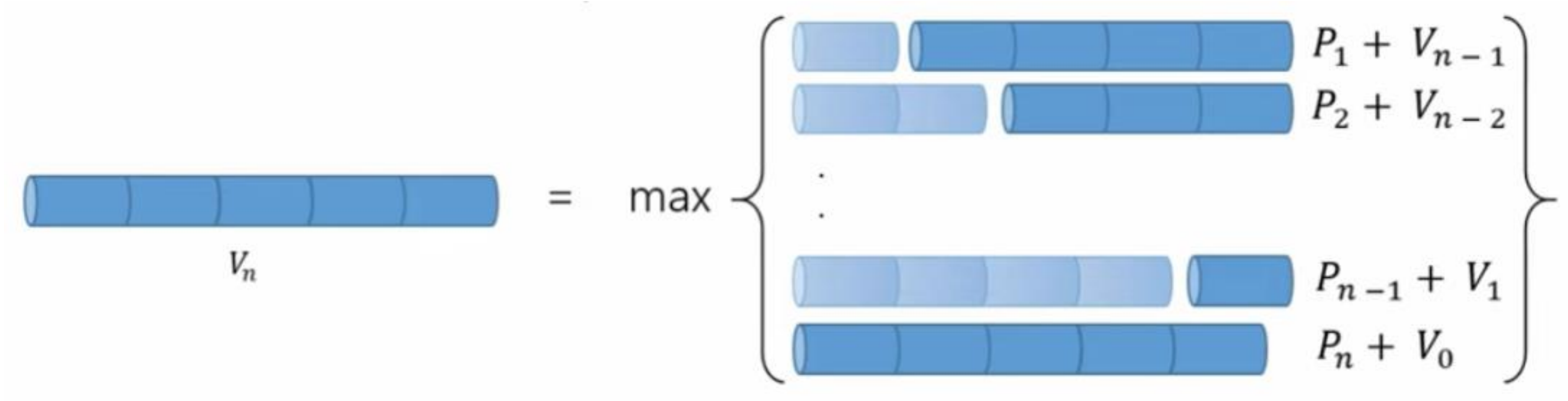
- Vamos considerar que não podemos mais fazer cortes no bastão de tamanho $\boldsymbol{i}$, apenas no bastão de tamanho $\boldsymbol{n - i}$.
- Nesse caso, a solução seria

$$p[i] + rod(n - i)$$

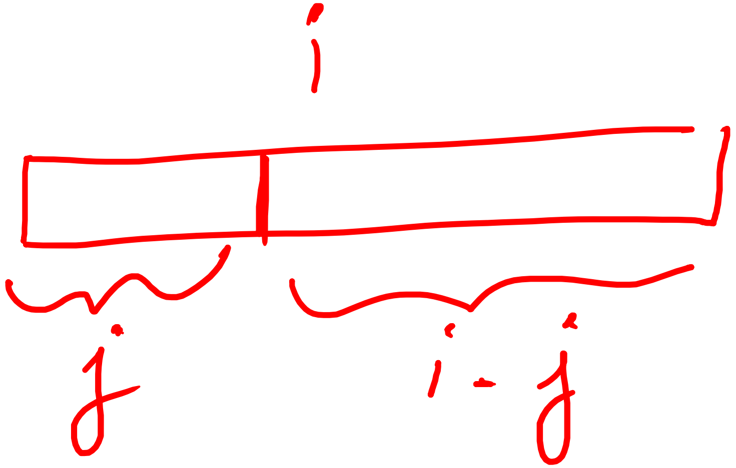
- A base da nossa solução será fazer isso para todos os possíveis cortes $\boldsymbol{i}$, então podemos generalizar o problema da seguinte forma:

$$rod(n) = \begin{cases} 0 & se \;\; n = 0 \\ \max\{p_i + rod(n - i)\} & para \;\; i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

Corte do bastão (*rod cutting*)



Corte do bastão (*rod cutting*)




```
int rodCutter(int p[], int n){
    int rod[n+1];
    rod[0] = 0;
    for(int i = 1; i <= n; i++){
        int max_val = -INF;
        for(int j = 1; j <= i; j++)
            max_val = max( max_val, p[j] + rod[i-j] );
        rod[i] = max_val;
    }
    return rod[n];
}
```

Prefix Sum

- Considere o problema da Range Sum Query (RSQ), em que dado um vetor com N números queremos fazer consultas. Cada consulta consiste em retornar a soma dos números em um certo intervalo (l, r).

Prefix Sum

- Considere o problema da Range Sum Query (RSQ), em que dado um vetor com N números queremos fazer consultas. Cada consulta consiste em retornar a soma dos números em um certo intervalo (l, r).

- O método por força-bruta é ineficiente, com complexidade $O(n)$ para as *queries*

Prefix Sum

- Uma possibilidade é utilizar um **vetor de soma de prefixos**.
- Basicamente, uma posição **i** desse vetor armazena a soma de todos os valores entre **0** e **i**.

$$P[i] = \sum_{j=0}^{i} v[j]$$

- Com essas informações, podemos responder uma consulta (l,r) muito facilmente, como veremos a seguir:

Prefix Sum

- Dados o vetor v e seu vetor de soma de prefixos P subjacente:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v	5	10	-6	8	1	-1	7	3	-4
P	5	15	9	17	18	17	24	27	23

Prefix Sum

- Dados o vetor v e seu vetor de soma de prefixos P subjacente:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v	5	10	-6	8	1	-1	7	3	-4
P	5	15	9	17	18	17	24	27	23

- O valor P[5], por exemplo, representa a soma dos valores v[0...5]

Prefix Sum

- Dados o vetor v e seu vetor de soma de prefixos P subjacente:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v	5	10	-6	8	1	-1	7	3	-4
P	5	15	9	17	18	17	24	27	23

- Agora e se quisermos saber a soma dos valores entre um intervalo (l,r) qualquer, como (3,5)?

Prefix Sum

- Dados o vetor v e seu vetor de soma de prefixos P subjacente:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v	5	10	-6	8	1	-1	7	3	-4
P	5	15	9	17	18	17	24	27	23

- Podemos considerar isso como equivalente a seguinte operação:

P[5] - P[2] = (v[0] + v[1] + v[2] + v[3] + v[4] + v[5]) - (v[0] + v[1] + v[2])

Prefix Sum

- Assim, podemos generalizar uma consulta q como sendo:
  - $q(l, r) = P[r] - P[l - 1]$

- Por este método, temos as seguintes complexidades:
  - Alteração: $O(n)$
  - Consulta: $O(1)$

- Esta é uma ED muito interessante para quando não há (ou há poucas) atualizações nos valores do vetor.

Prefix Sum - Aplicações

- **Encontrar o índice de equilíbrio:**
  - Encontrar o índice i para qual: v[0...i-1] = v[i+1...n-1]
  - Solução: buscar **i** para qual vale que

$$P[i-1] == P[n-1] - P[i]$$

Prefix Sum - Aplicações

- **Descobrir se existe algum segmento com soma 0:**
  - Podemos procurar por valores repetidos em P.
  - Se P[r] = x e P[l-1] = x para algum (l,r), então q(l,r) = x - x = 0

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
v	5	10	-6	8	1	-1	7	3	-4
P	5	15	9	17	18	17	24	27	23

Sugestões

- Seminário sobre Programação Dinâmica da equipe UnespRPM: https://youtu.be/xYDOE8hG7Uk
- DP Tutorial and Problem List: https://codeforces.com/blog/entry/67679

Referências

Rene Pegoraro. Aulas de Técnicas de Programação.

Rene Pegoraro e Wilson M. Yonezawa. Aulas de Algoritmos Avançados.

Thiago Alexandre Domingues de Souza. Palestra sobre Programação Dinâmica.

Giulia Moura, João Pedro Comini e Pedro H. Paiola. Aulas de Programação Competitiva I.

Bruno Papa, Maurício Scarelli e Rodrigo Rosseti. Seminário sobre Programação Dinâmica.

LAAKSONEN, A. Competitive Programmer's Handbook.

https://www.ime.usp.br/~pf/analise_de_algoritmos/aulas/dynamic-programming.html

http://www.decom.ufop.br/anderson/2_2012/BCC241/ProgramacaoDinamica.pdf

https://www.geeksforgeeks.org/tabulation-vs-memoizatation/

https://www.geeksforgeeks.org/solve-dynamic-programming-problem/

https://github.com/UnBalloon/programacao-competitiva/tree/master/Preffix%20sums%20(Somas%20de%20prefixos)