Range Queries:
Segment Tree

PROTIVA - 2023

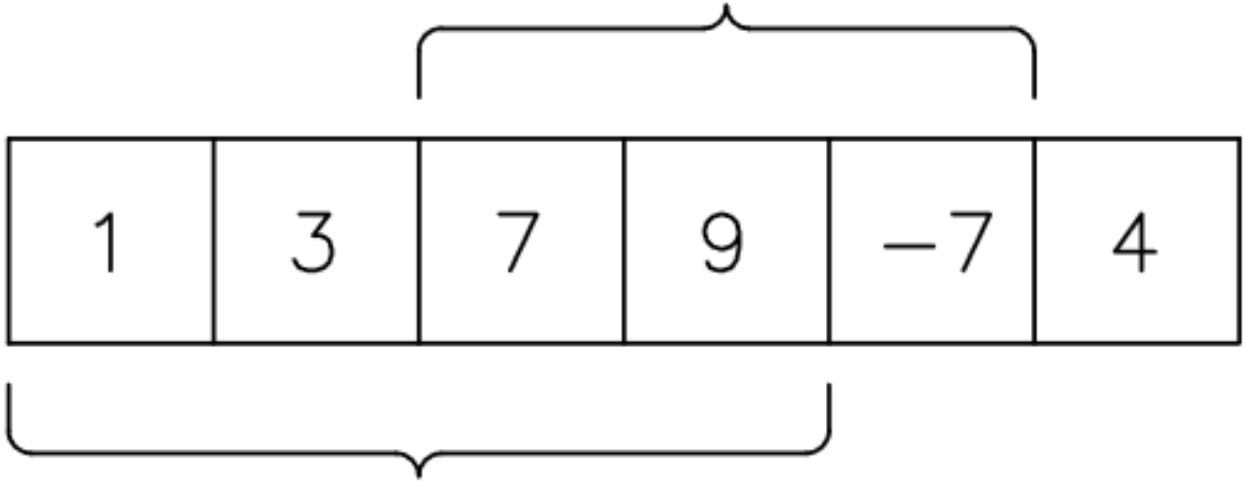
Pedro Henrique Paiola
Arissa Yoshida
Luis Henrique Morelli
Nicolas Barbosa Gomes

Operações em intervalos

- Diversos problemas exigem operações em intervalos, em especial, consultas em intervalos (*range queries*)
- Por força bruta, estas consultas normalmente terão complexidade $O(n)$
- Exemplos:
  - Range Minimum/Maximum Query (RMQ)
  - Range Sum Query (RSQ)

Operações em intervalos

máx.: 9
mín.: −7
soma: 9



máx.: 9
mín.: 1
soma: 20

Departamento de Computação

PROTIVA

Range Minimum Query

- Tomando como exemplo o problema RMQ.

- Vamos supor que temos um vetor de N elementos, em que podemos realizar uma das seguintes operações:
  - update(i, a): atualizar a posição **i** com o valor **a**
  - query(i, j): consultar o menor valor entre as posições **i** e **j**

- De forma ingênua, podemos realizar estas operações com as seguintes complexidades:
  - update: $O(1)$
  - query: $\boldsymbol{O(n)}$

Segment Tree

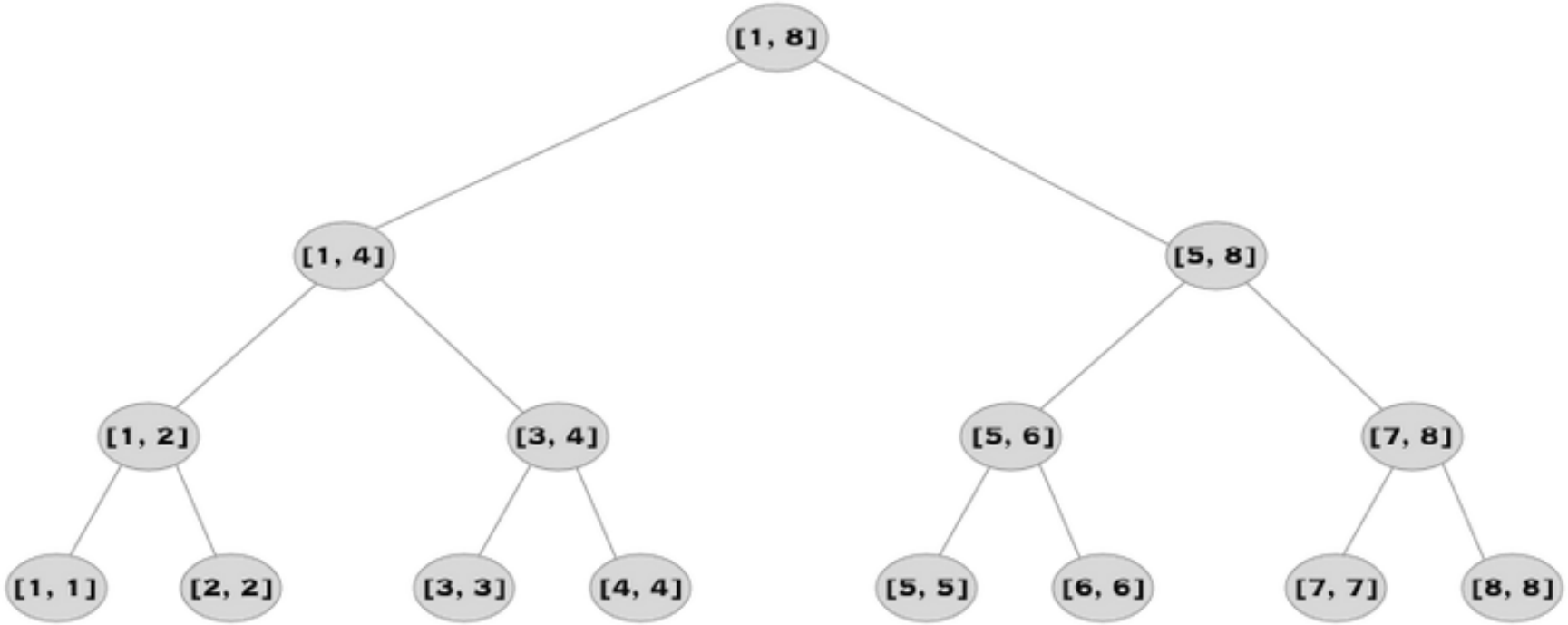
- A *Segment Tree* (Árvore de Segmentos) é uma estrutura que permite fazer ambas as operações em $\boldsymbol{O(log\, N)}$.

- Uma SegTree é bastante versátil, e pode ser utilizada para resolver uma gama enorme de problemas envolvendo *range queries* usando-se a mesma estrutura básica.

- Porém, para cada caso teremos que fazer algumas alterações na sua implementação, por isso é importante entender como ela funciona.

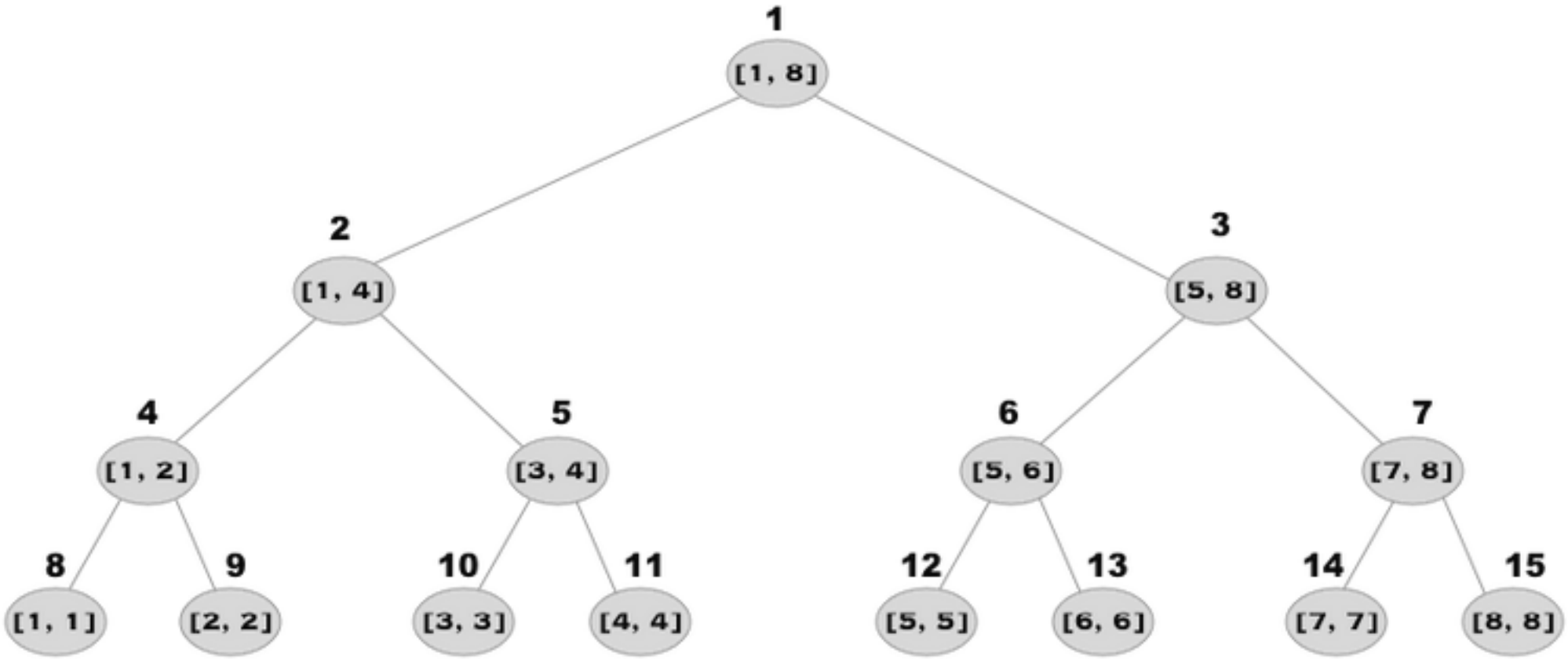
Segment Tree

- Árvore binária de consulta
- Cada nó representa um segmento de um vetor
- Os filhos de um nó que representa o segmento $[i, j]$ serão os nós que representam os segmentos $\left[i, \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor\right]$ e $\left[\left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor + 1, j\right]$



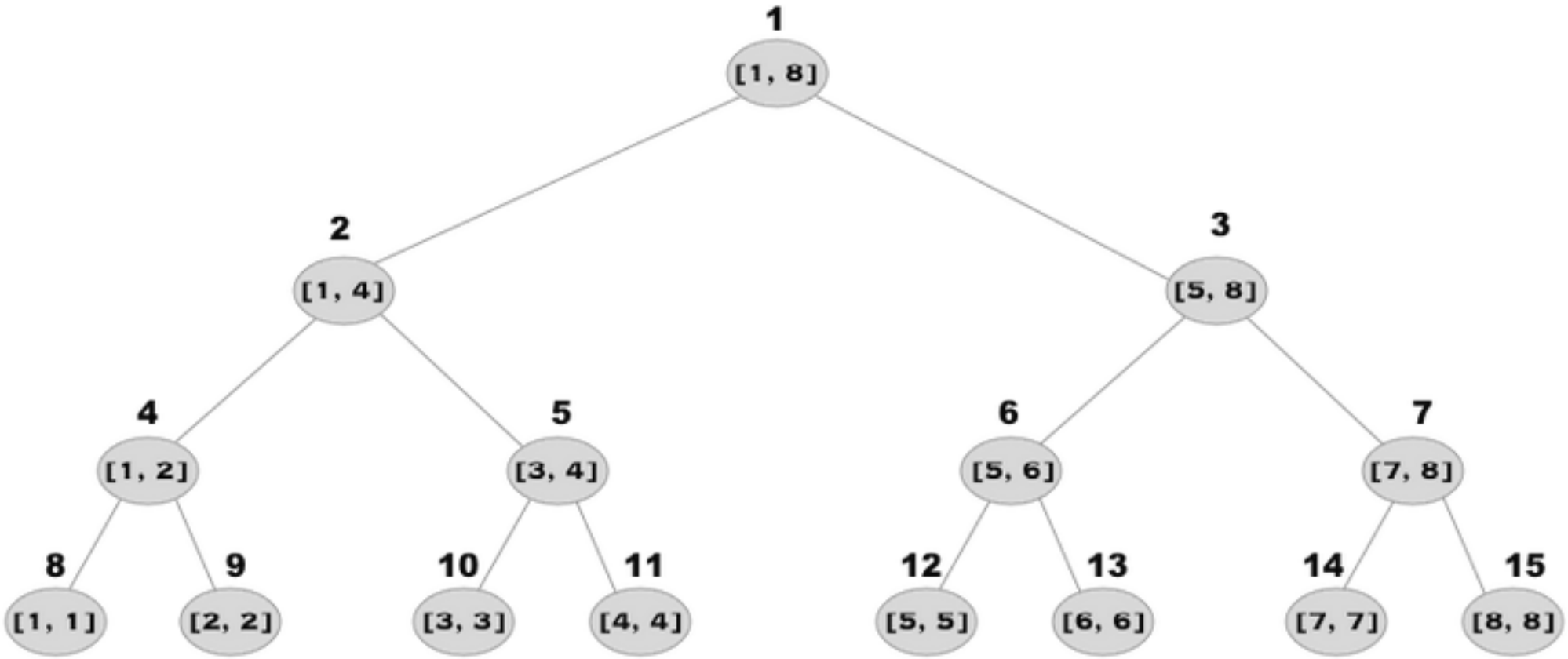
Segment Tree

- Podemos rotular cada um dos nós. Começamos rotulando a raiz como 1, e seguimos nível a nível, numerando da esquerda pra direita.



Segment Tree

- Percebe-se que os filhos de um nó x são os nós $2x$ e $2x + 1$

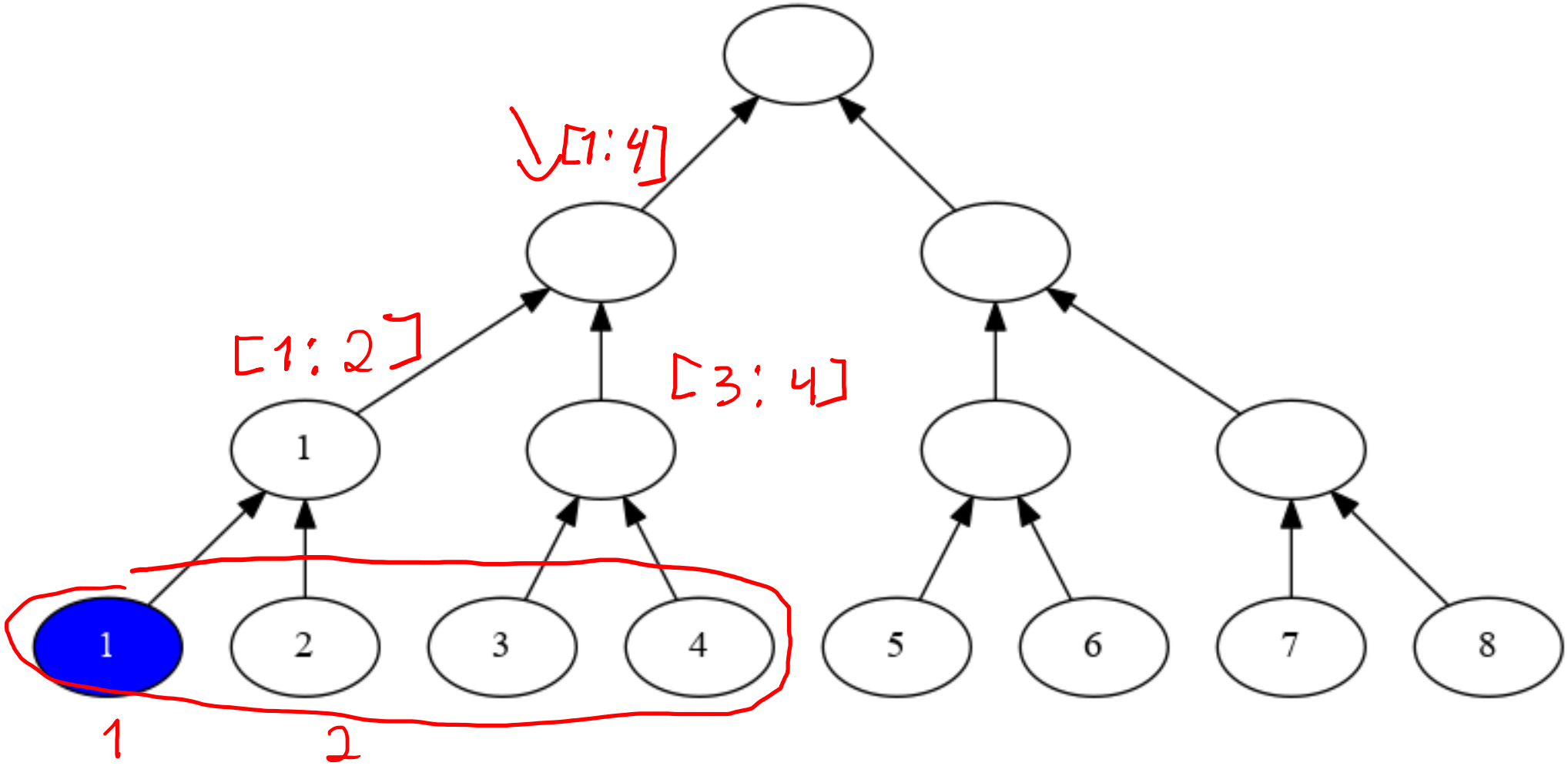


Segment Tree

- Funções básicas
  - build()
  - update()
  - query()

- Uma árvore de segmentos é bastante versátil, podemos alterar o seu uso com pequenas e intuitivas mudanças no código

Segment Tree



Representação

- Vamos considerar que temos um vetor de tamanho n chamado, criativamente, de vetor
- Para a nossa árvore de segmentos, vamos também considerar um vetor, onde cada uma posição i representa o nó i. Esse deve ter $2 * 2^{\lceil \log_2 n \rceil} - 1$ posições

```
vector<int> vetor;
vector<int> st;
int size;
```

Operação

- Como já dissemos, a SegTree é uma estrutura bastante versátil. Para tentarmos generalizar um pouco, vamos definir uma função f que define a informação que queremos saber a respeito dos elementos do vetor.

- Nesse caso, vamos supor uma SegTree que queira saber o mínimo de intervalos, mas poderia ser soma, máximo, produto, xor, gcd, mmc, or, and, ...

```
int f(int a, int b){
    return min(a,b);
}
```

Elemento neutro

- O elemento neutro depende da operação. Como queremos saber os mínimos, o elemento neutro dessa operação seria um número muito grande.

- f(el_neutro, x) = x para todo x

```
int el_neutro = INT_MAX;
```

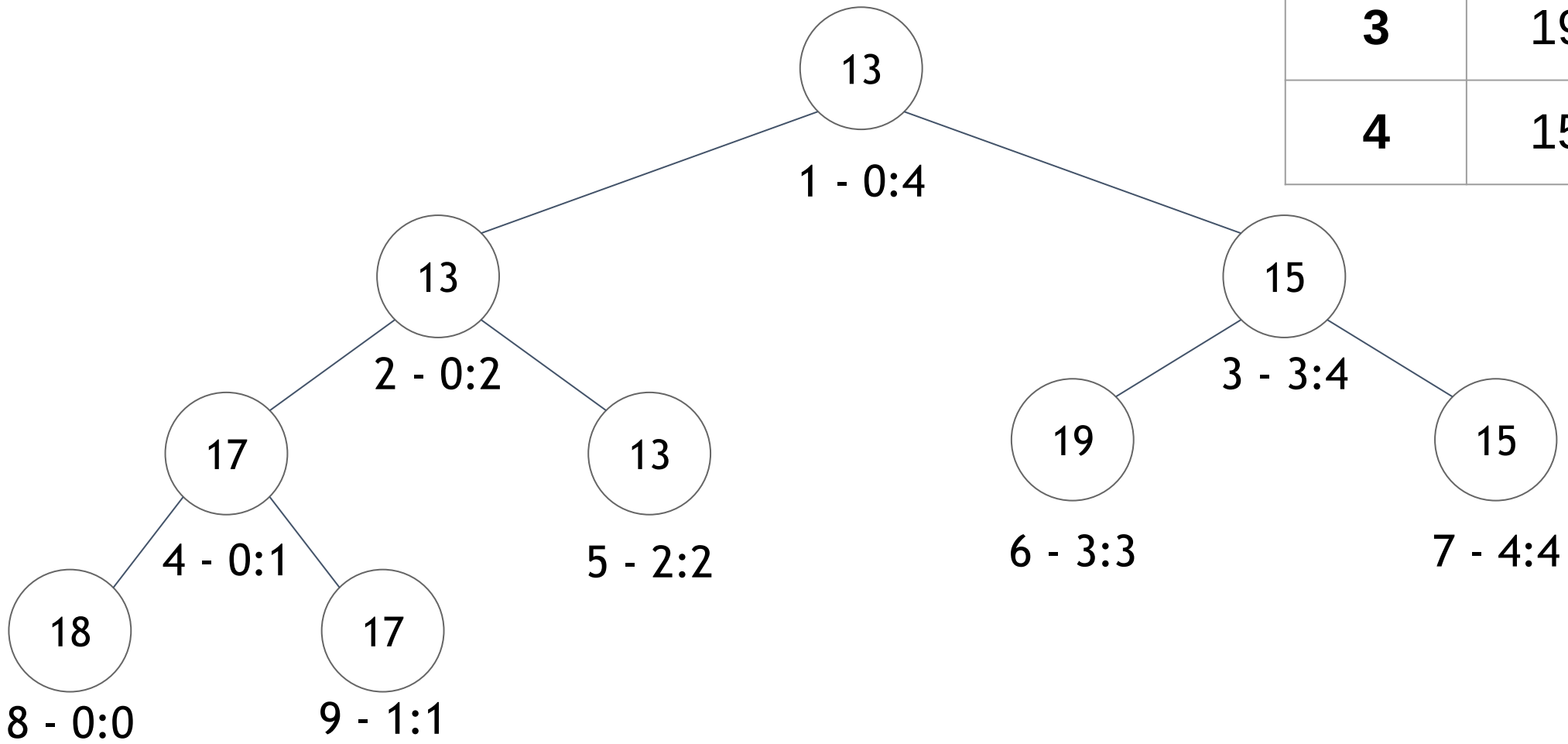
Atualização

- Atualizando uma posição do vetor
  - Alterando o valor de uma posição do vetor, temos que atualizar a árvore de segmentos.

  - Começaremos da raiz e iremos descendo ao longo da árvore, atualizando os vértices conforme for necessário

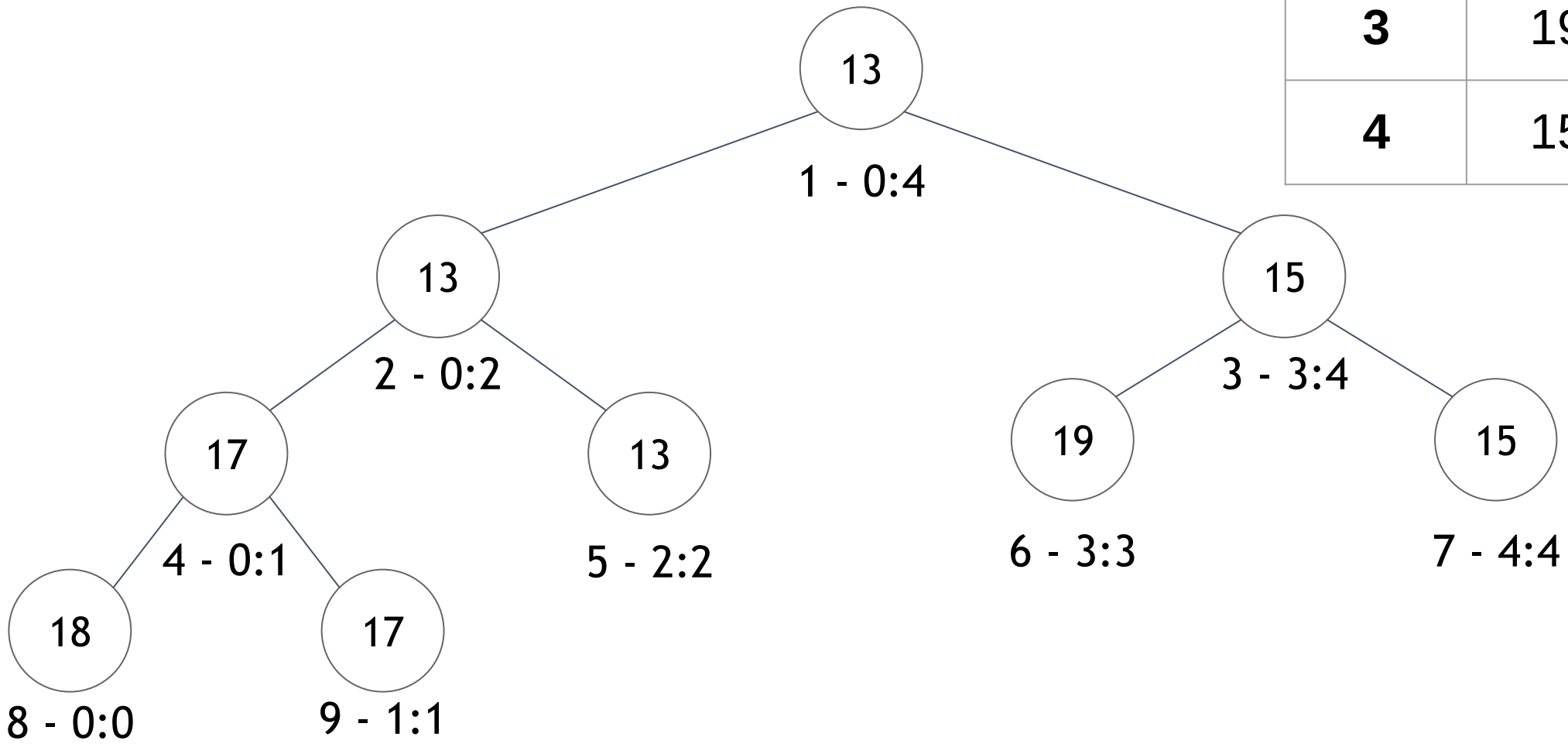
Atualização

0	18
1	17
2	13
3	19
4	15



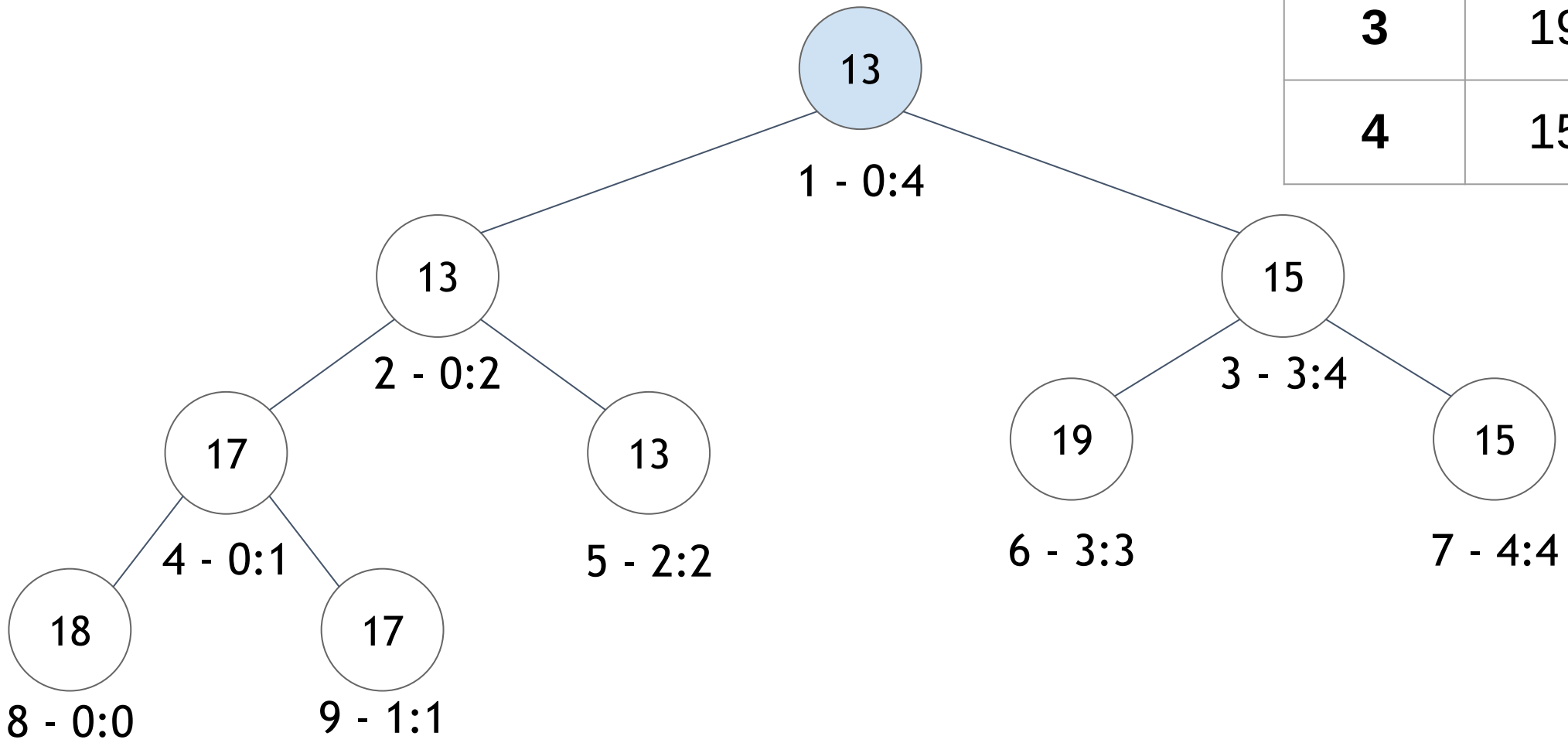
Atualização

0	18
1	**12**
2	13
3	19
4	15



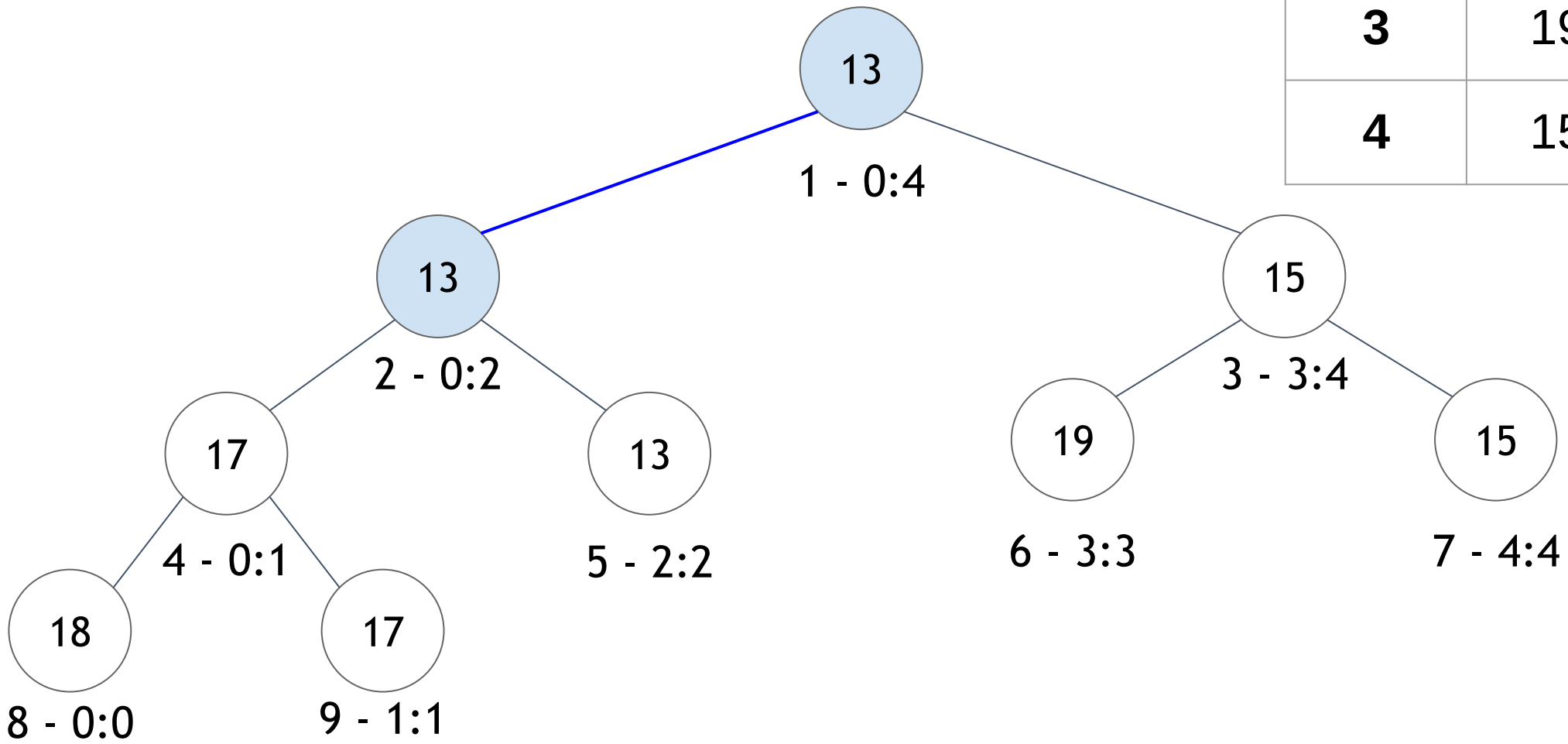
Atualização

0	18
1	**12**
2	13
3	19
4	15



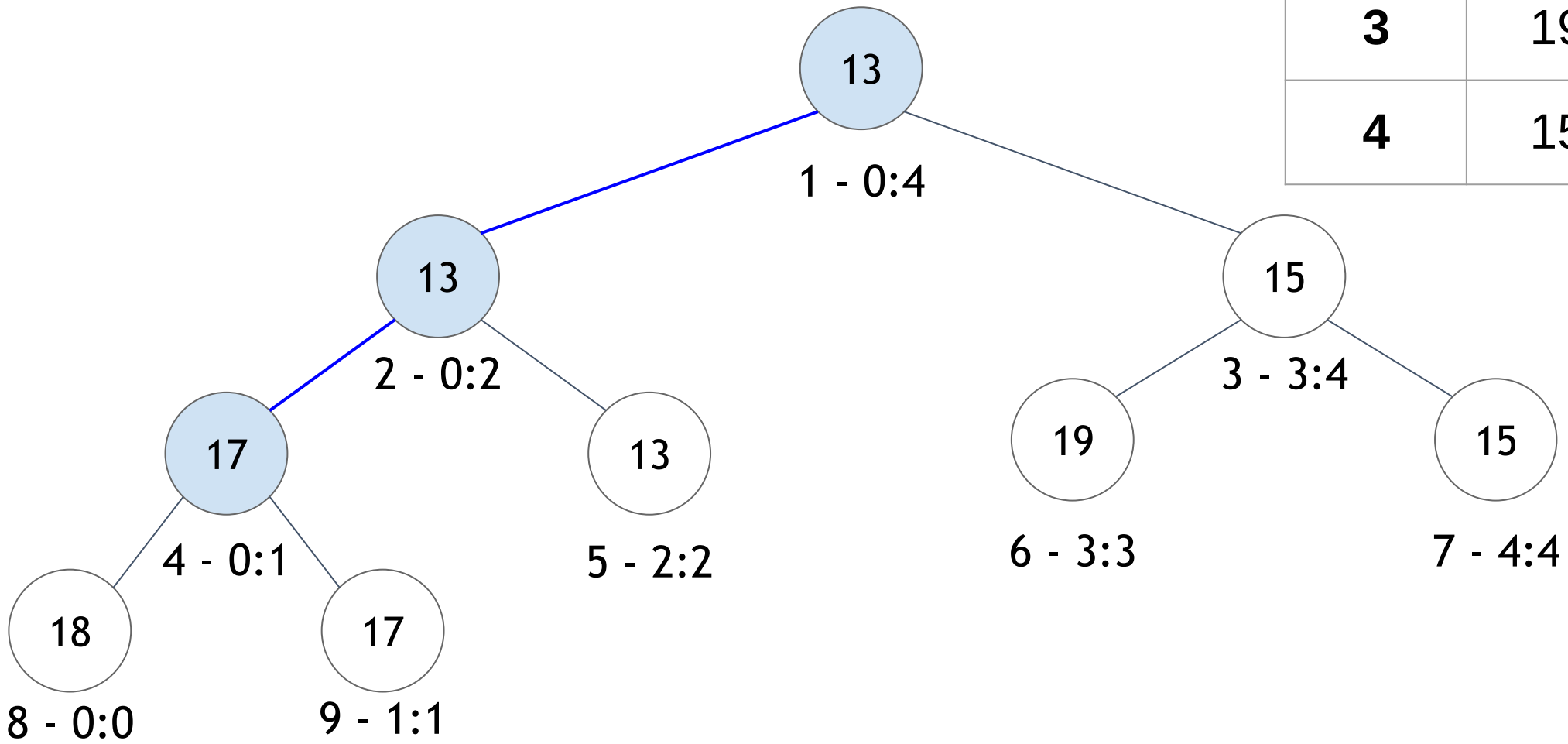
Atualização

0	18
1	**12**
2	13
3	19
4	15



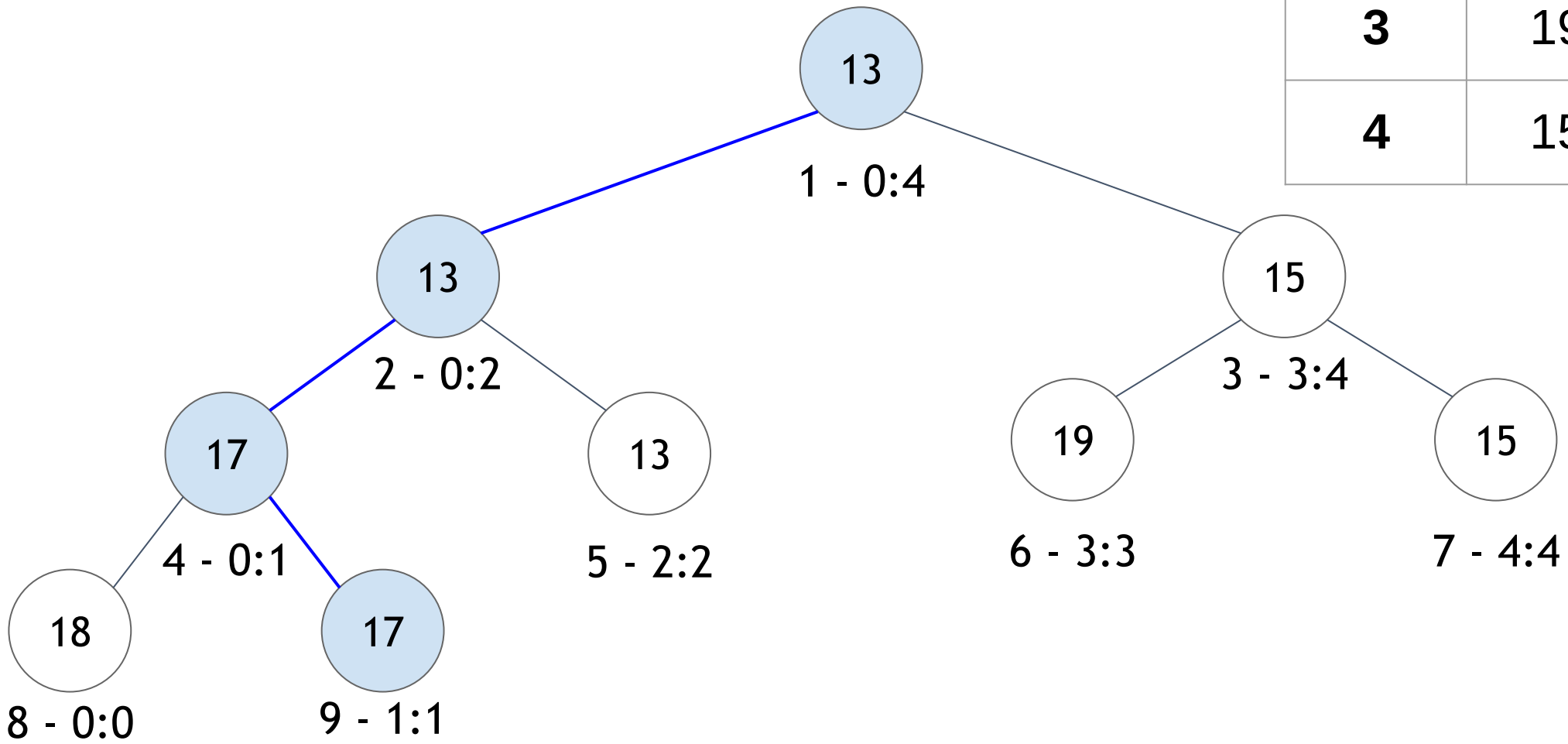
Atualização

0	18
1	**12**
2	13
3	19
4	15



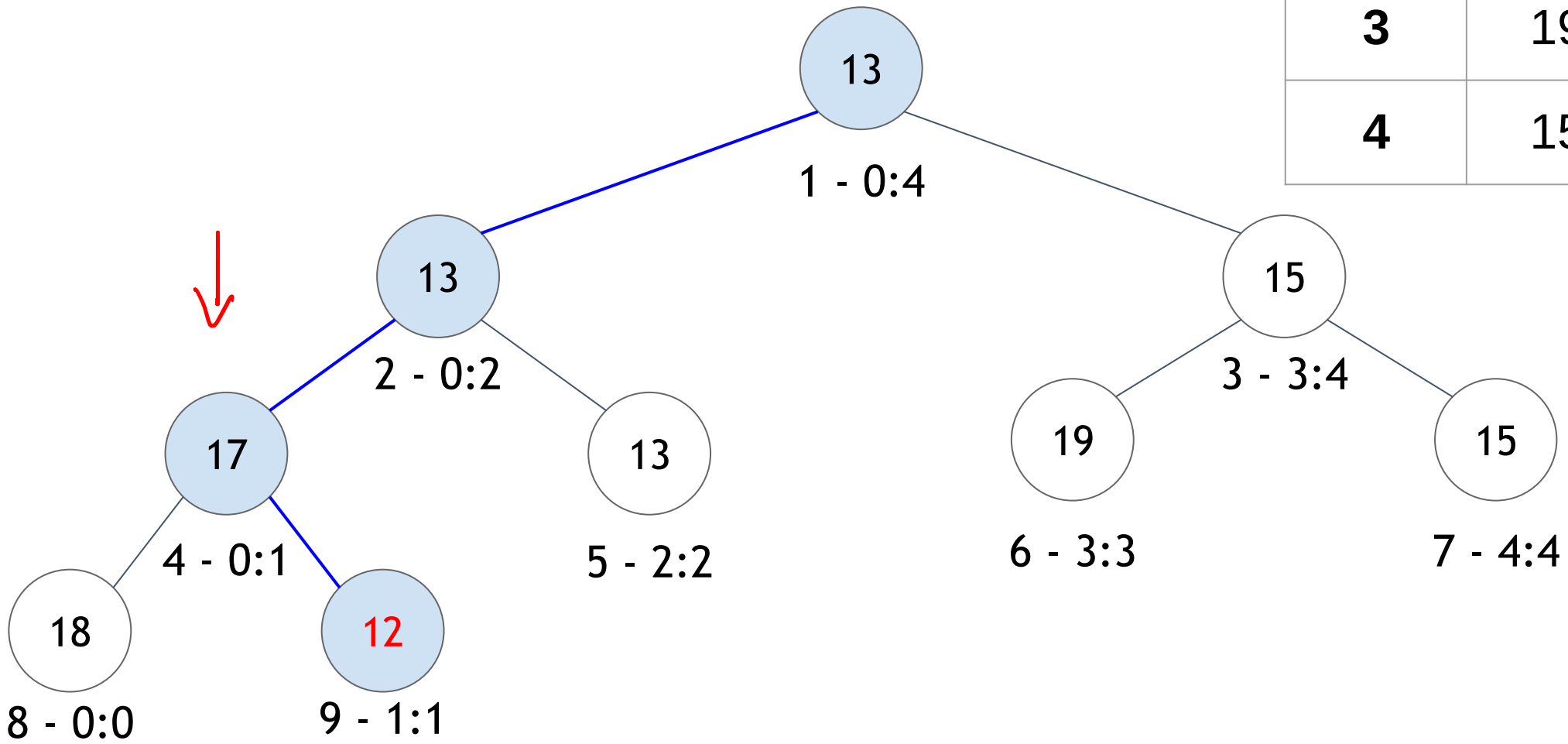
Atualização

0	18
1	**12**
2	13
3	19
4	15



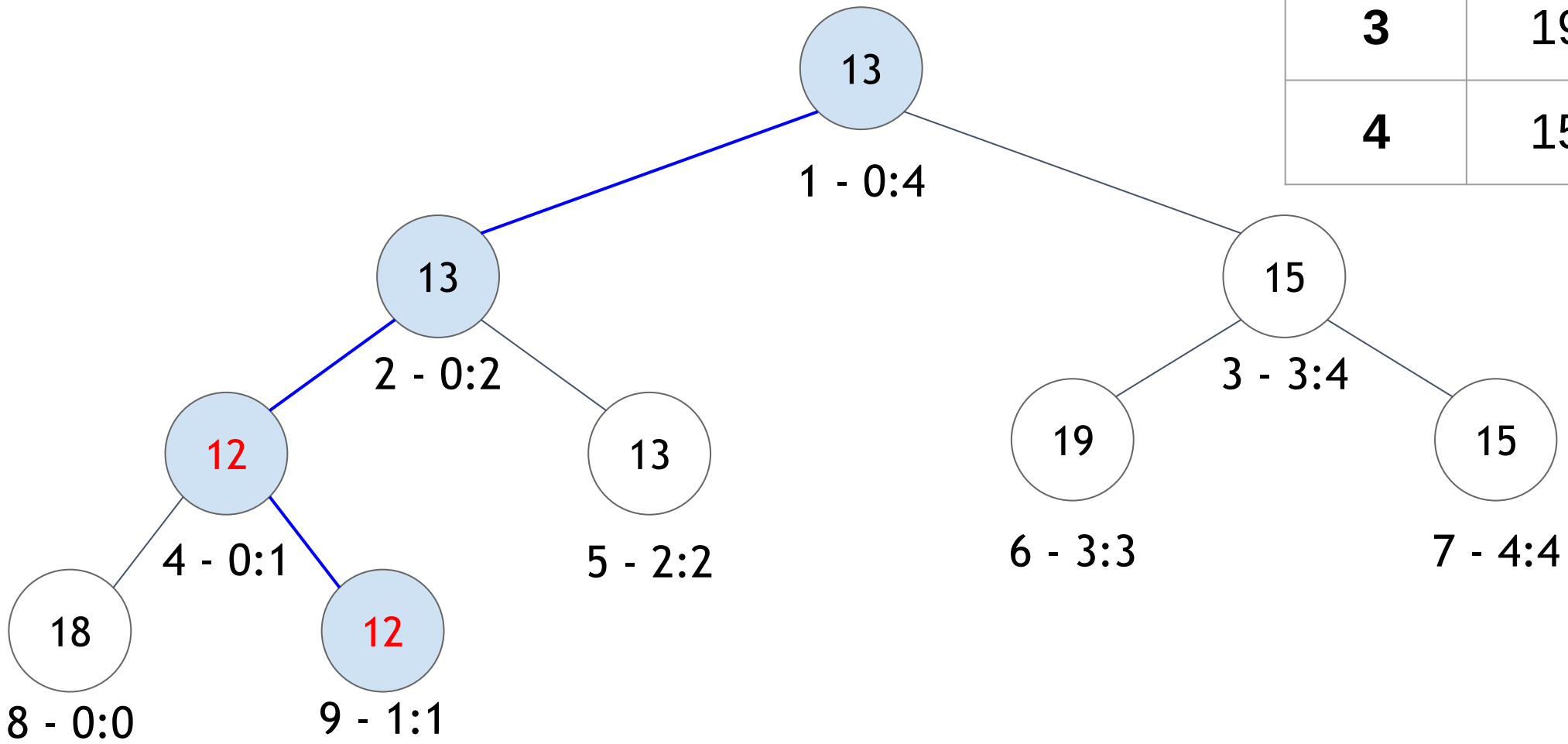
Atualização

0	18
1	**12**
2	13
3	19
4	15



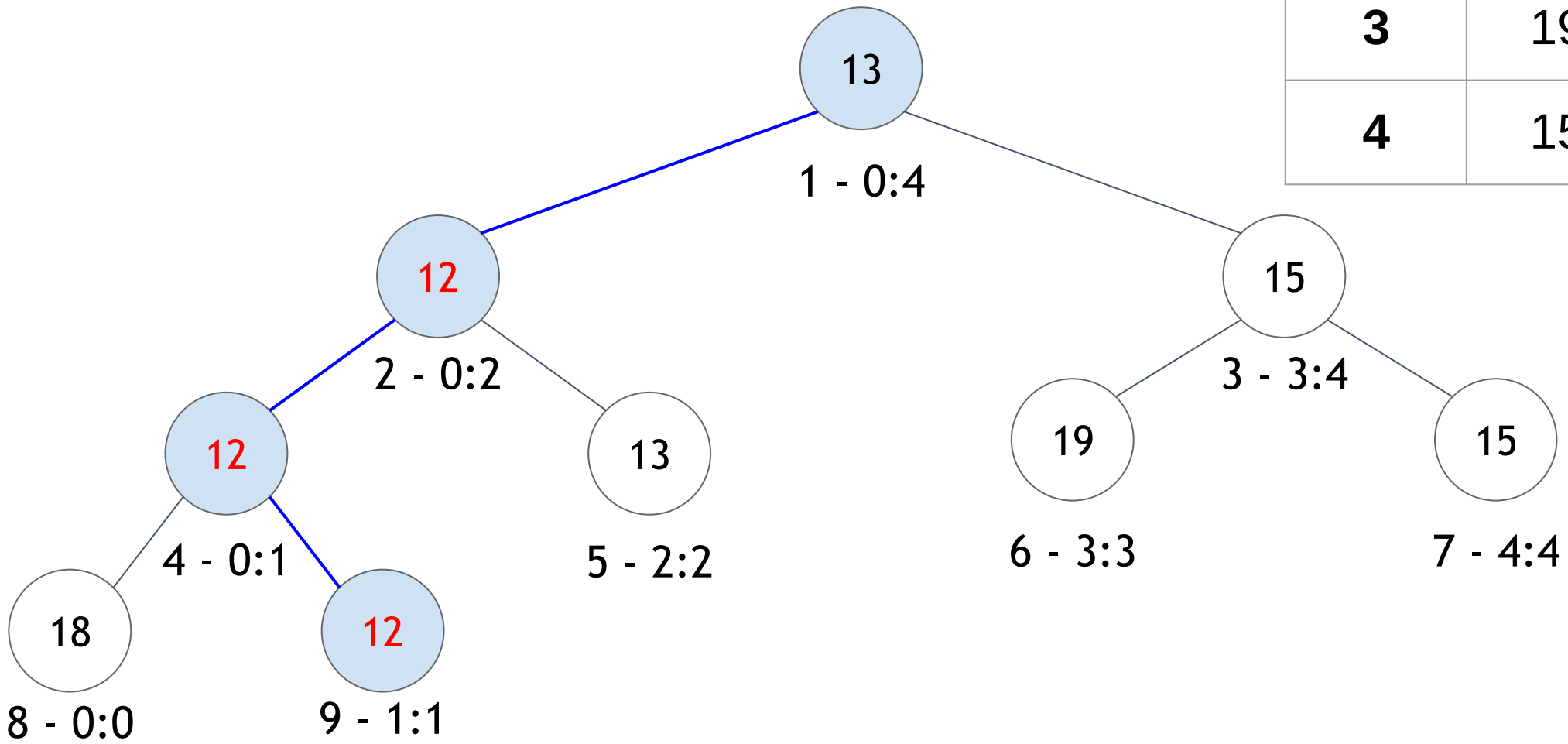
Atualização

0	18
1	**12**
2	13
3	19
4	15



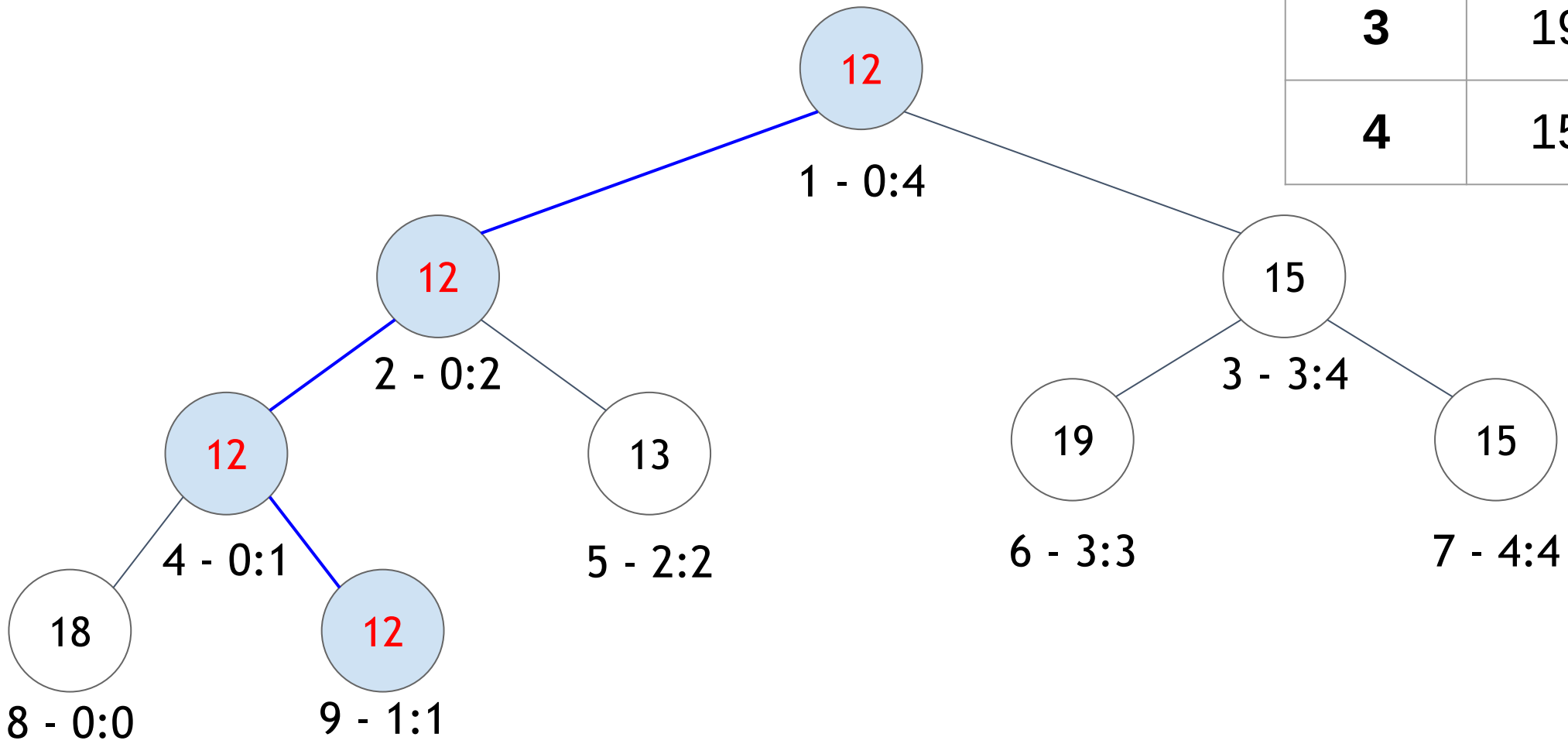
Atualização

0	18
1	**12**
2	13
3	19
4	15



Atualização

0	18
1	**12**
2	13
3	19
4	15



Atualização

```
void update(int no, int i, int j, int pos, int new_v)
{
    if(i == j)   //Se estamos em uma folha (i == j == pos)
    {
        vetor[pos] = new_v;
        st[no] = new_v;
        return;
    }

    if(i > pos || j < pos)
        return;      //O intervalo não contém o índice pos
```

Atualização

```
        //O intervalo contém o índice, mas temos que chegar no nó
        //específico, e voltar recursivamente atualizando os filhos
        int mid = (i + j)/2;

        //Percorrendo e atualizando os filhos
        update(no*2, i, mid, pos, new_v);
        update(no*2 + 1, mid + 1, j, pos, new_v);
        //Com os filhos atualizados, atualizar o próprio nó
        st[no] = f(st[no*2], st[no*2 + 1]);
}
```

Chamada:

```
update(1, 0, size-1, pos, new_v)
```

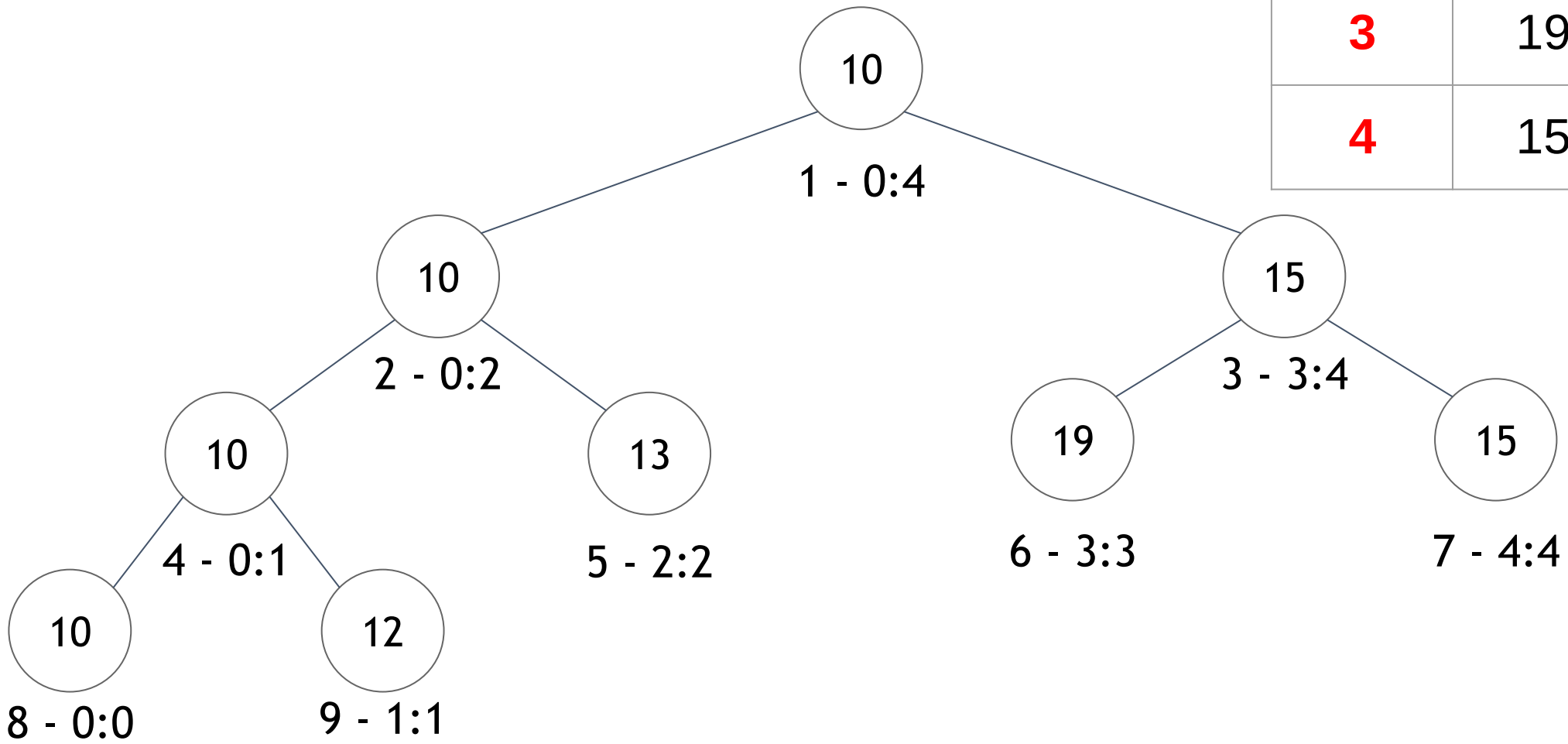
Consulta

- Consultando o menor valor entre A e B
  - Para retornar a posição com o menor valor entre A e B, iniciaremos a busca a partir do nó 1, com intervalo $[0, N-1]$, e seguiremos o seguinte procedimento:

Se $[i, j]$ estiver contido entre $[A, B]$ $\quad (A \leq i \leq j \leq B)$
  retorna st[no]
Se $[i, j]$ e $[A, B]$ forem disjuntos $\quad (A > j \; ou \; i > B)$
  retorna elemento neutro
Senão
  chamamos a função recursivamente para os filhos

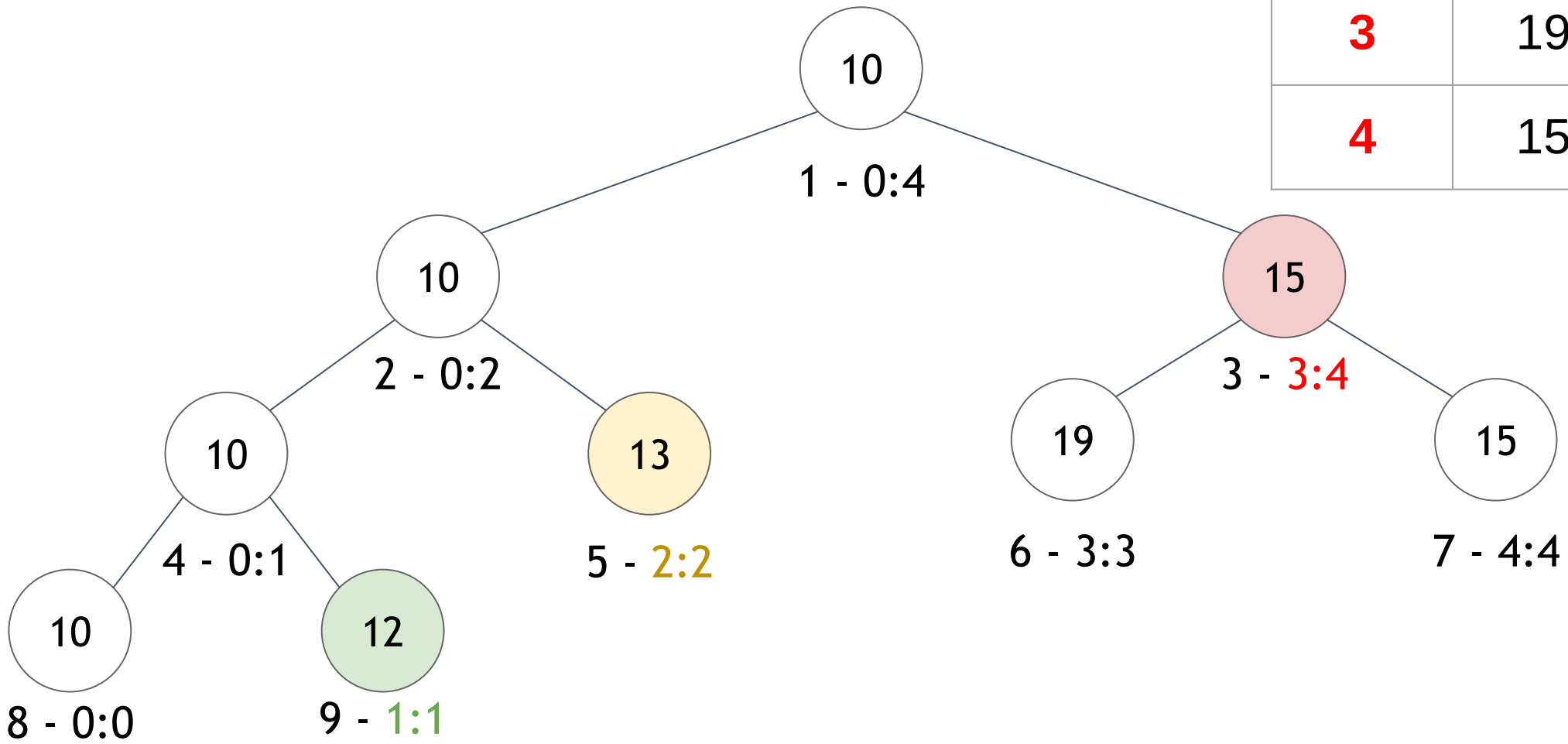
Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15



Consulta

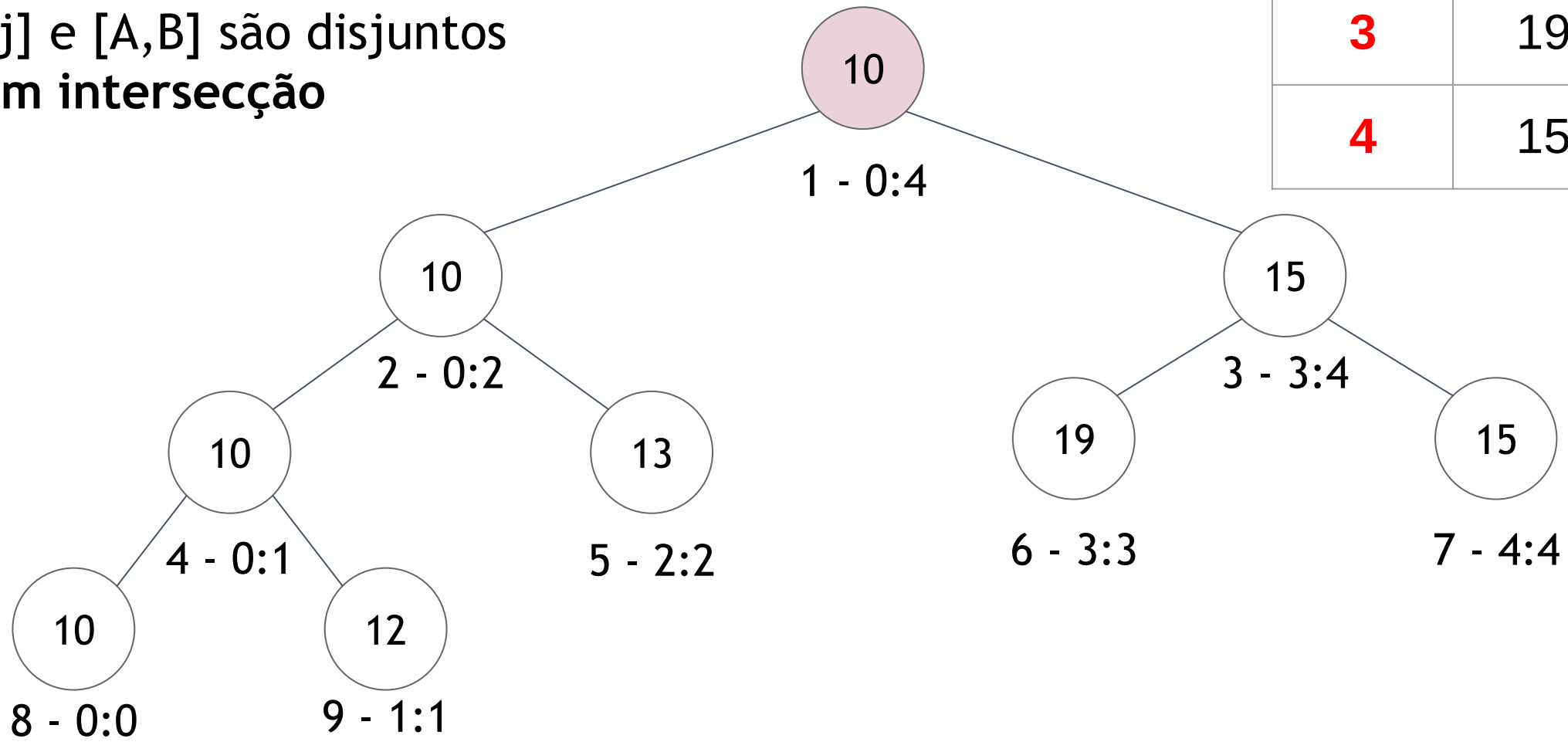
0	10
1	12
2	13
3	19
4	15



Consulta

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

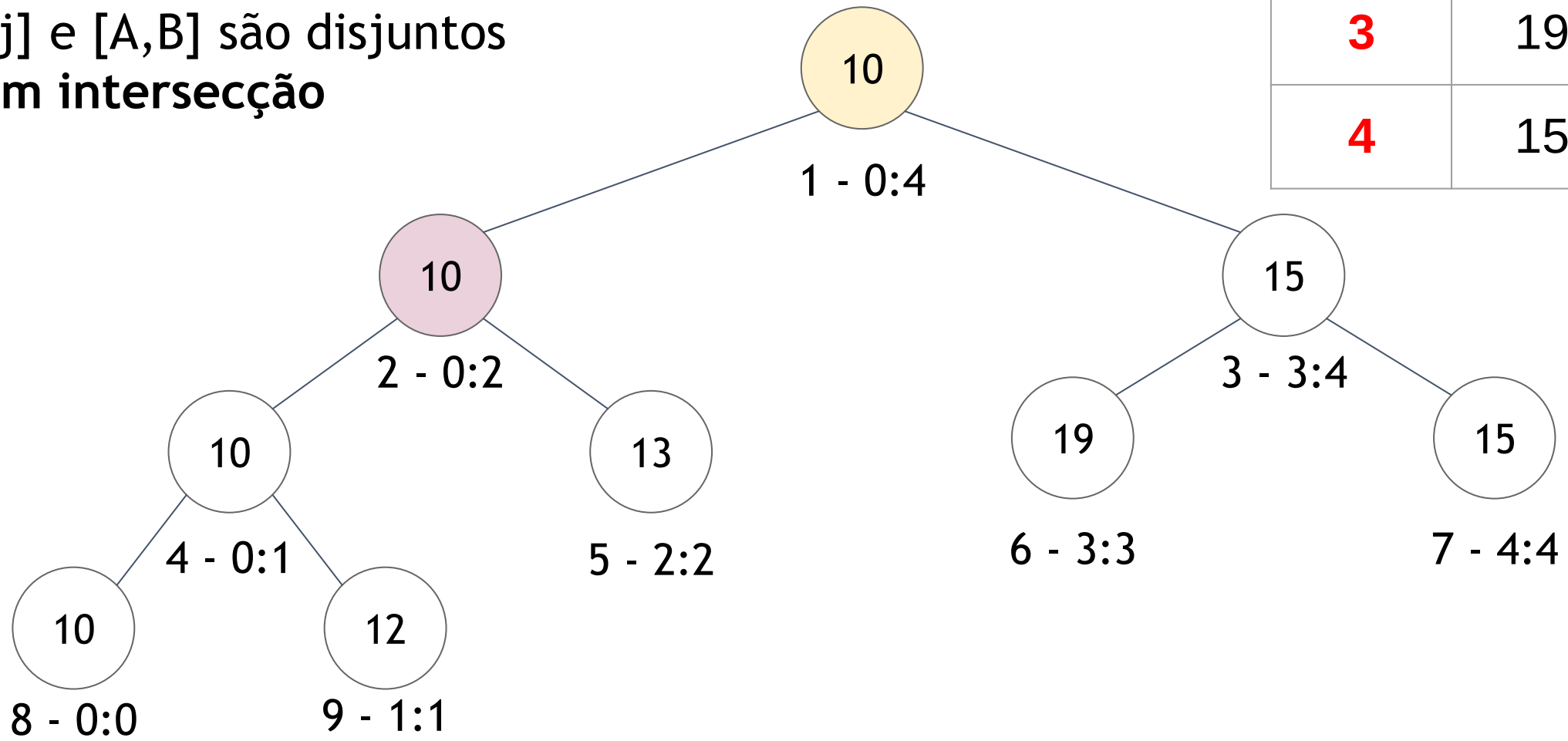
0	10
1	12
2	13
3	19
4	15



Consulta

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

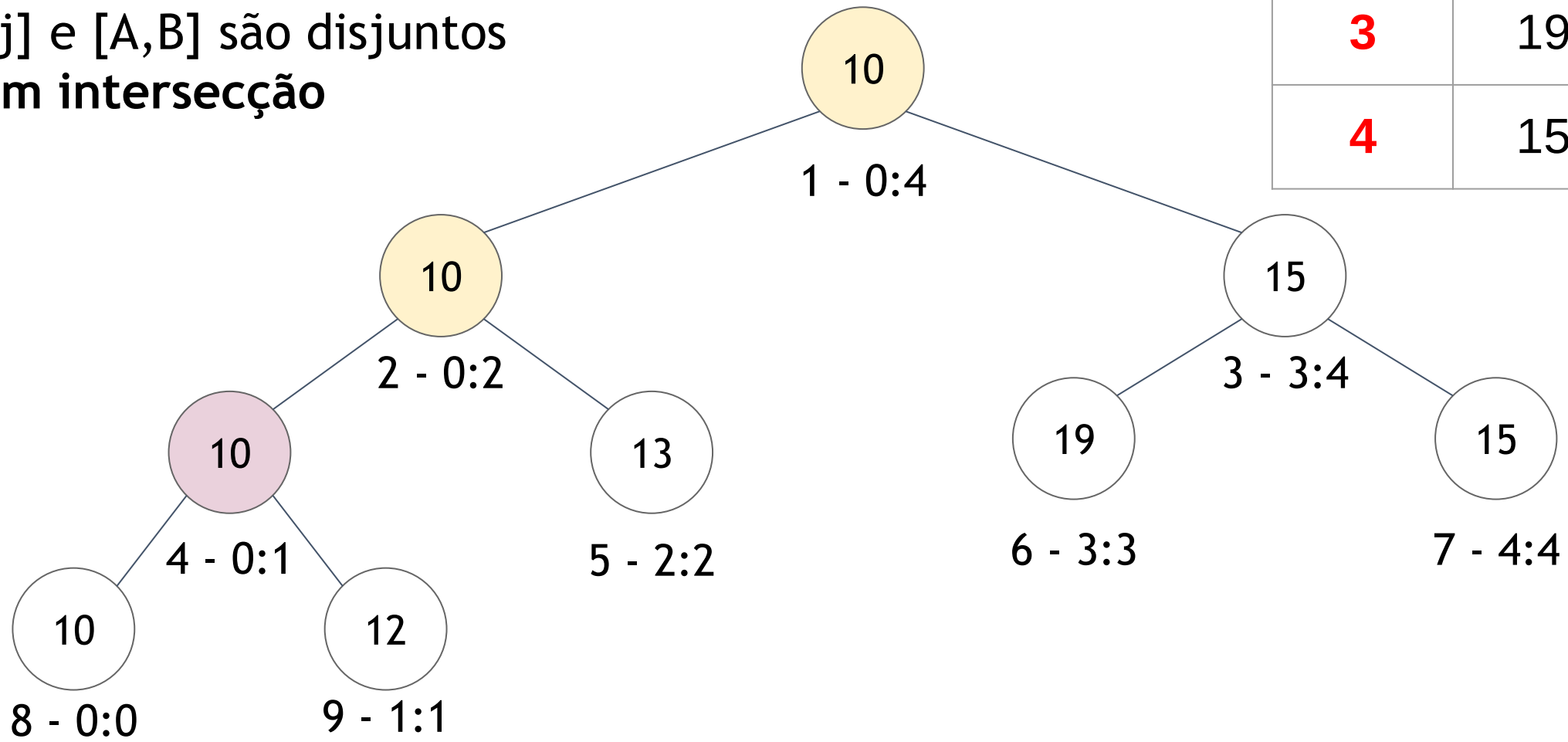
0	10
1	12
2	13
3	19
4	15



Consulta

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

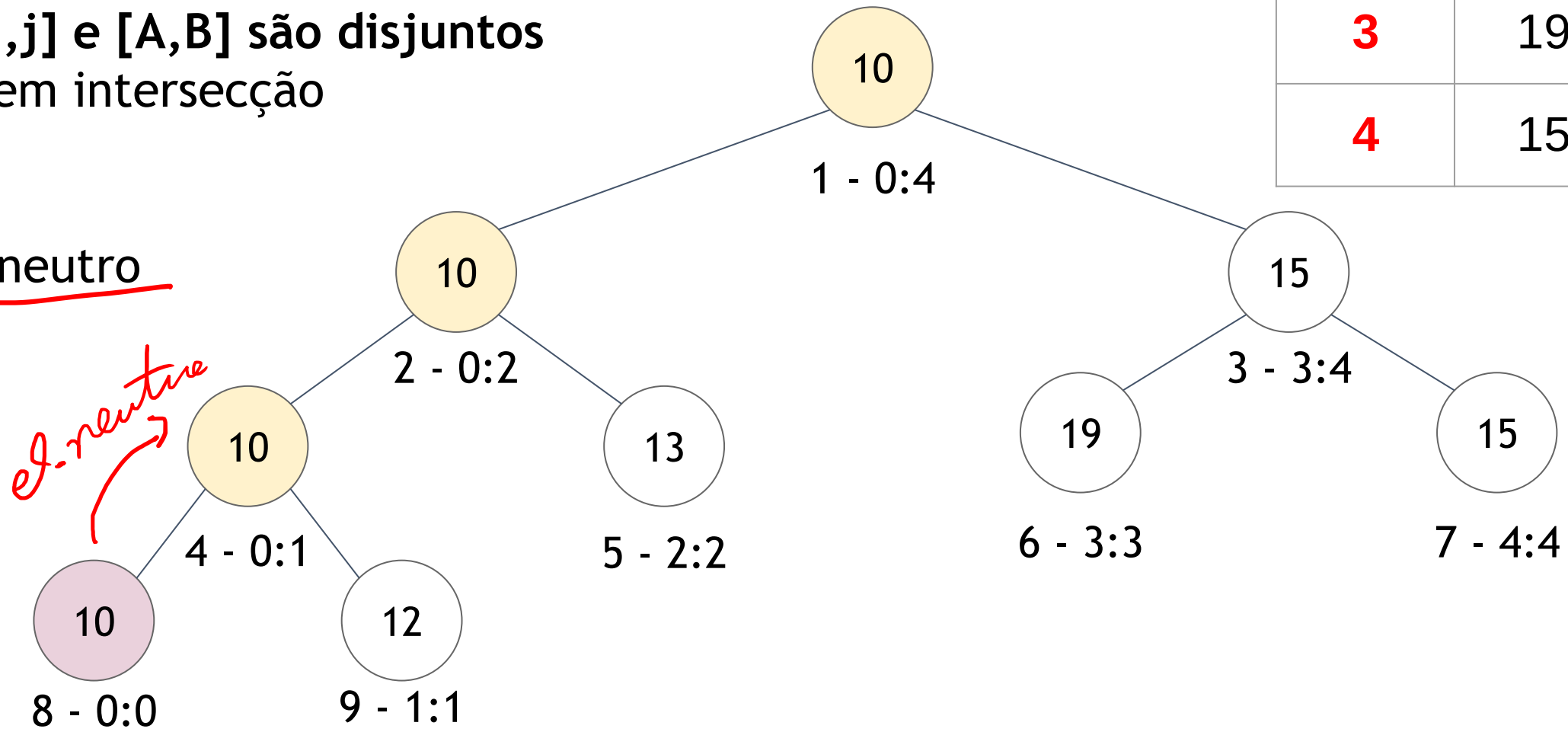


Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

1. [i,j] está em em [A,B]
2. **[i,j] e [A,B] são disjuntos**
3. Tem intersecção

8: el_neutro

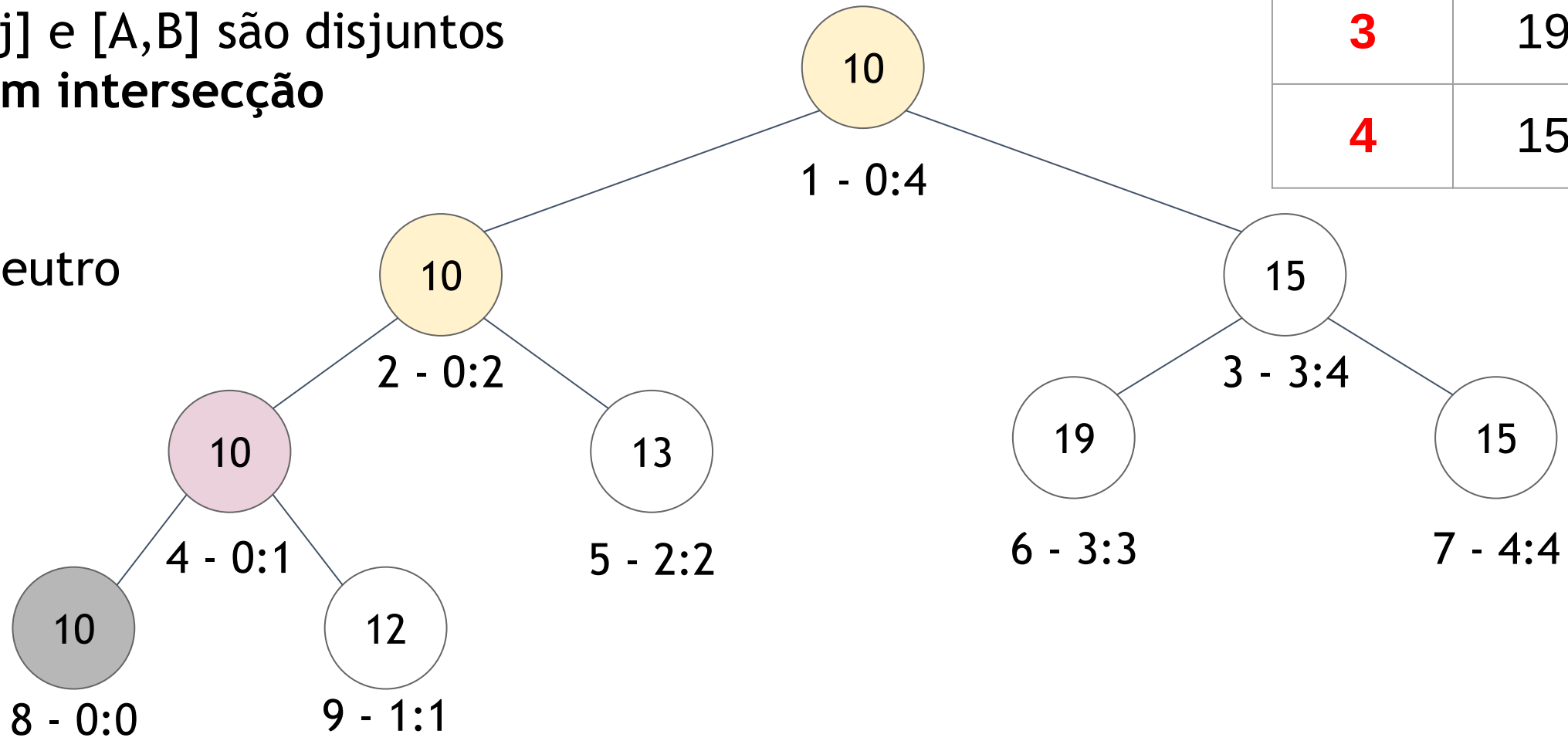


Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

8: el_neutro

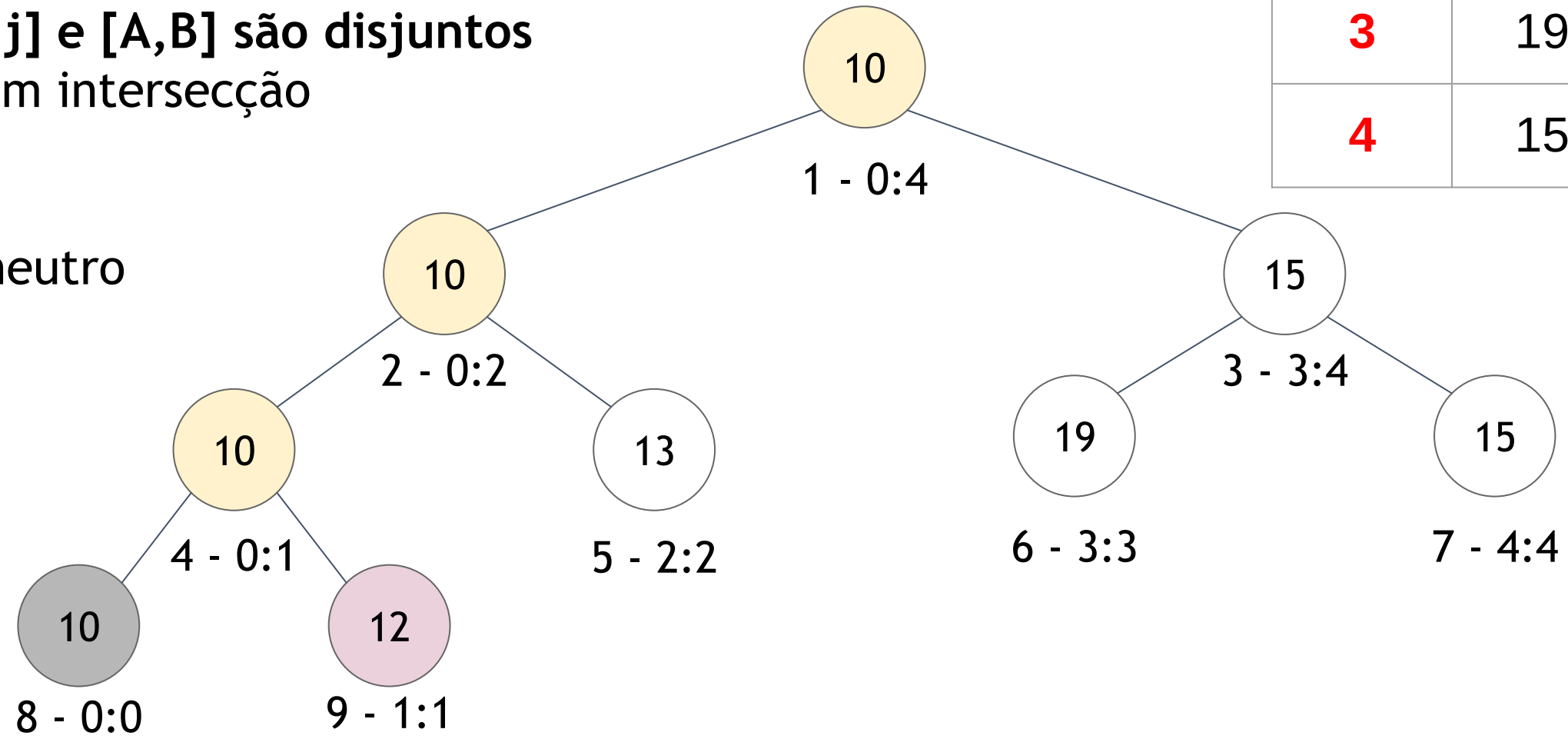


Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

1. [i,j] está em em [A,B]
2. **[i,j] e [A,B] são disjuntos**
3. Tem intersecção

8: el_neutro
9: 12

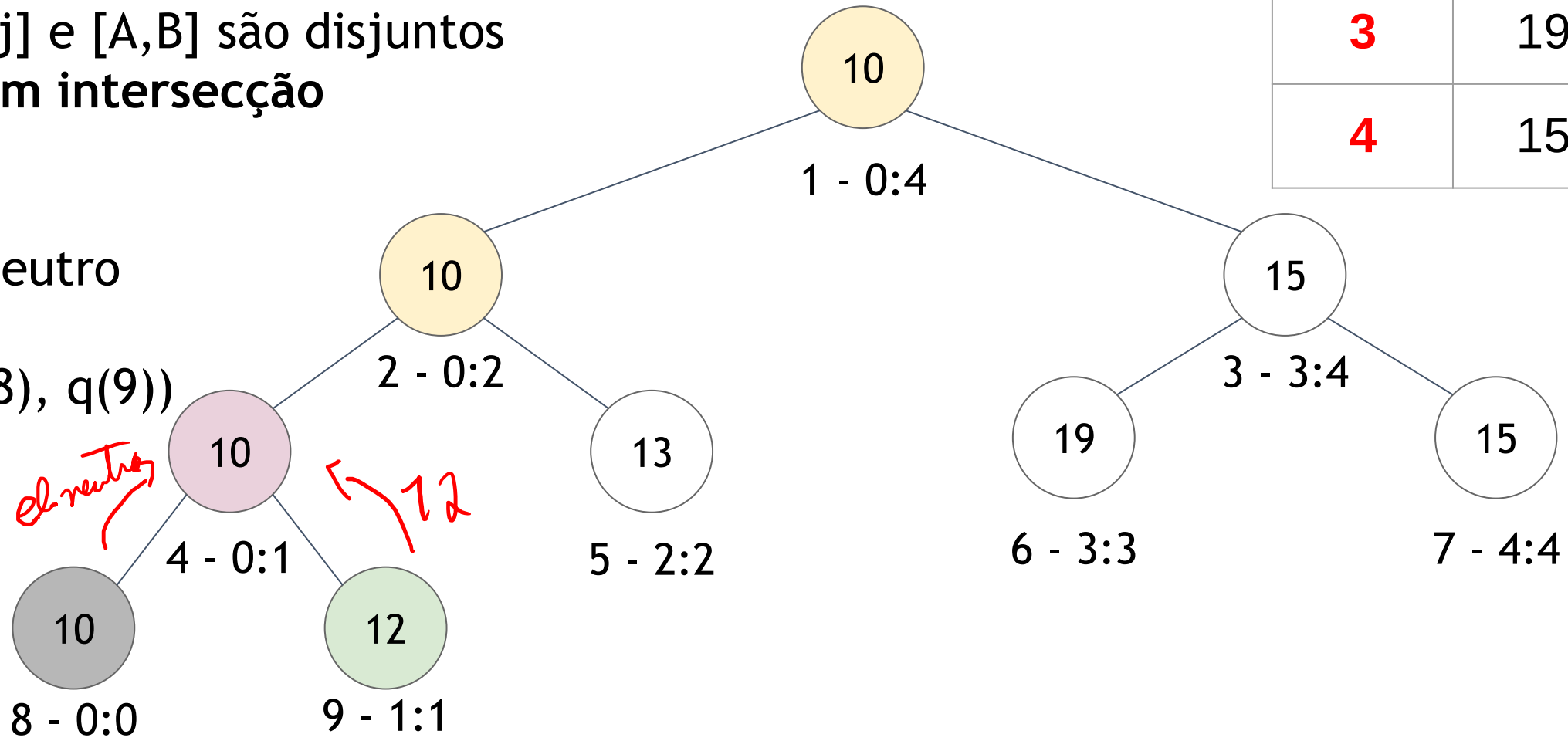


Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

8: el_neutro
9: 12
4: f(q(8), q(9))

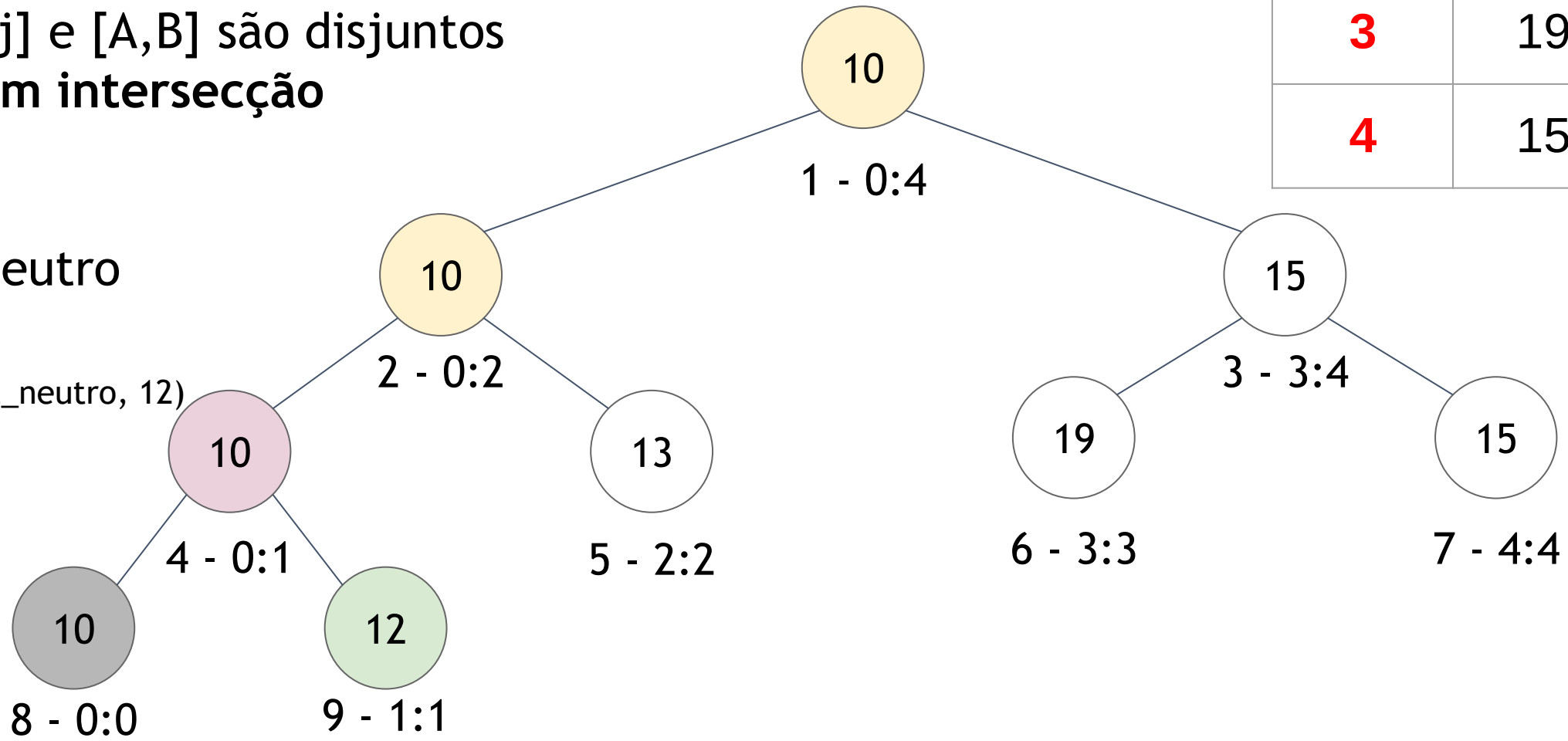


Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

8: el_neutro
9: 12
4: min(el_neutro, 12)

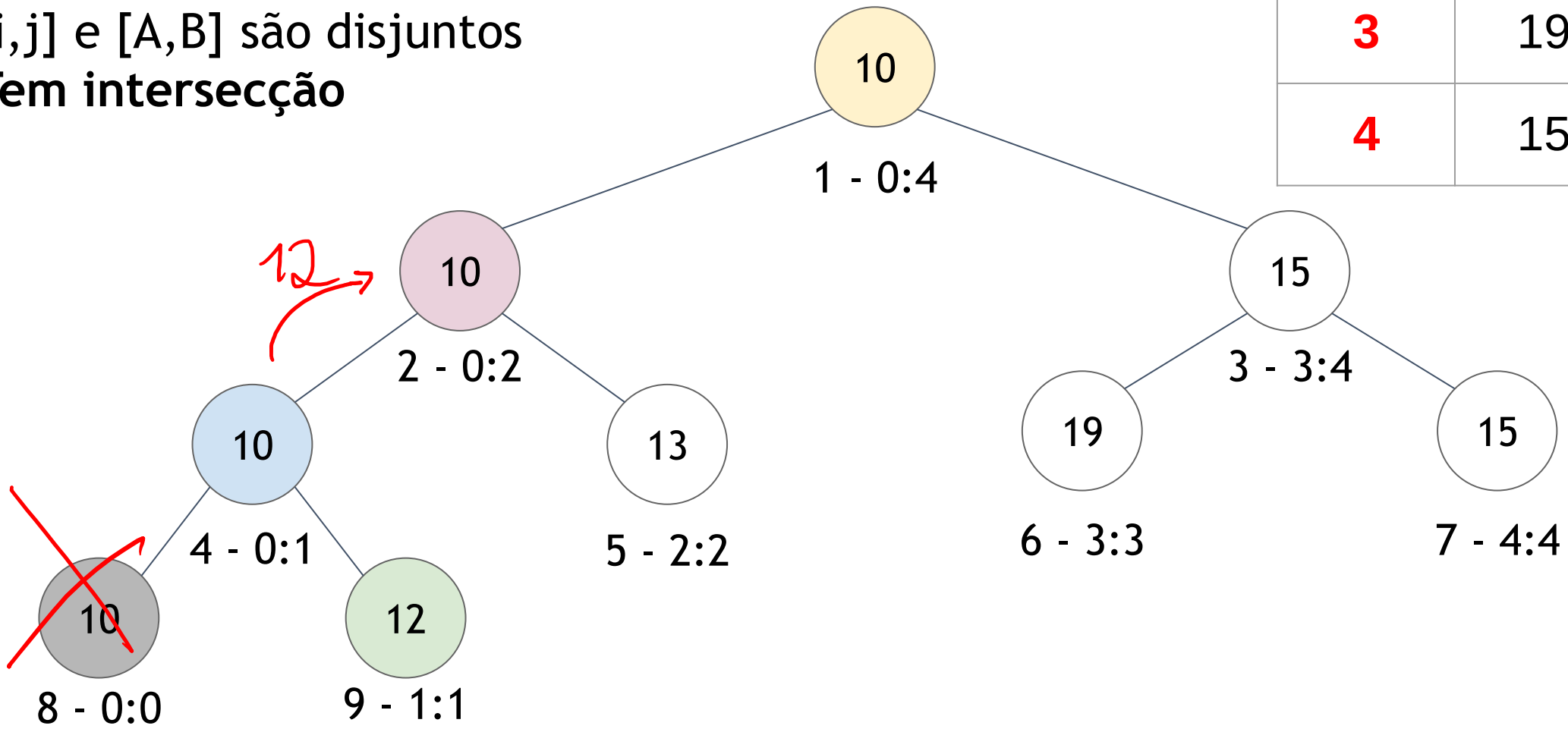


Consulta

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

4: 12

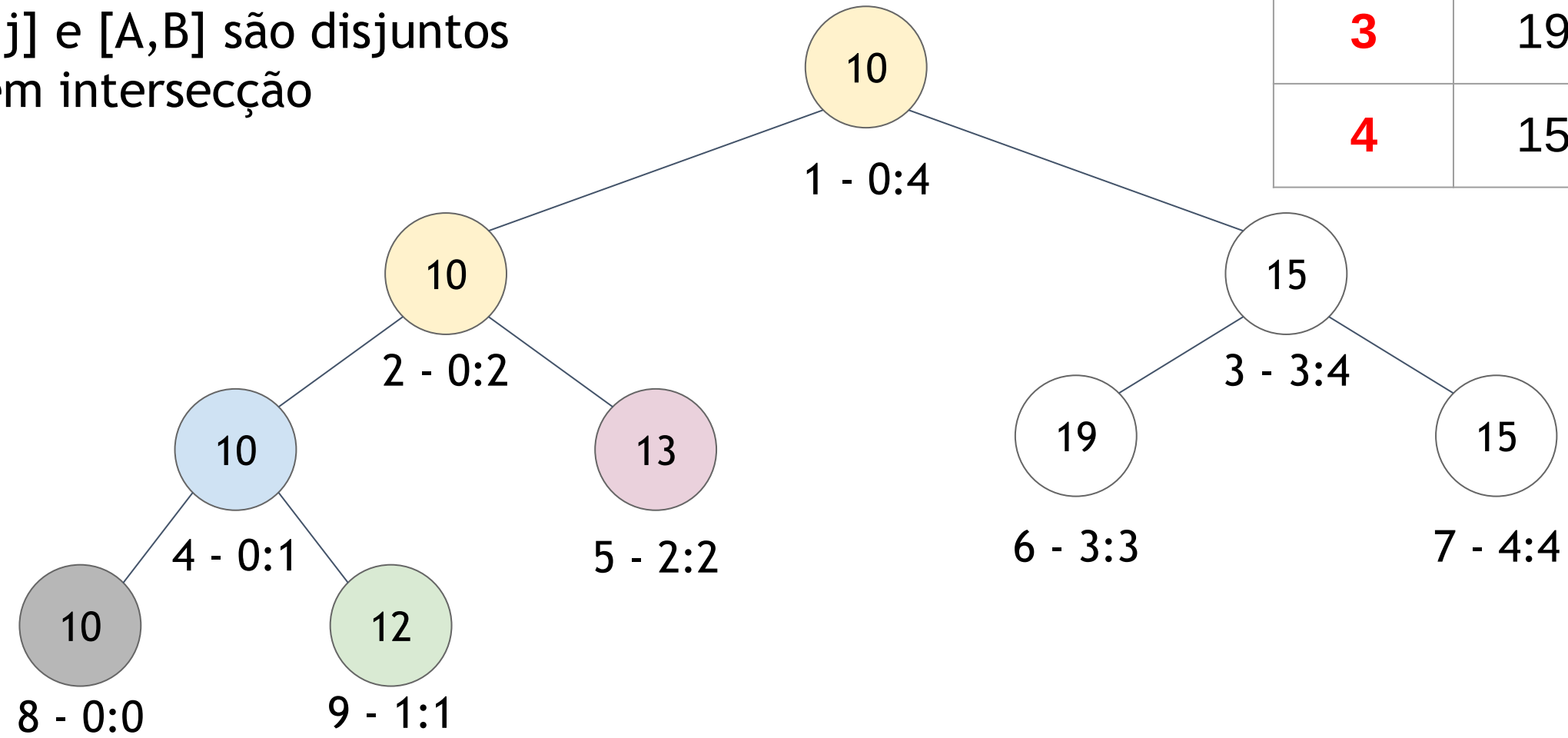


Consulta

1. **[i,j] está em em [A,B]**
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. Tem intersecção

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

4: 12
5: 13

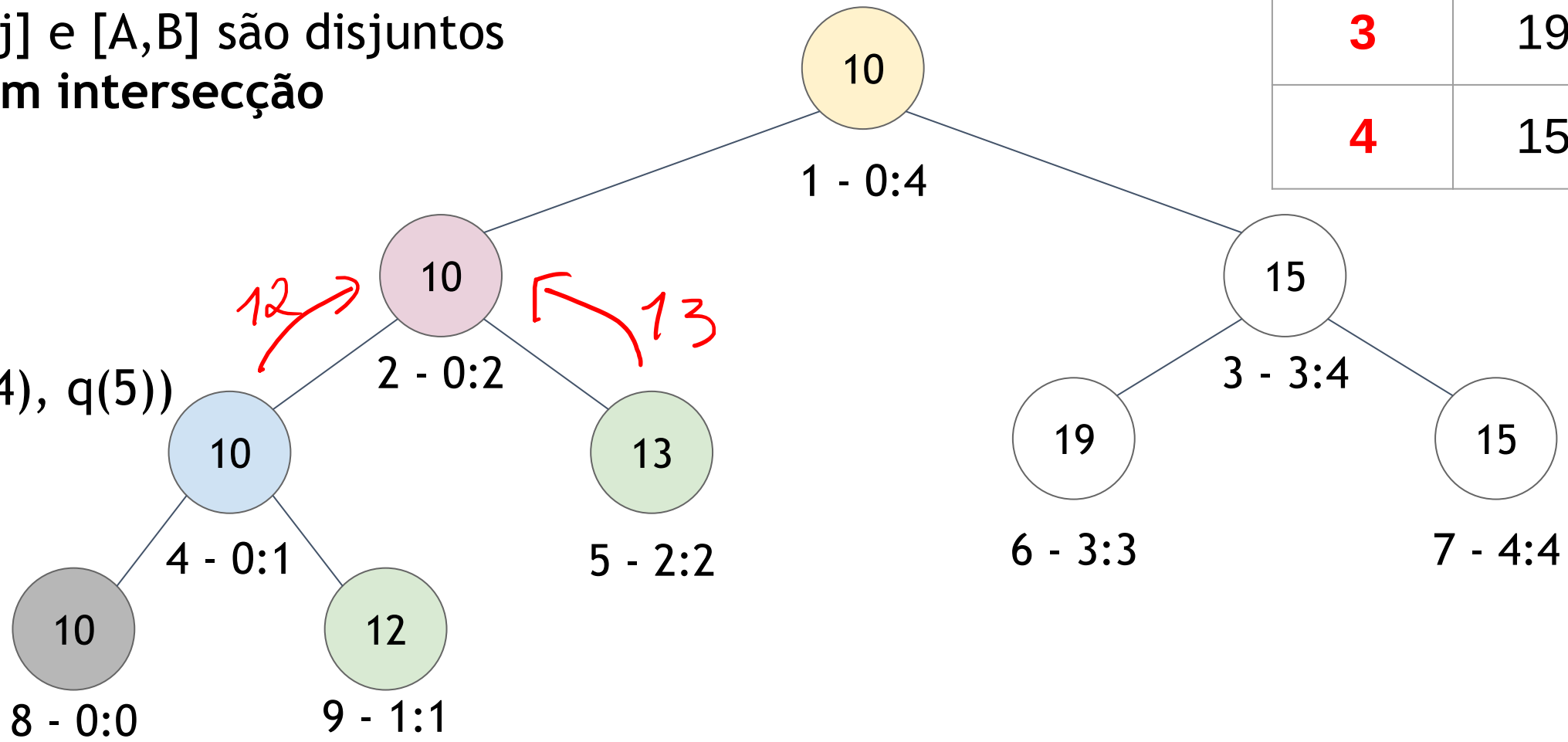


Consulta

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

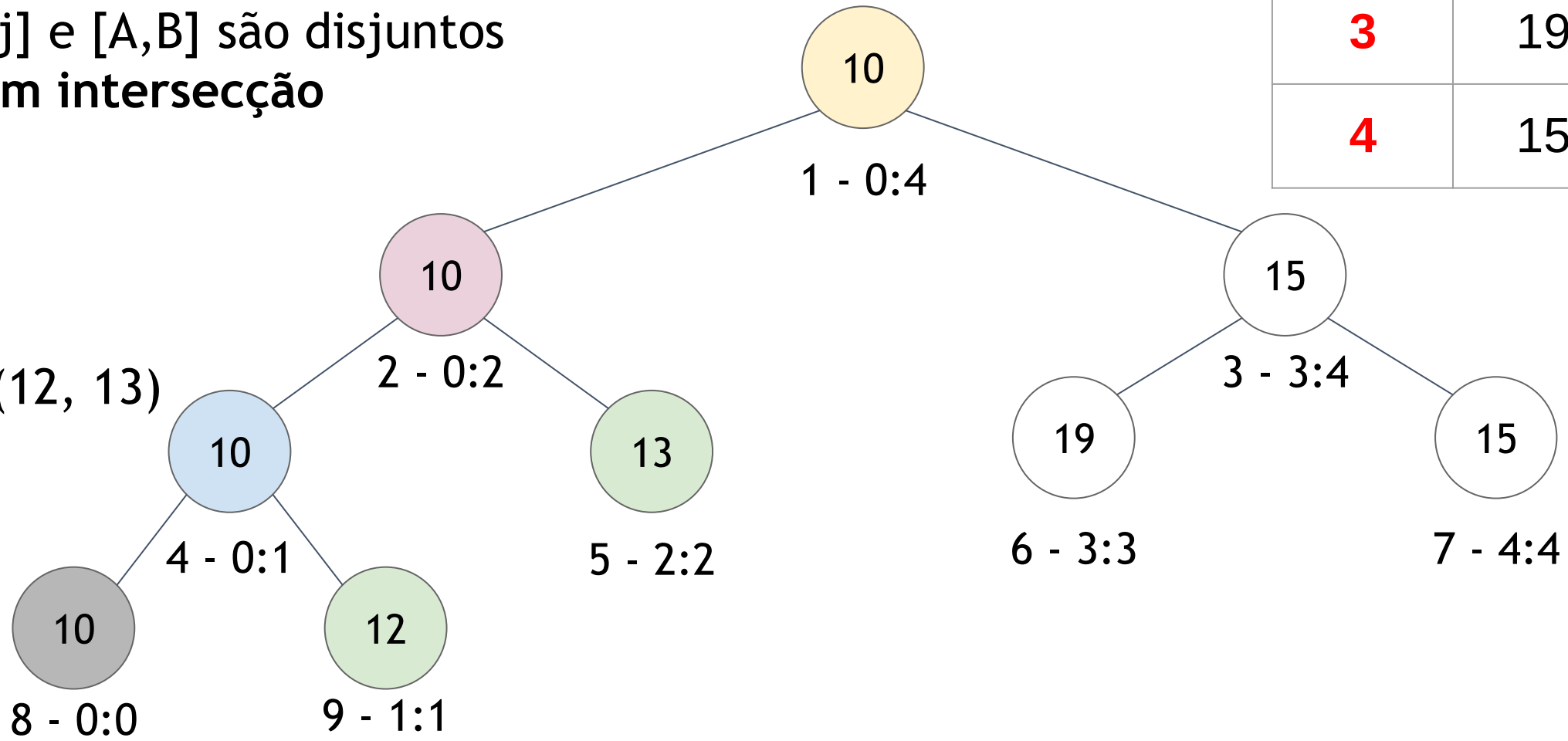
4: 12
5: 13
2: f(q(4), q(5))



Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**



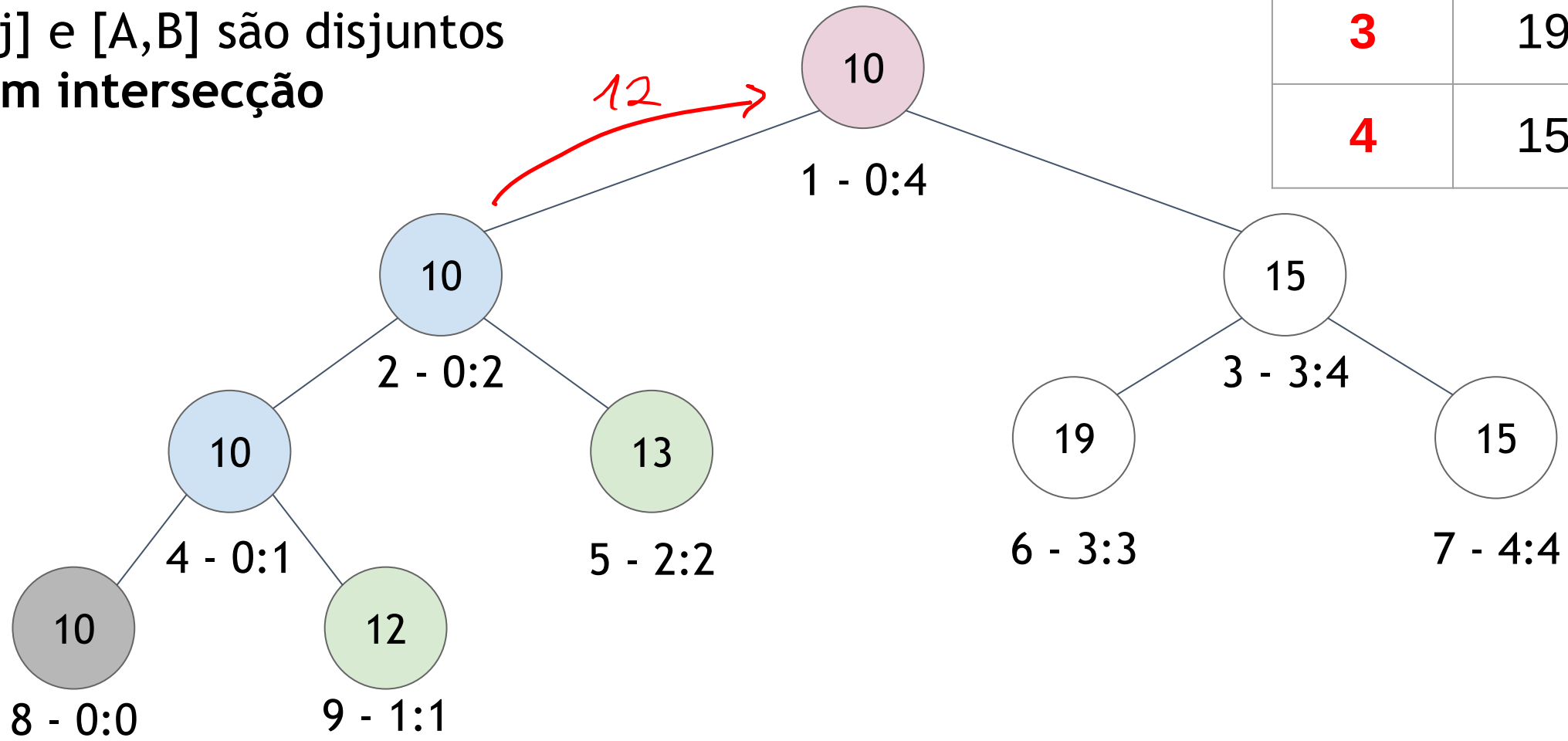
4: 12
5: 13
2: min(12, 13)

Consulta

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

2: 12

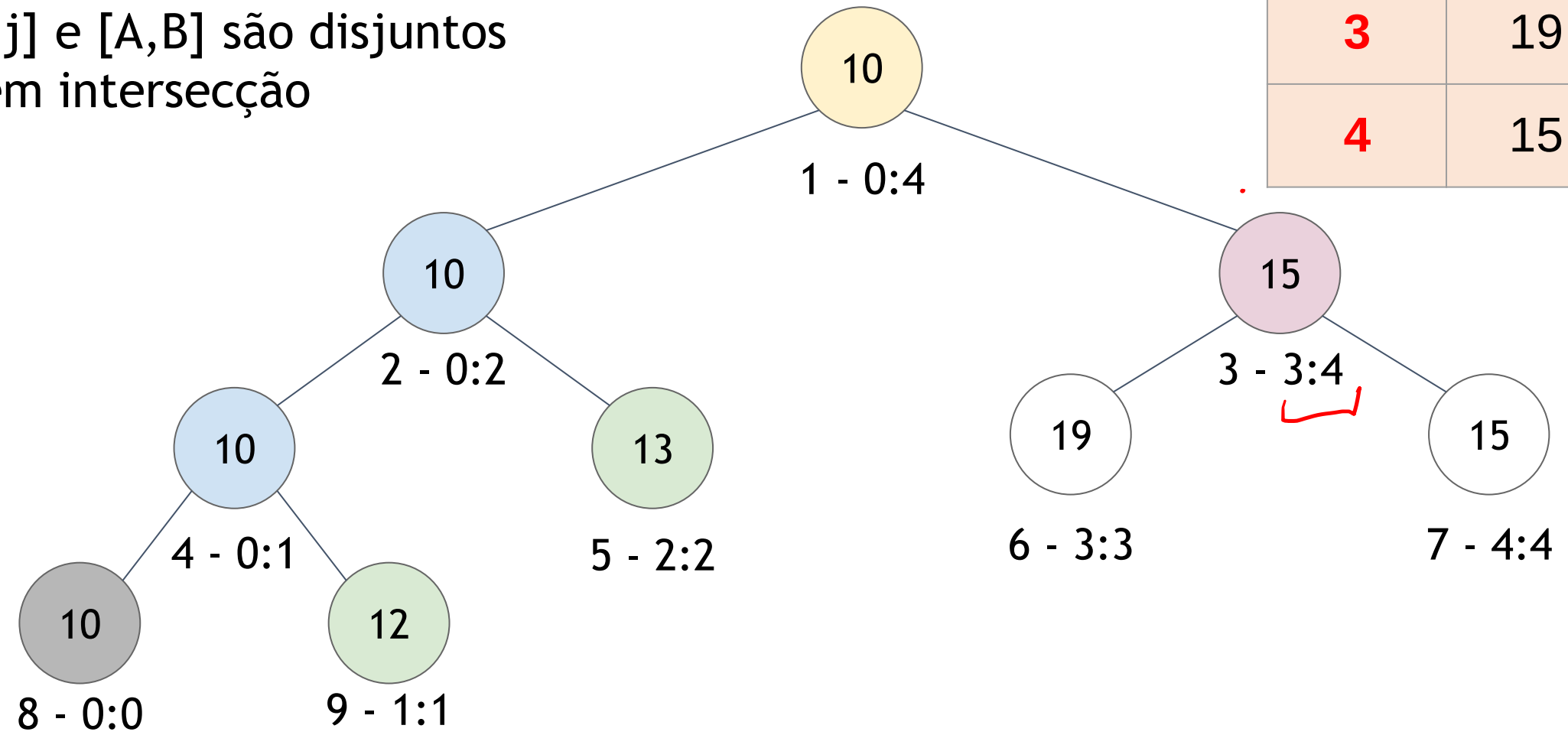


Consulta

1. **[i,j] está em em [A,B]**
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. Tem intersecção

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

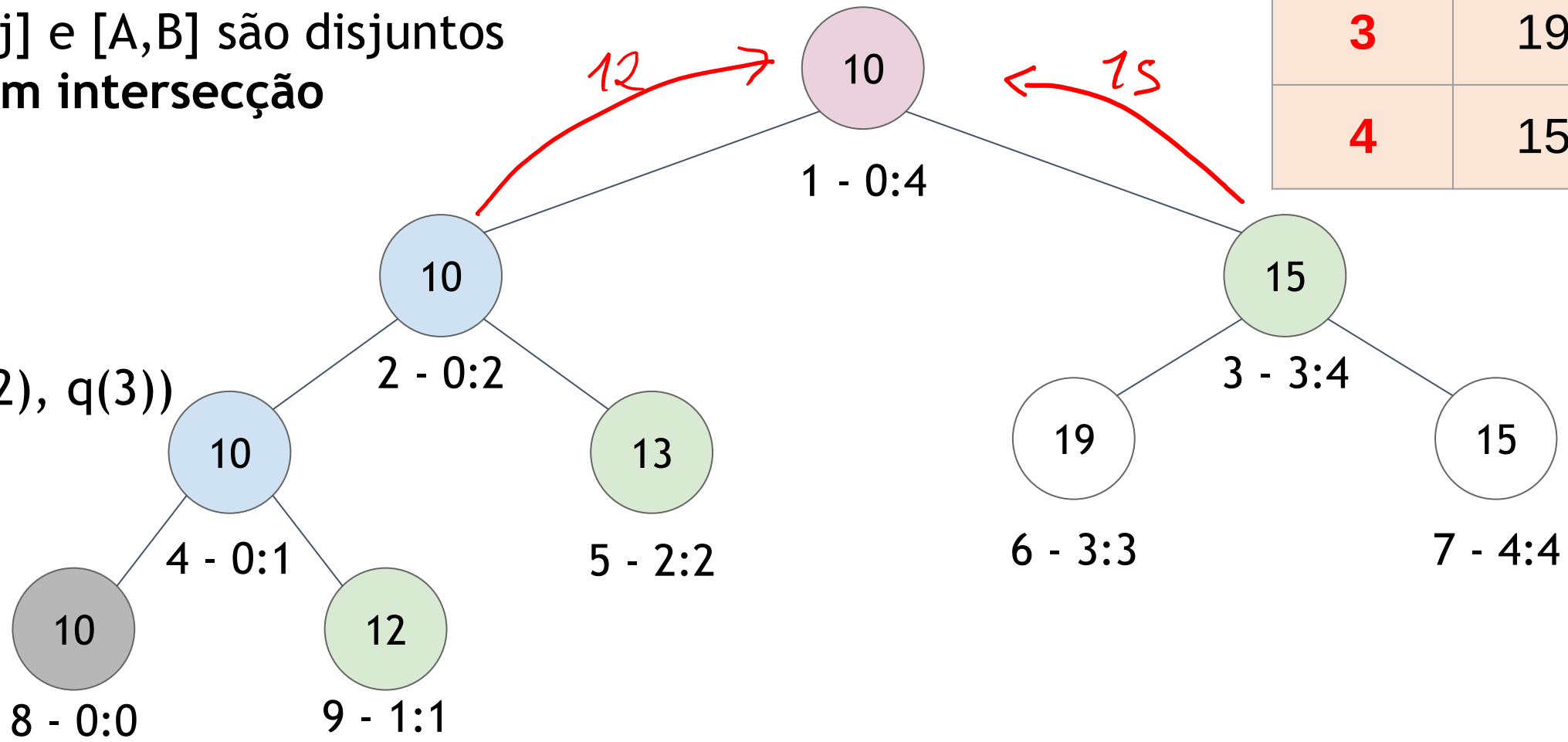
2: 12
3: 15



Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**

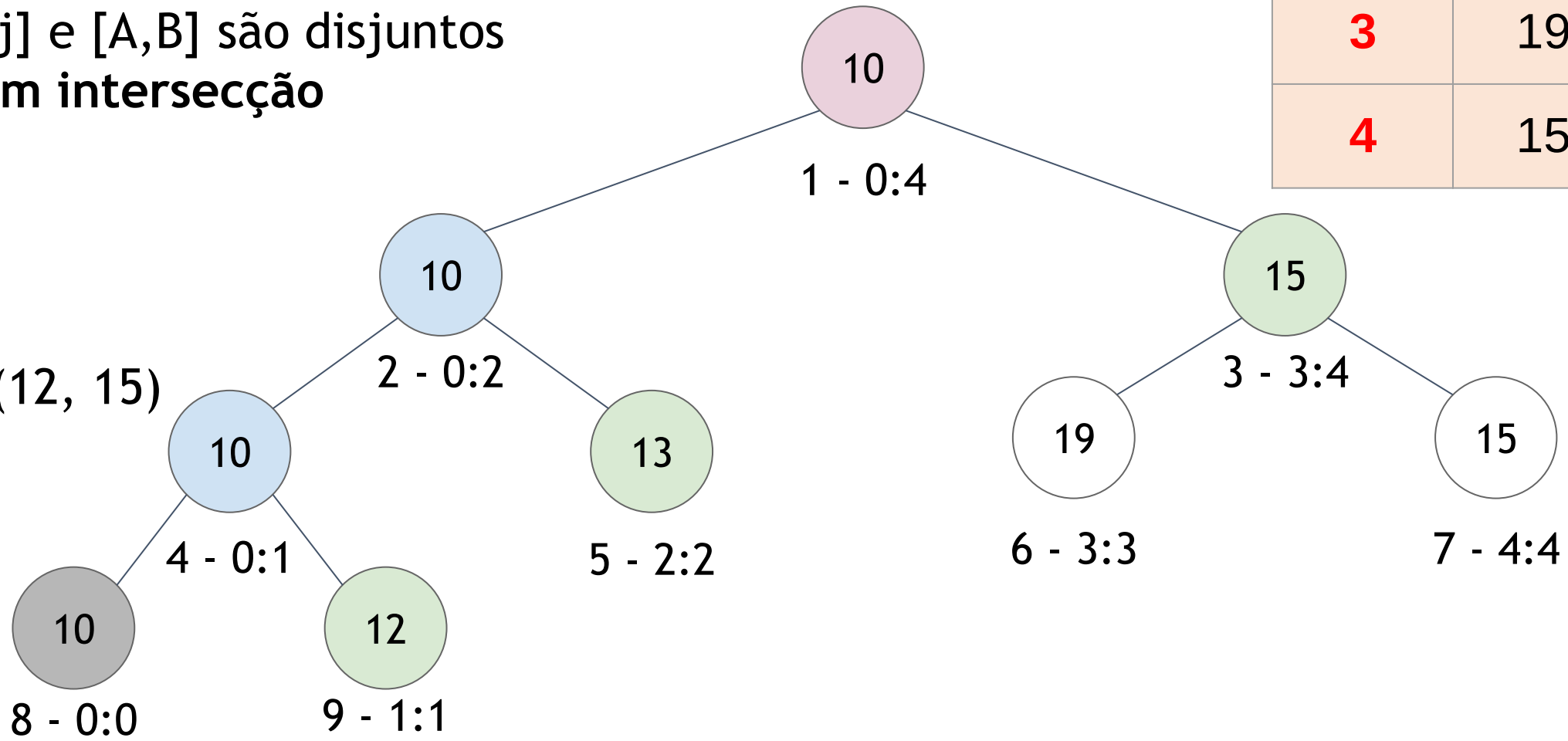


2: 12
3: 15
1: f(q(2), q(3))

Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. **Tem intersecção**



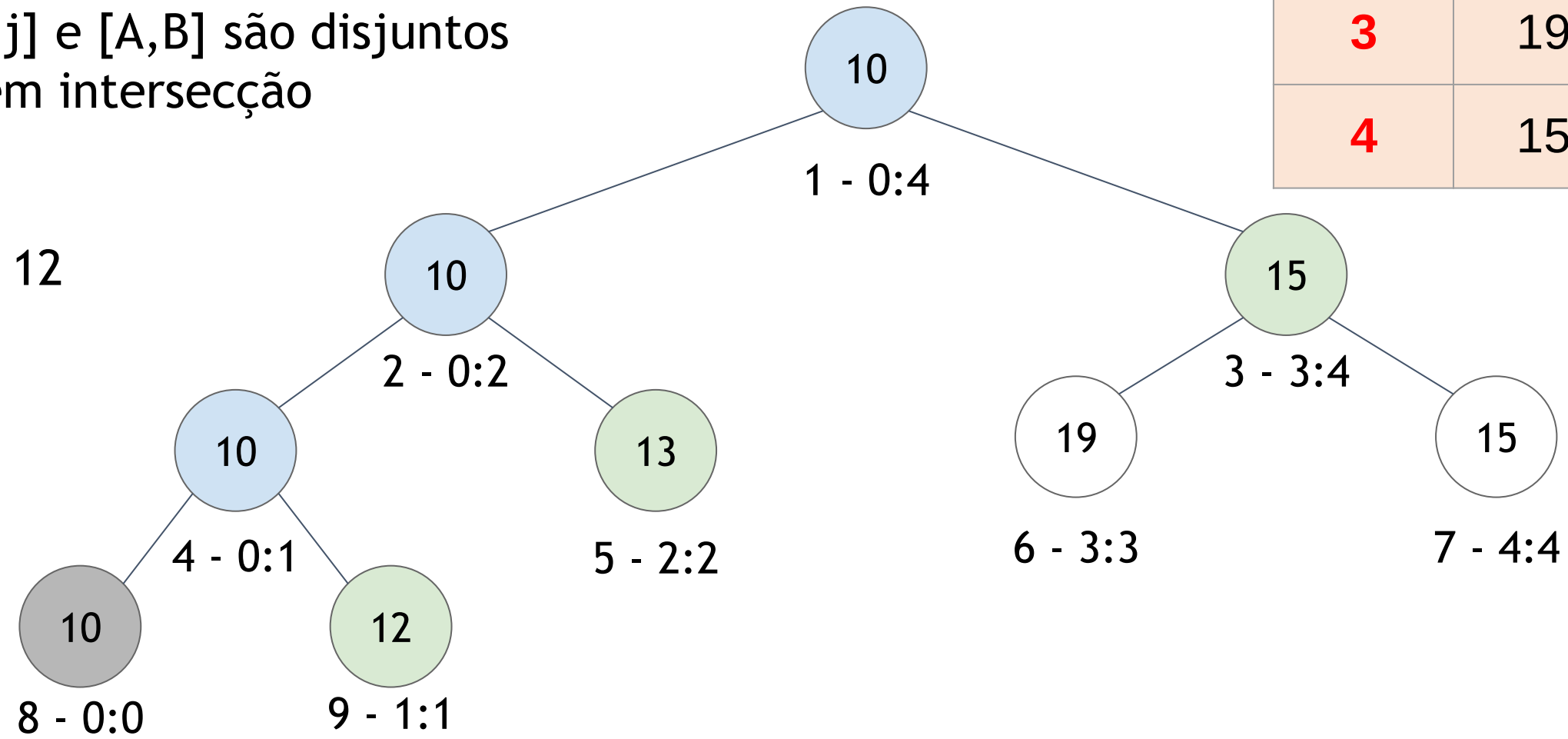
2: 12
3: 15
1: min(12, 15)

Consulta

0	10
1	12
2	13
3	19
4	15

1. [i,j] está em em [A,B]
2. [i,j] e [A,B] são disjuntos
3. Tem intersecção

Resp = 12



Consulta

```
void query(int no, int i, int j, int A, int B)
{
    if(i >= A && j <= B) //Caso 1: [i,j] está incluindo em [A,B]
        return st[no];

    if(j < A || B < i)   //Caso 2: intervalos disjuntos
        return el_neutro;

    //Caso 3: intersecção entre os intervalos
    int mid = (i + j)/2;
    return f(query(no*2, i, mid, A, B),
             query(no*2 + 1, mid + 1, j, A, B));
}
```

Atualizações em intervalos

- Em certas situações, temos que atualizar todas as posições de um intervalo [A,B].
  - Por exemplo, somar o valor 2 em todos os elementos entre as posições 1 e 4 do vetor:

i=	0	1	2	3	4	5
v[i]=	12	4	6	71	2	7

```
update_range(v, 3, 5, 2)
```

i=	0	1	2	3	4	5
v[i]=	12	6	8	73	4	7

Atualizações em intervalos

- Em certas situações, temos que atualizar todas as posições de um intervalo [A,B].
  - A partir das funções que já temos, teríamos que chamar a função update() para cada posição desse intervalo.
  - Nesse caso, a Segment Tree não é muito eficiente, com complexidade $O(n.logn)$ para atualizações em intervalo.

- Nessa situação, a solução seria usar a técnica de Lazy Propagation, que não será abordada nesta oficina.

Departamento de Computação

PROTIVA

Segment Tree

- Para demais detalhes da implementação, consulte: https://github.com/UnBalloon/programacao-competitiva/tree/master/Segment%20Trees%20(%C3%81rvores%20de%20segmento)

Range Queries

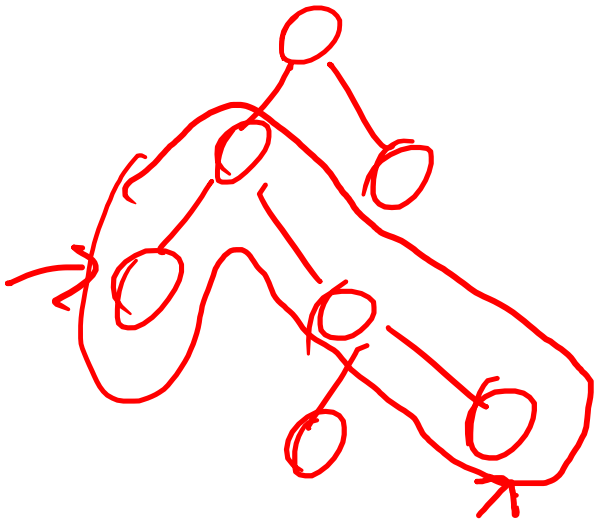
- A Segment Tree também possuem variações ou são aplicadas juntamente com outras técnicas para resolver uma gama maior de problemas:
  - Segment Tree com Lazy Propagation: para casos em que há atualizações em intervalos
  - Segment Tree Dinâmica
  - Persistent Segment Tree
  - 2D Segment Tree

Range Queries

- Material da Summer School 2022 para quem queira se aprofundar sobre “Segment Tree”:
  - Slides: 1 e 2
  - Vídeos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
  - Contests: 1 e 2

Range Queries

- Mas a Segment Tree não é a única Estrutura de Dados própria para trabalhar com *range queries*. Exemplos de outras estruturas:
  - Prefix Sum Array — query O(1), update O(n)
  - BIT (Árvore de Fenwick)
  - Sparse Table — O(1)
  - Square root decomposition
  - Heavy-light decomposition (para árvores)



Departamento de Computação

PROTIVA

Referências

https://www.geeksforgeeks.org/segment-tree-set-1-range-minimum-query/

https://www.geeksforgeeks.org/segment-tree-set-1-sum-of-given-range/

http://www.codcad.com/lesson/53

http://www.codcad.com/lesson/60

https://github.com/UnBalloon/programacao-competitiva/tree/master/Segment%20Trees%20(%C3%81rvores%20de%20segmento)

https://github.com/icmcgema/gema/blob/master/11-Arvore_de_Segmentos.md

https://cp-algorithms.com/data_structures/segment_tree.html

https://linux.ime.usp.br/~matheusmso/mac0499/poster.pdf

https://neps.academy/lesson/266