Exercices d'estimation de pose

Florent Nageotte

13 novembre 2019

Vous trouverez dans ce document les corrections (parfois partielles) des principaux exercices d'estimation de pose. Les énoncés sont rappelés avant les explications.

1 Imagerie 3D

Exercice 1 (difficile)

Exprimer la fonction de coût à minimiser pour une localisation 3D sur la base de droites. On pourra représenter les droites par un point et un vecteur directeur. Combien faut-il de droites pour résoudre le problème ?

Solution La difficulté provient du fait qu'il n'y a pas de représentation minimale des droites de l'espace 3D. Une droite 3D a 4 degrés de liberté (DDLs). Pour s'en convaincre il suffit de voir que 2DDLs ne sont pas définis : la rotation autour de la droite et la translation le long de la droite. Malheureusement, il n'existe pas de représentation à 4 paramètres. La représentation la plus intuitive (il y en a d'autres) est celle d'un point de passage P + d'un vecteur directeur v qu'on considérera normé : $(D) \equiv (P, v)$. On utilise alors 5 paramètres, et le point P peut glisser le long de la droite. L'appartenance d'un point à la droite est alors définie par : $M \in (D) \Longleftrightarrow M = P + \lambda v$ avec $\lambda \in \Re$

On considère dans un premier temps une seule droite, qu'on a représenté dans le repère objet par $({}^{obj}P^1,\ {}^{obj}v)$. Dans le repère de l'imageur 3D (après passage en coordonnées millimétriques) la même droite est représentée par $({}^{img}P^2,\ {}^{img}v)$. P^2 et P^1 sont généralement physiquement différents, puisqu'on travaille avec des droites (il n'y a pas de points particuliers sur celles-ci).

Pour N droites, en absence de bruit, on cherche R^*, t^*, tels que $({}^{img}P_i^2,\ {}^{img}v_i) \equiv (R^*, t^*)({}^{obj}P_i^1,\ {}^{img}v_i)\ \forall i \in \{1, N\}$

On peut exprimer la superposition des droites de différentes façons. Par exemple : ${}^{img}v_i = R^*\ {}^{obj}v_i$ qui aligne les vecteurs directeurs et $R^*\ {}^{obj}P_i^1 + t^* -{}^{img}\ P_i^2 = \lambda_i\ {}^{img}v_i$ qui exprime que P_i^1 transformé dans le repère de l'imageur doit être sur la droite du repère imageur, donc que le vecteur allant de P_i^2 à P_i^1 transformé est parallèle au vecteur directeur dans le repère imageur.

On a donc deux critères à respecter simultanément qui ont des dimensions différentes : l'un concerne des vecteurs normés, l'autre des points. On peut envisager de résoudre en deux temps : on calcule R^* à partir du premier critère et on déduira ensuite t^* du deuxième critère.

— Résolution de la rotation : Le système de la rotation fournit 2 N équations indépendantes pour trois inconnues (à condition que les vecteurs directeurs des droites ne soient pas parallèles entre eux) $\Longrightarrow$ on a besoin de deux droites pour obtenir R^*. On peut par exemple résoudre avec la méthode de Horn. (Attention ! la méthode nécessite 3 vecteurs non coplanaires. Dans le cas de vecteurs coplanaires (notamment 2 vecteurs seulement) il vaut mieux alors utiliser la méthode de résolution directe)

— Une fois R^* déterminée, le système pour la translation fournit 3N équations pour 3+N inconnues (car les λ_i sont inconnus). On a donc besoin de deux droites minimum pour résoudre.
Le système peut se mettre sous la forme linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} I_3 & -{}^{img}v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ I_3 & 0 & -{}^{img}v_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ I_3 & 0 & \cdots & 0 & -{}^{img}v_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{img}P_1^2 - R^* \, {}^{obj}P_1^1 \\ \vdots \\ {}^{img}P_N^2 - R^* \, {}^{obj}P_N^1 \end{pmatrix}$$

La transformation globale peut donc être obtenue à partir de deux droites (non parallèles) seulement.

Exercice 3

On considère un objet constitué de 5 billes dont la position dans le repère objet est donnée en mm par :
B1 = [0 ;0 ;0], B2 = [50 ;0 ;0], B3 = [0 ;50 ;0], B4 = [50 ; 50 ;0], B5 = [20 ;20 ;20]
On a obtenu l'image 3D de cet objet à partir d'une acquisition en spirale sur un CT-scanner. Les billes ont ensuite été extraites dans des coupes 2D et on a obtenu les coordonnées suivantes :
p1 = [216 ; 196] pix. pour slicelocation = 100mm
p2 = [316 ; 196] pix. pour slicelocation = 100mm
p3 = [216 ; 266.5] pix. pour slicelocation = 135.6 mm
p4 = [316 ; 266.5] pix. pour slicelocation = 135.6 mm
p5 = [256 ; 196] pix. pour slicelocation = 128.4mm
On a extrait des metadonnées dicom les informations suivantes : - PixelSpacing : 0.5 \ 0.5 - Rows : 512 - Columns : 512 - SliceThickness : 0.6

1. Donnez les paramètres intrinsèques de l'imageur (ceux qui peuvent être obtenus)
2. Calculez une estimation de la transformation entre le scanner et l'objet en utilisant tout ou partie des informations disponibles.
3. Montrez que si les paramètres intrinsèques de l'imageur ne sont pas disponibles dans les metadonnées on peut tout de même résoudre le problème et obtenir les facteurs de grandissements de l'imageur. On ne demande pas de résoudre le problème numériquement, mais de montrer que les informations sont disponibles et de proposer une méthode pour les extraire.

Méthode de résolution

1. On commence par déterminer les paramètres intrinsèques de l'imageur. A partir de PixelSpacing on obtient les grandissements selon x et y (par inversion). La position de l'origine dans l'image n'est pas donnée. On ne connaît pas la distance entre deux coupes successives, donc on ne peut pas déterminer le grandissement dans la 3ème direction.
2. Une fois les paramètres de grandissement connus, on transforme les coordonnées des points image en données métriques (remarque : les coordonnées selon z sont déjà données en mm, il n'est donc pas nécessaire de connaître le grandissement dans cette direction). Il faut ensuite résoudre un problème de localisation 3D. Si on ne dispose pas d'outils de calcul algébrique, on utilise la méthode à base de 3 points vue en cours.

3. Si les paramètres intrinsèques ne sont pas disponibles, l'idée est de les retrouver à partir des points disponibles. Il est montré dans le cours (dans la partie étalonnage des imageurs 3D) que le problème d'étalonnage peut être résolu à partir de 4 points non coplanaires. Nous avons ici 5 points non coplanaires, il est donc possible d'étalonner l'imageur à partir d'un objet dont la pose est inconnue. En résolvant le problème d'étalonnage on retrouvera les paramètres intrinsèques ET les paramètres extrinsèques (la pose).

1.1 Exercice 4

Montrer qu'en général on peut obtenir les paramètres intrinsèques d'un imageur 3D à partir de seulement 3 points en utilisant la conservation de distances entre les points. Montrer que pour certains cas particuliers la résolution avec cette méthode n'est pas possible.

Solution On utilise l'invariance des distances au déplacement entre imageur et objet. On considère sans perte de généralité que l'origine de l'image se trouve à l'origine de l'imageur ($u_v = v_c = w_c = 0$). Soit P_k les points de l'objet, $p_k = (u_k, v_k, w_k)^T$ les points image en dimensions pixelliques et $m_k = (x_k, y_k, z_k)^T$ les points image en dimensions métriques, on a :

— $\|m_i m_j\| = \|P_i P_j\|$

— $m_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_k}{\alpha_x} \\ \frac{v_k}{\alpha_y} \\ \frac{w_k}{\alpha_z} \end{pmatrix}$

— $\Longrightarrow \|m_i m_j\|^2 = \frac{1}{\alpha_x^2}(u_j - u_i)^2 + \frac{1}{\alpha_y^2}(v_j - v_i)^2 + \frac{1}{\alpha_z^2}(w_j - w_i)^2$

— $\Longrightarrow \frac{1}{\alpha_x^2}(u_j - u_i)^2 + \frac{1}{\alpha_y^2}(v_j - v_i)^2 + \frac{1}{\alpha_z^2}(w_j - w_i)^2 = \|P_i P_j\|^2$
équation linéaire à 3 inconnues $\frac{1}{\alpha_x^2}$, $\frac{1}{\alpha_y^2}$, $\frac{1}{\alpha_z^2}$.

— Pour obtenir 3 équations indépendantes il faut au moins N = 3 points pour lesquels $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ apparaissent (on obtient C_N^2 équations)

Si le plan contenant les 3 points est normal à un des axes de l'image, alors le grandissement dans la direction correspondante n'apparaît pas dans l'équation et on ne peut donc pas l'estimer. NB : si le plan est presque normal à une direction principale de l'image, la sensibilité d'estimation du grandissement correspondant sera très forte, ce qui génèrera des estimations bruitées.

Exercice 5

Pour de la chirurgie orthopédique, la jambe du patient est fixée à la table d'opération à l'aide d'un support marqué de 4 emplacements (trous) de coordonnées (en mm) $E_1 = [100, 0, 0]^T$, $E_2 = [300, 0, 0]^T$, $E_3 = [200, 200, 0]^T$, $E_4 = [0, 0, 200]^T$ dans le repère du support. Le chirurgien se sert d'un pointeur vu par un système de localisation pour indiquer ces emplacements. Le pointeur est constitué de 3 boules de coordonnées (en mm dans le repère du pointeur) $B_1 = [0, 0, 0]^T$, $B_2 = [20, 0, 0]^T$, $B_3 = [50, 0, 0]^T$. L'extrémité du pointeur a pour coordonnées $T = [100, 0, 0]^T$ dans le repère du pointeur.

Un utilisateur a pointé les 3 premiers emplacements et le localisateur a fourni les mesures de positions (en mm) et d'orientation du marqueur par rapport au repère du localisateur suivantes

$$t_1 = \begin{pmatrix} 486.5 \\ 357.7 \\ 1517.7 \end{pmatrix} R_1 = \begin{pmatrix} 0.7071 & 0.5000 & -0.5000 \\ -0.3536 & 0.8624 & 0.3624 \\ 0.6124 & -0.0795 & 0.7866 \end{pmatrix}$$

$$t_2 = \begin{pmatrix} 657.4 \\ 365.3 \\ 1637.8 \end{pmatrix} R_2 = \begin{pmatrix} 0.1419 & 0.5702 & -0.8091 \\ 0.0164 & 0.8160 & 0.5779 \\ 0.9898 & -0.0952 & 0.1064 \end{pmatrix}$$

$$t_3 = \begin{pmatrix} 461.4 \\ 574.8 \\ 1614.1 \end{pmatrix} R_3 = \begin{pmatrix} 0.6984 & 0.4493 & -0.5571 \\ -0.4847 & 0.8696 & 0.0938 \\ 0.5266 & 0.2045 & 0.8252 \end{pmatrix}$$

Déterminez la transformation rigide entre le localisateur et le support marqué.

Méthode de résolution On recherche une transformation 3D, il faut donc se ramener à un problème de localisation 3D, donc exprimer des points physiquement identiques dans le repère du support et du localisateur. Le pointeur est utilisé pour pointer les trous du support, ce seront donc les points à utiliser. Leurs coordonnées sont directement connues dans le repère du support. Il reste à les exprimer dans le repère du localisateur. Le localisateur renvoie les position et orientation du pointeur. Or l'extrémité utilisée pour pointer est connue dans le repère du pointeur.

Pour chaque configuration de pointage, on a donc :

$$^{loc}t_{trou_i} = \ ^{loc}t_{pointeur_i} + \ ^{loc}R_{pointeur_i} \ ^{pointeur}t_{extremite}$$

$^{pointeur}t_{extremite} = (100; 0; 0)^T$, on obtient donc la position des 3 premiers trous dans le repère du localisateur. Il ne reste qu'à résoudre le problème de localisation 3D en utilisant 3 points.

Résultats Positions des trous dans le repère du localisateur : $P_1 = (557.2, 322.3, 1578.9)^T$, $P_2 = (671.6, 366.9, 1736.8)^T$, $P_3 = (531.2, 526.3, 1666.8)^T$.

Transformation recherchée :

$$^{loc}T_{obj} = \begin{pmatrix} 0.5720 & -0.4157 & -0.7071 & 500 \\ 0.2230 & 0.9084 & -0.3536 & 300 \\ 0.7893 & 0.0446 & 0.6123 & 1500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Imageurs à projection perspective

Exercice 6

1. Déterminez la matrice des paramètres intrinsèques d'un système d'angiographie (C-arm). Vous vous baserez sur les informations suivantes obtenues dans les metadonnées DICOM d'une image :
   - DistanceSourceToDetector = 1200 (mm)
   - Rows = 1200
   - Column = 1000
   - DistanceSourceToPatient = 800 (mm)
   - ImagerPixelSpacing = (0,3 ; 0,3) (mm)
   - EstimatedRadiographicMagnificationFactor = 1,5
   - WindowCenter = 1650
   - WindowWidth = 2300
   - PhysicalDetectorSize = (300 ; 360) (mm)

Solution On a besoin des paramètres de grandissement G_x, G_y et de la position de la projection orthogonale de la source de rayons X sur le plan du capteur, de sorte à reconstituer la matrice $K = \begin{pmatrix} G_x & 0 & u_c \\ 0 & G_y & v_c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le grandissement dépend de la distance entre source et capteur (équivalent à la focale d'une caméra) et de la taille des pixels, c'est-à-dire du rapport entre le nombre de pixels et la taille du capteur :
$G_x = f\alpha_x = DistanceSourceToDetector \frac{Columns}{PhysicalDetectorSize} = 1200\frac{1000}{300} = 4000$, idem pour
$G_y = f\alpha_y = DistanceSourceToDetector \frac{Rows}{PhysicalDetectorSize} = 1200\frac{1200}{360} = 4000$.
NB : ImagerPixelSpacing donne directement les valeurs de $\frac{PhysicalDetectorSize}{Rows}$ et de $\frac{PhysicalDetectorSize}{Columns}$ qu'on vient de calculer.
La projection de la source sur le capteur n'est pas donnée, on supposera donc qu'elle est centrée, donc en $(500, 600)$ pixels. Attention WindowCenter et WindowWidth indiquent la fenêtre de seuillage en niveaux Hounsfield utilisée pour afficher l'image, cela n'a rien à voir avec les paramètres géométriques. Finalement on a donc : $K = \begin{pmatrix} 4000pix/mm & 0 & 500pix \\ 0 & 4000pix/mm & 600pix \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculez la position image du point dont les coordonnées dans le repère du C-arm **sont données par** $\begin{pmatrix} \mathbf{20} \\ \mathbf{100} \\ \mathbf{1000} \end{pmatrix}$

   Solution Il faut appliquer la projection perspective :

$$\lambda \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = KP = \begin{pmatrix} 580000 \\ 1000000 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

   Le point image est obtenu en normalisant la 3ème coordonnée, soit : $(u, v) = (580, 1000)$.

3. Deux points image sont écartés de 100 pixels. Quelle est leur distance réelle ?

   Solution Il est impossible de répondre à cette question, car le lien entre distance image et distance réelle est dépendant de la profondeur des points qui n'est pas donnée ici.

4. Deux points de la table sont écartés de 50 pixels. Pouvez-vous estimer leur distance réelle ? Peut-on utiliser cette estimation pour faire du recalage ? Que faut-il alors faire ?

   Solution La distance de la source à la table est donnée par le champ DistanceSourceToPatient. Il s'agit de la profondeur au niveau du centre de l'image car, en général, selon l'orientation du C-arm, la table n'a pas une profondeur uniforme par rapport à l'imageur. Supposons que les points sont à la profondeur estimée 800mm. En réécrivant les équations de la projection perspective pour chacun des points, on obtient alors $d_{im} = G_x \frac{D_{obj}}{Z_{obj}}$, dont on déduit $D_{obj} = 10mm$. NB : cela fonctionne car ici $G_x = G_y$. Si ce n'était pas le cas, il faudrait connaître l'orientation du vecteur reliant les points dans l'image.

Le résultat est approximatif. Il peut servir à estimer une distance entre points, c'est notamment ce qui est fait lorsque le radiologue "mesure" la distance entre 2 points qu'il a définis dans l'image. En revanche on ne peut pas se servir de telles approximations pour faire du recalage. Pour cela il faudra utiliser des objets calibrés pour lesquels la distance entre points est connue. Il faut également que l'image de l'objet contienne en elle-même l'information de profondeur, ce qui est possible à partir de 4 points en projection perspective.

Exercice 8

On considère un objet constitué de 5 points de coordonnées : $P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On obtient une image de cet objet par une caméra de paramètres $K = \begin{pmatrix} 800 & 0 & 400 \\ 0 & 800 & 400 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On extrait des points image de coordonnées $p_1 = \begin{pmatrix} 416 \\ 368 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 565 \\ 426 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 518.5 \\ 571 \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} 382.5 \\ 506.5 \end{pmatrix}$, $p_5 = \begin{pmatrix} 496.5 \\ 447.5 \end{pmatrix}$.

On veut déterminer la position et l'orientation de l'objet par rapport à la caméra. Ecrivez les équations quadratiques à résoudre.

Méthode de résolution NB : on ne demande pas de résoudre le problème, mais seulement d'écrire les équations quadratiques. Les équations quadratiques utilisent comme inconnues les distances des points par rapport au centre de la caméra D_k. Elles s'obtiennent en écrivant le théorème d'Al-Kashi à partir des points image dans le repère image normalisé. Il faut donc commencer par calculer les $m_k = K^{-1}p_k$.

On peut ensuite écrire :

$$\|P_iP_j\|^2 = D_i^2 + D_j^2 - 2D_iD_j\frac{m_i^Tm_j}{\|m_i\|\|m_j\|}$$

pour tous les couples de points. On obtient alors 10 équations quadratiques à 5 inconnues.

Exercice 9

On considère un marqueur constitué de 5 billes radio-opaques. La position des billes dans le repère du marqueur est donnée (en mm) par $B_1 = [0,0,0]^T$, $B_2 = [50,0,0]^T$, $B_3 = [0,50,0]^T$, $B_4 = [0,0,50]^T$, $B_5 = [50,50,50]^T$.

Ce marqueur est placé sous un C-arm de radiologie, on acquiert une image et on observe les images des billes aux positions suivantes (en pixels) : $p_1 = \begin{pmatrix} 324.3 \\ 119.5 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 450.0 \\ 20.8 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 433.1 \\ 247.2 \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} 377.5 \\ 60.2 \end{pmatrix}$, p_5 invisible.

On a extrait les paramètres suivants des images Dicom :
- DistanceSourcetoDetector(0018, 1110) : 800 mm
- PhysicalDetectorSize(0018,9429) : 300 / 300 (mm)

— Rows (0028,0010) (pixels) : 512
— Columns (0028,0011) (pixels) : 512

On supposera que la source se projette au centre du capteur.

1. Ecrivez 3 équations indépendantes, sans contraintes, qui pourront permettre de retrouver la position des billes dans le repère de l'imageur. Combien de solutions peut-on obtenir en utilisant seulement ces 3 équations ?
2. Combien de telles équations peut-on écrire au total ?

Méthode de résolution On recherche la position des billes dans le repère d'un imageur à projection perspective. Les inconnues considérées sont les distances des billes au centre de projection notées D_i. En suivant les méthodes proposées dans la littérature, on peut écrire une équation quadratique à deux inconnues pour chaque couple de points en écrivant le théorème d'Al-Kashi (Pythagore généralisé). Pour cela il faut tout d'abord exprimer les points image en coordonnées métriques, ce qui nécessite les paramètres intrinsèques de l'imageur. En suivant le modèle de l'exercice 6, à partir des metadonnées DICOM on obtient :

$$K = \begin{pmatrix} 1365.3 & 0 & 256 \\ 0 & 1365.3 & 256 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dont on déduit

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 0.000732 & 0 & -0.1875 \\ 0 & 0.000732 & -0.1875 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque point p_k on peut calculer $m_k = K^{-1}p_k$. Par exemple on obtient $m_1 = \begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.99 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut ensuite écrire :

$$\|B_iB_j\|^2 = D_i^2 + D_j^2 - 2D_iD_j\frac{m_i^T m_j}{\|m_i\|\|m_j\|}$$

Pour obtenir 3 équations on utilisera par exemple les boules B_1, B_2, B_3.

Pour 4 boules visibles, on peut écrire 6 équations.

On suppose qu'à partir de ces équations on a réussi à obtenir les distances suivantes entre l'origine du C-arm et les différentes billes : $D_1 = 402.5$mm, $D_2 = 379.7$mm, $D_3 = 409.4$mm, $D_4 = 446.2$mm, D_5 inconnue.

3. Déterminez la position du marqueur par rapport à l'imageur (l'orientation n'est pas demandée).

Solution Le problème est simple car la boule B_1 est à l'origine du marqueur. La position du marqueur est donc directement donnée par la position de la boule B_1. Connaissant la distance D_1 de la boule et sachant qu'elle se trouve sur la droite de vue définie par le point m_1, on obtient : $t = D_1\frac{m_1}{\|m_1\|} = \begin{pmatrix} 20.01 \\ -39.99 \\ 400 \end{pmatrix}$

Exercice 10

1. On considère la transformation entre un point objet $P = (x, y, z, 1)^T$ exprimé dans le repère d'un objet (en mm) et la projection de ce point dans une image $Q = s(u, v, 1)^T$ (u,v exprimés en pixels) :

$$s \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 & 0 & 960 \\ 0 & 800 & 540 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.707 & -0.707 & 0 & -25 \\ 0.707 & 0.707 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & -1 & 250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

— Donnez les coordonnées de la projection du centre optique dans l'image
— Calculez l'image de l'origine de l'objet
— On considère deux points objet $P_1 = (0, 0, 0)^T$ et $P_2 = (60, 60, 0)^T$ (coordonnées exprimées dans le repère objet). Calculez la distance δ_{12} (en pixels) entre leurs projections Q_1 and Q_2 dans l'image.

Solution La position du centre de projection dans l'image est donnée par les paramètres u_c et v_c de la matrice des paramètres intrinsèques, donc $(960, 540)^T$.

L'origine de l'objet est donnée par $(X; Y; Z)^T = (0; 0; 0)^T$. En remplacant dans l'équation on obtient $s(u, v, 1) = (210000; 175000; 250)^T$ soit $(u, v) = (840, 700)$.

On calcule $Q2$ de la même façon que $Q1$ (point précédent) et on obtient : $(u_2, v_2) = (840, 971.48)$. La distance δ_{12} vaut alors 271.48 pixels.

3 Images à projection perspective multiples

Exercice 16

On considère un système de localisation constitué de deux caméras produisant des images de taille 1920×1080 pixels. Le système a été étalonné et on a obtenu les caractéristiques suivantes :

Paramètres intrinsèques de la caméra 1 : $K_1 = \begin{pmatrix} 400 & 0 & 1000 \\ 0 & 400 & 500 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Paramètres intrinsèques de la caméra 2 : $K_2 = \begin{pmatrix} 410 & 0 & 950 \\ 0 & 410 & 550 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transformation entre les deux caméras : ${}^{cam1}T_{cam2} = \begin{pmatrix} 0.9239 & 0 & -0.3827 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.3827 & 0 & 0.9239 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

où les longueurs sont données en mm.

On utilise un marqueur constitué de plusieurs boules dont les coordonnées dans le repère marqueur sont données par (en mm) : $B1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$B2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les images des différentes boules ont été extraites :

— Dans l'image de la caméra 1 (en pixels) en : $p_1^1 = \begin{pmatrix} 1034 \\ 526 \end{pmatrix}$, $p_2^1 = \begin{pmatrix} 1020 \\ 511.5 \end{pmatrix}$, $p_3^1 = \begin{pmatrix} 997.5 \\ 517.5 \end{pmatrix}$, $p_4^1 = \begin{pmatrix} 1020 \\ 540 \end{pmatrix}$

— Dans l'image de la caméra 2 (en pixels) en : $p_1^2 = \begin{pmatrix} 801 \\ 571 \end{pmatrix}$, $p_2^2 = \begin{pmatrix} 792.5 \\ 559.5 \end{pmatrix}$, $p_3^2 = \begin{pmatrix} 778.5 \\ 563.5 \end{pmatrix}$, $p_4^2 = \begin{pmatrix} 792.5 \\ 582 \end{pmatrix}$

1. Calculez la position du marqueur par rapport à la caméra 1 (l'orientation n'est pas demandée).

   Solution Comme une des boules ($B4$) se situe à l'origine du marqueur et que seule la positon du marqueur est demandée, il suffit de trouver la positon de la boule $B4$ dans le repère du système de caméras. On procède par triangulation, la boule $B4$ se trouvant à l'intersection entre deux droites :
   — La droite passant par le centre de la caméra 1 ($(0; 0; 0)$ dans le repère de la caméra 1) et le point m_4^1 où m est le point image en cordonnées métriques
   — La droite passant par le centre de la caméra 2 ($(1000; 0; 0)$ dans le repère de la caméra 1) et le point m_4^2 exprimé dans le repère de la caméra 1.
   $m_4^1 = K_1^{-1} p_4^1 = (0.05, 0.1, 1)^T$. $m_4^2 = K_2^{-1} p_4^2 = (-0.384, 0.078, 1)^T$
   Le vecteur reliant l'origine de la caméra 2 au point m_4^2 exprimé dans le repère de la caméra 1 vaut : ${}^{cam1}R_{cam2} m_4^2 = (-0.7375, 0.078, 0.7769)^T$
   Pour obtenir l'intersection entre les 2 droites, on cherche λ (et μ) tels que

   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -0.7375 \\ 0.078 \\ 0.7769 \end{pmatrix}$$

   On a donc 3 équations à 2 inconnues. En absence de bruit on peut en choisir 2 parmi les 3, exprimer μ en fonction de λ et résoudre par rapport à λ. On obtient alors $\lambda = 1004.5$. On trouve alors ${}^{cam1}B4 = \lambda m_4^1 = \begin{pmatrix} 50.2 \\ 100.4 \\ 1004.5 \end{pmatrix} mm$

2. Expliquez comment procéder pour obtenir l'orientation du marqueur par rapport à la caméra 1 (on ne demande pas de faire les calculs, seulement de donner la méthode).

   Solution On procède comme précédemment pour au moins 2 autres boules. Une fois la position de 3 boules connues dans le repère de la caméra 1 et connaissant la position des boules dans le repère de l'objet, on obtient la rotation par localisation 3D, soit en utilisant la méthode de Horn ou la méthode des 3 points.

3. Combien le marqueur doit-il comporter de boules pour permettre l'estimation de pose complète ?

   Réponse Par triangulation, on peut reconstruire la position de chaque boule à partir de ses images, indépendamment des autre boules. On se ramène donc à un problème de localisation 3D et il suffit donc de 3 boules non toutes alignées.

4. Est-il nécessaire de connaître la structure du marqueur (i.e. les positions des boules) pour pouvoir estimer sa pose complète ? Justifiez votre réponse. Pourquoi les systèmes de localisation nécessitent-ils de fournir la structure des marqueurs utilisés (vous pourrez donner plusieurs raisons).

Réponse D'après la réponse à la question précédente, on voit qu'on peut reconstruire la position 3D complète des boules sans connaître la structure du marqueur. Il n'est donc pas nécessaire de connaître la structure pour calculer une pose, on peut retrouver la structure du marqueur en même temps que la pose.
Les systèmes de localisation utilisent le même principe mais la structure de l'objet doit être fournie pour :
— rejeter les images d'objets qui ne sont pas les cibles
— détecter l'absence de certaines boules
— améliorer la précision d'estimation de pose

5. Proposez une méthode pour obtenir les paramètres des caméras et de leurs poses relatives fournis dans l'énoncé.

   Solution On peut étalonner les caméras séparément en utilisant les méthodes d'étalonnage standard. Une fois les paramètres intrinsèques $K1$ et $K2$ obtenus, on peut utiliser une mire quelconque (avec au moins 4 points) pour faire simultanément l'estimation de pose par les 2 caméras. On obtient ainsi : ${}^{cam1}T_{obj}$ et ${}^{cam2}T_{obj}$. Par composition des 2 transformations on obtient :
   ${}^{cam1}T_{cam2} = {}^{cam1}T_{obj}\ {}^{cam2}T_{obj}^{-1}$.

6. On réalise un zoom numérique x 2 sur l'image produite par la caméra 1. On obtient une image de la même taille que l'image originale et correspondant physiquement à la partie en haut à gauche de l'image originale. Quels paramètres intrinsèques faut-il utiliser pour la caméra 1 si on souhaite travailler avec cette image zoomée ?

   Solution En zoomant on multiplie le facteur de grandissement par 2 dans les 2 directions. Par ailleurs le centre optique se projette maintenant en bas à droite de la nouvelle image. Il se trouvait initialement en $(1000, 500)$ pixels dans l'image non zoomée, il est maintenant en $(2{\times}1000, 2{\times}500)$. On a donc $K_1^{new} = \begin{pmatrix} 800 & 0 & 2000 \\ 0 & 800 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4 Imageurs à coupe

Exercice 19

On considère un geste de neuro-chirurgie manuelle utilisant un cadre de Leksell. La cible anatomique est définie dans une coupe à la position P_{targ}. Dans cette même coupe on extrait l'image d'un marqueur défini par les barrettes suivantes (voir figure **??**) :

$A_1 = (0; 0; 0)^T$	$B_1 = (0; 0; LZ)^T$
$A_2 = (0; LY; 0)^T$	$B_2 = (0; LY; LZ)^T$
$A_3 = (LX; 0; 0)^T$	$B_3 = (LX; 0; LZ)^T$
$A_4 = (LX; LY; 0)^T$	$B_4 = (LX; LY; LZ)^T$
$A_5 = (0; 0; 0)^T$	$B_5 = (LX; 0; LZ)^T$

La procédure proposée pour déterminer le réglage de la position de l'arc de pointage est la suivante. A partir de la coupe contenant la cible anatomique.

— Calcul de $C = (C_x, C_y)^T$ obtenu par l'intersection des diagonales (barrettes 1 / 4 et 2 / 3)
— $\Delta X = \|P_{targ} - C\| * cos(atan(\frac{D_{1Y} - D_{2Y}}{D_{1X} - D_{2X}}))$, $\Delta Y = \|P_{targ} - C\| * sin(atan(\frac{D_{1Y} - D_{2Y}}{D_{1X} - D_{2X}}))$
— $\Delta Z = \frac{\|P_{sup} - P_{left}\|}{\|P_{right} - P_{left}\|} LZ$

$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ définissent les déplacements de l'arc à réaliser à partir de sa configuration centrale (pointage vers le centre du cadre).

1. Dans quelles conditions particulières cette procédure est-elle valable ?

Réponse La résolution proposée fait l'hypothèse que les déplacements selon X et Y peuvent être obtenus à partir d'informations sur les coins du marqueur uniquement. Il est donc admis implicitement que le plan de coupe est othogonal à la direction Z du marqueur.

2. Quels sont les inconvénients de cette méthode de recalage ?

   Réponse D'après la question précédente il faut d'assurer de l'orientation du patient par rapport à l'imageur.

3. Quelle méthode connaissez-vous qui pourrait être utilisée pour résoudre le problème mentionné ? Quels sont les inconvénients par rapport au cadre de Leksell ?

   Réponse Avec le même marqueur, il est possible d'utiliser la méthode vue en cours où on reconstruit la position de l'intersection de la coupe avec chaque barrette diagonale sur chaque plan du marqueur. L'inconvénient est la difficulté de calcul si cela doit être réalisé sans machine. La méthode décrite était utilisée en salle d'opération dans les années 50.

Exercice 22

On dispose d'un marqueur constitué de 4 barrettes décrites dans le repère marqueur par les couples de points (extrémités des segments) suivants (donnés en mm) :

$$S1 : A1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$S2 : A2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$S3 : A3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}, B3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$S4 : A4 = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}, B4 = \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Le marqueur est positionné sous un CT-scanner et une coupe est acquise. Pour la configuration

$$^{scan}T_{marq} = \begin{pmatrix} 0.4330 & 0.5537 & 0.7113 & -24.5 \\ -0.7500 & 0.6590 & -0.0564 & 23.3 \\ -0.5000 & -0.5090 & 0.7006 & -16.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(translation exprimée en mm) on a obtenu les points image suivants (en pixels) :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 239 \\ 300.5 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 315.0 \\ 237.0 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 305.0 \\ 337.5 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 340.0 \\ 251.5 \end{pmatrix}$$

On a obtenu les informations suivantes dans le header Dicom :

- PixelSpacing : (0.5 / 0.5) mm
- SliceThickness : 0.3 mm

— SliceLocation : (axe Z de l'imageur) 0 mm

L'image a pour dimensions 512 pixels $\times$ 512 pixels et la projection de l'origine du scanner dans l'image se trouve au pixel $(256, 256)$.

1. Calculez l'erreur de mesure dans l'image
2. Que peut-on en déduire sur la qualité de l'estimation de pose dans cette configuration particulière ?

Méthode Connaissant la pose et les mesures en pixel, l'erreur de mesure est obtenue en calculant l'image exacte pour la pose connue. Pour calculer l'image en pixels, on a besoin des paramètres intrinsèques de l'imageur. On obtient les grandissements en inversant les PixelSpacing. La position de l'origine dans l'image donne les offsets, donc :

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 256 \\ 0 & 2 & 256 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il faut ensuite calculer les points images en coordonnées métriques. On les obtient en calculant l'intersection entre les barrettes et le plan image, défini par $Z = 0$.

La méthode la plus efficace consiste dans un premier temps à exprimer les extrémités des barrettes dans le repère du scanner :

$$^{scan}A_j = \ ^{scan}T_{marq}A_j$$

et de même pour les B_j. Ensuite on cherche les intersections des segments avec le plan $Z = 0$, par exemple en recherchant λ_j tel que $\lambda_j A_j + (1 - \lambda_j)B_j = (?, ?, 0)$. La troisième ligne permet d'obtenir λ_j, puis les deux premières d'obtenir les coordonnées x et y du point d'intersection en mm. Enfin on passe ces coordonnées dans K pour obtenir les points image en pixels.

Exercice 24

On considère un marqueur constitué de 7 barrettes. Chaque barrette k est définie par ses extrémités A_k et B_k dont les positions dans le repère du marqueur valent :

$$\begin{array}{ll}
A_1 = (0; 0; 50)^T & B_1 = (80; 0; 50)^T \\
A_2 = (0; 0; 50)^T & B_2 = (80; 0; 0)^T \\
A_3 = (0; 0; 0)^T & B_3 = (80; 0; 0)^T \\
A_4 = (0; 0; 0)^T & B_4 = (80; 50; 0)^T \\
A_5 = (0; 50; 0)^T & B_5 = (80; 50; 0)^T \\
A_6 = (0; 50; 0)^T & B_6 = (80; 50; 50)^T \\
A_7 = (0; 50; 50)^T & B_7 = (80; 50; 50)^T
\end{array}$$

On veut utiliser ce marqueur pour estimer la position d'une aiguille de radiologie interventionnelle par rapport à un CT-scanner à rayons X.

Le marqueur est positionné par rapport à l'aiguille dans la configuration :

$$^{aig}T_{marq} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 25 \\ -1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & -1 & -250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a acquis une coupe et les points du marqueur ont été extraits aux positions suivantes (données en pixels) :

$p_1 = (254.5; 173.5)^T$
$p_2 = (284.5; 222.5)^T$
$p_3 = (302; 251)^T$
$p_4 = (282.5; 270.5)^T$
$p_5 = (247; 306)^T$
$p_6 = (229.5; 276.5)^T$
$p_7 = (200; 228)^T$

On a obtenu les informations suivantes dans le header Dicom de l'image :
— PixelSpacing : (0.7 / 0.7) mm
— SliceThickness : 0.5 mm
— SliceLocation : 120 mm

L'image a pour dimensions 512 pixels × 512 pixels. **Attention : ajout d'une contrainte par rapport à l'énoncé initial : on suppose que l'origine de l'imageur se projette au centre des coupes.**

1. Quel est le nom de ce marqueur ?

   Réponse On reconnaît une structure à 7 barres, avec 3 Z dans les plans $Y = 0$, $Y = 50$ et $Z = 0$ (2 parallèles, un perpendiculaire). Il s'agit d'un cadre de Brown-Roberts-Wells.

2. Donnez la matrice des paramètres intrinsèques de l'imageur (ce qui peut être obtenu).

   Réponse A partir des données DICOM on peut obtenir les grandissements dans les coupes. Comme l'origine de l'imageur se trouve au centre de l'image, $u_c = v_c = 256$: $K = \begin{pmatrix} 1.428 & 0 & 256 \\ 0 & 1.428 & 256 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Pourquoi faut-il utiliser un marqueur pour mesurer la pose de l'aiguille ?

   Réponse En général l'intersection d'une coupe avec une aiguille est un point, ce qui ne permet pas de déterminer sa pose à partir d'une seule coupe. Seul le cas particulier où l'aiguille est dans le plan de coupe permet de le faire. En général il faut donc un objet mieux adapté, attaché de façon connue à l'aiguille pour pouvoir déterminer la pose de l'aiguille.

4. Estimez la pose complète du marqueur par rapport à la coupe.

   Solution On utilise la méthode particulière du cadre BRW vue en cours. Pour chaque Z on détermine la valeur de c qui définit la position du point d'intersection entre la coupe et la barre diagonale du Z. On peut le faire à partir des points image en coordonnées métriques ou en coordonnées pixelliques (puisque les transformations affines n'affectent pas les rapports de distance). Pour chaque Z, la barre diagonale a pour longueur $L = \sqrt{50^2 + 80^2} = 94.33$.
   — Face 1 : $c = \frac{L}{1+\frac{\|p_1p_2\|}{\|p_2p_3\|}} = \frac{94.33}{1+\frac{57.45}{33.44}} = 34.70$. Donc le point d'intersection avec la barrette 2 est $P_2 = B_2 + c\frac{B_2A_2}{L} = \begin{pmatrix} 50.57 \\ 0 \\ 18.39 \end{pmatrix}$

— Face 2 : $c = \frac{L}{1+\frac{\|p_3p_4\|}{\|p_4p_5\|}} = \frac{94.33}{1+\frac{27.57}{50.20}} = 60.88$. Donc le point d'intersection avec la barrette 4 est $P_4 = B_4 + c\frac{B_4A_4}{L} = \begin{pmatrix} 28.37 \\ 17.73 \\ 0 \end{pmatrix}$

— Face 3 : $c = \frac{L}{1+\frac{\|p_5p_6\|}{\|p_6p_7\|}} = \frac{94.33}{1+\frac{34.30}{56.77}} = 58.80$. Donc le point d'intersection avec la barrette 6 est $P_6 = B_6 + c\frac{B_6A_6}{L} = \begin{pmatrix} 30.15 \\ 50 \\ 18.83 \end{pmatrix}$

A partir des 3 points physiques (P_2, P_4, P_6) et des 3 points images correspondants (en coordonnées métriques) (m_2, m_4, m_6), on recherche la transformation 3D par localisation 3D. On appliquera la méthode à base de 3 points. $m_2 = K^{-1}p_2 = \begin{pmatrix} 19.95 \\ -23.45 \\ 1 \end{pmatrix}$

$m_4 = K^{-1}p_4 = \begin{pmatrix} 18.55 \\ 10.15 \\ 1 \end{pmatrix}$

$m_6 = K^{-1}p_6 = \begin{pmatrix} -18.55 \\ 14.35 \\ 1 \end{pmatrix}$

Attention ! pour la localisation 3D il faut considérer les points m_i comme des points 3D, dont la 3ème coordonnée est nulle (ils sont dans le plan de coupe), donc $m_2 = \begin{pmatrix} 19.95 \\ -23.45 \\ 0 \end{pmatrix}$, $m_4 = \begin{pmatrix} 18.55 \\ 10.15 \\ 0 \end{pmatrix}$, $m_6 = \begin{pmatrix} -18.55 \\ 14.35 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On obtient ${}^{slice}R_{obj} = \begin{pmatrix} -0.112 & -0.820 & -0.562 \\ -0.663 & 0.483 & -0.573 \\ 0.741 & 0.308 & -0.597 \end{pmatrix}$ et ${}^{slice}t_{obj} = \begin{pmatrix} 36.44 \\ 20.29 \\ -26.46 \end{pmatrix}$

5. Pour réaliser le positionnement de l'aiguille, on souhaite l'amener dans la configuration suivante par rapport au **scanner** :

$$
{}^{scan}T^*_{aig} = \begin{pmatrix} 0.9239 & 0 & 0.3827 & -100 \\ 0.3827 & 0 & -0.9239 & 80 \\ 0 & 1 & 0 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Déterminez l'image de référence qu'il faudrait obtenir pour que le positionnement soit réalisé parfaitement, si on continue à acquérir la coupe définie par SliceLocation=120 et qu'on suppose que l'origine du scanner se projette orthogonalement au centre de l'image.

Solution Connaissant ${}^{scan}T^*_{aig}$ on peut calculer ${}^{scan}T^*_{marq}$ par : ${}^{scan}T^*_{marq} = {}^{scan}T^*_{aig}\ {}^{aig}T_{marq}$.

De plus ${}^{scan}t_{slice} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 120 \end{pmatrix}$, donc ${}^{slice}T_{scan} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient :

$$ {}^{slice}T_{marq} = {}^{slice}T_{scan}\ {}^{scan}T^{*}_{marq} = \begin{pmatrix} 0 & -0.9239 & -0.3827 & -172.57 \\ 0 & -0.3827 & 0.9293 & 320.54 \\ -1 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

Connaissant la position du marqueur par rapport à la coupe, on peut calculer l'intersection de chaque barrette avec la coupe et ainsi obtenir l'image désirée. Pour cela on exprime les positions des extrémités des barrettes dans le repère de la coupe : par exemple pour la barrette 1 : ${}^{slice}A_1 = {}^{slice}T_{marq}A_1 = \begin{pmatrix} -191.71 \\ 366.73 \\ 60 \end{pmatrix}$ et ${}^{slice}B_1 = {}^{slice}T_{marq}B_1 = \begin{pmatrix} -191.71 \\ 366.73 \\ -20 \end{pmatrix}$

On cherche ensuite λ tel que la troisième coordonnée de ${}^{slice}A_1 + \lambda\ {}^{slice}A_1\ {}^{slice}B_1$ soit égale à 0. Ici on trouve $\lambda = 0.75$. La position de l'intersection dans le plan de coupe est alors donnée par les 2 premières coordonnées de ${}^{slice}A_1 + \lambda\ {}^{slice}A_1\ {}^{slice}B_1 = \begin{pmatrix} -191.71 \\ 366.73 \end{pmatrix}$. La position du point en pixels est enfin obtenue en multipliant le résultat par K.

6. Peut-on encore déterminer la pose si un des points n'est pas extrait de l'image ? Argumentez votre réponse. Si oui, comment faut-il s'y prendre pour faire l'estimation de pose ? Si non, que faudrait-il changer pour remédier au problème ?

   Réponse Avec uniquement 6 images il reste possible d'estimer la pose, mais on ne peut plus utiliser la méthode propre au cadre BRW. Il faut utiliser une méthode générique basée sur l'écriture des distances entre points et utilisant comme inconnues toutes les positions des intersections sur toutes les barrettes.

Exercice 25

Un objet stéréotaxique est constitué de 4 barrettes paramétrées par une origine et un point terminal et données en mm par : B1 : [0 ; 0 ; 0], [0 ; 0 ; 50] B2 : [40 ; 0 ; 0], [40 ; 0 ; 50] B3 : [40 ; 40 ; 0], [40 ; 40 ; 50] B4 : [0 ; 40 ; 0], [0 ; 0 ; 50]

Cet objet est vu par une coupe IRM dont les paramètres intrinsèques sont donnés par :

$$ K = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 300 \\ 0 & 2 & 250 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

La coupe IRM est définie par Z = 0. La transformation entre le repère objet et le repère de l'IRM est donnée par : ${}^{obj}R_{IRM} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0 & 0.707 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \end{pmatrix}$ et ${}^{obj}t_{img} = \begin{pmatrix} -30 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$ mm.

1. Calculez l'image de la première barrette fournie par le scanner.

   Solution Le principe est identique à celui vu à la question 5 de l'exercice précédent : on calcule ${}^{slice}T_{marq} = {}^{obj}T^{-1}_{IRM} = \begin{pmatrix} 0.707 & 0 & -0.707 & 49.50 \\ 0 & 1 & 0 & -50 \\ 0.707 & 0 & 0.707 & -7.07 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ici le repère de l'IRM et celui de la coupe sont confondus), puis on exprime les deux extrémités de B_1 dans le repère de la coupe :

$$C_1 =^{slice} T_{marq} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49.50 \\ -50 \\ -7.07 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$C_2 =^{slice} T_{marq} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14.14 \\ -50 \\ 28.28 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puis on cherche λ tel que la coordonnée Z de $C_1 + \lambda(C_1C_2)$ soit nulle. On trouve ici $\lambda = 0.2$. Le point d'intersection dans le repère de la coupe est alors donné par $I = C_1 + \lambda(C_1C_2) = \begin{pmatrix} 42.43 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pour obtenir le point en coordonnées pixelliques, on multiplie par K le point image métrique en coordonnées homogènes : $p_i = K * \begin{pmatrix} 42.43 \\ -50 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 384.86 \\ 150 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Que pensez-vous du marqueur ?

Réponse Le marqueur a 4 barrettes, ce qui est le strict minimum. De plus les 3 premières barrettes sont parallèles. Il est probable qu'on puisse rencontrer des singularités pour lequelles plusieurs coupes donnent des images très similaires