Tópicos Avançados

20/12/2023

Sumário

- Problemas tratáveis vs não-tratáveis
- Algoritmos deterministas vs não-deterministas
- Tipos de problemas
- Problemas de Decisão : As Classes P, NP e NP-Completo
- Determinação de soluções aproximadas
- Sugestão de leitura

Problemas Tratáveis vs Problemas Não-Tratáveis

Algoritmos – Limitações

- Os algoritmos resolvem problemas
- **MAS :**
  - Alguns problemas **não são resolúveis** por um algoritmo
  - Outros problemas são resolúveis por um algoritmo, mas **não em tempo polinomial**
  - Mesmo quando os problemas são resolúveis em tempo polinomial, há, habitualmente, um limite inferior para a ordem de complexidade dos algoritmos usados

Teoria da Complexidade

- Classificar os problemas de acordo com a sua ordem de complexidade

- Classificação principal :

  - Problemas tratáveis → Resolúveis em tempo polinomial

  - Problemas não-tratáveis → **Não podem ser resolvidos em tempo polinomial !!**

    OU

    Não se sabe, se poderão ser resolvidos em tempo polinomial !!

Teoria da Complexidade

- A Teoria da Complexidade está centrada nos Problemas de Decisão
  - Respostas **SIM / NÃO**
- Problema de decisão não-decidível
  - Não é resolúvel por um algoritmo **!!**
  - The Halting Problem
- Algoritmos deterministas vs não-deterministas
  - Guessing + Verification !!
- Como classificar os problemas de decisão ?

Algoritmos Deterministas vs Algoritmos Não-Deterministas

Algoritmos Deterministas

- Um algoritmo determinista
  - Devolve sempre o mesmo resultado, qualquer que seja o número de vezes que é executado com os mesmos dados de entrada.
  - Executa sempre a mesma sequência de instruções quando é executado com os mesmos dados de entrada.

- O tipo mais habitual de algoritmo !

- Há uma definição mais formal em termos de máquinas de estado…

Algoritmos Não-Deterministas

- Um algoritmo não-determininsta
  - Pode ter um comportamento diferente, para os mesmos dados de entrada, em diferentes execuções
  - Ao contrário de um algoritmo determinista !

- Habitualmente usados para obter soluções aproximadas para instâncias de problemas de otimização combinatória
  - Quando é demasiado oneroso determinar soluções exatas usando um algoritmo determinista

Algoritmos Não-Deterministas

- Como obter um comportamento diferente em cada execução ?

- Causas de comportamento não-determinista
  - Comportamento / estado externo que não os dados de entrada
    - Inputs do utilizador / timer values / valores (pseudo-)aleatórios
  - Operações “timing-sensitive” em sistemas com múltiplos processadores
  - Erros de hardware podem originar mudanças de estado inesperadas

Tipos de Problemas

Problemas de Decisão

- **Resposta : SIM / NÃO**

- Dado um número natural n, n é um número primo ?
- Dados dois números naturais, x e y, x é divisível por y ?
- …
- Dado um grafo G(V,E), G tem um Circuito Euleriano ? nao se repetem arestas!
- Dado um grafo G(V,E), G tem um Ciclo Hamiltoniano ? nao se repetem vertices!
- …

Problemas de Decisão

- …
- Dado um conjunto A, com n elementos inteiros e positivos, e um valor inteiro positivo S, a soma dos elementos de algum dos subconjuntos de A é igual a S ?
- …
- **Quais dos problemas são mais "difíceis" ?**
- **Como resolver os problemas mais "difíceis" ?**

Problemas de Procura / Identificação

- **Identificar / Listar uma solução, caso existista**

- Dado um grafo G(V,E), listar um Circuito Euleriano de G
- Dado um grafo G(V,E), listar um Ciclo Hamiltoniano de G

- Dado um conjunto A, com n elementos inteiros e positivos, e um valor inteiro positivo S, listar os elementos de um dos subconjuntos de A cuja soma é igual a S

- **Quais dos problemas são mais "difíceis" ?**
- **Como resolver os problemas mais "difíceis" ?**

Problemas de Otimização

- **Determinar a(uma) solução ótima, caso exista**

- Dado um grafo G(V,E), determinar o(um) Ciclo Hamiltoniano de menor custo de G

- Dado um conjunto de n itens, e uma mochila de capacidade W, determinar o(um) subconjunto de maior valor que cabe na mochila

- **Como resolver ?**

As Classes P, NP e NP-Completo

Probs. de Decisão : Classes de Complexidade

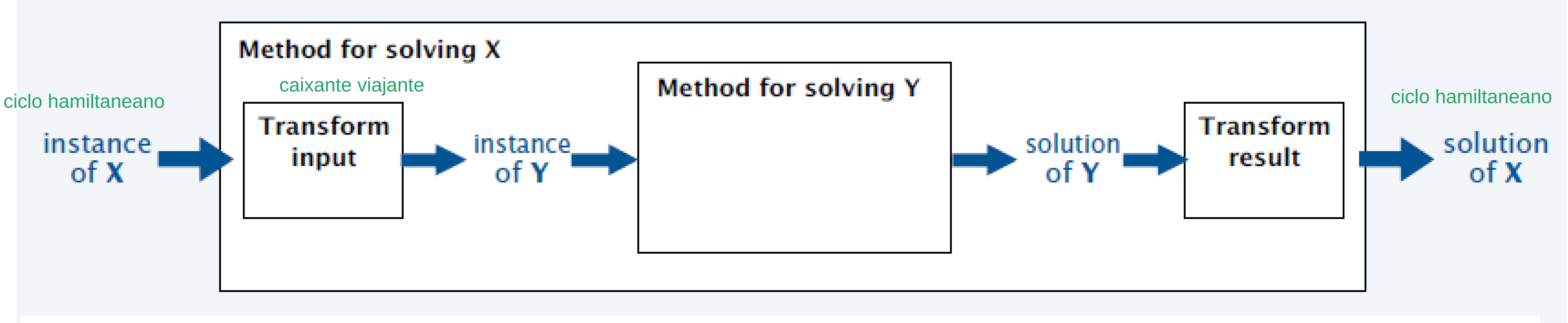
- **Classe P – Polynomial-Time**
  - Problemas de decisão resolúveis em tempo polinomial
  - Por algoritmos deterministas !!

- **Classe NP – Non-deterministic Polynomial-Time**
  - Problemas de decisão que podem ser resolvidos por algoritmos não-deterministas
  - Soluções geradas aleatoriamente podem ser verificadas em tempo polinomial !!

- Exemplos ?

A classe NP-Completo

- **Problema NP- Completo**
  - Pertence à classe NP
  - Todos os outros problemas em NP são polinomialmente redutíveis nele



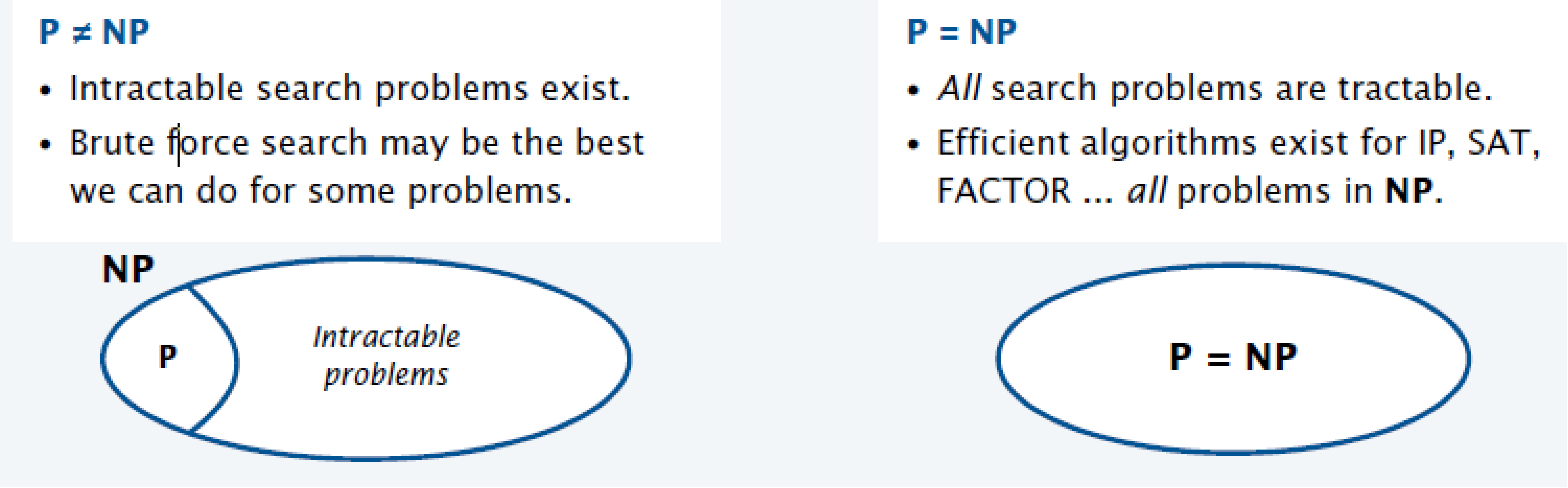
[Sedgewick & Wayne]

Redução em tempo polinomial

- Problema do Ciclo Hamiltoniano (HCP)
  - O grafo G tem um ciclo Hamiltoniano ?
- Problema do Caixeiro Viajante (TSP)
  - O grafo completo G' tem um ciclo Hamiltoniano de custo quando muito m ?
- **HCP α TSP**
- Implicação ?

P = NP ?

- P $\subseteq$ NP
- P = NP ?? → "The Million Dollar Question !!"



[Sedgewick & Wayne]

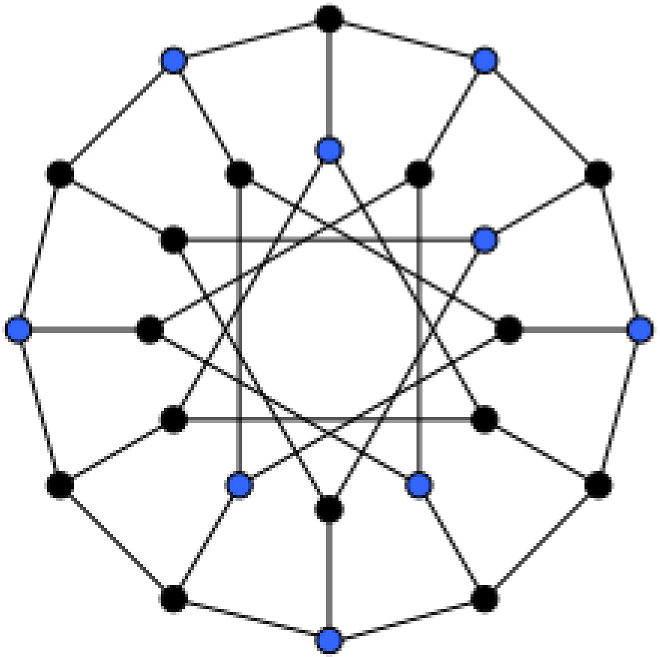
Alguns Exemplos

Conjunto independente de vértices

- **V’ $\subseteq$ V : v, w in V’ → (v,w) not in E**
  - v e w não são adjacentes em G

- O grafo G tem um conjunto independente de vertices de cardinalidade ≥ k ?
  - **NP-Completo !**

- Determinar o conjunto independente de vértices de cardinalidade máxima do grafo G
  - **NP-Difícil !**



[Wikipedia]

um dual

Clique

- **V' $\subseteq$ V : v, w in V' → (v,w) in E** existe um subgrafo completo (qual e o de maior tamanho?
  - v e w são adjacentes em G
  - Sub-grafo completo

- Clique vs. Conjunto Independente de Vértices ?

- O grafo G tem uma clique de cardinalidade ≥ k ?
  - **NP-Completo !**

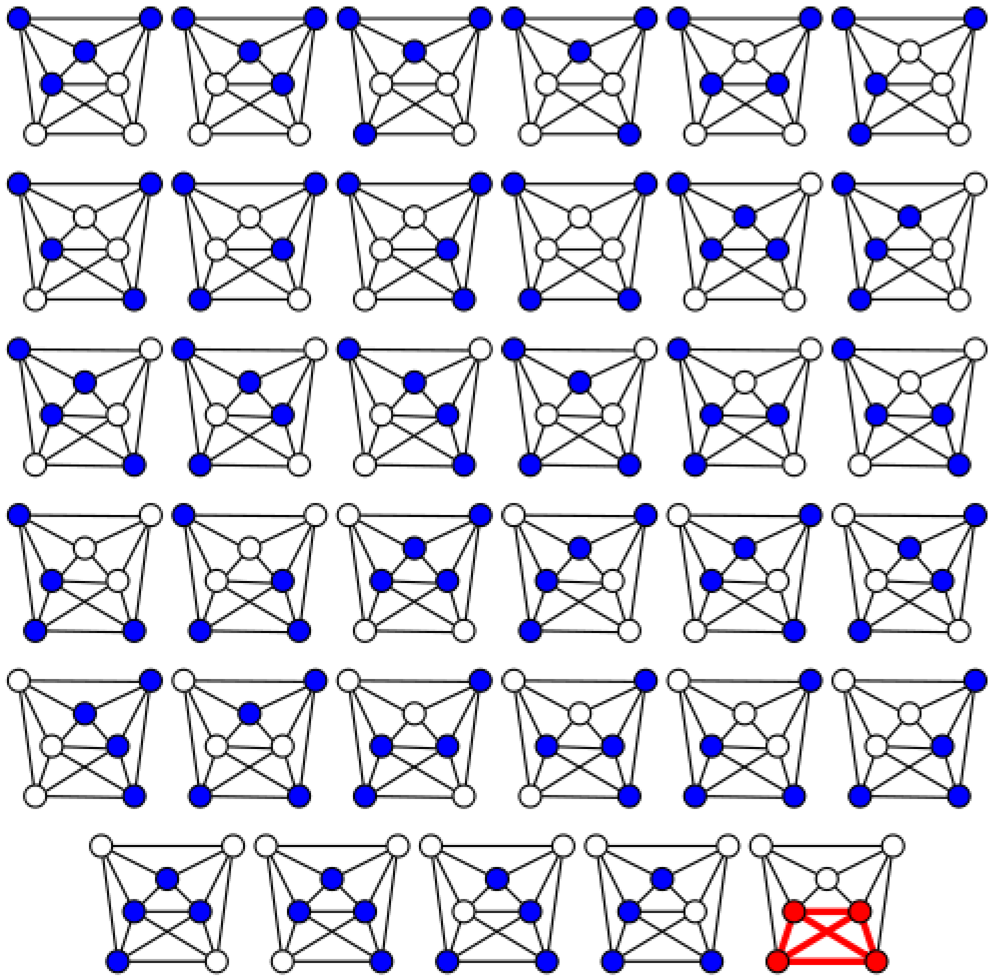
- Determinar a clique de cardinalidade máxima do grafo G
  - **NP-Difícil !**

Clique

subgrafo completo de 4 vertices

- Determinar uma 4-clique usando a procura exaustiva

- Alterntiva: algoritmos de aproximação para tipos particulares de grafos !



[Wikipedia]

Clique

- Aplicação : Social Networks
  - Determinar o maior subconjunto de pessoas em que todos se conhecem

- Outras áreas de aplicação
  - Bioinformática
  - Química Computacional
  - …

Coloração de Vértices

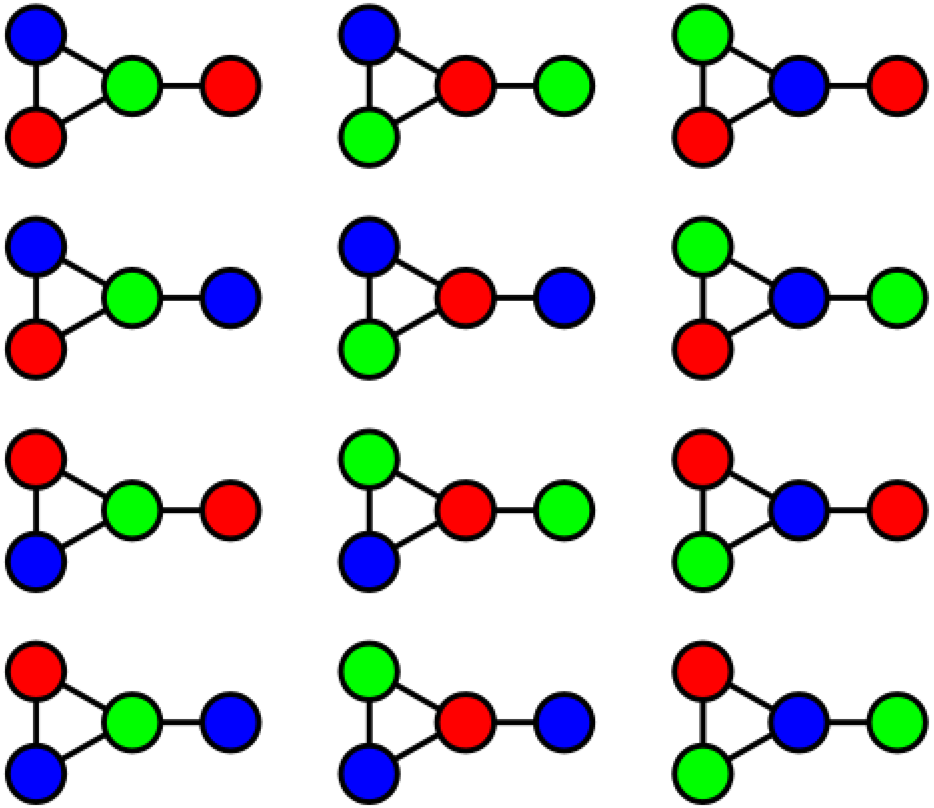
Muito conhecido!

- Coloração própria dos vértices de G(V,E)
  - Vértices adjacentes têm cores distintas (rótulos)

- O grafo G tem uma coloração própria de vértices usando, quando muito, k cores ($\leq$ k) ?
  - **NP-Completo**, exceto para k=1 ou k=2

- Determinar o menor número de cores definindo uma coloração própria dos vértices de G
  - Número cromático de G

Coloração de Vértices



[Wikipedia]

- 12 maneiras diferentes de colorir os vértices usando 3 cores

Coloração de Arestas

arestas da mesma cor nao podem ligar o mesmo vertice

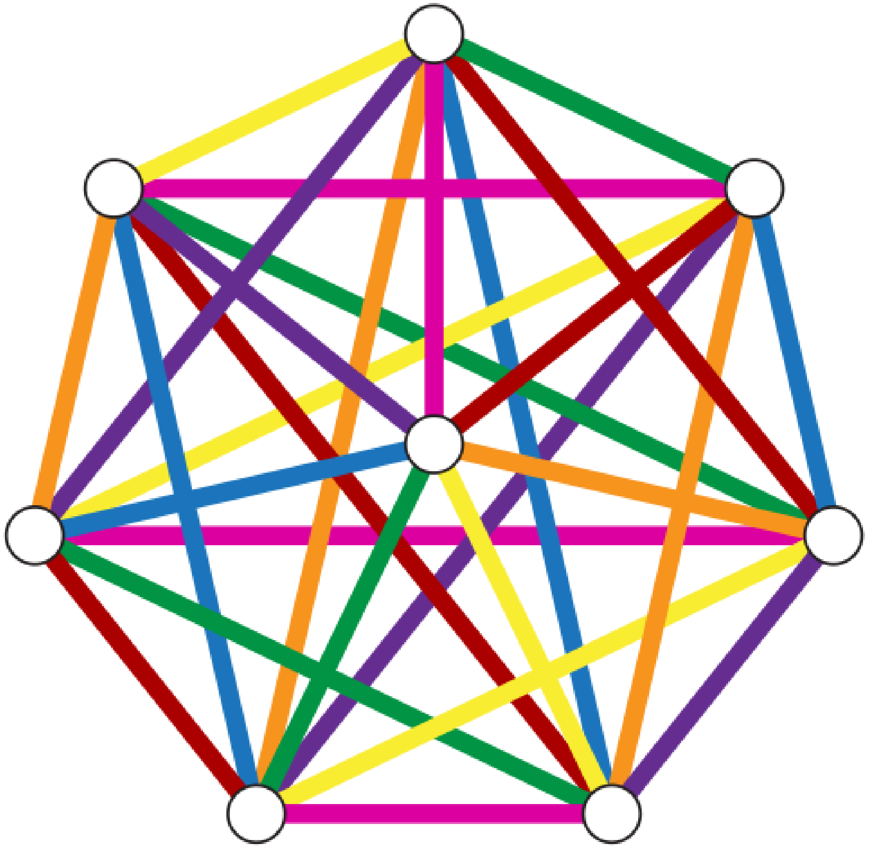
- Coloração própria das arestas de G(V,E)
  - Arestas adjacentes têm cores distintas (rótulos)

- O grafo G tem uma coloração própria de arestas usando, quando muito, k cores (≤ k) ?
  - **NP-Completo**, exceto para k=1 ou k=2

- Determinar o menor número de cores definindo uma coloração própria das arestas de G
  - Índice cromático de G

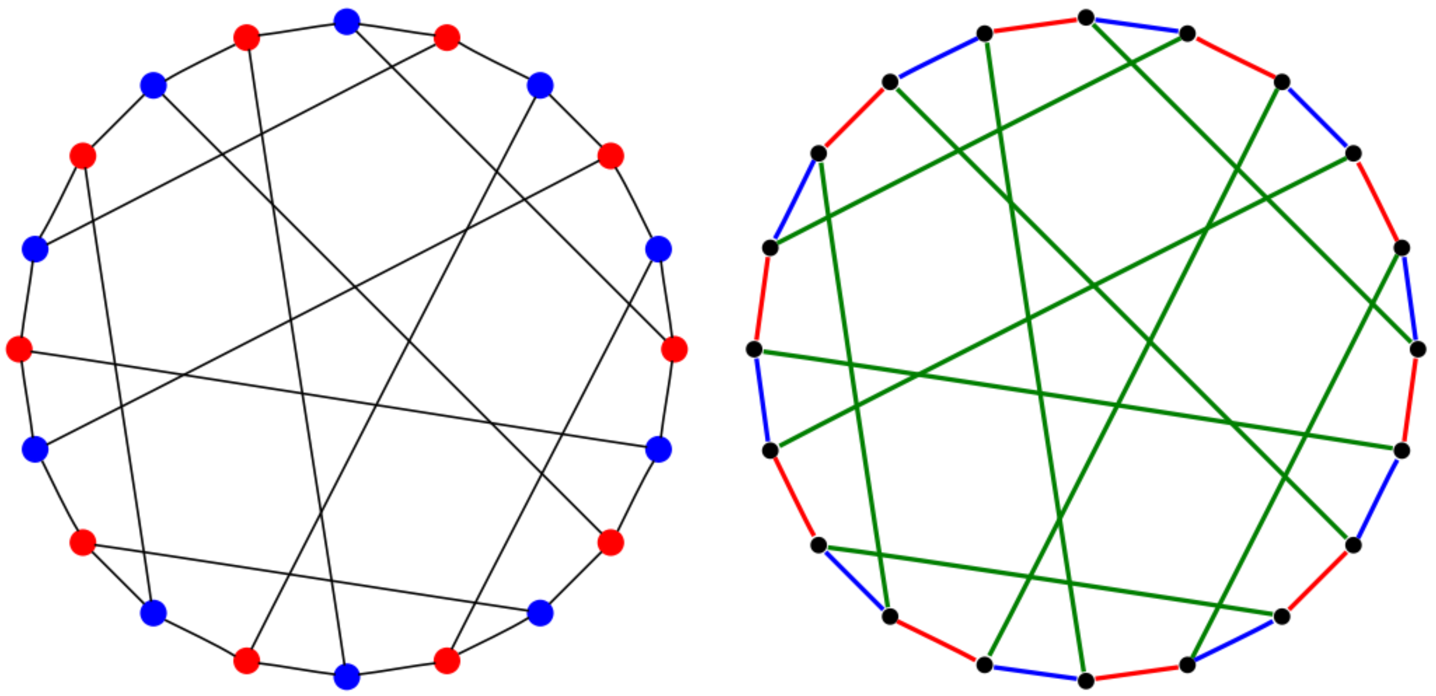
Coloração de Arestas

- K_8 = completo 8 vertices
- 8 vértices, 28 arestas
- raio 1
- diâmetro 1
- cintura 3
- 7-regular
- número cromático 8
- Índice cromático 7



[Wikipedia]

Grafo de Desargues



[Wikipedia]

20 vértices, 30 arestas

raio 5, diâmetro 5, cintura 6

número cromático 2, índice cromático 3

Aplicações

- Coloração de Vértices
  - Escalonamento
    - Aviões para voos; Alocação de frequências de rádio
  - Compiladores : otimização
  - Sudoku

- Coloração de Arestas
  - Escalonamento
    - Competições de todos-contra-todos
  - Comunicações óticas

Soluções Aproximadas

Soluções Aproximadas

- Não tentar determinar soluções exatas para problemas difíceis de otimização combinatória
  - Pode demorar demasiado tempo !!
  - Mundo-real : dados imprecisos
  - Soluções aproximadas poderão ser suficientes !!
- Calcular soluções aproximadas
  - P.ex., usando **heurísticas vorazes / greedy** !!
  - Avaliar a exatidão das soluções aproximadas
    - Performance ratio : R_A

regra simples para fazer uma solucao passo a passo!
Euristicas vorazes/greedy (gulosa)

HEURISTICA VORAZES

Construir uma (tentativa)
de solucao passo a passo

1 - melhor escolha em cada passo (independentemente da consequencia)
2 - nao há 'undo', nao há retrocesso
3 - ....

Approximation Accuracy – Min Prob

- Minimizar uma função f() Problema de optimizacao!
- Solução aproximada : s_a > = a solucao otima
- Solução exata : s^*

- Erro relativo : $re(s_a) = (f(s_a) – f(s^*)) / f(s^*)$
- Exatidão / Accuracy ratio : $r(s_a) = f(s_a) / f(s^*)$ queriamos que o racio fosse 1

- Performance ratio : R_A
  - O menor majorante para os possíveis valores $r(s_a)$
  - Deverá ser tão próximo de 1 quanto possível
  - Expressa a qualidade do algoritmo de aproximação

Approximation Accuracy – Max Prob

- Maximizar uma função f()
- Solução aproximada : s_a
- Solução exata : s^*

- Erro relativo : $re(s_a) = (f(s^*) – f(s_a)) / f(s^*)$
- Exatidão / Accuracy ratio : $r(s_a) = f(s^*) / f(s_a)$

- Performance ratio : R_A
  - O maior minorante para os possíveis valores $r(s_a)$
  - Deverá ser tão próximo de 1 quanto possível

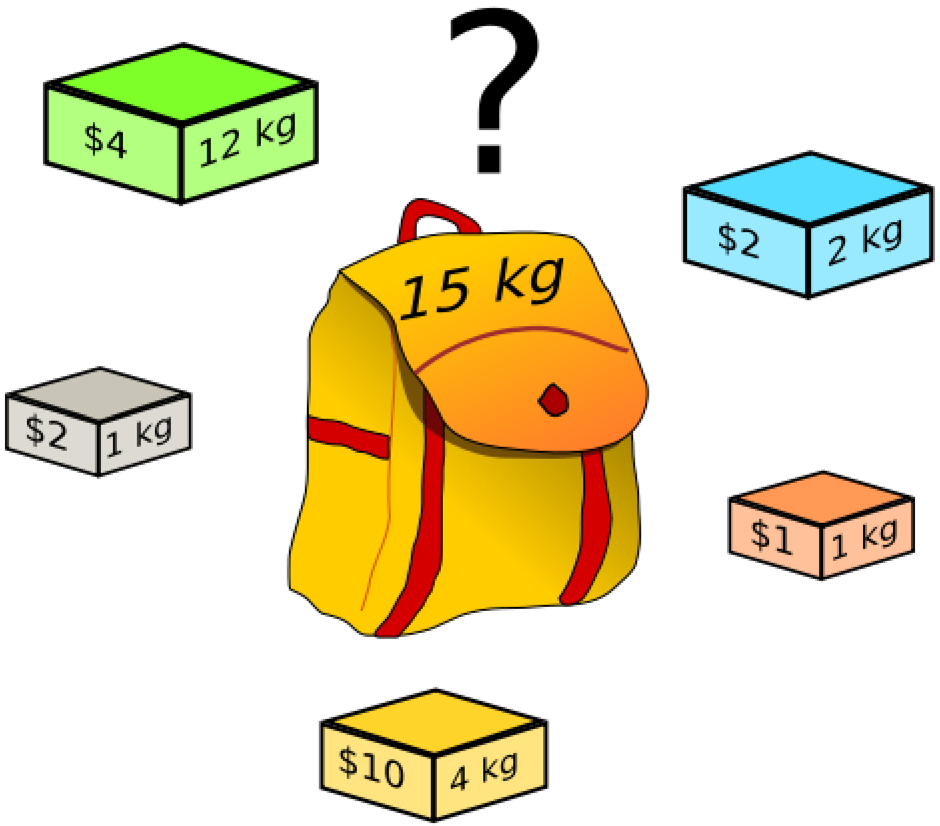
Aplicação – Problemas de Otimização

- Vamos analisar algumas heurísticas vorazes / greedy simples

- O Problema da Mochila – The 0-1 Knapsack Problem
- O Problema do Caixeiro Viajante – The Traveling Salesperson Problem

O Problema da Mochila

- Determinar o subconjunto mais valioso de itens, que cabe na mochila



"escolho o melhor valor, e depois escolho
o outro de maior valor" -> neste caso nao seria otima

Heuristica mais complexa:"dividir cada valor pelo seu pe

[Wikipedia]

O Problema da Mochila

- Dados n itens
  - Com peso $w_1, w_2, \ldots, w_n$
  - Com valor $v_1, v_2, \ldots, v_n$
- Uma mochila de capacidade W

- Qual é o (um) subconjunto mais valioso de itens, que cabe na mochila ?

- Problema **NP-difícil** !!

O Problema da Mochila

- Heurística voraz / greedy
  - Selecionar os itens pela ordem decrescente dos seus **rácios v / w**

- Calcular os quocientes valor / peso : $r_i = v_i / w_i$
- Ordenar os itens em ordem não-crescente dos seus rácios r_i
- Repetir até que não exista mais nenhum item na lista ordenada
  - Retirar o próximo item da lista
  - Se o item cabe, colocá-lo na mochila
  - Caso contrário, esquecê-lo

O Problema da Mochila

- Mochila de capacidade W = 10

- 4 itens
  - Item 1 : w = 7 ; v = $42 : v / w = 6 : 2º
  - Item 2 : w = 3 ; v = $12 : v / w = 4 : 4º
  - Item 3 : w = 4 ; v = $40 : v / w = 10 : 1º
  - Item 4 : w = 5 ; v = $25 : v / w = 5 : 3º

- Solução ?
  - Item 3 + Item 4 : $65
  - Solução ótima

Fazemos as divisoes e depois vamos levando e vendo se conseguimos....

O Problema da Mochila

- É uma heurística simples…
  - Existem outras…

- Poderá ser sempre ótima ?

- Qual seria a consequência de uma resposta positiva ?

O Problema da Mochila

- Mochila de capacidade W = 50
- 3 itens
  - Item 1 : w = 10 ; v = $60 : v / w = 6
  - Item 2 : w = 20 ; v = $100 : v / w = 5
  - Item 3 : w = 30 ; v = $120 : v / w = 4

Claro que esta nao é uma heuristica perfeita... se nao tinhamos resolvido um problema NP em tempo polinomial...

- Resultado da heurística voraz
  - Item 1 + Item 2 : $160 ←
- Solução ótima
  - Item 2 + Item 3 : $220 !! ← Contra exemplo!!

O Problema da Mochila

- Mochila de capacidade $W > 2$

- 2 items
  - Item 1 : w = 1 ; v = \$2 : $v / w = 2$: 1º !!
  - Item 2 : w = W; v = \$$W$: $v / w = 1$: 2º O erro pode ser +inf !!!

- Solução ?
  - Item 1 !!!
  - Solução ótima: Item 2 ←
  - $R_A = \infty$!!

O Problema do Caixeiro Viajante

- Determinar o caminho mais curto que atravessa n cidades

- MAS, visitando cada cidade uma só vez !

- E retornando à cidade inicial !

- Problema de otimização combinatória

[Wikipedia]

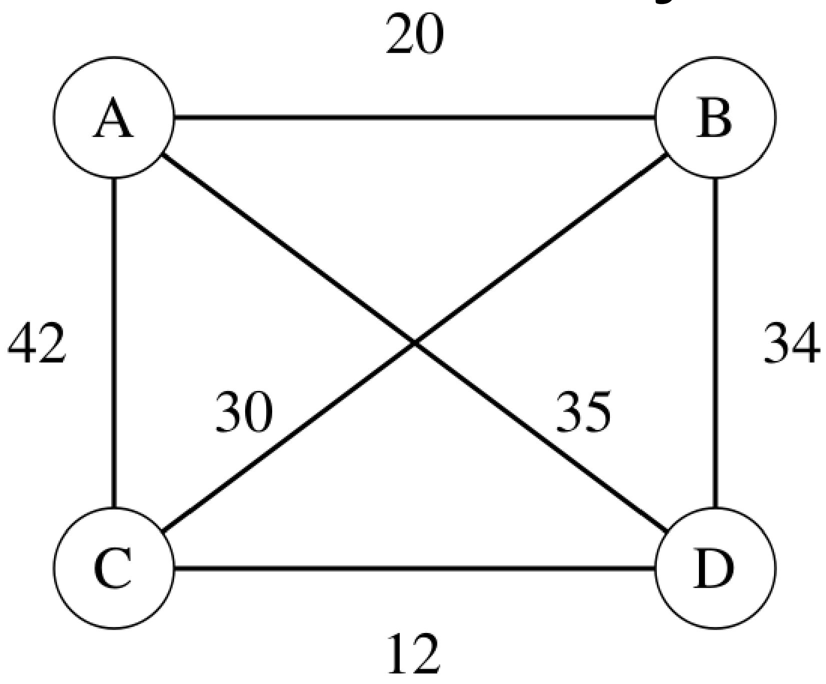
O Problema do Caixeiro Viajante

- Heurística do **Vizinho-Mais-Próximo** / **Nearest-neighbor** – Greedy !!
  - Prosseguir para a cidade mais próxima e ainda não visitada

- Escolher uma qualquer cidade como inicial
- Repetir até que todas as cidades tenham sido visitadas
  - Avançar para a cidade mais próxima e ainda não visitada
- Voltar à cidade inicial

- Heurística simples
- Mas $R_A = \infty$!!

O Problema do Caixeiro Viajante



- Qual é a solução ótima ?
- Aplicar a heurística do vizinho-mais-próximo !
- Exatidão ?

O Problema do Caixeiro Viajante

- Há outras heurísticas simples, por exemplo:

- Bidirectional-Nearest-Neighbor

- Shortest-Edge

- Aplicá-las ao exemplo anterior !!

Sugestão de Leitura

Sugestão de leitura

- A. Levitin, *“Design and Analysis of Algorithms”*, 3rd. Ed., Pearson, 2012
  - Chapter 11, Chapter 12