Análise da Complexidade de Algoritmos Recursivos II

11/10/2023

Sumário

- Recap
- Generalização: algoritmos exponenciais
- Procura binária – versão recursiva
- The Master Theorem
- The Smoothness Rule
- Merge-Sort
- Sugestões de leitura

Recapitulação

Decrease-And-Conquer

- Explorar a relação entre
  - A solução de uma dada instância de um problema
  - A solução de uma instância menor do mesmo problema

- Estratégia
  - Identificar UMA instância menor do mesmo problema
  - A menor instância é resolvida recursivamente
  - As soluções de instâncias mais pequenas são processadas para se obter a solução da instância original, se necessário

Decrease-And-Conquer

- Como decresce o tamanho de cada instância ?
- Divisão por um factor constante
  - n ; n / 2 ; n / 4; …
  - n ; n / 3 ; n / 9; …
- Subtração de um valor constante
  - n ; n – 1 ; n – 2 ; …
- Decréscimo variável
  - O padrão de decréscimo varia de iteração para iteração

D&C – Divisão por um factor constante

- Redução do tamanho da instância através da divisão por um factor constante em cada passo
  - Habitualmente, dividir por 2 !

$T(1) = c$ caso base

$T(n) = T(n / b) + f(n)$

esforço/movimentos/operacoes...

- Exemplos ?

D&C – Subtração de um valor constante

- Redução do tamanho da instância por subtração de um valor constante em cada passo
  - Habitualmente, subtrair uma unidade !

$$T(1) = c$$

$$T(n) = T(n - 1) + f(n)$$

- Exemplos ?

Divide-And-Conquer

- A estratégia algorítmica mais conhecida

- Estratégia
  - Subdividir uma instância de um problema em (duas ou mais) instâncias semelhantes e de menor dimensão
  - As instâncias mais pequenas são resolvidas recursivamente
  - As soluções de instâncias mais pequenas são combinadas para se obter a solução da instância original, se necessário

Divide-And-Conquer

- Em cada passo de subdivisão, as instâncias de menor dimensão deverão ter aprox. o mesmo tamanho !

- Todas as instâncias de menor dimensão têm de ser resolvidas !!

- Quando termina o processo de subdivisão ?
  - Casos de base ? Um só ou mais do que um ?
  - Instâncias mais pequenas podem ser resolvidas por outro algoritmo

Divide-And-Conquer

- Esta estratégia recursiva pode ser implementada
  - Usando funções recursivas (solução óbvia !)
  - Iterativamente, usando uma estrutura de dados auxiliar
    - STACK, QUEUE, etc.
    - Escolher que instância resolver de seguida !!
- Problemas ?
  - A recursividade é lenta !
    - Resolver instâncias mais pequenas usando outros algoritmos
  - Pode não ser a melhor estratégia para problemas simples !
  - Instâncias de menor dimensão podem sobrepor-se !
    - Reutilizar resultados / soluções anteriores – Prog. Dinâmica !

Divide-And-Conquer

- Fizeram este exemplo da nossa aula anterior ?
- Calcular b^n usando $b^n = b^{n \text{ div } 2} \times b^{(n+1) \text{ div } 2}$
- Número de multiplicações ?

$$M(n) = M(n \text{ div } 2) + M((n+1) \text{ div } 2) + 1$$

aqui é n+1, porque se for impar os valores são diferentes

$\boxed{2 = 2^3 * 2^3}$

3/2 = 2 = 4/2

Divide-And-Conquer – Caso particular

- Se n for uma potência de 2 : $n = 2^k$, $k = \log_2 n$

$$M(n) = M(n / 2) + M(n / 2) + 1 = 2\,M(n / 2) + 1 = \ldots$$

Se n for uma potencia de 2, temos um caso particular!

- Expressão final ? Ordem de Complexidade ?

- É melhor do que o algoritmo direto ?

Tarefa 1 – Procura num array

- Dado um array de n elementos inteiros
- Encontrar o maior valor

- Divide-And-Conquer
  - Obter o maior valor do 1º sub-array : ((n+1) div 2) elementos
  - Obter o maior valor do 2º sub-array : (n div 2) elementos
  - Comparar os dois valores e devolver o maior

- Quantas comparações ?

Tarefa 2 – Decrease-And-Conquer

- Desenvolva uma função para calcular b^n usando

$$b^n = b^{n \text{ div } 2} \times b^{n \text{ div } 2} \text{ , se n é par}$$
$$b^n = b \times b^{(n-1) \text{ div } 2} \times b^{(n-1) \text{ div } 2} \text{ , se n é impar}$$

- Fazer uma só chamada recursiva em cada passo !!
- Quais são os casos de base ?

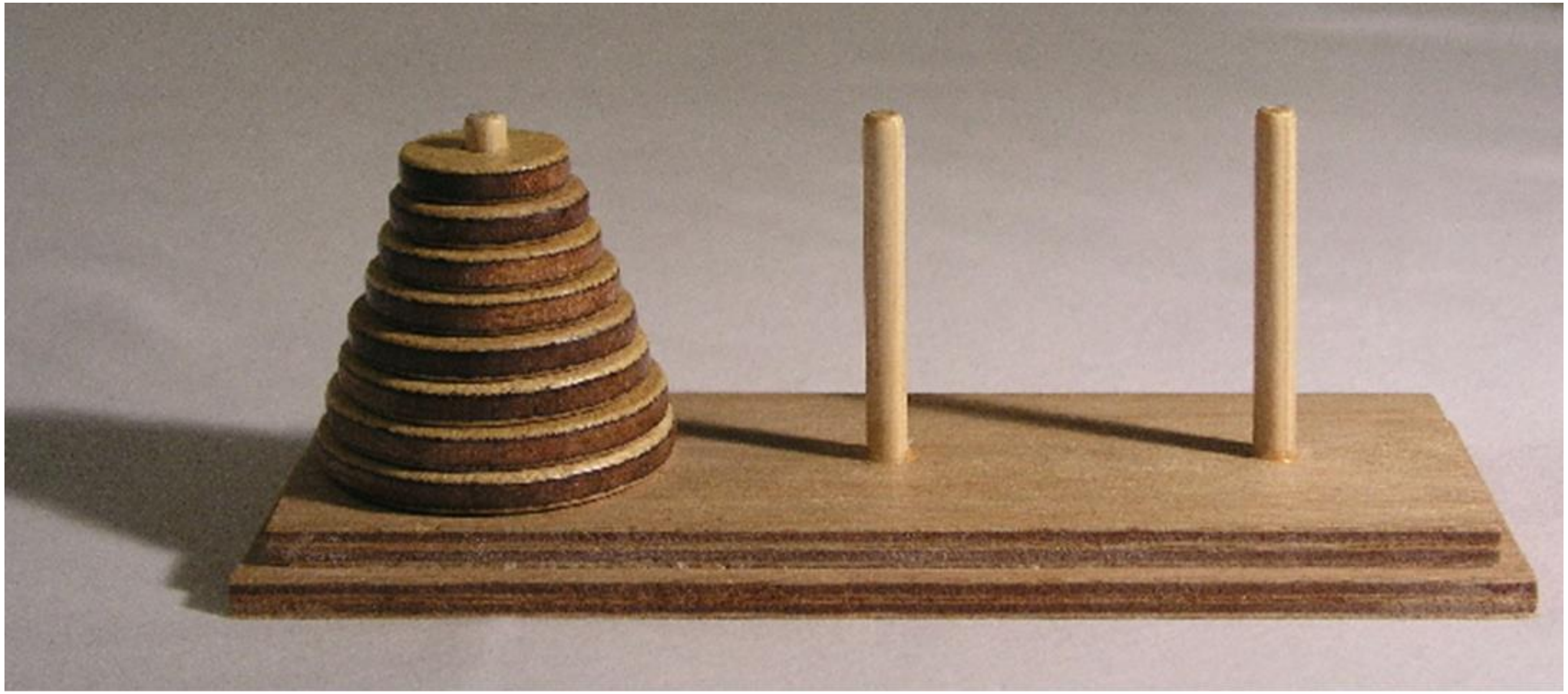
Um bom desafio! Com apenas 1 chamada recursiva!

O(log n)

- Quantas multiplicações são efetuadas ?
- Qual é a ordem de complexidade ?

Generalização:
Algoritmos Exponenciais

As Torres de Hanói



[Wikipedia]

Função recursiva

```
// torresDeHanoi('A', 'B', 'C', 8);

void torresDeHanoi(char origem, char auxiliar, char destino, int n) {
  if (n == 1) {
    contadorGlobalMovs++;
    moverDisco(origem, destino);  // Imprime o movimento
    return;
  }
  // Divide-and-Conquer
  torresDeHanoi(origem, destino, auxiliar, n - 1);

  contadorGlobalMovs++;
  moverDisco(origem, destino);

  torresDeHanoi(auxiliar, origem, destino, n - 1);
}
```

metemos todos, menos a base no auxiliar

base no destino

metemos todos, menos a base no destino

Nº de movimentos realizados

$M(1) = 1$

$M(n) = M(n-1) + 1 + M(n-1) = 1 + 2\ M(n-1)$

$M(n) = 1 + 2\ M(n-1) = 1 + 2 \times (1 + 2\ M(n-2)\ ) = 1 + 2 + 4\ M(n-2) = \ldots$

$M(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k\ M(n-k)$

Um bom desafio... (possível pergunta do exame)

Caso de base: $M(1) = 1\ ;\ k = n - 1$

$M(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots\ 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$ $\qquad \boldsymbol{M(n) \in \mathcal{O}(2^n)}$

Padrão de comportamento

$$T(1) = b$$

$$T(n) = a \times T(n - c) + d$$

- a : nº de subproblemas a resolver em cada passo
- b : nº de operações / tempo para o caso de base
- c : diminuição do tamanho do problema
- d : nº de operações / tempo de processamento de cada passo

Decrease-and-Conquer

$$T(1) = b$$

$$T(n) = a \times T(n - c) + d$$

- **a = 1**

$$T(n) = b + d \times (n - 1) / c \qquad\qquad \boldsymbol{T(n) \in \mathcal{O}(n)}$$

- Aplica-se a algum exemplo anterior ?
- Sugestão: fazer o desenvolvimento

Divide-and-Conquer

$T(1) = b$

$T(n) = a \times T(n - c) + d$

- **a > 1**

$T(n) = d/(1 - a) + (b - d/(1 - a)) \times \mathbf{a^{(n - 1) / c}}$

$$\boldsymbol{T(n) \in \mathcal{O}(a^{\frac{n}{c}})}$$

Torres de hanoi:
a = 2
c = 1
=> O(2^n)

- Aplica-se às Torres de Hanói ? Verificar !
- Sugestão: fazer o desenvolvimento

Procura Binária
– Versão recursiva

Procura Binária

- Dado um array ordenado com n elementos : A[left..right]
- Procurar valor / chave X : índice ?
- Estratégia
  - Comparar A[middle] com X
  - Se iguais, devolver middle
  - Se maior, procura recursiva em A[left..middle - 1]
  - Se menor, procura recursiva em A[middle + 1..right]

Procura Binária

- Como calcular o índice middle ?
  - Evitar overflow ! Shifting !

Considerar, o tamanho dos elementos!
A soma NÃO PODE dar overflow!

- Quantas comparações em cada passo ?
  - Variante : Tentar usar apenas uma comparação !

- Como assinalar um valor / chave não existente ?
  - Inteiros com sinal vs. sem sinal !

Procura Binária

```c
int pesqBinRec(int* v, int esq, int dir, int valor) {
  unsigned int meio;

  if (esq > dir) return -1;

  meio = (esq + dir) / 2;

  contadorComps++;
  if (v[meio] == valor) {
    return meio;
  }
  contadorComps++;
  if (v[meio] > valor) {
    return pesqBinRec(v, esq, meio - 1, valor);
  }

  return pesqBinRec(v, meio + 1, dir, valor);
}
```

Procura Binária

- Melhor Caso ?
  - 1 só comparação
- Pior Caso ?
  - Selecionar sempre a maior partição !
  - Nº impar vs. nº par de elementos ?
  - Em que casos temos sempre partições com o mesmo tamanho ?
- Expressão para o nº de comparações realizadas ?

Procura Binária – Caso particular

- $n = 2^k$
- esq = 0 dir = $2^k - 1$ meio = $2^{k-1} - 1$
- Pior caso: escolher sempre a partição da direita
  - É a maior das duas !!

W(1) = 2

W(n) = 2 + W(n/2) = 4 + W(n/4) = 6 + W(n/8) = …

W(n) = 2 x k + W(1) = 2 + 2 log n

$$\boldsymbol{W(n) \in \mathcal{O}(\log_2 n)}$$

Tarefa 3 – O Problema da Moeda Falsa

- Dadas n moedas aparentemente idênticas, em que uma delas é uma moeda falsa
- Encontrar a moeda falsa !
- Usando apenas uma balança !

[Wikipedia]

- A moeda falsa é mais leve do que uma moeda genuína !
- Algoritmo eficiente ?

The Master Theorem

The Master Theorem

- Dada uma recorrência, para $n = b^k$, $k \geq 1$

$$T(1) = c \quad e \quad T(n) = a\,T(n / b) + f(n)$$

em que $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c > 0$

- Teorema : Se $f(n)$ em $\Theta(n^d)$, em que $d \geq 0$, então

$$T(n) \text{ em } \boldsymbol{\Theta(n^d)}, \text{ se } a < b^d$$

$$T(n) \text{ em } \boldsymbol{\Theta(n^d \log n)}, \text{ se } a = b^d$$

$$T(n) \text{ em } \boldsymbol{\Theta(n^{\log_b a})}, \text{ se } a > b^d$$

The Master Theorem

- Permite obter diretamente a ordem de complexidade, dada uma recorrência
  - MAS não a expressão final para o nº de operações !
- Resultados válidos para as notações $O(n)$ e $\Omega(n)$
- Exemplo

$$M(n) = 2\ M(n / 2) + 1$$

$f(n) = 1$, $f(n)$ in $\Theta(n^0)$, $d = 0$

$a = 2$, $b = 2$, $a > b^d$

$M(n)$ in $\Theta(n)$

The Smoothness Rule

Smooth Functions

- Função eventualmente não-decrescente

$$f(n_1) \leq f(n_2), \text{ para qualquer } n_2 > n_1 \geq n_0$$

- Função "smooth"

  1) f(n) é eventualmente não-decrescente

  2) $f(2n)$ in $\Theta(f(n))$

- Exemplos
  - $\log n$, n, $n \log n$ e n^k são funções "smooth"
  - a^n não é !!

The Smoothness Rule

- Seja T(n) uma função eventualmente não-decrescente
- E seja f(n) uma função "smooth"
- Se $T(n)$ in $\Theta(f(n))$ para valores de n que sejam potências de b, com $b \geq 2$
- Então $T(n)$ in $\Theta(f(n))$
- Resultados análogos para $O(n)$ e $\Omega(n)$!!
- Boas notícias !!

Exemplo – Decrease by a Constant Factor

- Redução da dimensão de cada instância através da divisão por um fator constante

$$T(1) = c$$

$$T(n) = T(n / b) + f(n)$$

- Complexidade ?
  - T(n) in $\Theta(\log n)$, se $f(n) = \text{constante}$
  - T(n) in $\Theta(n)$, se $f(n)$ in $\Theta(n)$
- Exemplos ?

Mergesort – Ordenação por Fusão

Mergesort

- Ordenar um array / lista
  - Se o tamanho é 0 ou 1, já está ordenada
  - Caso contrário, subdividir em duas “metades”
    - Aprox. do mesmo tamanho !!
  - Ordenar recusivamente cada “metade”
  - Fundir as duas “metades” ordenadas num só array / lista

- Questão : usar ou não um array / lista adicional ?

Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

Mergesort – Subdivisão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7	**2**	**6**

Mergesort – Subdivisão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7	**2**

Mergesort – Subdivisão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7

Mergesort – Subdivisão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7	**2**

Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7	**2**

Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

7
2

Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**7**

Mergesort – Subdivisão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**7**	**6**

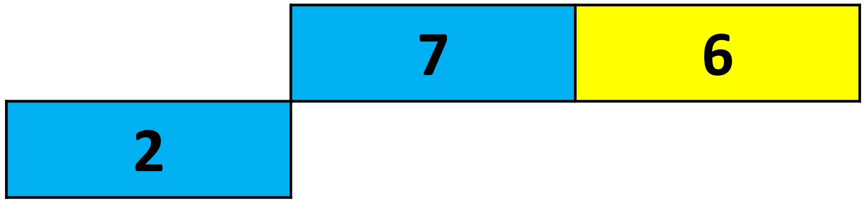
Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**7**	**6**

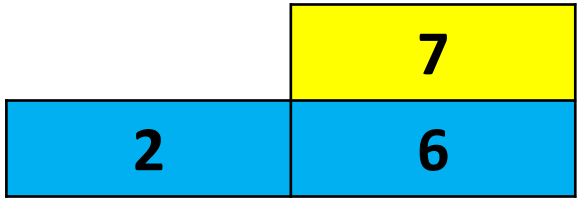
Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**



Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**



Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**6**	**7**

Mergesort – Subdivisão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

4	**3**

2	**6**	**7**

Mergesort – Subdivisão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			4	

2	**6**	**7**

Mergesort – Subdivisão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			4	**3**
2	**6**	**7**		

Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			4	**3**
2	**6**	**7**		

Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			4	
			3	
2	**6**	**7**		

Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			3	**4**
2	**6**	**7**		

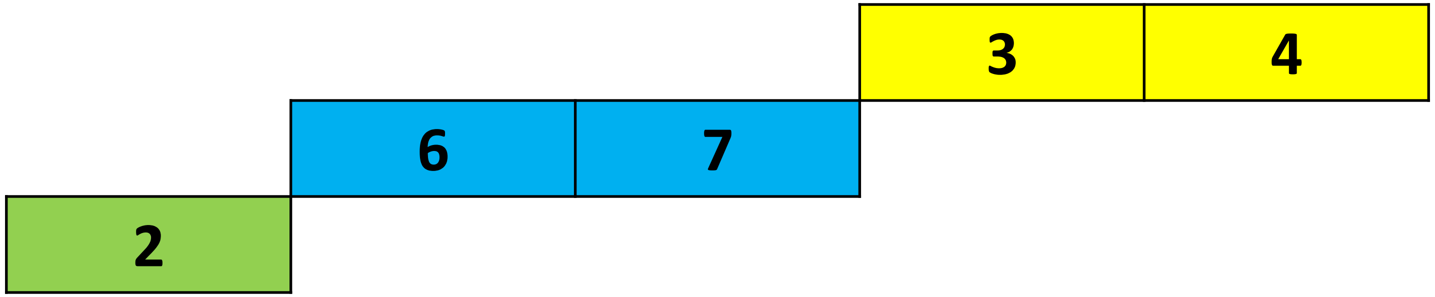
Mergesort

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

			3	**4**
2	**6**	**7**		

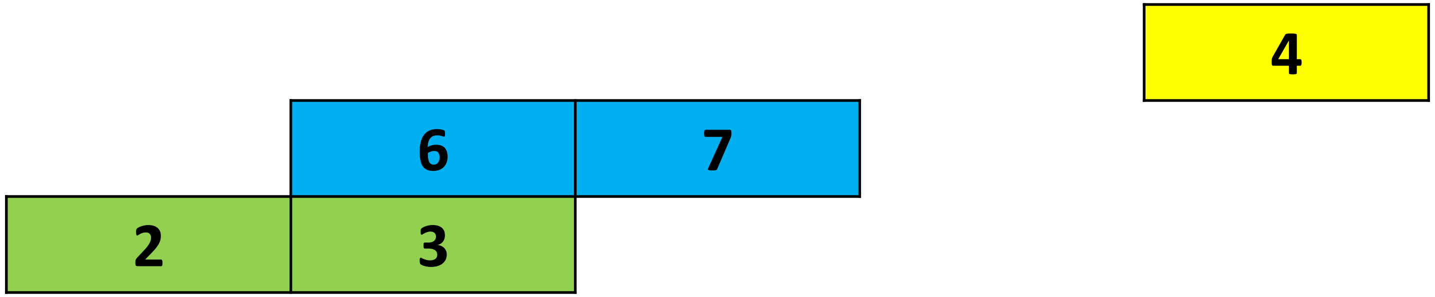
Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**



Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**



Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

	6	**7**
2	**3**	**4**

Mergesort – Fusão

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

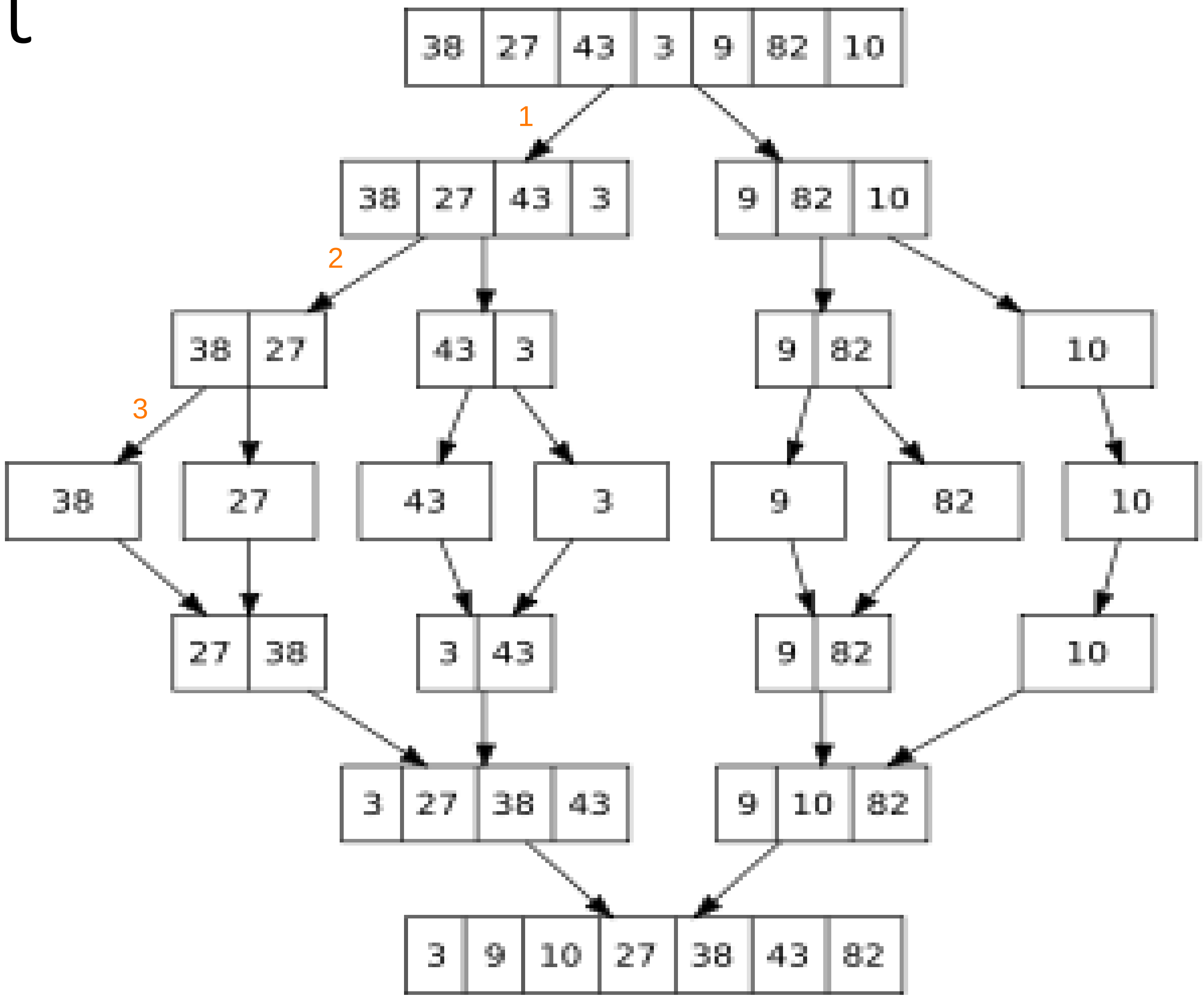
		7	
2	**3**	**4**	**6**

Mergesort – Array ordenado

0	1	2	3	4
7	**2**	**6**	**4**	**3**

2	**3**	**4**	**6**	**7**

Mergesort



SUBDIVISÃO

FUSÃO

[Wikipedia]

Tarefa: associar a cada seta um rótulo que identifica a sequência pela qual as chamadas são executadas

Mergesort

```c
// mergeSort(A, tmpA, 0, n - 1);

void mergeSort(int* A, int* tmpA, int left, int right) {
  // Mais do que 1 elemento ?

  if (left < right) {
    int center = (left + right) / 2;

    mergeSort(A, tmpA, left, center);
    mergeSort(A, tmpA, center + 1, right);
    merge(A, tmpA, left, center + 1, right);
  }
}
```

Fusão!

Função não recursiva!

Mergesort

```
void merge(int* A, int* tmpA, int lPos, int rPos, int rEnd) {
  int lEnd = rPos - 1;
  int tmpPos = lPos;
  int nElements = rEnd - lPos + 1;

  // COMPARAR O 1o ELEMENTO DE CADA METADE
  // E COPIAR ORDENADAMENTE PARA O ARRAY TEMPORÁRIO

  while (lPos <= lEnd && rPos <= rEnd) {
    if (A[lPos] <= A[rPos])
      tmpA[tmpPos++] = A[lPos++];
    else
      tmpA[tmpPos++] = A[rPos++];
  }
```

falta código!

Mergesort

```c
  // SOBRA, PELO MENOS, 1 ELEMENTO NUMA DAS METADES

  while (lPos <= lEnd) {···
  }

  while (rPos < rEnd) {···
  }

  // COPIAR DE VOLTA PARA O ARRAY ORIGINAL

  for (int i = 0; i < nElements; i++, rEnd--) {
    A[rEnd] = tmpA[rEnd];
  }
}
```

Mergesort – Tarefas

- Eficiência ?
- Todas as comparações são feitas pela função de fusão
- Escrever a recorrência !

Arrays com número de elementos potências de 2!

- Melhor caso / Pior caso / Caso médio ?
- O(n log n) !!

Sugestões de leitura

Sugestões de leitura

- A. Levitin, Introduction to the Design and Analysis of Algorithms, 3rd Edition, 2012
  - Capítulo 4: secção 4.4
  - Capítulo 5: secção 5.1
  - Apêndice B