Aula 11

Definição de espaço vetorial

$(V, \oplus, \odot)$

1.- $\forall\, x, y \in V,\ x \oplus y \in V$

2.- $\oplus$ é comutativa

3.- $\oplus$ é associativa

4.- existe num V um (único) elemento neutro 0_V para $\oplus$

5.- cada elemento de V tem simétrico em relação à $\oplus$

5'.- $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V, \alpha \odot x \in V$

6.- $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$ $\longrightarrow$ $\alpha\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\right) = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

7.- $\underbrace{(\alpha + \beta)}_{\text{Adição em } \mathbb{R}} \odot x = \alpha \odot x \oplus \beta \odot x$

$$(2+3)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.- $\alpha \odot (\beta \odot x) = \underbrace{(\alpha\beta)}_{\text{Multiplicação em } \mathbb{R}} \odot x$

9.- $1 \odot x = x,\ \forall x \in V$

Aos elementos de V chamamos vetores.

$\underbrace{0_V}_{\text{Elemento neutro de } V} \longrightarrow$ zero do espaço

$\oplus$ é comutativa:

$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ x \oplus y = y \oplus x}$

$x \oplus y = xy = yx = y \oplus x$

Existência de elemento neutro:

$\boxed{\exists u \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^+, u \oplus x = x \oplus u = x}$

$\exists u \in \mathbb{R}^+ : u \oplus x = x$

$u \oplus x = u\cancel{x} = \underset{x \in \mathbb{R}^+}{\cancel{x}} \Rightarrow u = 1$

Exemplos:

1 - $\mathbb{R}^n$ munido da soma e multiplicação escalar usuais

2 - $\mathbb{R}^+$ munido das operações: $x \oplus y = xy$

$\alpha \odot x = x^\alpha$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

3.- O conjunto dos matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$ com os operações usuais de adição e multiplicação por um escalar

4 - O conjunto $\mathcal{P}$ de todos os polinómios de qualquer grau com os operações usuais

5 - O conjunto $\mathcal{P}_n$ dos polinómios de grau $\leq n$ com os operações usais

$$\mathcal{P} = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \ a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}\}$$

n fixo

$$\mathcal{P}_n = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0, \ a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

$$P_2 = \{a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

E o conjunto dos polinómios de grau n?

$$S = \{a_n x^n + \dots a_1 x + a_0, \ a_n \neq 0, \ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

$p(x) = x^n + 1 \in S$

$q(x) = x^n + 1 \in S$

$p(x) + q(x) = 2 \notin S$ (não tem grau n), logo S não é espaço vetorial (e.v)

6 - O conjunto de funções reais de variável real $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\},$$

é um e.v. para a adição de funções e para a multiplicação de uma função por um escalar

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \qquad x \mapsto g(x)$$

$$f+g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\alpha f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

$\exists\, u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

$u + f = f$

$\forall x \in \mathbb{R}, (u+f)(x) = f(x)$

$u(x) + \cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} \Rightarrow u(x) = 0$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto u(x) = 0$

Propriedades básicas

Proposição: Seja $\mathcal{V}$ um e.v. real (os escalares estão em $\mathbb{R}$) então:

"o normal"

(a) $0_{\mathbb{R}} \odot x = 0_{\mathcal{V}}, \forall x \in \mathcal{V}$

$$0 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) $\alpha \odot x = 0_{\mathcal{V}} \Rightarrow \alpha = 0 \vee x = 0_{\mathcal{V}}$

(d) $(-1) \odot x$ é o simétrico de x em relação a $\oplus$, $\forall x \in \mathcal{V}$

$X + Y$ em vez de $X \oplus Y$
αY em vez de $\alpha \odot X$

Subespaço Vetorial

$S \subset \mathcal{V}$ é um subespaço vetorial do e.v. real $\mathcal{V}$ se:

① $0_{\mathcal{V}} \in S$

② S é fechado para a soma: $\forall x, y \in S, x + y \in S$

③ S é fechado para a multiplicidade escalar:

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in S, \alpha x \in S$

$\boxed{\mathcal{V} \text{ e } \{0_{\mathcal{V}}\} \text{ são chamados subespaços triviais}}$

Exercícios:

1) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ é um subspaço de $\mathbb{R}^2$

2) O plano que passa na origem $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$ é um subplano de $\mathbb{R}^3$
$F \subseteq \mathbb{R}^3$

3) Serão subespaços os conjuntos:

a) $H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1\}$

b) $H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Q}\}$

c) $H_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq 1\}$

d) $H_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y\}$

e) $H_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \vee z = 0\}$

Resolução:

1)

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

① $(0,0,0) \in F$, pq. $x = 0$

②

$\forall (x,y,z), (x',y',z') \in F$

$(x,y,z) + (x',y',z') \in F$?

$$\begin{aligned} & (x,y,z) \in F \Leftrightarrow x = 0 \\ + \; & (x',y',z') \in F \Leftrightarrow x' = 0 \\ \hline & (x+x', y+y', z+z') \in F \Leftrightarrow x + x' = 0 \end{aligned}$$

Verdadeiro!

③

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in F$

$\alpha(x,y,z) \in F$?

$(x,y,z) \in F \Leftrightarrow x = 0$

Verdadeiro $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha(x,y,z) \in F \Leftrightarrow (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in F \Leftrightarrow \alpha x = 0$

2) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{ax + by + cz = 0}_{\Leftrightarrow\ x = \frac{-by-cz}{a}}\}$

① $(0,0,0) \in F$, pq. o plano passa na origem (diz no enunciado) ✓

②

$\forall (x,y,z), (x',y',z') \in F$

$(x,y,z) + (x',y',z') \in F$?

$(x,y,z) \in F \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-by-cz}{a}}$

$(x',y',z') \in F \Leftrightarrow \boxed{x' = \frac{-by'-cz'}{a}}$

$(x+x', y+y', z+z') \in F \Leftrightarrow x + x' = \boxed{\frac{-b(y+y')-c(z+z')}{a}}$

$x + x' = \frac{-by-cz}{a} + \frac{-by'-cz'}{a}$

$= \frac{-by-by'-cz-cz'}{a}$

$= \boxed{\frac{-b(y+y')-c(z+z')}{a}}$

logo é Verdadeiro ✓

③

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (x,y,z) \in F$

$\alpha(x,y,z) \in F$?

$(x,y,z) \in F \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{-by-cz}{a}}$

$\alpha(x,y,z) \in F \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \in F \Leftrightarrow \alpha x = \frac{-b(\alpha y)-c(\alpha z)}{a}$

$\Leftrightarrow \alpha x = \alpha\left(\frac{-by-cz}{a}\right)$

$\Leftrightarrow \alpha x = \alpha x$

Verdadeiro!

---

3)

a) $H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1\}$

$(0,0,0) \notin H_1$ pq $y = 0 \neq 1$,

Logo H_1 não é um espaço vetorial.

b) $H_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{Q}\}$

✓① $(0,0,0) \in H_2$ pq a 1ª componente é um racional

✓② $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in H_2$

$(x,y,z) + (x',y',z') \in H_2$

$(x,y,z) \in H_2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$

$(x',y',z') \in H_3 \Leftrightarrow x' \in \mathbb{Q}$

$(x,y,z) + (x',y',z') = (x+x', y+y', z+z') \in H_2 \Leftrightarrow x + x' \in \mathbb{Q}$

(Verdadeiro), pq a soma de dois racionais ainda é um racional

—//—

× ③

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in H_2$$

$$\alpha(x,y,z) \in H_2 ?$$

$(x,y,z) \in H_2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{\alpha \times \mathbb{Q} \in \mathbb{Q}, \forall \alpha \in \mathbb{R}}$

Falso, por exemplo para $\alpha = \pi$

$\alpha(x,y,z) \in H_2 \Leftrightarrow \alpha x \in \mathbb{Q}$

$\parallel$

$(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

c) $H_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |z| \leq 1\}$

✓① $(0,0,0) \in H_3$ pq $|0| \leq 1$

—//—

× ②

$$\forall (x,y,z), (x',y',z') \in H_3$$

$$(x,y,z) + (x',y',z') \in H_3 ?$$

$$\begin{array}{l} (x,y,z) \in H_3 \Leftrightarrow |z| \leq 1 \\ + \ (x',y',z') \in H_3 \Leftrightarrow |z'| \leq 1 \\ \hline \end{array}$$

$$(x+x', y+y', z+z') \in H_3 \Leftrightarrow |z+z'| \leq 1$$

$|z+z'| \leq |z| + |z'| \leq 1+1 = 2$, logo $|z+z'| \leq 1$ é uma proposição Falsa!

$\exists (x,y,z) = (0,0,1) \in H_3$

$\exists (x',y',z') = (0,0,1) \in H_3$

$(x+x', y+y', z+z') = (0,0,2) \notin H_3$

pq. $|z| = 2 > 1$

d)

$H_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq y\}$

✓① $(0,0,0) \in H_4$ pq. $0 \geq 0$

—//—

✓② $\forall (x,y,z), (x',y',z') \in H_4$

$$(x,y,z) + (x',y',z') \in H_4 ?$$

$(x,y,z) \in H_4 \Leftrightarrow x \geq y$ ①

$(x',y',z') \in H_4 \Leftrightarrow x' \geq y'$ ②

$$\|$$

$(x+x', y+y', z+z') \in H_4$, $x+x' \geq y+y'$

$\underbrace{x+x' \geq y+x'}_{\hookrightarrow x \geq y}$ $\geq y+y'$ $\rightarrow x' \geq y'$ ②

①

—"—

× ③

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y,z) \in H_4,$

$\alpha (x,y,z) \in H_4$?

$(x,y,z) \in H_4 \Leftrightarrow x \geq y$

$\alpha (x,y,z) \in H_4 \Leftrightarrow \alpha x \geq \alpha y$

$\|$

$(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$\boxed{\alpha = -1}$

$(x,y,z) = (2,1,0) \in H_4$ pq. $2 \geq 1$

$(-1)(x,y,z) = (-2,-1,0) \notin H_4$ pq. $-2 \not\geq -1$

e) $H_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=0 \vee z=0\}$

$\boxed{\text{Não está em } H_5 \Rightarrow y \neq 0 \wedge z \neq 0}$

✓① $(0,0,0) \in H_5$ pq. $y=0 \in (y=0 \vee z=0)$

—"—

× ②

$\forall (x,y,z), (x',y',z') \in H_5$

$(x,y,z) + (x',y',z') \in H_5$?

$(1,0,1) \in H_5$

$(1,1,0) \in H_5$

$(2,1,1) \notin H_5$ pq $y \neq 0 \wedge z \neq 0$

Outros exercícios:

Ex 1

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^2$,

✓ ① • $(0,0) \in F$ pq. $x = 0$

✓ ② • Sejam $(x,y), (x',y') \in F$. Vamos ver $(x,y) + (x',y') \in F$

$$\frac{\begin{array}{l}(x,y) \in F \Leftrightarrow x = 0 \\ (x',y') \in F \Leftrightarrow x' = 0\end{array}}{(x+x', y+y') \in F \Leftrightarrow x + x' = 0}$$

por hipótese $\rightarrow$ $x + x' = 0 \Leftrightarrow 0 + x' = 0 \Leftrightarrow 0 + 0 = 0$

✓ ③ • $\forall x \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in F, \alpha(y,y) \in F$

$(x,y) \in F \Leftrightarrow x = 0$

$\alpha(x,y) \in F \Leftrightarrow \alpha x = 0$

$\|$

$(\alpha x, \alpha y)$

$\underline{\text{Como } x = 0} \rightarrow \alpha \times 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ✓

Ex 2 No e.v. $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em x de grau não superior a 2, considere o conjunto dos polinómios $ax^2 + bx + c = 0$ com $c = 0$

$S = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 : c = 0\}$

$S = \{ax^2 + bx, \ a, b \in \mathbb{R}\}$

✓ ① $0^2 + 0 + \underline{0} \in S$

—//—

② Sejam $p(x)$ e $q(x) \in S$

$$\frac{\begin{array}{l}p(x) = ax^2 + bx, \ a, b \in \mathbb{R} \\ q(x) = a'x^2 + b'x, \ a', b' \in \mathbb{R}\end{array}}{p(x) + q(x) = \underbrace{(a + a')}_{\in \mathbb{R}} x^2 + \underbrace{(b+b')}_{\in \mathbb{R}} x \in S}$$

$\forall p(x), q(x) \in S, \ p(x) + q(x) \in S$

—//—

③

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall p(x) \in S, \ \alpha \, p(x) \in S$

$p(x) \in S \Leftrightarrow p(x) = ax^2 + bx, \ a, b \in \mathbb{R}$

$\in \mathbb{R}$

$\alpha \, p(x) = (\alpha a) x^2 + (\alpha b) x$

$= a'' x^2 + b'' x \in S$

Usamos o 1º conjunto:

$p(x) \in S \Leftrightarrow p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 : c = 0$
$q(x) \in S \Leftrightarrow q(x) = a'x^2 + b'x + c' \in \mathcal{P}_2 : c' = 0$