

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

## Espaços Vetoriais

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

## Espaços vetoriais

### Subespaços

Subespaço gerado por um conjunto

### Subespaços associados a uma matriz

Espaço nulo

Espaço das linhas e espaço das colunas

### Independência linear

### Bases e dimensão

Bases e dimensão do espaço nulo, do espaço das linhas e do espaço das colunas

### Coordenadas de um elemento

### Mudança de base

### Bases ortonormadas e projeção ortogonal

# Introdução

Ao longo deste capítulo considera-se

- ▶ um conjunto não vazio  $\mathcal{V}$ ,
- ▶ uma operação  $\oplus$  definida para cada  $X \in \mathcal{V}$  e para cada  $Y \in \mathcal{V}$ ,

$$X \oplus Y,$$

- ▶ uma operação  $\odot$  definida para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  e para cada  $X \in \mathcal{V}$ ,

$$\alpha \odot X.$$

Diz-se que o conjunto  $\mathcal{V}$  está **munido** com as operações  $\oplus$  e  $\odot$ .

As operações  $\oplus$  e  $\odot$  são usualmente designadas por

**adição** e **multiplicação por escalar**,

(respectivamente) porque, como se verá a seguir, estas operações **têm muitas propriedades em comum com outras operações de adição e multiplicação por escalar conhecidas**, tais como a adição e a multiplicação por escalar de vetores e de matrizes.

# Definição de espaço vetorial

O conjunto  $\mathcal{V}$ , munido das operações  $\oplus$  e  $\odot$ , é um **espaço vetorial real** se,  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{V}$  e  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\mathcal{V}$  é fechado relativamente a  $\oplus$   $X \oplus Y \in \mathcal{V}$

2.  $\oplus$  é comutativa  $X \oplus Y = Y \oplus X$

3.  $\oplus$  é associativa  $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$

4. existe (único) o el. neutro  $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$  (zero de  $\mathcal{V}$ ) para  $\oplus$   $0_{\mathcal{V}} \oplus X = X$

5. existe (único) o simétrico  $\ominus X \in \mathcal{V}$  de  $X$  em relação a  $\oplus$   $\ominus X \oplus X = 0_{\mathcal{V}}$

6.  $\mathcal{V}$  é fechado relativamente a  $\odot$   $\alpha \odot X \in \mathcal{V}$

7.  $\odot$  é distributiva em relação a  $\oplus$   $\alpha \odot (X \oplus Y) = \alpha \odot X \oplus \alpha \odot Y$

8.  $\odot$  é “distributiva” em relação a  $+$   $(\alpha + \beta) \odot X = \alpha \odot X \oplus \beta \odot X$

9. os produtos (o de  $\mathbb{R}$  e  $\odot$ ) são “associativos”  $(\alpha\beta) \odot X = \alpha \odot (\beta \odot X)$

10. o escalar 1 é o “elemento neutro” para  $\odot$   $1 \odot X = X$

Daqui em diante, designaremos os espaços vetoriais reais apenas por espaços vetoriais (e.v.)

# Exemplos de espaços vetoriais

1.  $\mathbb{R}^n$  munido das operações adição e multiplicação por escalar usuais.

2.  $\mathbb{R}^+$  munido das operações:

$$x \oplus y = xy \quad \text{e} \quad \alpha \odot x = x^\alpha, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. O conjunto  $\mathbb{R}^{m \times n}$  das matrizes  $m \times n$  munido das operações adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar real.

4. O conjunto de todas as funções reais de variável real, com o mesmo domínio, munido da adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar real.

5. O conjuntos  $\mathcal{P}$  de todos os polinómios (de qualquer grau) e o conjunto  $\mathcal{P}_n$  dos polinómios de grau menor ou igual a  $n$  (incluindo o polinómio nulo), com as operações usuais.

O conjunto dos polinómios de grau  $n$ , com as operações usuais, não é e.v.

# Mais algumas propriedades

**Proposição:** Seja  $\mathcal{V}$  um e.v. Então

- (a)  $0 \odot X = 0_{\mathcal{V}}, \forall X \in \mathcal{V};$
- (b)  $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}, \forall \alpha \in \mathbb{R};$
- (c)  $\alpha \odot X = 0_{\mathcal{V}} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } X = 0_{\mathcal{V}};$
- (d)  $(-1) \odot X = \ominus X$  é o **simétrico** de  $X$  em relação a  $\oplus, \forall X \in \mathcal{V}.$

Para simplificar as notações, daqui em diante, escreve-se

- i.  $X + Y$  em vez de  $X \oplus Y$ , para  $X, Y \in \mathcal{V};$
- ii.  $\alpha X$  em vez de  $\alpha \odot X$ , para  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $X \in \mathcal{V};$
- iii.  $-X$  em vez de  $\ominus X$ , para  $X \in \mathcal{V}.$

# Definição de subespaço

O subconjunto não vazio  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$  é um **subespaço (vetorial)** do e.v.  $\mathcal{V}$  se, munido das mesmas operações de  $\mathcal{V}$ , for ele próprio um e.v.

**Teorema:**  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$  é um **subespaço** do e.v.  $\mathcal{V}$  se e só se

1.  $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}$ , onde  $0_{\mathcal{V}}$  representa o elemento neutro de  $\mathcal{V}$  em relação à adição;
2.  $\mathcal{S}$  é **fechado em relação à adição** em  $\mathcal{V}$ :

$$X + Y \in \mathcal{S}, \text{ para } X, Y \in \mathcal{S};$$

3.  $\mathcal{S}$  é **fechado em relação à multiplicação por escalar** em  $\mathcal{V}$ :

$$\alpha X \in \mathcal{S}, \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}, X \in \mathcal{S}.$$

# Exemplos de subespaços

Exemplo:

1.  $\mathcal{V}$  e  $\{0_{\mathcal{V}}\}$  são os **subespaços triviais** de  $\mathcal{V}$ ;
2.  $\{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ ;
3.  $\{(1, y) : y \in \mathbb{R}\}$  não é um subespaço de  $\mathbb{R}^2$ ;



# Subespaço gerado por um conjunto

Dados os elementos  $X_1, \dots, X_k$  de  $\mathcal{V}$  e os escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ , o elemento  $X \in \mathcal{V}$  tal que

$$X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k$$

é uma **combinação linear** dos elementos  $X_1, \dots, X_k$ .

**Teorema:**

Seja  $\mathcal{V}$  um e.v.,  $K = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$  e  $S$  o conjunto das combinações lineares de elementos de  $K$ , ou seja,  $S = \{\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$ . O conjunto  **$S$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$** .

O subespaço  $S$  designa-se por **subespaço gerado** por  $K$ , e escreve-se

$$S = \langle K \rangle \text{ ou } S = \langle X_1, \dots, X_k \rangle.$$

Diz-se, também, que  $K$  **gera** o subespaço  $S$  ou é um **conjunto gerador** do subespaço  $S$ .

# Subespaço gerado por um conjunto

**Exercício:** Confirme que se  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{V}$ , então  $S = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$  é um subespaço de  $\mathcal{V}$ .

**Exemplo:** Dados os vetores não colineares  $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ,

1.  $\langle X_1 \rangle$  é a **reta** que passa pela origem e tem vetor director  $X_1$ ;
2.  $\langle X_1, X_2 \rangle$  é o **plano** que passa pela origem e tem vetores diretores  $X_1$  e  $X_2$ .

# Propriedades dos conjuntos geradores

**Lema:** Dados  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{V}$  e  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ , com  $i \neq j$ ,

- i.  $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_j, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle$ ;
- ii.  $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, \alpha X_i, \dots, X_k \rangle$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
- iii.  $\langle X_1, \dots, X_i, \dots, X_k \rangle = \langle X_1, \dots, X_i + \beta X_j, \dots, X_k \rangle$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

# Espaço nulo de uma matriz

O **espaço nulo** da matriz  $A$ ,  $\mathcal{N}(A)$ , é o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo associado a  $A$   $m \times n$ ,

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}.$$

Se  $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$  (ou seja, se  $\text{car}(A) < n$ ),  $\mathcal{N}(A)$  pode escrever-se como o conjunto de todas as combinações lineares de  $n - \text{car}(A)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ , facilmente obtidos usando colunas de uma matriz escalonada reduzida  $A_r$  equivalente (por linhas) a  $A$ .

# Espaço nulo de uma matriz

## Exemplo

Considerando a matriz  $A$  e a matriz escalonada reduzida  $A_r$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X \in \mathcal{N}(A) \iff AX=0 \iff A_r X=0 \iff$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \iff X = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 N_2 + x_4 N_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \text{ var. livres.}$$

O conjunto  $\{N_2, N_4\}$  é um conjunto gerador de  $\mathcal{N}(A)$ .

## Exercício:

Mostre que se o sistema  $AX = B$  é possível e se  $\bar{X}$  é uma sua solução, então o conjunto de soluções do sistema é  $\{\bar{X} + Y : Y \in \mathcal{N}(A)\}$ .

# Espaço das linhas e espaço das colunas

Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  com linhas  $L_1, \dots, L_m \in \mathbb{R}^n$  e colunas  $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}^m$

$$A = \begin{bmatrix} L_1^T \\ \vdots \\ L_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

- ▶ O espaço das linhas de  $A$  é o subespaço de  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}(A) = \langle L_1, \dots, L_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- ▶ O espaço das colunas de  $A$  é o subespaço de  $\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{C}(A) = \langle C_1, \dots, C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Como consequência das propriedades dos conjuntos geradores (slide 11) conclui-se o seguinte:

**Teorema:** Se as matrizes  $A$  e  $B$  são **equivalentes por linhas**,

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B).$$

# Independência linear

Um subconjunto não vazio  $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\}$  de um e.v.  $\mathcal{V}$  diz-se **linearmente independente (l.i.)** se

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0,$$

caso contrário,  $\mathcal{K}$  é **linearmente dependente (l.d.)** em  $\mathcal{V}$ .

**Nota:**  $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{K} \Rightarrow \mathcal{K}$  é linearmente dependente.

**Observação:**

- ▶ Dois vetores não nulos de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  são colineares se e só se são linearmente dependentes.
- ▶ Três vetores não colineares de  $\mathbb{R}^3$  definem um plano se e só se são linearmente dependentes.



# Independência linear

Seja  $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\}$  um subconjunto de um e.v.  $\mathcal{V}$ .

$\mathcal{K}$  é **linearmente dependente** se e só se o sistema que se obtém da equação

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}}$$

é **possível e indeterminado**, isto é, se tem uma **solução com os escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  não todos nulos**.

Se existe  $1 \leq j \leq k$  tal que  **$\alpha_j \neq 0$** , então

$$X_j = \frac{\alpha_1}{\alpha_j} X_1 + \dots + \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} X_{j-1} + \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} X_{j+1} + \dots + \frac{\alpha_k}{\alpha_j} X_k$$

concluindo-se que  **$X_j$  pertence ao subespaço gerado por  $\mathcal{K} \setminus \{X_j\}$** .

# Geradores e independência linear

Sejam  $\mathcal{V}$  um e.v. e  $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ .

**Lema:** Seja  $X \in \mathcal{K}$ . Então  $X$  é **combinação linear** dos elementos de  $\mathcal{K} \setminus \{X\}$  **se e só se**

$$\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle.$$

**Teorema:**  $\mathcal{K}$  é um conjunto **linearmente**

- ▶ **dependente**  $\iff$  existe  $X \in \mathcal{K}$  tal que  $X \in \langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle$ , ou seja,  $\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle$ ;
- ▶ **independente**  $\iff$  para cada  $X \in \mathcal{V} \setminus \langle \mathcal{K} \rangle$ , o conjunto  $\mathcal{K} \cup \{X\}$  é l.i.

## Corolário:

Seja  $\mathcal{V}$  um e.v. e  $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ .

- ▶ Se  $\mathcal{K}$  gera  $\mathcal{V}$  mas não é l.i., é possível retirar um elemento de  $\mathcal{K}$ , obtendo-se ainda um conjunto gerador de  $\mathcal{V}$ .
- ▶ Se  $\mathcal{K}$  é l.i. mas não gera  $\mathcal{V}$ , é possível acrescentar um elemento de  $\mathcal{V}$  a  $\mathcal{K}$ , obtendo-se ainda um conjunto l.i.

## Corolário:

Se  $\mathcal{V}$  é um e.v. finitamente gerado (e.v. gerado por um número finito de elementos), então  $\mathcal{V}$  tem um conjunto gerador que é linearmente independente.

# Base de um espaço vetorial

Uma **base de um e.v.**  $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$  é um

- conjunto linearmente independente,
- conjunto gerador de  $\mathcal{V}$ .

Nota:

- Por convenção, o e.v. trivial  $\{0_{\mathcal{V}}\}$  tem como base o conjunto vazio.
- Um conjunto l.i. é base do subespaço por ele gerado.

# Base de um espaço vetorial

## Exemplos:

1. Sejam  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ . Então  $\mathcal{C}_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  é a **base canónica de  $\mathbb{R}^n$** .
2. Seja  $E_{ij}$  a matriz  $m \times n$  que tem a entrada  $(i, j)$  igual a 1 e todas as outras iguais a 0. Então  $\mathcal{C}_{m \times n} = \{E_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$  é a **base canónica de  $\mathbb{R}^{m \times n}$** .
3. A **base canónica** do e.v.  $\mathcal{P}_n$  dos polinómios na variável  $x$  de grau menor ou igual a  $n$  (incluindo o polinómio nulo) é  $\mathcal{P}_n = \{1, x, \dots, x^n\}$ .
4. O e.v.  $\mathcal{P}$  de todos os polinómios não admite uma base com um número **finito** de elementos. O conjunto  $\{1, x, x^2, \dots\}$  é uma base de  $\mathcal{P}$ .

# Base de um espaço vetorial

Sejam  $\mathcal{V}$  um e.v. e  $\mathcal{K} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ .

Proposição:

- ▶ Se  $\mathcal{K}$  gera  $\mathcal{V}$ , então qualquer elemento de  $\mathcal{V}$  pode escrever-se como combinação linear dos elementos de  $\mathcal{K}$ , de pelo menos uma maneira.
- ▶ Se  $\mathcal{K}$  é l.i., então qualquer elemento de  $\mathcal{V}$  pode escrever-se como combinação linear dos elementos de  $\mathcal{K}$ , de no máximo uma maneira.

Proposição: Se  $\mathcal{K}$  é uma base de  $\mathcal{V}$ , então

cada elemento de  $\mathcal{V}$  escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de  $\mathcal{K}$ .

# Dimensão de um espaço vetorial

**Teorema:** Seja  $\mathcal{V}$  um e.v. com uma base que contém  $n$  elementos e  $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$  um subconjunto com  $r$  elementos.

i.  $\mathcal{K}$  é l.i.  $\Rightarrow r \leq n$ .

Neste caso, existe uma base de  $\mathcal{V}$  que contém  $\mathcal{K}$ .

ii.  $\mathcal{K}$  gera  $\mathcal{V} \Rightarrow r \geq n$

Neste caso, existe uma base de  $\mathcal{V}$  que é um subconjunto de  $\mathcal{K}$ .

**Corolário:**

Todas as bases de  $\mathcal{V}$  possuem o mesmo número de elementos.

A **dimensão** de um e.v.  $\mathcal{V}$  é o número de elementos de uma base de  $\mathcal{V}$  e denota-se por  **$\dim \mathcal{V}$** .

# Dimensão de um espaço vetorial

Consequência do teorema anterior:

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial com dimensão  $n$  e  $\mathcal{K}$  um subconjunto de  $\mathcal{V}$  com  $r$  elementos.

- i.  $r > n \Rightarrow \mathcal{K}$  é l.d.
- ii.  $r < n \Rightarrow \mathcal{K}$  não gera  $\mathcal{V}$ .
- iii.  $r = n \Rightarrow \mathcal{K}$  é uma base de  $\mathcal{V}$  se e só se  $\mathcal{K}$  é l.i.,  
se e só se  $\mathcal{K}$  gera  $\mathcal{V}$ .

Se  $\mathcal{V}$  é um e.v. com dimensão  $n$  e  $\mathcal{K}$  é um subconjunto de  $\mathcal{V}$  com  $n$  elementos, para verificar se  $\mathcal{K}$  é uma base de  $\mathcal{V}$  é suficiente verificar uma das condições:

- i.  $\mathcal{K}$  é linearmente independente,
- ii.  $\mathcal{K}$  gera  $\mathcal{V}$ .



Exemplos:

1.  $\dim\{0_V\} = 0,$
2.  $\dim \mathbb{R}^n = n,$
3.  $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn,$
4.  $\dim \mathcal{P}_n = n + 1.$

# Bases e dimensão de $\mathcal{L}(A)$

**Teorema:** Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $A_e$  uma matriz escalonada equivalente (por linhas) a  $A$ . Então

1. as linhas não nulas de  $A_e$  formam uma base de  $\mathcal{L}(A)$ ;
2.  $\dim \mathcal{L}(A) = \text{car}(A)$ .

**Exemplo:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim A_r = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo  $A_e$  e  $A_r$  formas escalonada e reduzida de  $A$ , respectivamente.

De  $A_e$  e  $A_r$  obtêm-se, respectivamente, as seguintes bases de  $\mathcal{L}(A)$ :

$$\mathcal{B} = \{(1, -2, -4, 3), (0, 0, 1, -1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{(1, -2, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}.$$

Observe-se que

$$\dim \mathcal{L}(A) = 2 = \text{car}(A).$$

# Bases e dimensão de $\mathcal{N}(A)$

Teorema:

Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$ . Então

$$\dim \mathcal{N}(A) = \text{nul}(A) = n^\circ \text{ de inc. livres do sistema } AX=0.$$

Exemplo

Considerando a matriz  $A$  do exemplo anterior, vimos que (slide 13)

$$X \in \mathcal{N}(A) \iff X = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 N_2 + x_4 N_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \text{ var. livres.}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \langle N_2, N_4 \rangle.$$

Como  $N_2$  e  $N_4$  são l.i., o conjunto gerador  $\{N_2, N_4\}$  é uma base de  $\mathcal{N}(A)$  e

$$\dim \mathcal{N}(A) = 2 = \text{nul}(A).$$

# Bases e dimensão de $\mathcal{C}(A)$

Observe-se que

$$B \in \mathcal{C}(A) \iff \text{o sistema } AX = B \text{ é possível.}$$

Teorema:

Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  e  $A_e$  uma matriz escalonada equivalente (por linhas) a  $A$ . Então

- uma base de  $\mathcal{C}(A)$  é formada pelas colunas de  $A$  que correspondem às colunas dos pivôs de  $A_e$ ;
- $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A)$ .

Exemplo:

Para a matriz  $A$  do exemplo anterior (slide 26),

- uma base de  $\mathcal{C}(A)$  é  $\{(1, 2, 1), (-4, -7, -3)\}$ ,
- $\dim \mathcal{C}(A) = 2 = \text{car}(A)$ .

# Número de linhas (colunas) linearmente independentes

## Corolário:

- A característica de uma matriz é o número máximo de linhas (colunas) l.i.
- Uma **matriz quadrada é invertível** se e só se o conjunto das suas **linhas (colunas)** é l.i.

## Exemplo – Espaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$ em $\mathbb{R}^3$

Sendo  $A$  uma matriz  $m \times 3$ ,  $\mathcal{L}(A)$  e  $\mathcal{N}(A)$  são subespaços de  $\mathbb{R}^3$ .

Se  $\text{car}(A) = 0$  (i.e.  $A$  é a matriz nula), então  $\mathcal{L}(A) = \{(0, 0, 0)\}$  e  $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^3$ .

Se  $\text{car}(A) = 1$  e  $(a, b, c)$  é a linha não nula da forma escalonada de  $A$ ,

- $\mathcal{L}(A)$  é a reta que contém  $(0, 0, 0)$  e tem vetor diretor  $(a, b, c)$ ,
- $\mathcal{N}(A)$  é o plano ortogonal à reta anterior e que contém  $(0, 0, 0)$ .

Se  $\text{car}(A) = 2$  e  $(a_1, b_1, c_1)$ ,  $(a_2, b_2, c_2)$  são as linhas não nulas da forma escalonada de  $A$ ,

- $\mathcal{L}(A)$  é o plano que contém  $(0, 0, 0)$  e tem vetores diretores  $(a_1, b_1, c_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2)$ ,
- $\mathcal{N}(A)$  é a reta ortogonal ao plano anterior e que contém  $(0, 0, 0)$ .

Se  $\text{car}(A) = 3$ , então  $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\}$ .

# Coordenadas de um elemento numa base ordenada

Seja  $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$  uma **base ordenada** de um e.v.  $\mathcal{V}$ .

**Teorema:** Cada elemento  $X \in \mathcal{V}$  escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de  $\mathcal{B}$ , ou seja, existem  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , tais que

$$X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n.$$

Estes coeficientes  $a_1, \dots, a_n$  dizem-se as **coordenadas** de  $X$  na **base**  $\mathcal{B}$ .

O **vetor das coordenadas** de  $X$  na **base**  $\mathcal{B}$  é  $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ .

# Coordenadas - Propriedades

## Propriedades:

Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial com **dimensão**  $n$  e  $\mathcal{S} = (X_1, \dots, X_n)$  uma base ordenada de  $\mathcal{V}$ .

- Para  $i = 1, \dots, n$ , o vetor  $X_i$  tem o seguinte vetor de coordenadas em  $\mathcal{S}$ :

$$[X_i]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \leftarrow i\text{-ésima coordenada}$$

- $[0_{\mathcal{V}}]_{\mathcal{S}} = 0_{\mathbb{R}^n}$ ;
- Para  $Y_1, \dots, Y_r \in \mathcal{V}$ , e  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ ,

$$[a_1 Y_1 + \dots + a_r Y_r]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \dots + a_r [Y_r]_{\mathcal{S}}.$$



## Exemplo:

Considere-se a base ordenada  $\mathcal{B}_1 = ((1, 1), (1, 2))$  e os vetores  $u = (0, 1)$  e  $v = (1, -1)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Sabemos que existem escalares únicos  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$(0, 1) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2).$$

Resolvendo o sistema que se obtém desta equação matricial (sistema possível e determinado) obtém-se  $\alpha = -1$  e  $\beta = 1$ . Logo,

$$[u]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De forma análoga conclui-se que

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Exemplo (cont.):

Considere-se, agora, a base ordenada  $\mathcal{B}_2 = ((3, 2), (0, 1))$  e vamos determinar o vetor de coordenadas de  $u = (0, 1)$  na base  $\mathcal{B}_2$ :

$$(0, 1) = \alpha(3, 2) + \beta(0, 1) \Leftrightarrow (\alpha = 0) \wedge (\beta = 1).$$

Assim,

$$[u]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, procedendo de forma análoga para  $v = (1, -1)$ , obtemos

$$[v]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -5/3 \end{bmatrix}.$$

# Mudança de base

Sejam  $\mathcal{S}, \mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$  duas bases ordenadas de  $\mathcal{V}$  e  $X \in \mathcal{V}$ .

Qual é a relação entre os vetores de coordenadas  $[X]_{\mathcal{S}}$  e  $[X]_{\mathcal{T}}$ ?

$$\begin{aligned} [X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &\Rightarrow X = a_1 Y_1 + \dots + a_n Y_n \\ &\Rightarrow [X]_{\mathcal{S}} = a_1 [Y_1]_{\mathcal{S}} + \dots + a_n [Y_n]_{\mathcal{S}} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} [Y_1]_{\mathcal{S}} & \dots & [Y_n]_{\mathcal{S}} \end{bmatrix}}_{M(\mathcal{T}, \mathcal{S})} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}} \end{aligned}$$

A matriz  $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ , cujas colunas são os vetores de coordenadas na base  $\mathcal{S}$  dos elementos da base  $\mathcal{T}$  designa-se por **matriz de mudança de base  $\mathcal{T}$  para  $\mathcal{S}$** .

# Mudança de base – Exemplo

Sejam  $\mathcal{S} = ((1, 1), (1, 2))$  e  $\mathcal{T} = ((0, 1), (1, -1))$  bases ordenadas de  $\mathbb{R}^2$ .

Dado  $X \in \mathbb{R}^2$  tal que  $[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , tem-se que

$$X = a(0, 1) + b(1, -1).$$

Logo,  $[X]_{\mathcal{S}} = a[(0, 1)]_{\mathcal{S}} + b[(1, -1)]_{\mathcal{S}}$ . Do exemplo anterior,

$$[(0, 1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [(1, -1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

então

$$[X]_{\mathcal{S}} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{M(\mathcal{T}, \mathcal{S})} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{[X]_{\mathcal{T}}}.$$

# Invertibilidade de uma matriz de mudança de base

**Teorema:** Sejam  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{T}$  duas bases de um espaço vetorial  $\mathcal{V}$ . Então  $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$  é invertível e

$$M(\mathcal{T}, \mathcal{S})^{-1} = M(\mathcal{S}, \mathcal{T}).$$

**Demonstração:** Sejam  $M = M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ ,  $\dim \mathcal{V} = n$  e  $Y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $MY = 0$ . Existe  $X \in \mathcal{V}$  tal que  $Y = [X]_{\mathcal{T}}$ . Então

$$[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} = MY = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad Y = 0.$$

Mostrámos que o sistema homogéneo  $MY = 0$  possui apenas a solução trivial, ou seja, que  $M$  é invertível. Consequentemente, se  $X \in \mathcal{V}$ ,

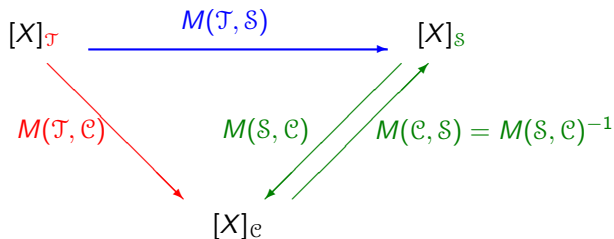
$$[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} \quad \Rightarrow \quad [X]_{\mathcal{T}} = M(\mathcal{T}, \mathcal{S})^{-1}[X]_{\mathcal{S}}.$$

pelo que  $M^{-1} = M(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ .

# Mudança de base em $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{S}, \mathcal{T}$ : bases de  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{C}$ : base canónica de  $\mathbb{R}^n$



$M(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ : matriz cujas colunas são os vetores da base  $\mathcal{S}$

$M(\mathcal{T}, \mathcal{C})$ : matriz cujas colunas são os vetores da base  $\mathcal{T}$

$$M(\mathcal{T}, \mathcal{S}) = M(\mathcal{C}, \mathcal{S}) M(\mathcal{T}, \mathcal{C}) = M(\mathcal{S}, \mathcal{C})^{-1} M(\mathcal{T}, \mathcal{C})$$

# Cálculo de uma matriz de mudança de base em $\mathbb{R}^n$

Dadas as bases  $\mathcal{S} = (X_1, \dots, X_n)$ ,  $\mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{C}$  a base canónica do mesmo espaço vetorial, a matriz  $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$  pode obter-se por aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan:

$$[M(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \mid M(\mathcal{T}, \mathcal{C})] = [X_1 \ \cdots \ X_n \mid Y_1 \ \cdots \ Y_n] \sim [I_n \mid M(\mathcal{T}, \mathcal{S})]$$

**Exemplo:** Para obtermos a matriz  $M(\mathcal{T}, \mathcal{S})$  de mudança da base  $\mathcal{T} = ((0, 1), (1, -1))$  para a base  $\mathcal{S} = ((1, 1), (1, 2))$ , calculamos os seguintes vetores de coordenadas:

$$[(0, 1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (0, 1) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (1, 2),$$

$$[(1, -1)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad (1, -1) = \beta_1 (1, 1) + \beta_2 (1, 2).$$

# Mudança de base em $\mathbb{R}^n$ - Exemplo

Tal conduz a dois sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

com a mesma matriz dos coeficientes (cujas colunas são os vetores de  $\mathcal{S}$ ).

Os sistemas anteriores podem ser resolvidos em simultâneo, formando a matriz ampliada:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right],$$

$$M(\mathcal{T}, \mathcal{S}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$



# Conjunto ortogonal e ortonormado em $\mathbb{R}^n$

Um conjunto  $\{X_1, \dots, X_k\}$  de vetores de  $\mathbb{R}^n$  diz-se

- **ortogonal** se  $X_i \cdot X_j = 0$ , para  $i, j = 1, \dots, k$ , com  $i \neq j$ ;
- **ortonormado (o.n.)** se é um conjunto ortogonal de vetores unitários ( $\|X_i\| = 1$ ,  $i = 1, \dots, k$ ).

Exemplo:

1.  $\{(1, 1, 0), (2, -2, 1)\}$  é ortogonal;
2.  $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$  é o.n.

**Teorema:** Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos é l.i.

**Corolário:** Todo o conjunto ortogonal de  $n$  vetores (não nulos) de  $\mathbb{R}^n$  é uma **base** de  $\mathbb{R}^n$ .

# Coordenadas de um vetor de $\mathbb{R}^n$ numa base o.n.

**Teorema:** Seja  $X \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$  uma **base o.n.** de  $\mathbb{R}^n$ . Então

$$[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ \vdots \\ X \cdot X_n \end{bmatrix},$$

isto é,

$$X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n,$$

com  $a_i = X \cdot X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Exemplo:**

Determinar as coordenadas do vetor  $(1, 5)$  na base o.n. de  $\mathbb{R}^2$

$$\left( \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right).$$

# Projeção ortogonal em $\mathbb{R}^n$

Seja  $\mathcal{W}$  um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}$  uma base de  $\mathcal{W}$  e  $Y \in \mathbb{R}^n$ . O vetor  $Y$  é **ortogonal** ao **subespaço**  $\mathcal{W}$  se

$$Y \cdot Z = 0, \text{ para } Z \in \mathcal{W}.$$

**Teorema:** O vetor  $Y$  é ortogonal a  $\mathcal{W}$  se e só se  $Y$  é ortogonal a cada vetor de  $\mathcal{B}$ .

A **projeção ortogonal** de  $X \in \mathbb{R}^n$  **sobre o subespaço**  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^n$  é o vetor  $Z \in \mathcal{W}$  tal que

$$X = Y + Z, \text{ onde } Y \text{ é ortogonal a } \mathcal{W}.$$

O vetor  $Z$  denota-se por  $\text{proj}_{\mathcal{W}} X$ .

# Projeção ortogonal sobre uma reta que passa na origem

**Exemplo:** Seja  $\mathcal{W} = \langle X_1 \rangle$  uma reta, onde  $\{X_1\}$  é uma base o.n. de  $\mathcal{W}$ .

Seja  $X = \overrightarrow{OP}$ , com  $X = Y + Z$ , onde  $Y$  é ortogonal a  $\mathcal{W}$  (logo  $Y \cdot X_1 = 0$ ) e

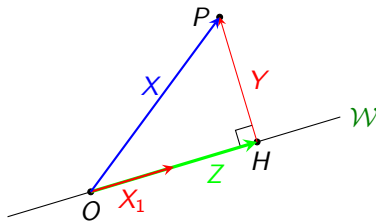
$$Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha X_1.$$

Note-se que

$$X \cdot X_1 = Y \cdot X_1 + \alpha X_1 \cdot X_1 = \alpha,$$

concluindo-se que

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1.$$



**Observação:**  $\text{dist}(P, \mathcal{W}) = \|Y\| = \|X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X\|.$

# Projeção ortogonal sobre um plano que passa na origem

Exemplo: Seja  $\mathcal{W} = \langle X_1, X_2 \rangle$  um plano,  
 $\{X_1, X_2\}$  uma base o.n. de  $\mathcal{W}$  e  $X = \overrightarrow{OP}$ .

Verifica-se que  $X = Z + Y$ , com

$$Z = \text{proj}_{\mathcal{W}} X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \quad \text{e} \quad Y \cdot X_1 = Y \cdot X_2 = 0.$$

Então, sendo

$$X = Y + Z = Y + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

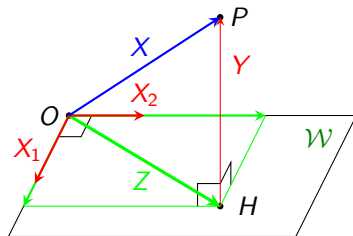
vem

$$X \cdot X_1 = \alpha_1 \quad \text{e} \quad X \cdot X_2 = \alpha_2.$$

Logo,

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2.$$

Observação:  $\text{dist}(P, \mathcal{W}) = \|Y\| = \|X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X\|.$



# Projeção ortogonal em $\mathbb{R}^n$

**Teorema:** A projeção ortogonal de  $X \in \mathbb{R}^n$  sobre o subespaço  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^n$  é dada por

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (X \cdot X_1)X_1 + \cdots + (X \cdot X_k)X_k \in \mathcal{W},$$

onde  $\{X_1, \dots, X_k\}$  é uma base o.n. de  $\mathcal{W}$ .

Nota:

O vetor  $Y = X - \text{proj}_{\mathcal{W}} X$  é ortogonal a todos os vetores de  $\mathcal{W}$ .

# Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

**Teorema:** Todo o subespaço  $\mathcal{W} \neq \{0\}$  de  $\mathbb{R}^n$  possui uma base o.n.

**Demonstração:**

Suponha-se que  $\dim(\mathcal{W}) = m$  e  $\{X_1, \dots, X_m\}$  é uma base de  $\mathcal{W}$ . Seja

- $Y_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|},$
- $\mathcal{Z}_1 = \langle Y_1 \rangle,$
- $X'_k = X_k - \text{proj}_{\mathcal{Z}_{k-1}} X_k,$
- $Y_k = \frac{X'_k}{\|X'_k\|},$
- $\mathcal{Z}_k = \langle Y_1, \dots, Y_k \rangle,$  para  $k = 2, \dots, m.$

O conjunto  $\mathcal{B} = \{Y_1, \dots, Y_m\} \subset \mathcal{W}$  é o.n., logo l.i. e, consequentemente, é uma base o.n. de  $\mathcal{W}$ .

**Exemplo:**

Determinar uma base o.n. de  $\langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, -1, 3), (2, 1, -2, 2) \rangle.$