Aula 19

Matrizes semelhantes

A, B $(n \times n)$ — A e B são matrizes semelhantes se existir uma matriz invertível P tal que:

$$P^{-1} A P = B$$

Com P invertível podemos escrever:

$$P^{-1} A P = B \Rightarrow A = P B P^{-1}$$

Teorema: Matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico e portanto os mesmos valores próprios

Matrizes diagonizáveis

- Uma matriz A é diagonizável se for semelhante a uma matriz diagonal.

  $\exists P$ invertível tal que: $P^{-1} A P = D$ → Diagonal

- Se A é diagonizável chamamos a P matriz diagnalizante de A

Diagonalização:

P invertível tal que $P^{-1} A P = D$

$A P = P D$

Sejam A, P, D matrizes $n \times n$, sendo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ as colunas de P e D a matriz diagonal com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ na diagonal principal

- $AP = A[X_1 | \ldots | X_n] = [AX_1 | \ldots | AX_n]$
- $PD = [X_1 | \ldots | X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 X_1 | \ldots | \lambda_n X_n]$

→ $AP = PD \Leftrightarrow A X_i = \lambda_i X_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$\Leftrightarrow X_i$ é o vetor próprio associado a $\lambda_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Teorema: $A\,(n\times n)$ é diagonalizável

$\Leftrightarrow$ A possui n vetores próprios l.i.

- Nestas condições, A é semelhante à matriz diagonal D e

  → As colunas da matriz diagonalizante P são os n vetores próprios l.i. de A

  → A matriz D é a diagonal dos vetores próprios

  → A ordem dos vetores próprios determina a ordem dos vetores próprios em D

Lema: Vetores próprios associados a valores próprios distintos são l.i. !!!

Demonstração:

Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $A\,(n\times n)$ e sejam X_1, X_2 vetores próprios associados aos valores próprios λ_1, λ_2.

$$A X_1 = \lambda_1 X_1 \rightsquigarrow A X_1 - \lambda_1 \underset{I}{\downarrow} X_1 = 0$$

$$A X_2 = \lambda_2 X_2$$

$$A X_1 - \lambda_i I_n X_1 = 0$$

$$(A - \lambda_i I_n) X_1 = 0$$

$$\underbrace{\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2}_{*} = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

Multiplicando * à esquerda por $A - \lambda_1 I_n$

$$\alpha_1 \underbrace{(A - \lambda_2 I_n)}_{0_{\mathbb{R}^n}} X_1 + \alpha_2 \underbrace{(A - \lambda_1 I_n) X_2}_{\substack{A X_2 - \lambda_1 X_2 \\ \lambda_2 X_2 - \lambda_1 X_2 \\ (\lambda_2 - \lambda_1) X_2}} = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} \underbrace{X_2}_{\neq 0_{\mathbb{R}^n}} = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \alpha_2 = 0$$

Substituindo em $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0_{\mathbb{R}^n}$ em

$$\alpha_1 \underset{\neq 0_{\mathbb{R}^n}}{X_1} = 0_{\mathbb{R}^n} \Longrightarrow \alpha_1 = 0$$

Teorema: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valores próprios distintos de A. Então A possui:

$$\dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_k}$$

vetores próprios l.i.

Obs: Se $\dim U_{\lambda_1} + \dots + \dim U_{\lambda_k} = n$
$\Downarrow$
A é diagnolizável

Teorema: Seja $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_{\lambda_1}} \dots (\lambda_k - \lambda)^{m_{\lambda_k}}$

$(2-\lambda)^2 (3-\lambda)^1$

o polinómio característico de A, sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distintos. Então:

$$A \text{ é diagonalizável} \Leftrightarrow \dim U_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}, \; i \in \{1, \dots, k\}$$

Obs: Se $A (n \times n)$

- Se A tem $\underline{n}$ valores próprios distintos $\Rightarrow$ A é diagonilizável

A é diagnolizável $\overset{?}{\Longrightarrow}$ A tem $\underline{n}$ valores próprios distintos $\rightarrow$ FALSO!

$A \Rightarrow b$
$a \wedge \sim b$

- Logo, existe uma matriz A que é diagnolizável e que não tem $\underline{n}$ valores próprios distintos (ver Exemplo ④)

Exemplo ①

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$; $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$

A tem 2 valores próprios distintos
logo é diagnolizável

Exemplo ②

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $p_A(\lambda) = (-\lambda)(\lambda^2 + 1)$

$U_{\lambda=0} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$, mas temos apenas um vetor próprio l.i que é $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

A não é diagnolizável
(não há 3 vetores próprios l.i)

Exemplo ③

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)^1$$

$$U_{\lambda=1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle ; \quad U_{\lambda=2} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $U_{\lambda=2}$

$$1 \leq \dim U_{\lambda=1} \leq m_{\lambda_1} \Rightarrow \dim U_{\lambda=1} = 1$$

$$\dim U_{\lambda=2} = 1 < m_{\lambda=2} = 2$$

$\Longrightarrow$ A não é diagonalizável !

Exemplo ④

Será diagonalizável a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

(Atenção! Exemplo de matriz diagonalizável que não tem 3 valores próprios distintos)

A é triângular, os valores próprios são os elementos da diagonal principal!

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 (2-\lambda)^1$$

Como, $1 \leq \dim U_{\lambda=2} \leq m_{\lambda=2} \Rightarrow \dim U_{\lambda=2} = 1$

$$1 \leq \dim U_{\lambda=1} \leq 2 \Rightarrow \dim U_{\lambda=1} = 1 \vee \dim U_{\lambda=1} = 2$$

$$\dim U_{\lambda=1} = \dim N(A - 1I) = n - car(A - 1I) = 3 - 1 = 2$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vimos que:

$$\underbrace{\begin{matrix} \rightarrow \dim U_{\lambda=2} = 1 = m_{i=2} \\ \rightarrow \dim U_{\lambda=1} = 2 = m_{i=1} \end{matrix}}$$

$\Downarrow$

A é diagonalizável

Usar a do Ex. anterior

Exercício Ⓐ Det. a matriz diagonalizante de A e a diagonal dos valores próprios

$$U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{matrix} y = 0 \\ x, z \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x\\0\\z \end{bmatrix}, \ x,z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{bmatrix} 1\\0\\0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix}, \ x,z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x\\y\\z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x\\y\\z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} -x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x \\ z=0 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x\\x\\0 \end{bmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1\\1\\0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\1\\0 \end{bmatrix} \right\}$, base de vetores próprios X_1, X_2, X_3

Seja $P=[X_1 | X_2 | X_3]$, uma matriz diagonalizante de A

$$= \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \end{matrix} \end{array}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Outra matriz diagonalizante de A é, por exemplo:

$$Q = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \end{matrix} \end{array} \quad \text{sendo} \quad Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicação ao cálculo da potência e da inversa

Se A é diagonalizável $\Longrightarrow \exists\, P$ invertível tal que $P^{-1}AP = D$

$$\Downarrow$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^4 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1})$$

$$= P\,DDDD\,P^{-1} = PD^4P^{-1}$$

Para $K \in \mathbb{N}$:

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^K = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})$$
$$= (PD^K P^{-1})$$

Se A é invertível, onde $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1}$
$$= PD^{-1}P^{-1}$$

<u>Exemplo (A)</u>

$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$, Será A diagnolizável? Calcule a matriz P diagonalizante de A e escrever a diagonal dos valores próprio. Calcule A^8

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$|A - \lambda I| = (5-\lambda)(-4-\lambda) + 18 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -1$$

A tem 2 valores próprios distintos $\Rightarrow$ A é diagonalizável

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$U_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$2x - y = 0$
$y = 2x$

$$U_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$A = P \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^8 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \underbrace{1}_{\det(P)}}_{P^{-1}}$$

$$= (\dots) \begin{bmatrix} 511 & -255 \\ 510 & -254 \end{bmatrix}$$

Diagonalização e matrizes simétricas

A é simétrica $\Leftrightarrow A^T = A$

Teorema: Uma matriz simétrica tem n valores próprios reais

Teorema: Vetores próprios de uma matriz simétrica associados a valores próprios são ortogonais.

- Uma matriz quadrada P é ortogonal sse:
  - → $P^T P = I$ e P invertível $\qquad |P^T P| = 1$
  - → $P^{-1} = P^T$ e P invertível $\qquad |P|^2 = 1 \Rightarrow |P| = \pm 1$

A é ortogonalmente diagonalizável se é diagonalizável e possui uma matriz diagonalizante ortogonal (cujas colunas são uma base o.n. de A formada por vetores próprios de A)

Teorema: Toda a matriz simétrica é ortogonalmente diagonalizável