Aula 15

Ainda ... independência linear

Seja $K = \{X_1, \dots, X_k\}$ um subconjunto de um e.v. V

K é linearmente dependente sse o sistema que se obtém da equação:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k = 0_V$$

é possível e indeterminado, isto é, se tem uma solução $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ com escalares não todos nulos.

Se existe $j \in \{1, \dots, k\} : \alpha_j \neq 0$

$$\alpha_1 X_1 + \dots + \underbrace{\alpha_j}_{\neq 0} X_j + \dots + \alpha_k X_k = 0_V$$

$$\alpha_j X_j = -\alpha_1 X_1 - \dots - \alpha_{j-1} X_{j-1} - \alpha_{j+1} X_{j+1} - \dots - \alpha_k X_k$$

$$X_j = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_j}\right) X_1 - \dots - \left(\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\right) X_{j-1} - \left(\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}\right) X_{j+1} - \dots - \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_j}\right) X_k$$

Podemos dizer que:

X_j pertence ao espaço gerado por $K \setminus \{X_j\}$

$$X_j = \beta X_1 + \dots + \beta_k X_k$$

Geradores e Independência linear

Sejam V um e.v. e $K = \{X_1, X_2, \dots, X_k\} \subset V$

Lema: Seja $X \in K$. Então X é combinação linear dos elementos de $K \setminus \{X\}$ sse $\langle K \setminus \{X\} \rangle = \langle K \rangle$

Exemplo:

$\mathbb{R}^2 = \langle \cancel{(1,1)}, (1,0), (0,1) \rangle$, mas $(1,1)$ é comb. linear de $(1,0)$ e $(0,1)$

$$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$

Logo, $\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1) \rangle$

— // —

Teorema: K é um conjunto linearmente:

- **Dependente**:

  $\exists x \in K : x \in \langle K \setminus \{x\} \rangle$

  ou seja!

  $\langle K \rangle = \langle K \setminus \{x\} \rangle$

- **Independente**:

  $\forall x \in V \setminus \langle K \rangle$ → x não é comb. linear dos elementos de K

  E.g.: $K \cup \{x\}$ é linearmente independente

Exemplo:

$\{(1,0,0), (0,2,1)\}$ l. indep. em $\mathbb{R}^3$

$\langle (1,0,0), (0,2,1) \rangle \neq \mathbb{R}^3$

$\alpha(1,0,0) + \beta(0,2,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

Seja $(0,0,1)$ não comb. linear dos restantes

$(0,0,1) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,2,1)$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$ ✗

$\{(1,0,0), (0,2,1), (0,0,1)\}$ é l. indep.

— // —

Corolário: Seja V um e.v. e $K = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in V$

→ Se K gera V mas não é l.i. é possível retirar um elemento de K, obtendo-se ainda um conjunto gerador

→ Se K é l.i. mas não gera V, é possível acrescentar um elemento de V a K obtendo-se ainda um conjunto l.i.

→ Se V é um e.v. gerado por um número finito de elementos (V é finitamente gerado) então V tem um conjunto gerador que é l.i.

Exemplo: $\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (1,-1,0), (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

Mas $(1,-1,0)$ é comb. linear dos restantes,

logo $\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (1,1,0), (0,0,1) \rangle$

$$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{cases} \quad \{(1,0,0), (1,1,0), (0,0,1)\} \text{ é l.i.}$$

Base de um e.v. V

Uma base de um e.v. $V \neq \{0_E\}$ é um conjunto:

- → linearmente indep.
- → conjunto gerado de V

Do exemplo anterior:

$$B = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,0,1)\} \text{ é uma base de } \mathbb{R}^3$$

Nota: Por convenção o e.v. trivial $\{0_E\}$ tem como base ϕ.

$$\langle 0_V \rangle = \{0_V\}$$

- Um conjunto l.i. é base do subespaço por ele gerado.

Exemplos de bases:

1. Sejam
$$e_1 = (1,0,0,\dots,0)$$
$$e_2 = (0,1,0,\dots,0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0,0,\dots,1)$$

então $\mathcal{C}_n = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{C}_2 = \{(1,0), (0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{C}_3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$

(2) Seja E_{ij} a matriz $m \times n$ que tem a entrada (ij) igual a 1 e todas as outras entradas iguais a zero. Então:

$$\mathcal{B}_{m \times n} = \{ E_{ij},\ i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, n\} \}$$

é a base canónica de $\mathbb{R}^{m \times n}$

↳ e.v. das matrizes de ordem $m \times n$ com entradas em $\mathbb{R}$

E.g.:

$\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{E_{11}} + b \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}^{E_{12}} + c \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{E_{21}} + d \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{E_{22}}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ é l.i}$$

$$\mathcal{B}_{2 \times 2} = \{ E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22} \}$$

$\mathbb{R}^{2 \times 3}$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) A base canónica de P_n (e.v. dos pol. com coeficientes em $\mathbb{R}$ de grau $\leq n$, incluindo o polinómio nulo) é

$$\mathcal{B}_n = \{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$$

E.g.:

$$P_2 = \{ ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R} \}$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c$$

$\{ x^2, x, 1 \}$ é l.i.

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma 1 = 0x^2 + 0x + 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

④ O e.v. $\mathcal{P}$ de todos os pol. não admite uma base com um número finito de elementos

O conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é uma base de $\mathcal{P}$

- Sejam V um e.v. e $K = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$

Proposição:

→ Se K gera V então qualquer elemento de V pode escrever-se como combinação linear de elementos de K, de pelo menos uma maneira.

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1), (-1,1) \rangle$$

$$\begin{aligned}(2,3) &= 2(1,0) + 3(0,1) + 0(-1,1) \\ &= 3(1,0) + 2(0,1) + 1(-1,1)\end{aligned}$$

$$(2,3) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) + \gamma(-1,1)$$

$$\begin{cases} 2 = \alpha - \gamma \\ 3 = \beta + \gamma \end{cases} \underset{\gamma=1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2 = \alpha - 1 \Longrightarrow \alpha = 3 \\ \beta = 3 - \gamma = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

→ Se K é l.i. então qualquer elemento de V pode escrever-se como comb. linear dos elementos de K, de, no máximo uma maneira

Proposição:

→ Se K é base então cada elemento de V escreve-se de forma única como comb. linear dos elementos de K.

Dimensão de um e.v.

Teorema: Seja V um e.v. com uma base que contém n elementos e $K \subset V$ um subconjunto com r elementos

(i) Se K é l.i $\Rightarrow r \leq n$ → número máximo de vetores l.i.

(Neste caso existe de V que contém K)

(ii) Se K gera $V \Rightarrow r \geq n$ → número mínimo de geradores

(Neste caso existe uma base de V que é um subconjunto de K)

Corolário: todas as bases de V possuem o mesmo número de elementos

- A dimensão de um e.v. V é o número de elementos de uma base de V e denota-se por $\dim(V)$

Consequências do teorema anterior

- Seja V um e.v. com dimensão n, e K um subconjunto de V com r vetores

(i) $r > n \Rightarrow K$ é l. dep

(ii) $r < n \Rightarrow K$ não gera V

(iii) $r = n \Rightarrow K$ é uma base de V sse K é l.i.
sse K gera V

- Se V é um e.v. de dimensões n e se $K \subset V$ tem n elementos, para verificar se K é base basta ver que:

(i) K é l.i

ou

(ii) K gera V

Eg.:

1. $\dim\{0_V\} = 0$
2. $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = m \times n$
3. $\dim \mathbb{R}^n = n$
4. $\dim P_n = n+1$

Base de dimensão do espaço das linhas $\mathcal{L}(A)$

Teorema: Seja $A(m\times n)$ e A_e uma matriz escalonada equivalente a A (por linhas). Então:

1.- As linhas não nulas de A_e formam uma base para $\mathcal{L}(A)$

2.- $\dim \mathcal{L}(A) = \text{car}(A)$

E.g.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim A_e = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_r$$

A_e: escalonada por linhas

A_r: escalonada reduzida

De A_r e A_e obtemos as bases para $\mathcal{L}(A)$ $\Longrightarrow$ $B_1 = \{(1,-2,-4,3), (0,0,1,-1)\}$
$B_2 = \{(1,-2,0,-1), (0,0,1,-1)\}$

Base e dimensão de N(A)

$$N(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : AX = 0 \}$$

Teorema: Seja A $(m \times n)$, então:

$$\dim N(A) = \text{nul}(A) = n - \text{car}(A)$$

$$= \text{nº de incógnitas livres de } AX = 0$$

Exemplo: (com base no exemplo anterior)

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in N(A) \Leftrightarrow A_r X = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

$$(2x_2 + x_4, x_2, x_4) = x_2 \underbrace{(2, 1, 0, 0)}_{N_2} + x_4 \underbrace{(1, 0, 1, 1)}_{N_4}$$

x_2, x_4 são as variáveis livres $\quad N(A) = \langle N_2, N_4 \rangle$

Como $\{N_2, N_4\}$ é l. indep. Tem-se uma base e
$\dim N(A) = 2 = \text{nul}(A)$

Base e dimensão de C(A)

- Vimos que $B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow AX = B$ é possível

Teorema: Seja A $(m \times n)$ e A_e uma matriz escalonada (por linhas) a A.

→ Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é formada por colunas de A que correspondem às colunas dos pivots de A_e

→ $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A)$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & \boxed{-4} & 3 \\ \boxed{2} & -4 & \boxed{-7} & 5 \\ \boxed{1} & -2 & \boxed{-3} & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

colunas de pivots em A_e
é coluna 1 e 3

Logo, $B = \{(1,2,1), (-4,-7,-3)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$

$$\dim \mathcal{C}(A) = 2$$

Corolário: A característica de uma matriz é o número máximo de colunas/linhas l.i.

$\boxed{\text{• Uma matriz quadrada é invertível sse o conjunto das suas linhas (colunas) é l.i.}}$