Aula 02

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2x3) (2x2) (2x1) (3x2)

(2x2) (2x3)

(2x3)

BADC

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(2\times2)\,(2\times3)}_{(2\times3)}\,(3\times2)}_{(2\times2)}\,(2\times1)}_{(2\times1)}$$

B A D C

$$\underbrace{2\times 2 \quad 2\times3 \quad 3\times2 \quad 2\times1}_{(2\times1)}$$

$$BADC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ADBC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Multiplicação:

- associativa: $(AB)C = A(BC)$
- distributiva à direita e à esquerda em relação à adição:

$$(A + A')B = AB + A'B$$

- existe elemento neutro à esquerda e à direita:

$$\underset{m\times m}{I_m}\ \underset{m\times n}{A} = A = \underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times n}{I_n}$$

!

Não esquecer da condição da multiplicação!

- $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$
- $(AB)^T = B^T A^T$!

Atenção!

$\forall\ A, A'$ $m\times n$
B, B' $n\times p$
$\alpha \in \mathbb{R}$

Potência de uma matriz quadrada:

A $n\times n$ $\quad p \in \mathbb{N}$

$A^3 = AA^2 = A(AA) = AAA$

- $A^0 = I_n$
- $A^p = A A^{p-1}$

Propriedades:

- $(A^p)^q = A^{pq}$
- $A^p A^q = A^{p+q}$

Será que:

$$\forall p \in \mathbb{N} \text{ e } \forall A, B,\ (AB)^p = A^p B^p$$

$$(AB)^n = (AB)(AB)\dots(AB)$$

teria que usar comutatividade (que não é válida para o produto)

$$A^p B^p = \underbrace{AA\dots A}_{p}\ \underbrace{BB\dots B}_{p}$$

$$\exists p \in \mathbb{N},\ \exists A, B : (AB)^p \neq A^p B^p$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^2 B^2 = 0 \neq (AB)^2}$$

Forma matricial de um sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} (m \times n)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

→ Matriz dos coeficientes do sistema

matriz coluna dos incógnitas

matriz coluna dos termos independentes

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{AX = B}$$

Matriz ampliada:

$$m \left\{ \left[\overbrace{A}^{n} \;\vdots\; \overbrace{B}^{+1} \right] \right. \longrightarrow m \times (n+1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Matriz escalonada por linhas:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0\,a_1^{\neq 0} & * & \cdots & * & * & * & & & & \\ 0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,a_2^{\neq 0} & * & \cdots & * & * & * & & \\ 0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,a_3^{\neq 0} & * & \cdots & * & * & * \\ & & & & & & 0 & & & & & \\ 0\,0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & & 0\,0\,0 & \cdots & \end{bmatrix}$$

$a_1^{\neq 0}$; $a_2^{\neq 0}$; $a_3^{\neq 0}$ ...

- → a 1ª entrada não nula de cada linha é chamada de pivot
- → abaixo de cada pivot só há zeros
- → dadas duas linhas não nulas consecutivas o pivot da linha $i+1$ está à direita do pivot da linha i.
- → as linhas nulas estão abaixo das não nulas

Exemplos:

✓ $A = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

✓ $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$

$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$ ($\neq 0$)

Impossível!

$D = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

Nota:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ \underbrace{0x_1 + 0x_2 + 0x_3}_{\underbrace{0 = 2}_{\text{C.I.}}} = 2 \end{cases}$$

Matriz escalonada por linhas reduzida:

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0\,a_1^{=1} & * & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,a_2^{=1} & * & \cdots & 0\,0 & * & * & * & \\ 0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,a_3^{=1} & * & \cdots & * & * & * \\ & & & & & & 0 & & & & & \\ 0\,0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & 0\,0 & \cdots & & 0\,0\,0 & \cdots & \end{bmatrix}$$

$a_1^{=1}$; $a_2^{=1}$; $a_3^{=1}$ ...

Igual à matriz escalonada por linhas
+
pivots iguais a 1
+
acima de cada pivot só há zeros

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

$\to$ não interessa

- **Operações elementares nas linhas:**

1. $L_i \leftrightarrow L_j$
2. $L_i' := \alpha L_i \quad , \ \alpha \neq 0$
3. $L_i' := L_i + \alpha L_j \quad , \ \alpha \neq 0$

- **Matrizes equivalentes por linhas:**

$\to$ Duas matrizes A e B dizem-se equivalentes por linhas e escrevemos $A \sim B$

$\to$ Se B resulta de A por aplicação de uma sequência finita de operações elementares nas linhas

Teorema: toda a matriz $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz escalonada por linhas (escalonada reduzida)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$\to$ Já está resolvida uma parte

$$A \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \underset{L_4' := L_4 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_4' := L_4 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L'_4 = L_4 - L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

Forma escalonada

Continuando para a forma escalonada reduzida :

$$\underset{\substack{L'_1 = L_1 \times \frac{1}{2} \\ L'_2 = L_2 \times \frac{1}{2} \\ L'_3 = L_3 \times \frac{1}{2}}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L'_1 = L_1 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L'_1 = L_1 + 4L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & 19/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L'_2 = L_2 - \frac{3}{2}L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & 19/2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

Forma escalonada reduzida