Aula 04

Sistema homogénio e nulidade

$A\,(m \times n) \qquad AX = 0$

Um sistema diz-se homogénio se os termos independentes são todos nulos

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Todo o sistema homogénio é possível pois possui a solução nula (dita trivial)
- Se A é $m \times n$ e $m < n$ então $AX = 0$ admite uma solução não trivial (possível e indet.)
- A nulidade de A, é o número de incógnitas livres do sistema $AX=0$

$$\text{nul}(A) = n - \text{car}(A)$$

Ex:

Se $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$, $\text{nul}(A) = ?$

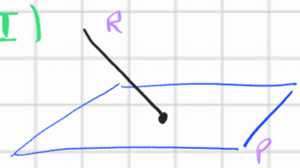
$\hookrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \text{car}(A) = 2 \\ \text{nul}(A) = 3 - 2 = 1 \end{array}$

Aplicação: Posição relativa de uma reta e de um plano

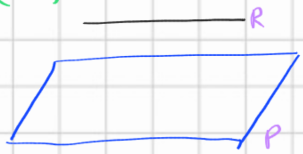
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 4 \\ -2x + y + z = 1 \\ x - 5y + 7z = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow R \\ \\ \rightarrow P \end{array}$$

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 3×4 do sistema constituído pelas equações cartesianas da reta R e pela eq. geral do plano P.

(I)



(II)



(III)

(I) R e P são concorrentes (intersetam-se num ponto)

→ Este caso ocorre quando o sistema é possível e determinado

$$\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3$$

(II) R e P são estritamente paralelos (a sua interseção é o conjunto vazio)

→ Este caso ocorre quando o sistema é impossível

$$\underbrace{car(A)}_{3} < \underbrace{car([A|B])}_{2}$$

Nota: $car(A) \geq 2$

(III) O plano P contem R ($R \subset P$)

→ Este caso ocorre quando o sistema é possível e indeterminado

$$car([A|B]) = car(A) = 2 < \underbrace{n}_{3}$$

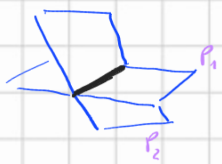
Posição relativa de dois planos

$P_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$P_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

(I)

(II)



(III)

Exemplo:

$$P_1 \cap P_2 \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2 \\ -x - y - z = 3 \end{cases}$$

(I) Os planos P_1 e P_2 são estritamente paralelos ($P_1 \cap P_2 = \emptyset$)

→ Sistema é impossível

$$car([A|B]) > car(A) = 1$$

(II e III) Se os planos P_1 e P_2 têm pontos em comum:

→ O sistema é possível e indeterminado e temos duas situações possíveis.

(II) Os planos P_1 e P_2 são concorrentes (a interseção é uma reta)

$$car([A|B]) = car(A) < n$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \downarrow \quad\quad \downarrow$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 2 \quad\quad 3$$

(Obs: a interseção dá uma reta, então temos que ter $n - car(A) = 1$. Assim, neste caso $car(A) = 2$)

(III) Os planos P_1 e P_2 são coincidentes

$$car([A|B]) = car(A) < n$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \downarrow \quad\quad \downarrow$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \quad\quad 3$$

(Obs: a interseção dá um plano, então temos que ter grau de indeterminação 2 logo $car(A) = 1$)