Aula 17

Matriz mudança de base (continuação)

(Alguns algoritmos que não são necessários)

$S, \mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ duas bases ordenadas de V

$$M(\mathcal{T}, S) = \left[[Y_1]_S \ [Y_2]_S \dots [Y_n]_S \right]$$

↳ é invertível

$$M^{-1}(\mathcal{T}, S) = M(S, \mathcal{T})$$

- **Caso particular de $\mathbb{R}^n$**

$S, \mathcal{T} \to$ bases de $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{C} \to$ base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{tikzcd}
{[X]_{\mathcal{T}}} \arrow[rr, "M(\mathcal{T},S)"] \arrow[dr, "M(\mathcal{T},\mathcal{C})"'] & & {[X]_S} \arrow[dl, "M(S,\mathcal{C})"', bend right] \\
& {[X]_{\mathcal{C}}} \arrow[ur, "M(\mathcal{C},S) = M^{-1}(S,\mathcal{C})"', bend right] &
\end{tikzcd}$$

$M(S, \mathcal{C}) \to$ matriz de mudança de base de S para $\mathcal{C}$, e é a matriz cujas colunas são os elementos de S

$$M(\mathcal{T}, S) = M(\mathcal{C}, S) \cdot M(\mathcal{T}, \mathcal{C})$$
$$= M^{-1}(S, \mathcal{C}) \cdot M(\mathcal{T}, \mathcal{C})$$

Eg.: $S = ((1,1), (1,2))$ $\quad (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$

Depois calculavamos o resto $\quad M(S, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad (1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$

$M(\mathcal{T}, \mathcal{C}) \to$ matriz cujas colunas são os elementos $\mathcal{T}$

- **Outra forma**

$S = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathcal{C} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$

$\mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ $\qquad$ ↓ base canónica de $\mathbb{R}^n$

$$\left[M(S, \mathcal{C}) \mid M(\mathcal{T}, \mathcal{C}) \right] = \left[X_1 \dots X_n \mid Y_1 \dots Y_n \right]$$

$$\underset{\substack{(\dots) \\ \text{Gauss-Jordan}}}{\sim} \left[I_n \mid M(\mathcal{T}, S) \right]$$

Eg.:

$$M(\mathcal{T}, S) = ?$$

$\mathcal{T} = ((0,1), (1,-1))$ $\qquad S = ((1,1), (1,2))$

$$M(\mathcal{T}, S) = \left[[(0,1)]_S , [(1,-1)]_S \right]$$

$$[(0,1)]_S = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,2) = (0,1)$$

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 = 0\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1\end{cases}$$

$$[(1,-1)]_S = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} \Rightarrow \beta_1(1,1) + \beta_2(1,2) = (1,-1)$$

$$\begin{cases}\beta_1 + \beta_2 = 1\\ \beta_1 + 2\beta_2 = -1\end{cases}$$

Temos 2 sistemas:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix},$$

tem a mesma matriz dos coeficientes (cujas colunas são os vetores de S)

Podem ser resolvidos simultaneamente, formando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{array}\right] = M(\mathcal{J}, S)$$

Conjunto ortogonal e ortonormado de $\mathbb{R}^m$

Um conjunto $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ de $\mathbb{R}^m$ diz-se ortogonal se:

$$X_i \cdot X_j = 0, \quad i \neq j, \; i,j \in \{1, \dots, m\}$$

e diz-se ortonormado (o.n) se é ortogonal e também se

tem $X_i \cdot X_i = 1$, $i \in \{1, \dots, m\}$

Eg.:

1. $\{(1,1,0), (2,-2,1)\}$ é ortogonal

$$(1,1,0)\cdot(2,-2,1) = 2-2 = 0$$

2. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ é ortonormado

$\|(1,1,0)\| = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\|(2,-2,1)\| = \sqrt{9} = 3$

$\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1$ $\qquad$ $\left\|\frac{1}{3}(2,-2,1)\right\| = 1$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\cdot\left(\frac{1}{3}(2,-2,1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3}\underbrace{\left((1,1,0)\cdot(2,-2,1)\right)}_{0} = 0$$

— // —

Teorema: Todo o conjunto ortogonal de vetores não nulos é l.i.

Teorema: Todo o conjunto o.n. é l.i. (ser o.n. $\Rightarrow$ ser ortogonal)

→ Uma base ortogonal/o.n. é uma base que é um conjunto ortogonal/o.n.

Nota: todo o conjunto o.n. de $\underline{\underline{n}}$ vetores de $\mathbb{R}^n$ é uma base de $\mathbb{R}^n$

O conjunto é o.n. logo é l.i.

Temos um conjunto de $\underline{\underline{n}}$ vetores l.i. num espaço de dimensão n logo é uma base

Teorema: Seja $X \in \mathbb{R}^n$ e $B = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma base o.n. de $\mathbb{R}^n$.
Então:

$$[X]_B = \begin{bmatrix} X \cdot X_1 \\ X \cdot X_2 \\ \vdots \\ X \cdot X_n \end{bmatrix}, \text{ isto é } X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$
$$= (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2 + \dots + (X \cdot X_n) X_n$$

Exemplo: Determine as coordenadas do vetor $(1,5)$ na base o.n. de $\mathbb{R}^2$

$$S = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$$

$$[(1,5)]_S = \begin{bmatrix} (1,5) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right) \\ (1,5) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

super fácil

Projeção ortogonal em $\mathbb{R}^n$

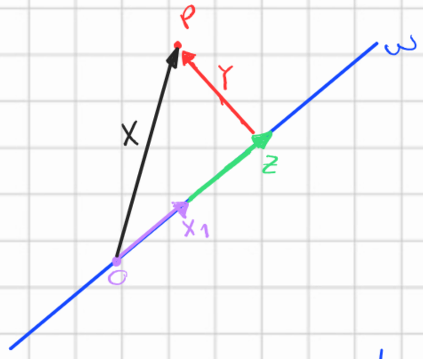
$Y \in \mathbb{R}^n$ é ortogonal ao subespaço W de $\mathbb{R}^n$ se $Y \cdot Z = 0, \forall Z \in W$

Teorema: Seja $Y \in \mathbb{R}^n$ e B uma base de um subespaço W de $\mathbb{R}^n$.
Então Y é ortogonal a W se Y é ortogonal a cada vetor de B

A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço W de $\mathbb{R}^n$ é o vetor $Z \in W$ tal que $X = Y + Z$, onde Y é ortogonal a W.

O vetor Z denota-se por $\boxed{\text{proj}_W X}$

Projeção ortogonal sobre uma reta



$X = \overrightarrow{OP}$

$\omega = \langle X_1 \rangle$

$= \{ \alpha X_1, \alpha \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \mathbb{O} + \alpha X_1, \alpha \in \mathbb{R} \}$

$X_1 \neq \mathbb{O}$, $\|X_1\| = 1$

Logo, $Z = proj_{\omega} X = \alpha X_1$ (*)

$Y \cdot X_1 = 0$. Então se $X = Y + Z = Y + \alpha X_1$

$$X \cdot X_1 = (Y + \alpha X_1) \cdot X_1 = Y X_1 + (\alpha X_1) \cdot X_1$$
$$= \underbrace{Y X_1}_{0} + \alpha \underbrace{(X_1 X_1)}_{1} = \alpha$$

Então $\alpha = Y \cdot X_1$. Substituindo em (*):

$$Z = proj_{\omega} X = (X \cdot X_1) X_1$$

$dis(P, \omega) = \|Y\|$

$= \|X - proj_{\omega} X\|$

Projeção ortogonal sobre um plano

$\|X_1\| = 1$ $\|X_2\| = 1$

$Y \cdot X_1 = 0$

$Y \cdot X_2 = 0$

$\omega = \langle X_1, X_2 \rangle$

$= \{ \mathbb{O} + \alpha X_1 + \beta X_2, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$B = (X_1, X_2)$, base o.n.

Então:

$$Z = \alpha X_1 + \beta X_2$$

Mais...

$$X = Y + Z = Y + \alpha X_1 + \beta X_2$$

$$X \cdot X_1 = \underbrace{(Y X_1)}_{0} + \alpha \underbrace{(X_1 \cdot X_1)}_{1} + \beta \underbrace{(X_2 \cdot X_1)}_{0} = \alpha$$

$$X \cdot X_2 = \underbrace{(Y X_2)}_{0} + \alpha \underbrace{(X_1 \cdot X_2)}_{0} + \beta \underbrace{(X_2 \cdot X_2)}_{1} = \beta$$

$$Z = proj_{\omega} X = (X \cdot X_1) X_1 + (X \cdot X_2) X_2$$

$$dis(P, \omega) = \|Y\| = \|X - proj_{\omega} X\|$$

Caso geral

Teorema: A projeção ortogonal de $X \in \mathbb{R}^n$ sobre o subespaço W de $\mathbb{R}^n$ é:

da base ortonormada

$$proj_W X = (X \cdot X_1)Y_1 + (X \cdot X_2)Y_2 + \dots + (X \cdot X_m)Y_m$$

⚠ Não sai no teste, mas pode dar jeito no futuro!

Método de Gram - Schmidt

Todo o subespaço não nulo de $\mathbb{R}^n$ possui uma base ortogonal
Como construir esta base?

- Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ com base $\{X_1, \dots, X_m\}$
  $\dim W = m$

Tome-se:

$$Z_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|}, \quad W_1 = \langle Z_1 \rangle$$

Para $K \in \{2, \dots, m\}$

$$Y_K = X_K - proj_{W_{K-1}} X$$

$$= X_K - \sum_{K=1}^{K-1} (X_i \, Z_i) Z_i$$

Toma-se:

$$Z_K = \frac{Y_K}{\|Y_K\|}, \quad W_K = \langle Z_1, \dots, Z_K \rangle$$

Seja $B = \{Z_1, \dots, Z_m\}$ é uma base ortonormada para W

é base pq $\begin{cases} \text{é ortonormada (vetores ortogonais} \Rightarrow \text{vetores l.i.)} \\ \#B = \dim W = m \end{cases}$

Exercício:

Seja $W = \langle \underbrace{(1,1,1,1)}_{X_1}, \underbrace{(1,2,-1,3)}_{X_2}, \underbrace{(2,1,-2,2)}_{X_3} \rangle$

$B = \{X_1, X_2, X_3\}$ são l.i. e geram W

logo B é base de W, $\dim W = 3$

$$z_1 = \frac{X_1}{\|X_1\|} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{4}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$z_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} \quad \text{onde} \quad Y_2 = X_2 - \text{proj}_{\langle z_1 \rangle} X_2$$

$$= X_2 - \underbrace{(X_2 \cdot z_1)\, z_1}$$

$$= \left[(1,2,-1,3) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$Y_2 = X_2 - (X_2 \cdot z_1)\, z_1 = (1,2,-1,3) - \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{-9}{4}, \frac{7}{4}\right)$$

$$z_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} \quad \text{onde} \quad \|Y_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{35}$$

$$z_2 = \frac{\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{-9}{4}, \frac{7}{4}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{35}} = (\ldots)$$

$$z_3 = \frac{Y_3}{\|Y_3\|} \quad \text{onde} \quad Y_3 = X_3 - \text{proj}_{\langle z_1, z_2 \rangle} X_3 = X_3 - \left((X_3 \cdot z_1) z_1 + (X_3 \cdot z_2) z_2\right)$$

$$= (\ldots)$$ Muitos contos