Aula 08

Vetores em $\mathbb{R}^n$ (n-vetores)

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\},\ x_i \in \mathbb{R},\ i\{1,2,\ldots n\}$$

$n=2$, $\mathbb{R}^2$, $n=3$, $\mathbb{R}^3$

Notação: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição:

- $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X+Y \in \mathbb{R}^n$
- $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X+Y = Y+X$
- Elemento neutro:
  $\rightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n$, $0+X = X$
- Todo o elemento tem simétrico
  $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
  $\exists X : X + (-X) = 0$, onde
  $-X = (-x_1, \ldots, -x_n)$

Propriedades da multiplicação:

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^n$, $\alpha X \in \mathbb{R}^n$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $(\alpha+\beta)X = \alpha X + \beta X$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(X+Y) = \alpha X + \alpha Y$
- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X)$
- $1X = X$

O produto interno em $\mathbb{R}^n$

$X \cdot Y = X^T Y$, considerando X como um vetor coluna $n \times 1$

$$X \cdot Y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_n y_n$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_n^2}$$

Exemplo:

$$X = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X \cdot Y = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = 4 \times 2 + 2 \times (-5) = 8 - 10 = -2$$

Propriedades do produto interno em $\mathbb{R}^m$

(Dados $X, Y, Z \in \mathbb{R}^m$ e $c \in \mathbb{R}$)

1. $X \cdot X \geqslant 0$
   $x_1^2 + \dots x_m^2 \geqslant 0$

2. $X \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = 0$

3. $X \cdot Y = Y \cdot X$

4. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$

5. $(cX) \cdot Y = c(X \cdot Y) = X \cdot (cY)$

6. X e Y são ortogonais sse $X \cdot Y = 0$

- **Desigualdade de Cauchy - Schwarz**

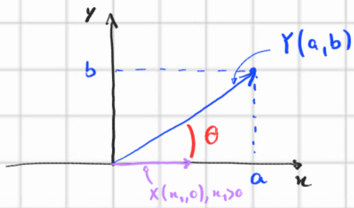
  ($X, Y \in \mathbb{R}^m$)

$$|X \cdot Y| \leqslant \|X\| \, \|Y\|$$

- **Desigualdade triângular**

$$\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$$

Ângulo entre dois vetores



$Y = (a, b) \neq 0$

$X = (x, 0), \quad x > 0$

$$\cos(\theta) = \frac{\text{cat. adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{\|Y\|}$$

$$\boxed{a = \|Y\| \cos\theta} \quad \text{Eq. 1}$$

$$X \cdot Y = a x_1 + b \times 0 = a x_1$$

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1| \underset{x>0}{=} x_1$$

$$X \cdot Y = a \|X\|$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{X \cdot Y}{\|X\|} = a$$

Substituindo na Eq. 1

$$\frac{X \cdot Y}{\|X\|} = \|Y\| \cos(\theta) \Leftrightarrow \boxed{\cos(\theta) = \frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}}$$

Logo, $\theta = \arccos\left[\frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}\right], \ \theta \in [0, \pi]$

$(\cos\theta \in [-1,1])$

Em geral, para $X, Y \in \mathbb{R}^m$, $X, Y \neq 0$ o ângulo entre X e Y é dado por:

$$\theta = \arccos\left[\frac{X \cdot Y}{\|X\| \, \|Y\|}\right], \quad \theta \in [0, \pi]$$

— // —

Exercícios:

$\boxed{1}$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \theta = ?$$

$$\theta = \arccos\left[\frac{u_1 \cdot u_2}{\|u_1\| \, \|u_2\|}\right]$$

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1 \cdot u_1} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{u_2 \cdot u_2} = \sqrt{0 + 1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$\boxed{2}$

$$u = (1, -2, 1) \qquad \theta = ?$$
$$v = (-1, 1, 0)$$

$$\|u\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\|v\| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$u \cdot v = -1 - 2 = -3$$

$$\theta = \arccos\left[\frac{-3}{\sqrt{2} \times \sqrt{6}}\right] = \arccos\left(\frac{-3}{2\sqrt{3}}\right) = \arccos\left(\frac{-3\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$= \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{5\pi}{6}$$

u e $-v$, $\theta = ?$ $\qquad -v = (1,-1,0)$

$$\theta = \arccos\left[\frac{u\cdot(-v)}{\|u\|\cdot\|-v\|}\right] = \arccos\left[-\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|-v\|}\right] = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$u+v$ e $u-v$, $\theta = ?$

$u+v = (0,-1,1)$ $\qquad \|u+v\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$u-v = (2,-3,1)$ $\qquad \|u-v\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

$(0,-1,1)\cdot(2,-3,1) = 4$

$$\theta = \arccos\left[\frac{4}{\sqrt{2}\,\sqrt{14}}\right] = \arccos\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$$

Vetores ortogonais, colineares (com o mesmo sentido e sentido contrário) e vetor unitário

- Vetores ortogonais ($X, Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$)

$$\cos\theta = \frac{X\cdot Y}{\|X\|\,\|Y\|} \Leftrightarrow X\cdot Y = 0$$

$\theta \to 90^\circ$

$\boxed{\cos 90^\circ = 0}$

Nota: Se um dos vetores for o vetor nulo então, por convenção, são ortogonais

- X e Y são colineares (ou paralelos, ou com a mesma direção) se

$\to |X\cdot Y| = \|X\|\,\|Y\|$

(i)

$$\cos\theta = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\,\|Y\|}$$

$$\cos 0 = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\,\|Y\|} \Rightarrow X \cdot Y = \|X\|\,\|Y\|$$

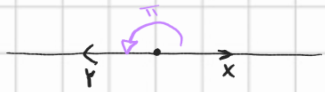
$\cos 0 = 1$

(ii)

$$\cos \pi = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\,\|Y\|} \Rightarrow X \cdot Y = -\|X\|\,\|Y\|$$

$180°$

$\cos \pi = -1$



—— // ——

Exercício: $X = (1,2)$ $Y = (-2,-4)$ Seja θ o ângulo que X faz com Y

Se X tiver o mesmo sentido de Y: $\theta = 0°$

$$\underbrace{\cos(0)}_{1} = \frac{X \cdot Y}{\|X\|\,\|Y\|} \Leftrightarrow X \cdot Y = \|X\|\,\|Y\|$$

$$X \cdot Y = -2 - 8 = -10$$

$$\|X\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \quad \|Y\| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{5} \times 2$$

$$X \cdot Y = \|X\|\,\|Y\| \Leftrightarrow -10 = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times 2$$

$$\Leftrightarrow -10 = 10$$

$\neq$, não têm o mesmo sentido

—— // ——

$X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

- X é unitário sse X tem norma 1. Por exemplo: $(1,0)$

- Seja $Y = \frac{1}{\|X\|} \times X$, este vetor tem norma 1

$$\|Y\|^2 = 1 \Rightarrow \|Y\| = 1$$

$$\|Y\|^2 = Y \cdot Y = \left(\frac{1}{\|X\|} \times X\right) \cdot \left(\frac{1}{\|X\|} \times X\right)$$

$$= \frac{1}{\|x\|^2} \times (x \cdot x) = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = 1$$

—————— // ——————

Exercício:

$$u = (1, -2, 1) \; , \quad v = (-1, 1, 0)$$

$$u + v = (0, -1, 1)$$

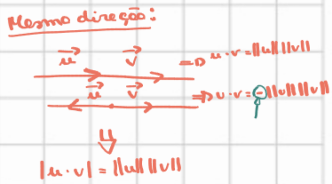
$$3u - 2v = (3, -6, 3) + (2, -2, 0) = (5, -8, 3)$$

- u e v são ortogonais? E colineares?

$u \cdot v = -1 - 2 = -3$, logo u e v não são ortogonais

$$\|u\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \qquad \|v\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Porque colineares só precisam de ter a mesma direção



Para u e v serem colineares $\boxed{|u \cdot v| = \|u\| \|v\|}$

$$\|u\| \|v\| = \sqrt{6}\sqrt{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \neq 3 \, ,$$

logo não são colineares

- vetor unitário com a direção de $u = (1, -2, 1)$

Mesma direção e sentido de u $\leftarrow$ $Y = \frac{1}{\|u\|} \times (1, -2, 1) = \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

Mesma direção e sentido contrário de u $\leftarrow$ $Y = -\frac{1}{\|u\|} \times (1, -2, 1) = -\frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$