Aula 24

Caso particular da matriz de uma apl. linear $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Seja $S = (X_1, \dots, X_m)$ base de $\mathbb{R}^m$

$\mathcal{T} = (Y_1, \dots, Y_n)$ base de $\mathbb{R}^n$

$$[Y_1 \dots Y_n \mid \phi(X_1) \dots \phi(X_m)] \sim [I_n \mid M(\phi; S, \mathcal{T})]$$

$M(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ — $M(\phi; S, \mathcal{B})$

base canónica

Núcleo de uma aplicação linear

Seja $\phi : V \to W$ uma apl. linear, núcleo (Kernel) de ϕ é:

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \{ X \in V : \phi(X) = 0_W \}$$

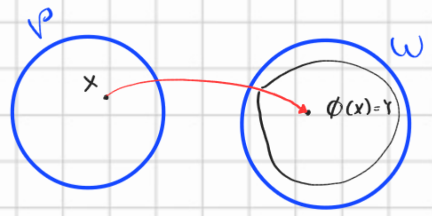
$$\phi : \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

$$\mathrm{Ker}\,\phi = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Nota: $\mathrm{Ker}\,\phi \neq \emptyset$ porque $\phi(0_V) = 0_W$

Imagem ϕ

A imagem de ϕ é: $\mathrm{im}\,\phi = \{ Y \in W : \exists X \in V : Y = \phi(X) \} = \{\phi(X), X \in V\}$



<u>Teorema</u>: Seja $\phi : V \to W$ uma apl. linear. Então:

- $\mathrm{Ker}(\phi)$ é um subespaço vetorial de V (espaço de partida)
- $\mathrm{im}(\phi)$ é um subespaço vetorial de W (espaço de chegada)

Exemplo: Determine Ker ϕ e im ϕ para $\phi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
(1)
$\phi(x,y,z) = (x+y, x+y+z)$

$$\text{Ker } \phi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x,y,z) = (0,0)\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, x+y+z) = (0,0)\}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \underbrace{x+y}_{0}+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

$$\text{Ker } \phi = \{(-y,y,0),\ y \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,1,0)\rangle$$

$$\text{im } \phi = \{\phi(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$
$$= \{(x+y,\ x+y+z),\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,1) + y(1,1) + z(0,1),\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{\underbrace{(x+y)}_{\in \mathbb{R}}(1,1) + \underbrace{z}_{\in \mathbb{R}}(0,1),\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle(1,1),(0,1)\rangle$$

Dado $(x,y) \in \langle(1,1),(0,1)\rangle$

$$\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} : (x,y) = \alpha(1,1) + \beta(0,1)$$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ \alpha+\beta = y \end{cases} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \end{array}\right]$$ é a matriz ampliada de um sistema possível

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \end{array}\right] \qquad \text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 2$$

é sempre a matriz ampliada de um sistema possível

Logo, $\langle(1,1),(0,1)\rangle = \mathbb{R}^2$

—— // ——

② Determine bases para $Ker(\phi)$ e $imp(\phi)$ se:

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$X \rightarrow \phi(X) = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} X$$

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y-z \\ x+2y+z \\ 3x+4y-z \end{bmatrix}$$

$$\text{im } \phi = \{ \phi(X), X \in \mathbb{R}^3 \} = \{ AX, X \in \mathbb{R}^3 \} = \mathcal{C}(A)$$

O anterior não é mais que determinar uma base para os espaço dos colunas de A

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T)$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad 3} \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 1} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = ((1,1,3), (0,1,1))$$

Uma base para o espaço dos colunas é $\mathcal{B}$

Outra resolução:

$$\text{im } \phi = \{ \phi(x,y,z) , (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \{ (x+y-z , x+2y+z , 3x+4y-z) , x,y,z \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle (1,1,3) , (1,2,4) , (-1,1,-1) \rangle$$

Os 3 vetores não são l. indep. (teríamos de verificar ...)

$$c_1(1,1,3) + c_2(1,2,4) + c_3(-1,1,0) = (0,0,0)$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} c_1 = 3c_3 \\ c_2 = -2c_3 \end{cases} , c_3 \in \mathbb{R}$$

Tomando $c_3 = 1 \Rightarrow 3(1,1,3) + (-2)(1,2,4) + (-1,1,-1) = (0,0,0)$

Logo, $\text{img } \phi = \langle (1,1,3) , (1,2,4) \rangle$

Como $(1,1,3)$ e $(1,2,4)$ são l. i. logo

$\mathcal{B}_1 = \{ (1,1,3) , (1,2,4) \}$ base de im ϕ

$$\text{Ker}(\phi) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x,y,z) = (0,0,0) \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y-z,\ x+2y+z,\ 3x+4y-z) = (0,0,0) \}$$

$$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

$$= N(A)$$

$$\dim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nulidade}}}{N(A)} = n - \text{car}(A) = 3 - 2 = 1$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases} \underset{(\dots)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 3z \\ y = -2z \end{cases}$$

$$\text{Ker}(\phi) = \{ (3z, -2z, z),\ z \in \mathbb{R} \} = \langle (3,-2,1) \rangle$$

- Como $(3,-2,1) \neq (0,0,0)$ então $\{(3,-2,1)\}$ é l. indep.

Logo, $B^* = (3,-2,1)$ é uma base Ker ϕ

---

③ Dada uma matriz A $(m \times n)$ e ϕ apl. linear

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X \longmapsto \phi(X) = AX$$

mostre que: $\text{Ker}(\phi) = N(A)$

$\text{imp}(\phi) = C(A)$

$$\text{Ker}\ \phi = \{ X \in \mathbb{R}^n : \phi(X) = 0_{\mathbb{R}^m} \}$$

$$= \{ X \in \mathbb{R}^n : AX = 0_{\mathbb{R}^m} \}$$

$$= N(A)$$

Prox. aula: - sobrejetividade

- injetividade

- (...)