

Matrizes

1. Considere a matriz identidade I_2 e as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Calcule

- (a) $A + B$; (b) $D^\top - 2A$; (c) AD ; (d) DA ; (e) ACD ; (f) $\frac{1}{5}(I_2 - (DA)^2)$;
 (g) o produto das matrizes A , C , D e E , considerando estas matrizes ordenadas de forma adequada.
2. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.
- (a) Se A e B são matrizes de ordem n , então $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
 (b) Se A e B são matrizes de ordem n , então $(AB)^2 = A^2B^2$.
 (c) Se A, B, C são matrizes tais que $A + C = B + C$, então $A = B$.
 (d) Se A, B, C são matrizes tais que $AB = AC$, então $A = O$ (matriz nula) ou $B = C$.
 (e) Se A é uma matriz de ordem n tal que $AA^T = O$, então $A = O$ (sendo O a matriz nula de ordem n).
 (f) Para $k \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \mu_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n^k \end{bmatrix}.$$

3. Seja A uma matriz quadrada.

- (a) Mostre que $A + A^T$ é uma matriz simétrica.
 (b) Em que condições é que a matriz $A - A^T$ é simétrica?

4. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Indique as matrizes que estão na forma escalonada e as que estão na forma escalonada reduzida.
 (b) Determine matrizes equivalentes por linhas às matrizes dadas que estejam:
 i. na forma escalonada;
 ii. na forma escalonada reduzida.

Sistemas de equações lineares

5. Resolva os seguintes sistemas usando o método de eliminação de Gauss (ou o método de eliminação de Gauss-Jordan).

$$(a) \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

6. Para cada sistema, determine os valores de α para os quais o sistema

$$(a) \begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} x + (\alpha - 1)y + \alpha z = \alpha - 2 \\ (\alpha - 1)y = 1 \\ \alpha z = \alpha - 3 \end{cases}; \quad (c) \begin{cases} x + \alpha y + \alpha z = 0 \\ \alpha x + y + z = 0 \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{cases}.$$

- i. não tem solução; ii. tem exatamente uma solução; iii. tem uma infinidade de soluções.

7. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ x + y + z = a \\ x - by + z = -b \end{cases},$$

onde a e b são parâmetros reais.

- (a) Determine os valores de a e b para os quais o sistema é:

- i. possível e determinado; ii. possível e indeterminado; iii. impossível.

- (b) Sabendo que $(1, -1, 1)$ é uma solução do sistema, determine o conjunto de todas as soluções.

8. Considere a matriz A de dimensão 3×5 , o vetor B de dimensão 5×1 e o sistema $AX = B$, onde X é o vetor das incógnitas. Sabendo que a característica de A é 3, determine a característica da matriz ampliada do sistema (matriz $[A|B]$) e a nulidade de A . Classifique o sistema.

9. Seja A uma matriz qualquer e B uma coluna de A . Mostre que o sistema $AX = B$ é possível e indique uma solução.

Posição relativa de retas e planos

10. Considere os sistemas dos exercícios 5-(c,d,e). Suponha que as duas primeiras equações de cada sistema são equações cartesianas de uma reta r e a terceira equação é uma equação geral de um plano \mathcal{P} . Em cada alínea, determine a posição relativa da reta r e do plano \mathcal{P} e descreva a interseção de r e \mathcal{P} .
11. Considere os planos \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ de equações $x + y + 2z = 3$ e $ax + 2y + 4z = b$, respectivamente, com $a, b \in \mathbb{R}$. Discuta a posição relativa dos planos \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ em função dos parâmetros reais a e b .

12. Considere que cada uma das seguintes matrizes é uma matriz obtida por aplicação do método de eliminação de Gauss à matriz de um sistema formado por equações cartesianas que definem duas retas r e s :

$$(a) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 15 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad (b) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]; \quad (c) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right]; \quad (d) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Para cada matriz, indique qual é a posição relativa das retas r e s . Justifique.

13. Considere a reta r definida por $x = 2y + z = 1$ e a família de retas $s_{a,b}$ de equação vetorial

$$(x, y, z) = (a, 0, 1) + \alpha(0, 2, b), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

- (a) Determine as equações cartesianas de $s_{a,b}$.
 (b) Discuta a posição relativa das retas r e $s_{a,b}$, em função dos parâmetros a e b .

Matriz Inversa

14. Averigue se as seguintes matrizes são invertíveis (não singulares) e, em caso afirmativo, determine a respectiva inversa:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

15. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que $C = ADB$.
 (b) Verifique que B é a matriz inversa de A .
 (c) Calcule C^5 , usando as alíneas anteriores.
 (d) Resolva a equação matricial $AXD = B$, relativamente à matriz X .

16. Considere a matriz invertível $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

- (a) Verifique que M satisfaz a equação $M^3 - 4M^2 - I_3 = 0$.
 (b) Prove, sem calcular o seu valor, que $M^{-2} = M - 4I_3$.
 (c) Calcule M^{-1} pela equação da alínea anterior e verifique o resultado obtido.

17. (a) Seja A uma matriz arbitrária $n \times n$. Suponhamos que existe um número natural k tal que $A^k = O$ (matriz nula $n \times n$). Mostre que $I_n - A$ é invertível e que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

(b) Usando a alínea anterior, calcule a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

18. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

resolva as seguintes equações matriciais relativamente à matriz X :

(a) $((B^{-1})^T X)^{-1} A^{-1} = I$;

(b) $(C^T D^T X)^T = E$.

19. Considere o sistema de equações lineares

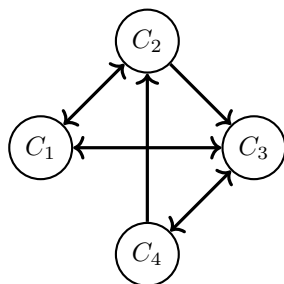
$$\begin{cases} y + 3z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 2x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

(a) Mostre que a matriz dos coeficientes do sistema é invertível e calcule a sua inversa.

(b) Justifique que o sistema é possível e determinado. Calcule a sua solução recorrendo à inversa da matriz dos coeficientes do sistema.

Algumas aplicações

20. Uma companhia aérea serve quatro cidades, C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , cujas ligações podem ser representadas por um *grafo orientado*:



- existem voos de C_1 para C_2 e C_3 ;
- existem voos de C_2 para C_1 e C_3 ;
- existem voos de C_3 para C_1 e C_4 ;
- existem voos de C_4 para C_2 e C_3 .

(a) Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$, chamada a matriz de adjacência associada ao grafo, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe um voo de } C_i \text{ para } C_j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) A matriz $A^r = [a_{ij}^{(r)}]$ (onde A^r é a matriz que resulta da multiplicação de r matrizes iguais a A) é tal que a entrada $a_{ij}^{(r)}$ representa o número de itinerários diferentes de ligação da cidade C_i à cidade C_j utilizando r voos. Determine quantos itinerários diferentes existem para irmos da cidade C_4 para a cidade C_1 utilizando:

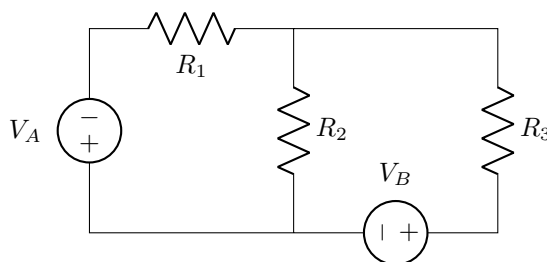
i. apenas um voo;

ii. dois voos;

iii. três voos.

Para cada uma das alíneas anteriores, determine explicitamente todos os itinerários.

21. Considere o circuito eléctrico representado na figura seguinte:

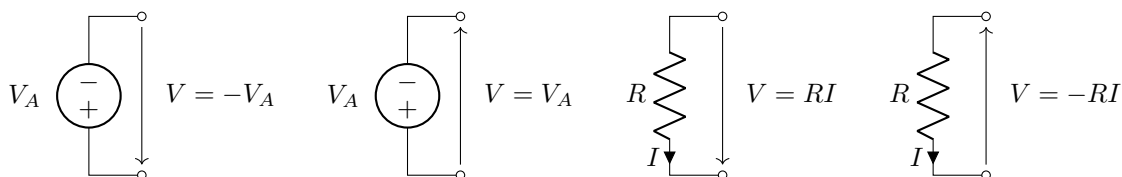


constituído por dois geradores de tensão $V_A = 7\text{ V}$ e $V_B = 5\text{ V}$ e três resistências $R_1 = 10\text{ k}\Omega$, $R_2 = 5\text{ k}\Omega$ e $R_3 = 15\text{ k}\Omega$. Determine a intensidade das correntes que passam pelas três resistências.

Observação: Para resolver o exercício é preciso aplicar as **Leis de Kirchhoff**:

- **(lei dos nós)** a soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que dele saem (ou seja, um nó não acumula carga);
- **(lei das malhas)** a soma da diferença de potencial eléctrico ao longo de qualquer caminho fechado (malha) é nula.

A direcção escolhida para percorrer a malha determina o cálculo das diferenças de potencial consoante as seguintes convenções:



- Num gerador de tensão, a diferença de potencial eléctrico medida do polo positivo para o polo negativo é positiva; caso contrário é negativa.
- Numa resistência R percorrida por uma corrente I , a diferença de potencial eléctrico, medida com o mesmo sentido que a corrente, é dada pela Lei de Ohm, isto é, $V = RI$; caso contrário, $V = -RI$.

Sugestão: comece por determinar um sistema de equações lineares que resulta da aplicação das leis de Kirchhoff e aplique o método de eliminação de Gauss (ou de Gauss-Jordan) ao sistema.

1. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 0 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 16 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$;
 (g) $DACE = \begin{bmatrix} 8 \\ -41 \end{bmatrix}$ ou $CDAE = \begin{bmatrix} 3 \\ 14 \end{bmatrix}$.
2. (a) Falsa (b) Falsa (c) Verdadeira; (d) Falsa; (e) Verdadeira; (f) Verdadeira.
3. (b) Quando A é uma matriz simétrica e neste caso $A - A^T = 0$ (matriz nula).
4. (a) Forma escalonada: B e D; forma escalonada reduzida: D.
 (b) i. Forma escalonada: $A_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $C_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
 ii. Forma escalonada reduzida: $A_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B_r = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $C_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
5. (a) $x_1 = -2$, $x_2 = -10$; (b) impossível; (c) $x_1 = -4$, $x_2 = -8$, $x_3 = 2$; (d) impossível; (e) $x_1 = t$, $x_2 = \frac{1}{3} - 2t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$; (f) $x_1 = \frac{3}{17}t_1 - \frac{13}{17}t_2$, $x_2 = \frac{19}{17}t_1 - \frac{20}{17}t_2$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;
6. (a) i. $\alpha = -1$, ii. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iii. $\alpha = 1$; (b) i. $\alpha \in \{0, 1\}$, ii. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; (c) i. $\alpha = 1$, ii. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, iii. $\alpha = -1$.
7. (a) i. $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; ii. $a = 1$ e $b = -1$; iii. $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $b = -1$. (b) $\{(1, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
8. Seja $n = 5$ o número de colunas de A . $\text{car}([A|B]) = 3$ e $\text{nul}(A) = n - \text{car}(A) = 2$. O sistema é possível e indeterminado porque $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3 < n = 5$. O grau de indeterminação do sistema é igual a $\text{nul}(A) = 2$.
9. Se B é a coluna i de A , então $X = [0 \cdots 1 \cdots 0]^T$, com 1 na linha i e as restantes entradas nulas, é uma solução.
10. (c) A reta r e o plano \mathcal{P} são concorrentes. Intersetam-se no ponto $(-4, -8, 2)$;
 (d) A reta r e o plano \mathcal{P} são paralelos. A interseção é o conjunto vazio.
 (e) A reta r está contida no plano \mathcal{P} . A interseção é a $r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = t, x_2 = \frac{1}{3} - 2t, x_3 = t, t \in \mathbb{R}\}$, isto é, $r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (0, \frac{1}{3}, 0) + t(1, -2, 1), t \in \mathbb{R}\}$.
11. \mathcal{P} e $\mathcal{P}_{a,b}$ são coincidentes se $a = 2$ e $b = 6$; estritamente paralelos se $a = 2$ e $b \neq 6$; concorrentes se $a \neq 2$ e $b \in \mathbb{R}$.
12. (a) Retas concorrentes; (b) retas coincidentes; (c) retas enviesadas; (d) retas estritamente paralelas.
13. (a) Equações cartesianas de $s_{a,b}$: $x = a$, $by - 2z = -2$.
 (b) As retas r e $s_{a,b}$ são coincidentes se $a = 1$ e $b = -4$; estritamente paralelas se $a \neq 1$ e $b = -4$; concorrentes se $a = 1$ e $b \neq -4$; enviesadas se $a \neq 1$ e $b \neq -4$.
14. (a) Matriz singular; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$.
15. (c) $C^5 = AD^5B = \begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{bmatrix}$; (d) $X = \begin{bmatrix} 32 & -9 \\ -\frac{45}{2} & \frac{19}{3} \end{bmatrix}$.
16. (c) $M^{-1} = MM^{-2} = M(M - 4I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

17. (a) $(I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1})(I_n - A) = I_n - A^k = I_n.$

(b) $M = I - A$ com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sendo $A^3 = O$. Logo, $M^{-1} = (I - A)^{-1} = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

18. (a) $X = B^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix};$ (b) $X = (E(DC)^{-1})^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$

19. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$ (b) $x = -1, y = -5, z = 2.$

20. (i) 0 itinerários; (ii) 2: $C_4 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1, C_4 \rightarrow C_3 \rightarrow C_1;$ (iii) 1: $C_4 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_1.$

21. $I_1 = 600 \mu A$ (esquerda-direita), $I_2 = 200 \mu A$ e $I_3 = 400 \mu A$ (cima-baixo).