Aula 18

Valores e Vetores próprios de matrizes

Seja A $(n \times n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
λ é valor próprio de A se existir um vetor <u>não nulo</u> $X \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$AX = \lambda X$$

Todo o vetor não nulo $X \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz $\boxed{AX = \lambda X}$!
é chamado vetor próprio de A associado ao valor próprio λ de A

λ é valor próprio de A

$\Updownarrow$ $\exists X \neq 0 : AX = \lambda X$
$AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow AX - \lambda I X = 0$
$\Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$

$\exists X \neq 0 : (A - \lambda I)X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0$, tem uma solução não trivial

$\Updownarrow$ A matriz dos coeficientes não é invertível

$$|A - \lambda I| = 0$$

Polinómio característico de A $(n \times n)$ $\rightarrow$ é um polinómio de grau n

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

A eq. $|A - \lambda I| = 0$ é chamada eq. característica

Teorema: Os valores próprios de A são as raízes do pol. característico de A

<u>Obs</u>: Os valores próprios de uma matriz triangular são as entradas da diagonal principal

<u>Exemplo 1</u>:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

<u>Calcular os valores próprios</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

O polinómio característico é $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4-\lambda-4\lambda+\lambda^2+2=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\times 6}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2 \vee \lambda = 3} \to \text{valores próprios}$$

Subespaço próprio associado a um valor próprio

Teorema: Se λ um valor próprio de $A(n \times n)$

Então:

$$\mathcal{U}_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : \underbrace{X \text{ é vetor próprio de } A}_{\substack{\Leftrightarrow (A-\lambda I)X=0 \\ AX=\lambda X}}\} \cup \{0\} \text{ é um subespaço vetorial de } \mathbb{R}^n$$

Subespaço próprio de A associado ao valor próprio λ

De uma forma mais simples...

$$\mathcal{U}_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n : (A-\lambda I)X = 0\}$$
$$= N(A-\lambda I)$$

Teorema: Seja $A(n \times n)$ com K valores próprios distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ esses valores próprios e:

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)^{m_{\lambda_1}}(\lambda_2-\lambda)^{m_{\lambda_2}} \cdots (\lambda_n-\lambda)^{m_{\lambda_K}}$$

Então:

$$\boxed{1 \leq \dim \mathcal{U}_{\lambda_i} \leq m_{\lambda_i},\ i \in \{1,\dots,n\}}$$!

Exemplo:

$$p_A(\lambda) = (2-\lambda)^{2}(3-\lambda)^{1}$$

$$\lambda_1 = 2 \wedge \lambda_2 = 3$$

Logo: $1 \leq \dim \mathcal{U}_3 \leq 1 \Rightarrow \dim \mathcal{U}_3 = 1$

⊛ Continuação Exercício (1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{valores próprios são } 2 \text{ e } 3$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$U_{\lambda=2} = \{ X \in \mathbb{R}^2 : (A - 2I)X = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2' := L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Passando ao sistema: $-x + y = 0 \Rightarrow x = y$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Como: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é l. i.

Logo $B = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $U_{\lambda=2}$. Assim, $\dim U_{\lambda=2} = 1$

$\boxed{\lambda = 3}$

A - 3I

$$U_{\lambda=3} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1} : \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow -2x + y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y$$

$$U_{\lambda=3} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/2\, y \\ y \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Já conhecíamos a dimensão já que $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^1 (3-\lambda)^1$

$$\begin{cases} 1 \leq \dim U_{\lambda=2} \leq 1 \\ 1 \leq \dim U_{\lambda=3} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dim U_{\lambda=2} = 1 \\ \dim U_{\lambda=3} = 1 \end{cases}$$

Exemplo ②

Determinar os valores próprios e os subespaços próprios de:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2+1)$$

$(-\lambda)(\lambda^2+1)=0$

$\Leftrightarrow \lambda=0 \wedge \underbrace{\lambda^2+1=0}_{\text{Não existem raízes reais!}}$

• Temos uma raiz real $\lambda=0$

(e um par de raízes complexas conjugadas)

$$U_{\lambda=0} \{X \in \mathbb{R}^3 : AX=0\} = N(A)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{array}{l} x=x \\ y=0 \\ z=0 \end{array}$$

$$U_{\lambda=0} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y=0 \wedge z=0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Como: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ é l.i.. Logo é uma base

$\dim U_{\lambda=0} = 1$

Exemplo ③

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{valores próprios são } 1, 1 \text{ e } 2.$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^1$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Obs:

$$1 \leq \dim U_{\lambda=1} \leq 2$$

Podemos ter $\dim U_{\lambda=1} = 1$ ou $\dim_{\lambda=1} = 2$

Mas $\dim U_{\lambda=1} = \dim N(A - 1I)$

$$= n - \text{car}(A - 1I)$$

$$= 3 - 2 = 1$$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$1 \leq \dim U_{\lambda=2} \leq 1 \Rightarrow \dim U_{\lambda=2} = 1$$