Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

1. Determine uma equação reduzida e classifique as cónicas definidas pelas equações:
   (a) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0$;
   (b) $4xy - 2x + 6y + 3 = 0$;
   (c) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$.
2. Determine uma equação reduzida e classifique as quádricas definidas pelas equações:
   (a) $x^2 - y^2 - 6z^2 + 4x - 6y - 9 = 0$;
   (b) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y = 0$;
   (c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z = 0$;
   (d) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y + 2z + 1 = 0$;
   (e) $3y^2 + 4xz + 6y + 1 = 0$;
   (f) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z = 0$;
   (g) $-x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$.
3. Determine os valores do parâmetro α para os quais a cónica definida por
$$5x^2 + 5y^2 + 2xy + 2x - 2y + \alpha = 0$$
   é uma elipse.
4. Considere as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$
   (a) Verifique que P é uma matriz ortogonal e determine a matriz diagonal D tal que $P^T AP = D$.
   (b) Determine uma equação reduzida e classifique a cónica de equação $4xy + x + y = 0$.
5. Seja A o ponto de coordenadas $(0, 1, 1)$. Verifique que o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^3$ cuja distância a A difere da sua distância à origem numa unidade é uma quádrica e classifique-a.
6. Identifique o lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ cuja distância ao ponto $(0, 0, -2)$ é a terça parte da distância ao plano de equação $z + 18 = 0$.

1. (a) Parábola de equação reduzida $\tilde{y} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\tilde{x}^2$, sendo $\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \tilde{y} = \hat{y} + \frac{19\sqrt{2}}{24} \end{cases}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$;

   (b) hipérbole de equação reduzida $\frac{\tilde{y}^2}{3} - \frac{\tilde{x}^2}{3} = 1$, sendo $\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tilde{y} = \hat{y} + \sqrt{2} \end{cases}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$;

   (c) elipse (que é uma circunferência) de equação reduzida $\frac{\hat{x}^2}{5} + \frac{\hat{y}^2}{5} = 1$, sendo $\begin{cases} \hat{x} = x + 1 \\ \hat{y} = y - 2 \end{cases}$.

2. (a) Hiperbolóide de duas folhas de equação reduzida $\frac{\hat{x}^2}{4} - \frac{\hat{y}^2}{4} - \frac{\hat{z}^2}{\frac{2}{3}} = 1$, sendo $\begin{cases} \hat{x} = x + 2 \\ \hat{y} = y + 3 \\ \hat{z} = z \end{cases}$;

   (b) elipsóide de equação reduzida $\frac{\hat{x}^2}{3} + \frac{\hat{y}^2}{\frac{3}{2}} + \frac{\hat{z}^2}{3} = 1$, sendo $\begin{cases} \hat{x} = x - 1 \\ \hat{y} = y + 1 \\ \hat{z} = z \end{cases}$;

   (c) parabolóide elíptico de equação reduzida $\hat{z} = \hat{x}^2 + \hat{y}^2$, sendo $\begin{cases} \hat{x} = x + 2 \\ \hat{y} = y - 3 \\ \hat{z} = z + 13 \end{cases}$;

   (d) cilindro parabólico de equação reduzida $\tilde{y} = -\frac{5}{2}\tilde{x}^2$, sendo $\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} - \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \tilde{y} = \hat{y} \\ \tilde{z} = \hat{z}3 \end{cases}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$;

   (e) hiperbolóide de uma folha de equação reduzida $\frac{\hat{x}^2}{\frac{2}{3}} + \hat{y}^2 - \hat{z} = 1$;

   (f) dois planos paralelos de equação reduzida $3\hat{z}^2 = 1$, ou seja, de equações $\hat{z} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\hat{z} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

   (g) cilindro hiperbólico de equação reduzida $\hat{y}^2 - \hat{x}^2 = 1$.

3. $\alpha < \frac{1}{2}$

4. (a) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. (b) Hipérbole.

5. O conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pretendido é a quádrica de equação geral

$$4x^2 - 8yz + 4y + 4z - 1 = 0$$

   que é um hiperbolóide de duas folhas.

6. É um elipsóide de equação $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{32} + \frac{z^2}{36} = 1$.