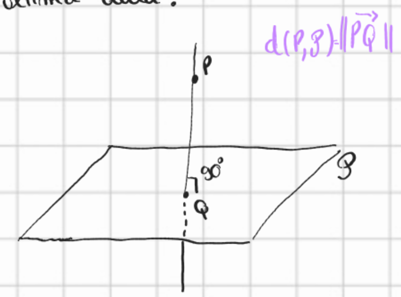
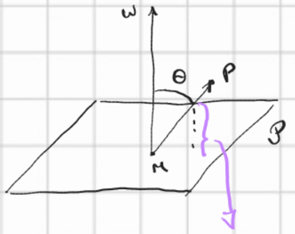
Aula 10

Distâncias (continuação)

Na última aula:





$$d(P,\beta)=\frac{|\overrightarrow{MP}\cdot w|}{\|w\|}$$

Sendo $P=(x_0,y_0,z_0)\notin\beta$

e

$ax+by+cz+d=0$ uma equação geral do plano,

$$d(P,\beta)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Demonstração:

$P(x_0,y_0,z_0)\notin\beta$

$M(x,y,z)\in\beta$ $\quad \overrightarrow{MP}=P-M$

$w=(a,b,c)$ $\quad =(x_0-x,y_0-y,z_0-z)$

$$d(P,\beta)=\frac{|(x_0-x,y_0-y,z_0-z)\cdot(a,b,c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|a(x_0-x)+b(y_0-y)+c(z_0-z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0-ax-by-cz|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$M\in\beta$

$ax+bx+cz+d=0$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0\underbrace{-(ax+bx+cz)}_{-d}|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

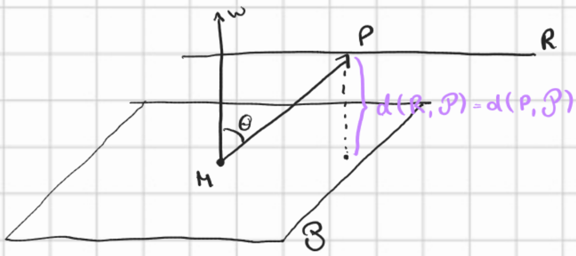
$\boxed{\text{Exercício 12 - Ficha 3}}$

Distância de uma reta R a um plano β

- $R\cap Q\neq\emptyset$, a reta e o plano intersetam-se e neste caso $d(R,\beta)=0$

- $R\cap Q=\emptyset$ (a reta e o plano são estritamente paralelos)

$d(R,\beta)=d(P,\beta)$, onde P é um ponto qualquer de R



$$d(P,\beta)=\frac{|\overrightarrow{MP}\cdot w|}{\|w\|},\quad \begin{matrix}M\in\beta\\ P\in R\end{matrix}$$

Exemplo:

$$R: (x,y,z) = (2,4,6) + \alpha(4,3,0), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\beta': 6x - 8y + 10z = 0$$

$d(R, \beta') = ?$

$R \cap \beta' = ?$

$$R: \begin{cases} x = 2 + 4\alpha \\ y = 4 + 3\alpha \\ z = 6 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x-2}{4} \\ \frac{y-4}{3} = \alpha \\ z = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y-4}{3} = \frac{x-2}{4} \\ z = 6 \end{cases}$$

$$R \cap \beta': \begin{cases} \frac{y-4}{3} = \frac{x-2}{4} \\ z = 6 \\ 6x - 8y + 10z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 4y = -10 \\ z = 6 \\ 6x - 8y + 10z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo (...) $S = \emptyset$

Como $R \cap \beta' = \emptyset$, R e β são estritamente paralelos

$w = (6, -8, 10)$ → retiramos da eq. do plano

$d(R, \beta') = d(P, \beta')$, onde $P \in R$

Para obter M podemos fazer:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 6x - 8y + 10z = 0 \end{cases}, \text{ obtemos } \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{4}z \end{cases}, \text{ tomando } z = 1: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{4} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(0, \frac{5}{4}, 1\right)$$

Ponto do plano: $M\left(0, \frac{5}{4}, 1\right)$

Ponto da reta: $P(2,4,6)$

$w = (6, -8, 10)$

$\overrightarrow{MP} = P - M = \left(2, \frac{11}{4}, 5\right)$

$$\boxed{d(R, \beta') = \frac{\left| \underbrace{\left(2, \frac{11}{4}, 5\right)}_{\overrightarrow{MP}} \cdot \underbrace{(6, -8, 10)}_{\vec{w}} \right|}{\underbrace{\sqrt{36 + 64 + 100}}_{\|w\|}} = 2\sqrt{2}}$$

Distância entre dois planos β e β'

- Se $\beta \cap \beta' \neq \emptyset$, os planos intersetam-se e $d(\beta, \beta') = 0$
- Se $\beta \cap \beta' = \emptyset$, os 2 planos são estritamente paralelos e

$$d(\beta, \beta') = d(P, \beta'), \text{ sendo } P \text{ um ponto qualquer de } \beta$$

Exemplo:

$$\beta: 3x - 4y + 5z = 2$$

$$\beta \cap \beta' = \emptyset$$

$$\beta': 6x - 8y + 10z = 0$$

Seja $P \in \beta$, $P(0,0,z)$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 5z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \frac{2}{5} \end{cases}$ $\Rightarrow P(0,0,\frac{2}{5})$

Seja $M \in \beta'$, $M(0,0,z_0)$: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ 10z_0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow M(0,0,0)$

$$d(\beta', \beta) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot w|}{\|w\|}$$

$w = (6, -8, 10)$ $\quad \overrightarrow{MP} = P - M = (0, 0, \frac{2}{5})$

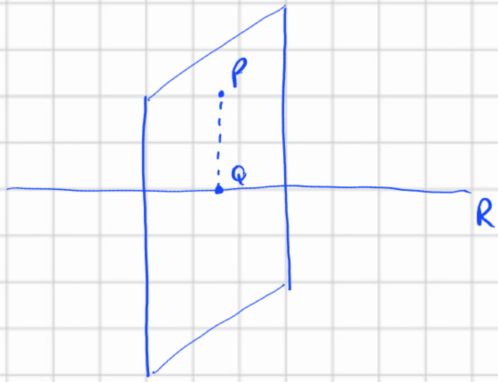
$\|w\| = \sqrt{200}$

$$d(\beta', \beta) = \frac{|(0,0,\frac{2}{5}) \cdot (6,-8,10)|}{\sqrt{200}} = \frac{4}{\sqrt{2} \times 10} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \times 10} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Distância de um ponto a uma reta

1º Processo:

→ Recorrendo ao ponto da reta R mais próximo do ponto considerado



Dada R e um ponto $P \notin R$ existe um único plano β perpendicular a R que contém o ponto R

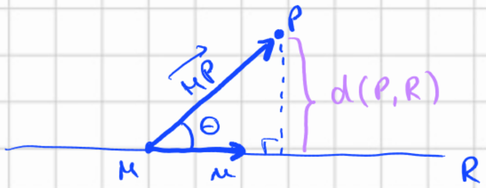
Assim:

$d(P,R) = d(P,Q)$, onde Q é o ponto de interseção da reta R com o plano β

2º Processo:

→ Recorrendo a um ponto arbitrário da reta R e a um vetor diretor de R

$$R: X = M + \alpha \vec{u}, \alpha \in \mathbb{R}$$



$$|\sin\theta| = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{d(P,R)}{\|\vec{MP}\|}$$

Logo, $d(P,R) = \|\vec{MP}\| \times |\sin\theta|$

$$\Leftrightarrow d(P,R) = \cancel{\|\vec{MP}\|} \times \frac{\|u \times \vec{MP}\|}{\|u\| \cancel{\|\vec{MP}\|}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{d(P,R) = \frac{\|u \times \vec{MP}\|}{\|u\|}}$$

$\|X \times Y\| = \|X\| \, \|Y\| \, |\sin\theta|$

$X = u$
$Y = \vec{MP}$

$\Downarrow$

$$|\sin\theta| = \frac{\|u \times \vec{MP}\|}{\|u\| \, \|\vec{MP}\|}$$

Exemplo:

$$P = (1,0,3)$$

$$R: (x,y,z) = (0,1,-3) + \alpha(1,-1,5), \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$d(P,R) = ?$$

Seja $M \in R$, $M = (0,1,-3)$, $\quad \vec{MP} = P - M = (1,-1,6)$

$$u = (1,-1,5) \quad \|u\| = \sqrt{1+1+25} = \sqrt{27}$$

$$d(P,R) = \frac{\| u \times \vec{MP} \|}{\sqrt{27}}$$

$$-6+5$$

$$u \times \vec{MP} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{T.L. \\ 1^a\text{ linha}}}{=} \hat{\imath} \times \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

$$= (-1,-1,0)$$

$$\|(-1,-1,0)\| = \sqrt{2}$$

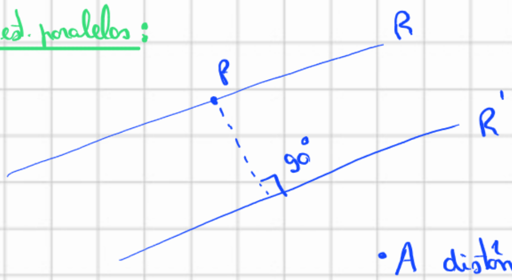
$$d(P,R) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

Aplicação: Distância entre retas paralelas

- Através da distância entre um ponto e uma reta

↳ Duas retas disjuntas ($R \cap R' = \emptyset$) são estritamente paralelas ou enviesadas

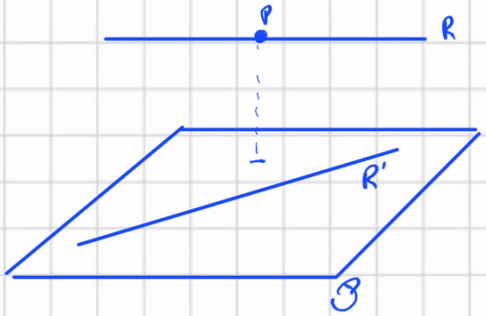
Retas est. paralelas:



- A distância entre retas estritamente paralelas R e R' é:

$$d(R,R') = d(P,R'), \text{ onde } P \in R$$

Retas enviesadas:



- Dadas duas retas enviesadas R e R' existe um único plano β estritamente paralelo a R e que contém R'

- A distância entre retas enviesadas R e R' coincide com a distância entre a reta R e o plano β, isto é:

$$d(R,R') = d(R,\beta) = d(P,\beta),\ P \in R$$

Exercício

$$R: (x,y,z) = (1,0,0) + \alpha(1,2,3),\ \alpha \in \mathbb{R}$$
$$R': (x,y,z) = (1,1,1) + \beta(1,2,3),\ \beta \in \mathbb{R}$$
$$R'': (x,y,z) = (1,1,1) + \theta(1,0,0),\ \theta \in \mathbb{R}$$

Distância entre R e R'

R e R' tem o mesmo vetor diretor, logo são paralelas.
São estritamente paralelas?

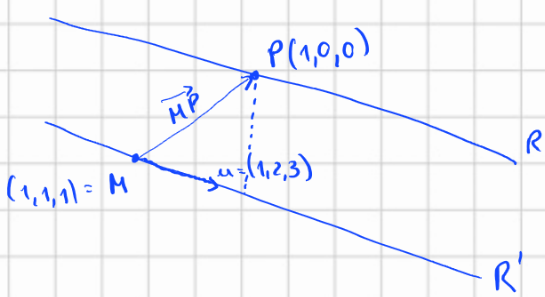
Dado $P = (1,0,0) \in R$

$P \in R'$?

$$\exists \beta \in \mathbb{R} : (1,0,0) = (1,1,1) + \beta(1,2,3)$$

$$\begin{cases} 1 = 1 + \beta \\ 0 = 1 + 2\beta \\ 0 = 1 + 3\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \beta = -1/2 \\ \beta = -1/3 \end{cases} \quad \nexists,$$

Logo $P \in R$ não pertence a R'.
R e R' são estritamente paralelas



Assim:

$$d(R,R') = d(P,R') \text{ onde } P \in R$$

$$d(P,R') = \frac{\| u \times \vec{MP} \|}{\|u\|}$$

$$\vec{MP} = P - M = (0,-1,-1)$$

$$u \times \vec{MP} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{T.L.} \\ 1.^a \text{ linha}}}{=} \hat{i} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} + \hat{j} - k = (1,1,-1)$$

$$\| u \times \vec{MP} \| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{14}$$

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$d(P,R') = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{42}}{14}$$

! é o mais "complicadinho" ☹

③ Distância entre R e R''

R e R'' não tem o mesmo sentido, visto que, os vetores diretores não são colineares

Se R e R'' se intersetarem então:

$(x,y,z) \in R \cap R''$
$\Leftrightarrow (x,y,z) \in R \wedge (x,y,z) \in R''$
$\Leftrightarrow (x,y,z) = (1,0,0) + \alpha(1,2,3)$
$= (1,1,1) + \theta(1,0,0)$

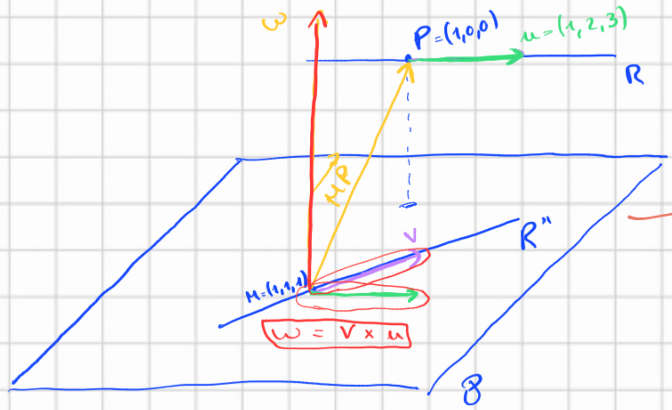
$$(1,0,0) + \alpha(1,2,3) = (1,1,1) + \beta(1,2,3)$$

$$\Leftrightarrow (1,0,0) + \alpha(1,2,3) = (1,1,1) + \beta(1,0,0), \text{ para alguns } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \cancel{1} + \alpha = \cancel{1} + \beta \\ 2\alpha = 1 \\ 3\alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = 1/2 \\ \alpha = 0 \end{cases} \nexists$$

, logo As retas não se intersetam!

$R \cap R'' = \emptyset$ e os seu vetores diretos são não colineares, logo são enviesados



β Este plano contém R'' e é paralelo a R

- Considerando o plano β que contem R'' e é paralelo a R

$$\beta : \underbrace{(1,1,1) + \alpha(1,0,0)}_{R''} + \underbrace{\beta(1,2,3)}_{\substack{\text{V.D de} \\ R\ (\vec{u})}} \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$d(R, R') = d(R, \beta) = d(P, \beta), \ P \in R$$

$$d(P, \beta) = \frac{|\vec{MP} \cdot \omega|}{\|\omega\|}$$

$$\vec{MP} = P - M = (0, -1, -1)$$

! $\boxed{\omega = u \times v}$

$$\omega = (1,0,0) \times (1,2,3)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{T.L.} \\ 1^{a}\text{ linha}}}{=} \hat{\imath} \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$$

$$= (0, -3, 2)$$

$$\|\omega\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$MP \cdot \omega = 0 + 3 - 2 = 1$$

$$\Longrightarrow d(P, \beta) = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$$