Aula 01

$$X = \vec{OP}(x_1, x_2, x_3) \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X + Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X + Y = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta y_1 \\ \beta y_2 \\ \beta y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

em $\mathbb{R}^n$:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- adição de vetores
  $X + Y$
- multiplicação escalar
  αX
- combinação linear qualquer
  $\alpha X + \beta Y + \theta Z$

Matriz

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ i \\ \\ m \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

coluna j

linha i

$\underbrace{m \times n}$

A é de tipo (tamanho) $m \times n$

$\boxed{a_{ij}}$ é o elemento que está na linha i coluna j

$A = [a_{ij}]$, $i \in \{1, \dots, m\}$
$j \in \{1, \dots, n\}$

$$A = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$a_{21} = 2$

$a_{33} = -1$

Matriz nula $m \times n$: é a matriz $m \times n$ com todos os elementos iguais a zero.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad 0_{m \times n}$, 0

Matriz linha: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$ $\quad 1 \times n$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad 1 \times 3$

Matriz coluna: $\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ $\quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$m \times 1 \qquad 3 \times 1$

- Quando $m = n$ chamamos **matrizes quadradas**, caso contrário chama-se não quadrada

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz quadrada chama-se diagonal se:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

$\rightarrow$ diagonal principal

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Quando $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$ chamamos matriz identidade de ordem n.

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ldots$$

$$\boxed{I_n}$$

- Matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{ji} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ para $i > j$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Matriz triangular inferior

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ para $i < j$

Transposta:

A transposta da matriz $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ é a matriz $n \times m$

$A^T = [a_{ji}]$

→ obtida pela troca da posição relativa das linhas pelas colunas de A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×2

O elemento $(\underset{\text{linha 3}}{3}, \underset{\text{coluna 2}}{2})$ é o a_{23}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3×2 $\qquad$ 2×3

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2×2 $\qquad$ 2×2

· Propriedade: $(A^T)^T = A$

· Uma matriz diz-se simétrica se $A^T = A$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

→ toda a matriz simétrica é quadrada

→ todas as matrizes diagonais são simétricas

- Igualdade de Matrizes:

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}] \quad m \times n$$

se e só se

$$A = B \quad \text{se} \quad a_{ij} = b_{ij}, \ \forall \ i \in \{1, \dots, m\}, \ j \in \{1, \dots, n\}$$

- A soma de A com B é a matriz $m \times n$:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$
$$= [c_{ij}] \quad \text{com} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i \in \{1, \dots, m\}, \ j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- O produto de A pelo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}], \quad i \in \{1, \dots, m\}, \ j \in \{1, \dots, n\}$$

$$2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- A matriz A $m \times n$ é combinação linear de $A_1, A_2, \dots, A_K$ se

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_K A_K, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \ i \in \{1, \dots, K\}$$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ é combinação linear $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Propriedades da adição:

  - → Comutatividade $\quad A + B = B + A$
  - → Associativa $\quad (A+B)+C = A+(B+C)$
  - → admite elemento neutro $\quad A + 0 = A$
  - → A possui inverso aditivo (simétrica) $\quad A + (-A) = 0$
  - → $(A+B)^T = A^T + B^T$!

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

- Propriedades da multiplicação escalar

  - → $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  - → $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
  - → $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
  - → $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, para qualquer $A, B\ (m \times n)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- Multiplicação de matrizes

(1) Produto de uma matriz linha por uma matriz coluna

$$A = [a_1, a_2, \cdots a_n] \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{1 \times n \quad = \quad n \times 1}_{(1,1)}$$

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

$$\underbrace{\underset{1 \times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}} \underset{3 \times 1}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}} = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + 3 \times 2 = 7$$

$$\underset{1 \times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}} \quad \underset{4 \times 1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

- Multiplicação de duas matrizes

$$A = i\begin{bmatrix} \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{matrix}} \end{bmatrix} = B$$

$A\ (m \times n)$

$B\ (n \times p)$

O nº de colunas de A tem que ser igual ao nº de linhas de B.
(produto tem de ser bem definido)

!

$AB \rightsquigarrow m \times p$

$m \times \underline{n} \quad \underline{n} \times p$

$$AB = [c_{ij}], \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, p\}$$

onde

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

Exercício:

Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(a) Calcule AD (d) DA

$3 \times \underline{2} \quad \underline{2} \times 3$

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 0 + (-2) \times 1 & 1 \times (-1) + (-2) \times 0 & 1 \times 0 + (-2) \times 2 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times (-1) + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 2 \\ 2 \times 0 + 3 \times 1 & 2 \times (-1) + 3 \times 0 & 2 \times 0 + 3 \times 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3 \times 3}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

d)

$$DA = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2×3 $\quad$ 3×2

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

!

• Conclusão, na multiplicação de matrizes AD pode ser diferente de DA

Valor lógico de $\forall A, B$, Falso!

$\exists A, B : AB = BA$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$