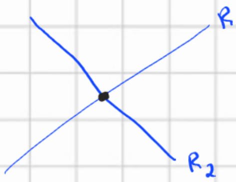
Aula 05

Interseção de duas retas

$$R_1: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_1'x + b_1'y + c_1'z = d_1' \end{cases} \qquad R_2: \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z = d_2' \end{cases}$$

$$R_1 \cap R_2: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_1'x + b_1'y + c_1'z = d_1' \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z = d_2' \end{cases}$$

(I)

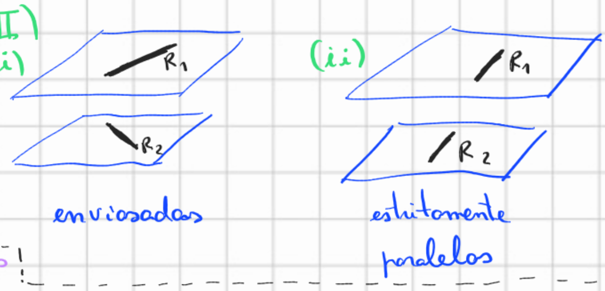


Intersetam-se num ponto

(II)

A interseção é uma das retas

(III)



(I) Se o sistema é possível e determinado então R_1 e R_2 são concorrentes (intersetam-se num ponto)

o nº de incógnitas

$$car(A) = car([A|B]) = 3$$

(II) Se o sistema é possível e indeterminado as retas são coincidentes

o nº de incógnitas

$$car(A) = car([A|B]) = 2 < 3$$

Obs: $n - car(A) = 3 - 2 = 1$

(III) As retas R_1 e R_2 não têm pontos em comum ($R_1 \cap R_2 = \emptyset$)
Isto acontece quando o sistema é impossível

(i) R_1 e R_2 são estritamente paralelas

$$car(A) = 2 < car([A|B]) = 3$$

(ii) R_1 e R_2 são enviesadas, ou seja, são não complanares

$$car(A) = 3 < car([A|B]) = 4$$

Inversa de uma matriz quadrada

- $A(n \times n)$ diz-se invertível (não singular) se existe $B(n \times n)$:

$$AB = BA = I_n$$

- B chamamos de A, caso contrário, (quando não existe B) dizemos que A é não invertível (singular)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível pois $\exists B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

tal que $AB = BA = I_2$

Teorema: Se $A(n \times n)$ é invertível então a inversa de A é única

Teorema: $A, B \ (n \times n)$ e $BA = I_n \Rightarrow AB = I_n$

Obs: Inversa de A denota-se por $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$

Propriedades:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Para A, B matrizes invertíveis

Método prático para calcular a inversa de A (n x n)

$A(n \times n)$ invertível

$$\left[A \;\middle|\; I_n \right] \underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{\text{método de} \\ \text{eliminação de} \\ \text{Gauss - Jordan}}} \left[I_n \;\middle|\; A^{-1} \right]$$

$A A^{-1} = I_n$

Teorema: Uma matriz $A(n \times n)$ é invertível se é equivalente por linhas a I_n

$$A \sim I_n$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Sai sempre no teste fazer uma destas :)

$$[A|I_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3' := L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3' := L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2' := \frac{1}{3} L_2 \\ L_3' := \frac{1}{2} L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1' := L_1 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5/3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_1' := L_1 + \frac{5}{3} L_3 \\ L_2' := L_2 - \frac{1}{3} L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/2 & 1/6 & 5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Confirmar se $A A^{-1} = I_3$!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3' := L_3 + 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2' := L_2 \times \frac{1}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3' := L_3 + 3L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3' := 2L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_1' := L_1 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1' := L_1 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_2' := L_2 + \frac{1}{2}L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right], \text{ logo } \boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}}$$

Verifica se $\boxed{A A^{-1} = I_n}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Critérios de invalidade

Teorema: Dada A $(n \times n)$ são equivalentes

1. A é invertível
2. A é equivalente por linhas a I_n, $A \sim I_n$
3. $car(A) = n$
4. $nul(A) = n - car(A) = 0$
5. $AX = 0$, possui apenas a solução trivial $(X = 0)$
6. Para cada B $(n \times 1)$, o sistema $AX = B$ tem uma única solução.
   Se A é invertível a solução é $X = A^{-1}B$

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Leftrightarrow I_n X = A^{-1}B$$
$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B$$