Aula 16

$\boxed{\text{Exercício 19, Ficha 4}}$!

Coordenadas de um vetor numa base

Seja $B = (\underbrace{X_1}_{1.º\text{ vetor}}, \underbrace{X_2}_{2.º\text{ vetor}}, \dots, \underbrace{X_n}_{n.º\text{ ésimo}})$, uma base ordenada de um e.v.

Teorema: Cada vetor $X \in V$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos da base, ou seja, existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

Estes coeficientes $a_1, \dots, a_n$ dizem-se as coordenadas de X na base B

<u>Notação:</u>

$$[X]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

<u>Exemplo</u>: 1 Verifique que, relativamente à base $B = ((1,1),(1,2))$

$$\boxed{[(0,1)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [(1,-1)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$(0,1) = a_1(1,1) + a_2(1,2)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

$(1,-1) = a'_1(1,1) + a'_2(1,2)$

$$\begin{cases} a'_1 + a'_2 = 1 \\ a'_1 + 2a'_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'_1 = 3 \\ a'_2 = -2 \end{cases}$$

Outra forma:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[(0,1)]_B = B^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$2 \times 2 \cdot 2 \times 1 = 2 \times 1$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

② No e.v. $\mathbb{R}^2$ tem-se que $B = ((1,2),(3,-1))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$

Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Determine as coordenadas de (x,y) na base B

$$[(x,y)]_B = \ ?$$

$$(x,y) = a_1(1,2) + a_2(3,-1)$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = x \\ 2a_1 - a_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{x+3y}{7} \\ a_2 = \dfrac{2x-y}{7} \end{cases}$$

Para qualquer vetor

$$[(x,y)]_B = \begin{bmatrix} \dfrac{x+3y}{7} \\ \dfrac{2x-y}{7} \end{bmatrix}$$

$$[(2,3)]_B = \begin{bmatrix} \dfrac{2+9}{7} \\ \dfrac{2\times 2-3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Coordenadas - Propriedades

V e.v., $\dim V = n$

$S = (X_1, \dots, X_n)$ base ordenada de V

- Para cada $i \in S$

$$[X_i]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow i$$

$X_1 = 1X_1 + 0X_2 + \dots 0X_n$

$X_2 = 0X_1 + 1X_2 + \dots 0X_n$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, (\dots)$$

- $[0]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

- $\left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_{B_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$B_c = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \boxed{0}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \boxed{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \boxed{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n]_S$$

$$= \alpha_1 [X_1]_S + \alpha_2 [X_2]_S + \dots + \alpha_n [X_n]_S$$

Exemplo:

$$S = ((1,-1),(1,1)) \text{ base de } \mathbb{R}^2$$

$$X_1 = (3,-2), \quad X_2 = (1,1)$$

$(3,-2) = a_1(1,-1) + a_2(1,1)$

$$(\leftarrow)\ \begin{cases} 3 = a_1 + a_2 \\ -2 = -a_1 + a_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 3 - a_2 \\ -2 = -3 + a_2 + a_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{5}{2} \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$[X_1]_S = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[X_2]_S = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \to a'_1 \\ \to a'_2 \end{array} \end{array}$$

⚠ Atenção!

$(1,1) = a'_1(1,-1) + a'_2(1,1)$

$$\begin{cases} 1 = a'_1 + a'_2 \\ 1 = -a'_1 + a'_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a'_2 = 1 \\ a'_1 = 0 \end{cases}$$

$$2X_1 + 3X_2 = 2(3,-2) + 3(1,1) = (9,-1)$$

$$[2X_1 + 3X_2]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(9,-1) = a''_1(1,-1) + a''_2(1,1)$

$$\begin{cases} 9 = a''_1 + a''_2 \\ -1 = -a''_1 + a''_2 \end{cases} \quad \begin{cases} a''_1 = 5 \\ a''_2 = 4 \end{cases}$$

Mudança de base

Exemplo:

$$S = ((1,1),(1,2)), \qquad \mathcal{T} = ((0,1),(1,-1)), \quad \text{bases ordenadas em } \mathbb{R}^2$$

Dado $X \in \mathbb{R}^2$: $[X]_T = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

ou seja:

$$X = a(0,1) + b(1,-1)$$

Então:

$$[X]_S = [a(0,1) + b(1,-1)]_S$$

$$= a[(0,1)]_S + b[(1,-1)]_S$$

→ Teríamos de calcular...

Ora $[(0,1)]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, [(1,-1)] = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$= \underline{\left[[(0,1)]_S \quad [(1,-1)]_S \right]} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$[X_S] = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de mudança de base}} [X]_{\mathcal{T}}$$

$$\boxed{\mathcal{T} \to S}$$

Caso geral:

Sejam S, $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$ e $X \in \mathcal{V}$

Questão: Qual a relação entre $[X]_S$ e $[X]_{\mathcal{T}}$?

$$[X]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \Rightarrow X = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_n Y_n$$

$$[X]_S = [a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_n Y_n]_S$$

$$\Leftrightarrow [X]_S = a_1 [Y_1]_S + a_2 [Y_2]_S + \ldots + a_n [Y_n]_S$$

$$\Leftrightarrow [X]_S = \underbrace{\big[[Y_1]_S \; [Y_2]_S \ldots [Y_n]_S \big]}_{M(\mathcal{T}, S)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{[X_{\mathcal{T}}]}$$

Teorema: Sejam S e $\mathcal{T} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ duas bases ordenadas de $\mathcal{V}$

- Para cada $X \in \mathcal{V}$,

!

$$[X]_S = M(\mathcal{T}, S) \, [X]_{\mathcal{T}}, \text{ onde}$$

$$M(\mathcal{T}, S) = \big[[Y_1]_S \; [Y_2]_S \cdots [Y_n]_S \big]$$

é uma matriz de mudança de base de $\mathcal{T}$ para S cujas colunas são as coordenadas na base S dos vetores da base $\mathcal{T}$

Invertibilidade da matriz de mudança de base

Teorema: Sejam S e $\mathcal{T}$ duas bases de $\mathcal{V}$. Então $M(\mathcal{T}, S)$ é invertível e

$$\big(M(\mathcal{T}, S)\big)^{-1} = M(S, \mathcal{T})$$

Demonstração:

Temos que mostrar que para $Y \in \mathbb{R}^n$, o sistema homogénio $MY = 0$ tem apenas a solução trivial

$Y \in \mathbb{R}^n$ $\qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$$Y = [X]_{\mathcal{T}}, \text{ onde } X \in \mathcal{V}$$

$\mathcal{T} = (X_1, \ldots, X_n)$

Vimos que

$$[X]_S = M [X]_{\mathcal{T}} = M\,Y = 0$$

$$\Rightarrow [X]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X = 0\,X_1 + \ldots + 0\,X_n$$

$$\Downarrow$$

$$X = 0$$

$$\Rightarrow Y = [X]_{\mathcal{T}} = [0]_{\mathcal{T}}$$

$\Rightarrow Y = 0$. O sistema $MY = 0$ tem apenas a solução trivial

Logo, M é invertível.

De $[X]_S = M [X]_{\mathcal{T}}$

$$\Downarrow$$

$$[X]_{\mathcal{T}} = \underbrace{M^{-1}}_{M(S,\mathcal{T})} [X]_S$$