Aula 09

Produto externo em $\mathbb{R}^3$

$X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

• Chama-se produto externo (ou vetorial) de X e Y ao vetor de $\mathbb{R}^3$

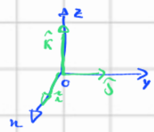
Não é preciso decorar

$$\boxed{X \times Y} = (x_2 y_2 - x_3 y_2 \,,\, x_3 y_1 - x_1 y_3 \,,\, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

$X = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \hat{i} + x_2 \hat{j} + x_3 \hat{k}$, onde $\hat{i} = (1,0,0)$

$\hat{j} = (0,1,0)$

$\hat{k} = (0,0,1)$



Resolvendo usando um "determinante simbólico"

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \underset{\text{1ª linha}}{\overset{\text{T.L.}}{=}} (-1)^{1+1} \times \hat{i} \times \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \times \hat{j} \times \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \times \hat{k} \times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2)\,\hat{i} - (x_1 y_3 - x_3 y_1)\,\hat{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\hat{k}$$

$$= \left(x_2 y_3 - x_3 y_2 \,,\, y_1 x_3 - x_1 y_3 \,,\, x_1 y_2 - y_1 x_2\right) = X \times Y$$

Exemplo:

$X = (1, 3, 4)$ $\quad Y = (1, -1, 2)$ $\quad \overbrace{X \times Y}^{\text{"X externo Y"}} = \,?$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \hat{j} \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(6+4) - \hat{j}\,(2-4) + \hat{k}\,(-1-3)$$

$$= 10\,\hat{i} + 2\,\hat{j} - 4\,\hat{k}$$

$$= (10, 2, -4)$$

Propriedades do produto-externo

$X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 0 vetor nulo de $\mathbb{R}^3$

- $X \times Y = -(Y \times X)$

- (i) $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$
  (ii) $(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z$

"Faz sentido" pela regra dos determinantes

- $\alpha (X \times Y) = (\alpha X) \times Y = X \times (\alpha Y)$

- $X \times X = 0$

- $X \times 0 = 0 \times X = 0$

- Formulas de Lagrange:
  (i) $(X \times Y) \times Z = (Z \cdot X) Y - (Z \cdot Y) X$
  (ii) $X \times (Y \times Z) = (X \cdot Z) Y - (X \cdot Y) Z$

- Identidade de Jacobi: $X \times (Y \times Z) + Y \times (Z \times X) + Z \times (X \times Y) = 0$

Interpretação gráfica - vetor produto externo

Proposição: Sejam $X, Y \in \mathbb{R}^3$

→ O vetor $X \times Y$ é ortogonal a X e a Y e $\|X \times Y\| = \|X\| \, \|Y\| \sin \theta$, onde θ é o angulo entre X e Y

Produto Misto em $\mathbb{R}^3$

$X = (x_1, x_2, y_3)$ $\quad Y = (y_1, y_2, y_3)$ $\quad Z = (z_1, z_2, z_3)$

→ Chama-se produto misto de X, Y, Z ao escalar

$$\boxed{(X \times Y) \cdot Z = X \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}$$

Consequências das propriedades do produto externo em $\mathbb{R}^3$

- Como $(X\times Y)\cdot X = 0$ então $X\times Y$ é ortogonal a X
- Como $(X\times Y)\cdot Y = 0$ então $X\times Y$ é ortogonal a Y

Demonstração

$$(X\times Y)\cdot X \overset{\text{produto misto}}{=} X\cdot(Y\times X)$$
$$= X\cdot(-X\times Y) = -(X\cdot(X\times Y))$$
$$= -(\underbrace{X\times X}_{0})\cdot Y = 0$$

Distâncias

A distância entre dois pontos P e Q de $\mathbb{R}^n$ é a norma do vetor $\overrightarrow{PQ}$,

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

Em particular:

$P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
$Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)$

$$d(PQ) = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + \dots + (y_n-x_n)^2}$$

Dado um ponto, uma reta ou plano $\mathcal{F}$ e um ponto, reta ou plano $\mathcal{P}$, a distância entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$ é

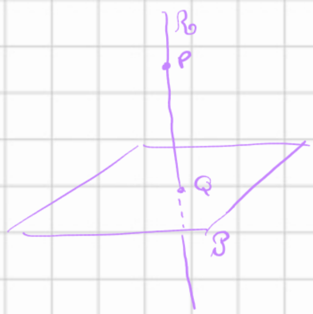
$$\boxed{d(\mathcal{F},\mathcal{P}) = \min\{d(P,Q),\ P\in\mathcal{F}, Q\in\mathcal{P}\}}$$

- Se $\mathcal{F}\cap\mathcal{P} \neq 0 \Rightarrow d(\mathcal{F},\mathcal{P}) = 0$

Interessa apenas ver o que acontece quando $\mathcal{F}\cap\mathcal{P} = \emptyset$

Distância de um ponto a um plano

1ª forma → Recorrendo ao ponto do plano mais próximo do ponto considerado

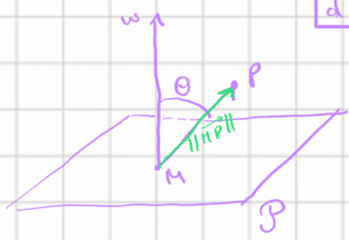


→ Dado um plano $\mathcal{P}$ e um ponto $P \notin \mathcal{P}$ existe uma única reta R perpendicular a $\mathcal{P}$ e contendo o ponto P. Esta reta intersecta $\mathcal{P}$ em Q. Assim,

$$d(P,\mathcal{P}) = d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$$

$\boxed{2^{a} \text{ forma}}$ → Recorrendo a um ponto arbitrário do plano e à equação geral do plano

$\boxed{d(P, \mathcal{P}) = ?}$



$\theta = \measuredangle(w, \overrightarrow{MP})$

→ A expressão geral será:

$$\boxed{d(P, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot w|}{\|w\|}}$$

Demonstração:

$$|\cos\theta| = \frac{\text{cateto adj.}}{\text{hipotenusa}} = \frac{d(P, \mathcal{P})}{\|\overrightarrow{MP}\|}$$

$$\Rightarrow d(P, \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{MP}\| \times |\cos\theta| = \|\overrightarrow{MP}\| \times \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot w|}{\|\overrightarrow{MP}\| \|w\|} = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot w|}{\|w\|}$$

$v = w$
$u = \overrightarrow{MP}$

$$\cos\theta = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \|v\|} \overset{?}{=} \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot w|}{\|\overrightarrow{MP}\| \|w\|}$$