Aula 12

Combinação linear

$x \in \mathcal{V}$ é uma combinação linear de $X_1, X_2, \dots X_k \in \mathcal{V}$ se
$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k$

Espaço gerado

Chama-se espaço gerado por $X_1, X_2, \dots, X_k$ ao conjunto denotado:

$$\langle X_1, X_2 \dots X_k \rangle$$

*formado por todas as combinações lineares de $X_1, X_2, \dots, X_k$

→ Este conjunto é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$

$$\langle X_1, X_2, \dots, X_k \rangle = \{ \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k ,\ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

- Dizemos que $\{ X_1, X_2, \dots, X_k \}$ gera $\langle X_1, X_2, \dots, X_k \rangle$ ou que é um conjunto gerado de $\langle X_1, X_2, \dots, X_k \rangle$

Exercício:

Determine o subespaço gerado de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,-1,0,2)$, $(0,1,2,3)$

$$\langle (1,-1,0,2), (0,1,2,3) \rangle$$

$$(x,y,z,w) \in \langle (1,-1,0,2), (0,1,2,3) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : (x,y,z,w) = \alpha_1 (1,-1,0,2) + \alpha_2 (0,1,2,3)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = x \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = y \\ 2\alpha_2 = z \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = w \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 0 & 2 & z \\ 2 & 3 & w \end{array}\right]$$

→ Seja a matriz ampliada de um sistema possível

$$\underset{\substack{L_2' := L_2 + L_1 \\ L_4' := L_4 - 2L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 3 & w-2x \end{array}\right] \underset{\substack{L_3' := L_3 - 2L_2 \\ L_4' := L_4 - 3L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & z-2y-2x \\ 0 & 0 & w-5x-3y \end{array}\right]$$

Logo, apenas é possível sse $z - 2y - 2x = 0 \wedge w - 5x - 3y = 0$

$$\langle (1,-1,0,2), (0,1,2,3) \rangle = \{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z = 2y + 2x \wedge w = 5x + 3y \}$$

$$= \{ (x, y, 2y+2x, 5x+3y), x, y \in \mathbb{R} \}$$