Folha 5

1

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

$$U_\lambda = \{ X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I) X = 0 \}$$

$$U_{\lambda=0} = N(A)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=0} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y = 0 \wedge z = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Logo, $A (3 \times 3)$ não é diagonalizável pois só apresenta 1 vetor próprio l.i.

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$, como A é uma matriz triangular os valores próprios de A são 1, 3 e -2

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(3-\lambda)(2+\lambda) \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & z & \\ & & \downarrow & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 8y - 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4} z \\ y = \frac{3}{8} z \end{cases}$$

$$U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = \frac{3}{4} z \wedge y = \frac{3}{8} z \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} 3/4\, z \\ 3/8\, z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/8 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$U_{\lambda=3} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 5z \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{2}z \end{cases}$$

$$U_{\lambda=3} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y = \frac{5}{2}z \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2\, z \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$U_{\lambda=-2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=-2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Vetores própio associados a:

- $\lambda = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$
- $\lambda = 3 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\lambda = -2 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

A matriz A (3x3) é diagonalizável, pois tem 3 vetores próprios associados a valores próprios distintos, logo l.i.

Seja $B = \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ base de vetores própios, v_1, v_2 e v_3 respetivamente

Seja $P = [v_1 | v_2 | v_3]$, uma matriz diagonalizante de A.

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$, corresponde matriz diagonal

Outra matriz diagonalizante de A seria:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\lambda=-2$ $\lambda=1$ $\lambda=3$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (3-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) \times \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$
$$= (3-\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

Valores próprios: $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)^2(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda \in \{1,3\}$

$\boxed{\lambda = 1}$

$$(A-1I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = -2x_4 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{\lambda = 3}$

$$(A-3I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=3} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Vetores próprios associados a:

$\bullet\ \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \bullet\ \lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Logo, como A é uma matriz 4×4 e só existem no máximo 3 vetores próprios l.i, conclui-se que A não é diagonalizável.

d)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(-\lambda + \lambda^2 + 4) - 2(-2\lambda + 2) + 3(-4 + 1 - \lambda)$$

$$= -4\lambda + 4\lambda^2 + 16 + \lambda^2 - \lambda^3 - \cancel{4\lambda} + \cancel{4\lambda} - 4 - 9 - 3\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 5 & -7 & 3 \\ 1 & & -1 & 4 & -3 \\ \hline & -1 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 4\lambda - 3)$$

$$-\lambda^2 + 4\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-1) \times (-3)}}{2 \times (-1)}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Leftrightarrow \lambda = 3 \vee \lambda = 1$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 3\}$, logo 1 e 3 são os valores próprios de A

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{bmatrix} \qquad U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$U_{\lambda=3} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x = -\frac{5}{3} z \\ y = -\frac{2}{3} z \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_{\lambda=3} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} z \\ -\frac{2}{3} z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -5/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{\text{Outra forma de resolver:}}$

$$1 \leq \dim U_{\lambda=3} \leq 2 \Leftrightarrow \dim U_{\lambda=3} = 1 \vee \dim U_{\lambda=3} = 2$$

$$\dim U_{\lambda=3} = \dim N(A - 3I)$$
$$= n - car(A - 3I)$$
$$= 3 - 2$$
$$= 1$$

Logo, A não é diagonalizável pois é uma matriz 3x3 e tem no máximo 2 vetores próprios l.i.

e)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \underset{\substack{T.L. \\ 1.^a \text{ coluna}}}{=} (2-\lambda) \times \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) = (2-\lambda)(3-\lambda)^2 - (2-\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2) - 2 + \lambda$$
$$= 18 - 12\lambda + 2\lambda^2 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + \lambda$$
$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16$$
$$= (\lambda - 2)(-\lambda^2 + 6\lambda - 8)$$
$$= (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$
$$= (\lambda - 2)^2 (\lambda - 4)$$

	-1	8	-20	16
2		-2	12	-16
	-1	6	-8	0

$$-\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \times (-1) \times (-8)}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-6 \pm 2}{-2} \Leftrightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = 2$$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = 4$

$\Leftrightarrow \lambda \in \{2,4\}$, logo 2 e 4 são os valores próprios de A

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow y = -z$$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -z \\ z \end{bmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$U_{\lambda=4} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}$$

$2-0 \quad 1-1 \quad 1+1$

$$U_{\lambda=4} = \left\{ \begin{bmatrix} -z \\ z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Vetores próprios associados aos valores próprios:

- $\lambda = 2 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $\lambda = 4 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Seja $P = [\,v_1 \mid v_2 \mid v_3\,]$ uma matriz diagonalizante de A

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \lambda=2 \quad \lambda=2 \quad \lambda=4 \end{array} \Rightarrow P^{-1}AP = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}} \to \text{Matriz diagonal!}$$

f)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 3 & 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -\lambda & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(4\lambda + \lambda^2 + 2) - 2(-4-\lambda+2) + 3(-2-2\lambda)$$

$$= 4\lambda + \lambda^2 \cancel{+2} - 4\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{-2\lambda} \cancel{+4} + \cancel{2\lambda} \cancel{-6} - 6\lambda$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 2\lambda$$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ $\qquad$ $= -\lambda(\lambda^2 + 3\lambda + 2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -\lambda(\lambda+2)(\lambda+1)$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4\times 2}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-4}{2} \vee \lambda = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = -1$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2,-1,0\}$, logo -2, -1 e 0 são os valores próprios de A

Logo, como A é uma matriz 3×3 e tem 3 valores próprios distintos logo é diagonalizável.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 3 & 1 & -4-\lambda \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = -2}$

$$(A+2I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases}$$

$$U_{\lambda=-2} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{\lambda = -1}$

$$(A+1I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{\lambda = 0}$

$$(A-0I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$$U_{\lambda=0} = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Vetores próprios associados dos valores próprios associados:

- $\lambda = -2 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\lambda = -1 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\lambda = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Seja $P=[v_1|v_2|v_3]$ uma matriz diagonalizante de A

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\2&1&1\end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=\boxed{\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}} \rightarrow \text{Matriz diagonal semelhante a } A$$

$\boxed{2}$

a)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\2&-1-\lambda&1\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-1-\lambda&1\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left((3-\lambda)(-1-\lambda)-1\right)$$

$$=(1-\lambda)(-3-3\lambda+\lambda+\lambda^2-1)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-4)$$

Quando $\lambda=1 \Rightarrow p(\lambda)=0$, logo 1 é um valor próprio de A

$$U_{\lambda=1}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3: \begin{bmatrix}0&0&0\\2&-2&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1/2&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&5/2&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \quad \begin{cases}x=-\frac{5}{2}z\\y=-2z\end{cases}$$

$$U_{\lambda=1}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3: x=-\frac{5}{2}z \wedge y=-2z\right\}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}z\\-2z\\z\end{bmatrix}, z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\langle\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\-2\\1\end{bmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{bmatrix}5\\4\\-2\end{bmatrix}\right\rangle$$

b)

C.A.

$$p(\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-4)=(1-\lambda)(1-\sqrt{5}-\lambda)(1+\sqrt{5}-\lambda)$$

$\lambda^2-2\lambda-4=0$

$\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\times(-4)}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{2\pm2\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda=1-\sqrt{5} \vee \lambda=1+\sqrt{5}$

$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \vee \lambda=1-\sqrt{5} \vee \lambda=1+\sqrt{5}$

Logo, $\{1, 1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\}$ são valores próprios de A.

Conclui-se assim, como A é uma matriz 3x3 e tem 3 valos próprios logo é diagonalizável.

$$\boxed{\lambda = 1-\sqrt{5}}$$

$$\left(A-(1-\sqrt{5})I\right)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2+\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2+\sqrt{5} & 0 \end{array}\right] \underset{(\dots)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{5}+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = (-\sqrt{5}-2)z \end{array}\right.$$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$U_{\lambda=1-\sqrt{5}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ (-\sqrt{5}-2)z \\ z \end{bmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{5}-2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$\boxed{\lambda = 1+\sqrt{5}}$$

(...) Fazíamos a mesma coisa (...)

$$U_{\lambda=1+\sqrt{5}} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5}-2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Sejam os vetores próprios associados aos valores próprios:

- $\lambda = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$
- $\lambda = 1-\sqrt{5} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{5}-2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\lambda = 1+\sqrt{5} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5}-2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Seja $P = [v_1 | v_2 | v_3]$ uma matriz diagonalizante de A

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & -\sqrt{5}-2 & \sqrt{5}-2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}} \rightarrow \text{Matriz diagonal semelhante a A!}$$

3

$A\ (n \times n)$ é singular se $\det(A) = 0$

Se 0 for um valor próprio de A, $\det(A - 0I) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$, logo A é singular

Por outro lado, se 0 não for um valor próprio de A,

$$\det(A - 0I) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \text{, logo } A \text{ é não singular}$$

Logo, A é singular se 0 for um valor próprio.

4

Para mostrar que A e A^T têm os mesmo valores próprios basta mostrar que:

$$P_{A^T}(\lambda) = P_A(\lambda)$$

$$\begin{aligned} P_{A^T}(\lambda) &= \det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I^T) \\ &= \det((A - \lambda I)^T) \\ &= \det(A - \lambda I) \\ &= P_A(\lambda) \qquad \text{c.q.m.} \end{aligned}$$

5

a) Se λ é um valor próprio de A e x é o vetor próprio associado a λ então $\boxed{Ax = \lambda x.}$

$\forall k \in \mathbb{N}$:

$$A^k x = A^{k-1} \times \underline{Ax} = A^{k-1} \times \boxed{\lambda x} = \lambda \times A^{k-2} \times Ax = (\ldots) = \lambda^k x$$

$$\boxed{A^k x = \lambda^k x}$$

e portanto λ^k é um valor próprio de A^k e x é um vetor próprio associado a λ^k

b)

λ é v.p. de $A \Rightarrow AX = \lambda X \xrightarrow{\text{Quero...}} A^{-1}X = \frac{1}{\lambda} X$

A é invertível $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\lambda X$

$\Leftrightarrow X = A^{-1}X \times \lambda$

$\Leftrightarrow X \times \lambda^{-1} = A^{-1}X$

$\Leftrightarrow A^{-1}X = \frac{1}{\lambda} X$

Logo, $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de A^{-1}.

$\boxed{6}$

Para AB e BA serem semelhantes: $\exists P$ invertível: $P^{-1}ABP = BA$

Como A é invertível $\Rightarrow P = A$

$P^{-1}ABP = BA \Rightarrow \cancel{A^{-1}}\cancel{A}BA = BA \Leftrightarrow BA = BA$

c.q.m.

$\boxed{7}$

a) Como $A^T = A$ têm os mesmos valores próprios, provado em $\boxed{4}$, e como A é diagonalizável, A^T é semelhante a uma matriz diagonal de A, logo A^T é diagonalizável $\Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^T = PDP^{-1}$

b) A é diagonalizável $\Rightarrow A = PDP^{-1}$

$A = PDP^{-1}$

$\Leftrightarrow A^k = (PDP^{-1})^k$

$\Leftrightarrow A^k = PD^kP^{-1}$, logo A^k é diagonalizável

c) $A = PDP^{-1}$

$\Leftrightarrow I_n = A^{-1}PDP^{-1}$, como P é invertível e D é uma matriz diagonal logo também é invertível

$\Leftrightarrow I_n P = A^{-1}PD$

$\Leftrightarrow PD^{-1} = A^{-1}P$

$\Leftrightarrow PD^{-1}P^{-1} = A^{-1}$, logo A^{-1} é diagonalizável

$\boxed{8}$

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-2)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda)$$

C.A.

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-4\times4}}{2}$

$\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 4$

$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2, 4\}$, sendo 1, 2 e 4 valores próprios de A

$\boxed{\lambda = 1}$

$$(A - 1I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 2}$

$$(A - 2I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = 4}$

$$(A - 4I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} x_1 = \frac{7}{2}x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=4} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{7}{2}x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b)

A é diagonalizável, pois é uma matriz 3x3 e tem 3 valores próprios.

Sejam v_1, v_2 e v_3, vetores próprios de A.

Seja $P = [v_1 | v_2 | v_3]$, uma matriz diagonalizante de A

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ tal que } P^{-1}AP = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}} \rightarrow \text{Matriz diagonal!}$$

c) Como A é diagonalizável: $A = PDP^{-1}$, sendo D a matriz diagonal calculada na alínea anterior

Logo, $A^5 = (PDP^{-1})^5 = PD^5P^{-1}$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/6 \end{array}\right] \to P^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = P\, D^5\, P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 1024 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 32 & 7168 \\ 1 & 0 & -4096 \\ 1 & 0 & 2048 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6}$$

$$= \begin{bmatrix} 192 & -6882 & 7068 \\ 0 & 4098 & -4092 \\ 0 & -2046 & 2052 \end{bmatrix} \times \frac{1}{6} = \begin{bmatrix} 32 & -1147 & 1178 \\ 0 & 683 & -682 \\ 0 & -341 & 342 \end{bmatrix} = A^5$$

$\boxed{9}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(b-\lambda) - a = b - \lambda - b\lambda + \lambda^2 - a$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (1+b)\lambda + (b-a)$$

Como 0 é um valor próprio de A $\Rightarrow p_A(0) = 0 \Leftrightarrow 0 - 0 + (b-a) = 0$

$\Leftrightarrow a = b \Rightarrow p_A(\lambda) = \lambda^2 - (1+a)\lambda + 2a$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{bmatrix}$$

Como v_1 é um vetor próprio de A:

$$A v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_1 = 2a \end{cases} \Rightarrow a = 1, \text{ logo como } a = b \Rightarrow a = 1 \wedge b = 1$$

$\boxed{10}$

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & k+1 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ k & k+1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(k+1-\lambda) + k$$

$$= -k\lambda - \lambda + \lambda^2 + k$$

$$= \lambda^2 - (k+1)\lambda + k$$

$$p_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = \frac{k+1 \pm \sqrt{(k+1)^2 - 4k}}{2}$$

$$\iff \lambda = \frac{k+1 \pm \sqrt{(k-1)^2}}{2} \iff \lambda = \frac{k+1 \pm |k-1|}{2}$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{k+1 \pm (k-1)}{2}, \text{ se } k \geq 1 \\ \lambda = \dfrac{k+1 \pm (1-k)}{2}, \text{ se } k < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = k \vee \lambda = 1, \text{ se } k \geq 1 \\ \lambda = 1 \vee \lambda = k, \text{ se } k < 1 \end{cases}$$

$\iff \lambda = 1 \vee \lambda = k \iff \lambda \in \{1, k\}$, logo 1 e k são os valores próprios de A.

b)

$\boxed{\lambda = 1}$ $\qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$(A - 1\lambda)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ k & k & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow x_1 = -x_2$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ k & k+1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$U_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \rightsquigarrow v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\lambda = k}$, para $k \neq 1$

$$(A - kI)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -k & -1 & 0 \\ k & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow x_2 = -k x_1$$

$$U_{\lambda=k} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -k x_1 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -k \end{bmatrix} \right\rangle \rightsquigarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -k \end{bmatrix}$$

c)

Para A, matriz 2×2, ser diagonalizável, basta que tenha dois valores próprios distintos, como k e 1 são valores próprios de $A \Rightarrow k \neq 1 \Rightarrow k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Outra forma: $c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{?}{\Rightarrow} c_1 = c_2 = 0$

$$\begin{cases} -c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - kc_2 = 0 \end{cases}$$

, para c_1 e c_2 serem l.i. este sistema admite apenas a solução trivial

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} \neq 0 \iff k - 1 \neq 0 \iff k \neq 1$$

d) Para $k \neq 1$:

Seja $P = [v_1 | v_2]$ uma matriz diagonalizante de A.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -k \end{bmatrix} \text{, tal que: } P^{-1}AP = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}} \rightarrow \text{Matriz diagonal!}$$

e)

$k = -1$

Como A é diagonalizável: $A = PDP^{-1}$, sendo D a matriz diagonal calculada na alínea anterior

$$A^{2013} = (PDP^{-1})^{2013} = PD^{2013}P^{-1}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\det(P)} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{2013} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{2013} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{2013} = \begin{bmatrix} 1^{2013} & 0 \\ 0 & (-1)^{2013} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$A^{2013} = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

11 Muitas contas, e é mais do mesmo...

12

13

Fazer depois!

$\boxed{14}$

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (1-\lambda)(1+\lambda)$

$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = -1$

Como A é simétrica, logo é ortogonalmente diagonalizável.

$\boxed{\lambda = -1}$ $\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$(A - (-1)I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow x_1 = -x_2$

$U_{\lambda=-1} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\boxed{\lambda = 1}$

$(A - 1I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow x_1 = x_2$

$U_{\lambda=1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, vetores próprios de uma matriz simétrica associados a valores próprios diferentes $\Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$

$v_1' = \frac{1}{\|v_1\|} \times v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ $\quad v_2' = \frac{1}{\|v_2\|} \times v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Como v_1' é colinear a v_1 e v_2' é colinear a $v_2 \Rightarrow v_1' \cdot v_2' = 0$

Sendo $\|v_1'\| = 1$ e $\|v_2'\| = 2$

Seja $P = [v_1' \mid v_2']$ uma matriz diagonalizante ortogonal de P

$\hookrightarrow$ cujas colunas são uma base o.n. de $\mathbb{R}^2$ formada por vetores próprios de A (2x2)

$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, tal que: $P^T A P = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

$\hookrightarrow$ Matriz diagonal

É ortogonal $\Rightarrow P^T P = I \Rightarrow P^{-1} = P^T$

b)

$$A=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix} \qquad P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&-1&-1\\-1&-\lambda&-1\\-1&-1&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&-1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-1&-\lambda\\-1&-1\end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)(\lambda^2-1)+(\lambda-1)-(1-\lambda)$$

$$=-\lambda^3+\lambda+2\lambda-2$$

$$=-\lambda^3+3\lambda-2 = (1-\lambda)(-\lambda^2-\lambda+2)$$

$$=(1-\lambda)(2+\lambda)(1-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)^2(2+\lambda)$$

C.A.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$-\lambda^2-\lambda+2=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-1)\times 2}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda=-2 \vee \lambda=1$$

$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda=1 \vee \lambda=-2$, logo 1 e -2 são os valores próprios de A

$\boxed{\lambda=1}$

$$(A-1I)X=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\\-1&-1&-1&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \rightsquigarrow x_1=-x_2-x_3$$

$$U_{\lambda=1}=\left\{\begin{bmatrix}-x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, x_2,x_3\in\mathbb{R}\right\}=\left\langle \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_2}\right\rangle$$

$\boxed{\lambda=-2}$

$$(A-(-2)I)X=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&0\\-1&2&-1&0\\-1&-1&2&0\end{array}\right] \underset{(\ldots)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \quad \begin{cases}x_1=x_3\\x_2=x_3\end{cases}$$

$$U_{\lambda=-2}=\left\langle \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{v_3}\right\rangle$$

Como a matriz A é simétrica, logo é ortogonalmente diagonalizável.

Sejam $v_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$ e $v_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ vetores próprios l.i. associados ao valor próprio $\lambda=1$

e $v_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda=-2$

Como, vetores próprios de matrizes simétricas associados a valores próprios distintos são ortogonais:

$$\begin{cases}v_1\cdot v_3=0\\v_2\cdot v_3=0\end{cases}$$

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|v_1'\| = 1$$

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \|v_2'\| = 1$$

, como $\begin{cases} v_1 \cdot v_3 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v_1' \cdot v_3' = 0 \\ v_2' \cdot v_3' = 0 \end{cases}$

$$v_3' = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \|v_3'\| = 1$$

Seja $P = [\, v_1' \mid v_2' \mid v_3' \,]$ uma matriz diagonalizante ortogonal de A, cujas colunas são uma base o. n. de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A (3x3)

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}, \text{ tal que: } P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 4\right)$$

$$\cancel{4} - 4\lambda + \lambda^2$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda)$$
$$= -\lambda^2(\lambda - 4)$$

$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 4$

$\boxed{\lambda = 0}$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$(A - 0I)x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow x_2 = -x_3$$

$$U_{\lambda=0} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{\lambda = 4}$

$$(A - 4I)x = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=4} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Sejam $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vetores próprios l.i. associados ao valor próprio $\lambda = 0$

e $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 4$

Como A é uma matriz simétrica, logo é ortogonalmente diagonalizável.

Como os vetores próprios de uma matriz simétrica associados a valores próprios diferentes são ortogonais:

$$\begin{cases} v_1 \cdot v_3 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \end{cases}$$

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \|v_1'\| = 1$$

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \|v_2'\| = 1 \qquad , \text{ como } \begin{cases} v_1 \cdot v_3 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1' \cdot v_3' = 0 \\ v_2' \cdot v_3' = 0 \end{cases}$$

$$v_3' = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \|v_3'\| = 1$$

Seja $P = [\, v_1' \mid v_2' \mid v_3' \,]$ uma matriz diagonalizante ortogonal de A, cujas colunas são uma base o.n. de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A (3×3)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \text{ tal que: } P^T A P = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}} \to \text{Matriz diagonal}$$

$\boxed{15}$

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & -4 \\ -4 & 1-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\dots) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 9\lambda - 81$$
$$= (\lambda - 9)(-\lambda^2 + 9)$$
$$= (\lambda - 9)(\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

C.A.

	-1	9	9	-81
9		-9	0	81
	-1	0	9	0

$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-3, 3, 9\}$, logo -3, 3 e $\boxed{9}$ são valores próprios de A.

b)

$\boxed{\lambda = -3}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$(A - (-3)I)X = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] \underset{(\dots)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=-3} = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{\lambda = 3}$

$$(A-3I)X=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} X_1 = \frac{1}{2}X_3 \\ X_2 = -X_3 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=3} = \left\langle \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{\lambda = 9}$

$$(A-9I)X=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \underset{(\dots)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} X_1 = -X_3 \\ X_2 = \frac{1}{2}X_3 \end{cases}$$

$$U_{\lambda=9} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Sejam v_1, v_2, v_3 vetores próprios de A associados, respetivamente, aos valores próprios -3, 3 e 9.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e \quad v_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como A é uma matriz simétrica:

- é ortogonalmente diagonalizável
- os vetores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais

Logo, $\begin{cases} v_1 \cdot v_2 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \\ v_1 \cdot v_3 = 0 \end{cases}$

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \|v_1'\| = 1$$

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \|v_2'\| = 1 \quad , \text{ como } \begin{cases} v_1 \cdot v_2 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \\ v_1 \cdot v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1' \cdot v_2' = 0 \\ v_2' \cdot v_3' = 0 \\ v_1' \cdot v_3' = 0 \end{cases}$$

$$v_3' = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \|v_3'\| = 1$$

Seja $P = [v_1' \mid v_2' \mid v_3']$ uma matriz diagonalizante ortogonal de A, cujas colunas são uma base o.n. de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A (3x3)

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \text{ tal que: } P^T A P = \boxed{\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}} \Rightarrow \text{Matriz diagonal}$$

$\boxed{16}$

$\boxed{\lambda = 1}$

Sejam $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vetores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 1$.

v_1 e v_2 são l.i? $\Rightarrow \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$?

$\alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$, logo v_1 e v_2 são l.i, $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $U_{\lambda=1}$

Assim, $(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (0,1,1)$ é possível e determinado

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 \end{array}\right] \rightsquigarrow$$

Possível e determinado sse $x_3 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_3 = x_2$

$$U_{\lambda=1} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_2 \right\}$$

b)

A é simétrica $\Rightarrow$ ortogonalmente diagonalizável $\Rightarrow$ diagonalizável

Seja $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ um vetor próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = -3$

Seja $P = [v_1 | v_2 | v_3]$ uma matriz diagonalizante de A

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ tal que } P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = D$$

Se $P^{-1} A P = D \Leftrightarrow A = P D P^{-1}$

Calcular P^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right] \rightarrow P^{-1}$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Exercícios Suplementares

→ Fazer Depois!