Aula 22

Quadráticas (temos uma folha com tudo)

Equação geral de uma quadrática

$$X^T A X + B X + \mu = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

A é uma matriz simétrica 3×3

$B \rightarrow 1 \times 3$

$\mu \rightarrow \mathbb{R}$

A partir da equação geral podemos obter as equações reduzidas das quadráticas da mesma forma que se fez para as cónicas

1. • Rotação dos eixos (diagonalização ortogonal de A)
2. • Translação dos eixos

Exercícios

Determine as interseções com os planos coordenados ($x=0$, $y=0$, $z=0$)

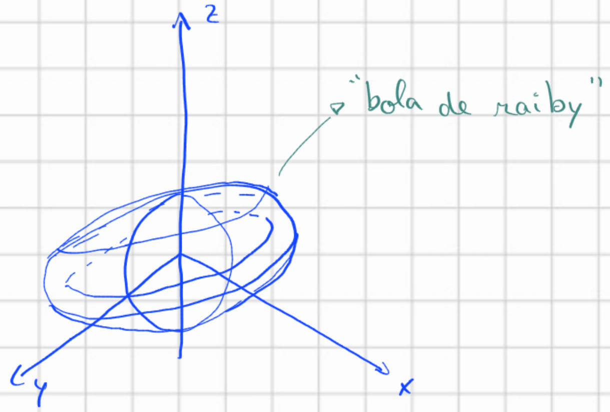
Equação reduzida de uma $\boxed{\text{elipsóide}}$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}, \quad a,b,c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$x = 0$; $\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$ Elipse

$y = 0$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow$ Elipse

$z = 0$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow$ Elipse



Quando $a = b = c$, temos uma esfera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Equações reduzidas dos hiperbolóides

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

$x = 0$; $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \to$ hipérbole

$y = 0$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \to$ hipérbole

$z = 0$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \to$ elipse

(A curva que aparece mais vezes é uma hipérbole)

Logo, $\boxed{\text{Hiperbolóide de uma folha}}$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

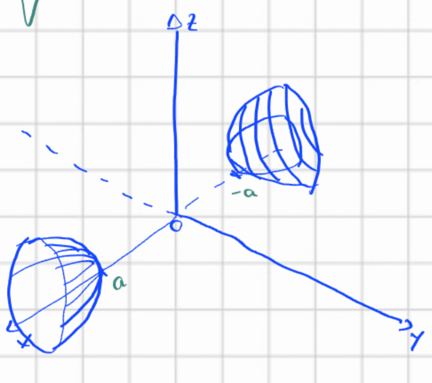
$x = 0$; $-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \to \emptyset$

$y = 0$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \to$ hipérbole $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Hiperbolóide de duas folhas}}$

$z = 0$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \to$ hipérbole

$x = k$; $\frac{k^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k - a^2}{a^2}$, $k - a^2 > 0$

$\Leftrightarrow k > a \lor k < -a$

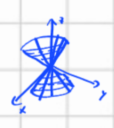


$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0} \Rightarrow \boxed{\text{Cone}}$$

$x = 0$; $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{bz}{c} \lor y = -\frac{bz}{c}$

$y = 0$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{c} z \lor x = -\frac{az}{c}$

$z = 0$; $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \land y = 0$, logo $(x, y, z) = (0,0,0)$

$z = k$; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \to$ 

Exemplo:

$$-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz - 24 = 0$$

Valores próprios: 12, 6, −24

Divide-se para xy e yx, etc...

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} & \begin{bmatrix} -8 & \boxed{16} & -2 \\ \boxed{16} & -8 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 24 \Leftrightarrow X^T A X = 24$$

Não existem termos sozinhos por isso ignoramos a matriz B!

$$X = P\bar{X}, \text{ onde } \bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix}$$

$$(P\bar{X})^T A (P\bar{X}) = 24 \Leftrightarrow \bar{X}^T (\underbrace{P^T A P}) \bar{X} = 24$$

→ A é ortogonalmente diagonalizável pois é simétrica!

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{bmatrix} \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = 24$$

$$\Leftrightarrow 12\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - 24\bar{z}^2 = 24$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{y}^2}{4} - \frac{\bar{z}^2}{1} = 1$$

$\bar{x} = 0$; $\frac{\bar{y}^2}{4} - \bar{z}^2 = 1$ → Hipérbole

$\bar{y} = 0$; $\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{z}^2 = 1$ → Hipérbole

$\bar{z} = 0$; $\frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{y}^2}{4} = 1$ → Elipse

$\bar{z} = k$ → Elipse

Logo, hiperbolóide de uma folha

$$\mathcal{R}\big(\underset{(0,0,0)}{O};\underbrace{\{e_1, e_2, e_3\}}\big) \rightsquigarrow \mathcal{R}'(O, B)$$

$(1,0,0)$
$(0,1,0)$
$(0,0,1)$

↓ base dos vetores próprios

Equações reduzidas de parabolóides

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

$y=0$; $z = \frac{1}{a^2}x^2$ → Parábola

$x=0$; $z = \frac{1}{a^2}y^2$ → Parábola

$z=0$; $0 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0$ → $(0,0)$

⇒ Parabolóide elítico

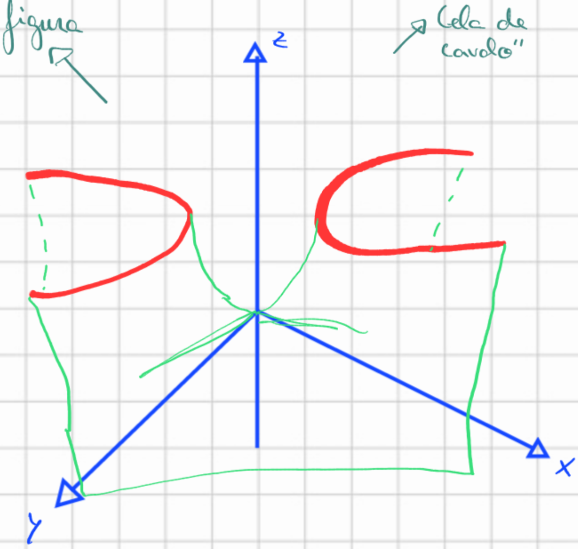
$z=k$, $k>0$; $k = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ → Elipse

$z=k$, $k<0$; $k = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ $\emptyset$

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

Ver figura

"Sela de cavalo"



$y=0$; $z = \frac{1}{a^2}x^2$ ⇒ Parábola (cima)

$x=0$; $z = -\frac{1}{b^2}x^2$ ⇒ Parábola (baixo)

$z=0$; $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}x \vee y = -\frac{b}{a}x$

$z=k$, $k>0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k$ ⇒ hipérbole

→ Parabolóide hiperbólico

Quádricas degeneradas: os cilindros

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $z \in \mathbb{R}$

→ Cilindro elíptico

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$, $z \in \mathbb{R}$

→ Cilindro hiperbólico

$\boxed{y = ax^2}$

→ Cilindro parabólico