Aula 23

Aplicações Lineares

→ Sejam V e W dois e.v.

→ Uma aplicação linear (transformação linear) de V em W é uma aplicação

$$\begin{aligned} \phi : V &\longrightarrow W \\ X &\longrightarrow \phi(X) \end{aligned}$$

→ Tal que:

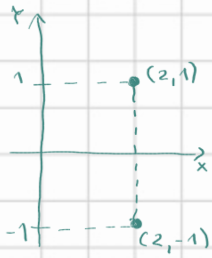
1. $\phi(X+Y) = \phi(X) + \phi(Y), \forall X, Y \in V$

2. $\phi(\alpha X) = \alpha \phi(X), \forall X \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

→ Se $V = W$ dizemos que ϕ é um operador linear

Exemplo ①

Em $\mathbb{R}^2$, a reflexão em relação ao eixo dos XX é dada pelo operador linear



$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow \phi(x,y) = (x,-y) \end{aligned}$$

Sejam $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\phi\left[(x,y) + (x', y')\right] = \phi(x,y) + \phi(x', y')} \ ?$$

$$\begin{aligned} \phi\left[(x,y) + (x', y')\right] &= \phi\left[x + x', y + y'\right] \\ &= \left[x + x', -y - y'\right] \\ &= (x,-y) + (x',-y') \\ &= \phi(x,y) + \phi(x',y') \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\phi(\alpha(x,y)) = \alpha \phi(x,y)} \ ?$$

$$\phi(\alpha(x,y)) = \phi(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x, -\alpha y) = \alpha(x,-y) = \alpha \phi(x,y)$$

Exemplo ②

A derivada de polinómios (funções deriváveis) é a aplicação linear:

$$\phi : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_{n-1}$$

$$p \longrightarrow \phi(p) = p'$$

1. $\forall p, q \in \mathcal{P}_n$, $\phi(p+q) = \phi(p) + \phi(q)$

$$\phi(p+q) = (p+q)' = p' + q' = \phi(p) + \phi(q)$$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathcal{P}_n$, $\phi(\alpha p) = \alpha \phi(p)$

$$\phi(\alpha p) = (\alpha p)' = \alpha p' = \alpha \phi(p)$$

Propriedades e caracterização de uma aplicação linear

Teorema: Se $\phi : V \rightarrow W$ uma aplicação linear então:

$$\phi(0_V) = 0_W$$

$\forall x \in V$,

$$\phi(0_V) = \phi(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{escalar}}}{0} \cdot x) \underset{\phi \text{ linear}}{=} 0 \cdot \underbrace{\phi(x)}_{\in W} = 0_W$$

Teorema: $\phi : V \rightarrow W$ linear:

$$\phi(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k) = c_1 \phi(x_1) + c_2 \phi(x_2) + \dots + c_k \phi(x_k)$$

Corolário: Se $\phi : V \rightarrow W$ linear e $B_V = (x_1, \dots, x_n)$ uma base de V então, ϕ é completamente determinada por $\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n)$

Exemplo Ⓐ

$\mathcal{L}$ é linear

$$\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longrightarrow (x - y, y + 3z)$$

Determine as imagens dos vetores da base $S = ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0))$ de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{L}[(1,1,1)] = (1, 4)$$
$$\mathcal{L}[(1,1,0)] = (1, 1)$$
$$\mathcal{L}[(1,0,0)] = (2, 0)$$

Exemplo (B)

$\mathcal{L}$ é linear $\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que: $\mathcal{L}(2,1) = (1,0,1,0)$
$\mathcal{L}(1,1) = (0,1,-1,3)$

$$B = \{(2,1),(1,1)\}$$

dim $\mathbb{R}^2 = 2$ logo B é a base se $B = \{(2,1),(1,1)\}$ é um conjunto de vetores l.i.

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, os vetores são l.i. sse $\det(A) \neq 0$.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$, logo B é uma base

Assim, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, este é comb. linear dos elementos da base

$$(x,y) = c_1(2,1) + c_2(1,1)$$

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = x \\ c_1 + c_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2c_1 + y - c_1 = x \\ c_2 = y - c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x - y \\ c_2 = 2y - x \end{cases}$$

Passo importante !

$$(x,y) = \underbrace{(x-y)}_{\in \mathbb{R}}(2,1) + \underbrace{(2y-x)}_{\in \mathbb{R}}(1,1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x,y) = \mathcal{L}((x-y)(2,1) + (2y-x)(1,1))$$

$$= (x-y)\,\mathcal{L}(2,1) + (2y-x)\,\mathcal{L}(1,1)$$

$$= (x-y)(1,0,1,0) + (2y-x)(0,1,-1,3)$$

$$= (x-y, 0, x-y, 0) + (0, 2y-x, x-2y, 6y-3x)$$

$$= (x-y, x-2y, 2x-3y, 6y-3x)$$

$$\mathcal{L}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(x,y) \longrightarrow \mathcal{L}(x,y) = (x-y, x-2y, 2x-3y, 6y-3x)$$

Matriz de uma aplicação linear

S e $\mathcal{T}$ bases ordenadas de V e W e $\phi : V \to W$ uma aplicação linear

Questão: Dado $X \in V$, qual a relação entre

$$[X]_S \text{ e } [\phi(X)]_{\mathcal{T}} \; ?$$

Exemplo:

Sejam $S = ((1,1),(1,0))$ base de $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{T} = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ uma base de $\mathbb{R}^3$

e seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que:

Assumimos $\boxed{B = ((1,1),(1,0)) \text{ base de } \mathbb{R}^2}$

$$\phi(1,1) = (2,3,1)$$
$$\phi(1,0) = (1,2,1)$$

Seja $X \in \mathbb{R}^2$. Qual a relação entre $[X]_S$ e $[\phi(X)]_{\mathcal{T}}$

Dado $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x_1,x_2) = c_1(1,1) + c_2(1,0)$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_1 \\ c_1 = x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = x_1 - x_2 \\ c_1 = x_2 \end{cases}$$

$$(x_1,x_2) = x_2(1,1) + (x_1-x_2)(1,0)$$

$$\Rightarrow [X]_S = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$(x_1,x_2) = x_2(1,1) + (x_1-x_2)(1,0)$$
$$\Downarrow$$
$$\phi(x_1,x_2) = x_2\,\phi(1,1) + (x_1-x_2)\,\phi(1,0)$$
$$\Downarrow$$
$$[\phi(x_1,x_2)]_{\mathcal{T}} = x_2\,[\phi(1,1)]_{\mathcal{T}} + (x_1-x_2)\,[\phi(1,0)]_{\mathcal{T}}$$

$$= \underbrace{\Big[[\phi(1,1)]_{\mathcal{T}} \; [\phi(1,0)]_{\mathcal{T}}\Big]}_{M(\phi;S,\mathcal{T})} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}}_{[X]_S}$$

$$[\phi(x)]_{\mathcal{T}} = \underbrace{M(\phi; S, \mathcal{T})}_{\text{matriz representativa da aplicação linear relativamente às bases } S \text{ e } \mathcal{T}} [x]_S$$

No nosso exemplo: $M(\phi; S, \mathcal{T}) = \left[[\phi(1,1)]_{\mathcal{T}} \; [\phi(1,0)]_{\mathcal{T}} \right]$

Então:

$$[\phi(1,1)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\phi(1,1) = (2,3,1) = \alpha_1(1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(0,1,1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

$$[\phi(1,0)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\phi(1,0) = (1,2,1) = \beta_1(1,0,1) + \beta_2(1,1,0) + \beta_3(0,1,1)$$

$$(\ldots) = \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 1 \\ \beta_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(\phi, S, \mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de uma aplicação linear

Seja $\phi: V \to W$ uma apl. linear e $S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma base de V e $\mathcal{T}$ uma base de W. A matriz representativa de ϕ relativamente às bases S e $\mathcal{T}$ é

$$M(\phi; S, \mathcal{T}) = \left[[\phi(x_1)]_{\mathcal{T}} \; [\phi(x_2)]_{\mathcal{T}} \; \cdots \; [\phi(x_n)]_{\mathcal{T}} \right]$$

matriz cujas colunas são os vetores das coordenadas na base $\mathcal{T}$ das imagens dos vetores da base S