Aula 03

Aplicação à resolução de sistemas

· Se as matrizes ampliadas de dois sistemas lineares são

$$[A \mid B] \quad [C \mid D]$$

Tais que $[A \mid B] \underset{\text{equivalentes por linha}}{\sim} [C \mid D]$

Os conjuntos de solução de $AX = B$ e $CX = D$ coincidem.

Método de eliminação de Gauss (Gauss-Jordan)

$AX = B$

- Passar à matriz ampliada
- Transformar $[A \mid B]$ na forma escalonada por linhas (reduzida)
- Passar ao sistema, ignorando as linhas nulas e resolver de baixo para cima

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3y + z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ x + 5y + 2z = 5 \end{cases}$$

Pivot

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{array}\right] \underset{L_3' = L_3 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3' := L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Passando ao sistema:

$$\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 3y+z=2 \\ 2z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+\frac{1}{2}=4 \\ 3y-\frac{1}{2}=2 \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{5}{3}+\frac{1}{2}=4 \\ y=\frac{5}{6} \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{11}{6} \\ y=\frac{5}{6} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} 3y+z=2 \\ x+2y-z=4 \\ x+5y+2z=5 \end{cases}$$

P.E.A.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2' := \frac{1}{3}L_2 \\ L_3' := \frac{1}{2}L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \underset{L_1' := L_1 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/3 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_1' := L_1 + 5/3 L_3 \\ L_2' := L_2 - \frac{1}{3}L_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/6 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

$x = 11/6$
$y = 5/6$
$z = -1/2$

$S = \left\{\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

Possível e determinado (tem apenas uma solução)

Resolva:

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3=1 \\ x_1+3x_2+5x_3=1 \\ 3x_1+6x_2+9x_3=2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2' := L_2 - 4L_1 \\ L_3' := L_3 - 3L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -18 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & -9 & -18 & -3 \end{array}\right] \underset{L_3' := L_3 - 3L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 1 \\ -3y - 6z = -1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \cancel{3} \times \left(\dfrac{1-6z}{\cancel{3}} \right) + 5z = 1 \\ y = \dfrac{1-6z}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \cancel{1} - 6z + 5z = \cancel{1} \\ y = \dfrac{1-6z}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \dfrac{1}{3} - 2z \end{cases}$$

Possível e indeterminado
(não tem apenas uma
solução

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ -4x + 2y + z = -5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2' = L_2 - L_1 \\ L_3' = L_3 + 2L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_3' = L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 3z &= -1 \\ 0x + 0y + 0z &= 2 \quad \underbrace{(0 = 2)}_{\text{C.S.}} \end{aligned}$$

Sistema Impossível

Classificação de sistemas:

- Um sistema linear $AX = B$ diz-se:
  - → impossível se não possui soluções
  - → possível e determinado se possui uma única solução (todas as colunas de C têm pivot)
  - → possível e indeterminado se possui uma infinidade de soluções (sendo o grau de indeterminação = nº de incógnitas livres = nº de colunas de C sem pivot)

- A característica de A, car(A), é o número de pivots de uma matriz C escalonada por linhas (ou por linhas reduzida) equivalente a A
- O sistema $AX = B$, $A(m \times n)$, $B(m \times 1)$ é:
  - Impossível $\Leftrightarrow$ $car(A) < car([A|B])$
  - Possível e determinado $\Leftrightarrow$ $car(A) = car([A|B]) = n$ (nº de incógnitas)
  - Possível e indeterminado $\Leftrightarrow$ $car(A) = car([A|B]) < n$, com grau de indeterminação igual a $n - car(A)$

$b = a + c$ $\qquad$ $b = a + c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$car(A) = 2$$
$$\shortparallel$$
$$car([A|B]) = 2 < 3$$

Possível e indet. com grau de indet. $n - car(A) = 3 - 2 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$car(A) = 2$
$<$
$car([A|B])$

<u>Considere o sistema:</u>

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = -2 \\ y + z = a \\ z = b \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right] \underset{L_2' := L_2 - L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right] \underset{L_3' := L_3 - L_2 \times \frac{1}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right]$$

$$\underset{L_4' := L_4 - L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & b-a-1 \end{array}\right]$$

$$b - a - 1 = 0 \Leftrightarrow b - a = 1 \Leftrightarrow b = 1 + a$$

$$car(A) = car([A|B])$$
$$car(A) = 3 = car([A|B]), \text{ sse } b - a = 1$$

$$car(A) = car([A|B])$$
$$car(A) = 3 = car([A|B])$$
sse $b - a - 1 = 0$
sse $b - a = 1$