Aula 13

Ainda sobre espaços gerados...

- Dados $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

→ Vetores colineares,

1. $\langle X_1 \rangle = \{\alpha X_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$ → é a reta que passa pela origem e tem vetor diretor X_1

2. $\langle X_1, X_2 \rangle = \{\alpha X_1 + \beta X_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$$P \in \langle X_1, X_2 \rangle, \ P = \mathcal{O} + \alpha X_1 + \beta X_2, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

é o plano que passa pela origem e contém X_1, X_2

Espaço nulo / das linhas / colunas

Proposição: Dados $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ com $i \neq j$

(i) $\langle X_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k \rangle = \langle x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k \rangle$

(ii) $\langle X_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k \rangle = \langle X_1, \ldots, \alpha X_i, \ldots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(iii) $\langle X_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k \rangle = \langle X_1, \ldots, x_i + \alpha x_j, \ldots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- O espaço nulo de A $\mathcal{N}(A)$ é o conjunto de todas as soluções do sistema homogénio associado a A $(m \times n)$

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}$$

- O espaço nulo de A pode escrever-se como o conjunto de todas as combinações lineares de $\boxed{n - \text{car}(A)}$ vetores de $\mathbb{R}^n$

- Estes vetores podem ser obtidos a partir da matriz escalonada por linhas de A tendo em atenção as variáveis livres

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \overset{\text{Reduzir!}}{\sim} A_r = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \downarrow & x_2 & \downarrow & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{X \in N(A) \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow A_r X = 0}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R} \text{ var. livres}$$

Logo, o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ é um conjunto gerador de $N(A)$

Exercício: Se o sistema $AX = B$ é possível e se $\overline{X}$ é uma solução então o conjunto de solução do sistema é

$$\{ \underbrace{\overline{X}}_{\text{solução particular do sistema complexo}} + \underbrace{Y, \ Y \in N(A)}_{\text{solução geral ao hom. associado}} \}$$

$AX = B$ é possível $\Rightarrow \exists X_p : AX_p = B$

$\overline{X}$ é também solução de $AX = B$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{A\overline{X} = B}{AX_p - A\overline{X} = B - B} \Leftrightarrow A(\underbrace{X_p - \overline{X}}_{Y}) = 0$

Logo, $Y = X_p - \overline{X}$ é uma solução do homogénio associado

$\Downarrow$

$X_p = Y + \overline{X}$, onde Y é uma solução do sistema $AX = 0$.

- Logo se X_p pertence ao conjunto de solução de $AX = B$, então $X_p = Y + \overline{X}$

Exercício: Considere o sistema seguinte e o homogénio associado.

$$\begin{cases} x - y - 4z = -4 \\ x + 2y + 5z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

1.º Sistema (completo):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \cdots \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & z & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{cases} x - y - 4z = -4 \\ y + 3z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 + z \\ y = 2 - 3z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

O conjunto de solução do sistema completo:

$$S = \{ (-2+z, 2-3z, z), z \in \mathbb{R} \}$$

2.º Sistema: (homogénio associado)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -3z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$S^* = \{ (z, -3z, z), z \in \mathbb{R} \}$$

- Se no conjunto do sistema completo obtivermos uma solução particular (aquela em que $z=0$) então podemos escrever a sua solução geral como a soma desta $\boxed{\text{solução particular}}$ com a a solução geral do sistema.

$$S = \{ (z, -3z, z) + (-2, 2, 0) \}$$