Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

Matrizes

1. Calcule
$$3\left(\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 4 & -9\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -5 & -3 & 2\\ 2 & -8 & -3\end{bmatrix}\right) + 5\begin{bmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & -7 & 0\\ 2 & 4 & -4\end{bmatrix}^T.$$

2. Considere as matrizes
$$A = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$
Calcule

(a) $A+B$; (b) $B-2A$; (c) AD; (d) DA; (e) ACD; (f) $\frac{1}{5}\left(I_2 - (DA)^2\right)$.

3. Considere as matrizes
$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}.$$
Calcule $2(A+B) - AB$.

4. Escolha uma maneira de ordenar as matrizes
$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$
de modo que o produto das quatro matrizes esteja definido e calcule esse produto.

5. Calcule a primeira coluna e a segunda linha do produto
$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -4 & 0\\ 2 & 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

6. Mostre que se os produtos AB e BA estão ambos definidos e A é uma matriz $m \times n$, então B é uma matriz $n \times m$.

7. Verifique que o produto de matrizes não é comutativo, calculando EA e AE para
$$E = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}.$$
Qual o efeito na matriz A após efectuar os produtos EA e AE?

8. Calcule
$$\begin{bmatrix}\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n\end{bmatrix}^4.$$

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Mostre que $A^2 = 2A - I_2$.
   (b) Mostre que $A^3 = 3A - 2I_2$, recorrendo à alínea anterior.

10. Verifique que as identidades algébricas

    i. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ii. $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
    iii. $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ iv. $(AB)^2 = A^2B^2$

    nem sempre são verdadeiras quando A e B são matrizes. Considere, por exemplo, as matrizes:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

    Corrija os segundos membros das identidades i – iv de forma a obter identidades verdadeiras para quaisquer A e B matrizes $n \times n$.

11. Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas.
    (a) Se A, B, C são matrizes tais que $A + C = B + C$, então $A = B$.
    (b) Se A, B, C são matrizes tais que $AB = AC$, então $A = O$ (matriz nula) ou $B = C$.
    (c) Se A é uma matriz tal que $A^2 = I_n$, então $A = I_n$ ou $A = -I_n$.

12. Seja A uma matriz quadrada. Mostre que $A + A^T$ é uma matriz simétrica. O que pode afirmar sobre a matriz $A - A^T$?

13. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$ e $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ uma matriz $n \times 1$.

    Verifique que $AC = c_1 \operatorname{col}_1(A) + \cdots + c_n \operatorname{col}_n(A)$, onde $\operatorname{col}_i(A) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$ designa a coluna i de A.

14. Usando o exercício anterior, calcule AC para
    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$;
    (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e determine C de modo que $AC = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. Indique quais das seguintes matrizes são matrizes na forma escalonada por linhas:

    i. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; ii. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; iii. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; iv. $\begin{bmatrix} 10 & 14 & 25 & 10 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

    Determine matrizes equivalentes por linhas às matrizes dadas que estejam:
    (a) na forma escalonada por linhas;
    (b) na forma escalonada por linhas reduzida.

16. Se A é uma matriz $n \times n$ tal que $AA^T = O$, mostre que $A = O$ (sendo O a matriz nula $n \times n$).

Sistemas de Equações Lineares

17. Resolva, quando possível, os seguintes sistemas usando o método de eliminação de Gauss (ou Gauss-Jordan).

(a) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 4 \\ 2x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 4 \\ x_1 - 3x_2 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = 2 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10 \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$

18. Determine, para cada sistema, os valores de α para os quais o sistema

(a) $\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} -x + y = \alpha \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - 3y - 2z = 7 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 5y - z = -3 \\ \alpha^2 x + 4\alpha^2 y - z = \alpha + 1 \end{cases}$

i. não tem solução; ii. tem exatamente uma solução; iii. tem uma infinidade de soluções.

19. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x + \beta y + \beta z = 0 \\ \beta x + y + z = 0 \\ x + y + \beta z = \beta^2 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema em função de β.

(b) Considere o sistema homogéneo associado a $\beta = 0$ e determine a sua solução.

20. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y - z = a \\ x + y + z = a \\ x - by + z = -b \end{cases},$$

onde a e b são parâmetros reais.

(a) Determine os valores de a e b para os quais o sistema é: i. possível e determinado; ii. impossível.

(b) Sabendo que $(1, -1, 1)$ é uma solução do sistema, determine o conjunto de todas as soluções.

21. Considere o sistema de equações lineares associado à seguinte matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha - 1 & \alpha & \alpha - 2 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \alpha - 3 \end{array}\right].$$

Discuta o sistema em função do parâmetro α e apresente as correspondentes soluções (caso existam).

22. Considere o sistema de equações lineares associado à seguinte matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha-\beta & -1 & 0 \\ 0 & \alpha\beta & \alpha-1 & \alpha-1 \\ \beta & -\beta^2 & 1 & \beta-\alpha \end{array}\right].$$

Discuta o sistema em função do parâmetros α e β.

23. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16 \\ 5x_1 - 2x_2 = 4 \\ 3x_1 + ax_2 = 9 \\ 4x_1 + bx_2 = -7 \end{cases}.$$

Determine a e b de forma que o sistema seja possível e determine o conjunto de soluções nesse caso.

24. Considere o seguinte sistema, nas variáveis x, y e z, com parâmetros reais a, b, c:

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x - y + 3z = b \\ 4x + y + 5z = c \end{cases}.$$

Verifique que o sistema é possível se e só se $2a + b - c = 0$.

25. Seja A uma matriz qualquer. Se B é uma coluna de A, mostre que o sistema $AX = B$ é possível e indique uma solução.

Espaço das colunas (das linhas) e espaço nulo de uma matriz

26. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Mostre que o espaço das colunas de AB está contido no espaço das colunas de A.

27. Considere o sistema representado matricialmente por $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha+1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Classifique o sistema $AX = B$, em função do parâmetro α.

   (b) Diga, justificando, para que valores do parâmetro α a coluna B pertence ao espaço das colunas de A.

   (c) Determine espaço nulo de A, para $\alpha = 1$ e para $\alpha = -2$, respetivamente.

28. Para cada uma das seguintes matrizes reais A, determine $\mathcal{C}(A), \mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$, indicando a sua caracteristica e a sua nulidade.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$

Matriz Inversa

29. Averigue se são singulares as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

30. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mostre que $C = ADB$.
   (b) Verifique se B é a matriz inversa de A.
   (c) Calcule C^5, usando as alíneas anteriores.

31. Determine as inversas das seguintes matrizes:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \text{(c)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \text{(d)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

32. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique que M satisfaz a equação $M^3 - 4M^2 - I_3 = 0$.
   (b) Prove, sem calcular o seu valor, que $M^{-2} = M - 4I_3$.
   (c) Calcule M^{-1} pela equação da alínea anterior e verifique o resultado obtido.

33. Se A é uma matriz invertível e $\alpha \in \mathbb{R}$ é não nulo, mostre que a matriz αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

34. Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que, se AB é invertível, então A e B também são.

35. (a) Seja A uma matriz $n \times n$ qualquer. Suponhamos que existe um número natural k tal que $A^k = O$ (matriz nula $n \times n$). Mostre que $I_n - A$ é invertível e que

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

   (b) Usando o exercício anterior, calcule a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

36. Encontre todos os valores de α para os quais

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{bmatrix}$$

é invertível.

37. Se A e B são matrizes invertíveis, mostre que

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A + B)B^{-1}.$$

Que igualdade é esta no caso de matrizes 1×1?

38. Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^4 = O$ (matriz nula $n \times n$). Mostre que

$$(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)(I_n + A^2).$$

39. Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times m$ tais que $I_m - AB$ seja invertível.

   (a) Prove que também $I_n - BA$ é invertível, sendo $(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_m - AB)^{-1}A$.
   (b) Verifique que $A(I_n - BA)^{-1} = (I_m - AB)^{-1}A$ e que $(I_n - BA)^{-1}B = B(I_m - AB)^{-1}$.

40. Resolva a seguinte equação matricial relativamente à matriz X:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

41. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 8 \end{bmatrix},$$

resolva as seguintes equações matriciais relativamente à matriz X:

(a) $\left((B^{-1})^T X\right)^{-1} A^{-1} = I$;

(b) $\left(C^T D^T X\right)^T = E$.

42. Sabendo que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

determine a matriz M que satisfaz a equação matricial $AMA = B$.

43. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 4x + y + 3z = 1 \\ 3x + y + 3z = 0 \\ 5x + y + 4z = 1 \end{cases}.$$

(a) Mostre que a matriz dos coeficientes do sistema é invertível e calcule a sua inversa.

(b) Justifique que o sistema é possível e determinado. Indique a sua solução.

44. Mostre que se A é invertível, então A^T também é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

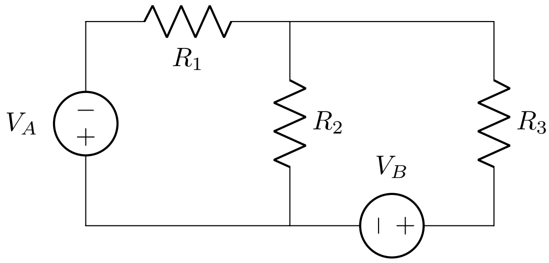
45. Uma matriz quadrada diz-se ortogonal se for invertível e a sua inversa coincidir com a sua transposta. Mostre que

(a) o produto de duas matrizes ortogonais é ainda uma matriz ortogonal;

(b) a inversa de uma matriz ortogonal é ainda uma matriz ortogonal.

Exercícios mostrando alguma aplicações

46. Considere o circuito eléctrico representado na figura seguinte:

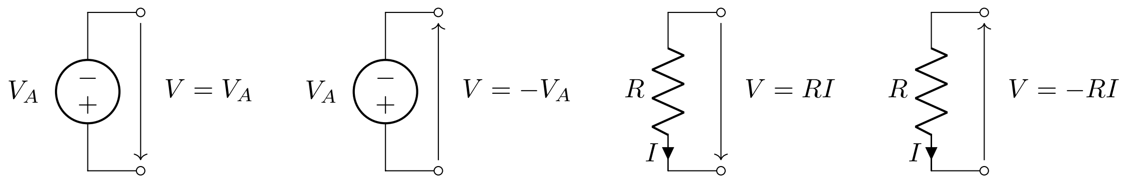


constituído por dois geradores de tensão $V_A = 7\,V$ e $V_B = 5\,V$ e três resistências $R_1 = 10\,k\Omega$, $R_2 = 5\,k\Omega$ e $R_3 = 15\,k\Omega$. Determine a intensidade das correntes que passam pelas três resistências.

Observação: Para resolver o exercício é preciso aplicar as Leis de Kirchhoff:

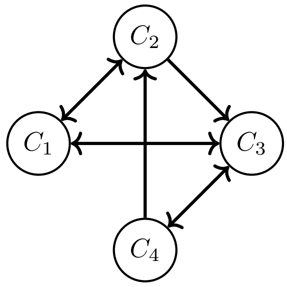
- **(lei dos nós)** a soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que dele saem (ou seja, um nó não acumula carga);
- **(lei das malhas)** a soma da diferença de potencial eléctrico ao longo de qualquer caminho fechado (malha) é nula.

A direção escolhida para percorrer a malha determina o cálculo das diferenças de potencial consoante as seguintes convenções:



- Num gerador de tensão, a diferença de potencial eléctrico medida do polo positivo para o polo negativo é positiva; caso contrário é negativa.
- Numa resistência R percorrida por uma corrente I, a diferença de potencial eléctrico, medida com o mesmo sentido que a corrente, é dada pela Lei de Ohm, isto é, $V = RI$; caso contrário, $V = -RI$.

47. Uma companhia aérea serve quatro cidades, C_1, C_2, C_3 e C_4, cujas ligações podem ser representadas por um *grafo orientado*:



- existem voos de C_1 para C_2 e C_3;
- existem voos de C_2 para C_1 e C_3;
- existem voos de C_3 para C_1 e C_4;
- existem voos de C_4 para C_2 e C_3.

(a) Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$, chamada a matriz de adjacência associada ao grafo, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe um voo de } C_i \text{ para } C_j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) A matriz $A^r = [a_{ij}^{(r)}]$ é tal que $a_{ij}^{(r)}$ representa o número de itinerários diferentes de ligação da cidade C_i à cidade C_j utilizando r voos. Determine quantos itinerários diferentes existem para irmos da cidade C_4 para a cidade C_3 utilizando:

i. apenas um voo; ii. dois voos; iii. três voos.

Para cada uma das alíneas anteriores, determine explicitamente todos os itinerários.

48. Considere uma economia que consiste em três setores interdependentes: indústria, agricultura e serviços. Cada um destes setores produz um bem e para produzir esse bem necessita de bens produzidos pelos outros dois setores e por ele próprio.

Na tabela seguinte, as entradas de cada coluna representam as quantidades de produto dos três setores que são necessárias para produzir uma unidade de produto do setor correspondente à coluna. Por exemplo, a entrada $(2, 1)$ significa que são precisas $0,3$ unidades da produção agrícola para cada unidade produzida pela indústria.

	Indústria	Agricultura	Serviços
Indústria	0,1	0,2	0,1
Agricultura	0,3	0,2	0,2
Serviços	0,2	0,2	0,1

Vamos assumir que a economia está em equilíbrio: a quantidade de bens produzidos é igual à procura, ou seja, à soma da *procura intermédia* (bens a serem consumidos pelos próprios setores produtivos) e da *procura final* (bens a serem consumidos por outros setores como, por exemplo, o consumidor final).

(a) Suponha que a indústria, a agricultura e os serviços produzem c_1, c_2 e c_3 unidades, respetivamente.
   i. Determine a procura intermédia correspondente.
   ii. Determine a procura final correspondente.

(b) Suponha que a procura final é de $8,5$, $9,5$ e 2 unidades para o setor da indústria, agricultura e serviços, respetivamente. Determine a produção que os vários setores têm de ter para satisfazerem esta procura final.

Nota: O que foi descrito é um exemplo de um modelo de economia aberta de Leontief. Wassily Leontief recebeu, em 1973, o prémio Nobel da economia pelo desenvolvimento deste modelo, que continua a ser utilizado na análise de problemas da economia dos nossos dias.

49. Uma unidade de torrefação de café está interessada em testar uma mistura de três tipos de grãos para obter um lote final de 4400 kg com um custo de 1650 €. O primeiro tipo de grão custa $0,44$ € por quilograma, enquanto o segundo custa $0,37$ € por quilograma e o terceiro $0,41$ € por quilograma.

Verifique se é possível obter o lote anteriormente referido usando, na sua confeção, iguais quantidades (a) do primeiro e segundo ou (b) do primeiro e terceiro tipos de grão.

50. O Sr. Silva é dono de um pinhal que explora para produção de árvores de Natal. As árvores estão catalogadas por faixas crescentes de altura em três classes, a_0, a_1 e a_2 (note-se que a lei proíbe a venda das árvores na classe a_0).

O corte das árvores para venda é feito no início de dezembro e, por cada árvore cortada, é semeada uma nova. Depois, de janeiro a dezembro, uma fração $g_0 = 0,25$ das árvores da classe a_0 e uma fração $g_1 = 0,2$ das árvores da classe a_1 que não foram cortadas, cresce o suficiente para passar a pertencer às classes a_1 e a_2, respetivamente, enquanto as restantes árvores continuam na mesma classe (supõe-se que não há perdas de árvores durante o seu crescimento).

O Sr. Silva pretende implementar uma florestação sustentável, isto é, pretende que a configuração do pinhal (o número de árvores em cada classe) antes do corte, em dezembro, seja igual à do ano anterior.

(a) Sabendo que, inicialmente, o número de árvores nas classes a_0, a_1 e a_2 é, respetivamente, $n_0 = 450$, $n_1 = 350$ e $n_2 = 400$, determine o número de árvores a cortar para venda.

(b) Como os clientes procuram, em média, 50 árvores da classe a_1 e 100 da classe a_2, qual será a melhor configuração do pinhal, mantendo o mesmo número total de árvores?

1. $\begin{bmatrix} -4 & 9 & 10 \\ 5 & -5 & -19 \\ 9 & 39 & 1 \end{bmatrix}$.

2. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 16 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix} -6 & -8 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

4. $ADBC = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ ou $BADC = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. A primeira coluna é $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e a segunda linha é $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$.

7. $EA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \neq AE = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 19 & 5 & 6 \\ 31 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

8. $\begin{bmatrix} \mu_1^4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2^4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n^4 \end{bmatrix}$.

10. i. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$; ii. $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$; iii. $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$; iv. $(AB)^2 = ABAB$.

11. (a) Verdadeira; (b) falsa; (c) falsa.

14. (a) $AC = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$; (b) $AC = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x-y+z \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1-z \\ 1-z \\ z \end{bmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$.

15. ii. e iv. (a) i. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; iii. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    (b) i. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; ii. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; iii. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; iv. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

17. (a) $x_1 = -2$, $x_2 = -10$; (b) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{2}{3}$; (c) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4} + t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$; (d) impossível; (e) $x_1 = t$, $x_2 = \frac{1}{3} - 2t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$; (f) $x_1 = \frac{3}{17}t_1 - \frac{13}{17}t_2$, $x_2 = \frac{19}{17}t_1 - \frac{20}{17}t_2$, $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$; (g) $x_1 = 6 - t$, $x_2 = -5 + t$, $x_3 = 3$, $x_4 = -1 - t$, $x_5 = t$, $t \in \mathbb{R}$; (h) impossível.

18. (a) i. $\alpha = -1$, ii. $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, iii. $\alpha = 1$; (b) i. $\alpha \neq -5$, iii. $\alpha = -5$; (a) i. $\alpha = 1$, ii. $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$, iii. $\alpha = -1$.

19. (a) O sistema é $\begin{cases} \text{impossível} & \text{se } \beta = 1; \\ \text{possível e indeterminado de grau um} & \text{se } \beta = -1; \\ \text{possível e determinado} & \text{se } \beta \neq 1 \text{ e } \beta \neq -1. \end{cases}$

    (b) A única solução é a solução trivial, isto é, $x = y = z = 0$.

20. (a) i. $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; ii. $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $b = -1$. (b) $\{(1, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

21. O sistema é impossível se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$; o sistema é possível e determinado se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e nesse caso o conjunto solução é $\left\{\left(0, \frac{1}{\alpha-1}, 1 - \frac{3}{\alpha}\right)\right\}$.

22. O sistema é possível e determinado se $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ e $\alpha \neq -\beta$; é possível e indeterminado se $\alpha = \pm 1$ e $\beta = 0$ ou $\alpha = -1$ e $\beta = 1$; é impossível nos outros casos.

23. $a = 1$, $b = -5$, $\{(2, 3)\}$.

24. Observe que a matriz ampliada do sistema é equivalente por linhas a $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-2a \end{array}\right]$.

25. Se B é a coluna i de A, então $X = [0 \cdots 1 \cdots 0]^T$ com 1 na linha i e as restantes entradas nulas é uma solução.

27. (a) O sistema é $\begin{cases} \text{impossível} & \text{se } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1; \\ \text{possível e indeterminado de grau um} & \text{se } \alpha = -2; \\ \text{possível e determinado} & \text{se } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}. \end{cases}$ (b) $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -1$
(c) Para $\alpha = 1$, $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\}$; Para $\alpha = -2$, $\mathcal{N}(A) = \{(x, 0, 0) \colon x \in \mathbb{R}\}$;

28. (a) $\mathcal{N}(A)=\{0\}$; $\mathcal{L}(A) = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{C}(A) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \colon -5x - 2y - 2z + 3t = 0\}$; $\operatorname{car} A = 3$, $\operatorname{nul} A = 0$;
(b) $\mathcal{N}(A) = \{(-2z - t, \frac{7}{4}z + \frac{5}{4}t, z, t) \colon t, z \in \mathbb{R}\}$; $\mathcal{L}(A) = \{(\alpha, 4\beta, 2\alpha - 7\beta, \alpha - 5\beta) \colon \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^2$; $\operatorname{car} A = 2$, $\operatorname{nul} A = 2$;
(c) $\mathcal{N}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x - z = 0 \text{ e } y + 2z = 0\}$; $\mathcal{L}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z - 2y + x = 0\}$ e $\mathcal{C}(A) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \colon z - 2y + x = 0 \text{ e } z - 3y + 2z = 0\}$; $\operatorname{car} A = 2$, $\operatorname{nul} A = 1$.

29. A não é singular e B é singular.

30. (c) $C^5 = AD^5B = \begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{bmatrix}$.

31. (a) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

32. (c) $M^{-1} = M(M - 4I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

34. AB é invertível, portanto $I = (AB)(AB)^{-1} = A\big(B(AB)^{-1}\big)$. Logo, A é invertível, sendo $A^{-1} = B(AB)^{-1}$. Assim, também B é invertível, pois $B = A^{-1}(AB)$ é o produto de duas matrizes invertíveis.

35. (a) $(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})(I_n - A) = I_n - A^k = I_n$. (b) $M = I - A$ com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sendo $A^3 = O$. Logo, $M^{-1} = (I - A)^{-1} = I + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

36. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

39. Observe-se que $A(I - BA) = A - ABA = (I - AB)A$ e que $B(I - AB) = B - BAB = (I - BA)B$.

40. $X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

41. (a) $X = B^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $X = \big(E(DC)^{-1}\big)^T = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

42. $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

43. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $x = 1, y = 0, z = -1$.

46. $I_1 = 600\,\mu$A (esquerda–direita), $I_2 = 200\,\mu$A e $I_3 = 400\,\mu$A (cima–baixo).

47. (a) 1: $C_4 \to C_3$; (b) 1: $C_4 \to C_2 \to C_3$; (c) 3: $C_4 \to C_3 \to C_4 \to C_3$, $C_4 \to C_3 \to C_1 \to C_3$, $C_4 \to C_2 \to C_1 \to C_3$.

48. (a) i. A procura intermédia de bens da Indústria, da Agricultura e dos Serviços é, respetivamente $p_1^i = 0,1c_1 + 0,2c_2 + 0,1c_3$, $p_2^i = 0,3c_1 + 0,2c_2 + 0,2c_3$ e $p_3^i = 0,2c_1 + 0,2c_2 + 0,1c_3$. ii. A procura final, com notação análoga, é $p_k^f = c_k - p_k^i$, $k = 1, \ldots, 3$. (b) $c_1 = 15$, $c_2 = 20$, $c_3 = 10$.

49. (a) Não; (b) sim.

50. (a) 100 árvores na classe a_1 e 50 na classe a_2; (b) $n_0 = 450$, $n_1 = 550$ e $n_0 = 200$.