Aula 21

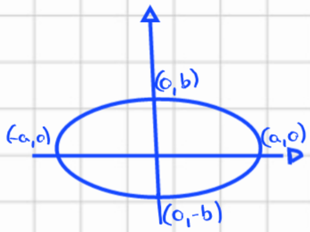
Cónicos

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + \delta x + \eta y + \mu = 0$$

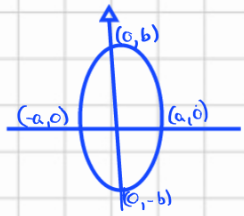
$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}}_{\substack{A \text{ é simétrica} \\ 2\times 2}} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta & \eta \end{bmatrix}}_{B\ 1\times 2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mu = 0$$

Equações reduzidas de uma elipse

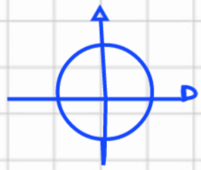
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$



$a < b$



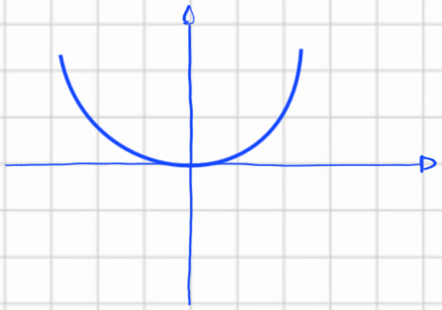
$a = b$, temos uma circunferência



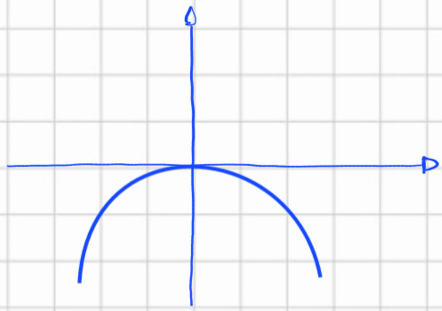
Equação reduzida de uma parábola

$y = ax^2$

$a > 0$

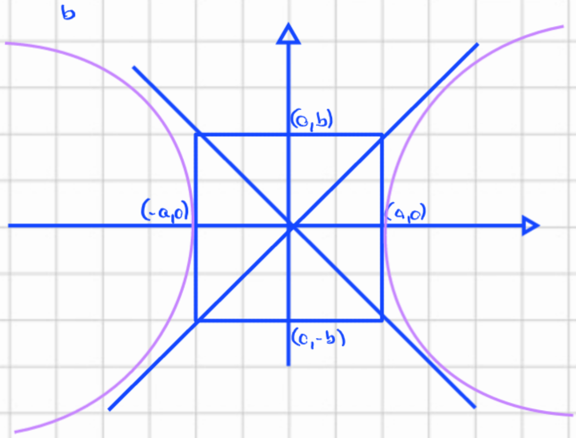


$a < 0$



Equação reduzida de uma hipérbole

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b} = 1$



Simplificação da eq. geral da cónica !

Diagonalização ortogonal de A em $X^T A X + B X + \mu = 0$

Seja P uma matriz ortogonal ($P^{-1} = P^T$), tal que $P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D$, onde λ_1, λ_2 são os valores próprios de A

Os valores próprios λ_1 e λ_2 são ordenados na forma:

- $\lambda_1 \geq \lambda_2$ se ambos são não nulos
- $\lambda_2 = 0$, se um dos valores próprios é zero.

Considera-se a mudança de variável:

$$X = P\bar{X} \quad \text{onde } X = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$

Substituir em:

$$X^T A X + B X + \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow (P\bar{X})^T A (P\bar{X}) + B P(\bar{X}) + \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}^T (P^T A P)\bar{X} + \underbrace{(B P)}_{[\bar{\delta} \ \bar{\gamma}]}\bar{X} + \mu = 0$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{array}{c|cc} & \bar{x} & \bar{y} \\ \hline \bar{x} & \lambda_1 & 0 \\ \bar{y} & 0 & \lambda_1 \end{array} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\delta} & \bar{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} + \mu = 0$$

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \bar{\delta}\bar{x} + \bar{\gamma}\bar{y} + \mu = 0$$

(desapareceram os termos cruzados: termos em "xy")

Nota: Se $|P| > 0$, esta mudança de variável corresponde a uma rotação dos eixos

P (é uma matriz mudança de base)

$$\underset{(0,0)}{(O} ; \underset{((0,1),(1,0))}{B_e}) \rightsquigarrow \underset{(0,0)}{(O}, B)$$

↳ base formada pelos vetores próprios o.n.

Exemplo (A)

Escreve a eq. reduzida (e identifique-a) da cónica

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 2y - 6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^T A X + BX - 6 = 0$$

Admitimos que: $P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$, com $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Fazendo, $X = P\bar{X}$ com $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$

em $X^T A X + BX - 6 = 0$ vem:

$$(P\bar{X})^T A (P\bar{X}) + B(P\bar{X}) - 6 = 0$$

$$BP = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \bar{X}^T (P^T A P) \bar{X} + (BP)\bar{X} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \bar{x} & \bar{y} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}}_{\text{Faz-se muito facilmente}} + \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3\bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 2\sqrt{2}\,\bar{y} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3\bar{x}^2 - (\bar{y}^2 - 2\sqrt{2}\,\bar{y} + 2 - 2) = 6$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\bar{y} - a)^2 = \bar{y}^2 - 2a\bar{y} + a^2 \\ 2a = 2\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} \end{array}}$$

$$2a = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 3\bar{x}^2 - (\bar{y}^2 - 2\sqrt{2}\,\bar{y} + 2) = 4$$

$$\Leftrightarrow 3\bar{x}^2 - (\bar{y} - \sqrt{2})^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 3\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{4}\tilde{x}^2 - \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\tilde{x}^2}{\frac{4}{3}} - \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1}$$

Hipérbole

$\tilde{x} = \bar{x}$

$\tilde{y} = \bar{y} - \sqrt{2}$

$\tilde{x} = \bar{x} - 0$

$\tilde{y} = \bar{y} - \sqrt{2}$

$(0,0) \rightsquigarrow (0, \sqrt{2}) = O^*$

$$(\underset{(0,0)}{O}, B_e) \rightsquigarrow (\underset{(0,0)}{O}, \underset{\text{base de vetores próprios}}{B}) \rightsquigarrow (O^*, B)$$

Exemplo (B)

Escreve a eq. reduzida (e identifique-a) da cónica

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 18 = 0$$

Atenção: Não há termos cruzados. Não precisamos de fazer a diagonalização ortogonal (simplificar)

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{2}}(x^2 + 6x + 9 - 9) + (y^2 + 4y + 4 - 4) + 18 = 0$$

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax^2 + a^2$

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + 9) - \cancel{18} + (y^2 + 4y + 4) + \cancel{18} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$\tilde{x} = x + 3$

$\tilde{y} = y + 2$

$$\Leftrightarrow 2\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 4 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{2} = 1}$$

Elipse!

Exemplo (C)

Escreve a eq. reduzida (e identifique-a) da cónica

$$2x^2 + 12x + 3y + 15 = 0$$

Atenção: Não há termos cruzados. Não precisamos de fazer a diagonalização ortogonal (simplificar)

$$2x^2 + 12x + 3y + 15 = 0$$

$2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 6x + 9 - 9) + 3y + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3)^2 - 18 + 3y + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3)^2 + 3y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3)^2 + 3(y-1) = 0$$

$\tilde{x} = x + 3$

$\tilde{y} = y - 1$

$$\Leftrightarrow 2\tilde{x}^2 + 3\tilde{y} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\tilde{y} = -\frac{2}{3}\tilde{x}^2}$$

Parábola

$\boxed{\text{Exemplo (D)}}$

Escreve a eq. reduzida (e identifique-a) da cónica

$$2x^2+y^2+12x+4y+24=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+6x+9-9)+(y^2+4y+4-4)+24=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3)^2-18+(y+2)^2+20=0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\sqrt{2}(x+3)\right)^2 + (y+2)^2}=-2$$

Soma de números positivos nunca dá negativa $\Rightarrow S=\emptyset$

$\boxed{\text{Exemplo (E)}}$

Escreve a eq. reduzida (e identifique-a) da cónica

$$2x^2+y^2+12x+4y+22=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+6x+9-9)+(y^2+4y+4-4)+22=0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+3)^2-\cancel{18}+(y+2)^2+\cancel{18}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}(x+3)\right)^2+(y+2)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \wedge y=-2$$

$\hookrightarrow$ temos apenas o ponto $(-3,-2)$

Cónicas degeneradas

Situações degeneradas que podem ocorrer:

1. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ $\quad \emptyset$

2. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ $\quad x=0=y$

   Solução é o ponto $(0,0) \rightsquigarrow$ origem do referencial

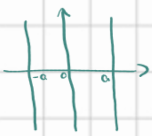
3. $\dfrac{x^2}{a^2}=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$ (eixo Oy)

4. $\dfrac{x^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x^2=a^2 \Leftrightarrow x^2-a^2=0$

   $\Leftrightarrow (x-a)(x+a)=0$

   $\Leftrightarrow x=a \vee x=-a$

   Duas retas paralelas $x=a$ e $x=-a$



5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \vee \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{b}{a} x \vee y = -\frac{b}{a} x$

(duas retas concorrentes na origem)