Aula 14

Espaço das linhas e das colunas de uma matriz

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $m \times n$

As colunas de A

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

c_i's são vetores de $\mathbb{R}^m$ e encaram-se as linhas de A como vetores de $\mathbb{R}^n$

$$L_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \; ; \; \dots, \; L_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

- Chama-se espaço das colunas e espaços das linhas de A aos subespaços

$$\underbrace{\mathcal{C}(A)}_{\text{subespaço de } \mathbb{R}^m} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle \text{ e } \underbrace{\mathcal{L}(A)}_{} = \langle L_1, L_2, \dots, L_m \rangle, \text{ resp.}$$

(os vetores são elementos de $\mathbb{R}^n$)

- É óbvio que:

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T)$$

- Teorema: Se A e B são matrizes equivalentes por linhas então:

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$$

Observação:

$$\boxed{B \in \mathcal{C}(A)} \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : B = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \dots + \alpha_n c_n$$

($c_i \rightarrow$ coluna i de A)

$$\Leftrightarrow \boxed{AX = B \text{ é um sistema possível}}$$

Já que...

$$X = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \quad AX = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_n C_n = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\alpha_1 \\ a_{21}\alpha_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}\alpha_2 \\ a_{22}\alpha_2 \\ \\ a_{m2}\alpha_2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n}\alpha_n \\ a_{2n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{mn}\alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}\alpha_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}\alpha_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \\ a_{mn} \end{bmatrix}\alpha_n$$

Exercício:

Escrever o espaço das linhas de A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Sabemos que se $A \sim B$ então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$

Resolução!!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2' := L_2 + L_1 \\ L_3' := L_3 - L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \underset{L_3' := L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}(A) = \langle (1,2,1), (0,2,4) \rangle$$

$$= \langle (1,2,1), (0,1,2) \rangle$$

(1/2)

ou

$$(x,y,z) \in \langle (1,2,1), (-1,0,3), (1,4,5) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(-1,0,3) + \alpha_3(1,4,5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_3 = y \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 = z \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & x \\ 2 & 0 & 4 & y \\ 1 & 3 & 5 & z \end{array}\right] \rightarrow$$

seja a matriz um sistem possível

(Resolvíamos e dava o mesmo)

Podemos identificar explicitamente o conjunto como o conjunto dos vetores $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que verificam uma determinada condição

$$(x,y,z) \in \langle (1,2,1),(0,1,2) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : (x,y,z) = \alpha_1 (1,2,1) + \alpha_2 (0,1,2)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = x \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = y \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = z \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{array}\right]$$

→ Seja a matriz ampliada de um sistema possível

$$\underset{\substack{L_2' := L_2 - 2L_1 \\ L_3' := L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 2 & z-x \end{array}\right] \underset{L_3' := L_3 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & z-2y+3x \end{array}\right]$$

$$\mathcal{L}(A) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z + 3x - 2y = 0 \}$$

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T) = ?$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2' := L_2 - 2L_1 \\ L_3' := L_3 - L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_3' := L_3 - 2L_2 \\ L_2' := \frac{1}{2} \times L_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1' := L_1 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T) = \langle (1,0,2),(0,1,1) \rangle}$$

- Outra forma de encontrar o espaço das colunas:

$$B \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : B = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3$$

$$\Leftrightarrow AX = B \text{ é possível}$$

$$\mathcal{C}(A) = \{ B \in \mathbb{R}^3 : AX = B \text{ é possível} \}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 3 & b \\ 1 & 4 & 5 & c \end{array}\right]$$

→ seja a matriz ampliada de um sistema possível

$$\underset{\substack{L'_2 := L_2 + L_1 \\ L'_3 := L_3 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 2 & 4 & a+b \\ 0 & 2 & 4 & c-a \end{array}\right] \underset{L'_3 := L_3 - L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 2 & 4 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-b \end{array}\right]$$

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{3\times 1} : c - 2a - b = 0 \right\} \Rightarrow c = 2a + b$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2a+b \end{bmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(a, b, 2a+b) = a\,\underline{(1,0,2)} + b\,\underline{(0,1,1)}$$

$$\mathcal{C}(A) = \langle (1,0,2), (0,1,1) \rangle$$

Independência / Dependência linear

$K = \{ X_1, \dots, X_k \}$ é um conjunto linearmente independente (l.i) em $\mathcal{P}$ se

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{P}} \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0}$$

Caso contrário, se existem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\boxed{\text{não todos nulos}}$, tais que

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{P}},$$

então $\{ X_1, \dots, X_k \}$ são linearmente dependentes

Nota:

$0_{\mathcal{P}} \in K \Rightarrow K$ é linearmente dependente

$$K = \{ X_1, \dots, 0, \dots, X_k \}$$

"não todos nulos"

$$\boxed{0} X_1 + \boxed{0} X_2 + \dots + \boxed{1}\, 0 + \dots + \boxed{0} X_k = 0_{\mathcal{P}}$$