Aula 25

Aplicação linear injetiva e sobrejetiva

Injetiva

$\phi : V \to W$ apl. linear

ϕ é injetiva $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in V$, $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$

$\forall x_1, x_2 \in V$, $\phi(x_1) = \phi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Teorema:

Seja $\phi : V \to W$ uma apl. linear

$$\boxed{\phi \text{ é injetiva} \Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{Ker} \phi}_{\{x \in V \,:\, \phi(x) = 0_W\}} = \{0_V\}}$$

Sobrejetiva

Uma função $\phi : V \to W$ é sobrejetiva se $\operatorname{im}(\phi) = W$

Teorema: Seja $\phi : V \to W$ uma apl. linear

$$\boxed{\phi \text{ é sobrejetiva} \Leftrightarrow \dim(\operatorname{im}(\phi)) = \dim(W)}$$

Nota importante: Uma apl. linear injetiva e sobrejetiva é chamada de isomorfismo (apl. linear bijetiva)

Núcleo e espaço nulo, imagem e espaço das colunas

(V e W podem não ser o $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$)

Seja $\phi : V \to W$ uma apl. linear,

$\dim V = n$, $\dim W = m$

S uma base de V, $\mathcal{T}$ uma base de W

$A = M(\phi; S, \mathcal{T})$ $(m \times n)$

Núcleo de ϕ

$\operatorname{Ker} \phi = \{ x \in V : \phi(x) = 0_W \}$

Espaço nulo de ϕ

$$N(A) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = 0_{\mathbb{R}^m} \}$$

Imagem de ϕ

$$\text{im}(\phi) = \{ Y \in W : \exists\, X \in V : Y = \phi(X) \}$$

Espaço das colunas de A

$$\mathcal{C}(A) = \{ \bar{Y} \in \mathbb{R}^m : \exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{Y} = A\bar{x} \}$$

$$= \{ A\bar{x},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \}$$

Prova-se que ...

$$X \in \text{Ker}(\phi) \iff [X]_S \in N(A)$$

$$\underbrace{Y}_{\phi(x),\ \text{para algum } x} \in \text{im}(\phi) \iff [Y]_{\mathcal{T}} \in \mathcal{C}(A)$$

$$[\phi(x)]_{\mathcal{T}} \in \mathcal{C}(A)$$

Corolário importante

- $\dim \text{Ker}(\phi) = \dim N(A) = n - \text{car}$
- $\dim \text{im}(\phi) = \dim \mathcal{C}(A) = \text{car}(A)$
- ϕ é injetiva $\iff \text{car}(A) = n$ $\longrightarrow$
- ϕ é sobrejetiva $\iff \text{car}(A) = m$

$\text{Ker}\,\phi = \{0_V\}$

ϕ é injetiva $\Rightarrow \dim(\text{Ker}\,\phi) = 0$

$\Rightarrow \text{car}(A) = n$

$\underbrace{\text{nul}(A)}_{0} + \text{car}(A) = n$

Teorema das dimensões

$\phi : V \to W$

Se ϕ é uma apl. linear. Então:

$$\dim(\text{Ker}\,\phi) + \dim(\text{im}\,\phi) = \dim V$$

Corolário

Se $\phi : V \to W$ é uma apl. linear com $\dim V = \dim W$. Então:

ϕ é injetiva $\iff \phi$ é sobrejetiva

$\iff \phi$ é um isomorfismo

Isomorfismo e invertibilidade

Seja $\phi : V \longrightarrow W$ uma apl. linear

$\dim V = \dim W = n$

S é uma base de V e $A = M(\phi, S, T)$
T é uma base de W

$$\boxed{\phi \text{ é um isomorfismo} \iff A \text{ é invertível}}$$

Se ϕ é um isomorfismo, então ϕ é invertível e $\phi^{-1} : W \longrightarrow V$

é uma apl. linear e $A^{-1} = M(\phi^{-1}, T, S)$