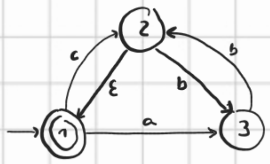
$L_3 = \{ab(c)^m(bb)^n : m>0 \wedge n\geq 0\}$

L_1 é reconhecida por:

M_1



$\boxed{\text{Mostre que } L_3 \subset L_1}$

Para mostrar que $L_3 \subset L_1$ irei primeiro mostrar 2 lemmas que por Indução Matemática me irão ajudar na formulação.

$\boxed{\underline{\text{Lemma 1}}\text{: Se } ab(c)^m(bb)^n \in L_1 \text{ então } ab(c)^m(bb)^{n+1} \in L_1}$

Mostrar que isto se verifica é equivalente a: (para o AFND M_1)

$$1 \xrightarrow{ab(c)^m(bb)^n} 1 \implies 1 \xrightarrow{ab(c)^m(bb)^{n+1}} 1$$

$$\boxed{1} \iff 1 \xrightarrow{ab} X_0 \xrightarrow{(c)^m} X_1 \xrightarrow{(bb)^n} 1 \implies 1 \xrightarrow{ab} X_0 \xrightarrow{(c)^m} X_1 \xrightarrow{(bb)^{n+1}} 1$$

$\boxed{X_0 = 1}$

Sabemos ainda que existe o caminho: $1 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{\varepsilon} 1$, ou seja, $1 \xrightarrow{ab\varepsilon} 1 \iff 1 \xrightarrow{ab} 1$

Para além disso, para $m>0$ (condição de L_3): $(c)^m = c(c)^{m-1}$

Assim,

$$1 \xrightarrow{(c)^m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ainda não} \\ \text{determinado}}}{X_1} \iff 1 \xrightarrow{c(c)^{m-1}} X_1 \iff 1 \xrightarrow{c} X_2 \xrightarrow{(c)^{m-1}} X_1$$

e como existe o caminho: $1 \xrightarrow{c} 2 \implies X_1 = 2$

Assim:

$$1 \xrightarrow{(c)^m} X_1 \iff 1 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{(c)^{m-1}} X_1$$

e como sabemos que existe sempre um caminho $2 \xrightarrow{(c)^{m-1}} 2$

Assim, existe o caminho:

$$1 \xrightarrow{(c)^m} 2 \qquad \boxed{X_1 = 2}$$

Voltando à equivalência principal:

$$\boxed{1} \iff \boxed{1 \xrightarrow{ab} 1 \xrightarrow{(c)^m} \underbrace{2 \xrightarrow{(bb)^n} 1} \implies 1 \xrightarrow{ab} 1 \xrightarrow{(c)^m} \underbrace{2 \xrightarrow{(bb)^{n+1}} 1}}$$

$$\iff 2 \xrightarrow{(bb)^n} 1 \implies 2 \xrightarrow{(bb)^{n+1}} 1$$

$$((bb)^{n+1} = (bb)^n\, bb = bb(bb)^n$$

$$\boxed{2} \iff 2 \xrightarrow{(bb)^n} 1 \implies 2 \xrightarrow{bb(bb)^n} 1$$

Isto verifica-se analizando que existe o caminho: $2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{b} 2 \iff 2 \xrightarrow{bb} 2$

Assim,

$$2 \xrightarrow{bb(bb)^n} 1 \iff \boxed{2 \xrightarrow{bb} 2 \xrightarrow{(bb)^n} 1}$$

$\boxed{=}$

Acabando assim com,

$$\boxed{2} \iff \boxed{2 \xrightarrow{(bb)^n} 1 \implies 2 \xrightarrow{bb} 2 \xrightarrow{(bb)^n} 1}$$

$$\iff 2 \xrightarrow{(bb)^n} 1 \implies 2 \xrightarrow{(bb)^n} 1$$

Que é verdadeiro! $\square$

$\boxed{\text{Lemma 2: Para } m=0 \text{ verifica-se que: } ab(c)^m(bb)^m \in L_1}$

Basta ver que para $m=0$: $ab(c)^m \varepsilon \in L_1 \Leftrightarrow ab(c)^m \in L_1$

Como vimos anteriormente: (existe o caminho)

$$1 \xrightarrow{ab} 2 \xrightarrow{(c)^m} 2 \quad \text{e como existe a transição } 2 \xrightarrow{\varepsilon} 1$$

$$\Rightarrow 1 \xrightarrow{ab} 2 \xrightarrow{(c)^m} 2 \xrightarrow{\varepsilon} 1, \text{ ou seja, } 1 \xrightarrow{ab(c)^m} 1 \Rightarrow ab(c)^m \in L_1 \quad // \square$$

Tendo estes 2 lemmas, se para $m=0$ $ab(c)^m(bb)^m \in L_1$
e se $ab(c)^m(bb)^m \in L_1 \Rightarrow ab(c)^m(bb)^{m+1} \in L_1$, por Indução Matemática

$$ab(c)^m(bb)^m \in L_1, \; m \geq 0, \; m > 0$$

ou seja, $L_3 \subseteq L_1$

Mas como $L_3 \neq L_1$, pois por exemplo: $ab \in L_1 \wedge ab \notin L_3$

Assim,

$$L_3 \subset L_1$$

$\square$