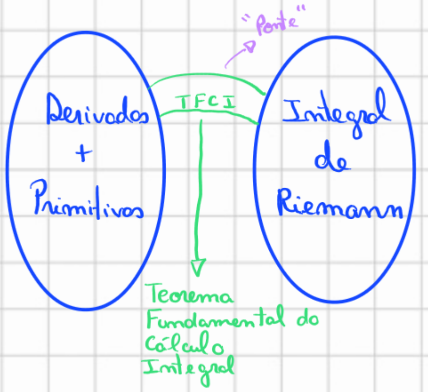
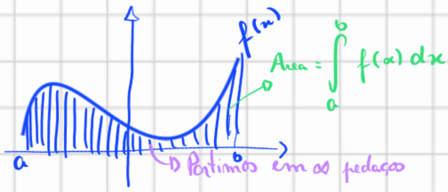
Aula 12

Ponto de situação



Integral de Riemann



- Para as funções f integráveis em $[a, b]$ tem-se:

$$\lim_{n \to +\infty} S_f(P_n, C_n) = \lim_{n \to +\infty} \overbrace{\sum_{i=1}^{n \,\to\, +\infty} f(x_i^*)\,\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i \,\xrightarrow[n \to +\infty]{}\, 0}}^{u_n}$$

$$= I = \text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

b → limite superior de integração

dx → variável de integração

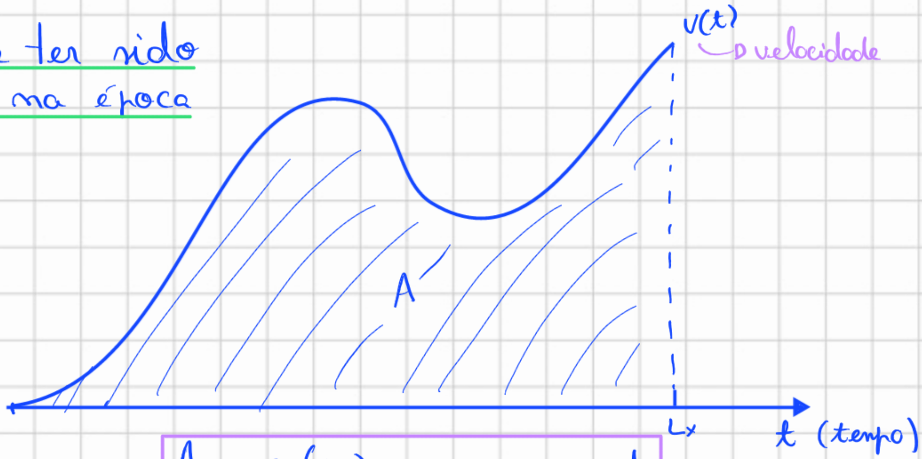
f(x) → Função integrada

a → limite inferior de integração

desde que $\lim_{n \to +\infty} |\Delta P_n| = 0$

(para toda e qualquer sucessão de partições P_n e suas seleções compatíveis C)

Motivo de ter sido invetado na época



$$\boxed{A = s(Lx) = \text{espaço percorrido}}$$

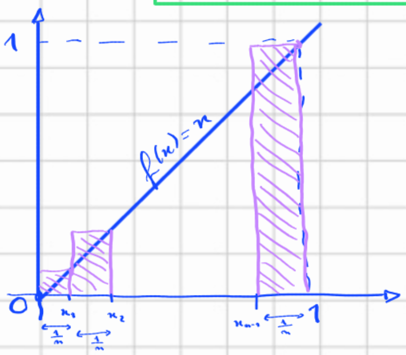
Exercício: (resolvido da mesma forma do 4.5 dos slides!)

Provar que: $\boxed{\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}}$

$A_\Delta = \frac{b \times h}{2}$

$b = 1$ e $h = 1$

$A_\Delta = \frac{1}{2}$



$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \; , \; i \in \mathbb{N}$

Considera-se uma partição regular

$\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

e uma seleção associada

$C = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

A soma de Riemann correspondente a $\mathcal{P}_n$ e C é:

$$S_f(\mathcal{P}_n, C) = \sum_{i=1}^{n} \overbrace{f(x_i)}^{=x_i} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \quad x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[a + \frac{b-a}{n} i\right] \times \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

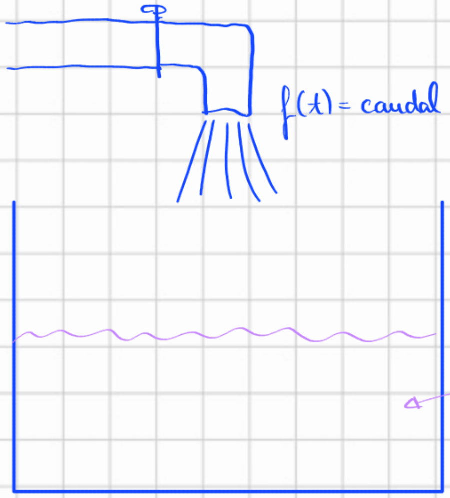
$$= \frac{1}{n^2} \underbrace{(1 + 2 + 3 + \dots + n)}_{\text{soma de } (1+n)\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \times (1+n) \frac{\cancel{n}}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2n}$$

Então,

$$\int_0^1 x \, dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \checkmark$$



$f(t)$ = caudal em litro/segundo

volume de água acumulada no intervalo $[0,T]$

é $= \int_0^T f(t)\,dt$

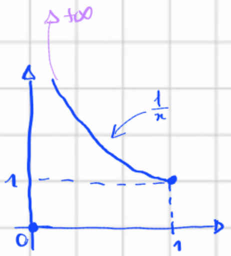
$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0 \\[2ex] \displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{onde } a<b \end{array}}$$

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função. Se f é integrável em $[a,b]$ então f é limitada em $[a,b]$

> É limitada em $[a,b]$ se existir $L\in\mathbb{R}^+$: $|f(x)|\leq L, \forall x\in[a,b]$

<u>Exemplo</u>:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ se } x\in\,]0,1] \\ 0 \text{ se } x=0 \end{cases}$$



- Esta função não é integrável em $[0,1]$ porque <u>não é limitada</u> em $[0,1]$.

- Na verdade,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- Então, f não é integrável, ou seja não existe um integral de Riemann $\int_0^1 f(x)\,dx$

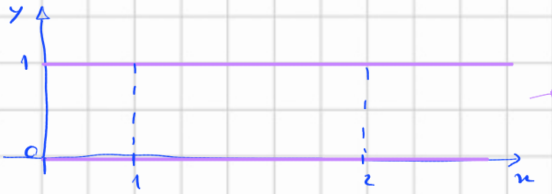
Exemplo: (função limitada não integrável)

$$h(x) = \begin{cases} 0 & se \ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & se \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

, $\mathbb{Q}$ = conjunto dos n.º racionais (números da forma $\frac{m}{k}$, $m, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$)

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = conjuntos dos n.º irracionais

- Esta função tem um gráfico que "não se desenha"  → Sá Esteves



→ o integral de Riemann $\int_1^2 f(x)\,dx$ não existe

Pois poderíamos dividir em parcelas cujo o limite da soma daria 1 ou 0, para Q ou IR/Q...

Condições de integrabilidade

$\boxed{1}$ Se f for <u>contínua</u> em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$

$\boxed{2}$ Se f for limitada em $[a,b]$ e <u>descontínua num número finito</u> de pontos então f é integrável em $[a,b]$

$\boxed{3}$ Se f for monótona (→ estrita ou lata) em $[a,b]$ então f é integrável em $[a,b]$