Aula 15

Derivação de integrais com limites de derivação que são funções

Introdução:

$\to$ função identidade

Suponha que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e f é contínua em $[a,b]$ $b>a$

Suponha também que $g: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) \in]a,b[$, $\forall x \in D_g$
e $g(x)$ é diferenciável em $]a,b[$

- Podemos definir a função $(F \circ g)(x) = F(g(x))$? SIM

$$\ell(x) = F(g(x)) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$$

- Consegue calcular $\ell'(x)$? SIM

Regra da cadeia

$$\ell'(x) = [F(g(x))]' = \left[\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right]' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$\boxed{\text{Exemplo (A)}}$

$$F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\,dt, \text{ onde } \begin{cases} f(t) = 1 + e^{t^2} \\ g(x) = x^2 \end{cases}$$

$\to$ Não conseguimos resolver $\int e^{t^2} dt$

a) $F'(x) = ?$, $\forall x \in \mathbb{R}$

- f é contínua em $\mathbb{R}$, logo é integrável em $I = \mathbb{R}$
- g é dif em $\mathbb{R}$ e $CD_g = \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R}$

Pelo TFCI e pela Regra da cadeia:

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) = f(x^2) \cdot (x^2)' = \left(1 + e^{(x^2)^2}\right)(2x)$$
$$= 2x\left(1 + e^{x^4}\right)$$

b) Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

$F(x) = 2x(1 + e^{x^4})$ é dif em $\mathbb{R}$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(1+e^{x^4}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \lor \underbrace{1 + e^{x^4} = 0}_{\text{impossível}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	$F(0)$ m	$\nearrow$

Nota: $CD = \mathbb{R}_0^+$

F atinge mínimo local (e global) em $x = 0$ e

$F(0) = \int_0^{g(0)} 1 + e^{t^2}\,dt = \int_0^0 1 + e^{t^2}\,dt = 0$ $\leftarrow$ mínimo local e global

Complicando um pouco mais:

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt \quad , \text{ onde } \begin{cases} f \text{ é contínua em } [a,b] \\ g_1(x) \text{ é dif. em } D_{g_1} \text{ e } CD_{g_1} \subset]a,b[\\ g_2(x) \text{ é dif em } D_{g_2} \text{ e } CD_{g_2} \subset]a,b[\end{cases}$$

f é contínua em $[a,b]$

Seja $c \in]a,b[$.

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{c} f(t)\,dt + \int_{c}^{g_2(t)} f(t)\,dt$$

$$H(x) = -\int_{c}^{g_1(x)} f(t)\,dt + \int_{c}^{g_2(x)} f(t)\,dt = \int_{c}^{g_2(x)} f(t)\,dt - \int_{c}^{g_1(x)} f(t)\,dt$$

Pelo TFC I e pela Regra da Cadeia

$$H'(x) = \left[-\int_{c}^{g_1(x)} f(t)\,dt + \int_{c}^{g_2(x)} f(t)\,dt\right]'$$

$$= f(g_2(x)) \cdot g_2'(x) - f(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$$

é o limite sup.

é o limite inferior

Exemplo (B)

$$F(x) = \int_{x^2+1}^{e^x} \frac{t}{t^2+1}\,dt \,.\ \text{Calcule } F'(x)$$

$$F(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt, \text{ onde } \begin{cases} f(t) \text{ é contínua em } \mathbb{R} \\ g_1(x) = x^2+1, \text{ dif em } D_{g_1} = \mathbb{R} \text{ e } CD_{g_1} = [1, +\infty[\subset D_f \\ g_2(x) = e^x, \text{ dif em } D_{g_2} = \mathbb{R} \text{ e } CD_{g_2} = \mathbb{R}^+ \subset D_f \end{cases}$$

$$F'(x) = f(g_2(x)) \cdot g_2'(x) - f(g_1(x)) \cdot g_1'(x)$$

$$= e^x \cdot \frac{e^x}{e^{2x}+1} - \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2+1} \cdot 2x$$

$$= \frac{e^{2x}}{\underbrace{e^{2x}+1}_{>0}} - \frac{2x^3+2x}{\underbrace{x^4+2x^2+2}_{>0}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

No entanto, há outra via...

$f(t) = \dfrac{t}{t^2+1}$ é contínua em $\mathbb{R}$, pelo que posso

aplicar a Regra de Barrow e obter uma expressão analítica alternativa para $F(x)$

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{x^2+1}^{e^x} \frac{2t}{t^2+1}\,dt \quad , \quad e \quad \int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \ln(t^2+1) + c, \; c \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_{x^2+1}^{e^x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) - \frac{1}{2}\ln((x^2+1)^2+1) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{x^4+2x^2+2}\right)$$

$$F'(x) = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{x^4+2x^2+2}\right)\right]'$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{e^{2x}+1}{x^4+2x^2+2}\right)'}{\dfrac{e^{2x}+1}{x^4+2x^2+2}} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\dfrac{\cancel{2}e^{2x}(x^4+2x^2+2) - (e^{2x}+1)(\cancel{4}^{2}x^3+\cancel{4}^{2}x)}{(x^4+2x^2+2)^{\cancel{2}}}}{\dfrac{e^{2x}+1}{\cancel{x^4+2x^2+2}}}$$

$$= \frac{e^{2x}(\cancel{x^4+2x^2+2})}{(e^{2x}+1)(\cancel{x^4+2x^2+2})} - \frac{(\cancel{e^{2x}+1})(4x^3+4x)}{(\cancel{e^{2x}+1})(4x^4+2x^2+2)}$$

$$= \frac{e^{2x}}{\underbrace{e^{2x}+1}_{>0}} - \frac{2x^3+2x}{\underbrace{x^4+2x^2+2}_{>0}} \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

—— // ——

$\boxed{\text{Exemplo (c)}}$

$$L = \lim_{x\to1} \frac{\int_1^{x^2} t\cdot\cos(1-e^{1-t})\,dt}{x^2-1}$$

$\to x^2-1=0$, quando $x=1$

Como $\int_1^1 t\cos(1-e^{1-t})\,dt = 0$ e $[x^2-1]_{x=1} = 0$

temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$.

Regra de Cauchy:

$$L_2 = \lim_{x\to1} \frac{\left[\int_1^{x^2} t\cdot\cos(1-e^{1-t})\,dt\right]'}{[x^2-1]'}$$

$$L_1 = \lim_{x\to1} \frac{\cancel{x^2}\cos(1-e^{1-x^2})\cancel{(x^2)'}}{\cancel{2x}}$$

$L_2 = \cos(0) = 1$, então $L = L_2 = 1$

Exemplo D

$$F(x) = \int_0^x \Big(\underbrace{\int_0^t e^{-u^2} du}_{f(t)} \Big) dt$$

$F''(x) = ?$

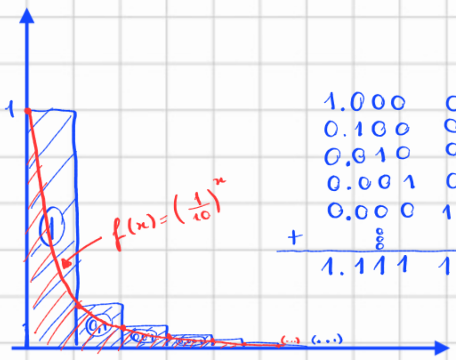
$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, com $f(t) = \int_0^t g(u)\, du$ e $g(u) = e^{-u^2}$

$$F'(x) = f(x) = \int_0^t g(u)\, du$$

$$F''(x) = [f(x)]' = f'(x) = g(x) = e^{-2x^2}$$

Integrais Impróprios

(Introdução e motivação)



$$\begin{array}{r} 1.000\ 000\ 000 \ldots \\ 0.100\ 000\ 000 \ldots \\ 0.010\ 000\ 000 \ldots \\ 0.001\ 000\ 000 \ldots \\ 0.000\ 100\ 000 \ldots \\ + \quad \vdots \\ \hline 1.111\ 111\ 111 \ldots = \frac{10}{9} \end{array}$$

Soma de um nº infinito de retângulos e deu uma área finita

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^x dx < \frac{9}{10}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

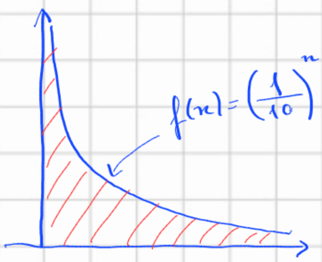
Sabemos calcular:

$$I(t) = \int_0^t f(x)\, dx = \int_0^t 10^{-x} dx,\ t \in \mathbb{R}^+$$

$$I(t) = \left[\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}\right]_0^t = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^t}{\ln\left(\frac{1}{10}\right)} - \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{10}\right)} = \frac{1 - 10^{-t}}{\ln(10)}$$

Fazendo tender $t \to +\infty$

$$I = \lim_{t \to +\infty} I(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1 - 10^{-t}}{\ln(10)} = \frac{1}{\ln(10)} = 0{,}43429\ldots < 1{,}1111\ldots$$



$$\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b f(x)\, dx}$$

$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ é um integral impróprio no limite superior de integração