Q 4 — EF

Resolução da Q2 do 2.º teste de Cálculo I - agr. 4 2021/22

2. (a)

(i) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = \lim_{\alpha\to-\infty} \int_{\alpha}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx =$

$= \lim_{\alpha\to-\infty} \left[\arcsin(e^x)\right]_{\alpha}^{-1} = \lim_{\alpha\to-\infty} \left(\arcsin\left(\frac{1}{e}\right) - \arcsin(e^{\alpha})\right) = \arcsin\left(\frac{1}{e}\right) - \lim_{\alpha\to-\infty} \arcsin(e^{\alpha}) =$

$= \arcsin\left(\frac{1}{e}\right) - \arcsin(0) = \arcsin\left(\frac{1}{e}\right) - 0 = \arcsin\left(\frac{1}{e}\right)$

Cálculos auxiliares:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx \underset{\substack{u=e^x \\ du=e^x dx}}{=} \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin(u) + C = \arcsin(e^x) + C$$

Resposta: o integral impróprio de primeira espécie é convergente e o seu valor é $\arcsin\left(\frac{1}{e}\right)$.

(ii) 4(a) do EF

$\int_{1}^{e} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{\alpha\to1^+} \int_{\alpha}^{e} \frac{1}{x\ln x}\,dx =$

$= \lim_{\alpha\to1^+} \left[\ln(\ln x)\right]_{\alpha}^{e} = \lim_{\alpha\to1^+} \left(\ln(\ln e) - \ln(\ln\alpha)\right)$

$= \ln(\ln e) - \lim_{\alpha\to1^+} \ln(\ln\alpha) = \ln(1) - (-\infty) = 0+\infty$

$= +\infty$

Resposta: o integral impróprio de segunda espécie diverge.

2 (b) 4(b) do E. Final

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{3^n}{e^{2n+1}}+\frac{1}{e^{1/n}}-\frac{1}{e^{1/(n+1)}}\right]\overset{\text{porque a série converge}}{=}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{-3}{e^2}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^{1/n}}-\frac{1}{e^{1/(n+1)}}\right)=$$

$$=-\frac{3}{e(e^2+3)}+\frac{1-e}{e}=\frac{e}{e^2+3}-1.$$

Cálculos auxiliares:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{-3}{e^2}\right)^n=\frac{-\frac{3}{e^3}}{1+\frac{3}{e^2}}=-\frac{3}{e^3+3e},$$ série geométrica

de razão $r=-\frac{3}{e^2}$, $|r|<1$, logo convergente

e de primeiro termo $a=-\frac{3}{e^3}$;

$$u_n=\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(u_n-u_{n+1})=u_1-1\cdot\lim_n u_n$$

$$=\frac{1}{e}-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^0}=\frac{1}{e}-\frac{1}{1}=\frac{1-e}{e},$$

série telescópica (ou de Mengoli, ou redutível)