Resolução 5.a) O integral
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx \tag{1}$$
é impróprio, de segunda espécie, num ponto interior do intervalo de integração. Na verdade, a função integranda não está definida se $\sin x = \cos x$. Esta equação, no intervalo $[0, \pi]$, é equivalente a $\tan x = 1$ e só tem a solução $x = \arctan(1) = \pi/4$. Junto a este ponto, a função integranda é ilimitada (à esquerda e à direita). Nos restantes pontos de $[0, \pi]$ a função é contínua. O integral (1) converge se e só se ambos os integrais (de segunda espécie), convergirem:
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_{\pi/4}^{\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx.$$
Calculemos o primeiro integral por definição:
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx &= \lim_{b\to(\frac{\pi}{4})^-} \int_0^{b} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\, dx \\
&= \lim_{b\to(\frac{\pi}{4})^-} \left[\ln|\sin x - \cos x|\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to(\frac{\pi}{4})^-} \ln|\sin b - \cos b| - \ln|\sin(0) - \cos(0)| \\
&= \lim_{b\to(\frac{\pi}{4})^-} \ln|\sin b - \cos b| - \ln|0 - 1| \\
&= \lim_{b\to(\frac{\pi}{4})^-} \ln|\sin b - \cos b| \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$
Este integral diverge. Basta esse facto para garantir que o integral (1) diverge.

Resolução 5.b)i) A série
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan n + n}{n\sqrt{n} + 1} \tag{2}$$
é de termos positivos pois $\arctan n \in [\pi/4, \pi/2[,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Podemos aplicar o critério do limite comparando com a série de Dirichlet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ que sabemos ser divergente.
$$\begin{aligned}
\ell &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\arctan n + n}{n\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\,(\arctan n + n)}{n\sqrt{n} + 1}; \\
\ell &= \lim_{n\to+\infty} \left(n\sqrt{n}\right) \frac{(\arctan n)/n + 1}{n\sqrt{n} + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\arctan n)/n + 1}{1 + n^{-3/2}} = 1 \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$
A série (2) tem a mesma natureza da série de Dirichlet referida. São ambas divergentes.

Também seria possível resolver comparando com a série de termo geral $\frac{n}{n\sqrt{n}+1}$, provando-se, por sua vez, que esta diverge usando comparação com a mesma série de Dirichlet usada em cima, atendendo a que o termo geral desta nova série é inferior ao termo geral da série dada, como segue da observação feita inicialmente na resolução acima.

Resolução 5.b)ii) A série
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4^{n/2}\, n^2}{3^{2+n}\,(n+3)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n\, n^2}{9 \cdot 3^n\,(n+3)} \tag{3}$$
é de termos não nulos. O critério de D'Alembert é aplicável.
$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}\,(n+1)^2}{9\cdot 3^{n+1}\,(n+4)}}{\frac{2^n\, n^2}{9\cdot 3^n\,(n+3)}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right) \frac{(n+3)\,(n+1)^2}{(n+4)\, n^2} \right] = \frac{2}{3} \in [0, 1[.$$
A série converge. A convergência é absoluta.