Aula 04

1ª pergunta de um teste!

$f(x) = 10 \, \text{arctg}\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)$ → é uma tangente $x \in \mathbb{R}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0 \wedge \frac{3}{x^2} - 1 \in D_{\text{arctg}}\}$ $\qquad \frac{3 - x^2}{x^2}$

$= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

$= \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\boxed{\text{Extremos, etc...}}$

$$f'(x) = 10 \times \frac{\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)'}{1 + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)^2} = 10 \times \frac{\left(\frac{3 - x^2}{x^2}\right)'}{1 + \frac{9}{x^4} - \frac{6}{x^2} + 1}$$

$$= 10 \times \frac{\frac{-2x \times x^2 - (3 - x^2) \times 2x}{x^4}}{2 + \frac{9 - 6x^2}{x^4}}$$

$$= 10 \times \frac{\frac{-6x}{\cancel{x^4}}}{\frac{2x^4 - 6x^2 + 9}{\cancel{x^4}}}$$

$$= \frac{-60x}{2x^4 - 6x^2 + 9} \qquad (2x^4 - 6x^2 + 9) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

→ biquadratica, $y = x^2$ surge $2y^2 - 6y + 9$ que é quadrática

$2x^4 - 6x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y + \frac{9}{2} = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{-9}}{2}$

$\Leftrightarrow y \notin \mathbb{R}$,

logo $x^4 - 3x^2 + \frac{9}{2} = 0$ não tem raizes reais.

Para $x = 0$ $\quad 0^4 - 3 \times 0^2 + \frac{9}{2} = \frac{9}{2} > 0$

Concluo, que $2x^2 - 6x^2 + 9 > 0, \forall x \in D_f$

$D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^-$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	N.D	$-$	
$f(x)$		↗	N.D.	↘	

f é diferenciável em $\mathbb{R}^-$ e se tivesse extremos relativos em $\mathbb{R}^-$ a derivada anulava-se (T. Fermaut)
Isso não acontece.
f não tem extremos em $\mathbb{R}^+$

Para $\mathbb{R}^+$ a conclusão é análoga

Concluo: f não tem nenhum extremo/extremante

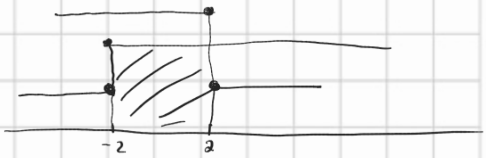
$\boxed{\text{Outro}}$ estilo 1.ª pergunta

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} : 4-x^2 \geq 0 \ \wedge \ \frac{x}{2} \geq -1 \ \wedge \ \frac{x}{2} \leq 1\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : \ x \geq -2 \wedge x \leq 2 \ \wedge \ x \geq -2 \wedge x \leq 2\right\}$$

$$= [-2, 2]$$



f é contínua em $[-2,2]$ porque é a soma de duas funções contínuas, uma que resulta do produto de funções contínuas e uma trigonométrica.

$\Rightarrow$ Pelo Teorema de Weierstrass garante-se que a função f atinge em $[-2,2]$ (compacto) um valor máximo global e um valor mínimo global.

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x\left(\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' + 2 \times \frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{4-x^2} + x \times \frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) + \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\sqrt{\frac{4-x^2}{\cancel{4}}}}$$

$$= \sqrt{4-x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^{\cancel{2}} - x^2 + 2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{6-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x \in]-2,2[\Rightarrow D_{f'} =]-2,2[$$

$$= \frac{(6-2x^2) \times \left(\sqrt{4-x^2}\right)}{4-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (6-2x^2)\left(\cancel{\sqrt{4-x^2}}\right) = 0 \ \wedge \ x \in]-2,2[$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$f'(x) > 0, \ \forall x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$$

$$f'(x) < 0, \ \forall x \in]-2, -\sqrt{3}[\ \cup \ ]\sqrt{3}, 2[$$

x	-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2
$f'(x)$	N.D.	$-$	0	$+$	0	$-$	N.D.
$f(x)$	$-\pi$	$\searrow$	$-\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$	$\nearrow$	$\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$	$\searrow$	π

Nota: $\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \simeq 3{,}8 > \pi \simeq 3{,}14$