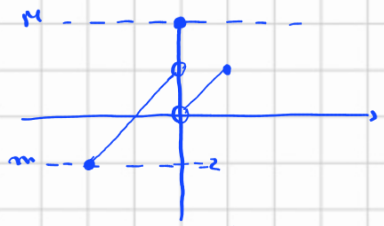
Ficha 3

1

a) função contínua $\Rightarrow$ integrável

b) Não é contínua
Não é limitada
Não é monótona
$\Bigg\}\Rightarrow$ não é integrável

c)



Função limitada e descontínua em um número finito de pontos ($x=0$), logo é integrável

2

a)
$$F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}\,dt$$

Seja $f(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$, é contínua em $\mathbb{R}$
logo F é diferenciável em $\mathbb{R}$
e $F'(x) = f(x)\,x'$

Logo, $F'(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $D_{F'} = \mathbb{R}$

b)
$$F(x) = \int_x^0 e^{-s^2}\,ds$$
contínua $D=\mathbb{R}$

$$F'(x) = -\left(e^{-x^2}\right)\times x' = -e^{-x^2},\quad D=\mathbb{R}$$

c)
$$F(x) = \int_2^{\sqrt{x}} \cos t^4\,dt$$
contínua $D=\mathbb{R}$

$$F'(x) = \cos x^2 \times \left(x^{1/2}\right)' = \cos x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}},\quad D_{F'} = \mathbb{R}^+$$

d)
$$F(x) = \int_{\cos x}^{x^3} \ln(t^2+1)\,dt$$
contínua $D=\mathbb{R}$

$$F'(x) = \ln(x^6+1)\times 3x^2 - \ln(\cos^2 x+1)\times(-\sin x),\quad D_{F'} = \mathbb{R}$$

e)
$$F(x) = x^3\int_1^x e^{-s^2}\,ds$$
contínua $D=\mathbb{R}$

$$F'(x) = 3x^2\int_1^x e^{-s^2}\,ds + x^3\times e^{-x^2},\quad D_{F'} = \mathbb{R}$$

$\int^x f(t)\,dt = -\int_x f(t)\,dt$, logo $x\in\mathbb{R}$ e $\int f(t)\,dt = 0$

$\boxed{3}$

$$F(x) = \underbrace{\int_0^x \Big(\underbrace{\int_0^t \overset{\text{contínua}}{e^{-u^2}}\, du}_{\text{Dif.}} \Big) dt}_{\text{Dif}}$$

"Uma coisa implica a outra"

$$F'(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$$

$$F''(x) = e^{-x^2}, \quad D_{F''} = \mathbb{R}$$

$\boxed{6}$

$$\int_1^1 f(t)\,dt = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{x^2} t\cos(1-e^{1-t})\,dt}{x^2-1}$$, indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$ logo utilizamos a Regra de Cauchy.

Seja $F(x) = \int_1^{x^2} t\cos(1-e^{1-t})\,dt$ e $f(t) = t\cos(1-e^{1-t})$

F é diferenciável pois $f(t)$ é contínua em $\mathbb{R}$, assim:

$$F'(x) = x^2\cos(1-e^{1-x^2}) \times 2x$$

$$(x^2-1)' = 2x \neq 0$$

Logo, o limite dado é:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^3\cos(1-e^{1-x^2})}{2x} = \lim_{x\to 1}\left(x^2\cos(1-e^{1-x^2})\right) = 1\times\cos(1-e^0)$$
$$= 1\times\cos(0)$$
$$= 1\times 1 = 1$$

$\boxed{10}$

a) f é contínua em $[a,b]$ e que $f(x)\geq 0, \forall x \in [a,b]$

Como f é contínua em $I=[a,b]$ logo é integrável em I, sendo $F(x) = \int_a^b f(x)\,dx$.

Como f é integrável em I e $f(x)\geq 0$ em $I \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ em I

Agora falta provar que $\int_a^b f(x)\,dx \neq 0$.

Como f é contínua em $[a,b]$ então:

$$\exists \bar{x} \in]a,b[: \int_a^b f(x)\,dx = f(\bar{x})(b-a)$$

Assim, para $F(x)=0 \Rightarrow f(\bar{x})=0 \vee b-a=0$

$b>a$, Impossível

$F(x) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

Logo, se existir um $\bar{x} \in]a,b[$ e $f(\bar{x}) > 0$

então $F(x) \neq 0 \Rightarrow F(x) > 0$

Já provado antes!

b) Falsa. Contra-exemplo:

contínua $D = \mathbb{R}$

$$\int_0^{\pi} \cos x \, dx = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0 \text{ e } \cos(x) \neq 0$$

c.q.m

$\boxed{19}$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2 \wedge y \geq x-1 \wedge y \leq 4\}$$

a)

$(x-3)^2 = x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 10}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2$

$(x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 5}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$

$x - 1 = 4$

$\Leftrightarrow x = 5$

$g(x) = (x-3)^2$

$g'(x) = 2(x-3)$

$= 2x - 6$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Os pontos de interseção de $y = (x-3)^2$ e $y = x - 1$ são:

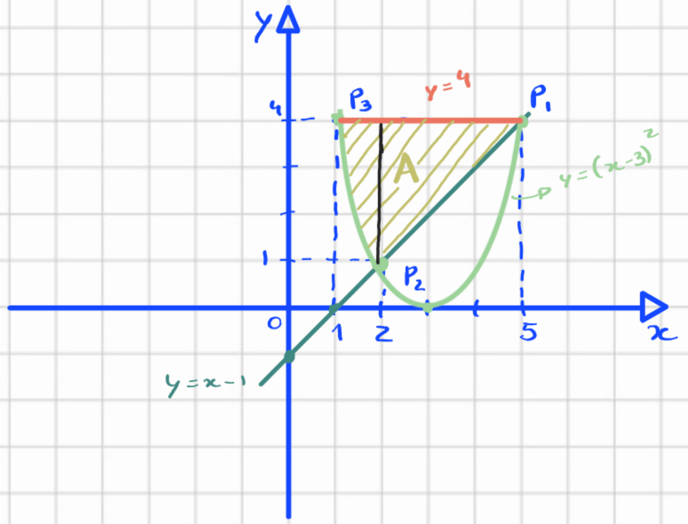
$P_1(5,4)$ e $P_2(2,1)$

" " " " de $y = (x-3)^2$ e $y = 4$ são:

$P_3(1,4)$ e $P_1(5,4)$

" " " " de $y = x - 1$ e $y = 4$ são:

$P_1(5,4)$



b)

$$A = \int_1^2 4 - (x-3)^2\, dx + \int_2^5 4 - (x-1)\, dx$$

$$= \int_1^2 4 - x^2 + 6x - 9\, dx + \int_2^5 4 - x + 1\, dx$$

$$= \int_1^2 -x^2 + 6x - 5\, dx + \int_2^5 -x + 5\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_1^2 + \left[-\frac{x^2}{2} + 5x\right]_2^5$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6\times 2^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} - \frac{6}{2}\right) - \left(5\times 2 - 5\right) + \left(-\frac{25}{2} + \frac{4}{2}\right) + \left(5\times 5 - 5\times 2\right)$$

$$= -\frac{7}{3} + 9 - 5 - \frac{21}{2} + 15$$

$$= -\frac{14}{6} - \frac{63}{6} + \frac{114}{6}$$

$$= -\frac{77}{6} + \frac{114}{6} = \frac{37}{6}$$

$\boxed{22}$

$$F(2\beta) = \int_0^{2\beta} \underbrace{\frac{4}{\beta^3}}_{\in \mathbb{R}^+} r^2 e^{-\frac{2r}{\beta}}\, dr = \frac{4}{\beta^3}\int_0^{2\beta} r^2 e^{-\frac{2r}{\beta}}\, dr$$

$$e^{-\frac{2r}{\beta}} = t \Leftrightarrow -\frac{2r}{\beta} = \ln(t)$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\beta \ln(t)}{-2}$$

$$\left(\frac{\beta \ln(t)}{-2}\right)' = \frac{\beta}{-2t}$$

$r \to t$

$r = g(t) = \frac{\beta}{-2}\ln(t)$

$g'(t) = \frac{\beta}{-2t} < 0,\ t \in \mathbb{R}^+$

g é dif. e inv. em I

$dx = \frac{\beta}{-2t}\, dt$

$u = t \qquad v = \ln^2(t)$

$u' = 1 \qquad v' = \frac{2\ln(t)}{t}$

$u_0 = t \qquad v_0 = \ln(t)$

$u_0' = 1 \qquad v_0' = \frac{1}{t}$

$$\int r^2 e^{-\frac{2r}{\beta}}\, dr = \int \left(\frac{\beta}{-2}\right)^2 \ln^2(t) \times \cancel{t} \times \frac{\beta}{-2\cancel{t}}\, dt$$

$$= \frac{\beta^3}{-8}\int \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln^2(t)}_{v}\, dt$$

$$= \frac{\beta^3}{-8}\left(t\ln^2(t) - 2\int \underbrace{\cancel{t}}_{u_0} \times \underbrace{\frac{\ln(t)}{\cancel{t}}}_{v_0}\, dt\right)$$

$$= -\frac{\beta^3}{8} t\ln^2(t) + \frac{\beta^3}{4}\left(t\ln(t) - t\right)$$

$$= \frac{-\beta^3 t\ln^2(t) + 2\beta^3 t\ln(t) - 2\beta^3 t}{8}$$

$t \to r$

$t = e^{-\frac{2r}{\beta}}$

$$= \frac{-\beta^3 e^{-\frac{2r}{\beta}}\left(-\frac{2r}{\beta}\right)^2 + 2\beta^3 e^{-\frac{2r}{\beta}}\left(-\frac{2r}{\beta}\right) - 2\beta^3 e^{-\frac{2r}{\beta}}}{8}$$

$$= \frac{-\beta e^{-\frac{2r}{\beta}} 2r^2 - 2\beta^2 e^{-\frac{2r}{\beta}} r - \beta^3 e^{-\frac{2r}{\beta}}}{4}$$

Juntando:

$$F(2\beta) = \frac{\cancel{4}}{\beta^3} \times \left[\frac{-\beta e^{-\frac{2r}{\beta}} 2r^2 - 2\beta^2 e^{-\frac{2r}{\beta}} r - \beta^3 e^{-\frac{2r}{\beta}}}{\cancel{4}} \right]_0^{2\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} \left[-e^{-\frac{2r}{\beta}} 2r^2 - 2\beta e^{-\frac{2r}{\beta}} r - \beta^2 e^{-\frac{2r}{\beta}} \right]_0^{2\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta^2} \times \left(\left(-e^{-4} \times 2 \times 4\cancel{\beta^2} - 2\cancel{\beta} e^{-4} \times 2\cancel{\beta} - \cancel{\beta^2} e^{-4} \right) - \left(0 - 0 - \cancel{\beta^2} \right) \right)$$

$$= -8e^{-4} - 4e^{-4} - (-1)$$

$$= 1 - 13e^{-4}$$

$\boxed{24}$

Como $\frac{e^t}{t+1}$ é contínua em $[1,+\infty[\Rightarrow F$ é diferenciável em $[1,+\infty[$

Assim, $F'(x) = \frac{e^{\ln x}}{\ln x + 1} \times \frac{1}{x} = \frac{\cancel{x}}{\ln x + 1} \times \frac{1}{\cancel{x}} = \frac{1}{\ln x + 1}$

Como para $x \in [1,+\infty[$ $\ln x + 1 > 0$

$F'(x) > 0, \forall x \in [1,+\infty[$, logo é estritamente crescente!

$\boxed{26}$

a)

Como f é uma função contínua em $[2,5]$ então é integrável em $[2,5]$ assim pelo TFCI a função F é contínua em $[2,5]$ então é integrável em $[2,5]$

b)

Com F é contínua em $x \in [2,5]$, pelo Teorema do valor médio:

$$\exists c \in]2,5[: \int_2^5 F(t)\,dt = F(c)(5-2)$$
$$= 3\int_2^c f(t)\,dt$$

c.q.m.

$\boxed{28}$

a) Como f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral F é diferenciável em $\mathbb{R}$ sendo:

$$F'(x) = x^3 e^{\operatorname{sen} x^3} \times (x^3)' = 3x^5 e^{\operatorname{sen} x^3}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^3} t e^{\operatorname{sen} t}\, dt}{\operatorname{sen} x}, \text{ indeterminação } \left(\tfrac{0}{0}\right)$$

$$\overset{\text{R.C.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3x^5\, e^{\operatorname{sen}(0)}}{\cos x} = \frac{3\times 0\times e^0}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

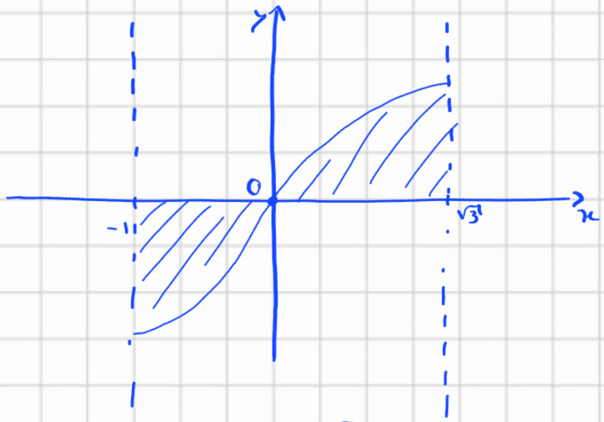
$\boxed{29}$

a)

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx = \int x \times (x^2+1)^{-3/2}\, dx = \frac{1}{2}\int 2x \times (x^2+1)^{-3/2}\, dx$$

$$= \cancel{\tfrac{1}{2}} \times \frac{1}{(x^2+1)^{1/2} \times \left(-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

b)



$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\sqrt{x^2+1} - x\,\frac{3}{2}\times\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\left((x^2+1) - \frac{3}{2}x\right)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{x^2 - \frac{3}{2}x + 1}{(x^2+1)^{5/2}} > 0$$

$$A = -\int_{-1}^{0} f(x)\, dx + \int_0^{\sqrt{3}} f(x)\, dx$$

$$= \cancel{-}\left[\cancel{-}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2\sqrt{2}}$$

$\boxed{30}$