Aula 02

Teoremas sobre funções contínuas (Bolzano + Weierstrass)

$[a,b], b>a$

Definição (Intervalo compacto)

- Um intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (fechado, limitado, com $b>a$) chama-se intervalo compacto.

T. Bolzano (Bolzano - Cauchy ou Teorema dos valores intermédios)

→ Uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, contínua não passa de um valor para outro sem passar por todos os valores intermédios.

Corolário

→ Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e f é contínua em $[a,b]$
então $\boxed{\exists\, c \in\,]a,b[: f(c) = 0}$

Ex. 2.3.
Slide 36

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contínua

Únicos zeros de f são $x=a$ e $x=b$

Ou seja, não $\exists\, c \in\,]a,b[: f(c)=0$

Não importante!

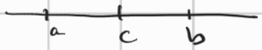
Agora usando o método "Redução ao Absurdo":

→ Supomos o contrário. Ou seja que nas condições da proposição:

$$\exists\, c \in\,]a,b[: f(c)=0$$

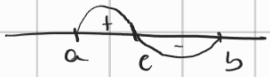
→ Nesse caso, a função tem zeros em $x=a$, $x=c$ e $x=b$

1.º caso

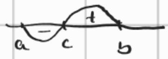


Não tem sinal definido

2.º caso



Muda de sinal



Muda de sinal

Logo é absurdo supor a existência de um zero $c \in]a, b[$.

Definição de Supremo de um conjunto Majorável

- Um conjunto de números reais $\mathcal{C}$ diz-se majorável se existe um número mínimo $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$M \geq x \,, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\uparrow$ Majorante de $\mathcal{C}$

Exemplo

$[0, 1[$ é majorável pois $M_1 = 2 > x \,, \ \forall x \in [0, 1]$

$M_2 = 1{,}5$

$M_3 = 1{,}05$

$\vdots$

Escreve-se: $\sup \mathcal{C} = \sup\limits_{[0,1[} = 1$

Axioma do supremo: Todo o conjunto $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ majorável admite supremo!

(O supremo pode ser elemento do conjunto, $\sup [0,1] = 1 \in [0,1]$ ou não pertencer ao conj. $\sup [0,1[= 1 \notin [0,1[$)

Contra exemplo: $\mathcal{C} =]3, 4] \cup \{7\} \cup]9, +\infty[$

→ Não existe $M \in \mathbb{R} : M > x \,, \ \forall x \in \mathcal{C}$

→ Neste caso $\mathcal{C}$ não é majorável

Minorante e Ínfimo

→ Um conjunto de números reais C diz-se minorável se existe

$m \in \mathbb{R} : m < x,\ x\ \forall x \in C$

<u>Exemplo</u>: $C =]2, +\infty[$ é minorável pois

$m_1 = -1 < x,\ \forall x \in C$

$m_2 = 0$

$\vdots$

$m_1 = 2 < x,\ \forall x \in]2, +\infty[$

O menor dos minorantes de C designa-se por **Ínfimo de C**

Axioma do Ínfimo: Todo o conjunto $C \in \mathbb{R}$ minorável admite Ínfimo

Escreve-se: $\inf]2, +\infty[= 2$

$\inf\limits_{]2,+\infty[} = 2$

O Ínfimo pode ou não pertencer ao conjunto C

Quando um conjunto C tem supremo e o supremo pertence diz-se que $\sup C = \underbrace{\text{máx}}_{\text{Máximo de } C}\ C$

→ Nesse caso o conjunto admite Máximo, se o supremo de C não pertencer a C diz-se que o conjunto não admite máximo

$C =]-\infty, 3]$

$\sup]-\infty, 3] = 3 = \text{máx}\ ]-\infty, 3]$

(igual para o mínimo)

Maximizante global

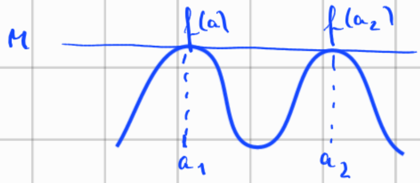
$f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D_f$

$\underline{a}$ é maximizante global de f e $f(a)$ é o máximo global de f
se $f(a) \geq f(x), \forall x \in D_f$

$$\boxed{f(a) = \text{máx } CD_f}$$

— // —

Se $f(a) \leq f(x)$ então: $f(a) = \min CD_f$



M é o máximo de f
$M = \max CD_f$, mas é atingido em dois maximizantes a_1 e a_2

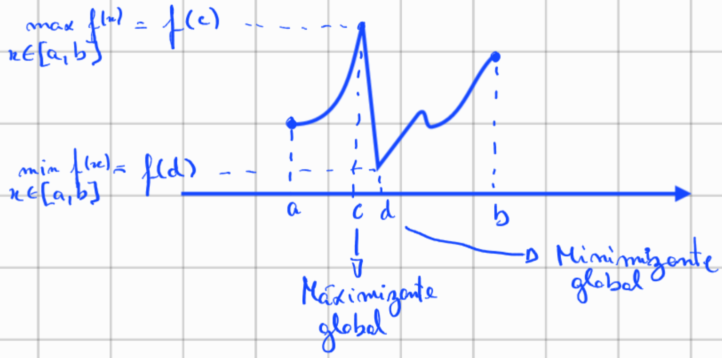
Ex. $f(x) = e^x > 0$, $CD_f = \mathbb{R}^+$

$\boxed{m = 0 = \inf CD_f}$, mas como $0 \notin D_f = \mathbb{R}^+$ diz-se que $f(x)$ não atinge mínimo global

maior dos minorantes do CD_f

$\boxed{\text{nem é majorável}}$

Teorema de Weierstrass



- A função está nas condições do T. de Weierstrass
- Então CDf atinge um valor máximo e um valor mínimo

Ex.

$f(x) = e^x \quad , x \in [0,1]$

$CD_f = [1, e]$

$\inf CD_f = 1 \in CD_f \qquad\qquad \sup CD_f = e \in CD_f$

$\min_{x\in[0,1]} CD_f = 1 \qquad\qquad \max_{x\in[0,1]} CD_f = e$

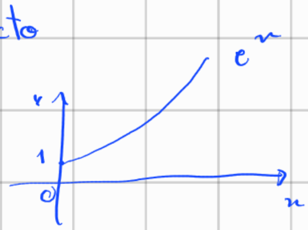
Minimizante $x_m = 0$

Maximizante $x_M = e$

-11-

$f(x) = e^x , \quad x \in [0, +\infty[\longrightarrow$ não é um intervalo compacto

CD_f não admite supremo (nem máximo)



No entanto, CD_f admite ínfimo e mínimo

$\inf_{x\in[0,+\infty[} e^x = 1 \in CD_f$

$1 = \min_{x\in[0,+\infty[} CD_f$

1 é o mínimo global de f atingindo em $x_m = 0$
minorante