Teoremas para Teste 1

- T. de Bolzano
- T. de Weierstrass
- T. de Fermat
- T. de Rolle
- Corolário I do T. Rolle
- Corolário II do T. Rolle
- T. de Lagrange
- T. de Cauchy

Definições Importantes:

- **Intervalo compacto:** Um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (fechado, limitado, com $b<a$) chama-se intervalo compacto

- **Função regular:** Diz-se que f é regular em $[a,b] \subset D_f$ se f é contínua em $[a,b]$ e é diferenciável em $]a,b[$
  ↳ tem derivada e é finita

- **Conjunto majorável:** Um conjunto de números reais P diz-se majorável se existe um número máximo $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
  Majorante de P → $\sup P = M$

- **Axioma do supremo:** Todo o conjunto $P \in \mathbb{R}$ majorável admite supremo!
  → O supremo pode ou não ser elemento do conjunto

- **Máximo:** Quando um conjunto P tem supremo e o supremo pertence a P diz-se que $\sup P = \text{máx } P$
  ↳ máximo de P

- **Máximo global:** Se $f(a) \geq f(x)$, $\forall x \in D_f \Longrightarrow \boxed{f(a) = \text{máx } CD_f}$
  ⇓
  → a é um maximizante global
  → $f(a)$ é um máximo global

- **Conjunto minorável:** Um conjunto de números reais P diz-se minorável se existe $m \in \mathbb{R} : m < x, \forall x \in P$
  m ↑ minorante de P → $\inf P = m$

- **Axioma do ínfimo:** Todo o conjunto $P \in \mathbb{R}$ minorável admite ínfimo!
  → O ínfimo pode ou não ser elemento do conjunto

- **Mínimo:** Quando um conjunto P tem ínfimo e o ínfimo pertence a P diz-se que $\inf P = \min P$
  ↳ mínimo de P

- **Mínimo global:** Se $f(a) \leq f(x), \forall x \in D_f \Longrightarrow \boxed{f(a) = \min CD_f}$
  $\Downarrow$
  → a é minimizante global
  → $f(a)$ é máximo global

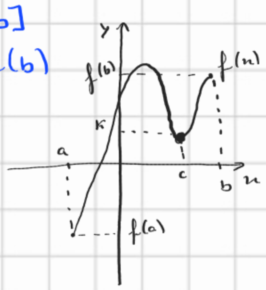
—//—

Teorema de Bolzano

(Bolzano-Cauchy ou T. dos valores intermédios)

→ Seja uma função $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua em $[a,b]$ e seja K um número real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$

$$\boxed{\Rightarrow \exists c \in \,]a,b[\, : f(c) = K}$$



→ "A função f não passa de um valor para outro sem passar por todos os valores intermédios"

Corolário:

- Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ e f é contínua em $[a,b]$

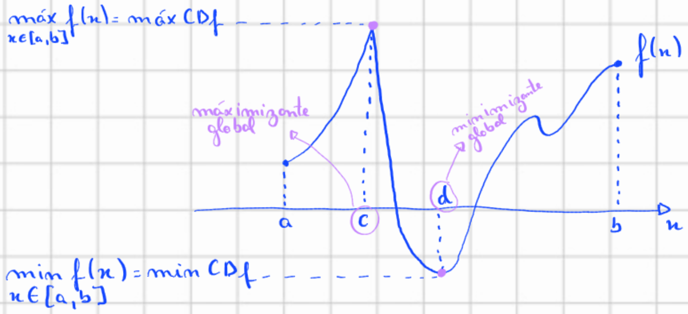
$$\Rightarrow \boxed{\exists c \in \,]a,b[\, : f(c) = 0}$$

T. de Weierstrass

→ Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, então f atinge um máximo global M e um mínimo global m em $[a,b]$

→ Verifica-se que:

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \max_{x\in[a,b]} f(x) = \max CD_f \\ m &= \min_{x\in[a,b]} f(x) = \min CD_f \end{aligned}}$$



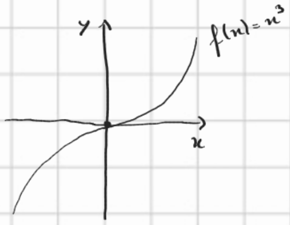
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, contínua. Então CD_f atinge um máximo e um mínimo

T. de Fermat

→ Seja $f:]a,b[$ é uma função diferenciável em $c \in]a,b[$. Se c é um extremante local de f então $f'(c)=0$.

→ Se $f'(c)=0$ isso não basta para afirmar que c é um extremante

Por exemplo:



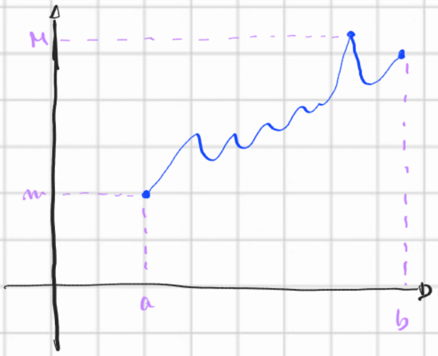
$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$, e no entanto,

$x=0$ não é um extremante,

nem mínimo nem máximo

Com o T. de Weinstrass e com o T. de Fermat conclui-se que uma função contínua transforma intervalos compactos $[a,b]$ em intervalos compactos $[m,M]$
Df → $[a,b]$; $[m,M]$ ← CDf



$$D_f = [a,b]$$
$$f([a,b]) = [m,M]$$

- Note que uma função $f: D_f \to \mathbb{R}$ contínua pode não atingir máximo

$$f: [0,2[\to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x) = x^2$$

- Na verdade f atinge mínimo $m=0$ em $x=0$
- f não atinge máximo
  $4 = \sup\limits_{x\in[0,2[} f(x) = \sup CD_f$ em $x=2$ $\notin CD_f$

T. de Rolle

→ É uma consequência direta do:

- T. de Weinstrass (que garante a existência de extremos globais em $[a,b]$) ← contínua
- T. de Fermat (que diz que se $c \in]a,b[$ e é um extremante $\Rightarrow f'(c)=0$) → diferenciável

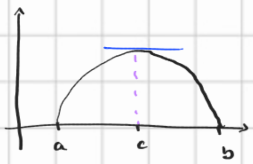
! → Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.
Se $f(a) = f(b)$, então $\exists c \in]a,b[: f'(c) = 0$

Corolário I do T. de Rolle

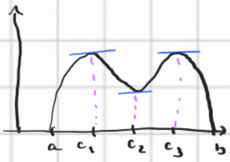
→ Se $f(a) = f(b) = 0$:

→ Então posso afirmar que entre dois zeros (a e b) da função existe pelo menos um zero da derivada

$$\boxed{f(a) = f(b) = 0 \Longrightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c) = 0}$$



c é zero da derivada



c_1, c_2, c_3 são zeros da derivada

Corolário II do T. de Rolle

→ Entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f

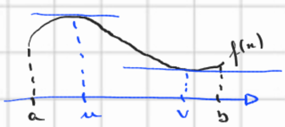
→ 1.ª Opção: Não existe zero de f

→ 2.ª Opção: Existe um zero de f

→ Porque? Raciocine pela contrapositiva!

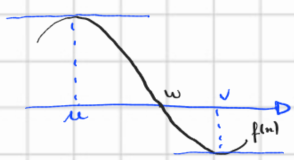
- Suponha-se que entre dois zeros de f' existem dois zeros c_1 e c_2 de f. $(c_1 < c_2)$
- Pelo Corolário I se $f(c_1) = f(c_2) = 0$ então $\exists c_3 \in]c_1, c_2[: f'(c_3) = 0$
- Ora isto, é impossível porque os zeros da derivada deixam de ser consecutivos

1.ª Hipótese



$f'(u) = f'(v) = 0$
São zeros consecutivos da derivada e f não tem nenhum zero em $]u, v[$

2.ª Hipótese



$f'(u) = f'(v) = 0$
$f(w) = 0$, é o único zero

T. de Lagrange

(T. do valor médio ou T. dos acréscimos finitos)

- Seja $\underset{b>a}{f : [a,b]}$ uma função $\overbrace{\text{regular}}^{\substack{\to \text{ diferenciável em }]a,b[\\ \to \text{ contínua em } [a,b]}}$.

$$\boxed{\Rightarrow \exists c \in]a,b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

- No caso particular $f(a) = f(b)$ obtemos exatamente o T. Rolle:

$$\exists c \in]a,b[: f'(c) = \frac{f(b) - \overset{= f(a)}{f(a)}}{b-a} = 0$$

T. de Cauchy

- É uma consequência direta do T. de Lagrange

- Esboço da prova a partir do T. de Lagrange

$$\underset{b>a}{f : [a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ regular}$$

$$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ regular e } \underline{\text{não nula}}$$

- O T. de Lagrange aplicado a f e g:

$$\boxed{f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \quad F1$$

$$\boxed{g'(c_2) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}} \quad F2$$

- $$\frac{F1}{F2} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}}{\frac{g(b)-g(a)}{\cancel{b-a}}} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{f'(c_2)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

- Do teorema de Cauchy podemos deduzir uma regra calcular limites $\underset{\text{condição necessária}}{\underline{\text{indeterminados}}}$ do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ → "Regra de Cauchy"

$$\frac{-\infty}{-\infty}, \frac{+\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}$$