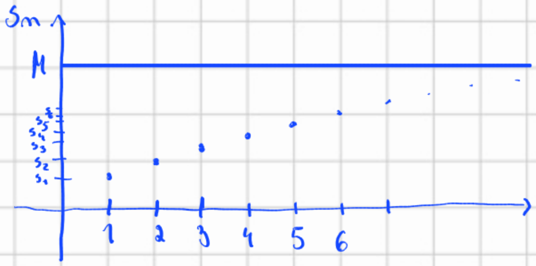
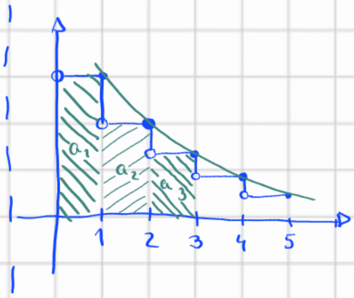
Aula 20





Soma da Série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} g(x)\,dx$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k,\ a_k \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}}$$
$$\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \leq M,\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

$\Longrightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe e é finito

$\Downarrow$

$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tem a mesma natureza de $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, desde que

$$f: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x), \text{ decrescente}$$
$$f(x) = a_x$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \text{ série de Riemann}}$$

$\boxed{\alpha = 1}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Formo uma função auxiliar

$$f: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}, \text{ decrescente} \left(f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad f \text{ decresce} \right)$$

$$f(n) = a_n = \frac{1}{n}$$

Então, pelo critério de Integral.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$, $\boxed{\text{ambos divergem}}$

têm a mesma natureza.

$$\text{Como } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\left[\ln(t) \right]_1^t \right)$$

$$= \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \quad , \quad a_n = \frac{1}{n\ln(n)}$$

$$f : [2,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x\ln x} \text{ , decrescente}$$

$$f(x) = a_n = \frac{1}{n\ln(n)}$$

$$\sum_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1/x}{\ln x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left(\left[\ln(\ln x) \right]_2^t \right) = \lim_{t\to+\infty} \left(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2) \right)$$
$$= +\infty$$

Diverge, pelo crit. de integral a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge

$\boxed{\text{Relembra!!!}}$

Séries & Integrais de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ é } \begin{cases} \text{conv. se } \alpha > 1 \\ \text{div se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ é } \begin{cases} \text{conv. se } \alpha > 1 \\ \text{div. se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Séries Geométricas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ é } \begin{cases} \text{conv. se } r \in]-1,1[\\ \text{div. se } r \notin]-1,1[\end{cases}$$

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (0)}_{0} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Conv. $\Leftarrow$ Conv. (Finito)

Div. $\Rightarrow$ Div
$(+\infty)$ $(+\infty)$

$-1+2-3-4+5-6 \leq |-1|+|2|+|-3|+|-4|+|5|+|-6|$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Finita $\Leftarrow$ Finita

A convergência da série dos módulos implica a conv. da série dada

$\boxed{\text{Exemplo (A)}}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^4}$ não é uma série de termos não negativos

Vou analisar a série dos módulos

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin n}{n^4}\right|$, que é de termos não negativos

Posso usar o critério de comparação

$$0 \leq \frac{\overbrace{|\sin n|}^{\in [0,1]}}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n^4}$ conv. porque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ conv.

$\longrightarrow$ Série de Dirichlet

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^4}$ conv. absolutamente

(B)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}+n}$$

$\overline{n^{3/2}+n} \approx$

A série é de termos não negativos

crit. do limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{3/2}+n}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}+n} = 1$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ conv. (Dirichlet, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), a série dada converge

Usando o critério de comparação:

$$0 \leq \frac{1}{n^{3/2}+n} \leq \frac{1}{n^{3/2}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

A série dada conv.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{17n-13}$$, série de termos não negativos

Se $n \gg 1$: $\frac{1}{17n-13} \simeq \frac{1}{17n}$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{17n-13}}{\frac{1}{17n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{17n}{17n-13} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{17n} = \frac{1}{17}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow$ A série dada diverge

Pela comparação:

$$\frac{1}{17n-13} \geq \frac{1}{1000n} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1000n}$ diverge

$\Downarrow$

A série dada diverge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10n^2}{n^6+1}$$

Se $n \gg 1$: $\frac{10n^2}{n^6+1} \simeq \frac{10}{n^4}$

· Série de termos não negativos!

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{10n^2}{n^6+1}}{\frac{10}{n^4}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^6}{n^6+1} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

A série conv. porque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{n^4}$ conv.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^2+2}}$$

Se $n \gg 1$: $\frac{1}{\sqrt{37n^3+2}} \simeq \frac{1}{\sqrt{37}\, n^{3/2}}$

Série de termos não negativos

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{37n^3+2}}}{\frac{1}{\sqrt{37}\, n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{37n^3}}{\sqrt{37n^3+2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{37n^3}{37n^3+2}} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

A série conv. porque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{37}\, n^{3/2}}$ conv.

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$, série de termos positivos

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{\cos x}{1} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

$x = \frac{1}{n}$

$n \to +\infty$, então $x \to 0^+$

A série diverge porque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge

---

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{n^2}$$

$$\operatorname{arctg}(1/n) \leq \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq \frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{n^2} \leq \frac{\pi/4}{n^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

A série dada conv. porque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi/4}{n^2}$ //

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$$

se $n \gg 1$ $\frac{e^{1/n}}{n} \sim \frac{e^0}{n} = \frac{1}{n}$

$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{e^{1/n}}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{1/n} = e^0 = 1 \in \mathbb{R}^+$$

A série dada Div. porque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ Div.