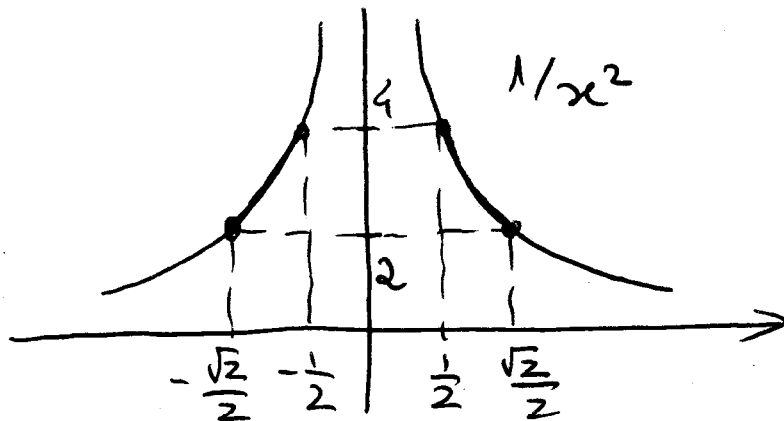1.

(a) $-1 \leq \frac{1}{x^2} - 3 \leq 1$

$\quad 2 \leq \frac{1}{x^2} \leq 4$

$\frac{1}{x^2} = 4$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x^2} = 2$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$D_f = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

(b) f é diferenciável em $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x^2}-3\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}-3\right)^2}} = -\frac{-2x^{-3}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}-3\right)^2}}$$

$$= \frac{2}{x^3\sqrt{1-\left(\frac{1}{x^2}-3\right)^2}} \neq 0$$

f não tem pontos críticos.

Pelo T. de Fermat e pelo T de Weierstrass os extremantes de f são $\pm\frac{1}{2}$ e $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, os extremos de f são $f(\pm\frac{1}{2})$ e $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$

Minimizante $\leftarrow f(\pm\frac{1}{2}) = \pi - \text{arcsen}(4-3) = \pi/2 \rightarrow$ Mínimo absoluto

Maximizante $\leftarrow f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \pi - \text{arcsen}(2-3) = \frac{3\pi}{2} \rightarrow$ Máximo absoluto

2.

(a) $\int x \cdot \dfrac{x}{(x^2+1)^2} \, dx = x \cdot \dfrac{-1}{2(x^2+1)} - \int \dfrac{-1}{2(x^2+1)} \, dx =$

$$= -\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{2} \arctan x + C \quad, \quad \text{em intervalos}$$

2.

(b) $x^4 - 3x^3 + 2x^2 = x^2(x^2 - 3x + 2) = (x-0)^2(x-2)(x-1)$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \iff x = 2 \lor x = 1$

$$\dfrac{4}{x^4 - 3x^3 + 2x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-2} + \dfrac{D}{x-1}$$

$4 = A x(x^2 - 3x + 2) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x^3 - x^2) + D(x^3 - 2x^2)$

$$\begin{cases} A + C + D = 0 \\ -3A + B - C - 2D = 0 \\ 2A - 3B = 0 \\ 2B = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} C + D = -3 \\ C + 2D = -9 + 2 = -7 \\ A = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 \\ B = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = -4 \end{cases}$$

$$\int \dfrac{4}{x^4 - 3x^3 + 2x^2} \, dx = 3 \ln|x| - \dfrac{2}{x} + \ln|x-2| - 4 \ln|x-1| + C ,$$

em intervalos

2.

(c) $\int \sqrt{\sqrt{x-1}-1}\ dx = \int \sqrt{t-1}\cdot(2t)\ dt = \cancel{\star}$

$x = t^2+1$, $t > 1$ $\Rightarrow$ $t^2 = x-1$ $\Rightarrow$ $t = \sqrt{x-1}$

$\dfrac{dx}{dt} = 2t > 0$ $\forall t > 1$

$\cancel{\star} = \dfrac{2}{3}(t-1)^{3/2}\cdot(2t) - \int \dfrac{2}{3}(t-1)^{3/2}\cdot 2\ dt =$

$= \dfrac{4}{3}\,t\,(t-1)^{3/2} - \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot(t-1)^{5/2} + C$

$= \dfrac{4}{15}(t-1)^{3/2}\,(3t+2) + C$

$= \dfrac{4}{15}\left(\sqrt{x-1}-1\right)^{3/2}\left(3\sqrt{x-1}+2\right) + C,$ em intervalos

3. Teorema de Lagrange:

Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é regular, então $\exists c \in]a,b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ✓

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ regular e $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} x$,

$$\forall x \in [a,b].$$

(a) F é contínua em $[a,b]$ porque é a diferença de duas funções contínuas (f por hipótese; a outra por ser polinomial).

F é diferenciável em $]a,b[$ porque é a diferença de duas funções diferenciáveis (f por hipótese; a outra por ser polinomial).

$\therefore F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é regular.

$F(a) = F(b) \iff f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} a = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} b$

$\iff f(a) - f(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-b)$

$\iff f(a) - f(b) = -f(b) + f(a) \iff 0 = 0$ ✓

Assim, F obedece às hipóteses do Teorema de Rolle.

(b) $\exists c \in]a,b[: F'(c) = 0$.

(c) $\forall x \in]a,b[, \ F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Para o c da alínea (b) vem então que

$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, i.e,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

4.

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 & x \neq 0 \\ y = \dfrac{3}{x^2} & y \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 4 - \dfrac{3}{y} \\ x^2 = \dfrac{3}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - 4y + 3 = 0 \\ x^2 = \dfrac{3}{y} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} (y-1)(y-3) = 0 \\ x^2 = \dfrac{3}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \lor \begin{cases} y = 3 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$
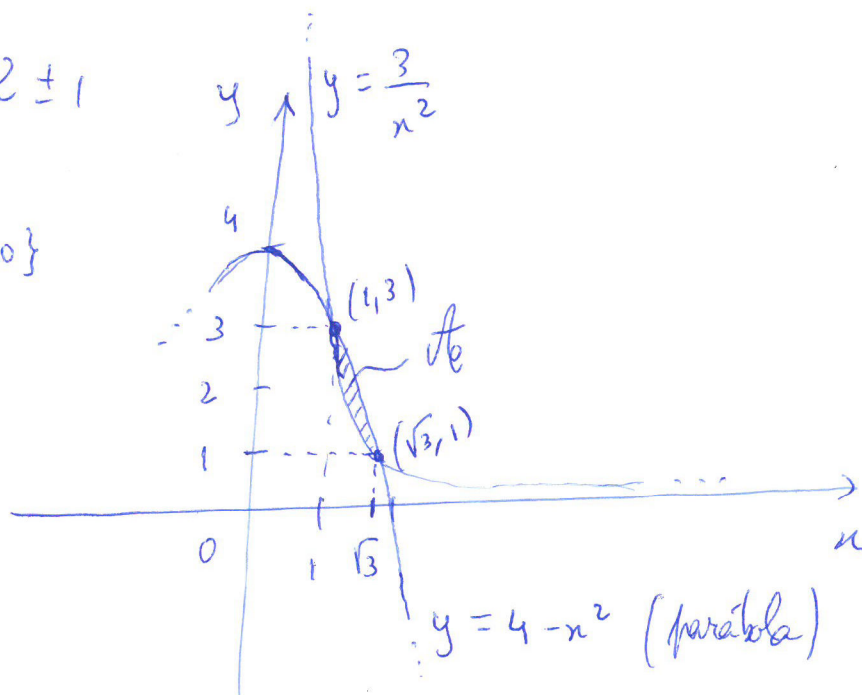
$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = 2 \pm 1$$

$$g(x) := \frac{3}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g''(x) = \frac{18}{x^4} > 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

$$\text{área}(A) = \int_1^{\sqrt{3}} \left| (4 - x^2) - \frac{3}{x^2} \right| dx = \int_1^{\sqrt{3}} 4 - x^2 - \frac{3}{x^2} \, dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x} \right]_1^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 4 + \frac{1}{3} - 3 = 4\sqrt{3} - \frac{20}{3}$$

$$> 0, 1 > 0$$

5.

(a) (i) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x \ln x} = +\infty$

integral impróprio de 2^a espécie

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} = +\infty$

integral impróprio de 2^a espécie

(b)

(i) $\displaystyle\int_1^2 \dfrac{1}{x \ln x}\, dx = \lim\limits_{t \to 1^+} \int_t^2 \dfrac{1}{x \ln x}\, dx =$

$= \lim\limits_{A \to 1^+} \Big[\ln(\ln x) \Big]_t^2 = \ln(\ln 2) - \lim\limits_{t \to 1^+} \ln(\ln t) =$

$= \ln(\ln 2) - (-\infty) = +\infty \qquad \underline{diverge}$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx = \lim\limits_{t \to 0^+} \int_t^1 \dfrac{1}{x^{3/5}}\, dx = \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{5}{2} \Big[x^{2/5} \Big]_t^1 =$

$= \lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{5}{2} \left(1^{2/5} - t^{2/5} \right) = \dfrac{5}{2} \cdot 1 - \dfrac{5}{2} \lim\limits_{t \to 0^+} t^{2/5} = \dfrac{5}{2} - 0$

$= 5/2 \qquad \underline{converge} \quad \left(\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha}\, dx \text{ converge se } (0 <) \alpha < 1 \right.$

$\left. \text{pelo exercício dado nas aulas} \right)$

6.

(i)
$$\ell = \lim_{n \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}\right)}{\frac{1}{n^2}} \underset{(*)}{=} 1$$

$(*)$ $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$

Pelo critério do limite (comparação por passagem ao limite) a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ são da mesma natureza. Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet de ordem 2 (>1), convergente, também $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ é convergente. Isto mostra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \right|$ é convergente, consequentemente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ é absolutamente convergente.

(ii)
$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1} \, 3^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}}{\frac{(-1)^n \, 3^{2n}}{(2n)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{3^2 \cdot 3^{2n} \cdot (2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)! \, 3^{2n}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{9}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1.$$

Pelo critério de D'Alembert a série converge absolutamente.

(b) $a_n = \underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3n}\right)}_{u_n} - \underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3(n+2)}\right)}_{u_{n+2}}$ logo a série é de Mengoli

$$S_n = u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2} \longrightarrow_{n \to +\infty} \text{sen}\frac{\pi}{3} + \text{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{sen}\left(\frac{\pi}{3n}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3n+6}\right) \right] = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \qquad (\sqrt{3}+1)/2$$

7.

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)(x-2t)e^{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - 3xt + 2t^2)e^{t^2}\,dt \qquad \text{pois } x \text{ é constante na integração}$$

regra de derivada
de soma e
de produto
e Teorema
Fundamental
do Cálculo,
atendendo
que as funções
integrandas
são contínuas

$$= \frac{d}{dx}\left(x^2 \int_0^x e^{t^2}\,dt - 3x \int_0^x t e^{t^2}\,dt + 2 \int_0^x t^2 e^{t^2}\,dt \right)$$

$$= 2x \int_0^x e^{t^2}\,dt + x^2 e^{x^2} - 3\int_0^x t e^{t^2}\,dt - 3x\,x\,e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}$$

$$= \int_0^x (2x - 3t)e^{t^2}\,dt \qquad \longleftarrow \text{novamente o facto de } x \text{ ser constante na integração.}$$

__Observação:__ Muitos alunos acharam que tinham
resolvido esta questão fazendo

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)(x-2t)e^{t^2}\,dt \overset{\circledast}{=} \int_0^x \frac{d}{dx}\left[(x^2 - 3xt + 2t^2)e^{t^2} \right]dt$$

$$= \int_0^x (2x - 3t)e^{t^2}\,dt .$$

O problema é que a passagem $\circledast$ acima não está justificada
e nem sequer faz sentido pois $\int_0^x \ldots$ depende logo de x
no limite superior. O facto de aparentemente funcionar
e "levar" ao mesmo direito é "apenas" coincidência.

Por exemplo, $\frac{d}{dx} \int_0^x (x+t)e^{t^2}\,dt = \int_0^x e^{t^2}\,dt + 2x e^{x^2}$, usando
o processo correcto do início desta página, enquanto que
a "aldrabice" do início desta observação levaria a $\int_0^x e^{t^2}\,dt$.