Slide #41

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{e^{x-1}-1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Mostre que a restrição de f ao intervalo $[-3,10]$ atinge nesse intervalo um máximo e um mínimo.

Para efeitos da aplicação do T.W, precisamos de verificar se a função

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \in [-3,1] \\ \dfrac{e^{x-1}-1}{x} & \text{se } x \in]1,10] \end{cases}$$

é contínua.

$g(1) = 0$.

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{x-1}-1}{x} = \frac{e^{1-1}-1}{1} = 0$$

Logo a $g(1) = \lim_{x\to 1} g(x) = 0$ e a função é contínua em $x=1$.

É fácil de ver que g é contínua em $[-3,10]$

compacto de $\mathbb{R}$

Logo g atinge em $[-3,10]$ um valor máximo M e um valor mínimo m.

//

Poderemos calcular M e m?

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-3,1[\\ \dfrac{e^{x-1}x - (e^{x-1}-1)}{x^2} & \text{se } x \in]1,10] \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-3,1] \\ \dfrac{1+(x-1)e^{x-1}}{x^2} & \text{se } x \in]1,10[\end{cases}$$

$$g'_+(1) = g'_-(1)$$

Assim $g'(x) > 0$, $\forall x \in [-3,10]$

Então g é estrit. crescente em $[-3,10]$

Atinge máximo M em $x=10$

Maximizante

$$M = g(10) = \frac{e^{10-1}-1}{10} = \frac{e^9-1}{10}$$

Atinge valor m em $x=-3$

$$m = g(-3) = -3-1 = -4 \; //$$

minimizante

$\boxed{\text{Slide \#43}}$

$\frac{01}{03}$

$\boxed{1}$ $f(x) = \text{arctg}((x-1)^2) + 2$

Utilizando o T. Rolle, mostre que existe $c \in]0,2[$ tal que $f'(c) = 0$.

$D_f = \mathbb{R}$, pois $\text{arctg}(z)$ está definido $\forall z \in \mathbb{R}$

$f(0) = \text{arctg}((0-1)^2) + 2 = \text{arctg}(1) + 2$

$f(0) = \frac{\pi}{4} + 2$

$f(2) = \text{arctg}((2-1)^2) + 2 = \text{arctg}(1) + 2$

$f(2) = \frac{\pi}{4} + 2$

Como $f(0) = f(2) = \frac{\pi}{4} + 2$

e f é contínua em $[0,2]$ ← compacto

T. Rolle

e diferenciável em $]0,2[$

$\left(f'(x) = \frac{2(x-1)}{1+(x-1)^4} \right.$, $\left. D_{f'} = \mathbb{R} \right)$

$f'(x)$ finita

então existe $c \in]0,2[$

tal que $f'(c) = 0$

É fácil de ver que $c = 1$.

102

$\boxed{2}$ Mostre que se $a>0$ a equação $x^3+ax+b=0$ não pode ter mais que uma raiz real, qq que seja $b\in\mathbb{R}$.

$f(x)=x^3+ax+b$, $D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2+a>0, \forall x\in\mathbb{R}$, pois $a>0$

f é injetiva (é estrit. crescente)

Logo não pode ter mais de um zero.

$f''(x)=6x$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3+ax+b=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x^3}\right)\right]=-\infty$

Assim, f muda de sinal em $\mathbb{R}$

Pelo T. Bolzano terá um zero

Esse zero é único como vimos

Conclui

$\exists^1 \alpha\in\mathbb{R}: f(\alpha)=0.$

03

[3] Mostre que a função definida por $f(x) = \sin x + x$ tem um único zero no intervalo $[-\pi, \pi]$.

1.º processo:

$f(-\pi) = \sin(-\pi) + (-\pi) = 0 - \pi = -\pi < 0$

$f(\pi) = \sin(\pi) + \pi = 0 + \pi = \pi > 0$

Como f é contínua e $[-\pi,\pi]$ compacto então pelo T. Bolzano tem pelo menos um zero $\alpha \in]-\pi,\pi[$.

Como

$f'(x) = \cos x + 1 > 0, \quad \forall x \in]-\pi,\pi[$

f é estrit. crescente em $[-\pi,\pi]$

então é injetiva

o zero α é único.

Corolário do T. Rolle:

"Entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f"

$$\begin{cases} f'(x) = \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\pi \vee x = \pi \\ x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

zeros consecutivos de f'

Logo existe, no máximo, um zero α de f.

Aula #45

$\frac{01}{04}$

Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.

$D_f = \mathbb{R}$

$f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\pi}{2} - \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to +\infty}\right)}_{\to \frac{\pi}{2}} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \underbrace{x^2}_{\text{infinitésimo}} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{limitada}} = 0$$

Logo $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

f é contínua em $x = 0$.

b) Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]-\frac{2}{\pi}, 0\right[$ tal que $f'(c) = \frac{2}{\pi}$.

T. Lagrange em $\left[-\frac{2}{\pi}, 0\right]$

(f é cont. em $\left[-\frac{2}{\pi}, 0\right]$ e dif. em $\left]-\frac{2}{\pi}, 0\right[$)

$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
f é dif.

$\exists\, c \in \left]-\frac{2}{\pi}, 0\right[$:

$$f'(c) = \frac{f(0) - f\left(-\frac{2}{\pi}\right)}{0 - \left(-\frac{2}{\pi}\right)} = \frac{0 - \left[\left(-\frac{2}{\pi}\right)^2 \underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}\right]}{\frac{2}{\pi}}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2}{\frac{2}{\pi}} = \frac{2}{\pi} \checkmark$$

Conseguiremos calcular c?

$$f'(x) = \left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) \cancel{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} = (2x-1) \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \Leftrightarrow (2x-1) \cos\frac{1}{x} = 0 \quad , x \in \left]-\frac{2}{\pi}, 0\right[$$

Não se consegue resolver analiticamente.

103

$\boxed{2}$ Seja $f(x) = \arcsin(\ln x)$ seno $x > 0$

a) Determine o domínio de f.

$$\begin{cases} |\ln x| \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \leq 1 \\ \ln x \geq -1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq e \\ x \geq e^{-1} \\ x > 0 \end{cases}, \quad x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$$

b) Mostre que existe pelo menos um $c \in]1, e[$ tal que $f'(c) = \frac{\pi}{2(e-1)}$

T. Lagrange em $[1, e]$

f é contínua em $[1, e]$

f é dif. em $]1, e[$

$\exists c \in]1, e[$:

$$f'(c) = \frac{f(e) - f(1)}{e-1} = \frac{\arcsin(\ln e) - \arcsin(\ln 1)}{e-1}$$

$$= \frac{\arcsin(1) - \arcsin(0)}{e-1}$$

$$= \frac{\pi/2 - 0}{e-1} = \frac{\pi}{2(e-1)}$$

$\boxed{3}$ Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que $h'(x) = \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$ e $h(0)=0$.
Usando o T. Lagrange, mostre que $h(x) \leq e \cdot x$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Sendo $x \in \mathbb{R}^+$

$$\sin^2 x \in [0,1]$$

$$e^{\sin^2 x} \in [e^0, e^1] = [1, e]$$

$$-1 \leq \cos x \cdot e^{\sin^2 x} \leq e$$

$$h'(x) \leq e, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Seja agora $x_0 \in \mathbb{R}^+$ fixo mas arbitrário

Usando o T.L. em $[0, x_0]$
(h é contínua em $[0, x_0]$
h é dif. em $]0, x_0[$)

$$\frac{h(x_0) - h(0)}{x_0 - 0} = h'(c) \ , \quad c \in]0, x_0[$$

$$\frac{h(x_0)}{x_0} \leq e$$

$$h(x_0) \leq x_0 \cdot e$$

//

Slide #48

$\boxed{1}$ Mostre que $g(x) = x + 2\sin x - 1$ tem um único zero no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$.

$Dg = \mathbb{R}$, g é dif. em $\mathbb{R}$

$g'(x) = 1 + 2\underbrace{\cos x}_{>0} > 0, \forall x \in [0, \pi/2]$

g é estrit. crescente (só pode ter um zero)

$g(0) = 0 + 2 \times 0 - 1 = -1 < 0$

$g(\pi/2) = \frac{\pi}{2} + 2 - 1 = 1 + \frac{\pi}{2} > 0$

T. Bolzano garante a existência de um zero que já vimos ser único

$\exists^1 \alpha \in]0, \pi/2[: g(\alpha) = 0.$

$\boxed{2}$ Mostre que $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

$Df = \mathbb{R}$, f é dif. em $\mathbb{R}$

$h(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

$h'(x) = \frac{-(1+e^{-x})' \, 1}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$

h é estrit. crescente em $\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Mostre que o polinómio

$$p(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

tem uma única raiz no intervalo $]-2,1[$.

$$f(-2) = \frac{1}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 - 2(-2) + 1$$

$$f(-2) = -\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 + 1$$

$$f(-2) = -\frac{8}{3} + 7 = -\frac{8}{3} + \frac{21}{3} = +\frac{13}{3} > 0$$

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 1$$

$$f(1) = \frac{2+3}{6} - \frac{12}{6} + \frac{1}{6}$$

$$f(1) = -1 < 0$$

$$\underline{f(1)\,f(-2) < 0}$$

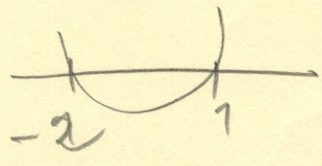
$$\exists\, \alpha \in]-2,1[: f(\alpha) = 0$$

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x = -2 \lor x = 1$$



$f'(x) < 0, \forall x \in]-2,1[$,
Logo a raiz α é única
pois f é injetiva em $]-2,1[$.

Slide #53

1 a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x}{3x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(2\arcsin x)'}{(3x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

1 b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\ln(2-x)}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)'}{[\ln(2-x)]'}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\frac{-1}{2-x}}$$

$$= \lim_{x\to 1} (2-x) = 1$$

$\boxed{1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x} \overset{R.C}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\overset{\to 0}{2x}}{\underset{\to 1}{\dfrac{1}{1+x^2}}} = 0$$

$\boxed{1.}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$ $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x^3} = 0$$

$\boxed{1.}$ e) $\lim\limits_{x\to 0^-} x^2 \ln(-x)$ $(0 \times +\infty)$

$f(x)$ com $D_f = \mathbb{R}^-$

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 \ln(-x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(-x)}{\frac{1}{x^2}} \quad \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\overset{R.C}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-1}{-x}}{-\frac{2x}{x^4}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{x^3}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= 0$$

$\boxed{1}$ f) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty}\, \underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0}}}_{\to 1}$ $(-\infty)\times(1)$ não é indet.

$$\lim_{x\to-\infty} x\, e^{\frac{1}{x}} = -\infty$$

$\boxed{2}$ g) $\displaystyle L_f = \lim_{x\to+\infty} (x+3)^{\frac{1}{x^2}}$ ∞^0

$$f(x) = (x+3)^{\frac{1}{x^2}} \quad , \; D_f = \mathbb{R}^+$$

$$g(x) = \ln\left(f(x)\right) = \frac{1}{x^2}\ln(x+3)$$

$f(x) = e^{g(x)}$

Calcule-se

$$L_g = \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\ln(x+3) \qquad (0\times+\infty)$$

$$L_g = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+3)}{x^2} \qquad \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

R.C.

$$L_g = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+3}}{2x}$$

$$L_g = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x(x+3)} = 0$$

Ora,

$$L_f = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{g(x)}$$

e como g é contínua

$$L_f = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)} = e^{L_g} = e^0 = 1.$$

04

$\boxed{1.}$ h)

$$L_f = \lim_{x \to 1^+} (\ln x)^{\ln x \to 0} \qquad 0^0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

Seja $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$, $D_f =]1, +\infty[$

Como $f(x) > 0$, $\forall x \in D_f$

defino

$$g(x) = \ln\left(f(x)\right)$$

$$g(x) = \ln\left((\ln x)^{\ln x}\right)$$

$$g(x) = \ln(x) \cdot \ln(\ln x))$$

$$L_g = \lim_{x \to 1^+} g(x)$$

$$L_g = \lim_{x \to 1^+} \ln(x) \cdot \ln(\ln x) \qquad (0 \times (-\infty))$$

$$L_g = \lim_{x \to 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{\ln x}} \qquad \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

R.C.

$$L_g = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}} = \lim_{x \to 1^+} \left(-\ln \underset{\to 1}{x}\right)^{\to 0} = 0$$

$$L_f = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} e^{g(x)} = e^{L_g} = e^0 = 1$$