# Cálculo I – Agr. 4 (2020/2021)

## 2.º Teste – Turmas TP4-B5 e TP4-B4

01.
05

1.a) $\int \sin(\sqrt{x})\,dx$ , mudança de variável:

(30 pts)

$t=\sqrt{x}$ , $x\in\mathbb{R}^+$

$x=t^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=2t>0$ (mantém sinal)

$dx = 2t\,dt$

$$\int \sin(\sqrt{x})\,dx = \int \sin t\,(2t)\,dt$$

$$= 2\int \underbrace{t}_{u}\;\underbrace{\sin t}_{v'}\,dt \quad \text{, por partes}$$

$$= 2\left[t(-\cos t) - \int (1)(-\cos t\,dt\right]$$

$$= -2t\cos t + \int \cos t\,dt$$

$$= -2t\cos t + 2\sin t + C \text{, } C \text{ constante real em intervalos.}$$

Substituição inversa: $t=\sqrt{x}$

$$\int \sin(\sqrt{x})\,dx = -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}) + C.$$

1.b) $\int \frac{x+2}{x^3+2x^2+5x}\,dx$ , fração racional própria

(45 pts)

$$x^3+2x^2+5x = x\,\underbrace{(x^2+2x+5)}_{p(x)} \text{ , } \Delta = 2^2-4(1)(5)<0$$

$p(x)$ tem um par de raízes complexas

$$\frac{x+2}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$x+2 = Ax^2+2Ax+5A+Bx^2+Cx$$

$$x+2 = (A+B)x^2+(2A+C)x+5A$$

$$\begin{cases} 5A = 2 \\ 2A + C = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2/5 \\ C = 1 - 4/5 = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\int \frac{x+2}{x(x^2+2x+5)}\,dx = \int \frac{2/5}{x} + \frac{(-2/5)x + 1/5}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\int \frac{2x-1}{x^2+2x+5}\,dx$$

C.A.

$$(x^2+2x+5)' = 2x+2$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\int \frac{(2x+2)-2-1}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{-3}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

C.A.

$$x^2+2x+5 = (x+p)^2 + q = x^2+2px+p^2+q$$

$$\begin{cases} 2p = 2 \\ p^2+q = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} p = 1 \\ q = 5-1^2 = 4 \end{cases}$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{4\left[1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right]}$$

C.A

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)' = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{20}(2)\int \frac{1/2}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{10}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C,$$ C constante real em intervalos

$$= \ln\left(\sqrt[5]{\frac{x^2}{x^2+2x+5}}\right) + \frac{3}{10}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

05

1\. c) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^{101}}\,dx$ , mudança de variável

$2+\sqrt{x}=t \Leftrightarrow \sqrt{x}=t-2$ , $t\in\,]2,+\infty[$ , $x>0$

$\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\ x=(t-2)^2$

$\frac{dx}{dt}=2(t-2) \Rightarrow dx=2(t-2)\,dt$

$$\int \frac{2}{\cancel{(t-2)}\,t^{101}}\,2\cancel{(t-2)}\,dt = 4\int \frac{dt}{t^{101}}$$

$$= 4\int t^{-101}\,dt$$

$$= 4\,\frac{t^{-101+1}}{-100+1}+C,$$ C constante real em intervalos

$$= 4\,\frac{t^{-100}}{-100}+C$$

$$= \frac{1}{-\frac{100}{4}\,t^{100}}+C$$

$$= \frac{1}{-25t^{100}}+C$$

Substituição inversa
$t=2+\sqrt{x}$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^{101}}\,dx = -\frac{1}{25\,(2+\sqrt{x})^{100}}+C$$

2.a) $f(x) = g(x)$

$$1-2x = \sqrt{x} \Rightarrow (1-2x)^2 = x \Leftrightarrow 1-4x+4x^2 = x$$

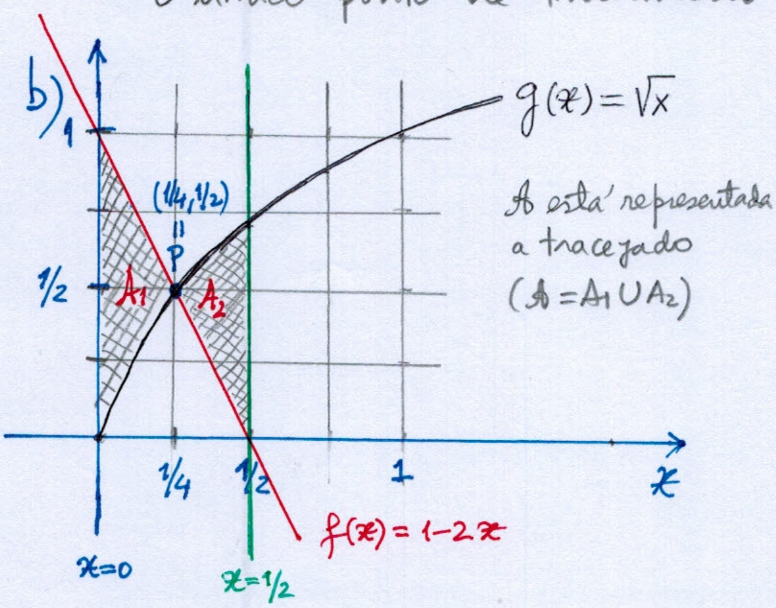
$$\Leftrightarrow 4x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2-4(4)1}}{2(4)} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{1}{4}$$

- confirmar se $x=1$ é solução $f(1) = 1-2(1) \neq \sqrt{1} = g(1)$
  $f(1) = -1 \neq 1 = g(1)$, $x=1$ não é solução.
- confirmar se $x = 1/4$ é solução $f(1/4) = 1-2(1/4) = \sqrt{\frac{1}{4}} = g(1/4)$
  $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} = g(x)$, $x = 1/4$ é solução.

$$\left(f(x) = g(x) \wedge x \in [0, 1/2]\right) \Leftrightarrow \left(x = \tfrac{1}{4} \wedge x \in [0, 1/2]\right) \Leftrightarrow x = 1/4$$

O único ponto de intersecção é $P = \left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

b)




c) $f$ e $g$ são integráveis em $[0, 1/2]$

$$A = \int_0^{1/2} |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$A = \underbrace{\int_0^{1/4} f(x) - g(x)\, dx}_{A_1} + \underbrace{\int_{1/4}^{1/2} g(x) - f(x)\, dx}_{A_2}$$

$$A = \int_0^{1/4} 1-2x-\sqrt{x}\, dx + \int_{1/4}^{1/2} \sqrt{x} - (1-2x)\, dx$$

$$A = \int_0^{1/4} -\sqrt{x} - 2x + 1 + \int_{1/4}^{1/2} \sqrt{x} + 2x - 1\, dx$$

$f$ e $g$ são primitiváveis (são até contínuas), usaremos a Regra de Barrow:

$$A = \left[-\frac{2}{3}x^{2/3} + x - x^2\right]_0^{1/4} + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - x + x^2\right]_{1/4}^{1/2}$$

$$A = \underbrace{\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{2/3} + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]}_{K} - [0] \underbrace{- \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]}_{K} - \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$A = 2\left[-\frac{2}{3}\frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right] + \left[\frac{2}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right]$$

$$A = -\frac{4}{3}\frac{1}{4\times 2} + \frac{2}{4} - \frac{2}{16} + \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$A = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{3\times 2} + \frac{1}{4}$$ , mmc $(4,6,8) = 24$

$$A = -\frac{4}{24} - \frac{3}{24} + \frac{4\sqrt{2}}{24} + \frac{6}{24} = \frac{-4-3+6+4\sqrt{2}}{24} = \frac{-1+4\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{24}.$$

05

3. $f$ contínua em $\mathbb{R}$

$g$ definida em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por $g(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t)\,dt$

a) Cálculo de $L = \lim_{x \to +\infty} g(x)$.

- ~~Se~~ ja $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a função $F$ é diferenciável em todo o intervalo $[a,b]$ (limitado e fechado) que contenha o ponto $t=0$. Na verdade, $f$ é contínua.

Além disso, $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Considere-se agora o limite:

$$L = \lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x} \quad , \text{indet } \left(\frac{0}{0}\right)$$

Como $h(x) := x$ e $h'(x) = 1$ não se anulam em $]-1,1[\setminus\{0\}$, estamos em condições de aplicar a Regra de Cauchy se existir o limite

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{x'} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{1} = f(0)$$

Como $L_1$ existe, tem-se $L = \lim_{x \to 0} g(x) = L_1 = f(0)$.

b) "$\Rightarrow$"

Se $g(x) = K$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ então $K = \frac{F(x)}{x} \Leftrightarrow F(x) = Kx$

obtendo-se para $x \neq 0$, $F'(x) = (Kx)' \Leftrightarrow f(x) = K$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Como $f$ é contínua, $f(0) = K$, resultando que $f(x) = K$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

"$\Leftarrow$"

Se $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$ então $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x c\,dt$

Aplicando a Regra de Barrow ($f(x) = c$ até é contínua em $\mathbb{R}$)

$g(x) = \frac{1}{x} \left[ c\,t \right]_0^x = \frac{cx}{x} = c$, resultando

que $g$ é constante em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.