

Exame de recurso, 21/fevereiro/2022, CI og. IV

Nome:

nº de estudante:

Nº folhas de continuação: ☐ (Questão 2).

Resolução da questão 2

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $x^2 2^x$; (b) $\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}$; (c) $\frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}$.

Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) faz uma mudança de variável ou usa primitivação quase imediata.

Resposta à questão 2:

$$\begin{aligned} (a) \int x^2 2^x dx &\stackrel{pp}{=} x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \int 2x \frac{2^x}{\ln 2} dx = x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \int x 2^x dx \\ &\stackrel{pp}{=} x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2} \left(x \frac{2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2} dx \right) = x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{(\ln 2)^2} x \cdot 2^x + \\ &+ \frac{2}{(\ln 2)^2} \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^x}{\ln 2} \left(x^2 - \frac{2}{\ln 2} x + \frac{2}{(\ln 2)^2} \right) + C, \end{aligned}$$

$C \in \mathbb{R}$ em intervalos.

$$(b) \int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} dx = \int \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2} dx = *$$

$$\text{MCI: } \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{(x+2)^2} \Rightarrow 11x+16 = A_1(x+2)^2 +$$

$$+ A_2(x-1)(x+2) + A_3(x-1) \Leftrightarrow 11x+16 = A_1(x^2+4x+4) + A_2(x^2+x-2) +$$

$$+ A_3(x-1) \Leftrightarrow 11x+16 = (A_1+A_2)x^2 + (4A_1+A_2+A_3)x + (4A_1-2A_2-A_3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1+A_2=0 \\ 4A_1+A_2+A_3=11 \\ 4A_1-2A_2-A_3=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2=-A_1 \\ 3A_1+A_3=11 \\ 6A_1-A_3=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2=-A_1 \\ A_3=11-3A_1 \\ 6A_1-11+3A_1=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1=3 \\ A_2=-3 \\ A_3=2 \end{cases}$$

$$* = 3 \ln|x-1| - 3 \ln|x+2| - 2 \frac{1}{x+2} + C,$$

$C \in \mathbb{R}$ em intervalos.

Nome:

nº de estudante:

Nº folhas de continuação: ☐ (Questão 2).

Resolução da questão 2

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $x^2 2^x$; (b) $\frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}$; (c) $\frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}$.

Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) faz uma mudança de variável ou usa primitivação quase imediata.

Resposta à questão 2:

Primitivação quase imediata:

$$\begin{aligned} (c) \int \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}} dx &= \int \frac{e^x+1}{1+e^{2x}} e^x dx = \int \frac{u+1}{1+u^2} du = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2u}{1+u^2} du + \int \frac{1}{1+u^2} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + \arctan(u) + C = \ln \sqrt{1+e^{2x}} + \arctan(e^x) + C, \\ &C \in \mathbb{R} \text{ em intervalos.} \end{aligned}$$

ou

Mudanças de variável:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}} dx &= \int \frac{t^2+t}{1+t^2} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t+1}{1+t^2} dt = \\ &t=e^x \Leftrightarrow x=\ln t, dx=\frac{1}{t} dt, t>0 \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2t}{1+t^2} dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + \arctan(t) + C \\ &= \ln \sqrt{1+e^{2x}} + \arctan(e^x) + C, C \in \mathbb{R} \text{ em intervalos.} \end{aligned}$$