Aula 10

Primitivação por substituição (mudança de variável)

Deduz-se da regra da Cadeia

Problema:

Pretendo calcular $F(x)$ tal que:

Difícil $\longrightarrow$ $\boxed{F(x) = \int f(x)\,dx} \Rightarrow F'(x) = f(x),\ x \in I$ um intervalo

Fácil

- 1.º Passo

Uso uma função g (diferenciável e invertível) e calculo:

$$\int f(g(t)) \cdot \underbrace{g'(t)\,dt}_{dx}$$

$CD_g \subset D_f$

Mudança de variável $x \longrightarrow t$

$$x = g(t)$$
$$\frac{dx}{dt} = g'(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) \Rightarrow dx = g'(t)\,dt$$

- 2.º Passo

Reparo que: $F(g(t)) = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$

pois, pela regra da cadeia:

$$[F(g(t))]' = g'(t) \cdot \underbrace{F'(g(t))}_{f(g(t))} = f(g(t)) \cdot g'(t)$$

- 3.º Passo

Regresso à variável x fazendo a mudança de variável inversa:

$$F(x) = F(\underbrace{g^{-1}(x)}_{t})$$

Problema resolvido!

Exercício (1)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx \, , \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$f(x)$; t ; $= I$, "um intervalo"

Mudança de variável : $x \longrightarrow t$

$\sqrt{x} = t \Leftrightarrow x = g(t) = t^2$, g é invertível e diferenciável em $\mathbb{R}^+$

$$\frac{dx}{dt} = g'(x) = 2t > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$CD_g = \mathbb{R}^+ \subset D_f = \mathbb{R}^+$ ✓

$$\int \frac{1}{1+\underbrace{\sqrt{x}}_{t}} \underbrace{dx}_{g'(t)dt} = \int \frac{1}{1+t} \underbrace{(2t)\,dt}_{dx} = 2 \int \frac{t}{t+1} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{t+1} dt$$

$$= 2 \int 1 - \frac{1}{t+1} \, dt = 2\underbrace{t}_{\sqrt{x}} - \ln|\overbrace{t}^{\sqrt{x}}+1| + c, \ c \in \mathbb{R} = 2\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x}+1) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

em intervalos

Exercício (2)

$$\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}} \, dx \, , \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Mudança de variável : $x \longrightarrow t$

$\sqrt[3]{x} = t \Leftrightarrow x = g(t) = t^3$

$$dx = \underbrace{3t^2}_{g'(t)} dt$$

$g'(t) = 3t^2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^+$

g é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$

g é invertível em $\mathbb{R}^+$

$$\int \frac{1}{t^3+t} \times 3t^2 \, dt = 3 \int \frac{t}{t^2+1} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt = \frac{3}{2} \times \ln(t^2+1) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

Mudança de variável inversa

$$\longrightarrow = \frac{3}{2} \times \ln\left(x^{2/3}+1\right) + c, \ c \in \mathbb{R}$$

Exercício 3

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$$

tenho $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$\boxed{m.m.c(2,3)=6}$ $\to \sqrt{x} = t^3$

Uso $x = t^6$ $\to \sqrt[3]{x} = t^2$

$$\boxed{\begin{array}{l} x \longrightarrow t \\ x = g(t) = t^6 \\ g'(t) = 6t^5, \ g \text{ é diferenciável em } \mathbb{R}^+ \\ g \text{ é invertível em } \mathbb{R}^+ \\ dx = 6t^5\,dt \end{array}}$$

$$\int \frac{t^3}{1+t^2}\, 6t^5\, dt = 6\int \frac{t^8}{1+t^2}\, dt$$

$$\begin{array}{rl|l} & t^8 & t^2+1 \\ \cline{3-3} & -t^8 - t^6 & t^6 - t^4 + t^2 - 1 \\ \cline{2-2} & -t^6 & \\ & t^6 + t^4 & \\ \cline{2-2} & t^4 & \\ & -t^4 - t^2 & \\ \cline{2-2} & -t^2 & \\ & t^2 + 1 & \\ \cline{2-2} & 1 & \end{array}$$

$$\frac{t^8}{t^2+1} = t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}$$

$$= 6\int t^6\,dt - 6\int t^4\,dt + 6\int t^2\,dt - 6\int 1\,dt + 6\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} + 2t^3 - 6t + 6\operatorname{arctg}|t| + C, \ C \in \mathbb{R}$$

$t \longrightarrow x$, $t = x^{1/6}$

$$= \frac{6}{7} \times x^{7/6} - \frac{6}{5} \times x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\operatorname{arctg}(x^{1/6}) + C, \ C \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

Exercício 4

$$\int x^2 \sqrt{1-x}\,dx, \quad x \in \,]1,+\infty[$$

$\sqrt{1-x} = t$

$$\sqrt{1-x} = t \Leftrightarrow 1-x = t^2 \Leftrightarrow x = g(t) = 1-t^2$$

$g'(t) = -2t < 0$, $\forall t \in \,]1,+\infty[$, logo g é diferenciável e invertível em $]1,+\infty[$

$$dx = -2t\,dt$$

$$\int x^2\sqrt{1-x}\,dx = \int (1-t^2)^2 \times t \times -2t\,dt$$

$$= \int (1-2t^2+t^4)\times(-2t^2)\,dt = -2\int t^2-2t^4+t^6\,dt$$

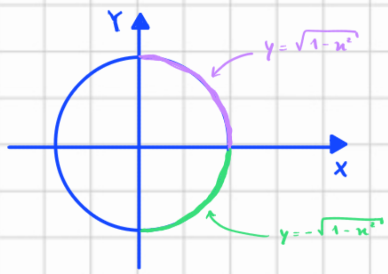
$$= -\frac{2}{3}t^3 + \frac{4}{5}t^5 - \frac{2}{7}t^7 + c,\ c\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{t \longrightarrow x}$$

$$\int x^2\sqrt{1-x}\,dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2} + \frac{4}{5}(1-x)^{5/2} - \frac{2}{7}(1-x)^{7/2} + c,\ c\in\mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

//

INTERESSANTE



Se $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$

$\cos x = +\sqrt{1-\sin^2 x}$

$\sin x = +\sqrt{1-\cos^2 x}$

$\sec x = +\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$

$\operatorname{tg} x = +\sqrt{\sec^2 x - 1}$

Substituições trigonométricas

(quando aparece $\sqrt{\text{pol. } 2^{\circ}\text{ grau}}$), $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$

T1 Funções que contêm o radical $\sqrt{a^2+x^2}$, $a>0$

$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = \sec x$

Exemplo 1 —▷ Muito Difícil

Ignorar!

Não Sai, assim!

Calcule $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+1}\,dx$, substituição trigonométrica

$x = g(t) = \operatorname{tg} t$

$g'(t) = \sec^2 t > 0,\ \forall t \in]0,\frac{\pi}{2}[$

$\Rightarrow g$ é invertível e diferenciável em

$dx = \sec^2 t$

$$= \int \operatorname{tg}^2 t\,\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}\times\sec^2 t\,dt$$

$$= \int \operatorname{tg}^2 t\,\sec t\,\sec^2 t\,dt = \int \operatorname{tg}^2 t\,\sec^3 t\,dt$$

$$= \int (\sec^2-1)\sec^3 t\,dt = \int \sec^5 t - \sec^3 t\,dt$$

$$= \int \sec^5 t\,dt - \int \sec^3 t\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\sec^3 t\, tg\, t + \frac{3}{8} tg\, t \sec t + \frac{3}{8}\ln|\sec t + tg\, t|}_{\int \sec^5 t\, dt} - \underbrace{\left[\frac{1}{2} tg\, t \sec t + \frac{1}{2}\ln|\sec t + tg\, t| + c\right]}_{\int \sec^3 t\, dt}$$

Não provamos!

Agora faríamos a mudança de variável inversa onde: $\begin{cases} \sec t = \sqrt{x^2+1} \\ tg\, t = x \end{cases}$

Faltava acabar!, mas o prof. disse que era muito demorado e difícil

Exercício ②

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\, dx = \int \frac{\sqrt{1+tg^2(t)}}{tg^4(t)} \times \sec^2 t\, dt$$

Subst. trignométrica:

$\boxed{x = g(t) = tg(t)}$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$g'(t) = \sec^2 t > 0, \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$dx = \sec^2 t\, dt$

$$= \int \frac{\sec t \times \sec^2 t}{tg^4(t)}\, dt$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^3 t}}{\frac{\sin^4 t}{\cos^4 t}}\, dt = \int \frac{\cos t}{\sin^4 t}\, dt$$

$$= \int (\sin t)' \times (\sin t)^{-4}\, dt$$

$$= \frac{(\sin t)^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3\sin^3 t} + c,\ c \in \mathbb{R}$$

$x = tg\, t$

$\boxed{1 + tg^2 t = \sec^2 t} \Leftrightarrow 1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t} \Leftrightarrow \cos^2 t = \frac{1}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow \sin^2 t = 1 - \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \sin t = \sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}}$

$\Leftrightarrow \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Necessário para a mudança de variável inversa! (não tínhamos o $\sin t$)

$$t \longrightarrow x$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx = -\frac{1}{3\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^3} = -\frac{1}{\frac{3x^2}{(1+x^2)^{2/3}}} + c = -\frac{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + c,$$

$C \in \mathbb{R}$ em intervalos

T2 Radicais $\sqrt{a^2-x^2}$, $a>0$, $x = a \sin t$ ou $x = a \cos t$

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Exercício (1)

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\overbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}^{\cos t}}{\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt$$

$$= \int \cot g^2 t\,dt = \int \operatorname{cosec}^2 t - 1\,dt$$

$$= \int \operatorname{cosec} t\,dt - t + c$$

$$= -\operatorname{cotg} t - t + c,\ c \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

Folha Amarela

$x = g(t) = \sin t$

$g'(t) = \cos t > 0,\ \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

g é dif. e inv. em

$\boxed{dx = \cos t\,dt}$

$x = \sin t$, $t = \arcsin x$

$\cos t = \sqrt{1-x^2}$; $\operatorname{cotg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + c,\ C \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

Exercício 1, do T3 → está nos slides

$$\int (x^2-4)^{-3/2}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{2\,tg\,t\,sec\,t}{(4sec^2t-4)\sqrt{4sec^2t-4}}\,dt$$

Usar a substituição trigonométrica

$x = g(t) = 2\,sec\,t,\ t \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$g'(t) = 2\,tg\,t\,sec\,t > 0$ em

$dx = 2\,tg\,t\,sec\,t\,dt$

$$\ldots = \frac{1}{4}\int (sin\,t)^{-2}\cos t\,dt$$

Fazer!

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(sin\,t)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{4\,sin\,t} + c$$

$x = 2\,sec\,t$

$x = \frac{2}{\cos t}$

$\cos t = \frac{2}{x}$

$sin\,t = \sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}$ etc...

$$\ldots = \frac{x}{4\sqrt{x^2-4}} + c,\ c \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

Fazer!

$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$

//

Resolução completa!

$$\int (x^2-4)^{-3/2}\,dx = \int \frac{1}{(x^2-4)\times\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{2\,tg\,t\,sec\,t}{(4sec^2t-4)\times\sqrt{4sec^2t-4}}\,dt$$

Substituição trigonométrica:

$x = g(t) = 2\,sec\,t$

$g'(t) = 2\,tg\,t\,sec\,t > 0,\ t \in]0, \frac{\pi}{2}[$

g é diferenciável e invertível em

$dx = 2\,tg\,t\,sec\,t$

$$= \int \frac{\cancel{tg\,t}\,sec\,t}{4(sec^2t-1)\times\cancel{\sqrt{sec^2t-1}}}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{sec\,t}{sec^2t-1}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{1}{\cos^2t}-\frac{\cos^2t}{\cos^2t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\times\int \frac{\cos t}{1-\cos^2t}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\times\int \cos t\times(sin\,t)^{-2}\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\times\frac{1}{sin\,t} + c,\ c \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

$x = 2\sec t \Leftrightarrow x = \frac{2}{\cos t} \Leftrightarrow \cos t = \frac{2}{x} \Leftrightarrow 1 - \sin^2 t = \left(\frac{2}{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow \sin t = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{x}\right)^2} \Leftrightarrow \sin t = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{|x|} \Leftrightarrow \sin t = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}, x \in \mathbb{R}^+$

Voltando à variável x.

$t \longrightarrow x$

$\int (x^2-4)^{-3/2} dx = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} = -\frac{x}{4\sqrt{x^2-4}} + C, C \in \mathbb{R}$ em intervalos