01.
05.

Cálculo I – Agr. 4 (2020/2021)

Exame de Recurso (2.ª Parte) online

04 de Março de 2021

Resolução:

1. Região $\mathcal{A}$: $x \in [0, \pi/2]$ e y entre $\sin x$ e $\cos(2x)$.

a) [usando a sugestão]. [$\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2}-\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, e da mesma forma $\sin(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$]

$y = \sin x = \cos(2x) = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$

$\sin x = \sin(\frac{\pi}{2}-2x)$. Esta equação tem uma solução óbvia em $\mathbb{R}$, que é obtida fazendo $x = \frac{\pi}{2} - 2x \Leftrightarrow$ $3x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \in [0, \pi/2]$. Está encontrada uma solução no intervalo pretendido.

Vamos provar que não há outra solução definindo a função

$\varphi(x) = \sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$, que admite o zero $x = \frac{\pi}{6}$.

$\varphi'(x) = \cos x - \cos(\frac{\pi}{2}-2x)(-2)$

$\varphi'(x) = \cos x + 2\cos(\frac{\pi}{2}-2x)$

$\varphi'(x) = \cos x + 2\sin(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2}-2x))$

$\varphi'(x) = \cos x + 2\sin(2x) > 0, \forall x \in [0, \pi/2[$

φ é injetiva em $[0,\pi/2]$. O zero $x = \frac{\pi}{6}$ é único.

O ponto de interseção é

$P = (\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6})$

$P = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$

$\boxed{\text{RESOLUÇÃO ALTERNATIVA}}$ (indicações)

Como $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, obtemos

$\sin x = \cos(2x) \Leftrightarrow \sin x = +1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \boxed{2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0}$

Fazendo a mudança de variável: $z = \sin x$, $z \in [0,1]$, $x \in [0, \pi/2]$.

obtemos $2z^2 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow \cancel{z = -1} \vee z = \frac{1}{2}$

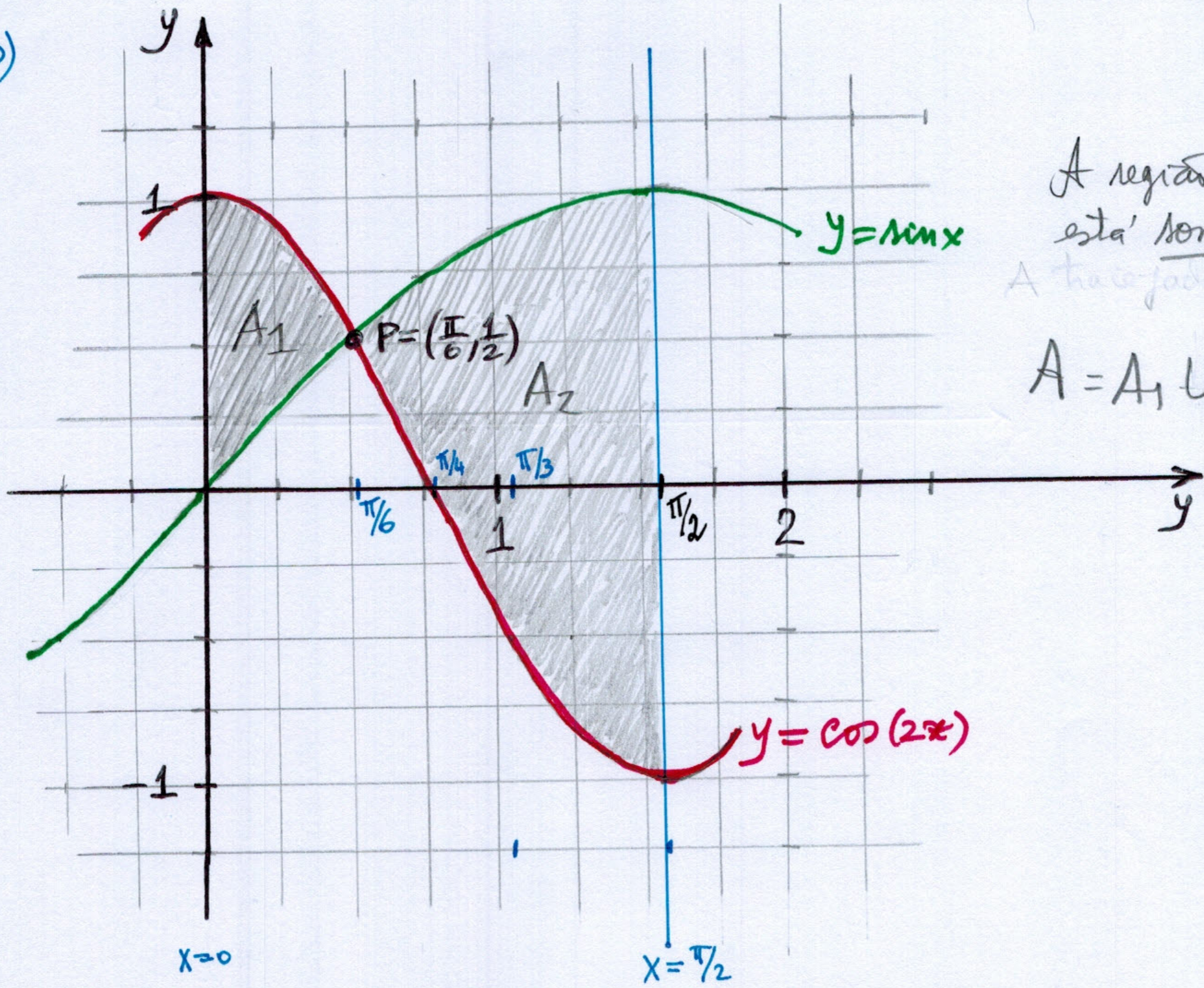
$\notin [0,1]$

Temos uma só solução $z = \sin x = \frac{1}{2}$ e como $x \in [0, \pi/2]$, $\underbrace{\sin x = \frac{1}{2}}_{\text{restrição da função seno a } [0,\pi/2]} \Leftrightarrow x = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ // $P = (\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$.

$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

02.

b)



A região A está sombreada

$A = A_1 \cup A_2$

c)

$$A = \int_0^{\pi/2} \left| \sin x - \cos(2x) \right| dx = \int_0^{\pi/6} \cos(2x) - \sin x \, dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x - \cos(2x) \, dx$$

$$A = \left[\frac{\sin(2x)}{2} + \cos x \right]_0^{\pi/6} + \left[-\cos x - \frac{\sin(2x)}{2} \right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$A = \underbrace{\left(\frac{\sin(2\pi/6)}{2} + \cos\frac{\pi}{6} \right)}_{K} - (0+1) + \left(-\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \cancel{\frac{\sin \pi}{2}} \right) - \underbrace{\left(-\cos\frac{\pi}{6} - \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)}{2} \right)}_{K}$$

$$A = 2\overbrace{\left(\frac{\sin(\pi/3)}{2} + \cos\frac{\pi}{6} \right)}^{K} - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}/2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} - 1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \simeq 1.5981$$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, onde $f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{se } x < -1 \\ e^{x^2} & \text{se } x \geqslant -1 \end{cases}$, integral impróprio 1.ª espécie em ambos os limites de integração

Em caso de convergência:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx + \int_{-1}^{+\infty} e^{x^2}\,dx$$

Para o integral dado divergir basta que um dos integrais do segundo membro divirja.

Ora,

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \Big[\ln(-x)\Big]_a^{-1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \big[\ln 1 - \ln(-a)\big]$$

$$= -\lim_{a\to-\infty} \underbrace{\ln(-a)}_{\nearrow +\infty} = -\infty \text{ , diverge.}$$

$\boxed{\text{RESOLUÇÃO ALTERNATIVA}}$ (indicações)

Como $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} e^{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{-1}^{b} e^{x^2}\,dx$

Mas, $e^{x^2} \geqslant e^0 = 1, \ \forall x \in [-1, +\infty[$

Então $(x^2 \geqslant 0)$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{-1}^{b} e^{x^2}\,dx \geqslant \lim_{b\to+\infty} \int_{-1}^{b} (1)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \big[x\big]_{-1}^{b} = +\infty$$

Conclui-se que $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} e^{x^2}\,dx$ diverge.

Conclusão: O integral dado diverge.

03.
05

3. a) i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2+\sqrt{n}+1}$, série de termos não negativos

$\boxed{\text{1.ª RESOLUÇÃO}}$

Critério do limite, usando $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (série harmónica $\alpha=1$, div.)

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+2}{n^2+\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+\sqrt{n}+1} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

$L=1\in\mathbb{R}^+$ permite concluir que as duas séries têm a mesma natureza (ambas divergentes)

$\boxed{\text{2.ª RESOLUÇÃO}}$

Critério de comparação

$$\frac{n+2}{n^2+\sqrt{n}+1} \geqslant \frac{n/2}{n^2+2n^2} = \frac{1/2}{3}\,\frac{n}{n^2} = \frac{1}{6n}$$

Ora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6n}$ div. porque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ div.

A série dada tem a mesma natureza (divergente).

3. a) ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(-2)^{-n}}{e^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{n^2}{(2e)^n}}_{a_n}$, série alternada de termos não nulos.

Critério de D'Alembert:

$$L_A = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n+1)^2}{(2e)^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n^2}{(2e)^n}} \right|$$

$$L_A = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}\,\frac{(2e)^n}{(2e)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{2e}\right]$$

$$L_A = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)^2 \frac{1}{2e}\right] = \frac{1}{2e} \in [0,1[$$

O critério de D'Alembert permite concluir que a série dos módulos converge. Logo a série dada conv. abs.

RESOLUÇÃO ALTERNATIVA:

Usando induções óbvias:

$$0 \leq \frac{n^2}{(2e)^n} \leq \frac{2^n}{2^n e^n} \leq \frac{1}{e^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pelo Critério de comparação, a série dos módulos da série dada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{n^2}{(2e)^n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(2e)^n}$$

converge porque $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ conv. (série geométrica razão $r = \frac{1}{e} \in]-1,1[$)

A conv. da série dada é absoluta.

3.b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{(6n-3)(6n+3)}$ a_n

$$\frac{6}{(6n-3)(6n+3)} = \frac{A}{6n-3} + \frac{B}{6n+3}$$

$$= \frac{A(6n+3) + B(6n-3)}{(6n-3)(6n+3)}$$

$$6 = 6(A+B)n + 3(A-B)$$

$$\begin{cases} 6(A+B) = 0 \\ 3(A-B) = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B = 0 \\ A-B = 2 \\ \hline 2A = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6}{(6n-3)(6n+3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{6n-3} - \frac{1}{6n+3}\right]$$

Ora, $a_n = u_n - u_{n+1}$, sendo $u_n = \frac{1}{6n-3}$

A série é de Mengoli.

A série de Mengoli converge se

$\lim_{n\to+\infty} u_n$ existir e for finito.

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6n-3} = 0$, a série converge.

A sua soma pode ser dada pela fórmula:

$$\boxed{S = u_1 - p \lim_{n\to+\infty} u_n}, \quad \text{com } p=1$$

F

$$S = \frac{1}{6-3} = \frac{1}{3}$$

NOTA: A fórmula F é fácil de deduzir usando a definição de série convergente:

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} [u_k - u_{k+1}]$$

propriedade associativa somatórios

$$S = \lim_{n\to+\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{k+1}\right]$$

$$0$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} \left[u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n + \right.$$
$$\left. - u_2 - u_3 - \dots - u_{n-1} - u_n - u_{n+1}\right]$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} (u_1 - u_{n+1}) = u_1 - \lim_{n\to+\infty} u_n$$

//