Aula 21

$a_n \leq |a_n| \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n}_{\text{Então a série inicial converge}} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|}_{\text{Se as séries dos Módulos converge}} = S \in \mathbb{R}_0^+$$

Então a série inicial converge $\Leftarrow$ Se as séries dos Módulos converge $\rightsquigarrow$ Podemos usar:

- critério do integral
- critério de comparação
- critério do limite

Exemplo (A)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n + \sin n}{n^2}$$

Vou formar a série dos módulos:

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos n + \sin n}{n^2} \right|}_{\text{A série dos módulos converge}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos n + \sin n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$$

que converge!

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Então a série dada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n + \sin n}{n^2}$ converge

e a conv. é absoluta

Exemplo (B)

Série: Harmónica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Formo a série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|(-1)^n|}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

↳ Diverge!

Com este critério, nada se pode concluir acerca da natureza desta série.

↳ (Na prox. aula veremos que converge)
A conv. é simples

Exemplo (C)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$$

Série dos Módulos :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ , converge}$$

Logo a série dada conv. absolutamente

Exemplo (D)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{e^n}$$

Série dos módulos: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\cos(n)}{e^n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos(n)|}{e^n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$

geométrica de razão
$r = \frac{1}{e} \in]-1,1[\Rightarrow$ Logo convergente

A série dada converge absolutamente.

Exemplo (E)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$$

$n >> 1$

$\frac{n}{n^2+1} \simeq \frac{1}{n}$

Série dos módulos : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$

A série dada não é abs. conv.

pode conv. ou não

Critério do limite :

$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \in \mathbb{R}^+$, a série dos módulos diverge pois $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ DIV

Séries de termos de sinais quaisquer

Critério de D'Alembert

↳ Costuma funcionar bem quando há fatoriais no termo a_n pois:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}$$

Critério de Cauchy

↳ Costuma funcionar bem quando o termo $a_n = (u_n)^n$

↖ tudo elevado a n

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[\cancel{n}]{|u_n|^{\cancel{n}}} = |u_n|$$

Exemplos

Ⓐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,2^n}$, $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

D'Alembert:

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{n!\,2^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{n!}\,\cancel{2^n}}{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{2^n}\times 2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+2} = 0 \in [0,1[$$

A série dada conv. absolutamente

tudo elevado a "n" talvez ... Cauchy

Ⓑ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

Critério de Cauchy:

mudo de variável real $x \in [1,+\infty[$.
Logo se $n \to +\infty$ então $x \to +\infty$

$$L = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[\cancel{n}]{\left|\frac{\ln n}{n}\right|^{\cancel{n}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} \overset{x=n}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \in [0,1[$$

A série conv. abs.

Ⓒ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{2^n\,n!}$ $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Há fatoriais vou tentar D'Alembert

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n\,n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\,n!\,(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}\,(n+1)!\,n^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2^n}\ \cancel{n!}\ \cancel{(n+1)}(n+1)^n}{2\cdot \cancel{2^n}\ \cancel{(n+1)}\ \cancel{n!}\ n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{2\ n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{e}{2} > 1$$

↳ A série diverge

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

trata-se de uma ind. $1^{+\infty}$