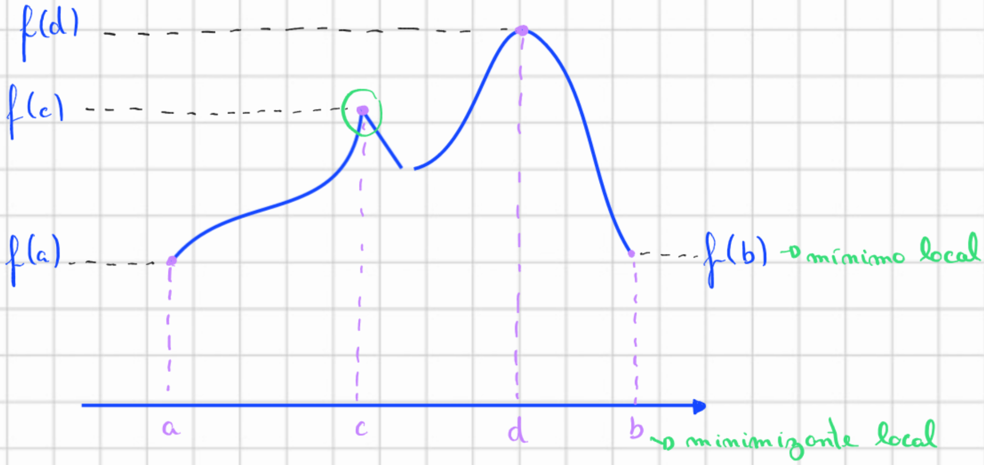
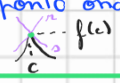
Aula 03



c é um maximizante global, logo $f(c)$ é um máximo local
Note: atinge um máximo local num ponto onde não se verifica $f'(c) = 0$



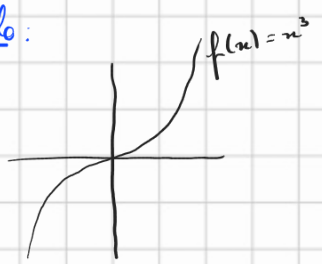
O máximo global/absoluto M de uma função é o máximo de CD_f

$$\max_{x \in D_f} f(x) = M = \max CD_f$$

Teorema de Fermat : Seja $f :]a,b[$ é uma função diferenciável em $c \in]a,b[$. Se c é um extremante local de f então $f'(c) = 0$

- Se $f'(c) = 0$ isso não basta para afirmar que c é extremante

Por exemplo:



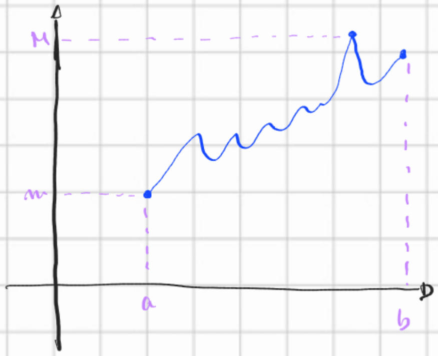
$f'(x) = 3x^2$
$f'(0) = 0$
e, no entanto, $x = 0$ não é extremante, nem mínimo nem máximo

Sai na 1.ª pergunta do primeiro teste!

T. Weirstrass : seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $b > a$, uma função contínua, então, f atinge um valor máximo global M e um mínimo global m em $[a,b]$

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x) = \max CD_f \qquad m = \min_{x \in [a,b]} f(x) = \min CD_f$$

Com os dois teoremos, uma função contínua transforma intervalos compactos $D_f \to [a,b]$ em intervalos compactos $[m, M] \to CD_f$



$$D_f = [a,b]$$
$$f([a,b]) = [m,M]$$

→ Note que uma função $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua pode não atingir máximo

$$f: [0,2[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x) = x^2$$

- Na verdade f atinge mínimo $m = 0$ em $x = 0$
- f não atinge máximo

$$4 = \sup_{x \in [0,2[} f(x) = \sup CD_f \text{ em } x = 2$$
$$\notin CD_f$$

Teoremas para funções regulares

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função regular se f for contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$

existe derivada e é finita

Teorema de Rolle

→ é uma consequência direta do:

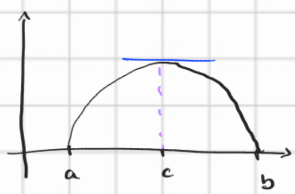
→ Teorema de Weierstrass (que garante a existência de extremos em $[a,b]$)

→ Teorema de Fermat (que diz que se $c \in]a,b[$ → diferenciável em $]a,b[$ é um extremante então $f'(c) = 0$)

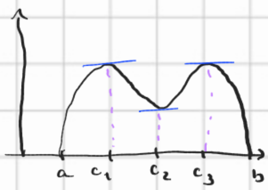
Corolário I do T. Rolle

Se $f(a) = f(b) = 0$

- Então posso afirmar que entre dois zeros da função existe pelo menos um zero da derivada



c é zero da derivada



c_1, c_2, c_3 são zeros da derivada

Corolário II do T. de Rolle

> • Entre dois zeros consecutivos de f' existe, no máximo, um zero de f.

1ª Hipótese: Não existe zero de f
2ª Hipótese: Existe um zero de f

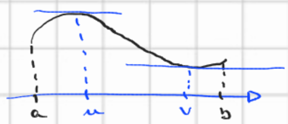
Porque? Racionine pela contrapositiva

• Suponha-se que entre dois zeros de f' existem dois zeros c_1 e c_2 de f. $(c_1 < c_2)$

• Pelo Corolário I se $f(c_1) = f(c_2) = 0$ então $\exists\, c_3 \in]c_1, c_2[: f'(c_3) = 0$

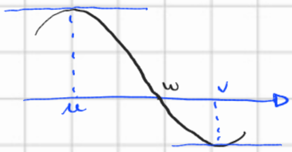
• Ora isto, é impossível porque os zeros da derivada deixam de ser consecutivos

1ª Hipótese



$f'(u) = f'(v) = 0$
São zeros consecutivos da derivada e f não tem nenhum zero em $]u, v[$

2ª Hipótese



$f'(u) = f'(v) = 0$
$f(w) = 0$, é o único zero