Cálculo I – Agr. 4 (2020/21)

1º teste – Turma TP4-A1

Resolução:

1. $f(x) := 7 \arccos\left(e^{-(x^{-2})}\right) = 7 \arccos\left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$

(40 pts) a) $D_f = \left\{ x \in \underbrace{D_{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} : \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \in \underbrace{D_{\arccos}}_{[-1,1]} \right\}$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \left|\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq 1 \right\}$$

Como $\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \leq 1 \right\}$$

Para $x \neq 0$, teremos de garantir que

$$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \leq \ln(1) = 0$$

condição universal

$$D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(130 pts) b) D_f é um conjunto aberto (todos os seus pontos são interiores). f é contínua.

$$f'(x) = 7 \, \frac{-\left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)'}{\sqrt{1-\left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)^2}}$$

$$f'(x) = -7 \, \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} \left(-x^{-2}\right)'}{\sqrt{1 - e^{-\frac{2}{x^2}}}}$$

$$f'(x) = -7\,\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-(-2)\,x^{-3}\right)}{\sqrt{1-e^{-\frac{2}{x^2}}}}$$

$$f'(x) = -\frac{14}{x^3}\,\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1-e^{-\frac{2}{x^2}}}}$$

$e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$

$\sqrt{1-e^{-\frac{2}{x^2}}} > 0$ pois $e^{-\frac{2}{x^2}} \in]0,1[$

$f'(x) = 0$ (impossível)

$\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^-$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^+$

f é diferenciável em $\mathcal{D}_f$. Trata-se de um problema de estudo da existência de extremos (relativos/absolutos) em pontos interiores. O Teorema de Fermat é aplicável para concluir que se existir algum extremante relativo $\alpha \in \mathcal{D}_f$ então $f'(\alpha) = 0$. Ora, como vimos $f'(x) = 0$ é impossível. Basta isso para concluir que não há extremos relativos o que implica que não existem extremos absolutos.

alternativa

A mesma conclusão podia tirar-se da seguinte tabela de variações, tendo em conta que f é contínua e diferenciável em $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	N.D.	$-$	
$f(x)$		↗	N.D.	↘	

NOTAS (não necessárias à resolução):

- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 7\arccos\left(e^{-(x^{-2})}\right) = \frac{7\pi}{2}$

  No entanto, $f(x) < \frac{7\pi}{2}$, $\forall x \in D_f$. O valor de $\frac{7\pi}{2}$ não é atingido por f em D_f pelo que $\frac{7\pi}{2}$ não é máximo de f.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 7\arccos\left(e^{-(x^{-2})}\right) = 0$

  $f(x) > 0$, $\forall x \in D_f$. O valor zero não é atingido por f em D_f, pelo que zero não é mínimo de f.

2. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $b > a$ e $CD_f = D_f = [a,b]$.

f é regular em $[a,b]$ (cont. em $[a,b]$ e dif. em $]a,b[$).

Mostrar que:

"A equação $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução em $[a,b]$".

<u>Método</u>: Redução ao absurdo (argumentar por contradição).

(15 pts) a) <u>1.º passo</u>

Supor, por absurdo, que $f(x) = x$ é impossível em $[a,b]$ implica que $\begin{cases} g(a) > 0 \\ g(b) < 0 \end{cases}$, onde $g(x) := f(x) - x$.

Como $CD_f = [a,b]$, $f(x) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$.

- Se $f(a) = a \Rightarrow g(a) = f(a) - a = 0$ (absurdo, pois $f(x) = x$ é impossível)
- Se $f(b) = b \Rightarrow g(b) = f(b) - b = 0$ (absurdo, ″)
- Se $f(x) \in]a,b[\Leftrightarrow \begin{cases} f(a) > a \\ f(b) < b \end{cases} \begin{cases} f(a) - a > 0 \\ f(b) - b < 0 \end{cases} \begin{cases} g(a) > 0 \\ g(b) < 0 \end{cases}$

(10 pts) b) <u>2.º passo</u>

$g(x) := f(x) - x$ é contínua porque é a soma de funções contínuas. $D_g = D_f = [a,b]$. Pela conclusão da alínea anterior g troca de sinal em $[a,b]$. Pelo Teorema de Bolzano-Cauchy g teria de ter um zero em $[a,b]$. Isso é absurdo porque é equivalente a afirmar que $f(x) = x$ é possível em $[a,b]$.

(5 pts)

Conclusão por contradição: Se é absurdo supor $f(x) = x$ impossível em $[a,b]$ então $f(x) = x$ tem pelo menos uma solução.