Aula 19

Exemplo (A)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \text{ converge então } \sum_{n=70}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \text{ converge}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} - \left[\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{69}}\right] = \sum_{n=70}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

Condição necessária de convergência (CNC)

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$\Longrightarrow$

Prova:

Sucessões das somas parciais de ordem n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a^k \qquad S_n = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} a^k\right)}_{S_{n-1}} + a_n$$

$$\boxed{S_n = S_{n+1} + a_n}$$

Por definição de série convergente se $\sum_{k=1}^{+\infty} a^k$ converge então $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe e é finito.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (S_{n-1} + a_n)$$

$$L = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} S_{n-1}}_{= L} + \lim_{n\to+\infty} a_n$$

$$L = L + \lim_{n\to+\infty} a_n \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = L - L = 0$$

$\square \longrightarrow$???

O reverso não é verdadeiro. Basta um contra-exemplo:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ diverge e, contudo, $\lim_{n\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] = 0$
(ver aula anterior)

$\frac{n}{n+1} \to 1$, $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \to 0$

Erro frequente:
$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Longrightarrow$ Série converge

Região das séries tais que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^{n}$$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n-5} = \frac{2}{3} \neq 0 \Longrightarrow$ A série diverge (C.S.D.)

Exemplo Ⓐ

Serve para depois podermos derivar, etc... Pois $n \in \mathbb{N}$, logo não é derivável

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$$

Vou definir uma função real de variável real que seja uma extensão de $a_n = \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$

$$f: [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$$

Nota:

$$f(n) = \sqrt[n]{n} = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

É claro que:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

$\boxed{exp(z) = e^z}$

$$f(x) = exp\left(\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right) = exp\left(\frac{1}{x}\ln(x)\right) = exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Calculo agora:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)\right] = exp\left(\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right)$$ indet. $\frac{+\infty}{+\infty}$

R.C.

$$= exp\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))'}{x'}\right) = exp\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\right) = e^0 = 1 \neq 0$$

Então:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{A série } \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n} \text{ diverge!}$$

Nota Importante:

A "Soma de séries divergentes" pode convergir: $\boxed{\text{ou não}}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} n$, diverge

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-n)$, diverge

$\sum_{n=1}^{+\infty} [n + (-n)] = \sum_{n=1}^{+\infty} 0$ converge

$\sum_{n=1}^{+\infty} n$ diverge

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-n+1)$ diverge

$\sum_{n=1}^{+\infty} [n + (-n+1)] = \sum_{n=1}^{+\infty} 1$ diverge

Exemplos

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[50\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$ diverge pois $50\neq 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ sabemos que diverge

b) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{12}{n^2-1}$ tem a mesma natureza de $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$

Conv. $= 12\times\frac{3}{4}=9$ $\qquad = 3/4$

Conv.

$$\frac{1}{(n+1)(n-1)}=\frac{A}{(n+1)}+\frac{B}{(n-1)}$$

$$1 = A(n-1)+B(n+1)$$

$$\begin{cases}A+B=0\\-A+B=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=-1/2\\B=1/2\end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n-1)}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\underbrace{\frac{-1/2}{n+1}}_{u_n}+\underbrace{\frac{1/2}{n-1}}_{u_{n+2}}\right)$$

Série de mengoli convergente porque $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1}=0\in\mathbb{R}$

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right]$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\cancel{\frac{1}{2n}}-\cancel{\frac{1}{2n+2}},\quad \lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{7}{11}\right)^n+\left(\frac{10}{3}\right)^n\right]$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{7}{11}\right)^n$, geométrica de razão $r=\frac{7}{11}\in]-1,1[$, logo convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{10}{3}\right)^n$, geométrica de razão $\frac{10}{3}\notin]-1,1[$ diverge

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{7}{11}\right)^n+\left(\frac{10}{3}\right)^n\right]$ diverge $\qquad\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}=r\in\mathbb{R}\right)$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3^n}{4^n}-\frac{2^n}{4^n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$, geométrica razão $r=\frac{3}{4}\in]-1,1[\Rightarrow$ converge e tem soma

$$\frac{1.^{\circ}\text{ termo}}{1-r}=\frac{3/4}{1-3/4}=3$$

$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$, geom. $\Rightarrow$ converge

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n-2^n}{4^n}=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$

Outros exemplos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$, não fixa sinal logo não é uma série de termos não negativos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \boxed{\frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n(n+1)}} \Rightarrow$$ Série de termos positivos

$\rightarrow a_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)$$

$\boxed{\lim \cos(n) \text{ não existe}}$

não fixa sinal

$\cos(1) > 0$

$\cos(2) < 0$, pois $2 \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \quad a_n$$

$a_1 = \cos(1) > 0$

$a_2 = \cos\left(\frac{1}{2}\right) > 0$

$\vdots$

$a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \cos(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow$$ A série diverge

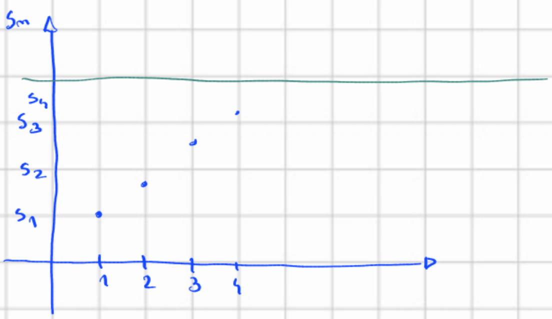
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$, onde $a_k \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Forma a sucessão das somas parciais:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right)}_{S_{n-1}} + \underbrace{a_n}_{\geq 0}$$

$S_n \geq S_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo, S_n é monótona crescente



M = Majorante de $S_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ou seja

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right)$ não é de termos não negativos

Mas tem a mesma natureza de $\sum_{n=1}^{+\infty} \underset{\lambda \neq 0}{\underbrace{(-1)}} \left(-\frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é de termos não negativos

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_k$, onde $a_k = \begin{cases} \cos(n) & , n = 1,2,3,4,\dots,100 \\ \frac{1}{n^3} & , n = 101, 102, \dots \end{cases}$

Esta série só fixa sinal (positivo) a partir de $n = 101$.

Analiso então a natureza de

$\sum_{n=101}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ converge