# Aula 18

## Séries numéricas

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1}$$

$$\begin{array}{r}
1{,}0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots \\
0{,}1\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots \\
0{,}0\ 1\ 0\ 0\ 0\ \dots \\
+\ 0{,}0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \dots \\
\hline
1{,}1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots = \frac{10}{9}
\end{array}$$

**Sucessão de nº reais** $(a_n)_{n \in \mathbb{R}}$

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

— // —

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Série numérica de termo geral $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Define-se uma outra sucessão associada a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, designada por "sucessão das somas parciais"

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\vdots$

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

$S_n$ é a soma dos $n$ primeiros termos de $(a_n)_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n \to +\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Se $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ for convergente $\Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ existe e é finito

Diz-se que é a soma da série: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} S_n$

# Progressão geométrica

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão geométrica se $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ (razão da progressão)

Exemplo:

$$a_n = \frac{1}{2^n} \; ; \; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} = r$$

Série geométrica associada:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Sucessão das Somas parciais

$$S_n = \sum^{n} a_n$$

Soma dos "n" primeiros termos de uma progressão aritmética:

$$S_n = (1.^{\circ} \text{ termo}) \times \frac{1 - (\text{razão})^n}{1 - \text{razão}}$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Nota:
$a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$
$r \neq 1$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left[ a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r} \right] = a_1 \times \frac{1 - \underbrace{\left(\lim_{n\to+\infty} r^n\right)}_{=0}}{1 - r}$$

sse $r \in \,]-1,1[$
Noutros casos diverge

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - r} \; , \text{ sse } |r| < 1$$

Então,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \frac{a_1}{1 - r}$$

Exemplo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1.^{\circ} \text{ termo}}{1 - \text{razão}} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$$

• Os numeros reais podem ser representados por dízimos do sistema de numeração posicional de base 10. A representação pode ser finita ou infinita

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots$$

$$0{,}9999\ldots = 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} \Rightarrow \text{série de razão } \frac{1}{10} = r \text{ e 1º termo } \frac{9}{10}$$

$$0{,}999\ldots = \frac{9/10}{1 - 1/10} = \frac{9/10}{9/10} = 1$$

$$(0{,}111)_{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \qquad (0{,}11111\ldots)_2 = 1_{(2)}$$

binário

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Exercício A

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n = \frac{\text{1º termo}}{1 - r} = \frac{\left(\frac{99}{100}\right)^0}{1 - 0{,}99} = \frac{1}{0{,}01} = 100$$

Razão da série geométrica:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{99}{100}\right)^{n+1}}{\left(\frac{99}{100}\right)^n} = \frac{99}{100} = \underset{r}{\overset{\parallel}{0{,}99}} \in ]-1,1[$$

A série converge.

B

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n$$

$$\text{razão} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{3}{e}\right)^{n+1}}{(-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n} = \frac{(-1)\cancel{(-1)^n}\cancel{\left(\frac{3}{e}\right)^n}\left(\frac{3}{e}\right)}{\cancel{(-1)^n}\cancel{\left(\frac{3}{e}\right)^n}} = -\frac{3}{e} \in ]-1,1[$$

$(e = 2{,}718\ldots < 3)$

Logo, a série diverge

C

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = \frac{\cancel{1/2}\left(\frac{2}{3}\right)^1}{\cancel{1 - 1/2}} = \frac{2}{3}$$

Série geométrica de razão
$r = \frac{2}{3} \in ]-1,1[$, converge

(D)

$$\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n} = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$r = \frac{1}{2} \in ]-1,1[$

1.º termo $= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

## Séries redutíveis (ou de Mengoli ou telescópicas)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1}), \text{ sendo } u_n = \frac{1}{n}$$

A formula resume

**Exemplo:**

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \qquad a_n = u_n - u_{n+2}, \text{ onde } u_n = \frac{1}{n}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum \frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

$$- \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] = \frac{3}{2}$$