Q1 do Exame de Recurso

1.a) $f(x) := \arccos\left(e^{2x} - 2e^{x} + 1\right) = \arccos\left(\left(e^{x}-1\right)^2\right)$

Como $\mathcal{D}_{\arccos} = [-1,1]$ tem-se

$$\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \underbrace{(e^{x}-1)^2}_{\geq 0} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : (e^{x}-1)^2 \leq 1\}$$

$$(e^{x}-1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^{x} + 1 \leq 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^{x}-2)\underbrace{e^{x}}_{>0} \leq 0 \Leftrightarrow e^{x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow e^{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \ln 2$$

$\mathcal{D}_f = \left]-\infty, \ln 2\right]$.

1.b)

$$f'(x) = \frac{-\left[(e^{x}-1)^2\right]'}{\sqrt{1-(e^{x}-1)^2}} = \frac{-2(e^{x}-1)e^{x}}{\sqrt{1-(e^{x}-1)^2}}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^{x}(e^{x}-1)}{\sqrt{1-(e^{x}-1)^2}}, \quad x \in \left]-\infty, \ln 2\right[.$$

Como f é diferenciável em $\left]-\infty, \ln 2\right[$ o Teorema de Fermat permite concluir que se houver extremantes locais em $x \in \left]-\infty, \ln 2\right[$ então $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{x}(e^{x}-1) = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Concluindo-se que $x=0$ é candidato a extremante.

$$f(0) = \arccos(1-2+1) = \arccos(0) = \pi/2$$

$$f(\ln 2) = \arccos\left((e^{\ln 2}-1)^2\right) = \arccos(1) = 0$$

.../...

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \arccos(1) = 0$. Para $x \in \,]-\infty, \ln 2[$:

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2e^{x}(e^{x}-1) < 0 \Leftrightarrow e^{x}-1>0 \Leftrightarrow x>0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$		0		$\ln 2$
f		$\nearrow$	$\pi/2$	$\searrow$	0
f'		$+$	0	$-$	N.D.

Conclusão: $m = 0$ é o mínimo local e global de f atingido em $x_m = \ln 2$.

$M = \frac{\pi}{2}$ é o máximo local e global de f atingido em $x_M = 0$.

Não existem outros extremos de f.

//