Aula 05

Teorema de Lagrange

ou

Teorema do valor médio

ou

Teorema dos acréscimos finitos

Teorema

Seja $F: \overset{b>a}{[a,b]}$ uma função regular. Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)}$$

- Note: No caso particular $f(a)=f(b)$ obtemos exatamente o T. de Rolle

$$\exists a \in]a,b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

· Dedução do T. Lagrange a partir do T. Rolle

- Seja $f: \overset{b>a}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$, função regular

$$x \longmapsto y = f(x)$$

- A partir de f construio uma outra função auxiliar (regular em $[a,b]$)

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\, x$$

→ g é regular ✓

→ $g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times a = \dots = \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a}$

→ $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times b = \dots = \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a}$

→ $g(a) = g(b)$, posso aplicar o T. Rolle a F em $[a,b]$

- O T. Rolle garante que existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[: g'(c) = 0$

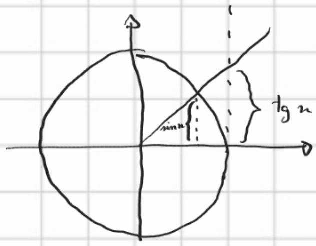
$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = 0 = g'(c)$$

· Fica demonstrado o T. de Lagrange!

T.P.C. Provar que:

a) $\sin(x) \leq x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

b) $tg(x) \geq x, \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$



$\sin x \leq x \leq tg\, x$

Importante:

$\begin{cases} f'(c)=0 \\ f''(c)>0 \end{cases} \Rightarrow c$ é minimizante local

c.v.p.c.

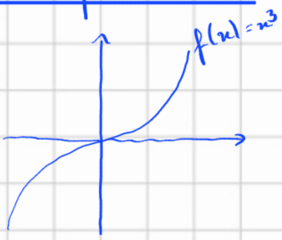
f é convexa

$\begin{cases} f'(c)=0 \\ f''(c)<0 \end{cases} \Rightarrow c$ é maximizante local

c.v.p.b

f é concava

Casos particulares



$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$

$x = 0$ não é extremante! $\neq$

$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$

$x = 0$ é extremante! (minimizante local) $\neq$

$f'(x) = -4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = -12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$

$f(x) = -x^4$ $\quad x = 0$ é extremante! (maximizante local) $\neq$

Teorema de Cauchy

- Esboço da prova a partir do T. Lagrange:

$$f : \overset{b>a}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ regular}$$

$$g : \overset{b>a}{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ regular e não nula}$$

- O T. de Lagrange aplicado a f e a g dá

$$\rightarrow \boxed{f'(c_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \quad F1$$

$$\rightarrow \boxed{g'(c_2) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}} \quad F2$$

- $$\frac{F1}{F2} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}}{\frac{g(b)-g(a)}{\cancel{b-a}}} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)} \underset{\uparrow}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)} \rightarrow \text{☺}$$

T. Cauchy

- Do teorema de Cauchy podemos deduzir uma Regra para calcular limites indeterminados do tipo $\frac{0}{0}$ e $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$

necessária!

$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$

"deita fora" todos os limites notáveis

$\boxed{\text{Chama-se Regra de Cauchy R.C.}}$

! $\boxed{\text{Exemplo}}$

$$f : [a,x] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ regular}$$

$$g : [a,x] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ regular e não nula}$$

Calcula-se:

$$L_1 = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ e dá indet. } \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}$$

$$L_2 = \lim_{x \to a^+} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{\cancel{x-a}}}{\frac{g(x)-g(a)}{\cancel{x-a}}} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

<u>No caso em que $f(a)=0$ e $g(a)=0$</u>

$$L_1 = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{R.C.}{=}} \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemplos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\ \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{R.C}{=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\cos 0=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x}\ \underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\overset{R.C.}{=}}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{(e^x)'}{x'}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}\ \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\overset{R.C.}{=}}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}\ \underset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\overset{R.C.}{=}}\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^{2,7}} > \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\ ,\ p\in \mathbb{R}_0^+$$

$\boxed{\text{E se } p\in\mathbb{R}^- \text{?}}$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}}\ \underset{\left(\frac{+\infty}{0}\right)}{=}\ \lim_{x\to +\infty}\left[e^x\times x\right]=+\infty$$

Provar que: $K=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\ ,\ 2{,}71828\ldots$

Nº de neper

- Definimos $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ para $x\in\mathbb{R}^+$.
- Assim, posso logaritmizar:

$\exp(z)=e^z$

$$K=\lim_{x\to +\infty}\left[\exp\left(\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)\right]$$

$\to 0$, $\to 1$, $\to 0$

$$\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{R.C}{=}}\ \lim_{x\to +\infty}\left[\exp\left(\frac{\frac{x}{x+1}\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\exp\left(\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-(1+x)}{\cancel{x^2}}}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\exp\left(\frac{\frac{-x}{x+1}}{-1}\right)\right]=\lim_{x\to +\infty}\left[\exp\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]=\exp(1)=e^1=2{,}71828\ldots$$