Aula 22

Slide #30

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, série harmónica alternada $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Critério de Leibniz:

- $u_n = \frac{1}{n}$ é monótona decrescente
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$u_{n+1} - u_n \leqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{(n+1)n} = -\frac{1}{n(n+1)} \leqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{x \in [1, +\infty[\; \subset \mathbb{R}}$

$f(x) = \frac{1}{x}$ é uma extensão de $u_n = \frac{1}{n}$ pois

$f(n) = \frac{1}{n} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \forall x \in [1, +\infty[$

A série dada converge
Mas a conv. é simples porque
a série dos módulos $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge

b)

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$, série alternada $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Critério de Leibniz:

- $u_n = \frac{1}{\ln n}$ é monótona decrescente ✓
- $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$

A série converge
A conv. é simples porque a série dos módulos diverge

$\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ (compare com $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$)

c)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

Pela CNC/CSD prova-se que a série diverge

A série é alternada

Mas, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1}$ (já provamos isto $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\exp\left(\ln\left(x^{1/x}\right)\right)\right)$)

Logo, pelo critério de Leibniz, nada se pode concluir d)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$$

Série alternada

Crit. de Leibniz:

- $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ é decrescente! ✓
- $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ ✓

A série conv.

A conv. é simples porque a Série dos Módulos Diverge