Aula 08

$f(x) = \dfrac{3x^2+2x+1}{4x^3+3x^2+x-1}$ $\to$ é uma função/fração racional

$N(x)$; $D(x)$

Se $\underbrace{\text{grau } N(x)}_{2} < \underbrace{\text{grau } D(x)}_{3}$ $\to$ a fração diz-se própria

Se grau $N(x) \geq$ grau $D(x)$ $\to$ a fração diz-se imprópria

Procede-se a uma divisão polinomial

Exemplo:

$f(x) = \dfrac{4x^3+3x}{2x^2+1}$, função imprópria (grau $N=3 \geq$ grau $D=2$

N ; D

Divisão polinomial:

$$\begin{array}{r|l} \boxed{4x^3+0x^2+3x+0} & \boxed{2x^2+0x+1} \\ -4x^3-0x^2-2x-0 & 2x \\ \hline x & \end{array}$$

R ; Q

STOP

grau R < grau Q

$$\boxed{\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}}$$, neste caso: $\dfrac{N(x)}{D(x)} = 2x + \dfrac{x}{2x^2+1}$

Polinómio ; Fração própria

Então:

$$\int \frac{4x^3+3x}{2x^2+1}\,dx = \int 2x + \frac{x}{2x^2+1}\,dx = \int 2x\,dx + \int \frac{x}{2x^2+1}\,dx$$

$$= x^2 + c + \frac{1}{4}\int \frac{(2x^2+1)'}{2x^2+1}\,dx$$

$$= x^2 + \frac{1}{4} \times \ln(2x^2+1) + c \ , \ c \in \mathbb{R}$$ em intervalos

CDS

Teorema fundamental da algebra

→ Um polinómio de coeficientes reais e de grau $K \in \mathbb{N}$ tem exatamente $\underline{K}$ raízes, reais ou complexos, contada a sua multiplicidade

Nota: As raízes complexas surgem aos pares conjugados $\alpha \pm \beta i$

<u>Exemplo</u>:

$x^2=4 \Leftrightarrow x=-2 \vee x=2$

$$D(x) := 7(x^2-4) = 7(x-2)(x+2)$$

—//—

$x^2=-4$
$\Leftrightarrow x = 2i \vee x=-2i$
$\Leftrightarrow x = \pm 2i$ → par conjugado de raízes complexas

$$D(x) := 9(x^2+4) = 9(x+2i)(x-2i)$$
$$= 9(x^2 - \cancel{2ix} + \cancel{2ix} - 4i^2)$$
$$= 9 \times (x^2+4)$$
$$= 9x^2+36$$

→ Nos exemplos atrás vimos exemplos de fatorização de polinómios exibindo as suas raízes

→ No caso geral, é possível decompor um polinómio

$$D(x) = a_K x^K + \dots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 \quad , a_K \neq 0, \ a_i \in \mathbb{R}$$

em <u>Fatores irredutíveis</u>

$$D(x) = d\underbrace{(x-\alpha_1)^{P_1}}_{\substack{\text{raiz } \alpha_1 \in \mathbb{R} \\ \text{com multiplicidade } P_1}} \dots \underbrace{(x-x_m)^{P_m}}_{\substack{\alpha_m \in \mathbb{R} \\ \text{com mult. } P_m}} \dots \underbrace{(x^2+\beta_1 x+\delta_1)^{q_1}}_{\substack{\text{par de complexos} \\ \text{conjugados com} \\ \text{mult. } q_1}} \dots \underbrace{(x^2+q_m+\delta_m)^{q_m}}_{\text{com mult. } q_m}$$

Multiplicidade de uma raiz

- <u>Raiz simples</u> (multiplicidade $=1$)

α é raiz simples de $D(x)$ <u>se</u>

$$\begin{cases} D(\alpha) = 0 \\ D'(x) \neq 0 \end{cases}$$

<u>Exemplo</u>:

$$D(x) = 7(x^2-4)$$

$\alpha = 2$ é raiz simples de D pois $\begin{cases} D(x) = 7(2^2-4) = 0 \\ D'(x) = 14x \neq 0 \end{cases}$

$x=2 \qquad x=2$

- Raízes dupla (multiplicidade = 2)

α é raiz dupla de $D(x)$ se

$$\begin{cases} D(x) = 0 \\ D'(x) = 0 \\ D''(x) \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo:

$$D(x) = x^2 + 4x + 4$$
$$D'(x) = 2x + 4$$
$$D''(x) = 2 \neq 0$$

$\alpha = -2$ é uma raiz dupla de $D(x)$ porque

$$\begin{cases} D(-2) = 0 \ ✓ \\ D'(-2) = 0 \ ✓ \\ D''(-2) = 2 \neq 0 \ ✓ \end{cases}$$

- (etc)

Geral! • Raiz de multiplicidade $k \in \mathbb{N}$

Se $\begin{cases} D(x) = D'(x) = \dots = D^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ D^{(k)}(x) \neq 0 \end{cases}$

Exemplos:

① $\displaystyle\int \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^2 - 9}\, dx$ → Fração imprópria

grau $N = 4 \geq 2 =$ grau D

Divisão polinomial:

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 3 & x^2 - 9 \\ \hline -x^4 \qquad\quad + 9x^2 \qquad\qquad & x^2 + 5 \\ \hline 5x^2 \qquad\quad 3 & \\ -5x^2 \qquad + 45 & \\ \hline 48 & \end{array}$$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = x^2 + 5 + \frac{48}{x^2 - 9}$$

$$\int \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^2 - 9}\, dx = \int x^2 + 5 + \frac{48}{x^2 - 9}\, dx$$

$$= \int x^2 + 5\, dx + 48 \int \frac{1}{x^2 - 9}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 5x + c + 48 \int \left[\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-(-3)} \right] dx$$

Existem números reais únicos $A, B \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{1}{x^2 - 9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{x^2-9}} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{\cancel{(x-3)(x+3)}}$$

?

?

Denominadores iguais!

Método dos coeficientes indeterminados

Logo, para a igualdade ser válida:

$$1 = A(x+3) + B(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 1 = (A+B)x + 3(A-B)$$

$$\Leftrightarrow 0x + 1 = (A+B)x + 3(A-B)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3(A-B)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3A+3B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{3}B=-\cancel{3}A \\ 6A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1/6 \\ A=1/6 \end{cases}$$

Logo,

$$\boxed{\frac{1}{x^2-9} = \frac{1/6}{x+3} + \frac{-1/6}{x-3}}$$

$$\int \frac{1}{x^2-9}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-3}\, dx - \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+3}\, dx$$

$$= \frac{1}{6} \times \ln|x-3| - \frac{1}{6} \times \ln|x+3| + c,\ c \in \mathbb{R}$$ em intervalos

Voltando á primitiva:

$$= \frac{x^3}{3} + 5x + 48\left[\frac{1}{6}\ln|x-3| - \frac{1}{6}\ln|x+3| + c\right]$$

$$= \frac{x^3}{3} + 5x + 8\ln|x-3| - 8\ln|x+3| + c$$

$$= \frac{x^3}{3} + 5x + \ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^8 + c \;,\; c \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

— // —

(2)

$$\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}\,dx$$ → Fração própria

Raizes do denominador: $x^2+5x-6=0$

(...)

$\Leftrightarrow x=-6 \lor x=1$

Raizes reais simples

Logo, $x^2+5x-6 = (x-1)(x+6)$

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6} = \frac{x+2}{(x-1)(x+6)}$$

Existem $A,B \in \mathbb{R}$ (únicos) tal que:

$$\frac{x+2}{x^2+5x-6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6}$$

$$\frac{x+2}{\cancel{x^2+5x-6}} = \frac{A(x+6)+B(x-1)}{\cancel{(x+6)(x-1)}}$$

$$\Leftrightarrow x+2 = (A+B)x + 6A-B \;,\; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 6A-B=2 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1-B \\ 6A=2+B \end{cases} \quad \begin{cases} A=3/7 \\ B=4/7 \end{cases}$$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+6} = \frac{3/7}{x-1} + \frac{4/7}{x+6}$$

Voltando à primitiva:

$$\int \frac{x+2}{x^2+5x-6}\,dx = \int \frac{3/7}{x-1}\,dx + \int \frac{4/7}{x+6}\,dx$$

$$= \frac{3}{7} \times \ln|x-1| + \frac{4}{7} \times \ln|x+6| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$ em intervalos

Outro método para calcular A e B: (para sistemas maiores)

Se $\boxed{1x + 2 = A(x+6) + B(x-1)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Em particular temos uma igualdade se $\boxed{x = -6}$

$-6+2 = \cancel{A(-6-6)} + B(-6-1)$

$\Leftrightarrow -4 = -7B$

$\Leftrightarrow B = \frac{4}{7}$

Em particular se $\boxed{x = 1}$

$1+2 = A(1+6) + \cancel{B(1-1)}$

$\Leftrightarrow A = \frac{3}{7}$

—//—

③ $$\int \frac{1}{x^3+8}\,dx$$ Fracão própria

Raízes do denominador: $x^3+8 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$ raiz real simples

! Uma das três raízes!

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

Raiz real simples $x=-2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

Como $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) < 0$, logo não existem raízes reais

Corresponde a um par de raízes complexos conjugados com mult. 1

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{(x^3+8)}} = \frac{A(x^2-2x+4) + Bx(x+2) + C(x+2)}{\cancel{(x+2)} \times \cancel{(x^2-2x+4)}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = A(x^2-2x+4) + B(x^2+2x) + C(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 1 = (A+B)x^2 + \left(B - A + \frac{C}{2}\right)2x + 4A + 2C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B-A+\frac{C}{2}=0 \\ 4A+2C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ 2B=-\frac{C}{2} \\ 4A+2C=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ C=-4B \\ -4B-8B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1/12 \\ C=1/3 \\ B=-1/12 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x^3+8}\,dx = \int \frac{1/12}{x+2}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{12} \times \int \frac{(x+2)'}{x+2}\,dx - \frac{1}{12}\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}$$

$(x^2-2x)' = 2x-2$

$$= \frac{1}{12} \times \ln|x+2| + c - \frac{1}{24} \boxed{\int \frac{2x-8}{x^2-2x+4}\,dx}$$

$(x^2-2x+4)' = 2x-2$

$$\int \frac{2x-8}{x^2-2x+4}\,dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx + \int \frac{-6}{x^2-2x+4}\,dx$$

"escrever na forma 'pq'"

$x^2-2x+4 = (x+p)^2+q$
$= x^2+2px+(p^2+q)$

$$\begin{cases} 1=1 \\ 2p=-2 \\ p^2+q=4 \end{cases} \quad \begin{cases} 1=1 \\ p=-1 \\ q=3 \end{cases}$$

$x^2-2x+4 = (x-1)^2+3$

$$= \ln|x^2-2x+4| + \int \frac{-6}{(x-1)^2+3}\,dx + c$$

$$= \ln|x^2-2x+4| + \int \frac{-2}{\frac{(x-1)^2}{3}+1}\,dx + c$$

$\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{1\times\sqrt{3} - 0}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$= \ln|x^2-2x+4| + \int \frac{-2}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx + c$$

$$= \ln|x^2-2x+4| - 2 \times \frac{3}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx + c$$

$$= \ln|x^2-2x+4| - 2\sqrt{3} \times \text{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + c \;, \; c \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

Voltando à equação principal:

$$= \frac{\ln|x+2|}{12} + c - \frac{1}{24} \int \frac{2x-8}{x^2-2x+4}\,dx$$

$$= \frac{\ln|x+2|}{12} - \frac{1}{24} \times \ln(x^2-2x+4) - \frac{2\sqrt{3}}{24} \times \text{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$= \frac{2\ln|x+2| - \ln(x^2-2x+4) - 2\sqrt{3}\,\text{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)}{24} + c, \; c \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

Outro processo para calcular $\int \frac{2x-8}{x^2-2x+4}\,dx = 2\int \frac{x-4}{x^2-2x+4}\,dx$

$$\boxed{\frac{x-4}{x^2-2x+4} = K_1 \frac{(x^2-2x+4)'}{x^2-2x+4} + K_2 \frac{1}{x^2-2x+4}}$$

$$x-4 = K_1 \times (2x-2) + K_2$$

$$\Leftrightarrow x-4 = 2K_1 x - 2K_1 + K_2$$

$$\begin{cases} 2K_1 = 1 \\ -2K_1 + K_2 = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} K_1 = 1/2 \\ K_2 = -3 \end{cases}$$

Logo, $\frac{x-4}{x^2-2x+4} = \frac{1}{2} \times \frac{(x^2-2x+4)'}{x^2-2x+4} - 3 \times \frac{1}{x^2-2x+4}$

Agora é mais fácil primitivar!