Aula 07

→ As formulas que transformam produtos em somas são potencialmente úteis na primitivação.

Exemplos:

$$(\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x = 1 - \cos^2 x$$

$$(\sec x)^2 = \sec x \cdot \sec x = 1 - \operatorname{tg}^2 x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x = \cos(2x) + 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

ou

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

Assim,

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \int 2 \times \cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) + C, \; C \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

E também,

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \times \operatorname{sen}(2x) + C, \; C \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C, \; C \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \sin x \, (1 - \cos^2 x) \, dx$$
$$= \int \sin x - \cos^2 x \sin x \, dx$$
$$= -\cos x - \int \sin x (\cos x)^2 \, dx$$

$$= -\cos x + \int (\cos x)' (\cos x)^2 \, dx$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c, \ c \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \times \cos^2 x \, dx = \int \cos x \times (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx$$

$$= \int \cos x \, dx - \int \cos x \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

$$= \operatorname{sen} x + c - \int (\operatorname{sen} x)' (\operatorname{sen} x)^2 \, dx$$

$$= \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c, \ c \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

!

1.ª Técnica de Primitivação - Primitivação por partes

- Esta técnica calcula primitivas de produtos de funções (em alguns casos)

- Baseia-se na fórmula na derivação do produto

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

- Primitivando membro a membro

$$\cancel{P}\left(\left[f(x) \cdot g(x)\right]^{\cancel{'}}\right) = P\left(f'(x) \cdot g(x)\right) + P\left(f(x) \cdot g'(x)\right)$$

corta

$$P\left(f'(x) \cdot g(x)\right) = \left[f(x) \cdot g(x)\right] - P\left(f(x) \cdot g'(x)\right)$$

$$P\left(f(x) \cdot g'(x)\right) = \left[f(x) \cdot g(x)\right] - P\left(f'(x) \cdot g(x)\right)$$

Podem dar jeito

$u \longleftarrow f$

$v \longleftarrow g$

$$P_{u'v} = u \cdot v - P_{u \cdot v'}$$

ou

$$P_{uv'} = u \cdot v - P_{u' \cdot v}$$

ou

$$\int u(x) \, v'(x) \, dx = u(x) \times v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

ou

$$\int u'(x) \, v(x) \, dx = u(x) \times v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) \, dx$$

Exemplos

1.

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} \, dx = \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{(1)}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} \, dx = x e^x - e^x + c$$

$= (x-1)e^x + c, \ c \in \mathbb{R}$ em intervalos

$u = x \qquad u' = 1$
$v = e^x \qquad v' = e^x$

$P_{uv'} = uv - P_{u'v}$

2.

$$\int \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{e^x}_{v_1} \, dx = x^2 \cdot e^x - \int (2x) e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - 2 \int \underbrace{x}_{u_2} \underbrace{e^x}_{v_2} \, dx$$

$u_1 = x^2 \qquad v_1 = e^x$
$u_1' = 2x \qquad v_1' = e^x$

$u_2 = x \qquad v_2 = e^x$
$u_2' = 1 \qquad v_2' = e^x$

$= x^2 \cdot e^x - 2\left[x e^x - \int (1) e^x \, dx \right]$

$= x^2 \cdot e^x - 2xe^x - 2e^x + c$

$= (x^2 - 2x - 2)e^x + c, \ c \in \mathbb{R}$ em intervalos

3.

Por vezes temos de "inventar" o produto de funções:

$$\int \ln(x) \, dx = \int \underbrace{(1)}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} \, dx = x \times \ln(x) - \int \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

$= x \ln(x) - x + c, \ c \in \mathbb{R}$ em intervalos

$u = x \qquad v = \ln(x)$
$u' = 1 \qquad v' = \frac{1}{x}$

$$\int \ln(x) \, dx = x(\ln(x) - 1) + c, \ c \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

! Por vezes entra-se num "loop de cálculo"

Exemplo

"Loop"

$$\int \underbrace{e^{-x}}_{u_1'} \underbrace{\sin x}_{v_1}\, dx = -e^{-x}\sin x - \int -e^{-x} \times \cos x \, dx \checkmark$$

$$= -e^{-x}\sin x - \int \underbrace{-e^{-x}}_{u_2'} \underbrace{\cos x}_{v_2}\, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_1 = -e^{-x} & v_1 = \sin x \\ u_1' = e^{-x} & v_1' = \cos x \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u_2 = e^{-x} & v_2 = \cos x \\ u_2' = e^{-x} & v_2' = -\sin x \end{array}}$$

$$= -e^{-x}\sin x - \left(e^{-x}\cos x - \int -e^{-x} \times \sin x\, dx\right)$$

$$= -e^{-x}\sin x - \left(e^{-x}\cos x + \boxed{\int e^{-x}\sin x\, dx}\right)$$

Da expressão inicial

Passo para o primeiro membro

$$\int e^{-x}\sin x\, dx = -e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int e^{-x}\sin x\, dx = \frac{-e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int e^{-x}\sin x\, dx = (-e^{-x}) \times \frac{\sin x + \cos x}{2}$$