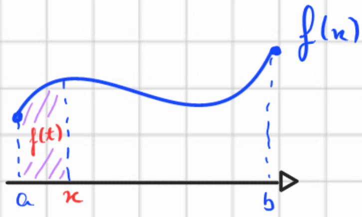
Aula 13

TFCI [Teorema Fundamental do Cálculo (Integral)] !

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f integrável em $[a,b]$

Defina-se a função:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$



1. F é contínua em $[a,b]$

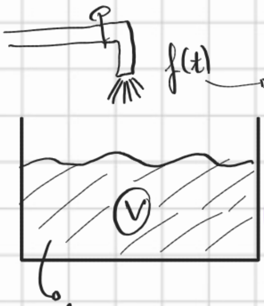
2. Se f é contínua em $x\in]a,b[$ então:

F é diferenciável e $\boxed{F'(x)=f(x)}$ ou seja, F é uma primitiva de f.

Ou seja:

$$\left[\int_a^x f(t)\,dt\right]'=f(t),\ t\in]a,b[$$

f é contínua



$f(t)$ → débito da torneira no instante t é contínua

$V(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

$V'(x)=f(t)$

o volume de água acumulada no instante $[a,x]$, $x\in]a,b]$

→ A taxa de variação instantânea do volume de água no tanque é igual ao débito da torneira $\boxed{V'(t)=f(t)}$

TVMI (Teorema do Valor Médio para integrais)

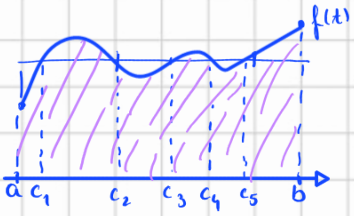
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, contínua

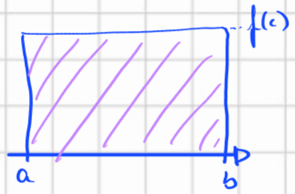
Então existe $c\in]a,b[$ tais que

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)\,(b-a)$$

velocidade instantânea

→ velocidade média





Fórmula de Barrow

- $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, contínua
- G é uma primitiva de f

Então: $$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Mais geral:

↳ Trata-se de um Corolário do TFC (que até é mais famoso que o TFC)

Demonstração:

- Seja F a função definida em $[a,b]$ por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

- Pelo T.P.C, F é uma primitiva de f
- Mas G também é uma primitiva de f

Então:

$$F(x) = G(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

- Se $x = a$, temos

$$\boxed{F(a) = G(a) + c}$$

- E como: $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

- Obtemos: $\boxed{G(a) = c}$ 1

- Se $x = b$, temos:

$$\boxed{F(b) = G(b) + c}$$ 2

- E como: $\boxed{F(b) = \int_a^b f(t)\,dt}$ 3

$$\boxed{1, 2, 3 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)}$$

c.q.d.

Notação:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Eg.:

$$\int_1^2 x^2 - 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x + c\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2 + \cancel{c}\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1 + \cancel{c}\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$