Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $\sqrt{x^3}\ln\sqrt[3]{x}$

A expressão pode ser simplificada, sem alterar o domínio, pois $\ln\sqrt[3]{x} = \frac{1}{3}\ln x$. Assim, por partes, temos

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^3}\ln\sqrt[3]{x}\,dx &= \frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right)'\ln x\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}x^{5/2}\ln x - \frac{1}{3}\int\frac{2}{5}x^{5/2}(\ln x)'\,dx\\ &= \frac{2}{15}x^{5/2}\ln x - \frac{2}{15}\int x^{5/2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{2}{15}x^{5/2}\ln x - \frac{2}{15}\int x^{3/2}\,dx\\ &= \frac{2}{15}x^{5/2}\ln x - \frac{2}{15}\cdot\frac{2}{5}x^{5/2} + C = \frac{2}{15}\sqrt{x^5}\ln x - \frac{4}{75}\sqrt{x^5} + C,\ C\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

em qualquer intervalo de $\mathbb{R}^+$.

(b) $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}$, $x\in\,]0,3[$

- A substituição $x = \phi(t) = 3\sin t \in\,]0,3[$, invertível e diferenciável em $t\in\,]0,\frac{\pi}{2}[$, com $t = \arcsin\frac{x}{3}$ e $dx = \phi'(t)\,dt = 3\cos t\,dt$, simplifica a expressão $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t$ (no domínio de ϕ). É assim possível transformar o integral da expressão dada e obter as suas primitivas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx &= \int\frac{3\cos t}{9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt = \int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int\frac{1}{\sin^2 t} - 1\,dt\\ &= \int\csc^2 t - 1\,dt = -\int -\csc^2 t + 1\,dt = -(\operatorname{cotan} t + t) + C\\ &= -\operatorname{cotan}(\arcsin\tfrac{x}{3}) - \arcsin\tfrac{x}{3} + C,\ C\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

  em qualquer intervalo contido em $]0,3[$.

  Nota: não foi exigido pelo enunciado, mas a expressão encontrada pode ser simplificada:

$$\operatorname{cotan}(\arcsin\tfrac{x}{3}) = \frac{\cos(\arcsin\frac{x}{3})}{\sin(\arcsin\frac{x}{3})} = \frac{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}{\frac{x}{3}} = \frac{3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}{x} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}.$$

  Então, $\displaystyle\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C,\ C\in\mathbb{R}.$

- Em alternativa, as primitivas podem ser calculadas por partes:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx &= \int\left(-\frac{1}{x}\right)'\sqrt{9-x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\sqrt{9-x^2} - \int -\frac{1}{x}\left(\sqrt{9-x^2}\right)'\,dx\\ &= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + \int\frac{1}{x}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \int\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}\,dx\\ \left[\begin{smallmatrix} u=\frac{x}{3},\, u'=\frac{1}{3}\\ \text{no integral}\end{smallmatrix}\right]\quad &= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \int\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin(u) + C\\ &= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$