Aula 18

$y = zx$
- EDO's de var. separáveis ✓
- EDO's Homogénios ✓

$z = \frac{1}{y^{m-1}}$
- EDO's Lineares ✓
- EDO's de Bernoulli

EDO's de Bernoulli

Pode ser: $\frac{1}{2}, \dots, 2, 3, 4, \dots$

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^m} \quad (B)$$

Se $y=0$ temos uma solução

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções contínuas de x e $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ designa-se por EDO de Bernoulli

Notas:
- Se $m=0$ ou $m=1$ a EDO é Linear
- Se $m=1$ a EDO é de var. sep.

O processo de resolução baseia-se na mudança de variável $z = \frac{1}{y^{m-1}}$ (passamos a ter uma EDO Linear nas variáveis x e z)

1 Divide-se (B) por $y^m \neq 0$

$$\boxed{\frac{y'}{y^m} + \frac{P(x)}{y^{m-1}} = Q(x)} \quad (B1)$$

2 Mudança de variável $\boxed{z = \frac{1}{y^{m-1}}}$ leva a que:

$$z' = \frac{-(y^{m-1})'}{(y^{m-1})^2} = \frac{-(m-1)y^{m-2}y'}{y^{2m-2}} = \frac{(1-m)\cancel{y^{m-2}}y'}{\cancel{y^{m-2}}y^m} = (1-m)\frac{y'}{y^m}$$

$$z' = (1-m)\frac{y'}{y^m} \Leftrightarrow \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{(1-m)}$$

(B1)

$$\frac{z'}{(1-m)} + P(x)z = Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z' + P(x)z(1-m) = Q(x)(1-m)} \quad (B2)$$

- A EDO é Linear nas variáveis x e z. Pode resolver-se pela técnica do fator integrante ex:

(A) $y' + \underbrace{\left(-\frac{2}{x}\right)}_{P(x)} y = \underbrace{-x^2}_{Q(x)} y^{2}, \; x > 0$ ($n = 2$)

• A EDO é de Bernoulli

Mudança de variável $\longrightarrow z = \frac{1}{y^{n-1}}$

Divido por y^2: $\frac{y'}{y^2} - \frac{2}{x}\frac{1}{y} = -x^2$

$$z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$$

Logo:

$$-z' - \frac{2}{x} z = -x^2$$

$$\boxed{z' + \frac{2}{x} z = x^2} \quad A1$$

• EDO é linear

Fator integrante: $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln(x)} = \cancel{e}^{\cancel{\ln}(x^2)} = x^2$

Multiplico A1 por $\mu(x)$:

$$\underbrace{x^2\left[z' + \frac{2}{x} z\right]}_{[x^2 \cdot z]'} = x^2 [x^2]$$

$$[x^2 \cdot z]' = x^4$$

$$\Leftrightarrow x^2 z = \int x^4 dx$$

$$\Leftrightarrow x^2 z = \frac{x^5}{5} + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{x^3}{5} + \frac{c}{x^2} \, , \; c \in \mathbb{R}$$

Substituição inversa: $z = \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{y} = \frac{x^3}{5} + \frac{c}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{\frac{x^3}{5} + \frac{c}{x^2}}$$

"ex:

(B) $y' + \frac{1}{x} y = x y^2, \quad x > 0$

$P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = x$, $n = 2$

↪ EDO de Bernoulli

• Divido por y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = x$$

• $z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}$

• Substituindo:

$$-z' + \frac{1}{x} z = x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z' - \frac{1}{x} z = -x} \text{ — } C2$$

• Fator integrante

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} \overset{x>0}{=} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}$$

Multiplico $\frac{1}{x}$ por C2

$$\underbrace{\frac{1}{x}\left[z' - \frac{1}{x} z\right]}_{\frac{z' - z}{x} = \left[\frac{z}{x}\right]'} = \frac{1}{\cancel{x}}(-\cancel{x})$$

$$\left[\frac{z}{x}\right]' = -1$$

$$\frac{1}{x} z = -\int 1 \, dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} z = -x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow z = -x^2 + cx$$

$$z = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y} = cx - x^2$$

Logo: $y = \frac{1}{cx - x^2} = \frac{1}{x(c - x)} = -\frac{1}{x(x - c)}$

$-c = K \in \mathbb{R}$

$$y = -\frac{1}{Kx + x^2}$$

"ex EXTRA: Considere o Problema de valor Inicial: (PVI)

$$\begin{cases} y' + \frac{1}{x} y = x y^2, & x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}, \quad \text{Tem solução? Qual?}$$

$$y = \frac{1}{cx - x^2} \implies y(1) = \frac{1}{c(1) - 1^2} = 1$$

$$\implies \frac{1}{c-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow c - 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow c = 2$$

A solução do PVI é: $\boxed{y = -\frac{1}{2x - x^2}}$

"ex:

Ⓒ

Resolva o PVI: $\begin{cases} x^2 y' - 2xy = 3y^4 \\ y(1) = 1/2 \end{cases}$, $x > 0$ $\quad n = 4$

• Divido por $y^4 \neq 0$: $\frac{x^2 y'}{y^4} - \frac{2x}{y^3} = 3 \Leftrightarrow \boxed{\frac{y'}{y^4} - \frac{2}{x}\frac{1}{y^3} = \frac{3}{x^2}}$

$$z = \frac{1}{y^3} \implies z' = \frac{-(y^3)'}{y^6} = \frac{-3y^2 y'}{y^6} = \frac{-3y'}{y^4}$$

• Substituindo:

$$-\frac{z'}{3} - \frac{2}{x} z = \frac{3}{x^2} \Leftrightarrow \boxed{z' + \frac{6}{x} z = -\frac{9}{x^2}} \quad D1$$

• Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{6}{x} dx} = e^{6 \ln|x|} \overset{x>0}{=} \cancel{e}^{\cancel{\ln}(x^6)} = x^6$$

Multiplicar x^6 por D1

$$\underbrace{x^6 \cdot \left[z' + \frac{6}{x} z\right]}_{} = x^6 \cdot \left[-\frac{9}{x^2}\right]$$

$$\left[x^6 z\right]' = -9x^4$$

$$\Leftrightarrow x^6 z = -9 \int x^4 dx$$
$$\Leftrightarrow x^6 z = -9 \frac{x^5}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow x z = -\frac{9}{5} + \frac{c}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{9}{5}\frac{1}{x} + \frac{c}{x^6}$$

$z = \frac{1}{y^3}$, Logo: $\frac{1}{y^3} = -\frac{9}{5}\frac{1}{x} + \frac{c}{x^6}$, $C \in \mathbb{R}$

Como $y(1) = \frac{1}{2} \underset{\substack{x=1 \\ y=\frac{1}{2}}}{\Rightarrow} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = -\frac{9}{5} \times \frac{1}{1} + \frac{c}{1}$

$\Leftrightarrow 8 + \frac{9}{5} = c$

$\Leftrightarrow c = \frac{49}{5}$

A solução é:

$$\frac{1}{y^3} = -\frac{9}{5}\frac{1}{x} + \frac{\frac{49}{5}}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{9}{5x} + \frac{49/5}{x^6}}}$$

"ex:

D

$$y' - \frac{y}{2x} = 5x^3 y^5 \quad , \quad x > 0$$

• Divide-se por y^5: $\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{2xy^4} = 5x^3$

$z = \frac{1}{y^4} \Rightarrow z' = -\frac{4y'}{y^5} \Leftrightarrow \frac{z'}{4} = -\frac{y'}{y^5}$

• Substituir: $-\frac{z'}{4} - \frac{1}{2x} z = 5x^3$

$\Leftrightarrow -z' - \frac{2}{x} z = 20x^3$

$\Leftrightarrow z' + \frac{2}{x} z = -20x^3$

• Fator integrante:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln|x|} = x^2$$

Multiplicando: $x^2 \cdot \left(z' + \frac{2}{x} z\right) = -20x^5$

$\Leftrightarrow (x^2 z)' = -20x^5$

$\Leftrightarrow x^2 z = -20 \int x^5 \, dx$

$\Leftrightarrow x^2 z = -20 \frac{x^6}{6} - c$, $C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{10}{3} x^4 - \frac{c}{x^2}$

$$z = \frac{1}{y^4} \implies \frac{1}{y^4} = -\frac{10}{3}x^4 - \frac{c}{x^2} \quad , \; c \in \mathbb{R}$$

$$\iff y = \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{c}{x^2} - \frac{10x^4}{3}}}$$