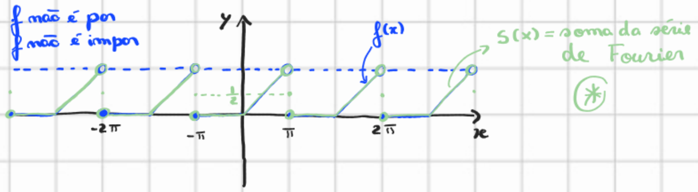
Aula 09

Exercício (A)

Considere a função 2π - periódica definida em $[-\pi,\pi]$ por

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\in[0,\pi] \\ 0 & \text{se } x\in[-\pi,0[\end{cases}$$

Obtenha a série de Fourier associada a f.



(...)

$a_0=\frac{\pi}{2}$ $\qquad a_n=\begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ for par} \\ \frac{-2}{n^2\pi} & \text{se } n \text{ é impar} \end{cases}$

$b_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

Logo, a série de Fourier é:

$$f(x)\sim \frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{2}{\pi}\frac{\cos((2n-1)x)}{2n-1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(nx)\right]$$

Podemos substituir por "=" em $x\in[-\pi,\pi]$?

Sim, se $x\neq-\pi \wedge x\neq\pi$

Descontínua em $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\lim_{x\to\pi^+} f(x)=0\in\mathbb{R} \wedge \lim_{x\to\pi^-} f(x)=\pi\in\mathbb{R}$

Logo f é seccionalmente contínua em $[-\pi,\pi]$

Será também seccionalmente contínua em qualquer $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $b>a$, Logo a função é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$

Além disso:

$$f'(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x\in]0,\pi[\\ 0 & \text{se } x\in]-\pi,0[\end{cases}$$

- $f'(x)$ é seccionalmente contínua em $[-\pi,\pi]$ pois tem um número finito de descontinuidade
  f' não tem assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to\pi^+} f'(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = 0$$

Como
- f é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$
- f' é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$

Diz-se que f é seccionalmente diferenciável

Teorema de Dirichlet

• Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e seccionalmente diferenciável. Então a sua Série de Fourier converge no ponto $x = c$ para

$$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

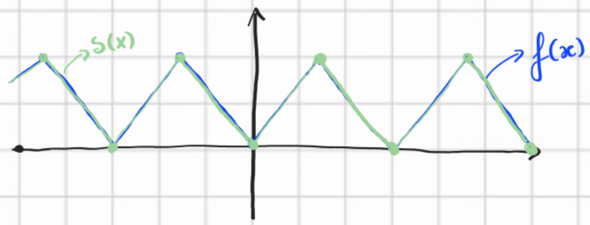
onde $f(c^+) = \lim_{x\to c^+} f(x)$

$f(c^-) = \lim_{x\to c^-} f(x)$

$\boxed{\text{Slide \# 133}}$

Faça um esboço da SF das funções seguintes:

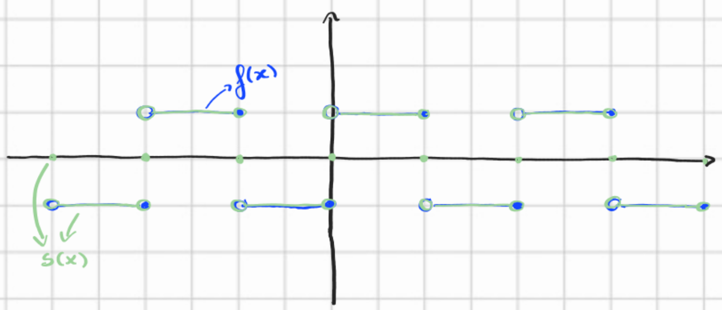
a) $f(x)$ periódica de período 2π definida em $[-\pi, \pi[$ por $f(x) = |x|$



• Neste caso, f é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, é seccionalmente diferenciável.
O Teorema de Dirichlet garante que $S(x) = f(x)$

b) $f(x)$ é 2π-periódica e definida em $[-\pi, \pi[$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]0, \pi] \\ -1 & \text{se } x \in]-\pi, 0] \end{cases}$$



f é seccionalmente diferenciável

Aplica-se o Teorema de Dirichlet.

- Se x é um ponto de continuidade $S(x) = f(x)$
- Se x é um ponto de descontinui (ou seja se $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$)

então: $S(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \dfrac{1 + (-1)}{2} = 0$

Como já vimos:

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[-\frac{4}{\pi} \frac{\cos((2m-1)x)}{(2m-1)^2} \right], \forall x \in [-\pi, \pi]$$

↳ Pode substituir x por qualquer valor de que se obtém uma igualdade

Em particular, se $x \in \pi$ teremos de obter uma identidade.
Ou seja,

$$|\pi| = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[-\frac{4}{\pi} \frac{\overbrace{\cos((2m-1)\pi)}^{-1}}{(2m-1)^2} \right]$$

Como $\cos((2m-1)\pi) = -1, \forall m \in \mathbb{N}$, obtemos:

$$\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{-1}{(2m-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \pi = \sqrt{8\left(1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots\right)}$$

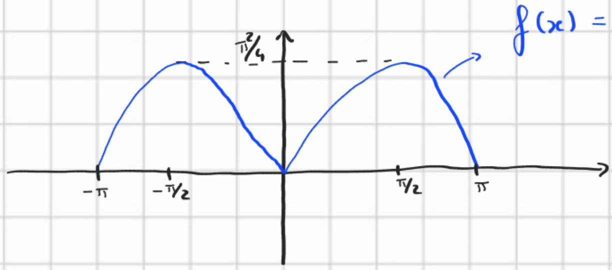
$\boxed{\text{Exercício de Exame}}$

Considere a função f definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|(\pi - |x|)$

a) Esboce o gráfico de f para $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \begin{cases} x\pi - x^2 & \text{se } x \in [0, \pi[\\ -x\pi - x^2 & \text{se } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

Função par
$f(-x) = f(x)$
$x \in [-\pi, \pi]$



b) Mostre que a série de Fourier associada a f é uma série de Cosenos, ou seja é de forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$ e calcule o valor do coeficiente a_0 que figura nesta série.

f é uma função par em $[-\pi, \pi]$

$$f(-x) = |-x|(\pi - |-x|) = |x|(\pi - |x|) = f(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Logo, a SF é uma Série de Cosenos (funções pares)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overset{(\dots)}{=} \frac{\pi^2}{3}$$

c) Sabendo que a SF associada a f é $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}$ mostre que esta converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$ e defina a função soma.

Vou usar o Critério de Weirstrass:

$$\left| \frac{\cos(2nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\pi, \pi]$$

e como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (Dirichlet $\alpha = 2 > 1$) então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}$ converge uniformemente em $[-\pi, \pi]$

Vamos ver agora que

$$\boxed{f(x) = |x|(\pi - |x|) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi]}$$

Na verdade, f é contínua logo seccionalmente diferenciável.
Aplica-se Teorema de Dirichlet para garantir que a série converge no ponto $x \in [-\pi, \pi]$ para:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$$

d) Use a série da alínea anterior para provar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

Por tentativas ...

$\boxed{x = 0}$ $\quad f(0) = 0(\pi - 0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(0)}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$f(\pi/2) = \pi/2\left(\pi - \pi/2\right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[-(-1)^n\right]}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Falta passar outro exemplo de exame 21/03 !