Aula 14

<u>Exercícios:</u>

$\boxed{1}$ $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$

$D_f = \mathbb{R}^2$
$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} -3x^2 + 4y \\ 4x - 4y \end{bmatrix}$$

<u>Sistema de estacionariedade:</u> $\begin{cases} -3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-3x+4) = 0 \\ x = y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \ \vee \ -3x+4 = 0 \\ x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \ \vee \ x = \frac{4}{3} \\ y = x \end{cases}$$

Logo os pontos de estacionariedade são $P_0 = (0,0)$ e $P_1 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad Hf(P_0) = Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$H_1 = 0$
$H_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -16 < 0$

Logo, P_0 é ponto de sela

$$Hf(P_1) = Hf\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$H_1 = -8$
$H_2 = 16 > 0$, logo $P_1 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ é um maximizante local

<u>Máximo local</u> correspondente: $f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{59}{27}$

<u>É máximo global?</u>

Vamos ver que não pois fixando $y=0$ obtendo $f(x,0) = -x^3 + 1$

e $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 1) = +\infty$, então f não é limitada superiormente
$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 1) = -\infty$ (nem inferiormente)

Logo, não atinge máximo nem mínimo global

$\boxed{2}$

$$f(x,y) = x^4 + x^2 + y^3$$

$D_f = \mathbb{R}^2$ (aberto), $f \in C^2(D_f)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 4x^3 + 2x \\ 3y^2 \end{bmatrix}$$

Sistema de estacionariedade:

$$\begin{cases} 4x^3 + 2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x^2+1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Impossível !

O único ponto crítico é: $P_0 = (0,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} (4x^3+2x)'_x & (4x^3+2x)'_y \\ (3y^2)'_x & (3y^2)'_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12x^2+2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$$

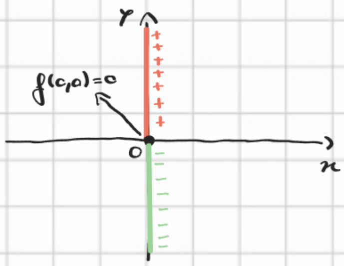
$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_1 = 2 > 0$

$H_2 = 0$ ⟵ Nada se pode concluir pelo teste na 2.ª derivada

Faremos um estudo local em torno do ponto $P_0 = (0,0)$

Note: $f(0,0) = 0$



Para simplificar tento ver o que se passa se $x = 0$:

$$g(y) = f(0,y) = y^3 > 0, \text{ se } y > 0$$
$$f(0,y) = y^3 < 0, \text{ se } y < 0$$

Posso fazer um quadro de variação da função $g(y)$

	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(y)$	↗	0	↗
$g'(y) = 3y^2$	+	0	+

⟹ Então, existe uma Bola $B_r(0,0)$, $r > 0$

- há pontos onde a função é positiva e há pontos onde a função é negativa

Logo $f(0,0) = 0$ não é extremo. Concluo que $(0,0)$ é ponto de sela

$\boxed{3}$

$$f(x,y) = 3x^2y^2 + y^2 - 3x^2 - 6y + 7$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 6xy^2 - 6x \\ 6x^2y + 2y - 6 \end{bmatrix}$$

Sistema de estacionariedade:

$$\begin{cases} xy^2 - x = 0 \\ x^2y + \frac{1}{3}y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{x(y^2-1) = 0} \\ \end{cases}$$

$\rightarrow$ Da primeira equação temos $x=0 \vee y = \pm 1$

- Com $x=0$ a função leva a que $y=3$:

$$P_1 = (0,3)$$

- Caso $y=1$, a 2.ª eq. leva a $x^2 + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2/3}$

$$P_2 = \left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 1\right); \; P_3 = \left(+\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 1\right)$$

- Caso $y=-1$, a 2.ª eq. leva a $-x^2 - \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow x^2 = -\frac{2}{3}$ Impossível !

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6y^2-6 & 12xy \\ 12xy & 6x^2+2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(P_1) = \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} H_1 = 48 > 0 \\ H_2 = 96 > 0 \end{matrix} \Big\} \text{ Logo, } P_1 = (0,3) \text{ é um minimizante local}$$

$$Hf(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & -12\sqrt{\tfrac{2}{3}} \\ -12\sqrt{\tfrac{2}{3}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} H_1 = 0 \\ H_2 = -12^2 \times \frac{2}{3} < 0 \end{matrix} \Big\} \; P_2 = \left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 1\right) \text{ é ponto sela}$$

$$Hf(P_3) = \begin{bmatrix} 0 & 12\sqrt{\tfrac{2}{3}} \\ 12\sqrt{\tfrac{2}{3}} & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} H_1 = 0 \\ H_2 = -12^2 \times \frac{2}{3} < 0 \end{matrix} \Big\} \; P_3 = \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 1\right) \text{ é ponto sela}$$