Aula 04

Exercício (A)

$f:]-100, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \sqrt{100+x}$ → raiz certa mais próxima !

"Ex:. para calcular $\sqrt{73}$ usamos $f(x) = \sqrt{64+x}$, $x=9$

a) Escreva o polinómio de MacLaurin, $T_0^2(f(x))$

$$T_0^2(f(x)) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

$$f(x) = (100+x)^{1/2} \longrightarrow f(0) = (100)^{1/2} = 10$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(100+x)^{-1/2} \longrightarrow f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(100+x)^{-3/2} \longrightarrow f''(0) = \frac{-1}{4((10)^2)^{3/2}} = \frac{-1}{4000}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(100+x)^{-5/2}$$

precisa para alínea b)

$$T_0^2(f(x)) = 10 + \frac{x}{20} - \frac{(1/4000)}{2}x^2$$

$$= 10 + \frac{x}{20} - \frac{1}{8000}x^2$$

b)

$$z = \sqrt{104} = \sqrt{100+4} = f(4) \simeq T_0^2(f(4)) = 10 + \frac{4}{20} - \frac{16}{8000}$$

$$\frac{16}{8000} = \frac{1}{500} = \frac{1}{5} \times 10^{-2}$$

$$\sqrt{104} \simeq 10 + 0{,}2 - 0{,}002 = 10{,}198$$

c) Mostre que o erro da aproximação é inferior a $0{,}4 \times 10^{-4}$ ✓ $\theta \in]0,4[$

$$\left|R_0^2(f(4))\right| = \left|\frac{f^{(2+1)}(\theta)}{(2+1)!} \times 4^{2+1}\right| = \left|\frac{f'''(\theta) \times 4^3}{6}\right| = \frac{3 \times 4^3}{8 \times 6} \times (100+\theta)^{-5/2}$$

$$= 4(100+\theta)^{-5/2} \leq \frac{4}{(100)^{5/2}} = \frac{4}{10^5} = 4 \times 10^{-5} = 0{,}4 \times 10^{-4}$$

c.q.m.

Conclusão: Como o erro absoluto $\leq 0{,}4 \times 10^{-4} \leq 0{,}5 \times 10^{-4}$ garantem-se 4 casas decimais corretas

$$\sqrt{104} \simeq 10{,}1980|00000$$

$$\sqrt{104} = 10{,}1980|39027\ldots$$

Ⓑ Determine o menor valor de n tal que o polinómio de Maclaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$ aproxime $z = f(1) = e$ com erro absoluto inferior a 10^{-3}

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{T_0^n(e^x)} + \underbrace{\frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_0^n(e^x)}, \quad \theta \in \,]0, x[$$

$$\left|R_0^n(e^x)\right| = \left|\frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}\right| = \frac{e^\theta}{(n+1)!} |x|^{n+1}, \quad \theta \in \,]0, x[$$

Para $x = 1$:

$$\left|R_0^n(e^1)\right| = \frac{e^\theta}{(n+1)!} 1^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!} = M_n$$ (Majorante do erro abs. de ordem n)

⚠ Quero calcular o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que o Erro abs. $\leq \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$:

Resolve-se por tabela:

n	$M_n = \frac{3}{(n+1)!}$
1	$\frac{3}{2} = 1.5$
2	$\frac{3}{6} = 0,5$
3	$\frac{3}{24}$
4	$2.5 \times 10^{-2} > 10^{-3}$
5	$4.166\ldots \times 10^{-3} > 10^{-3}$
6	$5.95\ldots \times 10^{-4} = 0,595\ldots \times 10^{-5} < 10^{-3}$ $\boxed{\text{STOP}}$

$n = 6$ basta

$$e \simeq \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{n!}$$

$$e \simeq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}, \quad \text{com erro absoluto} < 10^{-3}$$

//

Curiosidade:

(T. de valor médio
T. de acréscimos finitos)

Se $n = 0$, o Teorema de Taylor estabelece o mesmo que o T. de Lagrange

$$f(x) = \underbrace{f(c)}_{T_c^0(f(x))} + \underbrace{f'(\theta)(x-c)}_{R_c^0(f(x))}, \quad \text{para } \theta \in \text{inter}(c, x)$$

$$f(x) - f(c) = f'(\theta)(x - c)$$

→ E se $x \neq c$:

$$f'(\theta) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \quad \theta \in \text{inter}(x, c)$$

T. Lagrange

$f(x) = \sin x \quad , \quad c = 0$

$f(x)$ tem derivada finita de qualquer ordem $n \in \mathbb{N}$

$$\left| f^{(n)}(0) \right| \leq 1 = M \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

basta esta condição para garantir

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Para $x \in \,]c-R ; c+R[$ com R a calcular
(Neste caso $R = +\infty$)

Sucessões e séries de funções

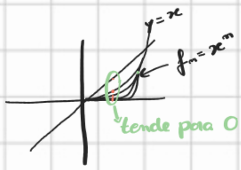
Seja $D \in \mathbb{R}$ um conjunto não vazio uma sucessão de funções (f_n) definidas em D é uma aplicação

$$\begin{aligned} (f_n) : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathcal{F}(D) \\ n &\longmapsto f_n \end{aligned}$$

Família de todas as funções definidas em D

onde,

$$\begin{aligned} f_n : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) \end{aligned}$$



Exemplo (A)

$D = [0,1]$

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_n(x) = x^n \end{aligned} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

limite pontual

$$\begin{array}{ccccccc} f_1(x), & f_2(x), & f_3(x), & \ldots, & f_n(x) \\ \| & \| & \| & & \| \\ x^1, & x^2, \ldots, & x^3, & \ldots, & x^n \end{array}$$

Exemplo (B)

$$\begin{aligned} g_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_n(x) = \frac{x}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc} g_1(x), & g_2(x), & g_3(x), & \ldots \\ \| & \| & \| & \\ \frac{x}{1}, & \frac{x}{2}, & \frac{x}{3}, & \ldots \end{array}$$

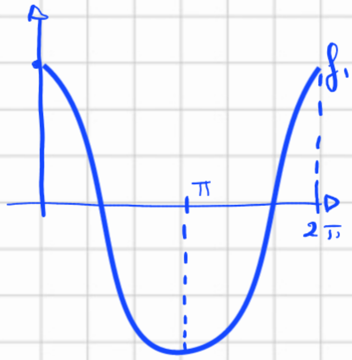
Exemplo ©

$h_n : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow h_n(x) = \cos(nx)$

$h_1(x)\ ,\ h_2(x)\ ,\ h_3(x), \dots, h_n(x)$

$\cos(x)\ ,\ \cos(2x)\ ,\ \cos(3x) \dots \cos(nx)$



$\boxed{\text{Se } x = 0}$

$\lim_{n \to +\infty} \cos(nx) = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1$

$\boxed{\text{Se } x = 2\pi}$

$\lim_{n \to +\infty} \cos(nx) = \lim_{n \to +\infty} 1$

$\boxed{\text{Se } x = \pi}$?

$\lim_{n \to +\infty} \cos(n\pi) = \lim_{n \to +\infty} (-1)^n$ / Não existe !