Aula 19

EDO's Exatas

Recordemos o conceito de diferencial de uma função $g \in \mathcal{C}^1(I)$, $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$
$b > a$

$$\boxed{dy = g'(x)\,dx}$$

Para funções a duas variáveis $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sendo $f \in \mathcal{C}^1(D)$ e D aberto, então $z = f(x,y)$

Definimos agora o diferencial total de f: $\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy}$

$(x,y) \longrightarrow (x+\Delta x, y+\Delta z)$

z $\qquad$ $z + \Delta z \simeq \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

Definição:

Se uma EDO de 1ª ordem puder ser escrita na forma

$$\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0}$$

funções de classe $\mathcal{C}^1$

então designa-se por EDO EXATA se e só se existir uma função $F \in \mathcal{C}^2(D)$ cujo diferencial total é:

$$dF = \underbrace{M(x,y)}_{f'_x}\,dx + \underbrace{N(x,y)}_{f'_y}\,dy$$

Nota: Pode provar-se que o integral geral da EDO é $\boxed{F(x,y) = C}$, $C \in \mathbb{R}$

Resta encontrar a tal função F tal que
$$\boxed{\begin{cases} \frac{dF}{\partial x} = M(x,y) \\ \frac{dF}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}} \text{ — I}$$

Ora, as derivadas parciais de 2ª ordem:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 M}{\partial y\,\partial x}(x,y)$$

$\boxed{\text{Iguais se } F(x,y) \in \mathcal{C}^2 \text{ Teorema de Schwarz}}$

Pode provar-se que a EDO $\boxed{M(x,y)\,dx + N(x,y) = 0}$ é exata se e só se:

$$\boxed{\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 N}{\partial y\,\partial x}(x,y)} \text{ — II}$$

• É o teste para verificar que a EDO é exata.

• As relações I e II vão permitir calcular $F(x, y)$

— // —

ex:

Ⓐ $\underbrace{(x^3 + 3xy^2)}_{M}\, dx + \underbrace{(3x^2y + y^3)}_{N}\, dy = 0$

a) Verifique que é EXATA

$$M(x,y) = x^3 + 3xy^2 = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$N(x,y) = 3x^2y + y^3 = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Como:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 6xy = \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 6xy = \frac{\partial^2 N}{\partial y \partial x}$$

É uma EDO EXATA.

b) Obtenha o integral geral

Vou considerar uma função $F(x,y)$ que se obtém integrando M relativamente a x

$$F(x,y) = \int M(x,y)\, dx, \quad \text{pois} \quad \frac{\partial M}{\partial x}(x,y) = F'_x(x,y)$$

$$F(x,y) = \int x^3 + 3xy^2\, dx$$

$$F(x,y) = \int x^3\, dx + 3y^2 \int x\, dx$$

"constante" em x mas pode variar em y

$$\boxed{F(x,y) = \frac{x^4}{4} + 3y^2\frac{x^2}{2} + K(y)} \quad \text{A1}$$

Resta calcular $K(y)$...

Para determinar $K(y)$ vamos usar a função N atendendo a que, para ser uma EDO exata, a função N deve representar $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$:

A partir de A1:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3x^2y + \frac{dK}{dy}$$

e integrando relativamente a y tem-se:

$$K(y) = \int y^3\, dy = \frac{y^4}{4} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

A EDO tem integral geral: $F(x,y) = c$

$$\boxed{\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c, \; c \in \mathbb{R}} \longrightarrow \text{Solução na forma implícita}$$

"ex:

Ⓑ $\underbrace{(2x + \sin y)}_{M}\,dx + \underbrace{(x\cos y)}_{N}\,dy = 0$

$$F(x,y) = \int 2x + \sin y \, dx = x^2 + \sin y\, x + c(y)$$

Logo:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \cancel{x\cos y} + c'(y) = \cancel{x\cos y}$$

$$c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = \int 0\,dy = K, \; K \in \mathbb{R}$$

Sol. geral de B1:

$$\boxed{x^2 + x\sin y = c, \; c \in \mathbb{R}}$$

"ex:

Ⓒ $\underbrace{(2xy - x - e^y)}_{M = \frac{\partial F}{\partial x}}\,dx + \underbrace{(-xe^y - y + x^2)}_{N = \frac{\partial F}{\partial y}}\,dy = 0$

Pretende-se determinar F tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2xy - x - e^y \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -xe^y - y + x^2 \end{cases}$$

$$F(x,y) = \int 2xy - x - e^y\,dx = 2y\int x\,dx - \int x\,dx - e^y\int 0\,dx$$

$$= \boxed{\cancel{2}y\,\frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{x^2}{2} - e^y x + c(y)} \longrightarrow \text{Uma primeira expressão para F [falta esclarecer o } c(y)]$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \left[y x^2 - \frac{x^2}{2} - xe^y + c(y)\right]'_y = N(x,y)$$

$$= x^2 - 0 - xe^y + c'(y) = \boxed{x^2 - xe^y + c'(y)}$$

e, portanto:

$$\cancel{x^2} - \cancel{xe^y} + c'(y) = -\cancel{xe^y} - y + \cancel{x^2}$$

$$\Leftrightarrow c'(y) = -y \Rightarrow c(y) = -\int y\,dy = -\frac{y^2}{2} + K_1, \; K_1 \in \mathbb{R}$$

↳ Função $c(y)$ descoberta ✓

Assim, a solução geral é: $F(x,y)=K$

$$\boxed{y x^2 - \frac{x^2}{2} - x e^y - \frac{y^2}{2} = K}$$

— // —

Equações Redutíveis e Homogénios (breve referência usando um exemplo)

Considere: $\boxed{y' = \dfrac{x+y-1}{x-2y+1}}$ — C

- Não é de var. separáveis ✓
- Não é homogénia pois: $\dfrac{\lambda x + \lambda y - 1}{\lambda x - 2\lambda y + 1} \neq \dfrac{x+y-1}{x-2y+1}$ ✓
- Não é linear porque não se pode escrever na forma: $y' + \underbrace{p(x) y = q(x)}_{\text{funções só de } x}$
- Não é EXATA

Consideremos a mudança de variável definida por:

$$\begin{cases} x = z + h \\ y = w + K \end{cases} \quad \Big| \quad \begin{matrix} x \curvearrowright z \\ y \curvearrowright w \end{matrix}$$

, onde h e K se determinam por forma que se verifica o sistema

$$\begin{cases} h + K - 1 = 0 \\ h - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h = 1/3 \\ K = 2/3 \end{cases}$$

Temos as substituições por forma que se verifique o sistema:

$$\begin{cases} x = z + 1/3 \\ y = w + 2/3 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{y' = w'}$$

Substituindo em C:

$$w' = \frac{(z+1/3) + (w+2/3) - 1}{(z+1/3) - 2(w+2/3) + 1} = \underbrace{\frac{z+w}{z-2w}}_{f(z,w)}$$

?→ $f(z,w)$ é homogénea pois:

$$f(\lambda z, \lambda w) = \frac{\lambda z + \lambda w}{\lambda z - 2\lambda w} = \frac{\cancel{\lambda}(z+w)}{\cancel{\lambda}(z-2w)} = \frac{z+w}{z-2w} = f(z,w)$$

Portanto resolve-se usando uma mudança de variável: $\boxed{w \curvearrowright \mu}$

$$\boxed{\mu = \frac{w}{z}}$$

Resolvia-se

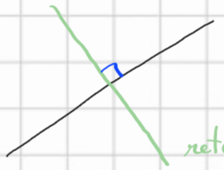
- tornava a EDO de var. sep. e por fim faziam-se as substituições
- inversas: $\mu = \frac{w}{z}$

e dava:

$$\begin{cases} x = z + 1/3 \\ y = w + 2/3 \end{cases} \quad \begin{cases} z = -x + 1/3 \\ w = -y + 2/3 \end{cases}$$

— // —

Trajetórias Ortogonais



ex: (D) Vamos determinar as trajetórias ortogonais da família de curvas: $\boxed{y = Kx}$, $K \in \mathbb{R}$

(retas não verticais que passam pela origem)

1 Determina-se a EDO associada à família de curvas dada

$$\begin{cases} y' = K \\ \frac{y}{x} = K, \ x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{y' = \frac{y}{x}}$$

EDO associada à família de retas

2 Escreve-se a EDO das trajetórias ortogonais

$$y \rightsquigarrow -\frac{1}{y'} \quad \left(\text{condição de ortogonalidade}\right)$$

$$y' = \frac{y}{x} \Longrightarrow -\frac{1}{y'} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\overset{P(x)}{-x}}{\underset{Q(y)}{y}}$$

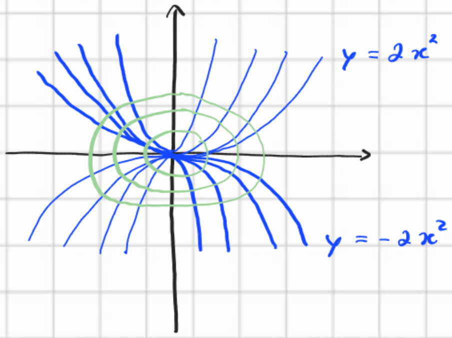
EDO de var. separáveis $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

$$\int y \, dy = -\int x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c, \ c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = K, \ K \in \mathbb{R}$$

Esta é a EDO que descreve as trajetórias ortogonais (circunferências centradas na origem) ex: E $\boxed{y = kx^2,\ k \in \mathbb{R}}$



Família de parábolas com vértice (0,0)

1

$$\begin{cases} y' = 2kx \\ k = \frac{y}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} k = \frac{y'}{2x} \\ k = \frac{y}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{y'}{2x} = \frac{y}{x^2} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{2y}{x}}$$ → EDO associada

2 Escreve-se a EDO das trajetórias ortogonais

$$y' \rightsquigarrow -\frac{1}{y'}$$

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}, \text{ var. sep.}$$

Solução: $\boxed{2y^2 + x^2 = k}$ Família de Elipses

Exercício da Folha: ← Não costuma sair no teste !

Considere a família de curvas sinusoidais definidas por $\boxed{y = \underset{\uparrow \text{amplitude}}{A} \sin(x + \overset{\text{fase}}{B})}$

Indique a EDO de 3.ª ordem para a qual estas funções:

relacionamento com a frequência

$$y' = A\cos(x+B)$$
$$y'' = -A\sin(x+B)$$
$$y''' = -A\cos(x+B)$$

Igualando: $y''' = -y' \Rightarrow y''' - y' = 0$ → Família de soluções desta EDO é $y = A\sin(x+B)$