Aula 15

Slide #34

- Calcular o valor máximo e o valor mínimo atingido pela função

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1 \quad \text{no retângulo} \quad D = [-1,1] \times [-1,1]$$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$
$\quad = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}$

$f \in C^2(\text{int}(D))$

Primeiro vamos procurar extremantes no interior de D

$$\text{int}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \wedge |y| < 1\}$$

Temos um caso de cálculo de extremantes em pontos interiores.

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 8x & -4xy \\ -2y & -2x^2 \end{bmatrix}$$

Erro no SLIDE #39

Sistema de estacionariedade:

$$\begin{cases} 8x - 4xy = 0 \\ -2y - 2x^2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[/2]{/4} \begin{cases} x(2-y) = 0 \\ x^2 = -y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ \boxed{x^2 = -2} \end{cases}$$

Impossível

$P_0 = (0,0)$ é o único candidato a extremante.

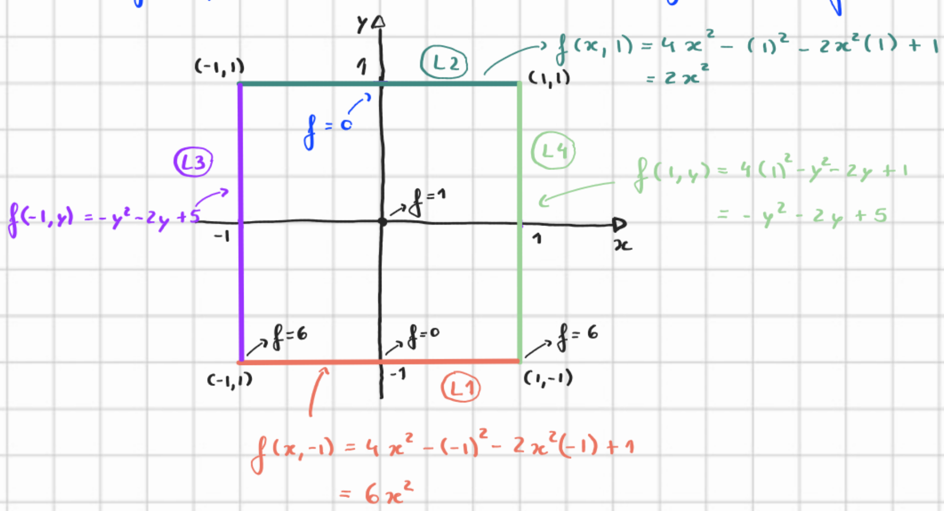
$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 8-4y & -4x \\ -4x & -2 \end{bmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$H_1 = 8$
$H_2 = -16 < 0 \longrightarrow$ Logo, P_0 é um ponto de Sela

Assim, $P_0 = (0,0)$ não pode ser extremante global

Vamos agora procurar candidatos a extremantes globais na fronteira:



Em L1

$$g(x) = f(x,-1) = 6x^2, \quad x \in [-1,1] = D_g$$

$g'(x) = 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g''(x) = 12 > 0$, logo $x = 0$ é minimizante local de g em D_g

$$\boxed{g(0) = 0} = f(0,-1)$$

<u>Nos pontos fronteiros:</u> $\boxed{g(-1) = 6} = f(-1,-1)$, $\boxed{g(1) = 6} = f(1,-1)$

Em L2

$g(x) = 2x^2, \quad x \in [-1,1]$

$g'(x) = 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g''(x) = 4$, logo $x = 0$ é minimizante local de g e o mínimo local é $\boxed{g(0) = 0} = f(0,1) = f(1,0)$

<u>Nos pontos fronteiros:</u> $\boxed{g(-1) = 2} = f(-1,1)$, $\boxed{g(1) = 2} = f(1,1)$

Em L3

$g(y) = 5 - 2y - y^2, \quad y \in [-1,1]$

$g'(y) = -2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -1$, pelo que g não tem pontos críticos no interior de $[-1,1]$

<u>Nos pontos fronteiros:</u> $g(-1) = 5 - 2(-1) - (-1)^2$, $\boxed{g(-1) = 6} = f(-1,-1)$; $g(1) = 5 - 2(1) - (1)^2$, $\boxed{g(1) = 2} = f(-1,1)$

Em (L4)

$g(y) = 5 - 2y - y^2$
$g'(y) = -2 - 2y \Leftrightarrow y = -1$

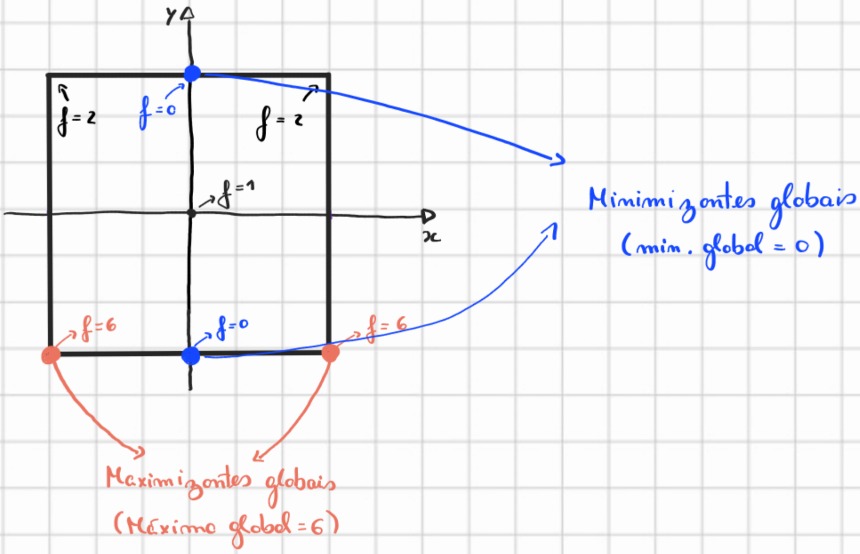
$g(-1) = 5 - 2(-1) - (-1)^2$ $\qquad$ $g(1) = 5 - 2(1) - (1)^2$

$\boxed{g(-1) = 6}$ $\qquad$ $\boxed{g(1) = 2}$

$\shortparallel$ $\qquad$ $\shortparallel$

$f(1,-1)$ $\qquad$ $f(1,1)$

Logo:



— // —

Extremos condicionados

Problemas de optimização com restrição de igualdade

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{min/max} & \underbrace{f(x,y) = x^2 + 2y^2}_{\text{função objetivo}} \\ \underbrace{\text{sujeito a}}_{\text{s.a.}} : & \underbrace{g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0}_{\text{Restrição de igualdade}} \end{array}}$$

Calcule os mínimos / máximos globais da restrição de $f(x,y)$ no conjunto

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

"ex:

Método dos Multiplicadores de Lagrange

Introduz-se uma função auxiliar construída da seguinte forma:

$$\boxed{\mathcal{L}(x,y,\underbrace{\lambda}_{\text{Nova variável (multiplicador de Lagrange)}}) = \underbrace{f(x,y)}_{\text{função objetivo}} - \lambda \underbrace{g(x,y)}_{\text{função que define a restrição}}}$$

Função Lagrangeana ou função de Lagrange

- Prova-se que os extremantes globais são pontos que cumprem:

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}'_x(x,y,\lambda) \\ \mathcal{L}'_y(x,y,\lambda) \\ \mathcal{L}'_\lambda(x,y,\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Resolve-se este sistema de estacionariedade para encontrar os candidatos a extremantes globais
- No fim, faz-se um balanço para encontrar o máximo global (ou o mínimo global)

Slide #51

Determinar os pontos extremantes da função $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, sendo $(x,y) \in G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$

<u>Função Lagrangeana:</u> $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 4y - 2\lambda y = 0 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda) = 0 & \boxed{1} \\ y(2-\lambda) = 0 & \boxed{2} \\ x^2 + y^2 = 1 & \boxed{3} \end{cases}$$

- Da $\boxed{1}$ resulta $x = 0 \vee \lambda = 1$
  - Se $x = 0$, vem $y = \pm 1$ $\boxed{3}$

    <u>Logo</u>,

    $P_1 = (0,-1)$ e $P_2 = (0,1)$ são candidatos a extremantes
  - Se $\lambda = 1$, resulta $y = 0$ $\boxed{2}$

    <u>Mas</u>,

    se $y = 0$, a $\boxed{3}$ garante que $x = \pm 1$

    $P_3 = (-1,0)$ e $P_4 = (1,0)$ são candidatos a extremantes
- Da $\boxed{2}$ resulta $y = 0 \vee \lambda = 2$

  <u>Mas</u>,

  se $y = 0$, já tínhamos visto que P_3 e P_4 são candidatos a extremantes

→ Valor de f nos pontos críticos:

$f(P_1) = 2$	$f(P_2) = 2$
$f(P_3) = 1$	$f(P_4) = 1$

→ P_1 e P_2 são maximizantes globais e o MAX = 2

→ P_3 e P_4 são minimizantes globais e o MIN = 1 ex: Determine o ponto do plano de equação $x + 2y - z = 4$ que se encontra mais próximo da origem

$$\boxed{\begin{array}{ll} \min & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \text{s.a.} & x + 2y - z - 4 = 0 \end{array}}$$

⟶ distância à origem

Função Lagrangeana:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + 2y - z - 4)$$

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = \begin{bmatrix} 2x - \lambda \\ 2y - 2\lambda \\ 2z + \lambda \\ x + 2y - z - 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda = 1/3 \\ y = 4/3 \\ z = -2/3 \\ x = 2/3 \end{cases} \Longrightarrow$$

Único ponto de estacionamento é $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

↓

Ponto mais prox. da origem

$\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

↳ distância à origem $= \frac{\sqrt{24}}{3}$