Sucessões e Séries de Funções

Sucessão de Funções - Definição

Definição 4.1

Uma sucessão $f_1(x), f_2(x) \ldots, f_n(x), \ldots$ em que cada termo é uma função real de variável real definida num domínio D, é designada por **sucessão de funções** e representa-se usualmente por $(f_n)_n$.

Exercício 4.1

Considere as sucessões de funções seguintes e represente graficamente os primeiros termos de cada uma delas:

(a) $(f_n)_n$ a sucessão onde para cada $n \in \mathbb{N}$ se tem $f_n(x) = x^n$ para $x \in [0, 1]$.

(b) $(g_n)_n$ a sucessão onde para cada $n \in \mathbb{N}$ se tem $g_n(x) = \dfrac{x}{n}$ para $x \in [0, 1]$.

Sucessão de Funções - Convergência

Definição 4.2

Sejam (f_n) uma sucessão de funções definidas em $D \subseteq \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Diz-se que

- (f_n) **converge pontualmente** para a função f em D se

$$\forall x \in D, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

  À função f chamamos limite pontual de (f_n) em D.

- (f_n) **converge uniformemente** para a função f em D se a sucessão numérica de termo geral

$$M_n = \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$$

  é um infinitésimo.

Sucessões de Funções - Convergência

Exercício 4.2

Determine os limites pontuais das sucessões definidas por $f_n(x) = x^n$ e $g_n(x) = \dfrac{x}{n}$, para $x \in [0, 1]$.

Teorema 4.1

Se (f_n) converge uniformemente para f num conjunto D então (f_n) converge pontualmente para f nesse conjunto.

Observação 4.1

A convergência uniforme é mais "forte" que a convergência pontual em dois sentidos: por um lado, é mais difícil uma sucessão de funções convergir uniformemente do que pontualmente; por outro lado, a convergência uniforme traz consigo propriedades que não são possíveis de obter com a convergência pontual. Essas propriedades são apresentadas no Teorema seguinte.

Teorema 4.2

Seja (f_n) uma sucessão de funções contínuas em $[a, b]$. Suponha-se que (f_n) converge uniformemente para f em $[a, b]$. Então:

1. f é contínua em $[a, b]$;
2. f é integrável em $[a, b]$ e tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

3. se as funções f_n têm derivadas contínuas em $[a, b]$ e a sucessão (f_n') converge uniformemente em $[a, b]$, então f é diferenciável neste intervalo e

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Sucessões de funções - Convergência uniforme

Observação 4.2

As propriedades anteriores podem ser utilizadas como critérios para mostrar que uma sucessão não é uniformemente convergente. Por exemplo, se f_n é contínua para todo o n mas f não é contínua, então (f_n) não pode ser uniformemente convergente para f.

Teorema 4.3

Sejam $D \subset \mathbb{R}$ um conjunto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções definida em D e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função. As condições seguintes são equivalentes:

$$\text{(a) } f_n \xrightarrow{u} f \quad \text{e} \quad \text{(b) } \lim_{n\to+\infty} \Big[\sup\{|f_n(x) - f(x)|, x \in D\}\Big] = 0$$

Exercício 4.3

Mostre que a sucessão $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde para cada $n \in \mathbb{N}$ se tem $g_n(x) = \dfrac{x}{n}$ para $x \in [0, 1]$ é uniformemente convergente.

Séries de Funções - Definição

Definição 4.3

Seja (f_n) uma sucessão de funções definida em $D \subseteq \mathbb{R}$ e

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \; n \in \mathbb{N}, x \in D.$$

Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **converge pontualmente** (resp. **uniformemente**) em D se a sucessão de somas parciais (S_n) convergir pontualmente (resp. uniformemente) em D.
Em caso de convergência, a função $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ designa-se por **soma** da série e escreve-se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = S$. Nesse caso, também se diz que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (pontualmente ou uniformemente) para S.

Séries de Funções - Observações

Observação 4.4

1. a convergência pontual de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ corresponde à convergência da série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para cada x
2. o **domínio de convergência** de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é o conjunto dos pontos x para os quais a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é convergente
3. também aqui a convergência uniforme é mais "forte" que a convergência pontual; em particular, a convergência uniforme traz consigo propriedades que não são possíveis de obter com a convergência pontual, enunciadas no Teorema seguinte.

Séries de Funções - Propriedades

Teorema 4.4

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ uma série de funções contínuas em $[a, b]$ e uniformemente convergente em $[a, b]$ para uma função S. Então:

1. S é contínua em $[a, b]$;
2. S é integrável em $[a, b]$ e tem-se

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx \right)$$

3. se cada f_n é de classe C^1 em $[a, b]$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a, b]$, então S é diferenciável neste intervalo e

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \; x \in [a, b]$$

Séries de Funções - Critério de Weierstrass

Teorema 4.5

Sejam (f_n) uma sucessão de funções definidas em D e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica convergente de termos não negativos, tais que
$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in D.$

Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em D.

Exercício 4.4

Mostre, usando o Critério de Weierstrass, que as séries de funções seguintes são uniformemente convergentes no intervalo indicado:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ em $[0, 1]$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ em $[0, 2\pi]$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 + x^4}$ em $\mathbb{R}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}$ em $[0, +\infty[$

Exercício 4.5

1. Considere a função S definida por $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^4}$

   (a) Mostre que S é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

   (b) Mostre que S é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que S' é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

2. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ de funções definidas em $\mathbb{R}$.

   (a) Mostre que a série é uniformemente convergente em $[1, +\infty[$.

   (b) Determine, em $[1, +\infty[$, a derivada da função soma da série considerada.

3. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$ de funções definidas em $\mathbb{R}$.

   (a) Mostre que a função soma da série é contínua em $[1, +\infty[$.

   (b) Justifique que a função soma da série é integrável em $[\ln(3), \ln(4)]$ e calcule $\displaystyle\int_{\ln(3)}^{\ln(4)} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}\right) dx$

Séries de Potências - Definição

Definição 4.4

Uma **série de potências centrada em** $c \in \mathbb{R}$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_n(x-c)^n + \cdots$$

onde $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Os números a_n são os **coeficientes da série**.

Exercício 4.6

Discuta para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

é convergente e, nesses casos, determine a sua soma.

Séries de Potências - Domínio de convergência

Definição 4.5

O conjunto de pontos para os quais uma série de potências é convergente chama-se **domínio de convergência**.

Observação 4.5

O domínio de convergência de uma série de potências pode ser determinado utilizando os critérios de D'Alembert ou da Raiz.

Exercício 4.7

Determine o domínio de convergência das séries seguintes, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{n+1}} x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^{n+1} n^2} (x-3)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$

Séries de Potências - Domínio de convergência

Observação 4.6

Como observámos nos exemplos anteriores, o domínio de convergência aparenta tomar uma de três formas: um conjunto singular ($x = c$); um intervalo limitado; o conjunto $\mathbb{R}$.

Teorema 4.6

Dada uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, verifica-se uma e uma só das condições seguintes:

(a) a série converge absolutamente apenas em $x = c$ e diverge para $x \neq c$;

(b) a série converge absolutamente para todo o $x \in \mathbb{R}$;

(c) existe um único $R > 0$ tal que a série converge absolutamente para todo o $x \in]c-R, c+R[$ e diverge para todo o $x \in]-\infty, c-R[\cup]c+R, +\infty[$.

Séries de Potências - Raio de convergência

Definição 4.6

Ao número R do Teorema 1.6(c) chamamos **raio de convergência** da série de potências.
Dizemos que $R = 0$ (raio de convergência nulo) no caso do Teorema 1.6(a) e que $R = +\infty$ (raio de convergência infinito) no caso do Teorema 1.6(b).
Quando $R \neq 0$, o intervalo $]c - R, c + R[$ ($\mathbb{R}$ no caso de $R = +\infty$) designa-se por **intervalo de convergência**.

Teorema 4.7

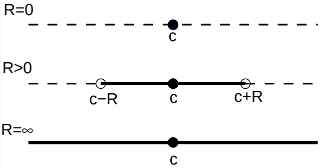
Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ uma série de potências tal que $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Então, o raio de convergência R da série pode ser obtido de duas formas (sempre que os limites existam):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{ou} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Séries de Potências - Intervalo e domínio de convergência

Observação 4.7

- o intervalo de convergência (IC) é centrado em c, podendo ser apenas o conjunto singular $\{c\}$ ou ser $\mathbb{R}$ como ilustra a figura



- o domínio de convergência (DC) poderá diferir apenas no caso $R > 0$; note-se que nada é dito quanto à natureza da série em $x = c - R$ e $x = c + R$, o estudo tem de ser feito caso a caso

- Podemos ter $DC = IC =]c - R, c + R[$, $DC =]c - R, c + R]$, $DC = [c - R, c + R]$ ou $DC = [c - R, c + R[$.

Exercício 4.8

Determine o raio e o domínio de convergência das séries seguintes (distinga os pontos onde a convergência é simples ou absoluta):

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (x+5)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} x^{3n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n} (3x-2)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n2^{n+2}} (x-1)^n$

Séries de Potências - Convergência uniforme

Teorema 4.8

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$ e correspondente intervalo do convergência $I =]c-R, c+R[$. Então a série converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado de I.

Teorema 4.9 Teorema de Abel

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências de raio de convergência $R \neq 0$. Se a série converge em

(a) $x = c+R$, então converge uniformemente em $[c, c+R]$ e tem-se que

$$\lim_{x \to (c+R)^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(c+R-c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

Séries de Potências - Convergência uniforme

Teorema 4.9(cont.) **Teorema de Abel**

(b) $x = c - R$, então converge uniformemente em $[c - R, c]$ e tem-se que

$$\lim_{x \to (c-R)^+} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (c - R - c)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-R)^n$$

Teorema 4.10

Seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ uma série de potências de raio de convergência $R \neq 0$. Então as séries de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}$ têm raio de convergência R.

Propriedades das séries de potências

Teorema 4.11

Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ uma série de potências com raio de convergência $R \neq 0$, $I =]c-R, c+R[$ o seu intervalo de convergência e $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$. Então:

(a) f é contínua em todo o domínio de convergência da série;

(b) f é diferenciável e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}, \quad \forall x \in I$;

(c) a função F, definida por $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$ é a primitiva de f em I tal que $F(c) = 0$;

Propriedades das séries de potências

Teorema 4.11(cont.)

(d) f é integrável em qualquer subintervalo $[a, b]$ do domínio de convergência e

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n(x-c)^n dx\right)$$

Exercício 4.9

Sabendo que $\forall x \in]-1,1[$ se tem $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, obtenha a representação em série de potências das funções seguintes, indicando o maior intervalo aberto onde a representação é válida:

(a) $f(x) = -\ln(1-x)$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{(1+2x)}$

(d) $f(x) = \ln(1+2x)$

(e) $f(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

Polinómio de Taylor

Definição 4.7

A um polinómio na forma

$$T_c^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$
$$= f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

chamamos **polinómio de Taylor** de ordem n de f no ponto c.
Se $c = 0$, então a $T_0^n f(x)$ chamamos **polinómio de MacLaurin** de ordem n de f.

Observação 4.8

De acordo com a definição anterior temos que

$$T_c^n f(c) = f(c), \frac{d}{dx} T_c^n f(c) = f'(c), \ldots, \frac{d^n}{dx^n} T_c^n f(c) = f^{(n)}(c)$$

Fórmula de Taylor

Teorema 4.12

Sejam $n \in \mathbb{N}_0$, f uma função com derivadas contínuas até à ordem $(n+1)$ num intervalo aberto I e $c \in I$. Então, $\forall x \in I \backslash \{c\}$, existe θ entre c e x tal que

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{\text{Polinómio de Taylor}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{\text{Resto de Lagrange}} \\ &= T_c^n f(x) + R_c^n f(x) \end{aligned}$$

À igualdade anterior chamamos **fórmula de Taylor** de ordem n (no caso em que $c = 0$ também é chamada **fórmula de MacLaurin**). Note-se que $\theta \in]c, x[$ se $c < x$ ou $\theta \in]x, c[$ se $c > x$.

Fórmula de Taylor

Observação 4.9

- no caso $n = 0$ a fórmula de Taylor é equivalente ao Teorema de Lagrange pois

$$f(x) = f(c) + f'(\theta)(x - c) \Leftrightarrow f'(\theta) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \text{ com } x \neq 0$$

- o erro absoluto cometido ao utilizar $T_c^n f(x)$ para aproximar $f(x)$ pode ser estimado (majorado) por

$$|R_c^n f(x)| = |f(x) - T_c^n f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - c|^{n+1}$$

onde $M = \sup |f^{(n+1)}(y)|$ para y entre x e c, desde que $f^{(n+1)}$ seja contínua em I. A este propósito veja-se http://calculusapplets.com/taylor.html

Polinómio de Taylor - Exercícios

Exercício 4.10

1. Determine os polinómios de Taylor seguintes
   (a) $T_0^3(x^3+2x+1)$
   (b) $T_0^5(\text{sen}(x))$
   (c) $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$, $(n \in \mathbb{N})$
2. Considere $f(x) = e^x$.
   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.
   (b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1,\ 0[$, com erro inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.
   (c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando um majorante para o erro absoluto cometido nessa aproximação.

Série de Taylor: definição

Definição 4.8

Seja f uma função que admite derivadas contínuas de qualquer ordem e tal que $\lim\limits_{n\to\infty} R_c^n f(x) = 0$. Então f admite um desenvolvimento em série de potências da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots$$

à qual chamamos **série de Taylor** de f no ponto c.
Se $c = 0$, então chamamos **série de MacLaurin** de f.

Exercício 4.11

Obtenha a série de MacLaurin das funções:

(a) $f(x) = e^x$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Série de Taylor: convergência

Observação 4.10

Em que condições se pode escrever $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$?

Teorema 4.13

Sejam I um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em I e $c \in I$. Então

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \ \ \forall x \in I \iff \lim_{n\to\infty} R_c^n f(x) = 0$$

Teorema 4.14

Sejam I um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas finitas de qualquer ordem em I e $c \in I$.

Se existe $M > 0$ tal que

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \ \forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \ \forall x \in I.$$

Série de Taylor - Exercícios

Exercício 4.12

Use os Teoremas anteriores, para mostrar que:

(a) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(b) $\text{sen}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

Definição 4.9

Seja f uma função definida num intervalo aberto I. Se existir um real $r > 0$ tal que para todo o $x \in]c-r, c+r[\subseteq I$ se tem $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$, então dizemos que f é **analítica** em c.

Unicidade da representação em série de potências

Teorema 4.15

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad x \in I =]c-R, c+R[\quad (R \neq 0),$$

então f possui derivadas finitas de qualquer ordem em I e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \; \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Observação 4.11

O Teorema anterior afirma que se f admite uma representação em série de potências centrada em c, então essa é a série de Taylor de f em c.