Aula 21

EDO's Lineares completas
(métodos de cálculo de y_p)

MVC — Método da variação das constante
Pode dar uma primitiva difícil

MCI — Método dos coeficientes Indeterminados → Complexo

ex:

(A) $$\boxed{y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad x > 0} \quad (E)$$

$b(x) \neq 0$

$$\boxed{y'' - 2y' + y = 0} \quad (H)$$

$$p(r) = \boxed{r^2 - 2r + 1 = 0} \quad (C)$$

A solução geral de E, y_E, é dada por: $y_E(x) = y_H(x) + y_p(x)$

y_H: solução geral de (H)

y_p: Uma qualquer solução particular de (E)

1) encontrar y_H:

$$p(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(1)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r = 1 \text{ (dupla)}$$

$$SFS = \{e^{rx}, xe^{rx}\} = \{e^x, xe^x\}$$

$$\boxed{y_H(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

2) encontrar y_p: (usarei o MVC)

Este método garante que existe uma solução y_p de (E) na forma:

$$y_p(x) = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, x\, e^x$$

Cumprindo-se:

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^x + c_2'(x)\, x e^x = 0 \\ c_1'(x)(e^x)' + c_2'(x)\, [x e^x]' = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x/x \end{bmatrix}$$

Wronsquiana, logo invertível

Testar $-1, +1$
$-2, +2$
Para $3^{\underline{o}}$ grau

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ e^x/x & (x+1)e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{e^x}{x} \cdot x \cdot e^x}{(x+1)e^{2x} - x e^{2x}} = \frac{-e^{2x}}{e^{2x}} = -1 \Rightarrow c_1(x) = \int (-1)\, dx = -x$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & e^x/x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}} = \frac{e^{2x}/x}{e^{2x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow c_2(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x$$

$$\boxed{y_P(x) = -x e^x + \ln x\, (x e^x)}$$

Conclui

$$\boxed{y_{\bar{E}}(x) = y_H + y_P = c_1 e^x + c_2 e^x - x e^x + x e^x \ln x}$$

Nota: quando é de $3^{\underline{a}}$ ordem normalmente as soluções são: $\underbrace{-1 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } -2}_{\text{Usamos o Ruffini}}$

ex: (B)

$b(x) \neq 0$

$$\boxed{y''' - y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}} \text{ (E)}$$

$$\boxed{y''' - y'' - 4y' + 4y = 0} \text{ (H)}$$

$$p(\lambda) = \boxed{r^3 - r^2 - 4r + 4}$$

$$= (r-1)(r^2-4)$$

	1	-1	-4	4
1		1	0	-4
	1	0	-4	0

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow r = 1 \lor r^2 = 4$

$\Leftrightarrow r = 1 \lor r = -2 \lor r = 2$

• $y_H = ?$

$SFS = \{ e^x, e^{-2x}, e^{2x} \}$

$y_H = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

• $y_P = ?$ Método da variação das constantes ↓

$y_P = c_1(x)\, e^x + c_2(x)\, e^{-2x} + c_3(x)\, e^{2x}$

Cumprindo-se:

$$\begin{cases} c_1'(x)\, e^{x} + c_2'(x)\, e^{-2x} + c_3'(x)\, e^{2x} \\ c_1'(x)(e^{x})' + c_2'(x)(e^{-2x})' + c_3'(x)(e^{2x})' = 0 \\ c_1'(x)(e^{x})'' + c_2'(x)(e^{-2x})'' + c_3'(x)(e^{2x})'' = e^{-2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} e^{x} & e^{-2x} & e^{2x} & 0 \\ e^{x} & -2e^{-2x} & 2e^{2x} & 0 \\ e^{x} & 4e^{-2x} & 4e^{2x} & e^{-2x} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} e^{x} & e^{-2x} & e^{2x} & 0 \\ 0 & -3e^{-2x} & e^{2x} & 0 \\ 0 & 3e^{-2x} & 3e^{2x} & e^{-2x} \end{array}\right]$$

Podia ter utilizado: Regra de Cramer + Teorema de Laplace

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} e^{x} & e^{-2x} & e^{2x} & 0 \\ 0 & -3e^{-2x} & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 4e^{2x} & e^{-2x} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} e^{x} & e^{-2x} & 0 & -\frac{e^{-2x}}{4} \\ 0 & -3e^{-2x} & 0 & -\frac{e^{-2x}}{4} \\ 0 & 0 & 4e^{2x} & e^{-2x} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} e^{x} & 0 & 0 & -\frac{e^{-2x}}{3} \\ 0 & 3 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & e^{2x} & \frac{e^{-2x}}{4} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{e^{-3x}}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e^{-4x}}{4} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} \\ c_2'(x) = \frac{1}{12} \\ c_3'(x) = \frac{e^{-4x}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1(x) = \int -\frac{e^{-3x}}{3}\,dx = -\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)\int(-3)\,e^{-3x}\,dx = \frac{e^{-3x}}{9} \\ c_2(x) = \int \frac{1}{12}\,dx = \frac{x}{12} \\ c_3(x) = \int \frac{e^{-4x}}{4}\,dx = \frac{-1}{16}\times\int(-4)\,e^{-4x}\,dx = -\frac{e^{-4x}}{16} \end{cases}$$

Logo: $y_p = \frac{e^{-2x}}{9} + x\,\frac{e^{-2x}}{12} - \frac{e^{-2x}}{16} = e^{-2x}\left(\frac{1}{9} + \frac{x}{12} - \frac{1}{16}\right)$

Assim:

$$y_E = y_H + y_P \Rightarrow y_E = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x} + e^{-2x}\left(\frac{1}{9} + \frac{x}{12} - \frac{1}{16}\right),\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Método dos coeficientes Indeterminados

$\boxed{1.^{a}\text{ caso}}$ ($b(x)$ é um polinómio de grau m)

Neste caso: número mágico $z = 0$

- Se $z=0$ não é raiz de (C) então: $y_p(x)$ é um polinómio de grau m
- Se $z=0$ é raiz de (C) com multiplicidade (K) então: $y_p(x) = x^{K}$ [polin. grau m]

Resumindo: $y_p(x) = x^{K}$ [pol. grau m]

mult. de 0 como raiz característica!

Ex: (C)

$b(x)$ é um pol. grau $m=3$

$\boxed{y' + 2y = x^3 + 3x + 1}$ — (E)

$\boxed{y' + 2y = 0}$ — (H)

$\boxed{r + 2 = 0}$ — (C)

$\boxed{z=0}$ Não é raiz de (C)

$SFS = \{e^{-2x}\}$

$y_H(x) = c\, e^{-2x}, \; c \in \mathbb{R}$

y_P será um polinómio de grau $\underline{m = 3}$

$$\boxed{y_P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \text{ — } (P1)$$

coeficientes a calcular pelo MCI

$$\boxed{y_P'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1} \text{ — } (P2)$$

Substituo (P1) e (P2) em (E):

$$(3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1) + 2(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = x^3 + 3x + 1$$

$$2a_3 x^3 + (3a_3 + a_2)x + (2a_2 + 2a_1)x + (a_1 + 2a_0) = x^3 + 0x^2 + 3x + 1$$

$$\begin{cases} 2a_3 = 1 \\ 3a_3 + 2a_2 = 0 \\ 2a_2 + 2a_1 = 3 \\ a_1 + 2a_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_3 = 1/2 \\ a_2 = -3/4 \\ a_1 = 9/4 \\ a_0 = -5/8 \end{cases}$$

$$\boxed{y_P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{5}{8}}$$

$$\boxed{y_E(x) = y_H + y_P = c\, e^{-2x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{5}{8}, \; c \in \mathbb{R}}$$

ex: (D)

$b(x)$ pol. grau $m = 2$

$$\boxed{y^{(4)} - 2y'' = x^2 + 1} \text{ — } (E)$$

$z = 0$ (nº mágico)

$$\boxed{y^{(4)} - 2y'' = 0} \text{ — } (H)$$

$$\boxed{P_r(r) = r^4 - 2r^2 = 0} \text{ — } (C)$$

$P_r(r) = 0 \Leftrightarrow r^2(r-2) = 0$

$z = 0$ acertou numa raiz de (C)
essa raiz tem mult. $K = 2$

$r = 0 \;\vee\; r = \sqrt{2} \;\vee\; r = -\sqrt{2}$
(dupla) (simples) (simples)

$$SFS = \{e^{0x}, x e^{0x}, e^{\sqrt{2}x}, e^{-\sqrt{2}x}\} = \{1, x, e^{\sqrt{2}x}, e^{-\sqrt{2}x}\}$$

$$y_H(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x}, \; C_i \in \mathbb{R}$$

$$y_p(x) = x^2\left[a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right]$$

$$y_p(x) = a_2 x^4 + a_1 x^3 + a_0 x^2$$

$$y_p'(x) = 4a_2 x^3 + 3a_1 x^2 + 2a_0 x$$

$$\boxed{y_p''(x) = 12 a_2 x^2 + 6a_1 x + 2a_0} \text{ — } P2$$

$$y_p'''(x) = 24 a_2 x + 6a_1$$

$$\boxed{y_p^{(4)}(x) = 24 a_2} \text{ — } P4$$

Substituo (P4) e (P2) em (E):

$$24a_2 - 2(12a_2x^2 + 6a_1 x + 2a_0) = x^2+1$$

$$(-24a_2)x^2 - 12a_1 x + (24a_2 - 4a_0) = x^2 + 0x + 1$$

$$\begin{cases} -24a_2 = 1 \\ -12a_1 = 0 \\ 24a_2 - 4a_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = -1/24 \\ a_1 = 0 \\ a_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_p(x) = a_2 x^4 + a_1 x^3 + a_0 x^2$$

$$= -\frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\boxed{y_E = y_H + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 e^{\sqrt{2}x} + c_4 e^{-\sqrt{2}x} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2}x^2, \; c_i \in \mathbb{R}}$$

$\boxed{2.º \text{ Caso}}$ $\left(b(x) = e^{\alpha x} (\text{pol in. de grau } m)\right)$

N.º mágico: $z = \alpha$ (neste caso)

→ Se $z = \alpha$ não é raiz de (C)

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(\text{pol. grau } m)$$

→ Se $z = \alpha$ é raiz de (C) com multiplicidade K: $y_p = x^K e^{\alpha x}(\text{polin. de grau } m)$

"ex: (E) $\boxed{y' - y = e^{3x}(x^2+1)}$ — (E)

$\boxed{y' - y = 0}$ — (H)

$p(r) = \boxed{r - 1 = 0}$ — (C)

$p(r) = 0 \Leftrightarrow r = 1$

$SFS = \{e^x\}$ $\qquad y_H(x) = Ce^x, \ C \in \mathbb{R}$

$\boxed{z = 3} \rightarrow z = \alpha$

• Não é raiz de (C)

$$\boxed{y_p(x) = e^{3x}(a_2x^2 + a_1x + a_0)} \text{ — T1}$$

$$y_p'(x) = 3e^x(a_2x^2 + a_1x + a_0) + e^{3x}(2a_2x + a_1)$$

$$= e^{3x}(3a_2x^2 + 3a_1x + 3a_0) + e^{3x}(2a_2x + a_1)$$

$$\boxed{y_p'(x) = e^{3x}(3a_2x^2 + (3a_1 + 2a_2)x + (3a_0 + a_1)} \text{ — T2}$$

Substituo T1 e T2 em (E):

$$\cancel{e^{3x}}[3a_2x^2 + (3a_1 + 2a_2)x + (3a_0 + a_1)] + \cancel{e^{3x}}(a_2x^2 + a_1x + a_0) = \cancel{e^{3x}}(x^2 + 0x + 1)$$

⋮

$$y_p(x) = e^{3x}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{y_E = y_H + y_p}$$

3.º caso ← Caso geral!

Próxima aula...