Aula 20

Nota:

- Só aprendemos EDO's de ordem $n \geq 2$ quando estas EDO's são lineares
  (com ênfase no caso de coeficiente constante)

Solução geral de uma EDO Linear ← Teorema importante

> • A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada

SLIDE #43 a)

ex: A

$$\boxed{y' - 2y = e^{5x}} \quad \text{E}$$

EDO linear completa de coef. constantes de ordem $n = 1$

Defini a EDO Homogénia associada a E

$$\boxed{y' - 2y = 0} \quad \text{H}$$

• A solução geral de E é $\boxed{y_E(x) = \underbrace{y_H(x)}_{\text{solução geral de H}} + \underbrace{y_p(x)}_{\text{uma qualquer solução particular de E}}}$,

• Vou calcular y_H:

$$y' = 2y \iff y' = \frac{1}{\frac{1}{2y}} \longrightarrow \text{var. sep.}$$

$$\iff \int \frac{1}{2y}\, dy = \int 1\, dx$$

$$\iff \frac{1}{2} \ln |y| = x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\iff \ln|y| = 2x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\iff |y| = e^{2x + c_2}$$

$$\iff |y| = e^{2x} \times \underbrace{e^{c_2}}_{= K \in \mathbb{R}^+}$$

(...)

$$\iff \boxed{y_H = K e^{2x}, \; K \in \mathbb{R}}$$

↳ solução geral de H

• Sabendo que $y_p(x) = \frac{1}{3} e^{5x}$ é solução de E
enunciado

$$\left[\frac{1}{3} e^{5x}\right]' - 2 \times \frac{1}{3} e^{5x} = e^{5x}$$

$$\iff 5 \times \frac{1}{3} \times \cancel{e^{5x}} - 2 \times \frac{1}{3} \times \cancel{e^{5x}} = \cancel{e^{5x}}$$

$$\iff \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1 \iff 1 = 1$$

c.q.m

• Então, a solução geral de E é dada por:

$$\boxed{y_E(x) = \underbrace{K e^{2x}}_{\text{solução de H}} + \underbrace{\frac{1}{3} e^{5x}}_{\text{uma qualquer solução particular de E}}}$$

ex: B Seja a EDO Linear Homogénia $\boxed{y'' + y = 0}$ — (H)

- Sei que:

  $\rightarrow \varphi_1(x) = \cos(x)$ e $\varphi_2(x) = \sin(x)$

- É facil de verificar que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ é l.i. podiamos verificar, por outro lado, que:

> Nota: não existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) = K \sin(x)$

Uma maneira:

$\rightarrow$ Formo a matriz WRONSKIANA:

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$$ derivar!

$\rightarrow$ Cujo determinante é o WRONSKIANO:

$$\det(W) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

$\rightarrow$ Vou também provar que $\varphi_1 = \cos x$ e $\varphi_2 = \sin x$ são soluções de (H)

$$(\cos x)'' + \cos x = 0 \Leftrightarrow -\cancel{\cos x} + \cancel{\cos x} = 0 \quad ✓$$

$$(\sin x)'' + \sin x = 0 \Leftrightarrow -\cancel{\sin x} + \cancel{\sin x} = 0 \quad ✓$$

$\rightarrow$ Então:

sistema fundamental de soluções

$SFS = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\} = \{\cos x, \sin x\}$ é uma BASE do subespaço vetorial real cujos elementos são as soluções de (H)

↳ lembrar de ALGA

A solução geral de (H) é a combinação linear genérica de SFS

$$\boxed{y_H(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ex: C SLIDE #43 b)

ordem $n = 3$

$$\boxed{y''' + 4y'' - 5y' = 0} \text{ — (H)}$$

a) Será que $\{1, e^x\}$ constitui um SFS para H?

$\#\{1, e^x\} = 2 \neq 3$, logo não!

b) E quanto a $\{1, e^x, 2e^x\}$

$$W(1, e^x, 2e^x) = \begin{bmatrix} 1 & e^x & 2e^x \\ 0 & e^x & 2e^x \\ 0 & e^x & 2e^x \end{bmatrix}$$ derivar!

> Nota que: $2e^x = 0(1) + 2e^x, \forall x \in \mathbb{R}$
> Logo, o conjunto não é l.i.
> ⇓
> logo, não é uma base

$$|W| = 1\times(-1)^{1+1}\times \begin{vmatrix} e^x & 2e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix} = 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0$$

Teorema de Laplace na primeira coluna

// Não é l.i.

c) E quanto a $C = \{1, e^x, e^{-5x}\}$

- $\# C = 3$ ✓
- $$|W| = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{-5x} \\ 0 & e^x & -5e^{-5x} \\ 0 & e^x & 25e^{-5x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & -5e^{-5x} \\ e^x & 25e^{-5x} \end{vmatrix} = 25e^{-4x} + 5e^{-4x} = 30e^{-4x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

→ Logo: C é l.i.

Falta verificar que:

$$\begin{cases} f_1(x) = 1 \text{ é sol. de } (H) \longrightarrow \cancel{(1)'''}^{0} + 4\cancel{(1)''}^{0} - 5\cancel{(1)'}^{0} = 0 \ ✓ \\ f_2(x) = e^x \text{ é sol. de } (H) \longrightarrow (e^x)''' + 4(e^x)'' - 5(e^x)' = 5e^x - 5e^x = 0 \ ✓ \\ f_3(x) = e^{-5} \text{ é sol. de } (H) \longrightarrow \underbrace{(e^{-5x})'''}_{-125e^{-5x}} + \underbrace{4(e^{-5x})''}_{+\,100e^{-5x}} - \underbrace{5(e^{-5x})'}_{+\,25e^{-5x}} = 0 \ ✓ \end{cases}$$

Assim: $SFS = \{1, e^x, e^{-5x}\}$ é uma base do subespaço dos soluções de (H)

—//—

$\boxed{\text{Caso 1}}$ (O pol. característico tem $\underline{\underline{n}}$ raízes mais simples)

$$\boxed{2y''' - 9y'' + 10y' - 3y = 0} \text{ — } (H)$$

- Forma-se a eq. característica:

$$p(r) = \boxed{\underbrace{3r^3 - 9r^2 + 10r - 3}_{(r-1)(2r-1)(r-1)=0} = 0} \text{ — } (C)$$

$p_n(r) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1 \vee r_2 = \frac{1}{2} \vee r_3 = 3$

$SFS = \{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{r_3 x}\}$

$SFS = \{e^x, e^{\frac{x}{2}}, e^{3x}\}$

- A solução geral de (H) vem dada por:

$$y_H(x) = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{x}{2}} + c_3 e^{3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Caso 2 (As raizes são reais mas há uma que tem multiplicidade > 1)

$$\boxed{y''' + 3y'' - 4y = 0} \text{ — (H)}$$

$$p(r) = \boxed{\underbrace{r^3 + 3r^2 - 4}_{(r-1)(r+2)^2 = 0} = 0} \text{ — (C)}$$

$$p(r) = 0 \Leftrightarrow r_1 = 1 \ \vee \ \underbrace{r_2 = -2}_{\text{dupla}}$$

$$SFS = \{ e^{r_1 x}, \overbrace{e^{r_2 x}, x e^{r_2 x}} \}$$

$$SFS = \{ e^{x}, e^{-2x}, x e^{-2x} \}$$

Caso 3 (Há raizes complexas simples)

- Um par de raízes $r = \alpha \pm \beta i$ determina no SFS

$$e^{\alpha x} \left[\cos(\beta x) + \sin(\beta x) \right]$$

$$\boxed{y'' + 2y' + 5 = 0} \text{ — (H)}$$

$$\boxed{r^2 + 2r + 5 = 0} \text{ — (C)}$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \underset{\alpha}{-1} \pm \underset{\beta}{2} i$$

- Entram no SFS duas soluções:

$$SFS = \{ e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \sin(\beta x) \}$$

$$SFS = \{ e^{-x} \cos(2x), e^{-x} \sin(2x) \}$$

$$y_H = c_1 e^{-x} \cos(2x) + c_2 e^{-x} \sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Caso 4 (Há pelo menos um par de raizes complexas)

$$\boxed{y^{(4)} + 2y'' + y = 0} \text{ — (H)}$$

$$p(r) = \boxed{\underbrace{r^4 + 2r^2 + 1}_{(r^2+1)^2 = 0} = 0} \text{ — (C)}$$

$$p(r) = 0 \Leftrightarrow (r^2 + 1)^{2} = 0 \Leftrightarrow r^2 = -1 \Leftrightarrow \underbrace{r = \pm i}_{\text{par de raizes duplas}} = \alpha \pm \beta i, \text{ com } \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$r = \pm i$, multiplicidade $k = 2$

$\boxed{\alpha = 0 \wedge \beta = 1}$

$$SFS = \{ e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x), x e^{\alpha x}\cos(\beta x), x e^{\alpha x}\sin(\beta x) \}$$

$$= \{ \cos x, \sin(x), x\cos(x), x\sin(x) \}$$

$$y_H(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + c_3 x\cos(x) + c_4 x\sin(x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

— // —

"ex:

D

$\boxed{9y'' - 6y' + y = 0}$ — H

a) Escreva e resolve a eq. caracteristica

$$9r^2 - 6r + 1 = 0 \underset{(\ldots)}{\Leftrightarrow} r = \frac{1}{3}$$

dupla

b) Escreva o SFS

$$SFS = \{ e^{\frac{x}{3}}, x e^{\frac{x}{3}} \}$$

c) Obtenha a sol. geral $y_H(x)$

$$y_H(x) = c_1 e^{\frac{x}{3}} + c_2 x e^{\frac{x}{3}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

"ex: E

$\boxed{y^{(4)} + y^{(2)} = 0}$ — E

$p(r) \boxed{= r^4 + r^2}$ — H

$$p(r) = 0 \Leftrightarrow r^2(r^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{r = 0}_{\text{Por duplo!}} \vee r^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 0 \vee r = \underbrace{0}_{\alpha} \underbrace{\pm 1}_{\beta} i$$

Logo:

$$SFS = \{ e^{0x}, x e^{0x}, \cos(x), \sin(x) \}$$

$$= \{ 1, x, \cos(x), \sin(x) \}$$

$$y_H = c_1 + c_2 x + c_3\cos(x) + c_4\sin(x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

ex: F

$$\boxed{y^{(4)} - 8y^{(3)} = 0} - E$$

$$p(r) = \boxed{r^4 - 8r^3} - H$$

$$p(r) = 0 \Leftrightarrow r^3(r-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{r = 0}_{\text{Por triplo!}} \lor r = 8$$

Logo:

$$SFS = \{1, x, x^2, e^{8x}\}$$

Assim:

$$y_H = c_1 + x c_2 + x^2 c_3 + e^{8x} c_4, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$