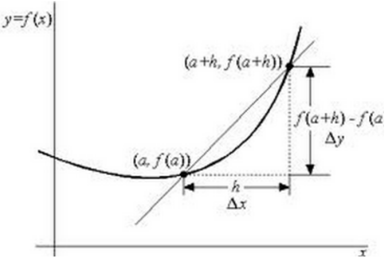
Funções reais de várias variáveis: derivadas parciais, diferenciabildade e aplicações

Cálculo II - Ag.2

Recorde o que sabe sobre derivadas de funções reais de uma variável real:

- A definição de derivada num ponto e sua interpretaçao geométrica;
- Regras de derivação; Continuidade e diferenciabilidade.



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(a) = lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se este limite existir; neste caso é o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Seja f uma função de duas variáveis, $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ e $(a, b) \in \operatorname{int}(D)$.

Definição

A *derivada parcial de f em ordem a x no ponto* (a, b) é, se o limite existir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

e, de modo idêntico

Definição

A *derivada parcial de f em ordem a y no ponto* (a, b) é, se o limite existir,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

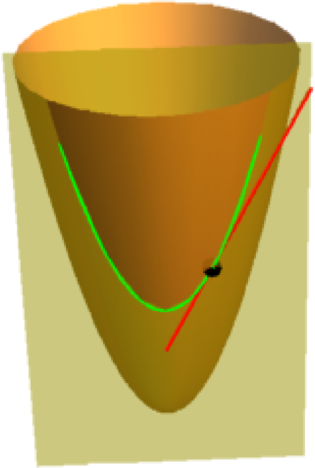
Definição

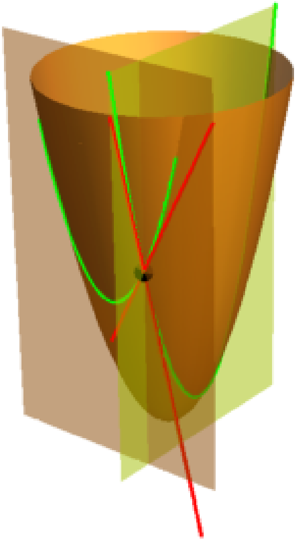
Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar e $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathrm{int}(D)$. Para cada variável x_i ($i = 1, \ldots, n$) define-se a derivada parcial de f em ordem a x_i no ponto p por

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_1, \ldots, p_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, \ldots, p_i + h, \ldots, p_n) - f(p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_n)}{h},$$

caso este limite exista.

As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ medem a taxa de variação da função na direção de x_i.





Na prática, se a função for definida por uma só expressão na vizinhança de um ponto, para calcular a derivada parcial de f em ordem a uma das suas variáveis, calcula-se a derivada da função f como se ela dependesse apenas desta variável, usando as regras de derivação, tomando as outras variáveis como constantes.

Exemplo 1: Calcular as derivadas parciais

- $f(x,y) = \sin(x+3y) - \sin x \sin y$, no ponto $(\frac{\pi}{3}, 0)$.
- $f(x,y,z) = x^3y^4 + xz^3 + \cos(z)$, em qualquer ponto (x,y,z).

Mas nem sempre assim é!

Exemplo 2:

Calcular as derivadas parciais da função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < y \\ y & \text{se} \quad x \geq y \end{cases} .$$

Como as derivadas parciais de uma função f real de duas variáveis são funções duas variáveis, derivando estas funções em ordem a cada uma das variáveis, obtém-se as derivadas de segunda ordem da função f

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

as quais também são usualmente denotadas por

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}.$$

e o processo pode continuar para obter ... as derivadas de ordem superior da função.

Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^k se todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual a k existem e são contínuas em D.

Em particular, f é de classe

- C^0 se é contínua;
- C^∞ se tem derivadas parciais contínuas de qualquer ordem.
- Pode mostrar-se que qualquer função de classe C^1 num aberto é contínua. (Assim, uma função de classe C^{k+1} num aberto também é de classe C^k, para qualquer $k \geq 0$).

Teorema de Schwarz

Seja $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma função de classe C^2 num conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Então para todo o $x \in U$ e para todo os índices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Exemplo 3: Verificar o TS

Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, sendo $f(x, y) = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$.

1. Mostre que as funções seguintes satisfazem a equação de Laplace de dimensão 2,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 :$$

- $f(x, y) = e^{-2y} \cos(2x)$
- $f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

Exercícios (para praticar)

1. Mostre que as funções seguintes satisfazem a equação de Laplace de dimensão 2,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 :$$

- $f(x, y) = e^{-2y} \cos(2x)$
- $f(x, y) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

2. Mostre que a função definida por $f(x, y) = e^{3x+4y} \cos(5z)$ satisfaz a equação de Laplace de dimensão 3,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Definição

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função, p um ponto interior de D e u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$. A derivada de f no ponto p segundo o vetor u, denota-se por $D_u f(p)$, e é definida por

$$D_u f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tu) - f(p)}{t}$$

se este limite existir. Chamamos derivada direcional de f no ponto p segundo u à derivada de f segundo o vetor unitário $\frac{u}{\|u\|}$.

Exemplo 4.

Mostre que derivada da função f definida por $f(x, y) = x^2 + y$ no ponto $p = (2, 3)$ segundo o vetor $u = (1, -1)$ é 3. Qual é a derivada direcional de f segundo u no mesmo ponto? E... qual é o seu significado?

Recorde-se que, se $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de uma variável que admite derivada finita num ponto $p \in \mathrm{int}(D)$, então f é diferenciável e pode escrever-se, para $p + h \in D$,

$$f(p+h) - f(p) = f'(p)h + \epsilon(h), \tag{1}$$

onde a função ϵ satisfaz

$$\lim_{h \to 0} \frac{\epsilon(h)}{h} = 0. \tag{2}$$

Além disso, pode mostrar-se que, sendo f diferenciável, é também contínua nesse ponto.

Se $n \geq 2$ há diferenças significativas nos resultados análogos.
Uma função pode admitir todas as derivadas parciais num ponto, ou mesmo, admitir derivada segundo qualquer vetor num ponto e não ser contínua nesse ponto.

Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é *diferenciável* num ponto $p = (x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D)$ se existem constantes m_1 e m_2 e uma função ϵ definida numa bola centrada na origem, tais que para todo o vetor $v = (h, k)$, com $p + v = (x_0 + h, y_0 + k) \in D$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + m_1 h + m_2 k + \epsilon(h, k)$$

onde $\epsilon(h, k)$ satisfaz

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\epsilon(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

É fácil mostrar que os números m_1 e m_2 que aparecem nesta definição são as derivadas parciais de f no ponto (x_0, y_0) (veja Guião 4, pág. 28 ...)

Proposição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável num ponto $p = (x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D)$ se e só se as derivadas parciais de f existem em p e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

(Porquê ? devemos convencer-nos que assim é!)

Exemplo 5.

A função f definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ não é diferenciável no ponto $(0,0)$. Porquê?

Exemplo 5.

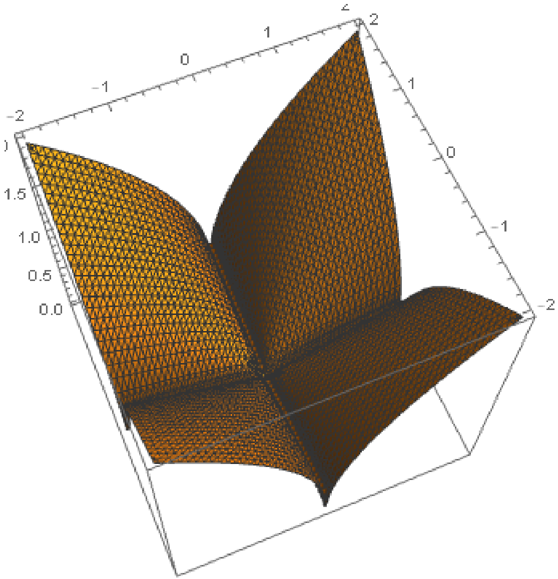
A função f definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ não é diferenciável no ponto $(0, 0)$. Porquê?

A existência de ambas as derivadas parciais num ponto não é suficiente para garantir que f é diferenciável nesse ponto!

Exemplo 6.

A função f definida por $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, admite derivadas parciais no ponto $(0, 0)$ mas não é aí diferenciável. Porquê?

Exemplo 7. $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, não diferenciável para $x = 0 \ \vee \ y = 0$



Definição

Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $p \in \operatorname{int}(D)$ se existem as derivadas parciais $f_{x_i}(p)$, $(1 \leq 1 \leq n)$ e uma função ϵ definida numa bola centrada na origem de $\mathbb{R}^n$, tais que para todo o vetor $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, satisfazendo $p + v \in D$,

$$f(p + v) - f(p) = f_{x_1}(p)\, v_1 + \ldots + f_{x_n}(p)\, v_n + \epsilon(v).$$

com $\displaystyle\lim_{v \to 0} \frac{\epsilon(v)}{\|v\|} = 0.$

Teorema

Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $p \in \text{int}(D)$, então:

(i) f é também contínua nesse ponto;

(ii) para todo o vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^n$, existe a derivada de f segundo o vetor u em p, e temos

$$D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u.$$

Consequências imediatas:

- Se uma função não é contínua num ponto p do seu domínio então também não é diferenciável nesse ponto.
- Se para algum vetor u, não nulo, não existe $D_v f(p)$ então podemos concluir que a função f não é diferenciável no ponto p.

Teorema

Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $p \in \operatorname{int}(D)$, então:

(i) f é também contínua nesse ponto;

(ii) para todo o vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^n$, existe a derivada de f segundo o vetor u em p, e temos

$$D_u f(p) = \nabla f(p) \cdot u.$$

Exercício

Mostre que a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto aberto D. Se f tem derivadas parciais contínuas em todos os pontos de D então f é diferenciável em D.

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto aberto D. Se f tem derivadas parciais contínuas em todos os pontos de D então f é diferenciável em D.

Exemplo 8.

A função definida em $\mathbb{R}^3$ por $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ é diferenciável no ponto $(1, 2, 3)$. Calcule $D_v f(p)$, sendo $v = (1, -1, 1)$.

Dizer que f é diferenciável em (x_0, y_0) é dizer que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k) + \varepsilon(h, k)$$

com $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$. Para (h, k) próximo de $(0, 0)$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \approx f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$$

(com erro $\varepsilon(h, k)$).

Plano tangente

Uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0, z_0) (com $z_0 = f(x_0, y_0)$) é

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Exemplo 9.

Uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$ no ponto $(1, -2, f(1, -2))$ é

$$z - 12 = 48(x - 1) - 14(y + 2).$$

E, $f(1.1, -1.9) \approx 12 + 48(1.1 - 1) - 14(-1.9 + 2) = 15.4.$

Exemplo 9.

Uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = 4x^3y^2 + 2y$ no ponto $(1, -2, f(1, -2))$ é

$$z - 12 = 48(x - 1) - 14(y + 2).$$

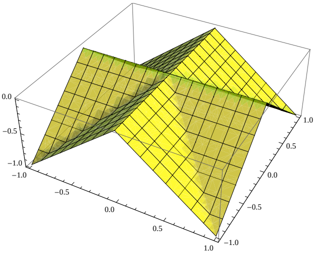
E, $f(1.1, -1.9) \approx 12 + 48(1.1 - 1) - 14(-1.9 + 2) = 15.4$.

Exercício

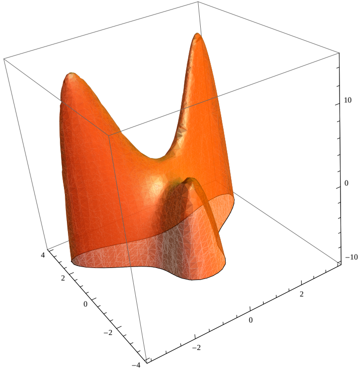
Considere a função definida por $f(x, y) = x^2 - \ln(xy) + y^2$.

1. Mostre que é diferenciável no seu domínio;
2. Calcule $D_uf(1, 1)$ segundo um vetor não nulo $u = (u_1, u_2)$;
3. Escreva uma equação do plano tangente ao gráfico da função f ponto $(1, 1, 2)$.
4. Obtenha um valor aproximado de $f(0.9, 1.01)$ usando aproximação linear.

Aplicação das derivadas ao cálculo de extremos de funções



$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(\big|\,|x| - |y|\,\big| - |x| - |y|\big)$$



$$f(x,y) = 8x^2y - 5x^2 + 4y^2 - x^4 - 2y^4$$

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto
- $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e p um ponto de D.

Definição:

A função f tem um

- mínimo local (ou relativo) no ponto p se $f(x) \geq f(p)$, para todo o ponto x numa vizinhança de p; neste caso, o ponto p diz-se um minimizante (ou ponto de mínimo) da função f.
- f tem um máximo local (ou relativo) no ponto p se $f(x) \leq f(p)$, para todo o ponto x numa vizinhança de p; o ponto p diz-se um maximizante (ou ponto de máximo) da função f.

maximizantes e minimizantes de f $\quad \equiv \quad$ extremantes de f
Neste caso, os valores de $f(p)$ chamam-se, máximos locais, mínimos locais, ou extremos locais da função f.

Definição

Um ponto p é um ponto crítico (ou ponto de estacionaridade) de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se se verifica uma das seguintes situações:

1. $\nabla f(p) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$)
2. não existe pelo menos uma das derivadas parciais f_{x_i} em p.

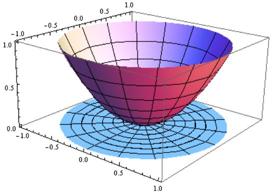
Exemplo 10.

$(0,0)$ é ponto crítico da função definida por

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

porque

$$\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (0,0)$$



Definição

Um ponto p é um ponto crítico (ou ponto de estacionaridade) de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se se verifica uma das seguintes situações:

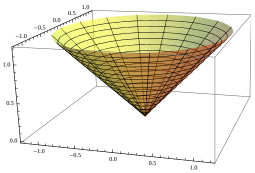
1. $\nabla f(p) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$)
2. não existe pelo menos uma das derivadas parciais f_{x_i} em p.

Exemplo 11.

$(0, 0)$ é ponto crítico da função definida por

$$g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

porque pelo menos uma das derivadas parciais de primeira ordem não existe neste ponto.



Definição

Um ponto p é um ponto crítico (ou ponto de estacionaridade) de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se se verifica uma das seguintes situações:

1. $\nabla f(p) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$)
2. não existe pelo menos uma das derivadas parciais f_{x_i} em p.

Proposição

Se p é um extremante local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ então p é um ponto crítico de f.

Definição

Um ponto p é um ponto crítico (ou ponto de estacionaridade) de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se se verifica uma das seguintes situações:

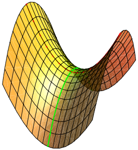
1. $\nabla f(p) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$)
2. não existe pelo menos uma das derivadas parciais f_{x_i} em p.

Proposição

Se p é um extremante local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ então p é um ponto crítico de f.

O recíproco é falso.

$f(x, y) = x^2 - y^2$



Definição

Um ponto p é um ponto crítico (ou ponto de estacionaridade) de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se se verifica uma das seguintes situações:

1. $\nabla f(p) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$)
2. não existe pelo menos uma das derivadas parciais f_{x_i} em p.

Proposição

Se p é um extremante local de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ então p é um ponto crítico de f.

Consequência: Se p não é um ponto crítico de f então p não pode ser um extremante de f.

Como se pode saber se um ponto crítico é ou não um extremo local?

Há vários critérios para obter a resposta mas aqui optamos por um critério que usa as derivadas de segunda ordem da função.

Sejam $f:\ D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $p\in intD$.

$$Hf(p)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{bmatrix}$$

é a matriz hessiana de f no ponto p.

De acordo com o Teorema de Schwarz esta matriz é simétrica.

1. se todos os menores principais da matriz $Hf(p)$ forem positivos,

$$H_1 > 0,\ H_2 > 0, H_3 > 0, \ldots$$

   p é um ponto de ponto de mínimo local;

2. se os menores principais da matriz $Hf(p)$ forem alternadamente negativos e positivos, sendo o primeiro negativo,

$$H_1 < 0,\ H_2 > 0, H_3 < 0, \ldots$$

   p é um ponto de ponto de máximo local;

3. Se existir um menor de ordem par negativo ou dois menores de ordem ímpar com sinais diferentes então há um ponto de sela.

Caso $n = 2$:

- se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0$ e $\det(Hf(p)) > 0$ então p é ponto de mínimo;
- se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$ e $\det(Hf(p)) > 0$ então p é ponto de máximo;
- se $\det(Hf(p)) < 0$ então p é ponto de sela.

Exemplo 13.

Calcular e classificar os extremos locais de

$$f(x,y) = -3x^2\, y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$$

✓ pontos críticos: $\nabla f(x,y) = \left(4x - 6xy, -3x^2 + 4y - 3y^2\right) = (0,0)$.
O sistema

$$\begin{cases} 4x - 6xy & = & 0 \\ -3x^2 + 4y - 3y^2 & = & 0 \end{cases}$$

tem soluções

$$(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), \ \ (0,0), \ \ (0, \frac{4}{3}) \ \ \text{e} \ (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

Estes pontos são candidatos a extremantes.

Exemplo 13.

Calcular e classificar os extremos locais de

$$f(x,y) = -3x^2\,y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$$

✓ Matriz Hessiana, num ponto genérico (x,y)

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 4-6y & -6x \\ -6x & 4-6y \end{bmatrix}.$$

Exemplo 13.

Calcular e classificar os extremos locais de

$$f(x, y) = -3x^2 y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$$

✓ Matriz Hessiana, num ponto genérico (x, y)

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 4 - 6y & -6x \\ -6x & 4 - 6y \end{bmatrix}.$$

✓ $Hf((-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad Hf(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$

$\det(Hf(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})) = \det(Hf(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})) = -16 < 0 \Rightarrow$
$(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ são pontos de sela.

Exemplo 13.

Calcular e classificar os extremos locais de

$$f(x,y) = -3x^2y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$$

✓ Matriz Hessiana, num ponto genérico (x, y)

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 4-6y & -6x \\ -6x & 4-6y \end{bmatrix}.$$

✓ $Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$ e $\det(Hf(0,0)) > 0 \Rightarrow (0,0)$ é ponto de mínimo.

Exemplo 13.

Calcular e classificar os extremos locais de

$$f(x,y) = -3x^2\,y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$$

✓ Matriz Hessiana, num ponto genérico (x, y)

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} 4-6y & -6x \\ -6x & 4-6y \end{bmatrix}.$$

✓ $Hf(0, \frac{4}{3}) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \frac{4}{3}) < 0$ e $\det(Hf(0, \frac{4}{3})) > 0 \Rightarrow (0, \frac{4}{3})$ é ponto de máximo.

Outros exemplos:

- http://elearning.ua.pt, Guião 4;
- http://siacua.web.ua.pt (página dedicada aos temas de estudo autónomo).

Seja f uma função real de domíio $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

- $p \in D$ é um ponto de mínimo absoluto (ou global) se $f(p)$ é o menor valor atingido pela função em todo o seu domínio, i.e., $f(p) \leq f(x)$ para todo o $x \in D$
- p é um ponto de máximo absoluto (ou global) se $f(p)$ é o maior valor atingido pela função em todo o seu domínio, i.e., f se $f(p) \geq f(x)$ para todo o $x \in D$
- mínimos e máximos globais são chamados extremos globais
- o ponto p no qual é atingido um extremo global chama-se extremante global.

É claro que todo o extremo global é um extremo local, mas nem todos os extremos locais são globais.

Teorema de Weirstrass

Se $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua, definida num conjunto D compacto então f atinge em D um mínimo e um máximo absolutos.

Teorema de Weirstrass

Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua, definida num conjunto D compacto então f atinge em D um mínimo e um máximo absolutos.

A demonstração pode ver consultada, por exemplo, em

Lima,E.L., Curso de Análise, vol 2, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e aplicada, 1989.

Teorema de Weirstrass

Se $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua, definida num conjunto D compacto então f atinge em D um mínimo e um máximo absolutos.

O Teorema de Weirstrass assegura a existência de mínimo e máximo globais para uma função contínua definida num compacto, MAS não fornece um processo para os calcular.

Os extremantes globais de uma função podem ocorrer em pontos situados <u>no interior</u> do seu domínio, ou nos pontos <u>da fronteira</u> desse conjunto.

1. obter os pontos críticos da função, isto é, pontos onde se anula o seu gradiente e pontos onde não existe alguma das derivadas parciais (note-se que se consideram aqui apenas os pontos interiores de D);
2. considerar os pontos extremantes da restrição da função à fronteira do seu domínio;
3. calcular os valores da função em todos os pontos encontrados nos passos anteriores; o menor valor será o mínimo absoluto da função e o maior valor será o máximo absoluto da função.

Exemplo 14.

Calcular o valor máximo e o valor mínimo atingidos pela função

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1$$

no retângulo $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

1. D_f é um conjunto limitado e fechado e a função é de classe C^∞ (vale o T. W.)
2. pontos críticos:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4xy = 0 \\ 2y - 2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = y = 0$$

logo, $(0,0)$ é o único ponto crítico de f no interior de D.

Exemplo 14.

Calcular o valor máximo e o valor mínimo atingidos pela função

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1$$

no retângulo $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

3. comportamento de f em fr(D):

note-se que a fronteira de D é o conjunto de pontos que pertencem aos segmentos de reta

$$\begin{array}{lcl} L_1 & : & -1 \leq x \leq 1,\ y = -1, \\ L_2 & : & -1 \leq x \leq 1,\ y = 1, \\ L_3 & : & x = -1,\ -1 \leq y \leq 1, \\ L_4 & : & x = 1,\ -1 \leq y \leq 1. \end{array}$$

Exemplo 14.

Calcular o valor máximo e o valor mínimo atingidos pela função

$$f(x, y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1$$

no retângulo $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

3. comportamento de f em fr(D):

Em L_1 : $\quad -1 \leq x \leq 1,\ y = -1$,: podemos definir uma função de uma variável apenas por

$$g(x) = f(x, -1) = 6x^2$$

com $D_g = [-1, 1]$. Encontrar os extremos absolutos de $f(x, y)$ sobre L_1 é equivalente ao problema de encontrar os extremos absolutos de $g(x)$ em $[-1, 1]$.
Tem-se,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

que é ponto interior do domínio de g. Calculando o valor desta função neste ponto e nos pontos fronteiros de $[-1, 1]$, vem

$$g(-1) = f(-1, -1) = 6,\ g(1) = f(1, -1) = 6,\ g(0) = f(0, -1) = 0.$$

Exemplo 14.

Calcular o valor máximo e o valor mínimo atingidos pela função

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1$$

no retângulo $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

3. comportamento de f em fr(D):

Em L_2 : $-1 \leq x \leq 1,\ y = 1$, podemos definir agora a função $g(x) = f(x,1) = 2x^2$ em $[-1,1]$. Tem-se, neste caso,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

Vem,

$$g(-1) = f(-1,1) = f(1,1) = g(1) = 2,\ g(0) = f(0,1) = 0.$$

Exemplo 14.

Calcular o valor máximo e o valor mínimo atingidos pela função

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1$$

no retângulo $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

3. comportamento de f em fr(D):

Em L_3 : $x = -1,\ -1 \leq y \leq 1$ definimos

$$g(y) = f(-1,y) = 5 - 2y - y^2$$

com $y \in [-1,1]$. Temos então,

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow -2 - 2y = 0 \Leftrightarrow y = -1,$$

pelo que g não tem pontos críticos no interior de $[-1,1]$ logo também não tem aí extremos.
Resta então calcular o valor da função nos pontos fronteiros do seu domínio

$$g(-1) = f(-1,-1) = 6,\ g(1) = f(-1,1) = 2.$$

Exemplo 14.

Calcular o valor máximo e o valor mínimo atingidos pela função

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1$$

no retângulo $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

3. comportamento de f em fr(D):

Em L_4 : $x = 1,\ -1 \leq y \leq 1$, define-se

$$g(y) = f(1,y) = 5 - 2y - y^2$$

com $y \in [-1,1]$, como no caso anterior. Neste caso,

$$g(-1) = f(1,-1) = 6,\ g(1) = f(1,1) = 2.$$

Exemplo 14.

Calcular o valor máximo e o valor mínimo atingidos pela função

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - 2x^2y + 1$$

no retângulo $D = [-1,1] \times [-1,1]$.

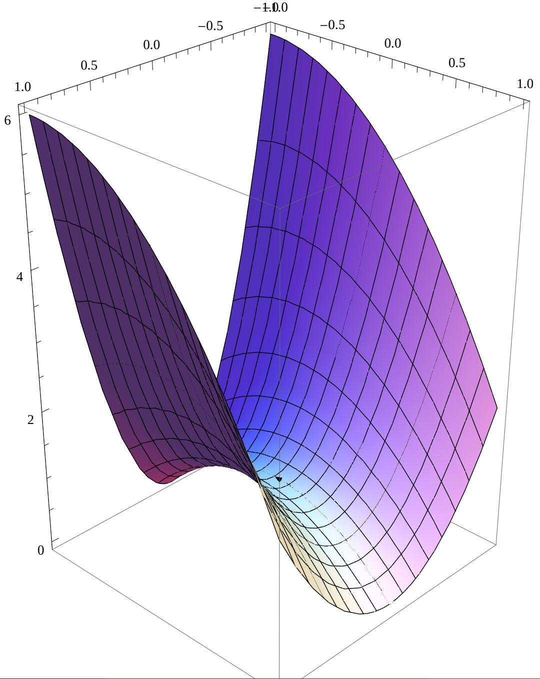
3. comportamento de f em fr(D):

Finalmente, comparando os valores da função em todos os pontos candidatos a extremantes,

$$\begin{array}{ll} f(0,-1) = f(0,1) = 0, & f(0,0) = 1, \\ f(-1,1) = f(1,1) = 2, & f(-1,-1) = f(1,-1) = 6, \end{array}$$

- o máximo absoluto de f é 6; $(-1,-1)$ e $(1,-1)$ são maximizantes.
- o mínimo absoluto é 0;$(0,-1)$ e $(0,1)$ são minimizantes.

Note-se que o único ponto crítico do interior do domínio de f não é um extremante, há dois maximizantes situados nos vértices do retângulo D e há dois minimizantes situados em dois lados do retângulo D.


−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
6
4
2
0

Problema

Queremos, agora, determinar os pontos extremantes da função

$$f\ :\ D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x,y) = x^2 + 2y^2,$$

sendo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Problema

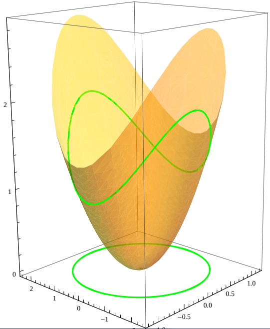
Queremos, agora, determinar os pontos extremantes da função

$$f\ :\ D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{dada por} \quad f(x,y) = x^2 + 2y^2,$$

sendo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Este é um problema de extremos condicionados ou extremos ligados - consiste em determinar os possíveis pontos extremantes de uma função sujeitos a equações ditas equações de ligação - que resolvemos usando o método dos multiplicadores de Lagrange.



Determinar os possíveis pontos extremantes (e os extremos) de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável no seu domínio, que pertencem ao conjunto

$$C = \{(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\},$$

onde g é uma função de classe C^1 num aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo C e $C \subseteq D$, Determinar os possíveis pontos extremantes (e os extremos) de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável no seu domínio, que pertencem ao conjunto

$$C = \{(x, y) \subseteq \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\},$$

onde g é uma função de classe C^1 num aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo C e $C \subseteq D$,

que se escreve, geralmente,

$$\begin{array}{rl} max/min & f(x, y) \\ s.a. & g(x, y) = 0. \end{array}$$

Pode provar-se que, se $(x_0, y_0) \in C$ é um extremante de f,

- os vetores $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ têm a mesma direção, isto é, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$
- Esta condição é necessária para que $(x0, y0)$ seja um ponto extremante de f mas não é suficiente.

Assim, o Método dos multiplicadores de Lagrange consiste em determinar todos os pontos (x, y) tais que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

para algum escalar λ, e estudar a natureza de cada um deles.

Assim, o Método dos multiplicadores de Lagrange consiste em determinar todos os pontos (x, y) tais que

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases}$$

para algum escalar λ, e estudar a natureza de cada um deles.

Ou, de modo equivalente, determinar os pontos de estacionaridade da função auxiliar que se denomina função de Lagrange ou Lagrangeano

$$L = f - \lambda g.$$

A λ chama-se multiplicador de Lagrange.

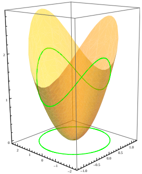
Para uma função f real de duas variáveis sujeita a uma equação de ligação $g(x, y) = 0$:

1. determinar os pontos críticos da função de Lagrange, $L = f - \lambda g$, ou seja, as soluções do sistema

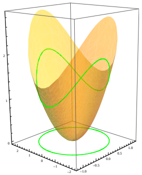
$$\begin{cases} L_x & = & 0 \\ L_y & = & 0 \\ L_\lambda & = & 0 \end{cases}$$

2. decidir quais desses pontos são, de facto, extremantes de f sujeita a essa condição.

$$\begin{array}{rl} max/min & x^2 + 2y^2 \\ s.a. & x^2 + y^2 = 1. \end{array}$$



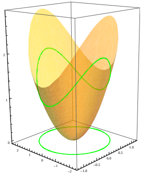
$$\begin{array}{rl} max/min & x^2+2y^2 \\ s.a. & x^2+y^2=1. \end{array}$$



$L(x,y,\lambda) = x^2+2y^2-\lambda(x^2+y^2-1)$ (Lagrangeano)

$$\left\{\begin{array}{lcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x-2\lambda x & = & 0 \\ 4y-2\lambda y & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2x(1-\lambda) & = & 0 \\ 2y(2-\lambda) & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rl} max/min & x^2+2y^2 \\ s.a. & x^2+y^2=1. \end{array}$$



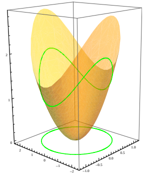
$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ (Lagrangeano)

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2\lambda x & = & 0 \\ 4y-2\lambda y & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda) & = & 0 \\ 2y(2-\lambda) & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 1 \end{cases}$$

Da 1^a equação resulta $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

- Se $x = 0$, vem $y = \pm 1$ (da 3^a)
  $\therefore (0, -1)e(0, 1)$ são candidatos a extremantes.
- Se $x \neq 0$, então $\lambda = 1$; neste caso, $y = 0$ (da 2^a) donde $x = \pm 1$ (da 3^a)
  $\therefore (-1, 0)e(1, 0)$ são candidatos a extremantes.

$$\begin{array}{rl} max/min & x^2 + 2y^2 \\ s.a. & x^2 + y^2 = 1. \end{array}$$



$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ (Lagrangeano)

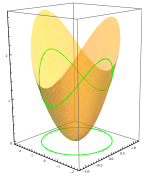
$$\left\{ \begin{array}{lcl} L_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x - 2\lambda x & = & 0 \\ 4y - 2\lambda y & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2x(1-\lambda) & = & 0 \\ 2y(2-\lambda) & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Da 1^a equação resulta $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

- Se $x = 0$, vem $y = \pm 1$ (da 3^a)
  $\therefore (0, -1) e (0, 1)$ são candidatos a extremantes.
- Se $x \neq 0$, então $\lambda = 1$; neste caso, $y = 0$ (da 2^a) donde $x = \pm 1$ (da 3^a)
  $\therefore (-1, 0) e (1, 0)$ são candidatos a extremantes.

Da 2^a equação resulta $y = 0$ ou $\lambda = 2$...obtêm-se, neste caso, os mesmos pontos.

$$\begin{array}{rl} max/min & x^2+2y^2 \\ s.a. & x^2+y^2=1. \end{array}$$



$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ (Lagrangeano)

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L_y(x,y,\lambda) & = & 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2\lambda x & = & 0 \\ 4y - 2\lambda y & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda) & = & 0 \\ 2y(2-\lambda) & = & 0 \\ x^2 + y^2 & = & 1 \end{cases}$$

Da 1^a equação resulta $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

- Se $x = 0$, vem $y = \pm 1$ (da 3^a)
  $\therefore (0, -1) e (0, 1)$ são candidatos a extremantes.
- Se $x \neq 0$, então $\lambda = 1$; neste caso, $y = 0$ (da 2^a) donde $x = \pm 1$ (da 3^a)
  $\therefore (-1, 0) e (1, 0)$ são candidatos a extremantes.

Da 2^a equação resulta $y = 0$ ou $\lambda = 2$...obtêm-se, neste caso, os mesmos pontos. Como

$f(-1, 0) = f(1, 0) = 1$ e $f(0, -1) = f(0, 1) = 2$, o máximo da função sujeita à condição dada é 2, atingido nos pontos $(0, -1)$ e $(0, 1)$ e o mínimo é 1, atingido nos pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$.

- Carvalho, P., Descalço, L., Oliveira,P., Guião 4, em http://elearning.ua.pt
- Apostol T., Cáculo vol 2, Ed Reverté.Lda, 1993.
- Breda, A., Nunes da Costa, J., *Cálculo com Funções de Várias Variáveis*, Apêndice B, Ed. McGrawHill, 1996.
- Lima, E.L., *Curso de análise*, Volume 2. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1989.
- Larson, Hostetler and Edwards., Cálculo vol 2, Oitava edição, McGraw-Hill 2006.
- Stewart J., Cálculo vol II, 5^a edição, Cengage Learning, São Paulo, 2008.
- http://siacua.web.ua.pt (página dedicada aos temas de estudo autónomo)
- http://www.slimy.com/~steuard/teaching/tutorials/Lagrange.html