Aula 11

• Limites de funções:

$\boxed{\text{Só é importante ter a noção}}$

Vamos expôr a teoria para funções de duas variáveis: $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

→ A generalização para várias variáveis é imediata.

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto z = f(x,y)$$

Define-se no slide: $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} \left[f(x,y) \right]$, onde (a,b) é um ponto de acumulação de D

Se, para qualquer sucessão de elementos de D

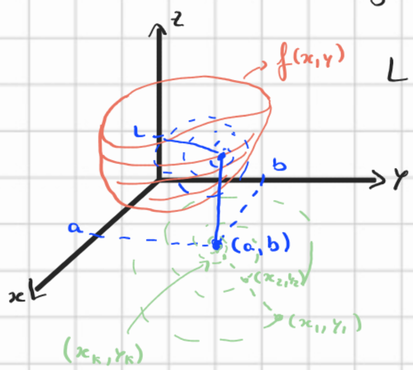
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}, \dots \quad \begin{matrix} \xrightarrow{k=+\infty} a \\ \longrightarrow b \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{k \to +\infty} x_k = a \\ \lim\limits_{k \to +\infty} y_k = b \end{cases}$$, a correspondente sucessão das imagens

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right), f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right), \dots, f\left(\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}\right), \dots$$ tender para L,

$$\overset{\shortparallel}{z_0}, \overset{\shortparallel}{z_1}, \dots, \overset{\shortparallel}{z_k}, \xrightarrow{k \to +\infty} L$$

então diz-se que:



$$L = \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$$

ex. Ⓐ Slide #29

Seja $f(x,y) = \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$, $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calcule $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$

Verificamos que $(0,0)$ é ponto de acumulação de D_f.

Consideramos qualquer sucessão $\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$ de elementos de D convergente para $(0,0)$, ou seja,

a sucessão arbitrária

$$\begin{cases} x_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \\ y_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$, conduz a que a sucessão das imagens:

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k \to +\infty} \frac{3x_k^2 y_k}{x_k^2 + y_k^2} = 3 \lim_{x \to +\infty} \Big[\underbrace{y_k}_{\text{infinitésimo}} \times \underbrace{\overbrace{\frac{x_k^2}{x_k^2 + y_k^2}}^{\in [0,1]}}_{\text{função limitada}} \Big] = 0 \text{, então } L = \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$$

ex. (B) Seja $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$, $D_f = \mathbb{R}^2$

1.ª sucessão será

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/k \end{bmatrix}$$

claramente $\begin{cases} \lim_{k\to+\infty} x_k = 0 \\ \lim_{k\to+\infty} y_k = 0 \end{cases}$

A correspondente sucessão das imagens é:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1/k \end{bmatrix}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \underset{L_1}{\underset{\parallel}{1}}$$

2.ª sucessão será

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/k \end{bmatrix}$$

claramente $\begin{cases} \lim_{k\to+\infty} x_k = 0 \\ \lim_{k\to+\infty} y_k = 0 \end{cases}$

A correspondente sucessões das imagens é:

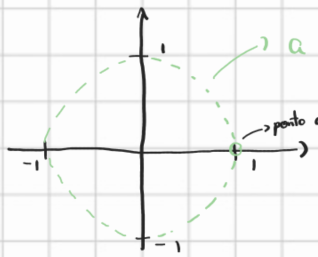
$$f\left(\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1/k \end{bmatrix}\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \underset{L_2}{\underset{\parallel}{0}}$$

- Como $L_1 \neq L_2$, então diz-se que não existe o limite: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

ex. (C) Calcula, caso exista: $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{1-\cos(\overbrace{1-x^2-y^2}^{z})}{\underbrace{1-(x^2+y^2)}_{z}}$ $f(x,y)$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \neq 1\}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| \neq 1\}, \text{ onde } \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$



a verde estão os pontos que não pertencem a Df

Seja $\left(\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}\right)$ uma qualquer sucessão de pontos de D_f convergente para $P = (1,0)$

Ora, definindo a sucessão auxiliar:

$$z_k = 1 - x_k^2 - y_k^2 = 1 - \|(x_k, y_k)^2\|$$

$$\lim_{k\to+\infty} z_k = \lim_{k\to+\infty} \left[1 - \|(x_k,y_k)^2\|\right] = 0$$

Então:

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \overbrace{\lim_{z\to0} \frac{1-\cos z}{z}}^{\text{limite a uma variável}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{z\to0} \frac{\sin z}{1} = 0$$

R. Cauchy

· Continuidade:

ex. (D) Estude continuidades.

D_1: $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, $D_f = \mathbb{R}^2$

A função é um polinómio a duas variáveis, logo é contínua em D_f

D_2: $f(x,y,z) = x^3y^2 - xy + y^3 - 4$, $D_f = \mathbb{R}^3$

D_3: $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{xy+1}$, $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -\frac{1}{x}\}$

$xy+1 \neq 0$

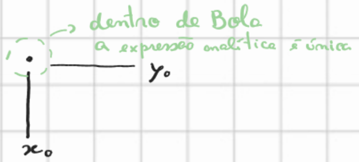
$xy \neq -1 \rightarrow y \neq -\frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Contínua, quociente de funct. contínuas

+ 2 Exemplos tenho foto 28/03

· Derivadas parciais:

- Usam-se Regras de Derivação no ponto (x_0, y_0) quando a função tem uma expressão analítica única numa Bola centrada em (x_0, y_0)



ex (E) Calcule as derivadas parciais de 1.ª ordem para

$\boxed{1}$ $f(x,y) = \sin(x+3y) - \sin x \sin y$ no ponto $(\frac{\pi}{3}, 0)$

$D_f = \mathbb{R}^2$, posso usar regras de derivação:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

δ - delta grego minúsculo

∂ - "partial"

Fixa-se

$$= [\sin(x+3y) - \sin x \sin y]'_x$$

$$= [\sin(x+3y)]'_x - [\sin x \sin y]'_x$$

$$= \cos(x+3y) \cdot (x+3y)'_x - \sin y \cos x$$

$$= \cos(x+3y) - \sin y \cos x \longrightarrow f'_x(\tfrac{\pi}{3}, 0) = \cos(\tfrac{\pi}{3} + 3(0)) - \sin(0)\cos(\tfrac{\pi}{3})$$

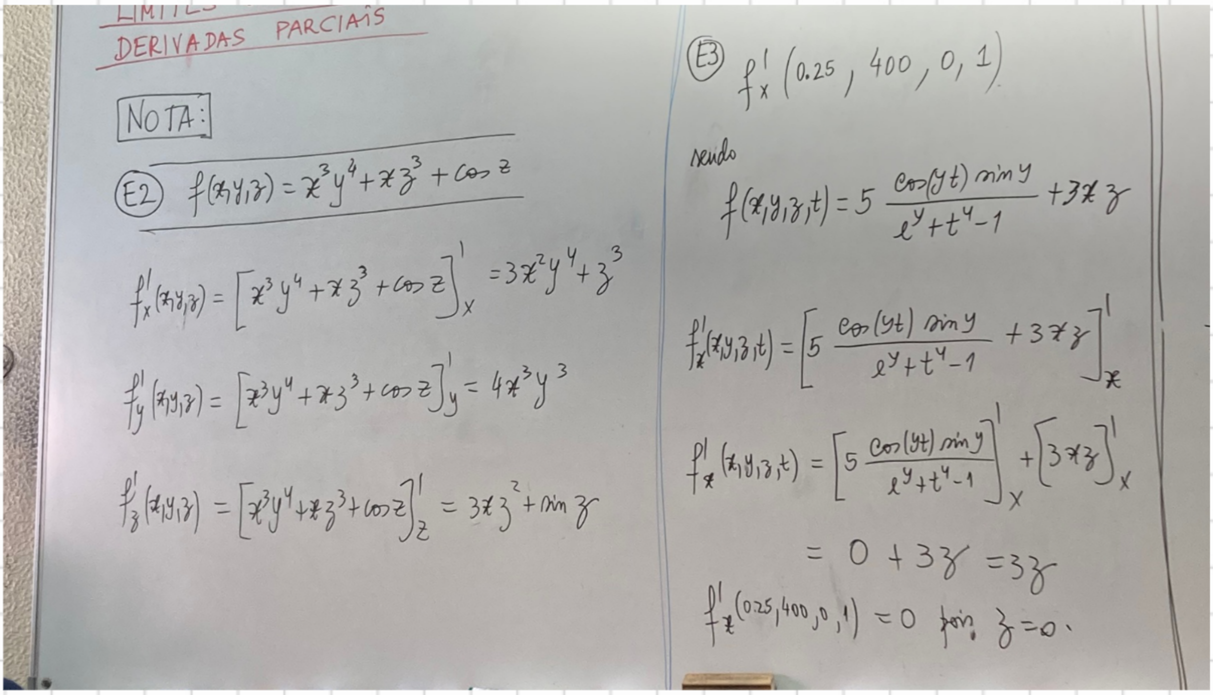
$$= \cos(\pi/3) = 1/2$$

$$f'_y(x,y) = [\sin(x+3y)]'_y - [\sin(x)\sin(y)]'_y$$

$$= \cos(x+3y)(x+3y)'_y - \sin x \cos y$$

$$= 3\cos(x+3y) - \sin x \cos y \longrightarrow f'_y(\pi/3, 0) = 3\cos(\tfrac{\pi}{3} + 3(0)) - \sin(\pi/3)\cos(0)$$

$$= 3\,\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$



tenho foto 28/03 , novo exercício