Aula 13

Extremos relativos em Pontos Interiores (funções de classe C^2)

Revisão do caso $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dado em Cálculo 1)

Teorema de Fermat

Se D_f é aberto — todos os pontos de D_f são interiores

Se f é diferenciável em D_f — f tem derivadas finitas em $x \in D_f$

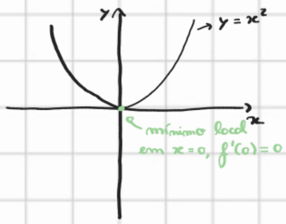
Se f atinge $\underbrace{\text{máximo / mínimo}}_{\text{extremo}}$ local em $x = a \in D_f$ — ponto interior

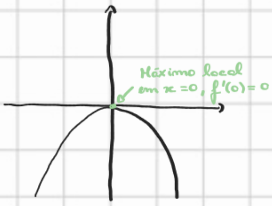
Então: $f'(a) = 0$

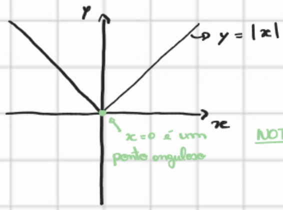
Nota:

- $x = a$ é o $\underbrace{\text{maximizante / minimizante}}_{\text{extremante}}$ de f

- O recíproco não é verdadeiro no caso geral:







NOTE: $\begin{cases} f'_+(x) = 1 \\ f'_-(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Logo $f'(x)$ não existe

Outros exemplos:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

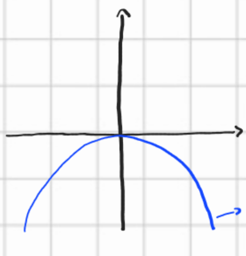
$f''(x) = 2$

$x = 0$ é minimizante

pois

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 2 > 0 \end{cases}$$

função convexa



$f(x) = -x^2$

$f'(x) = -2x$

$f''(x) = -2$

$x = 0$ é maximizante

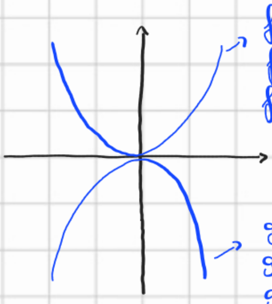
pois

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = -2 < 0 \end{cases}$$

função concava

$f(x)=x^3$
$f'(x)=3x^2$
$f''(x)=6x$

$x=0$ não é extremante pois $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f''(0)=0 \end{cases}$



$f(x)=x^4$
$f'(x)=4x^3$
$f''(x)=12x^2$

$x=0$ é minimizante mas $\begin{cases} f'(0)=0 \\ f''(0)=0 \end{cases}$

$g(x)=-x^4$
$g'(x)=-4x^3$
$g''(x)=-12x^2$

$\begin{cases} g'(0)=0 \\ g''(0)=0 \end{cases}$

Se $f'(0)=0$ e $f''(0)=0$, nada se pode concluir ($x=0$ pode não ser extremante, mas pode ser minimizante ou maximizante)

Processo de Cálculo extremantes: $(f \in \mathcal{C}^2(D_f))$

↳ Aberto

$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. Calcular candidatos a extremantes resolvendo a equação de estacionaridade $f'(x)=0$

2. Calcular a 2.ª derivada de f em cada ponto de estacionaridade $\boxed{\text{Matriz Hessiana}}$

- Se $f''(a)>0$ então a é minimizante
- Se $f''(a)<0$ então a é maximizante
- Se $f''(a)=0$ nada se pode concluir → Usar quadro de variação ou outros processos para ver se concluir algo

$\boxed{\text{Slide \#24}}$

$$f(x,y) = x^2+y^2$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

<u>Sistema de Estacionariedade:</u>

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$(0,0)$ é o único ponto de estacionariedade

Como $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ então $(0,0)$ é o único candidato a extremante

Matriz Hessiana (2 vars.)

Teorema de Schwarz (funções de classe $\mathcal{C}^2$)
↳ $f_{xy} = f_{yx}$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

ex:

$$f(x,y) = x^2y - 2xy^2$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy - 2y^2 \\ x^2 - 4xy \end{bmatrix}$$

$$H f(x,y) = \begin{bmatrix} (2xy-2y^2)'_x & (2xy-2y^2)'_y \\ (x^2-4xy)'_y & (x^2-4xy)'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x-4y \\ 2x-4y & -4x \end{bmatrix}$$

Matriz Hessiana reúne todas as derivadas de 2.ª ordem

Teste da 2.ª Derivada

Sejam $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ numa função de classe C^2 e $p \in \text{int}(D)$.
Se p é um ponto crítico de f então tem-se o seguinte.

$\boxed{1}$ Se todos os menores principais liderantes da matriz $H_f(p)$ são positivos

$$H_1(p) > 0,\ H_2(p) > 0,\ H_3(p) > 0,\ \dots$$

então p é um mínimo local

$\boxed{2}$ Se os menores principais liderantes da matriz $H_f(p)$ são alternadamente negativos e positivos, sendo o primeiro negativo

$$H_1(p) < 0,\ H_2(p) > 0,\ H_3(p) < 0,\ \dots$$

então p é um máximo local

$\boxed{3}$ Se existir um menor de ordem par negativo ou dois menores de ordem ímpar, então p é um ponto sela

Caso 2x2

$H_1 > 0$, $H_2 > 0$ $\triangleright$ Mínimo

$H_1 < 0$, $H_2 > 0$ $\triangleright$ Máximo

$H_2 < 0$ $\triangleright$ Sela

Caso 3x3

$H_1, H_2, H_3 > 0$ $\triangleright$ Mínimo

$H_1 < 0,\ H_2 > 0,\ H_3 < 0$ $\triangleright$ Máximo

$H_2 < 0$ $\triangleright$ Sela

$H_1 \cdot H_3 < 0$ $\triangleright$ Sela

Os menores principais liderantes são determinantes das submatrizes principais:

$\boxed{\text{Caso } 2 \times 2}$

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \nearrow H_1 = \det([a]) = a \\ \searrow H_2 = \det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \end{array}$$

$\boxed{\text{Caso } 3 \times 3}$

$$H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$H_1 = a$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$ → ex. calcular pela Regra de Laplace

ex:

$$f(x,y) = -3x^2y - y^3 + 2x^2 + 2y^2 + 1$$

$D_f = \mathbb{R}^2$

$f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} -6xy + 4x \\ -3x^2 - 3y^2 + 4y \end{bmatrix}$$

O sistema de estacionariedade é:

$$\begin{cases} -6xy + 4x = 0 \\ -3x^2 - 3y^2 + 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(-6y+4) = 0 \\ -3x^2 - 3y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -3y^2 + 4y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -6y + 4 = 0 \\ -3x^2 - 3y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y(-3y+4) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2/3 \\ -3x^2 - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 4/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = \frac{4}{9} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 4/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2/3 \\ y = 2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2/3 \\ y = 2/3 \end{cases}$$

Os pontos de estacionariedade são:

$$P_0 = (0,0)$$
$$P_1 = (0, 4/3)$$
$$P_2 = (2/3, 2/3)$$
$$P_3 = (-2/3, 2/3)$$

Para classificar os pontos críticos calcula-se a matriz Hessiana:

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} -6xy + 4x \\ -3x^2 - 3y^2 + 4y \end{bmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} (-6xy+4x)'_x & (-6xy+4x)'_y \\ (-3x^2-3y^2+4y)'_x & (-3x^2-3y^2+4y)'_y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6y+4 & -6x \\ -6x & -6y+4 \end{bmatrix}$$

$\boxed{P_0 = (0,0)}$

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} H_1 = 4 \\ H_2 = 4 \times 4 = 16 \end{matrix}$$

$\left.\begin{matrix} H_1 > 4 \\ H_2 > 16 \end{matrix}\right\}$ Mínimo

$\boxed{P_1 = (0, 4/3)}$

$$Hf(0, 4/3) = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} H_1 = -4 \\ H_2 = 16 \end{matrix}$$

$\left.\begin{matrix} H_1 < 0 \\ H_2 > 0 \end{matrix}\right\}$ Máximo

$\boxed{P_2 = (2/3, 2/3)}$

$$H_f(2/3, 2/3) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} H_1 = 0 \\ H_2 = -16 \end{matrix}$$

$H_2 < 0 \}$ Sela

$\boxed{P_3 = (-2/3, 2/3)}$

$$H_f(-2/3, 2/3) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} H_1 = 0 \\ H_2 = -16 \end{matrix}$$

$H_2 < 0 \}$ Sela

Resposta:

$P_0 = (0,0) \rightarrow$ Mínimo
$P_1 = (0, 4/3) \rightarrow$ Máximo
$P_2 = (2/3, 2/3) \rightarrow$ Sela
$P_3 = (-2/3, 2/3) \rightarrow$ Sela