Cálculo II
2015/2016

Luís M. Silva (adaptação)

Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro

Conteúdo

Transformada de Laplace

Definição

Definição 1.1

A **transformada de Laplace** de uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é a função $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

para os valores de $s \in \mathbb{R}$ onde o integral converge.

Exercício 1.1

Use a definição para determinar as transformadas de Laplace de:

(a) $f(t) = 1$

(b) $f(t) = t$

Existência

Teorema 1.1

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponhamos que

(i) f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$;

(ii) existem $a \in \mathbb{R}$, $M > 0$ e $T > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad \forall t \geq T.$$

Então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > a$.

Observação 1.1

(a) o teorema anterior estabelece condições suficientes para a existência de transformada de Laplace de uma função;

(b) às funções que satisfazem (ii) designamos de *funções de ordem exponencial à direita*

Funções diferentes...transformadas iguais?

Observação 1.2

De facto funções diferentes podem ter a mesma transformada de Laplace. Considerem-se as funções

$$f(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad g(t) = \begin{cases} 1, & t \neq 1, t \neq 2 \\ 2, & t = 1 \\ 0, & t = 2 \end{cases}.$$

Verifica-se facilmente que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Mas então, dada a transformada $\frac{1}{s}$, como respondemos à questão

Qual é a função cuja TL é $\frac{1}{s}$?

Voltaremos a este tópico mais tarde.

Propriedades da TL: linearidade

Teorema 1.2

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e duas funções $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponhamos que existem

$$\mathcal{L}\{f\}(s), \text{ para } s > s_f$$
$$\mathcal{L}\{g\}(s), \text{ para } s > s_g$$

Então:

(i) $\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \; s > \max\{s_f, s_g\}$

(ii) $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s), \; s > s_f.$

Exercício 1.2

Determine a Transformada de Laplace de:

(a) $1 + t$

(b) $5 + 3t$

Transformadas de Laplace fundamentais

Observação 1.3

Usando as habituais técnicas de integração (p. ex., integração por partes) e a propriedade de linearidade temos:

(a) $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s-a},\ s > a, a \in \mathbb{R}$

(b) $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2},\ s > 0, a \in \mathbb{R}$

(c) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2},\ s > 0, a \in \mathbb{R}$

(d) $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0, n \in \mathbb{N}_0$

(e) $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{s}{s^2-a^2},\ s > |a|, a \in \mathbb{R}$

(f) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{a}{s^2-a^2},\ s > |a|, a \in \mathbb{R}$

Exercícios

Observação 1.4

As transformadas anteriores farão parte de um formulário, sendo utilizadas para determinar a Transformada de Laplace de funções mais complexas, como se ilustra com o seguinte exercício.

Exercício 1.3

Determine a transformada de Laplace das funções:

(a) $f(t) = t^2 + \cos(3t) + \pi$

(b) $g(t) = 3e^{-2t} + \operatorname{sen}(t/6) + \cosh(4t)$

(c) $h(t) = t^{10} + \frac{e^t}{3} + \cos^2(t)$

(d) $j(t) = \operatorname{senh}(\sqrt{2}t) + \left(\frac{t}{2}\right)^2$

Propriedades da TL: deslocamento na transformada

Teorema 1.3 *(Propriedade do deslocamento na transformada)*

Sejam $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s - \lambda), \quad s > s_f + \lambda.$$

Exercício 1.4

Use a propriedade anterior para obter a Transformada de Laplace de:

(a) $f(t) = e^{2t} t^2$

(b) $g(t) = e^{-3t} \mathrm{sen}(2t)$

(c) $h(t) = e^{-t} \cosh(4t)$

Propriedades da TL: transformada do deslocamento

Teorema 1.4 *(Propriedade da transformada do deslocamento)*

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$ e nula em $\mathbb{R}^-$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{L}\{f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s), \quad s > s_f$$

Exercício 1.5

Use a propriedade anterior para obter a Transformada de Laplace de:

(a) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ 1 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$

(b) $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \pi \\ \text{sen}(t-\pi) & \text{se } t \geq \pi \end{cases}$

Propriedades da TL

Teorema 1.5

Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$ e $a \in \mathbb{R}^+$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > as_f$$

Exercício 1.6

Use a propriedade anterior para obter a Transformada de Laplace de:

(a) $m(t) = \cos(4t)$

(b) $n(t) = \frac{t^2}{2}$

(c) $p(t) = e^{3t}$

Propriedades da TL: derivada da transformada

Teorema 1.6 *(Propriedade da derivada da transformada)*

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > s_f.$$

Exercício 1.7

Use a propriedade anterior para obter a Transformada de Laplace de:

(a) $f(t) = te^{2t}$

(b) $g(t) = t^2 \cos(t)$

(c) $h(t) = (t^2 - 3t + 2)\text{sen}(3t)$

Propriedades da TL: transformada da derivada

Teorema 1.7 *(Propriedade da transformada da derivada)*

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua. Admita-se que as derivadas f', f'', ..., $f^{(n-1)}$ são de ordem exponencial e que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua.

Se existem

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s),\ \mathcal{L}\{f'\}(s),\ \ldots,\ \mathcal{L}\{f^{(n-1)}\}(s)$$

para $s > s_f$, $s > s_{f'}$, ..., $s > s_{f^{(n-1)}}$, respectivamente, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \\ - s^{n-3} f''(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),\end{aligned}$$

para $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''},\ \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$.

Exercícios

Exercício 1.8

1. Supondo que $y = f(x)$ e as suas derivadas satisfazem as condições do Teorema anterior, determine em função de $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$ ou $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$
   (a) $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$.
   (b) $\mathcal{L}\{f'''(t)\}$ sabendo que $f(0) = -2$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 1$.
   (c) $\mathcal{L}\{y'' + 3y' - y\}$ sabendo que $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$.
   (d) $\mathcal{L}\{y''' - 2y'' - y'\}$ sabendo que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e $y''(0) = 0$.
2. Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ tal que

$$\begin{cases} y'' + y' = \cos(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Observação 1.5

(i) o problema 2 do Exercício 1.8 é designado de Problema de Cauchy (ou problema de valores iniciais) e será estudado com mais detalhe no âmbito das equações diferenciais.

(ii) Note-se que o objectivo de tais problemas é o de determinar a expressão da função $y = y(t)$. Neste momento, apenas podemos dizer que

$$\mathcal{L}\{y\} = Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)} + \frac{2}{s}$$

(iii) Para determinar y precisamos de uma qualquer *transformação inversa* que nos permita transformar $Y(s)$ em $y(t)$.

(iv) Essa transformação designa-se de **Transformada de Laplace inversa**, que será estudada em seguida.

Definição

Definição 1.2

Seja $F(s)$ uma função definida para $s > \alpha$.
Chama-se **transformada de Laplace inversa de** F que se representa por $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ ou $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ à função f, caso exista, definida em $\mathbb{R}_0^+$ tal que $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, para $s > \alpha$.

Observação 1.6

(a) notar que dado F definida para $s > \alpha$, nem sempre existe $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$

(b) ....no caso de existir, a transformada inversa pode não ser única (veja-se a Observação 1.2) e nesse caso escolhemos a solução que origina uma função contínua (o que é justificado pelo resultado seguinte)

Unicidade para funções contínuas

Teorema 1.8

Sejam f e g duas funções seccionalmente contínuas em $\mathbb{R}_0^+$ tais que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s),$$

para $s > \alpha$. Se f e g são contínuas no ponto $t \in \mathbb{R}^+$, então $f(t) = g(t)$.

Observação 1.7

Por outras palavras, o resultado diz que não podem existir duas funções contínuas distintas com a mesma transformada de Laplace.

Propriedades

Teorema 1.9

Suponha-se que existem $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G\}$. Então

(i) $\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$;

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Teorema 1.10

Se existe $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$, então

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Observação 1.8

Estas propriedades e a tabela de transformadas (tomada agora no sentido inverso) serão usadas para determinar transformadas inversas.

Exercícios

Exercício 1.9

1. Determine a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:

(a) $\dfrac{5}{s^2+25}$

(b) $\dfrac{3}{s-4}$

(c) $\dfrac{4}{s^7}$

(d) $\dfrac{s+2}{s^2+4s+40}$

(e) $\dfrac{5}{s^2-6s-7}$

(f) $\dfrac{1}{s^2-3s}$

(g) $\dfrac{1}{(s-2)^2}$

(h) $\dfrac{s^2+20s+9}{(s-1)^2(s^2+9)}$

2. Determine $y = y(t)$ tal que (use o Exercício 1.8)

$$\begin{cases} y'' + y' = \cos(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$