Aula 26

1ºex: A $\begin{cases} y' - e^{ax} = 0, & a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$

$\mathcal{L}\{y'\} = \mathcal{L}\{e^{ax}\}$

$\Leftrightarrow sY(s) - \cancel{y(0)}^{0} = \frac{1}{s-a}$

$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-a)s}$

$1 = As + B(s-a)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -aB = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{a} \\ B = -\frac{1}{a} \end{cases}$

Logo: $Y(s) = \frac{\frac{1}{a}}{(s-a)} - \frac{\frac{1}{a}}{s}$

$\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} - \frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

$\Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}, \quad x \geq 0, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Podíamos ter feito:

$y' = e^{ax} \Rightarrow y = \int e^{ax}\,dx$

$\Rightarrow y = \frac{1}{a}e^{ax} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$y(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{a} \times 1 + c$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{a}$

Logo:

$y(x) = \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}$

ex: B

$\begin{cases} y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

a) Com o método dos TL's

$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} - 8\mathcal{L}\{y\} = 12\mathcal{L}\{e^{2x}\}$

$\Leftrightarrow s^2Y(s) - s\cancel{y(0)}^{0} - \cancel{y'(0)}^{1} + 2sY(s) + 2\cancel{y(0)}^{0} - 8Y(s) = 12\frac{1}{s-2}$

$\Leftrightarrow s^2Y(s) + 2sY(s) - 8Y(s) - 1 = 12\frac{1}{s-2}$

$\Leftrightarrow Y(s)(s^2 + 2s - 8) = \frac{s+10}{s-2}$

$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s+10}{(s-2)(s^2+2s-8)}$

$$\frac{s+10}{(s-2)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s+4)}$$

$$s^2+2s-8 = (s+p)^2+q$$
$$= s^2+2ps+p^2+q$$
$$\begin{cases} p=1 \\ -8 = 1+q \end{cases} \quad \begin{cases} p=1 \\ q=-9 \end{cases}$$
$$\Rightarrow s^2+2s-8 = (s+1)^2-9$$
$$(s+1)^2-9=0 \Leftrightarrow s=2 \lor s=-4$$

$$\Leftrightarrow s+10 = A(s-2)(s+4) + B(s+4) + C(s-2)^2$$
$$\Leftrightarrow s+10 = s^2A + 2sA - 8A + Bs + 4B + s^2C - 4sC + 4C$$
$$\Leftrightarrow s+10 = s^2(A+C) + s(2A+B-4C) + (-8A+4B+4C)$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B-4C=1 \\ -8A+4B+4C=10 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-C \\ -6C = 1-B \\ \text{———} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ C = \frac{B-1}{6} \\ \frac{8}{6}(B-1) + 4B + \frac{4}{6}(B-1) = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ 8B-8+24B+4B-4 = 60 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1/6 \\ C = 1/6 \\ B = \frac{72}{36} = 2 \end{cases}$$

$$Y(s) = -1/6\,\frac{1}{(s-2)} + 2\,\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1/6}{(s+4)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\underbrace{\frac{1}{(s-2)^2}}_{a=2}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$y(x) = -\frac{1}{6}e^{2x} + 2e^{2x}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{6}e^{-4x}$$
$$= -\frac{1}{6}e^{2x} + 2e^{2x}x^2 + \frac{1}{6}e^{-4x}$$

b) Usar o MCI (Método da variação das constantes)

$$\boxed{y''+2y'-8y = 12e^{2x}} \quad (E)$$

$$\boxed{y''+2y'-8y=0} \quad (H)$$

$$p(r) = \boxed{r^2+2r-8=0} \quad (C)$$

$$(r+1)^2-9=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r=2 \lor r=-4$$

$$SFS = \{e^{2x}, e^{-4x}\} \Rightarrow y_H(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-4x},\ c \in \mathbb{R}$$

A EDO é equivalente a:

$$\underset{m=2}{y''} + 2y' - 8y = 12\,\underset{m=0}{x^0} \times \underset{\alpha=2}{e^{2x}} \times \cos(\underset{\beta=0}{0}x)$$

$$z = \alpha \pm \beta i = 2 \pm 0i = 2$$

Como $z=2$ é raiz simples de (C) temos $K=1$

Existe então um y_p na forma:

$$y_p(x) = x^{1}\, e^{2x}\, A\, x^0$$
$$= A x e^{2x}$$

$\rightarrow$ Substituindo y_p, y_p' e y_p'' em (E)

- $y_p'(x) = \dots = A\, e^{2x}(2x+1)$
- $y_p''(x) = \dots = A\, e^{2x}(4x+4)$

$$\left[A \cancel{e^{2x}}(4x+4)\right] + 2\left[A \cancel{e^{2x}}(2x+1)\right] - 8\left[A x \cancel{e^{2x}}\right] = 12\cancel{e^{2x}}$$

$\vdots$

$$A\left[\cancel{4x} + 4 + \cancel{4x} + 2 - \cancel{8x}\right] = 12$$

$$A = \frac{12}{6} = 2$$

Logo:
$$y_p(x) = 2x e^{2x}$$

A solução geral de (E) pode obter-se na forma:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} + 2x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Para concretizar c_1 e c_2 usamos:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 2c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -1/6 \\ c_2 = 1/6 \end{cases}$$

Conclusão:

$$y(x) = -\frac{1}{6} e^{2x} + \frac{1}{6} e^{-4x} + 2x e^{2x}$$

c) Usar o MVC (

$$\boxed{y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}} \quad (E)$$

$$\boxed{y'' + 2y' - 8y = 0} \quad (H)$$

$$p(r) = \boxed{r^2 + 2r - 8 = 0} \quad (C)$$

$$(r+1)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r = 2 \vee r = -4$$

$$SFS = \{ e^{-2x}, e^{-4x} \} \Rightarrow y_H(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x}, \; c \in \mathbb{R}$$

Troquei c_1 pa c_2 ˆ∩ˆ

Este método garante que existe uma solução y_p de (E) na forma:

$$y_p(x) = c_1(x) e^{-4x} + c_2(x) x e^{2x}$$

Cumprindo-se:

$$\begin{cases} c_1'(x) e^{-4x} + c_2'(x) e^{2x} = 0 \\ c_1'(x) (e^{-4x})' + c_2'(x) (e^{2x})' = 12 e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) e^{-4x} (2) + \boxed{c_2'(x) e^{2x} (2)} = 0 \\ c_1'(x)(-4) e^{-4x} + \boxed{c_2'(x) e^{2x} (2)} = 12 e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ c_1'(x)(-4) e^{-4x} - c_1'(x) e^{-4x}(2) = 12 e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_\_ \\ c_1'(x)(6) e^{-4x} = -12 e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2'(x) \cancel{e^{2x}} (2) = 4 \cancel{e^{2x}} \\ c_1'(x) = -2 e^{6x} \end{cases} \quad \begin{cases} c_2'(x) = 2 \\ c_1'(x) = -2e^{6x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_2(x) = \int 2 \, dx = 2x \\ c_1(x) = \int -2 e^{6x} dx = -\frac{e^{6x}}{3} \end{cases}$$

↪ Logo: $y_p = 2x e^{2x} - \frac{e^{6x}}{3} e^{-4x}$

$$= e^{2x}\left(2x - \frac{1}{3}\right)$$

A solução geral de (E) vem na forma:

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$= c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} + \left(2x - \tfrac{1}{3}\right) e^{2x}$$

$$= \underbrace{\left(c_1 - \tfrac{1}{3}\right)}_{K_1} e^{2x} + \underbrace{c_2}_{K_2} e^{-4x} + 2x e^{2x}$$

$$= K_1 e^{2x} + K_2 e^{-4x} + 2x e^{2x}$$

A concretização de K_1 e K_2 faz-se exatamente como na alínea anterior:

$$\begin{cases} K_1 = -1/6 \\ K_2 = 1/6 \end{cases} \Longrightarrow$$

Conclusão:

$$y(x) = -\frac{1}{6} e^{2x} + \frac{1}{6} e^{-4x} + 2x\, e^{2x}$$