Séries de Fourier

Funções periódicas

Definição 5.1

Diz-se que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **periódica** se existe $T > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. Ao menor T chamamos **período** de f e dizemos que f é T-periódica.

Observação 5.1

Toda a função definida num intervalo $[a, b[$ ou $]a, b]$ pode ser **estendida** de modo único a $\mathbb{R}$, obtendo-se uma função periódica. Neste caso, $f(x+b-a) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (o período não é necessariamente $b-a$; tome o exemplo de $f(x) = \sin x$ em $[0, 3\pi[$). Se f estiver definida num intervalo $]a, b[$, então a extensão não é única. Se f estiver definida num intervalo $[a, b]$, então pode não ser possível obter uma extensão a $\mathbb{R}$.

Exercício 5.1

Verifique se é possível estender a função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ quando $D = [0, 1[$, $D =]0, 1]$, $D =]0, 1[$ e $D = [0, 1]$.

Definição 5.2

Chama-se **série de Fourier associada à função** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período 2π e integrável em $[-\pi, \pi]$, à série de funções

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)],$$

onde a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ e b_n $(n \in \mathbb{N})$ são chamados de **coeficientes de Fourier de** f e são determinados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx.$$

Para exprimir que a série está associada à função f escrevemos

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}[a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)].$$

Série Trigonométrica de Fourier

Observação 5.2

(a) o facto de considerarmos funções 2π-periódicas na definição de série de Fourier não constitui qualquer restrição; com efeito, toda a função T-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser convertida numa função 2π-periódica $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma $F(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$;

(b) dada a periodicidade da função f, os coeficientes de Fourier no intervalo $[-\pi, \pi]$ coincidem com os coeficientes obtidos em qualquer intervalo da forma $[a, a + 2\pi]$, $a \in \mathbb{R}$;

(c) uma série de Fourier nem sempre é convergente; em caso de convergência, a sua soma é sempre uma função periódica de período 2π e poderá não coincidir com a função inicial;

Observação 5.2(cont.)

(d) dada uma função f definida num intervalo $[-\pi, \pi[$ ou $]-\pi, \pi]$ de amplitude 2π, chamamos também <u>série de Fourier de f</u> à série de Fourier da sua extensão periódica a $\mathbb{R}$ (desde que f seja integrável) e os coeficientes de Fourier relativos à extensão são os mesmos da função f;

(e) No caso em que f (integrável) está definida num intervalo fechado $[-\pi, \pi]$ com amplitude 2π, a sua série de Fourier será aquela obtida com as restrições $f|_{[-\pi,\pi[}$ ou $f|_{]-\pi,\pi]}$ (pois as suas extensões periódicas de período 2π têm a mesma série de Fourier);

Série de Fourier - Exercícios 1

Exercício 5.2

Faça um esboço das seguintes funções e determine a sua série de Fourier:

(a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0[\\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$;

(b) $f(x)$ a função periódica de período 2π definida em $]-\pi, \pi]$ por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in]-\pi, 0] \\ 1 & \text{se } x \in]0, \pi] \end{cases}$;

(c) $f(x)$ a função periódica de período 2π definida em $]-\pi, \pi]$ por $f(x) = x$.

Série de Fourier de funções pares ou ímpares

Observação 5.3

Atendendo a que:

- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ se f é uma função ímpar
- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ se f é uma função par
- o produto de funções pares é uma função par
- o produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar
- produto de funções ímpares é uma função par então a série de Fourier de uma função integrável $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ é simplificada nas seguintes situações:

Série de Fourier de funções pares ou ímpares

Observação 5.3(cont.)

(a) f é par

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\cos(nx)}_{par}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\text{sen}(nx)}_{\text{ímpar}}\, dx = 0$$

(b) f é ímpar

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{ímpar}} \underbrace{\cos(nx)}_{\text{par}}\, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{ímpar}} \underbrace{\text{sen}(nx)}_{\text{ímpar}}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\text{sen}(nx)dx$$

Série de Fourier - Exercícios 2

Exercício 5.3

Faça um esboço das seguintes funções e determine a sua série de Fourier:

(a) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0[\\ 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases};$

(b) $f(x)$ a função periódica de período 2π definida em $]-\pi, \pi]$ por $f(x) = |x|$;

Série de Fourier de senos e cosenos

Definição 5.3

Seja $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função integrável.
Designamos por **extensão par** de f a função

$$f_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, \pi] \\ f(-x) & \text{se } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

Designamos por **extensão ímpar** de f a função

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]0, \pi] \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

Observação 5.4

No caso da extensão ímpar de f pode ser necessário redefinir f na origem.

Convergência de uma série de Fourier

Definição 5.4

Diz-se que uma função é **seccionalmente contínua** num domínio D se é contínua em D excepto possivelmente num número finito de pontos, nos quais os limites laterais são finitos.
Uma função f diz-se **seccionalmente diferenciável** se f e f' são ambas seccionalmente contínuas.

Teorema 5.1

(Teorema de Dirichlet)
Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função 2π-periódica e seccionalmente diferenciável e $c \in \mathbb{R}$. Então a série de Fourier de f converge no ponto c para

$$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$$

onde $f(c^+)$ e $f(c^-)$ são os limites laterais de f no ponto c, à direita e à esquerda respectivamente.

Convergência de uma série de Fourier

Observação 5.5

Nas condições do Teorema anterior, a série de Fourier de f converge pontualmente para a função soma

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \text{ é ponto de continuidade de } f \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \text{se } x \text{ é ponto de descontinuidade de } f \end{cases}$$

Exercício 5.4

Faça um esboço da função soma da série de Fourier das funções seguintes:

(a) f periódica de período 2π definida em $[-\pi, \pi[$ por $f(x) = |x|$

(b) f periódica de período 2π definida em $]-\pi, \pi]$ por $f(x) = -1$ se $x \in]-\pi, 0[$ e $f(x) = 1$ se $x \in [0, \pi]$.

Séries de Fourier: período $2L$

Observação 5.6

Seja $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ integrável. A série de Fourier de f será da forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

onde os coeficientes de Fourier são determinados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$