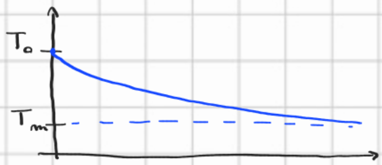
Aula 16

Equações diferenciais ordinárias (EDO)

ex (A) - Lei do arrefecimento de Newton

$T(t)$ → ar à temperatura $t = T_m$ constante



$$\boxed{T'(t) = -K\,(T(t) - T_m)}$$

condição inicial → $T(0) = T_0$

ex (B) - Crescimento Populacional

$P(t)$ → nº de bactérias numa cultura

$$\frac{\frac{dP(t)}{dt}}{P(t)} = K \text{ (constante)}$$

$$\Rightarrow \frac{dP(t)}{dt} = K\,P(t) \Rightarrow \boxed{P'(t) = K\,P(t)}$$

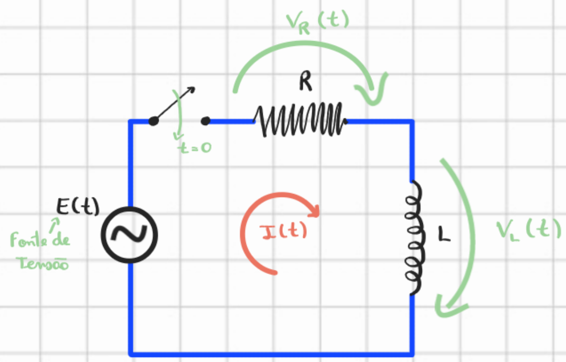
• A solução desta EDO: $P(t) = P_0\, e^{Kt}$

P_0 ↳ constante positiva, $P(0) = P_0$

• Para verificar basta substituir em $P'(t) = K\,P(t)$:

$$\left[P_0 e^{Kt}\right]' = K\left[P_0 e^{Kt}\right] \Rightarrow P_0 \cdot K \cdot e^{Kt} = K \cdot P_0 \cdot e^{Kt}, \ \forall t \in \mathbb{R}_0^+ \ \checkmark$$

ex. (C) - Circuito elétrico RL



Lei das malhas (Kirchoff):

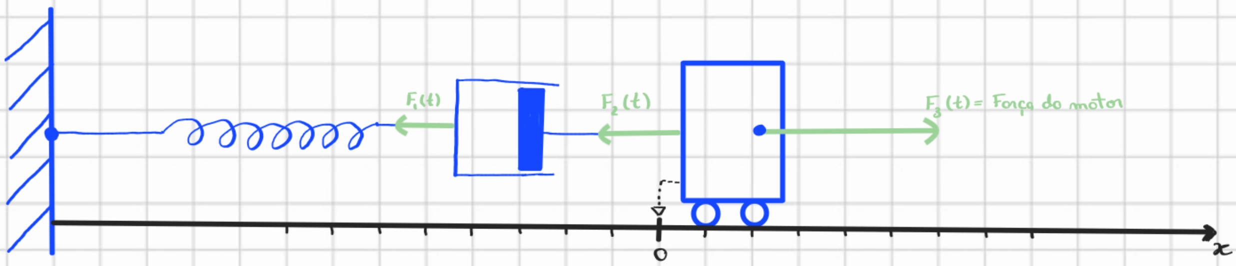
$$\boxed{E(t) = V_R(t) + V_L(t)}$$

$$50 \sin t = R\,I(t) + L\,\frac{dI(t)}{dt}$$

$$50 \sin t = R\,I(t) + L\,I'(t)$$

$I(0) = 0$

ex. (D) - Problema da Mola (movimento elástico, amortecido, forçado)



· Um carro de massa $\underline{m}$ desloca-se sobre o eixo Ox sob ação de uma força elástica:

$$\vec{F}_1(t) = -Kx\,\hat{\imath}\ ,\ K>0$$

e de uma força de amortecimento proporcional à velocidade e dada por:

$$\vec{F}_2(t) = -\overset{\text{coeficiente de atrito}}{c}\ \underset{\text{velocidade} \,\equiv\, v(t) \,=\, x'(t)}{v(t)}\ \hat{\imath}$$

↳ onde $x(t)$ é a função a determinar (posição do carro no instante t)

atua também sobre o carro uma 3ª força gerada no motor do carro que será designada por

$$\vec{F}_3(t) = F_3(t)\,\hat{\imath}$$

2ª Lei de Newton:

$$m\,\vec{a}(t) = \vec{F}_1(t) + \vec{F}_2(t) + \vec{F}_3(t)$$

$$m\,x''(t)\,\cancel{\hat{\imath}} = -Kx(t)\,\cancel{\hat{\imath}} - c\,x'(t)\,\cancel{\hat{\imath}} + F_3(t)\,\cancel{\hat{\imath}}$$

$$\Rightarrow \boxed{m\,x''(t) + c\,x'(t) + K\,x(t) = F_3(t)}$$

EDO de 2ª ordem

Teremos de incluir duas condições iniciais $\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

(...) Resolvendo a EDO e usando as condições iniciais podemos calcular a função $x(t)$

Como resolver EDO's?

—— // ——

EDO básica de uma interpretação direta:

$$y' = F(x) \quad \text{só depende de } x$$

$$\boxed{y = \int F(x)\,dx}$$

EDO de variáveis separáveis (resolvem-se com duas primitivas)

↳ São EDO's que se pode escrever na forma:

$$y' = \frac{P(x)}{Q(y)} \qquad P(x) \text{ só depende de } x,\quad Q(y) \text{ só depende de } y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow Q(y)\,dy = P(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int Q(y)\,dy = \int P(x)\,dx$$

ex: $\boxed{x + yy' = 0}$

• Ando à procura de uma função $y = f(x)$ tal que $\boxed{x + f(x) \cdot f'(x) = 0}$, $\forall x \in$ Intervalo de $\mathbb{R}$

$$x + yy' = 0 \Leftrightarrow yy' = -x$$

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\Leftrightarrow y\,dy = -x\,dy$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int y\,dy = -\int x\,dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + c_1 = -\frac{x^2}{2} + c_2,\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_2 - c_1$$

$C \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y^2 + x^2 = 2(c_2 - c_1)$$

$$\Leftrightarrow y^2 + x^2 = c,\quad c \in \mathbb{R}$$

Se $y > 0$: $y = \sqrt{c - x^2}$, $x > \sqrt{c}$

Se $y < 0$: $y = -\sqrt{c - x^2}$, $x > \sqrt{c}$

ex: $\boxed{xy' - y = 0}$

$$xy' - y = 0 \Leftrightarrow xy' = y$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{y}{x}$$

só depende de x

$$\Leftrightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}},\quad x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

só depende de y

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| - \ln|x| = c_2 - c_1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \underbrace{c_2 - c_1}_{C \in \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right| = c \,, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{e}^{\cancel{\ln}\left|\frac{y}{x}\right|} = \underbrace{e^{c}}_{K \in \mathbb{R}^+}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = K \,, \; K \in \mathbb{R}^+$$

É equivalente a: $\frac{y}{x} = -K \;\vee\; \frac{y}{x} = K \,, \; K \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{y}{x} = K, \; K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow y = Kx \,, \; K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

E se $K = 0$? obtemos a solução trivial $y = 0$

O integrál geral será: $y = Kx \,, \; K \in \mathbb{R}$

ex: $\boxed{y' = 2xy}$

$$y' = 2xy \Leftrightarrow y' = 2 \times \frac{\overset{\text{só depende de } x}{x}}{\underset{\text{só depende de } y}{\frac{1}{y}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{x}{\frac{1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}\, dx = 2\, x\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\, dx = 2 \int x\, dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| + c_1 = \cancel{2}\, \frac{x^2}{\cancel{2}} + c_2$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| - x^2 = \underbrace{c_2 - c_1}_{= C \in \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = x^2 + c$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{x^2 + c}$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{x^2} \cdot \underbrace{e^{c}}_{K}$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{x^2} \cdot K \,, \; K \in \mathbb{R}^+$$

É equivalente a: $y = -e^{x^2} \cdot K \;\vee\; y = e^{x^2} \cdot K \,, \; K \in \mathbb{R}^+$

que é o mesmo que $y = e^{x^2} \cdot K \,, \; K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Reparo agora que $y = 0$ é solução de $y' = 2xy$. Portanto, o integral geral é:

$$y = K e^{x^2} \,, \; K \in \mathbb{R}$$

"ex: $\boxed{y + \dfrac{y'}{\sin x} = 0}$, $x \neq 0$

$$y + \frac{y'}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow y' = -y \sin x$$

$$\Leftrightarrow y' = -\frac{\sin(x)}{\frac{1}{y}}$$

EDO de var. sep.:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x)}{\frac{1}{y}}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{y}\, dy = -\int \sin(x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \cos(x) + c \,,\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln|y|} = e^{\cos(x)} \cdot \underbrace{e^{c}}_{= k \in \mathbb{R}^+}$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{\cos(x)} \cdot k \,,\ k \in \mathbb{R}^+$$

que é equivalente a:

$$y = -e^{\cos(x)} \cdot k \ \vee\ y = e^{\cos(x)} \cdot k \,,\ k \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow y = k e^{\cos(x)} \,,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Repondo que $y = 0$ é sol. de $y + \frac{y'}{\sin x} = 0$, obtenho o integral geral:

$$y = k e^{\cos(x)} \,,\ k \in \mathbb{R}$$

verificação:

$$y + \frac{y'}{\sin x} = 0 \,,\ x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow k e^{\cos(x)} + \frac{\left(k e^{\cos x}\right)'}{\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow k e^{\cos x} - \frac{k \cancel{\sin} x\, e^{\cos x}}{\cancel{\sin} x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{k e^{\cos x}} - \cancel{k e^{\cos x}} = 0 \,,\ \forall x \in \mathbb{R}^+$$

"ex: $\boxed{y' \sin x + y \cos x = 0}$

⋮

Solução : $y = \dfrac{k}{\sin x}$, $k \in \mathbb{R}$

//ex: $\boxed{y^2 + y = (x^2 - x)y'}$

$$\frac{y+1}{y} = \frac{c(x-1)}{x}, \quad x \neq 0,\ y \neq 0$$

$$1 + \frac{1}{y} = \frac{c(x-1)}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{c(x-1)}{x} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{c(x-1) - x}{x}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x}{c(x-1) - x}, \quad x \neq 1,\ x \neq 0$$