Aula 01

Série de potências

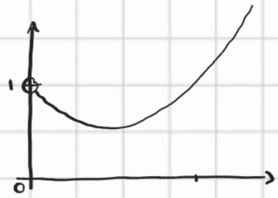
número fixo (centro da série)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - c)^n, \text{ onde } \begin{cases} a_n = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

x é uma variável real

Sucessão numérica dos coeficientes da série

$$\boxed{\text{Convenção : } \quad 0^0 = 1}$$



$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln x} \underset{\text{R.C.}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$$

Se $x = c = 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0^n = \overset{1}{\cancel{0^0}} + \overset{0}{\cancel{0^1}} + \overset{0}{\cancel{0^2}} + \dots = 1 \rightarrow = a_0, \text{ onde } a_n = 0^n$$

- Se $x \neq 0$, então trata-se de uma série geométrica de razão $r = x$.
  <u>Converge sse $x \in]-1,1[$</u>

Em caso de convergência:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1.^\text{º} \text{termo}}{1 - r} = \frac{1}{1-x}}, \text{ onde } x \text{ é a "razão"}$$

$$f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

| Slides IB #05 |

① $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$ e $(x-c)^n = x^n$, logo $c=0$

- Se $x=0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = \frac{0^0}{\underbrace{0!}_{0!=1}} + \cancel{\frac{0^1}{1!}} + \ldots = 1$
- Se $x \neq 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ é uma série de termos não nulos

→ Critério D'Alembert aplicável

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{\cancel{n}+1}\, \cancel{n!}}{\cancel{|x|^n}\, (n+1)\cancel{!}} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{|x|}{(n+1)} \right] = 0 \in [0,1[$$

Logo, pelo Critério D'Alembert a série converge absolutamente para $x \in \mathbb{R}$

<u>Curiosidade</u>:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

<u>Se $x=1$</u>:

$$e^1 = e = \overbrace{\underbrace{\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}}_{2{,}5} + \ldots}^{2.5166\ldots}$$

②

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x+1)^n$ $\rightarrow a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $(x-c)^n = (x+1)^n$, logo $c=-1$

- Se $x=-1$, temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} 0^n = \frac{(-1)^2}{1} 0^1 + 0 + 0 + \ldots = 0$
- Se $x \neq -1$, a série é de termos não nulos

D'Alembert aplicável:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} \cdot (x+1)^{n+1}}{\frac{(-1)^{n+2}}{n} \cdot (x+1)^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x+1|^{n+1}\, n}{|x+1|^n\, (n+1)}$$

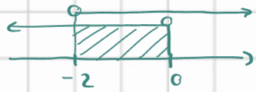
$$L = \lim_{n \to +\infty} \left[|x+1| \, \frac{\cancelto{1}{n}}{\cancel{n}+1} \right] = \underbrace{|x+1|}_{\delta \,=\, 1,\ \text{nada se pode concluir}} .$$

Conclui que se $|x+1| < 1$ A série converge abs.

Agora temos de estudar este intervalo!

- Se $|x+1| < 1$ a série converge absolutamente

$$\begin{cases} x+1 > -1 \\ x+1 < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -2 \\ x < 0 \end{cases}$$



$|x+1| < 1 \iff x \in \,]-2,0[$

I_c Intervalo de Conv.

Neste intervalo a série conv. abs.

Agora estudamos os pontos fronteiros de I_c:

- Se $x = 0$, então tenho uma série numérica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cancel{1^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$, série de Mengoli alternada (converge simplesmente)

- Se $x = -2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cancel{(-1)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)}{n}$$ DIV

Domínio de convergência:

$D_c = \,]-2,0]$, converge absolutamente em $]-2,0[$

conv. simples

$$S: \,]-2,0] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$$

D_S

③

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n!\,(x-2)^n$$

• Se $x = 2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n!\,0^n = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$

• Se $x \neq 2$, D'Alembert é aplicável

$$L = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(n+1)!\,(x-2)^{n+1}}{n!\,(x-2)^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left[|x-2|\,(n+1) \right] = +\infty$$

↳ DIV, se $x \neq 2$

$I_c = \{2\}$

$D_c = \{2\}$

!

$$\boxed{I_c \subseteq D_c}$$

(i) $R = 0$, $I_c = D_c = \{c\}$

(ii) $R = +\infty$, $I_c = D_c = \mathbb{R}$

(iii) $R \in \mathbb{R}^+$, $I_c =]c-R, c+R[$

e D_c

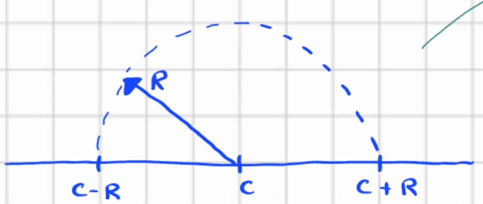
↳ estuda-se os pontos fronteiros

$D_c = [c-R, c+R[$

$D_c = [c-R, c+R]$

$D_c =]c-R, c+R]$

$D_c =]c-R, c+R[$



$I_c =]c-R, c+R[$

↳ Raio de convergência da série (absoluta)

Processo para calcular o D_c a série de potências:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n, \quad a_n \neq 0$$

1) Identifique o número c

2) Calcule o raio de conv. (poderiamos ir diretamente para algum critério)

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{ou} \quad R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

3) $I_c =]c-R, c+R[$

4) Analisar a série para $x = c-R$, $x = c+R$

Erros comuns:

① $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\ln(n)}}_{a_n} x^{3n}$ ← Não está na forma $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-c)^n\right)$

↳ as formulas do R não se aplicam!

- Temos 2 hipóteses:

  -> Diretamente para o critério D'Alembert

  -> Mudança de variável $t = x^3$ $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} t^n\right)$

② $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 \ln(n)} (3x+2)^n$ ← Não está na forma!

(poderíamos fazer uma mudança de variável também... $t = 3x$)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}\; 3^n}{n^2 \ln(n)} \left(x + \frac{2}{3}\right)^n$$ ✓ Na forma!