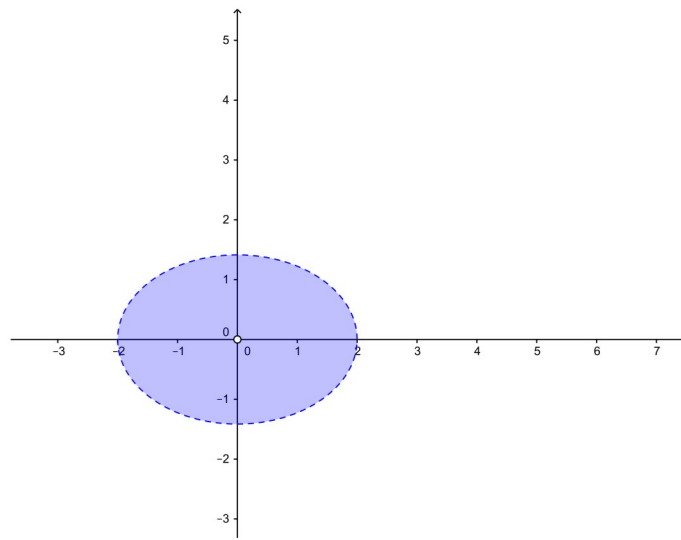
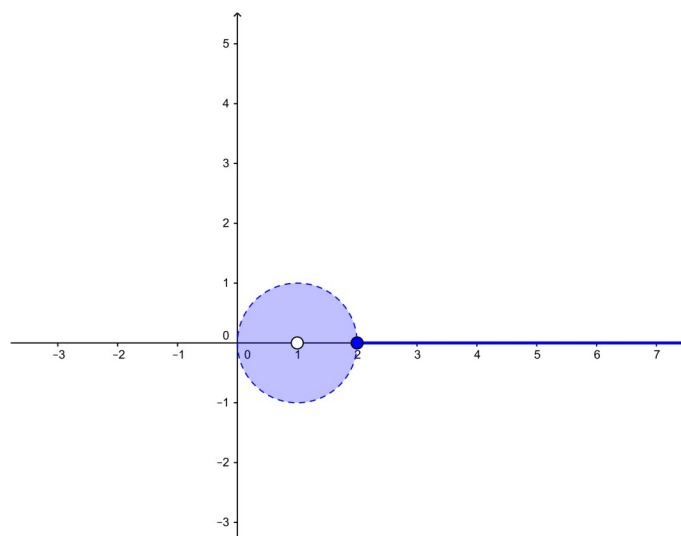


1. (a) É aberto e não é fechado.

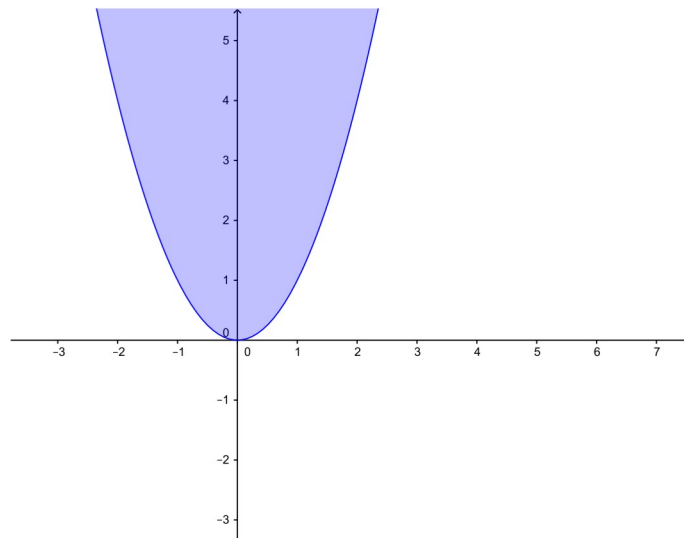


- (b) Não é aberto nem fechado.



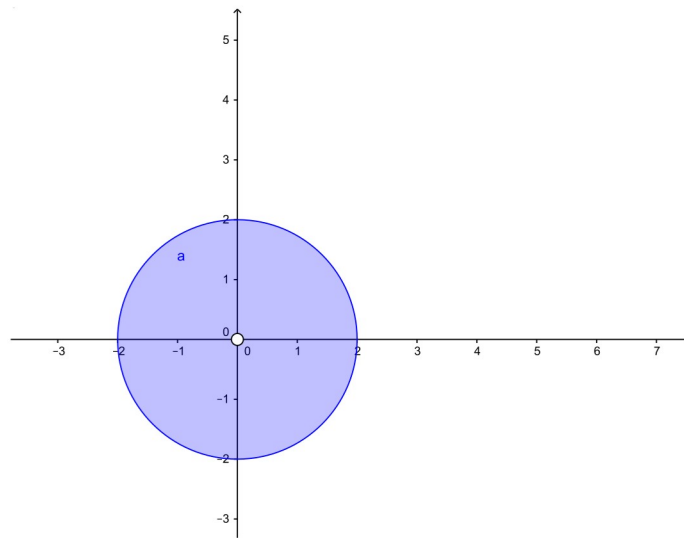
- (c) Não é aberto nem fechado.
(d) É fechado e não é aberto.
(e) É fechado e não é aberto.

2. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.

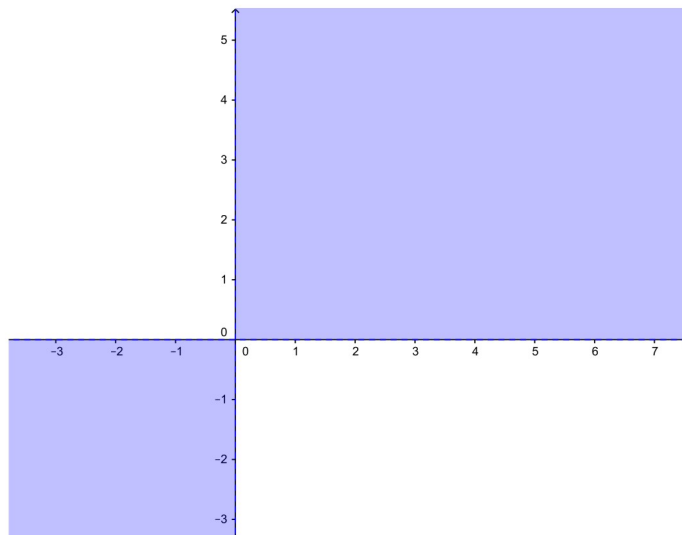


(b) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2\}$.

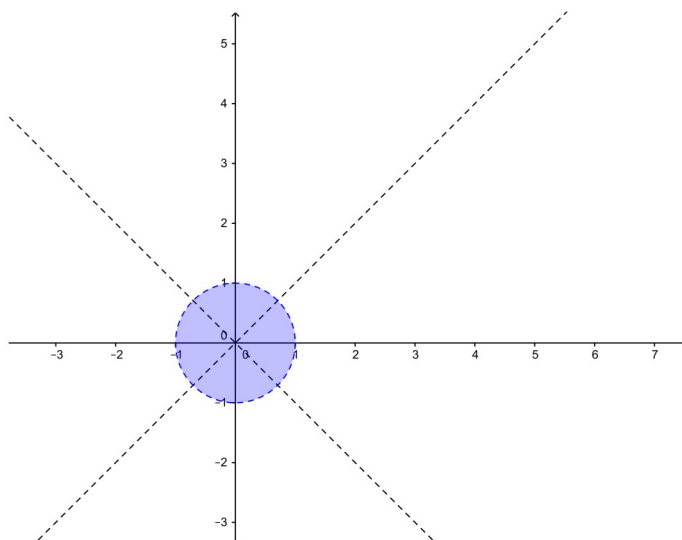
(c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x, y) \neq (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.



(d) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$.

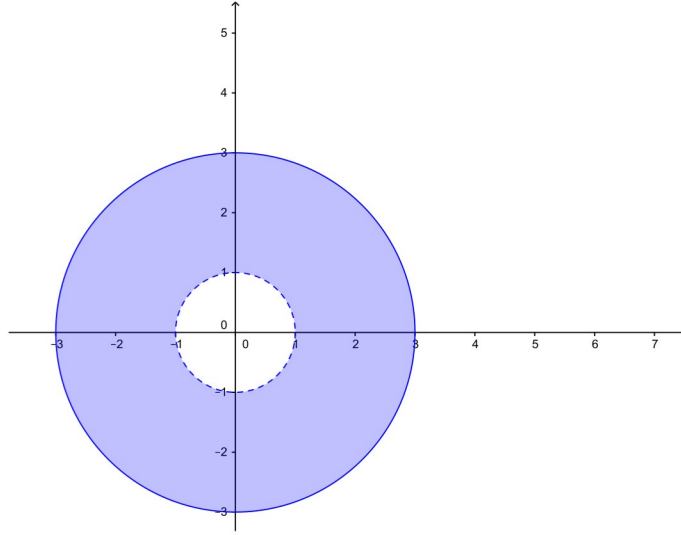


(e) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge y \neq x \wedge y \neq -x\}.$



(f) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$

(g) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}.$



- (h) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0) \wedge z^2 \leq x^2 + y^2\}$.
3. (a) $\mathcal{N}_1 = \{(0, 0)\}$ é um ponto. Para cada $k \in]1, +\infty[$, $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{k^2-1}{k^2}\}$ é uma circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$.
- (b) $\mathcal{N}_1 = Ox \cup Oy$ é a união de duas retas concorrentes (cônica degenerada). Para $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \ln(k)\}$ é uma hipérbole.
- (c) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = k\}$ é o plano ortogonal ao vetor $(1, 1, 3)$ que contém o ponto $(k, 0, 0)$.
- (d) $\mathcal{N}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2\}$ é uma superfície cônica;
para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{N}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = k\}$ é um hiperbolóide de duas folhas;
para $k \in \mathbb{R}^-$, $\mathcal{N}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 = k\}$ é um hiperbolóide de uma folha.
- (e) $\mathcal{N}_0 = \{(0, 0, 0)\}$ é um ponto (quádrlica degenerada). Para cada $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{N}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}$ é uma superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio \sqrt{k} .
4. $\{(x, y) : T(x, y) = T(3, 2)\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 13\}$
(circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio $\sqrt{13}$).
5. Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos
 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^x(\sin x + \cos x)$,
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3 \sin(z - 3y)$,
 $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\sin(z - 3y)$.
6. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = \frac{1}{2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) = \frac{1}{2}$.
- (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 0)$ não existe.
- (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ não existe; $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

7. Para $y > -x$ e $x > y$, temos
- $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y}{y^2 - x^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y^2},$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}.$$
8. $f(x, y) = x^3 y^2 - 6xy + \frac{1}{2} \ln(1 + y^2)$.
9. –
10. –
11. –
12. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
 (b) Plano tangente: $5x + 4y - z - 9 = 0$.
 Reta normal:
 $(x, y, z) = (1, 2, 4) + \alpha(5, 4, -1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (equação vetorial) ou
 $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = 4-z$ (equações cartesianas).
13. (a) $\nabla f(x, y, z) = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz))$.
 (b) $D_{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)} f(1, 3, 0) = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.
14. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
 (é aberto e não é fechado).
 (b) As curvas de nível $k \in \mathbb{R}$ de f são $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = e^k\}$
 (circunferências de centro $(0, 0)$).
 (c) $D_{(u, v)} f(1, 0) = 2u$.
15. Reta normal: $(x, y, z) = (3, 4, -2) + \alpha(3, 4, 5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
 Plano tangente: $3x + 4y + 5z - 15 = 0$.
16. (a) $\nabla f(x, y, z) = (3y, 3x, 2z)$.
 (b) $3x + 3y + 2z - 8 = 0$.
17. (a) D é um losango centrado na origem com os vértices situados nos eixos coordenados.
 (b) A função é do tipo polinomial, logo contínua no seu domínio de definição \mathbb{R}^2 e, consequentemente, também é contínua em D . Por outro lado, este conjunto é fechado e limitado. Nestas condições, o Teorema de Weierstrass garante a existência de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que são, respetivamente, o menor e o maior valor que f atinge.
 Observar que $f(x, y)$ expressa o quadrado da distância de um ponto $P = (x, y)$ à origem. Assim, o máximo absoluto é 1, atingido nos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ e $(0, -1)$, e o mínimo absoluto é 0, atingido no ponto $(0, 0)$.
18. Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque \mathcal{S} não é fechado.
19. Como $f(x, y) = -x^2 \leq 0 = f(0, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então todos os pontos da forma $(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$, são maximizantes da função.
20. (a) Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque \mathbb{R}^3 não é limitado.
 (b) Como $f(0, 0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 = f(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então $(0, 0, 0)$ é (o único) minimizante global de f .

21. (a) f não é diferenciável em $(0, 0)$, porque não existe $f'_x(0, 0)$.
 (b) Tem-se $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2} \leq 0 = f(0, 0)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, $(0, 0)$ é (o único) maximizante absoluto de f .
22. (a) Como g é contínua e o conjunto B é fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos globais de g em B .
 (b) g é diferenciável e não possui pontos críticos no interior de B , logo os extremantes situam-se na fronteira. Claramente $(0, -1)$ é minimizante global e $(0, 1)$ é maximizante global.
 (c) Não, pois g é diferenciável no aberto A e não possui pontos críticos nesse conjunto (notar que $\nabla g(x, y) = (0, 1) \neq (0, 0)$). Portanto, g não tem extremantes globais em A (nem em \mathbb{R}^2).
23. Na origem a função h vale $\frac{1}{2}$, enquanto que, por exemplo, em $(\sqrt{3\pi/2}, 0)$ vale $\frac{3}{2}$ que é um valor maior.
24. (a) $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$;
 (b) $(2, 3)$ e todos os pontos situados nos eixos coordenados;
 (c) $(0, 0, 0)$, $(-1, -1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, -1)$, $(1, 1, 1)$.
25. Como $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$ então $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 \geq -1$. Ora $f(1, 2) = -1$ e para todo $(x, y) \neq (1, 2)$ tem-se $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 > -1$.
26. (a) O gradiente de f , se considerado no seu domínio de definição, anula-se apenas em $(-4, 6)$. No entanto, $(-4, 6) \notin \text{int}(D)$. Consequentemente, f não possui pontos críticos em $\text{int}(D) =]0, 1[\times]0, 2[$.
 (b) A existência de extremos absolutos é garantida pelo Teorema de Weierstrass, uma vez que D é fechado e limitado e f é contínua neste conjunto. Os extremos são então atingidos na fronteira (recordar a conclusão obtida na alínea anterior).
 O máximo absoluto de f em D é 17 e é atingido no ponto $(1, 2)$; o mínimo absoluto de f em D é -3 e é atingido no ponto $(1, 0)$.
27. (a) Os pontos críticos são $(0, 0)$ e $(1, 1)$. A função f é de classe C^2 em \mathbb{R}^2 .
 Como $\det(H_f(0, 0)) = -1 < 0$, então $(0, 0)$ não é extremante (é ponto de sela).
 Como $\det(H_f(1, 1)) = e^{-4} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -e^{-2} < 0$, então $f(1, 1) = e^{-2}$ é máximo local.
 (b) Os pontos críticos de g são $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 1/4)$. Aplicando o teste das segundas derivadas, conclui-se que os dois primeiros são pontos de sela e o terceiro ponto é minimizante local.
28. –
29. –
30. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em D . $(0, 0)$ é o único ponto crítico no interior de D , mas não é extremante (o hessiano é negativo neste ponto). Usando o método dos multiplicadores de Lagrange identificamos os candidatos $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Calculando o valor de f nestes pontos, conclui-se que o máximo global de f é 2 (atingido nos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$) e o mínimo global de f é -2 (atingido nos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$).

31. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em D . Não existem pontos críticos no interior de D (ambas as derivadas parciais anulam-se $(0, 0)$, mas este ponto situa-se na fronteira). A fronteira $fr(D)$ é constituída pela semicircunferência D_1 e pelo segmento de reta D_2 :

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}; \quad D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 1\}.$$

Como f é constante em D_2 (pois $f(x, 0) = 0$) todos os pontos situados neste segmento são candidatos a extremantes. Os candidatos em D_1 são $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (obtidos através do método dos multiplicadores de Lagrange). Como

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad f(x, 0) = 0,$$

o máximo global de f é $1/2$ e o mínimo global é $-1/2$.

32. $(4, 8)$ é o que se encontra mais próximo (à distância $3\sqrt{5}$) e $(-4, -8)$ é o que se encontra mais afastado (à distância $5\sqrt{5}$).
33. (a) $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
 (b) A distância entre um qualquer ponto (x, y, z) e o ponto $(1, 0, -2)$ é dada por $d(x, y, z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$. Para pontos (x, y, z) do plano dado temos $z = 4 - x - 2y$. Assim, podemos minimizar $d(x, y, z)$, ou mais simplesmente $d(x, y, z)^2$, tendo em conta esta última relação. Considerando

$$f(x, y) = (x-1)^2 + y^2 + (6-x-2y)^2$$

vemos que o único ponto crítico de f é $\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right)$ e que este é um minimizante local (atendendo ao teste das segundas derivadas). A distância mais curta pretendida é $f\left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}\right) = \frac{5\sqrt{6}}{6}$.

34. Aplicando o métodos dos multiplicadores de Lagrange identificamos os pontos

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right).$$

O primeiro é o mais próximo e o segundo ponto é o mais distante.

35. (a) –
 (b) $(0, 1)$.
 (c) $f(0, 1) = 0$ é mínimo global e $f(0, 4) = 9$ é máximo global.
36. (a) –
 (b) $int(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge 1 - x < y < 1\}$; f não possui pontos críticos em $int(D)$.
 (c) $f(1/2, 1/2) = 1$ é mínimo global e $f(1, 1) = 4$ é máximo global.
37. O lucro máximo da empresa é 100 (milhões de euros), sendo realizado (ou atingido) com um gasto de 11 em investigação e de 9 em publicidade.
38. O custo mínimo para uma produção de 12 unidades é $C(4, 16) = 56$.