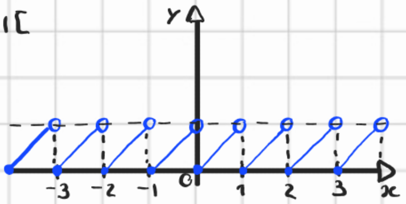
Aula 08

Slide Extra # 123

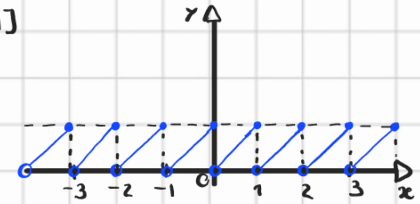
Ex: Verique se é possível estudar a função $f: D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$ quando:

a) $D = [0, 1[$ ✓



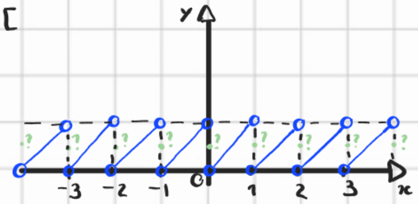
É possível. A extensão periódica é única !

b) $D =]0, 1]$ ✓



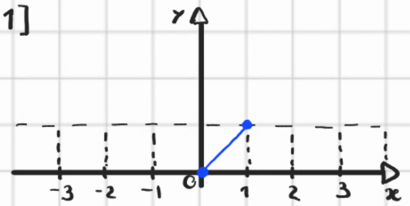
É possível. A extensão periódica é única !

c) $D =]0, 1[$



É possível mas é indeterminado.
Há que escolher um valor para $f(x)$, $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$

d) $D = [0, 1]$ ✗



Não é possível ! Como $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$ não se consegue, por exemplo, determinar $f(2)$

Série de Fourier associada à função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Temos de saber !

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)], \text{ onde}$$

Associado à série

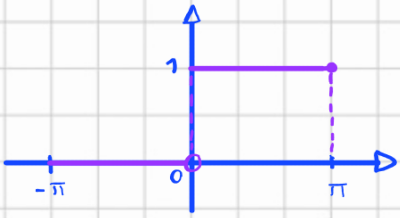
$$a_n = \frac{1}{\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Exemplo ZERO # 127

• Faça um esboço das seguintes funções e determine a sua série de Fourier:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \in [-\pi, 0[\\ 1 & se \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$$



É o caso mais simples de uma "onda quadrada" 

Como:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] \text{, onde}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \,, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\,dx \,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Então:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cancel{\cos(0x)}^{1}\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cancel{f(x)}^{0}\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cancel{f(x)}^{1}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \times 0 + \frac{1}{\pi} \times [x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \times (\pi - 0) = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cancel{f(x)}^{1}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{n}\left[\sin(x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\cancel{\sin(\pi)}^{0} - \cancel{\sin(0)}^{0}\right) = 0 \,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{(-1)}{n}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cancel{\cos(0\pi)}^{1}\right) = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & se \quad n \text{ for par} \\ \dfrac{2}{n\pi} & se \quad n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

$\boxed{u_n = 2n+1 \text{, sucessão dos termos ímpares} \quad u_n = 2n \text{, sucessão dos termos pares}}$

$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$

Resposta:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)x)\right.$$

ou seja:

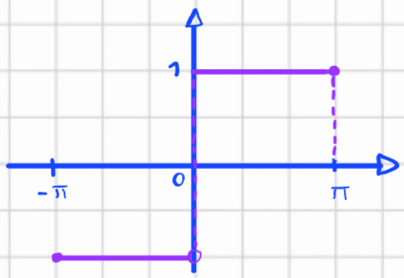
$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin(3x) + \frac{2}{5\pi}\sin(5x) + \ldots$$

Ímpar

Série de senos (Função Ímpar)

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \pi] \\ -1 & \text{se } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$



Cálculo dos coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (+1)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[x\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - (-(-\pi))\right] + \frac{1}{\cancel{\pi}}(\cancel{\pi} - 0)$$

$$= -1 + 1 = 0$$

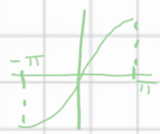
como se negativo fosse "ímpar" e positivo fosse "par"

Produto de funções

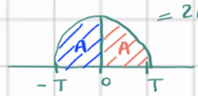
ímpar × par = ímpar
ímpar × ímpar = par
par × ímpar = ímpar
par × par = par

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{Ímpar}}\ \underbrace{\boxed{\cos(nx)}}_{\text{Par}}}_{\text{Ímpar}}\,dx$$

! → • A função integrada é ímpar e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.
Logo, por simetria, $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{Ímpar}}\ \underbrace{\boxed{\sin(nx)}}_{\text{Ímpar}}}_{\text{Par}}\,dx$$



$= 2A$, porque é simétrica

! → • A função integrada é par e o intervalo de integração é simétrico relativamente à origem.
Logo, por simetria:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \times \left(-\frac{1}{n}\right) \times \left[\cos(nx)\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} - 1\right)$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ for par} \\ \dfrac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

$u_n = 2n+1$

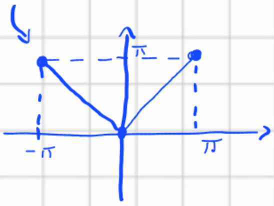
Resposta:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \times \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)} \right)$$

Ex:

$\boxed{1}$ Outra "onda quadrada" em $[-\pi, \pi]$ mas é sempre diferente de zero. $f(x) = |x|$

Função par: $f(x) = |x|$



"onda triângular"

Cálculo dos coeficientes:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{Ímpar}}}_{\text{Ímpar}} \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{par}} \underbrace{\cos(nx)}_{\text{par}}}_{\text{Par}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(nx) \, dx$$

Por partes e usando a $\underbrace{\text{Regra de Barrow}}$ Resolvido no T.P.C.

$$= (\ldots)$$

$$= \begin{cases} \pi & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ e é par} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \in \mathbb{N} \text{ e é ímpar} \end{cases}$$

$\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$

Logo, a série de Fourier é:

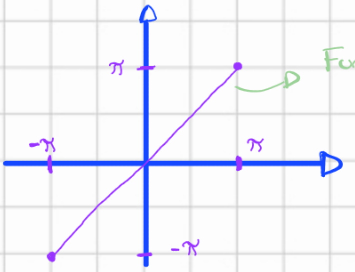
$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{4}{\pi} \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{4}{\pi} \frac{\cos(5x)}{5^2}$$

função par

Soma de funções pares (cosenos)

$\boxed{\text{T.P.C.}}$ $f(x) = x \ , \ x \in [-\pi, \pi]$



Função impar → SF é só de senos

Cálculo dos coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} x \cancelto{1}{\cos(n0)} \, dx = \frac{1}{\pi} \times \left(\int_{-\pi}^{0} x \, dx + \int_{0}^{\pi} x \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \times \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \times \left(\cancelto{0}{-\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}} - 0 \right) = 0_{//}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{Impar}} \underbrace{\cos(nx)}_{\text{Par}}}_{\text{Impar}} \, dx = 0_{//}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \times \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{Impar}} \underbrace{\text{sen}(nx)}_{\text{Impar}}}_{\text{Par}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{0} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\text{sen}(nx)}_{v'} \, dx$$

$$\int_{0}^{\pi} u v' dx = [uv]_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} u' v \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \times \left(\pi \times \frac{(-\cos(n\pi))}{n} + \frac{1}{n} \int_{0}^{\pi} \cos(nx) \, dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi \ (-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \left[\sin(nx) \right]_{0}^{\pi} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\pi (-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} \left(\cancelto{0}{\sin(n\pi)} - \cancelto{0}{\sin(n \times 0)} \right) \right)$$

$$= \frac{-2\cancel{\pi} (-1)^n}{\cancel{\pi} \ n} = \frac{-2 (-1)^n}{n}$$

Se $n \in \mathbb{N}$ e for par:

$$b_n = \frac{-2}{n}$$

Se $n \in \mathbb{N}$ e for impar

$$b_n = \frac{2}{n}$$

Então:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ \frac{-2(-1)^n}{n} & \text{se } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Logo a SF fica:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

$$x \sim 2\operatorname{sen}(nx) - \frac{2\operatorname{sen}(nx)}{2} + \frac{2\operatorname{sen}(nx)}{3} - \frac{2\operatorname{sen}(nx)}{4} + \dots$$