Folha 2

1

a) $$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}}_{f_n(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Pelo Critério de Weierstrass:

- $$|f_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}\right| \overset{|\cos(nx)| \in [0,1]}{\leq} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n \times \sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

- Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Dirichlet $\alpha = 3/2 > 1$) e é uma sucessão de termos não negativos

- Logo, pelo C.W. a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para a função S

b) Pelas propriedades de convergência uniforme:

- $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}$, funções contínuas em $\mathbb{R}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ para a função S

Logo:

Resposta da b)

→ S é contínua em $\mathbb{R}$

→ S é integrável em $\mathbb{R}$ e tem-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)$$

→ se cada f_n é de classe $\overset{\text{admite primeira derivada}}{C^1}$ em $\mathbb{R}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$, então S é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \ x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

c)

S é integrável em $[0, \pi]$ e tem-se:

$$\int_0^{\pi} S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} f_n(x)\,dx\right)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}\,dx = \frac{1}{n\sqrt{n+1}} \times \int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx = \frac{1}{n^2\sqrt{n+1}} \int_0^{\pi} n\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{n^2\sqrt{n+1}} \times \Big[\sin(nx)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\sqrt{n+1}} \times 0 - \frac{1}{n^2\sqrt{n+1}} \times 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\int_0^{\pi} S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(0) = 0$$

c.q.m.

$\boxed{5}$

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} = \cos(2\pi) = 1, \text{ pois } \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{7}$

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\cancel{1}}}{(2n+1)!}}{\cancel{x}} \right) = \lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((-1)^0 \times x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \right)$$

$$= 1 \times \cancel{0}^{0^{\,1}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \times \cancel{0}^{2n} > 0}{(2n+1)} = 1 + 0 = 1$$

b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right) - 1}{x} \right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right) - \cancel{1}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right) = \lim_{x\to 0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{0}^{n} > 0}{(n+1)!} = 1 + 0 = 1$$

$\boxed{8}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n\, 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\, 2^n} (x-3)^n$$

$\boxed{c = 3}$ $$R = \lim_{n\to +\infty} \left| \frac{\frac{1}{n\, \cancel{2^n}}}{\frac{1}{(n+1)\, \cancel{2^n} \times 2}} \right| = 2 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 2 \times \frac{1 + \cancel{\frac{1}{\infty}}^{0}}{1} = 2$$

$I_c =]3-2, 3+2[=]1, 5[$

A série é abs. convergente em I_c

$\boxed{x = 1}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\, \cancel{2^n}} \times (-1)^n \times \cancel{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \times (-1)^n$$

- Converge (critério de Leibniz)
- Simplesmente convergente (série dos módulos + Dirichlet $\alpha = 1 \leq 1$)

$\boxed{x = 5}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\, \cancel{2^n}} \times \cancel{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \text{ Diverge (Dirichlet } \alpha = 1 \leq 1)$$

Resposta:

$\boxed{I_c =]1, 5[}$ e $D_c = [1, 5[$, onde a série converge absolutamente exceto em $x = 1$

b)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n}(x-3)^n \quad , \quad x \in [1,5[$$

• Como a série de potências converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado de I_c :

$\rightarrow f$ é diferenciável em $I_c =]1,5[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\,2^n}(x-3)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(x-3)^n$$

$$\Rightarrow f'(4) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(\cancel{4-3})^{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

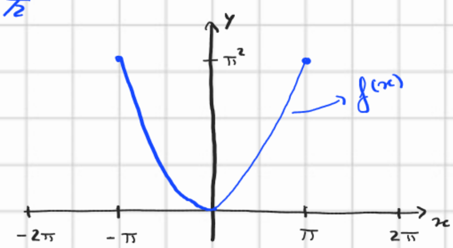
↳ $r = \frac{1}{2} \Rightarrow$ converge e a soma é igual a

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \cancel{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\cancel{\frac{1}{2}}} = 1 //$$

15

a) $f(x) = x^2 \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$



<u>f é uma função par:</u>

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

<u>Calculo dos coeficientes</u> :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cancel{\cos(0)}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{3} \times x^3\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^3-(-\pi)^3}{3\pi} = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{Par}\,\underbrace{\cos(nx)}_{Par}}_{Par}\,dx \longrightarrow$$

• A função integrada é par e o intervalo de integração $I = [-\pi, \pi]$ é simétrico em relação à origem logo:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x^2}_{u}\,\underbrace{\cos(nx)}_{v'} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2\,sen(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\,\frac{sen(nx)}{n}\,dx$$

$u = x^2 \qquad v = \frac{sen(nx)}{n}$

$u' = 2x \qquad v' = \cos(nx)$

$$\int_0^{\pi} uv'\,dx = [uv]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'v\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\pi^2\,\cancel{sen(n\pi)}^{0} - 0^2\,\cancel{sen(0)}^{0}\right) - \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\,sen(nx)\,dx$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{sen(nx)}_{v'}\,dx$$

$$= \frac{4}{n\pi} \times \left[\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n}\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi} \times \left(\pi\cos(n\pi) - 0\,\cancel{\cos(n0)} + \cancel{sen(nx)\Big|_0^{\pi}}^{0}\right)$$

$$= \frac{4}{n^2\cancel{\pi}} \times \left(\cancel{\pi}\cos(n\pi)\right) = \frac{4}{n^2} \times (-1)^n \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

$u = x \qquad v = -\frac{\cos(nx)}{n}$

$u' = 1 \qquad v' = sen(nx)$

$$\int_0^{\pi} uv'\,dx = [uv]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'v\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{Par}}\ \underbrace{sen(nx)}_{\text{Ímpar}}}_{\text{Ímpar}}$$

• A função integrada é ímpar e o seu intervalo de integração é simétrico em relação à origem, logo $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$(=)\ b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(-1)^n \times (-1)^n$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos(nx) + b_n\, sen(nx)\right)$$

<u>Logo:</u>

$$f(x) \sim \frac{\cancel{2}\pi^2}{3\times\cancel{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n \times \frac{4}{n^2} \times \cos(nx)\right) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n \times \frac{4}{n^2} \times \cos(nx)\right)$$

b) Como f é uma função contínua em todos os pontos, para $x \in [-\pi, \pi]$, logo f é seccionalmente contínua.
Para além disso, $f'(x) = 2x$, $x \in [-\pi, \pi]$, tambem é contínua em todos os pontos, para $x \in [-\pi, \pi]$, logo f' tambem é seccionalmente contínua

Logo, como f e f' são seccionalmente contínuos $\Rightarrow$ f é seccionalmente diferenciável em $[-\pi, \pi]$, podendo assim ser aplicado o Teorema de Dirichlet nesse intervalo, concluindo que para todo $c \in [-\pi, \pi]$ a soma da série de Fourier é igual a:

$$S(c) = \frac{f(c^-) + f(c^+)}{2}, \quad \text{onde } f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) \text{ e } f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Como f é contínua em todos os pontos desse intervalo:

$$\forall c \in [-\pi, \pi], \quad f(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

$$f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

Então:

Soma da SF no ponto c

$$S(c) = \frac{f(c) + f(c)}{2} = \frac{\cancel{2}f(c)}{\cancel{2}} = f(c)$$

Sendo, a soma de série de Fourier associada a f igual a f, logo:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n \times \frac{4}{n^2} \times \cos(nx)\right)$$