Aula 22

EDO's Lineares completos

$\boxed{3.^{\text{o}} \text{ caso}}$ ← Caso geral! ($b(x) = e^{\alpha x} \times (\text{pol. de grau } \underline{m})$ $\begin{cases} \cos \beta x \\ \text{ou} \\ \sin \beta x \end{cases}$)

N.º mágico: $z = \alpha + \beta i$

→ Verificar se z é solução de Ⓒ, se for solução determine K = multiplicidade

→ Existe uma solução y_p na forma:

$$y_p(x) = x^{K} \left[P_m(x) \cdot \cos(\beta x) + Q_m(x) \cdot \sin(\beta x) \right] e^{\alpha x}$$

determinado consoante o n.º mágico (z)

polinómios de grau $\underline{m}$

Nota: Se z não é solução de Ⓒ então: $K = 0$

ex:

Ⓐ $\boxed{y'' + y = x \sin x}$ — Ⓔ

$\boxed{y'' + y = 0}$ — Ⓗ

$p(r) = \boxed{r^2 + 1 = 0}$ — Ⓒ

$r^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -1 \Leftrightarrow r \pm i$

A EDO Ⓔ é equivalente a: $\underset{m=2}{y''} + y = \underset{\alpha=0}{e^{0x}} [\underset{m=1}{x^1}] \sin(\underset{\beta=1}{1} \cdot x)$

$z = \alpha + \beta i = 0 \pm i$

↳ z acertou numa raiz de Ⓒ com multiplicidade ① ⟶ $\boxed{K = 1}$

Então, existe numa solução:

y_p na forma: $y_p = \underset{K=1}{x^{1K}} \cancel{e^{0x}} [P_1(x) \cos(1x) + Q_1(x) \sin(x)]$

$\alpha = 0$, $\beta = 1$, pol. grau $m = 1$

$= x [(p_1 x + p_0) \cos x + (q_1 x + q_0) \sin x]$

$\boxed{y_p = (p_1 x^2 + p_0 x) \cos x + (q_1 x^2 + q_0 x) \sin x}$ — (T1)

$y_p' = (2p_1 x + p_0) \cos x - (p_1 x^2 + p_0 x) \sin x + (\ldots) + (2q_1 x + q_0) \sin x + (q_1 x^2 + q_0 x) \cos x$

$$y_p' = [2p_1 x + p_0 + q_1 x^2 + q_0 x]\cos x + [-q_1 x^2 - q_0 x + 2q_1 x + q_0]\sin x$$

$$\boxed{y_p'' = [\text{pol. de grau } \underline{2}]\cos x + [\text{pol. de grau } \underline{2}]\sin x} \quad \text{T2}$$

Substitui-se T1 e T2 em E: $\boxed{y_p'' + y = x \sin x}$ E

$$[\text{outro pol. grau } \underline{2}]\cos x + [\text{aqueloutro pol. de grau } \underline{2}] = [0] \times \cos x + [x]\sin x$$

Logo: $\begin{cases} \text{outro pol. grau } \underline{2} = 0 \\ \text{aqueloutro pol. grau } \underline{2} = x \end{cases}$ e determinavam-se os coeficientes p_1, p_0, q_1 e q_0

(...)

Obtinha-se: $y_p(x) = \frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x$

Como: $y_E(x) = y_H(x) + y_p(x)$

$$\boxed{y_E(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \frac{x}{4}\sin x - \frac{x^2}{4}\cos x}$$

"ex:

B → Mais simples!

$\boxed{2y' + y = 3\cos(2x)}$ E

$\boxed{2y' + y = 0}$ H

$p(r) = \boxed{2r + 1 = 0}$ C

$r = -\frac{1}{2}$ $\quad SFS = \{e^{-x/2}\} \Rightarrow y_H(x) = c\, e^{-x/2}, \; c \in \mathbb{R}$

A EDO é equivalente a:

$$2y^{(1)} + y = 3\, x^{0} \times e^{0x} \times \cos(2x)$$

$m = 1$ $\quad m = 0$ $\quad \alpha = 0$ $\quad \beta = 2$

$z = \alpha \pm \beta i = 0 \pm 2i = 2i$

- Não acerta com a raiz de Ⓒ logo $\boxed{k=0}$

- Existe então um y_p na forma:

$$y_p(x) = \cancel{x^{k}} \cancel{e^{\alpha x}} \left[P_0(x)\cos(2x) + Q_0(x)\sin(2x) \right]$$

pol. de grau zero

$$\boxed{y_p(x) = P\cos(2x) + Q\sin(2x)} \text{ — } S0$$

$$\boxed{y_p'(x) = -2P\sin(2x) + 2Q\cos(2x)} \text{ — } S1$$

- Substituo S1 e S0 em E:

$$\boxed{2y' + y = 3\cos(2x)} \text{ — } E$$

$$2\left[-2P\sin(2x) + 2Q\cos(2x)\right] + P\cos(2x) + Q\sin(2x) = 3\cos(2x)$$

$$\Leftrightarrow \left[-4P + Q\right]\sin(2x) + \left[4Q + P\right]\cos(2x) = 3\cos(2x)$$

Então:

$$\begin{cases} -4P + Q = 0 \\ 4Q + P = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} Q = 4P \\ 16P + P = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} Q = \frac{12}{17} \\ P = \frac{3}{17} \end{cases}$$

Assim:

$$\boxed{y_p(x) = \frac{3}{17}\cos(2x) + \frac{12}{17}\sin(2x)} \text{ — } S0$$

$$\boxed{y_p'(x) = -\frac{6}{17}\sin(2x) + \frac{24}{17}\cos(2x)} \text{ — } S1$$

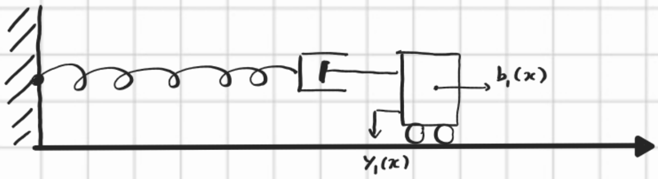
$$y_E = y_H + y_P$$

Logo:

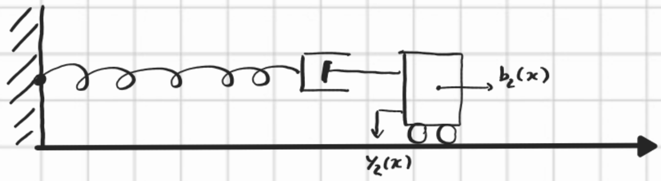
$$\boxed{y_E = c\,e^{-x/2} + \frac{3}{17}\cos(2x) + \frac{12}{17}\sin(2x), \quad c \in \mathbb{R}}$$

Princípio da sobreposição (ou da sobreposição dos efeitos simultâneos)

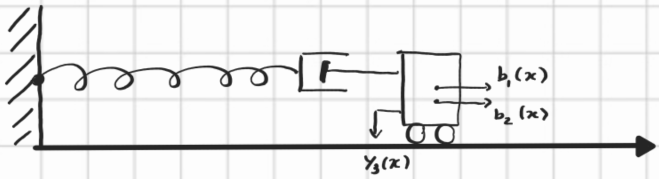
Só para EDO's Lineares



, se neste caso a sol. y_p é $y_1(x)$



, se neste caso a sol. y_p é $y_2(x)$



, então neste caso $y_p = y_1(x) + y_2(x)$

"ex:

Ⓒ $$\boxed{y' - y = \underbrace{(x^2+1)e^{3x}}_{b_1(x)} + \underbrace{(x^2+1)e^{x}}_{b_2(x)}} \text{ — Ⓔ}$$

• Uma solução de Ⓔ é a função:

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

Solução particular de $y' - y = (x^2+1)e^{3x}$ | Solução particular de $y' - y = (x^2+1)e^{x}$

(...) | (...)

$$y_1(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{3x} \quad \Big| \quad y_2(x) = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)e^{x}$$

$$\boxed{y_p = y_{p,1} + y_{p,2} + \ldots}$$

Logo:

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{3x} + \left(\frac{x^3}{3} + x\right)e^{x}$$

$$y_E(x) = c\,e^{x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{3x} + \left(\frac{x^3}{3} + x\right)e^{x}$$

↳ sol. geral de Ⓔ