Aula Invertida #4
Plano de Trabalho

15/Abril/2017

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Determinação do Domínio, Intervalo e Raio de Conv.

Para cada uma das séries seguintes determine:

— O centro (c) da série;
— O termo geral (a_n) dos coeficientes da série;
— O raio (R) de convergência;
— O intervalo de convergência (I);
— O domínio de convergência ($\mathcal{D}$) (indicando os pontos onde a conv. é simples ou absoluta).

Ⓐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\; 3^n} x^n$

Solução:
$c = 0$, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}\; 3^n}$
$R = 3$, $I =]-3, 3[$
$\mathcal{D} = [-3, 3[$ conv. abs. $x \neq -3$
simp. conv. ($x = -3$)

SLIDE #109.a)

Ⓑ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n (x+5)^n$

$c = -5$, $a_n = 3^n$
$R = \frac{1}{3}$, $I =]-\frac{16}{3}, -\frac{14}{3}[$
$\mathcal{D} = I$ conv. abs

Ⓒ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{9^{n+1}\, n^2} (x-3)^n$

$c = 3$, $a_n = \dfrac{2}{9^{n+1} n^2}$
$R = 9$, $I =]-6, 12[$
$\mathcal{D} = [-6, 12]$ de conv. abs.

#109.b)

(D) $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n}$$

$c=0$, $a_n = \frac{n-1}{n^{2n}}$

$R=+\infty$, $I=\mathbb{R}$

$\mathcal{D}=\mathbb{R}$, conv. abs.

#109.f)

(E) $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n\,2^{n+2}} (x-1)^n}$$

$c=1$, $a_n = \frac{3^n}{n\,2^{n+2}}$

$R=\frac{2}{3}$, $I=\left]-\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right[$

$\mathcal{D}=I$, conv. abs.

#109.c)

(F) $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n}$$

$c=0$, $a_n = \frac{(2n)!}{n!}$

$R=0$, $I=\{0\}$

$\mathcal{D}=\{0\}$, conv. abs.

(G) $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (x+2)^n}$$

$c=-2$, $a_n = \frac{\ln n}{n}$

$R=1$, $I=\left]-3,-1\right[$

$\mathcal{D}=\left[-3,-1\right[$, conv. abs.

conv. simples

#109.e)

(H) $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n} (3x-2)^n}$$

(Sugestão: $z=3x$)

série de pot. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n} (z-2)^n$

$c_z=0$, $a_n = \frac{(-1)^n}{n\,6^n}$

$R_z=6$, $I_z=\left]-4,8\right[$

$\mathcal{D}_z=\left]-4,8\right]$

simp. conv

$\mathcal{D}_x=\left]-\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right[$

#109.d)

(I) $$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} x^{3n}}$$

(Sugestão: $z=x^3$)

série de pot. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} z^n$

$c_z=0$, $a_n = \frac{1}{\ln n}$

$R_z=1$, $I_z=\left]-1,1\right[$

$\mathcal{D}_z=\left[-1,1\right[$

$\mathcal{D}_x=\left[-1,1\right[$

Cálculo II – Aula P(10–11)
12 de Março de 2007

Exemplos e Exercícios
Séries de Potências
Determinação do Domínio, Intervalo e Raio de Conv.
(págs. 94 – 105) 213

4.4

Resultado Fundamental:

Convencionando $\frac{1}{+\infty} = 0$ e que $\frac{1}{0} = +\infty$ podemos afirmar que o raio de conv. R de uma série de potências que satisfaz a condição $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ pode ser dado por

$$\boxed{R = \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}} \quad \text{ou} \quad R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

(sempre que exista)

Exercícios 2.4

1. — Em cada uma das alíneas que se seguem determine o domínio de Conv. D da série Considerada indicando os pontos onde a conv. é simples ou absoluta.

Hde 105 a)

(a) $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\, 3^n} x^n}$$

como $\frac{1}{\sqrt{n+1}\, 3^n} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Calcule-se;

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \frac{1}{\sqrt{n+1}\, 3^n} \right|}{\left| \frac{1}{\sqrt{n+2}\, 3^{n+1}} \right|}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\sqrt{n+2}\;\; 3^{n+1}}{\sqrt{n+1}\;\; 3^n} \right|$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \cdot 3 = 3$$

Logo a série converge absolutamente no intervalo $]-3, 3[$

Para $x = 3$, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\;\cancel{3^n}} \cancel{3^n} \quad \text{que diverge}$$

Para $x = -3$, temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\;3^n} (-3)^n \qquad (-3)^n = (-1)^n \cdot 3^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}\;\cancel{3^n}} \cancel{3^n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

A série dos módulos diverge, mas pelo Crit. de Leibniz (alternada, $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ decrescente e $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$) se verifica que é convergente. Logo para $x = -3$ é simp. conv.

$$\mathcal{D} = [-3, 3[$$

simp. conv.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underline{a_n} (x-c)^n$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

S109 a)

$$\boxed{ⓑ \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \underbrace{(x+5)^n}_{[x-(-5)]^n}}$$

c

Série de potências centrada em $c=-5$ com $a_n = 3^n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|3^n|}{|3^{n+1}|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

A série é abs. conv. em $I = \left]-5-\frac{1}{3}, -5+\frac{1}{3}\right[$

$$I = \left]-\frac{15}{3}-\frac{1}{3}, -\frac{15}{3}+\frac{1}{3}\right[= \left]-\frac{16}{3}, -\frac{14}{3}\right[$$

— Seja $x = -\frac{16}{3}$, obtemos a série numérica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \left(-\frac{16}{3}+5\right)^n$$

Com $-\frac{16}{3}+5 = -\frac{16}{3}+\frac{15}{3} = -\frac{1}{3}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

div.

— Seja $x = -\frac{14}{3}$, como $-\frac{14}{3}+5 = -\frac{14}{3}+\frac{15}{3} = \frac{1}{3}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (1)$$ div.

$\mathcal{D} = \left]-\frac{16}{3}, \frac{14}{3}\right[$ de conv. abs.

Slide 105 b)

$$\boxed{ⓒ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{9^{n+1} n^2} (x-3)^n}$$

Série de potências centrada em $c=3$ com $a_n = \frac{2}{9^{n+1} n^2} \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

O Raio R pode ser obtido por

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{\cancel{2}}{9^{n+1} n^2}\right|}{\left|\frac{\cancel{2}}{9^{n+2}(n+1)^2}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{9^{n+2}(n+1)^2}{9^{n+1} n^2}\right|$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} 9\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} 9\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)^2 = 9$$

Conv. Absoluta em $]3-9, 3+9[=]-6, 12[$

$\boxed{\text{Seja } x=-6}$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{9^{n+1} n^2} (-9)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{9^{n+1} n^2} (-1)^n 9^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{9} \frac{(-1)^n}{n^2}$$ que conv. abs. porque $\sum \frac{1}{n^2}$ conv.

$\boxed{\text{Seja } x=12}$, obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{9^{n+1} n^2} (12-3)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{9^{n+1} n^2} 9^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{9n^2}$$ conv. abs. porque $\sum \frac{1}{n^2}$ conv.

$\mathcal{D} = [-6, 12]$ de conv. abs.

S109 b)

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n$

Série de pot. centrada na origem com $a_n = \frac{n-1}{n^{2n}}$ que se anula para $n=1$.

Consideramos a série

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n^{2n}} x^n$ também centrada na origem e com $a_n = \frac{n-1}{n^{2n}} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_2$

Calcule-se:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{n-1}{n^{2n}}\right|}{\left|\frac{n}{(n+1)^{2(n+1)}}\right|}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)\,(n+1)^{2(n+1)}}{n \cdot n^{2n}}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{2n}}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n+1)^{2n} \cdot (n+1)^2}{n^{2n}}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \cdot (n+1)^2$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2}_{\downarrow\, e^2} \underbrace{(n+1)^2}_{\downarrow\, +\infty}$$

$R = +\infty$, ~~A~~ A série conv. abs. em todo o $\mathbb{R}$

S109 / f1 ⓔ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n\,2^{n+2}} (x-1)^n$

Série de pot. centrada em $c=1$,
com $a_n = \dfrac{3^n}{n\,2^{n+2}} \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\dfrac{3^n}{n\,2^{n+2}}\right|}{\left|\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+3}}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\,(n+1)\,2^{n+3}}{3^{n+1}\,n\,2^{n+2}}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(n+1)}{3n} = \frac{2}{3}$$

Conv. abs. em $\left]1-\frac{2}{3}, 1+\frac{2}{3}\right[$

" em $\left]-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right[$

$\boxed{\text{Seja } x = -\frac{1}{3}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n\,2^{n+2}} \left(-\frac{1}{3}-1\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n\,2^{n+2}} \left(-\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n\,2^{n+2}} (-1)^n \left(\frac{4}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n\,2^{n+2}} (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{4n\,2^n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{4n} (-1)^n$$

div. pela CNC
pois $\dfrac{2^n}{4n} \to +\infty$

$\boxed{\text{Seja } x = \frac{5}{3}}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n\,2^{n+2}} \left(\frac{5}{3} - 1\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{3^n}}{n\,2^{n+2}} \frac{2^n}{\cancel{3^n}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{2^n}}{n\,\cancel{2^n} \cdot 4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n} \text{ div.}$$

$D = \left]-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right[$ de conv. abs.

S 109 / c)

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n$

Série de pot. centrada na origem com $a_n = \frac{(2n)!}{n!} \neq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Calcule-se:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left|\frac{(2n)!}{n!}\right|}{\left|\frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!\,(2n)!}{n!\,[2(n+1)]!}$$

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)\,\cancel{n!}\,\cancel{(2n)!}}{\cancel{n!}\,(2n+2)(2n+1)\,\cancel{(2n)!}}$$

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

$D = \{0\}$ //

S109 d)

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{\log} \ln n}{n} (x+2)^n$

Série de pot. centrada em $c=-2$

com $a_n = \frac{\ln n}{n} = 0$ para $n=1$

Considerarei

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$ centrada em $c=-2$

com $a_n = \frac{\ln n}{n} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_2$

Calculo:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{\ln n}{n}\right|}{\left|\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right|}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\ \ln n}{n\ \ln(n+1)}$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\downarrow\ 1} \underbrace{\frac{\ln n}{\ln(n+1)}}_{\downarrow\ 1} = 1$$

, pela regra Cauchy $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$

$R = 1$

Conv. absoluta em $]-2-1, -2+1[$

$]-3, -1[$

$\boxed{x=-3}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (-3+2)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^n$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^n$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{\frac{1}{x}} \cdot \cancel{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$$

$$\forall x \in [3, +\infty[$$

$\frac{\ln n}{n}$ decresce

$\frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0$

Leibniz para concluir que

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (-1)^n$ (alternada) é conv.

Mas a série dos módulos div.
portanto temos conv. simples se $x = -3$

$\boxed{x = -1}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (-1+2)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} \text{ div.}$$

Comparar com $\sum \frac{1}{n}$ div.

Logo $\quad D = [-3, -1[$

conv. simples

S109 e)

(h) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n}(3x-2)^n$$

Usarei a mudança de variável $z=3x$ para obter a série:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n}(z-2)^n$$

que é uma série de potências centrada em $c=2$, com $a_n = \frac{(-1)^n}{n\,6^n} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Calculo:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n\,6^n}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,6^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n (n+1)\,6^{n+1}}{(-1)^{n+1}\, n\, 6^n}\right|$$

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot 6}{n} = 6 \,//$$

Logo a série converge absolutamente para $z \in]2-6, 2+6[$

$$z \in]-4, 8[\qquad (-6)^n = (-1)^n 6^n$$

$\boxed{\text{Seja } z=-4}$, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n}(\overset{z}{-4}-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n}(-6)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cancel{(-1)^n}}{n\,\cancel{6^n}}\cancel{(-1)^n}\cancel{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \underline{\text{div.}}$$

$\boxed{\text{Seja } z=8}$, obtemos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n}(8-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n}\,6^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{simp. conv.}$$

Logo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n}(z-2)^n$

tem ~~Domínio~~ de Conv. $D_z =]-4, 8]$

simp. conv.

Vindo que a série

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,6^n}(3x-2)^n$ tem Domínio

de conv. $D_x = \left]-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right]$

simp. conv.

(i) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} x^{3n}$

Usarei a mudança de variável $z = x^3$

para obter a série

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} z^n$ que é uma série de pot.

centrada na origem, com $a_n = \frac{1}{\ln n} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Calculo

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{1}{\ln n}\right|}{\left|\frac{1}{\ln(n+1)}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$$

Então, a série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} z^n$ conv. absolutamente em $]-1, 1[$

$\boxed{\text{Seja } z=-1}$, obtemos

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ que é uma série alternada

com $\frac{1}{\ln n}$ decrescente e $\frac{1}{\ln n} \to 0$

logo por Leibniz é conv., mas

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ div. (compare com $\sum \frac{1}{n}$ que div

pelo que para $z=-1$ temos conv. simples.

$\boxed{\text{Seja } z=1}$, obtemos

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$ que já vimos que div.

Assim, o domínio de conv. abs. é $D_z = [-1, 1[$

Então $D_x = [-1, 1[$ pois $z = x^3$