Aula 03

Se $c = a = \underline{0}$ o pol. de Taylor também se chama pol. de Mac. Laurin

Polinómio de Taylor (site no facebook para treinar)

- Associado a uma função f, de grau n, em torno de $x = a$

Supomos que $f : \overset{\text{aberto}}{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem derivados até à ordem $\underline{\underline{n}}$.
O ponto $x = c = a \in I$

Por exemplo:

$$f(x) = e^x, \quad x \in]-1, 1[= I$$
$$c = a = 0 \in I$$

(P1) Qual será o polinómio de grau menor ou igual a um que melhor aproxima $f(x) = e^x$ em torno de $x = 0$?

$n \leq 1$

$$p_1(x) = c_0 + c_1(x - 0)$$

Será o polinómio cujo gráfico é tangente ao gráfico é tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto $(0,1)$:

$$p_1(x) = \overbrace{f(0)}^{c_0} + \overbrace{f'(0)}^{c_1}(x - 0)$$

$$\begin{cases} p_1(0) = f(0) = 1 \\ p_1'(0) = f'(0) = e^0 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{p_1(x) = 1 + x}$$ → Polinómio de taylor, grau $n = 1$, para $f(x) = e^x$ em torno de $x = 0$

(P2) Qual será o polinómio de grau menor ou igual a dois que melhor aproxima $f(x) = e^x$ em torno de $x = 0$?

$n \leq 2$

$$p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

tal que:

$$\begin{cases} p_2(0) = f(0) = e^0 = 1 = c_0 \\ p_2'(0) = f'(0) = e^0 = 1 = c_1 \\ p_2''(0) = f''(0) = e^0 = 1 = 2c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 1/2 \end{cases}$$

$p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2^2 x$
$p_2(0) = c_0$

$p_2'(x) = c_1 + 2c_2 x$
$p_2'(0) = c_1$

$p_2''(x) = 2c_2$
$p_2''(0) = 2c_2$

$$\boxed{p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2}$$ → Polinómio de Taylor, grau $n=2$, para $f(x) = e^x$ em torno de $x=0$

P3 Qual será o polinómio de grau menor ou igual a três ($n \leq 3$) que melhor aproxima $f(x)$ em torno de $x=0$?

$$p_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$p_3(0) = c_0$$
$$p_3'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2$$
$$p_3'(0) = c_1$$
$$p_3''(x) = 2c_2 + 6c_3 x$$
$$p_3''(0) = 2c_2$$
$$p_3'''(x) = 6c_3$$
$$p_3'''(0) = 6c_3$$

$$\begin{cases} p_3(0) = c_0 = 1 \\ p_3(0) = c_1 = 1 \\ p_3(0) = 2c_2 \\ p_3(0) = 6c_3 \end{cases} \quad \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 1/2! \\ c_3 = 1/3! \end{cases}$$

$$\boxed{p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}}$$ → Polinómio de Taylor, grau $n=2$, para $f(x) = e^x$ em torno de $x=0$

—— // ——

Em suma:

$$\boxed{p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}} \simeq e^x, \text{ se } x \simeq 0$$

Polinómio de Taylor

$T_0^n(e^x)$ – Pol. de Taylor para $f(x) = e^x$, grau n, em torno de $x=0$ (n → grau; 0 → $c=a$)

$$\boxed{e^x \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = T_0^n(e^x)}$$

Também se pode escrever como:

$$\boxed{T_c^n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}$$

$f^{(k)}$ → derivada k vezes

$f^{(n)}(x)$ = derivada de ordem n de f

Ex: $f^{(0)}(x) = f(x)$
$f^{(2)}(x) = f''(x)$

Se $c = a = 0$ o pol. de Taylor também se chama pol. de Mac. Laurin

Apartir desta formula:

- $T_1^3(x^3) = x^3$ → de uma função polinomial de grau 3 $T_c^3(f(x)) = f(x)$

- $T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ $\left(f^{(k)}(x) = f(x) \Rightarrow f(0) = e^0 = 1 \right)$

- $T_0^n\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

$u_k = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0$ é a sucessões dos números ímpares

- $T_0^{2n+1}(\operatorname{sen} x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

- $T_0^{2n}(\cos x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Fórmula de Taylor

$$f(x) = T_c^n f(x) + R_c^n f(x)$$

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k}_{\text{Polinómio de Taylor de ordem } n \text{ de } f \text{ no ponto } c} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}}_{\text{Resto de Lagrange de ordem } n \text{ de } f \text{ no ponto } c}}$$

Nota que, se $x = c$, $f(c) = T_c^n f(c)$ $\left(R_c^n f(x) = 0\right)$

Exercícios

Ⓐ Seja $f(x) = \sin x$. Calcule $T_{\underset{c=0}{0}}^5(f(x))$

- 1.º Passo - Escrever a fórmula

$$T_0^5(f(x)) = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$= f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}x}{4!} x^4 + \frac{f^{(5)}x}{5!} x^5$$

• **2.º Passo** – Calcular as derivadas

$$f(x) = \sin x \longrightarrow f(0) = \sin(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{(1)}(0) = \cos(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x \longrightarrow f^{(2)}(0) = -\sin(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \longrightarrow f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1 \longrightarrow \text{Ímpares}$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \longrightarrow f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \longrightarrow f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1$$

• **3.º Passo** – Juntar

$$T_0^5(\sin x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

——— // ———

Ⓑ Seja $f(x) = \ln(x-1)$, $x \in]1, +\infty[$.

(i) Calcule $T_2^{m}(f(x))$ — grau m; $c=2$

• **1.º Passo**

$$T_2^m(f(x)) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k$$

• **2.º Passo**

$$f(x) = \ln(x-1) \longrightarrow f(2) = \ln(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{x-1} \longrightarrow f^{(1)}(2) = \frac{1}{2-1} = 1 = +0!$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} \longrightarrow f^{(2)}(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1 = -1!$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \longrightarrow f^{(3)}(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2 = +2!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(x-1)^4} \longrightarrow f^{(4)}(2) = \frac{-6}{(2-1)^3} = -6 = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(x-1)^5} \longrightarrow f^{(5)}(2) = \frac{24}{(2-1)^3} = 24 = +4!$$

$\vdots$

Sequência

Podia-se provar que

Para $k = 1, 2, 3, \dots$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x-1)^k} \longrightarrow f^{(k)}(2) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(2-1)^k} = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

• 3.º Passo

$$T_2^m(f(x)) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k = \underbrace{\frac{\cancel{f(2)}^{0}}{\cancel{0!}} \times \cancel{(x-2)^0}}_{1.º\ \text{termo}\ (k=0)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}(x-2)^k}_{k=1,2,3,\dots}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}\cancel{(k-1)!}}{k\cancel{!}}(x-2)^k = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{(x-2)^k}{k}$$

(ii) Calcule $R_2^m(f(x))$ (Resto de Lagrange para $f(x) = \ln(x-1)$, grau m, em torno de $x=2$)

$$\boxed{R_2^m(f(x)) = \frac{f^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!}(x-2)^{m+1}}$$

Para $k = 1,2,3,\dots$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x-1)^k}$$

Como sabemos $f^{(k)}(x)$ para $k = 1,2,3\dots$

$$R_2^m(f(x)) = \frac{(-1)^{m+\cancel{1}-\cancel{1}}\,(m+1-1)!\,(x-2)^{m+1}}{(\theta-1)^{m+1}\,(m+1)!} = \frac{(-1)^m\,(x-2)^{m+1}}{(\theta-1)^{m+1}\,(m+1)}$$

$\theta \in$ inter $(2, x)$

$\theta \in]x, 2[$ ou $\theta \in]2, x[$

(iii) Use $T_2^3(\ln(x-1))$ (3.º grau) para calcular uma aproximação

Podia ter sido escolhido outro

um ponto em torno do $c=2$

$$f(2.1) = \ln(2.1-1) = \ln(1.1)$$

$$\boxed{T_2^m(f(x)) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1}\frac{(x-2)^k}{k}}$$

$$\ln(1.1) \simeq T_2^3(\ln(2.1-1)) = \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1} \frac{(2.1-2)^k}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} (-1)^{k-1}\frac{(0,1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \times 10^{-k}$$

$$\frac{1}{10} = 0,1$$

$$\frac{1}{200} = \frac{0,1}{20} = \frac{0,01}{2} = 0,005$$

$$\frac{1}{3000} = \frac{0,1}{300} = \frac{0,01}{30} = \frac{0,001}{3} = 0,0003333\dots$$

$$= \frac{10^{-1}}{1} - \frac{10^{-2}}{2} + \frac{10^{-3}}{3}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} = 0.1 - 0.005 + 0,00033(3)$$

$$= 0,095 + 0,00033(3)$$

$$= 0,09533(3)$$

(iv) Obtenha um majorante para $\left| R_2^3 \left(\ln(2.1-1) \right) \right|$ (qual é o maior erro possiv.)

Já sabemos que:

$$R_2^n(\ln(x-1)) = \frac{(-1)^n (x-2)^{n+1}}{(\theta-1)^{n+1}(n+1)}$$

$$\left| R_2^3(\ln(1.1)) \right| = \left| \frac{(-1)^3 (2.1-2)^{3+1}}{(\theta-1)^{3+1}(3+1)} \right| = \left| \frac{-(0,1)^4}{4(\theta-1)^4} \right| = \left| \frac{10^{-4}}{4(\theta-1)^4} \right|$$

como $x = 2.1 > c = 2$

logo $\theta \in \,]2, 2.1[$ (c, x)

Para encontrar um majorante basta definir $\theta = 2$, pois para $\theta \in]2, 2.1[$ o erro será sempre menor (o θ está no denominador)

$$\leq \frac{10^{-4}}{4(2-1)^4} = 0,25 \times 10^{-4} \leq \underline{0,5 \times 10^{-4}}$$

Para um erro absoluto de $0,5 \times 10^{-k}$ a aproximação tem k casas decimais corretas

Conclusão Importante:

- Pelo $T_2^3(\ln(2.1-1))$ verificamos que $\ln(2.1-1) \simeq 0,09533(3)\ldots$
- Verificamos também que como $\left| R_2^3(\ln(2.1-1)) \right| \leq 0,5 \times 10^{-4}$ a aproximação tem 4 casas decimais corretos

verifica-se que 4 casas decimais estão corretos

Valor verdadeiro : $\ln(2.1-1) = \boxed{0,0953}\,101798\ldots$

Valor aproximado : $\ln(2.1-1) \simeq \boxed{0,0953}\,33333(3)\ldots$

Isto tem utilidade, por exemplo, para os computadores armazenarem estes valores com a precisão que necessitam

(c) Considere $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_0^+$

(i) Mostre que numa vizinhança de $c = 1$:

$$f(x) \simeq \underbrace{1 + \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x+1)^2}{8}}_{T_1^2(\sqrt{x})}$$

- 1.º Passo

$$T_1^2(f(x)) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$$

$$= f(1) + f^{(1)}(x)(x-1) + f^{(2)}(x)\frac{(x-1)^2}{2}$$

• 2.º Passo

$$f(x) = x^{1/2} \longrightarrow f(1) = 1^{1/2} = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2} \times x^{-1/2} \longrightarrow f^{(1)}(1) = \frac{1^{-1/2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \longrightarrow f^{(2)}(1) = -\frac{1^{-3/2}}{4} = -\frac{1}{4}$$

• 3.º Passo

$$T_1^{2}(f(x)) = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8}$$

c.q.m.

(ii) Determine um valor aproximado de $\sqrt{1.01}$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aprox. é inferior a 1×10^{-7}

$$\sqrt{1,01} \simeq T_1^{2}(f(0,01)) = 1 + \frac{1,01-1}{2} - \frac{(1,01-1)^2}{8}$$

$$= 1 + \frac{0,01}{2} - \frac{(0,01)^2}{8}$$

$$= 1 + \frac{10^{-2}}{2} - \frac{10^{-4}}{8}$$

$$\frac{1}{8} = 0,125$$

$$= 1 + 0,5 \times 10^{-2} - 0,125 \times 10^{-4}$$

$$\begin{array}{r} 1,0050000 \\ -\,0,0000125 \\ \hline 1,0049875 \end{array}$$

$$= 1 + 0,005 - 0,0000125$$

$$= 1,005 - 0,0000125 = 1,0049875$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2}$$

$$\left| R_1^{2}(\sqrt{x}) \right| = \left| \frac{f^{(2+1)}(\theta)}{(2+1)!} (x-1)^{2+1} \right|$$

$$= \left| \frac{\cancel{3}\,\theta^{-5/2}}{8 \times \cancel{3} \times 2} (x-1)^3 \right| = \left| \frac{\theta^{-5/2} (x-1)^3}{16} \right|$$

$$\left| R_1^{2}(\sqrt{1,01}) \right| = \left| \frac{\theta^{-5/2} (0,01)^3}{16} \right| = \left| \frac{(10^{-2})^3}{16\,\theta^{5/2}} \right| \leq \left| \frac{10^{-6}}{16 \times 1^{5/2}} \right| = 0,0625 \times 10^{-6}$$

$\theta \in]1, 1.01[$

$$= 0,625 \times 10^{-7} \leq 10^{-7}$$

• Logo ao fazer a aproximação $\sqrt{1,01} \simeq T_1^{2}(\sqrt{1,01}) = 1,0049875$ o erro cometido é inferior a 10^{-7}