Aula 10

Funções reais de várias variáveis

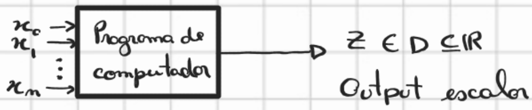
subconjunto de $\mathbb{R}^m$ — conjunto de chegada é $\mathbb{R}$

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

logo z é escalar

$$\underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_m)}_{\text{vetor de } \mathbb{R}^m} \longmapsto z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

ex:.

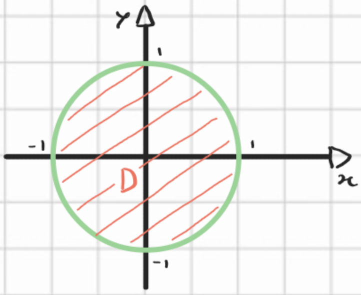


$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$\sqrt{(\cdot)}$ só tem significado se $(\cdot) \geq 0$

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff \boxed{x^2 + y^2 \leq 1}$$

Círculo de centro em $(0,0)$ e raio $R = \sqrt{1} = 1$ (neste caso o círculo inclui a fronteira)

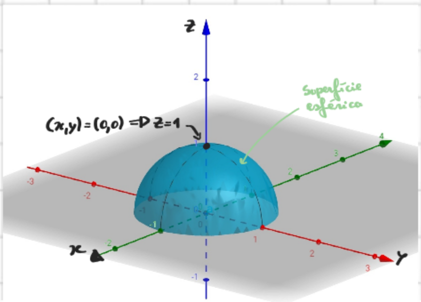


$CD_f = \mathbb{R}_0^+$, pois $\sqrt{(\cdot)}$ percorre todos os valores de $\mathbb{R}_0^+$ quando $(x, y) \in D$

Gráfico de f:

$$G = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \}$$

Representação gráfica:



$1 - x^2 - y^2 =$ constante, temos uma circunferência $x^2 + y^2 = 1$

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

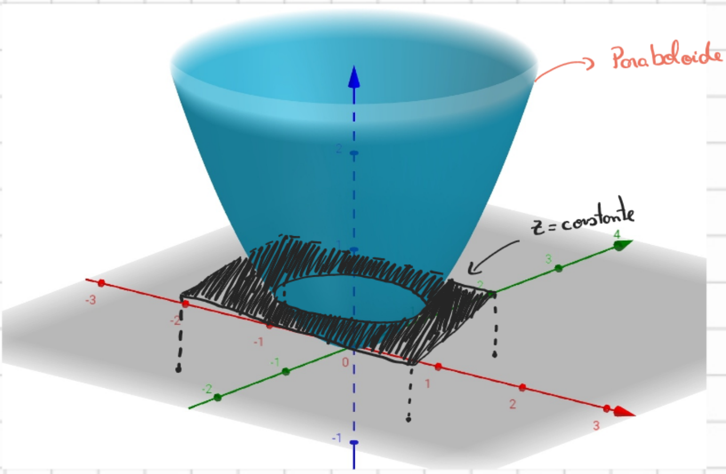
$$(x,y) \hookrightarrow z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

$D = \mathbb{R}^2$

$CD = \mathbb{R}_0^+$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : \; z = x^2 + y^2\}$$

Representação gráfica:

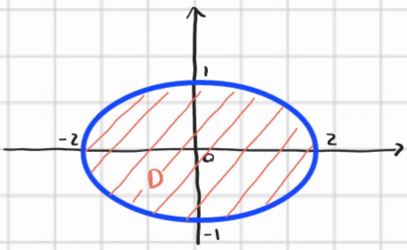


Slide #5

- $f(x,y) = x^2 + y^2$
- $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

$$4 - x^2 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x^2 + 4y^2 \leq 4}$$

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + 4y^2 \leq 4\} \;, \; CD_f = \mathbb{R}_0^+$$

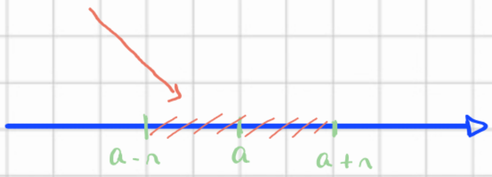


D é o interior da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ incluindo a fronteira

Vizinhanças

Em $\mathbb{R}$ definimos vizinhanças abertas de centro em a e raio r:

$$V_r(a) =]a-r, a+r[$$



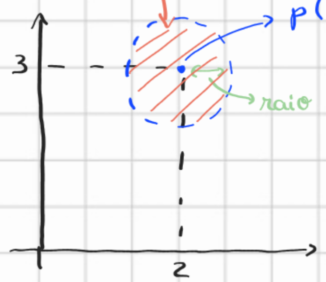
$V_r(a)$ é o conjunto de pontos de $\mathbb{R}$ cuja distancia ao ponto a é menor que r

Bolas abertas e bolas fechadas

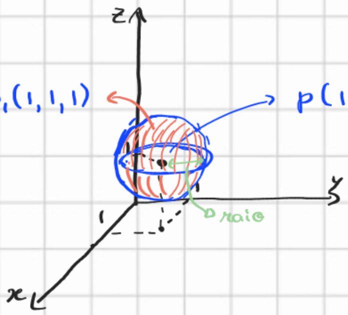
Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ definimos Bolas abertas

$B_r(p)$ = conj. de pontos de $\mathbb{R}^n$ que estão a uma distância de $p \in \mathbb{R}^n$ menor que r

" $\mathbb{R}^2$:



" $\mathbb{R}^3$:

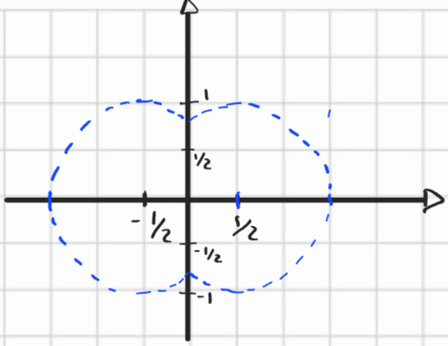


? Ver melhor $\boxed{\text{Slide 9}}$

int(D) - O interior de D é o conjunto de todos os pontos interiores (existe bola aberta contida em D)
ext(D) - O exterior de D é o conjunto de todos os pontos exteriores (ponto interior do complementar)
fr(D) - A fronteira de D é o conjunto de todos os pontos fronteiros (bola aberta tem pontos $\notin D$)
(D') - O derivado de D é o conjunto de todos os pontos de acumulação

Slide #12

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 < 1}_{\text{Pontos que estão a uma distância inferior a 1 de } (\frac{1}{2},0)} \vee \underbrace{(x+\tfrac{1}{2})^2 + y^2 < 1}_{\text{" de } (-\frac{1}{2},0)}\}$$



- Complemento de D: $\mathbb{R}^2 \setminus D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq 1 \wedge (x + 1/2)^2 + y^2 \geq 1\}$

- $Q = (-\frac{1}{2}, 0)$ é um ponto interior de D

- $A = (0, 2)$ é um ponto exterior de D (porque é interior de $\mathbb{R}^2 \setminus D$)

- $P = (\frac{1}{2}, 1)$ é um ponto fronteiro de D

- $\text{int}(D) = D$, portanto D é aberto

- $\text{frt}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1 \wedge x \leq 0] \vee [(x + \frac{1}{2})^2 + y^2 = 1 \wedge x > 0]\}$

- $\text{ext}(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-x + \frac{1}{2})^2 + y^2 > 1 \wedge (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 > 1\}$

- $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq 1 \vee (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq 1\}$

Derivado de D (conjunto dos pontos de acumulação)

- D é limitado porque, por exemplo, $D \subset B_3(0,0)$

- D não é fechado apesar de ser limitado, D não é compacto

Outro exemplo (tenho foto 24/03)

"Ex:. São abertos ou fechados os seguintes conjuntos?

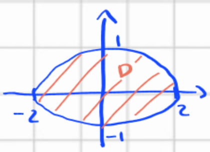
a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \overset{x \leq y}{x - y \leq 0}\}$

- Não é compacto, porque não é limitado
- D é um semiplano que inclui fronteira, logo é fechado
  $\text{frt}(D) \subset D$

b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}$

$(\frac{x}{1})^2 + (\frac{y}{\frac{1}{2}})^2 = 4 \rightarrow$ fronteira é uma elipse

x	y
0	± 1
± 2	0



- $\text{frt}(D) \subset D$, logo D é fechado
- Como $D \subset B_3(0,0)$, logo D é limitada

} Compacto

Outros exemplos (tenho foto 24/03)