Aula 05

→ 1º miniteste : 17/03 (escolhas multiplas a descontar)

- Série de potências
- Teorema de Taylor
- Conv. de Taylor
- Materia até 10/03 ...

Slide #94 Extra

1. Represente gráficamente os primeiros pontos...

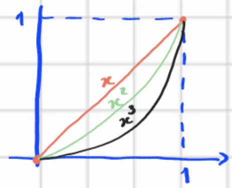
a) $f_n(x) = x^n$

$f_1(x) = x^1$

$f_2(x) = x^2$

$f_3(x) = x^3$

$\vdots$



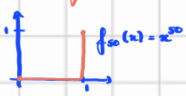
Se $n=50$ dá algo do género:

Slide #96 Extra

$\forall x \in [0,1[\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$

Se $x=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 1^{+\infty} = 1$

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{n\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\in[0,1[\\ 1 & \text{se } x=1 \end{cases}$$



b) $g_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $x\in[0,1]$

$g_1(x) = \dfrac{x}{1}$

$g_2(x) = \dfrac{x}{2}$

$g_3(x) = \dfrac{x}{3}$

$\vdots$

$\forall x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$, pois $0 \le \dfrac{x}{n} \le \dfrac{1}{n}$

Logo, $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 \le \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n}}_{=0} \le \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

$$g_n(x) = \frac{x}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} g(x) = 0,\ \forall x\in[0,1]$$

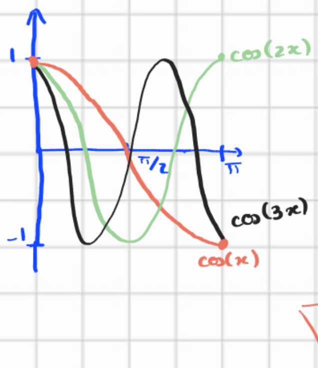
EXTRA) $h_n(x) = \cos(nx)$, $x\in[0,\pi]$

$h_1(x) = \cos(x)$

$h_2(x) = \cos(2x)$

$h_3(x) = \cos(3x)$

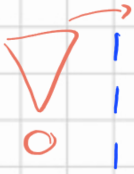
$\vdots$



Se $x=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\times 0) = \cos(0) = 1$

Se $x=\pi$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ par} \\ -1 & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}$

$\hookrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ Não existe



Basta não existir limite neste ponto para dizermos que a sucessão de funções $h_n(x) = \cos(nx)$ não converge (ou que não tem limite pontual)

—— // ——

$A \in \mathbb{R}$ e existe um número M tal que:

$$x \le M, \ \forall x \in A, \text{ então } M \text{ é majorante de } A$$

Ex:

$A = [1,3] \cup [5,6] \cup \{10\}$

$M = 11$ é majorante de A ($x \le 11, \ \forall x \in A$)

- O menor dos majorantes designa-se por supremo ($\sup A$)

$$S = \sup A = 10$$

- Se $\sup A \in A$ então $\sup A$ é o máximo de A ($\max A$)

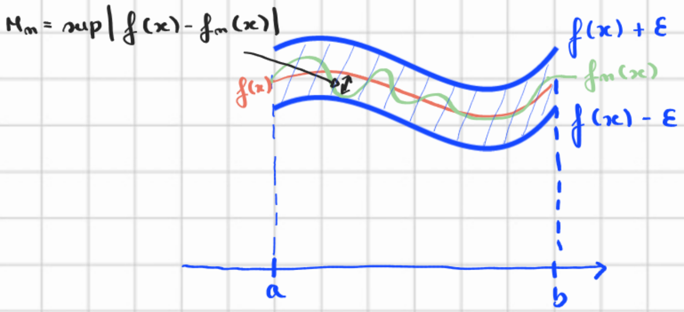
Ex$_2$:

$A = [7, 9[$

$\sup A = 9 \notin A$, logo A não tem máximo

—— // ——

Convergência uniforme de uma série de funções



$\varepsilon > 0$

$$f_n(x) \xrightarrow[u]{n \to +\infty} f(x)$$

convergência uniforme

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f(x)$ em D se a sucessão numérica

$$\boxed{M_n = \sup_{x \in D} CD_{d_n}}$$ tender para zero!

$d_n(x) = |f(x) - f_n(x)|, \ n \in \mathbb{N}$

Slide # 98 Extra

1. Mostra que $g_n(x) = \frac{x}{n}$, $x \in [0,1]$ é uniformente convergente

Já vimos que:

$$g_n(x) = \frac{x}{n} \xrightarrow[P]{n \to +\infty} g(x) = 0,\ x \in [0,1]$$

↳ convergência pontual

Calcule-se agora:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left[\sup_{x \in [0,1]} \left\{ \left| g_n(x) - \overset{\nearrow 0}{g(x)} \right| \right\} \right]}_{M_n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{x \in [0,1]} \left\{ \left| g_n(x) \right| \right\} \right]$$

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} \left\{ \frac{x}{n} \right\} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

M_n é um infinitésimo ✓

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{x \in [0,1]} \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right] = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\frac{x}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Logo $g_n(x) \xrightarrow[U]{n \to +\infty} g(x) = 0$, $x \in [0,1]$

↳ converge uniformente

EXTRA

- Mostre que a sucessão $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ não converge uniformente no intervalo $[0,1]$

Já vimos que:

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow[P]{n \to +\infty} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

A sucessão $f_n(x)$ converge uniformente se o seguinte limite for zero:

$$L = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{\left\{ \underbrace{\left| f_n(x) - f(x) \right|}_{d_n(x)} \right\}}_{M_n}$$

Ora,

$$d_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n - 0 = x^n & \text{se } x \in [0,1[\\ 1^n - 1 = 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$d_n(x) = \begin{cases} x^n & se \quad x \in [0,1[\\ 0 & se \quad x = 1 \end{cases}$$

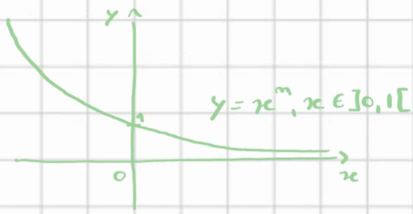
$$L = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sup_{x\in[0,1[} \{x^n\}}_{M_n} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{1^n}_{M_n} = 1 \neq 0,$$ logo a convergência não é uniforme

$\boxed{\text{Exemplo mais conveniente}}$

$$f_n(x) = x^n(1-x^n), \quad x \in [0,1]$$

a) Mostre que $f_n(x)$ converge pontualmente para a função identidade nula em $[0,1]$

- Se $x = 1$, então $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
- Se $x = 0$, então $f_n(x) = 0 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$
- Se $x \in]0,1[$:



$$L = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left[x^n(1-x^n)\right]$$

$$= \cancel{\lim_{n\to+\infty} x^n}^{\,0} \cdot \cancel{\lim_{n\to+\infty} (1-x^n)}^{\,1}$$

$$= 0 \times 1 = 0$$

$$f_n(x) = x^n(1-x^n) \xrightarrow[p]{n\to+\infty} f(x) = 0, \quad x \in [0,1]$$

b) Mostre que a conv. não é uniforme

- Basta provar que para cada $n \in \mathbb{N}$ o valor máximo de $f_n(x)$ é igual a $\frac{1}{4}$ e é atingido em $x = \sqrt[n]{1/2}$

<u>Prova</u>:

$$f_n'(x) = \left[x^n(1-x^n)\right]'$$

$$= n\,x^{n-1}(1-x^n) + x^n(-n\,x^{n-1})$$

$$= n\left(x^{n-1} - 2\,x^{2n-1}\right)$$

Condição necessária de máximo num ponto interior: $f_n'(x) = 0$

T. Fermat

para $x \in]0,1[$

$$f_n'(x) = n\left(x^{n-1} - 2x^{2n-1}\right) = 0$$

$$x^{n-1} - 2x^{2n-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^{n-1} = 2x^{2n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x^{2n-1}}{x^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow x^n = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[n]{1/2} \longrightarrow \text{Maximizante de } f_n(x)$$

Calcula-se o máximo de $f_n(x)$

$$f_n(x) = x^n(1-x^n)$$

$$f_n(\sqrt[n]{1/2}) = \left[(\sqrt[n]{1/2})^n\left(1-(\sqrt[n]{1/2})^n\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}$$, lembrar que $f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \{ |f_n(x) - \underbrace{f(x)}_{=0}| \}$$

Isto tudo para calcular o sup/máximo de $f_n(x)$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \{ |f_n(x)| \}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \boxed{\max_{x\in[0,1]} |f_n(x)|}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0$$, logo a série não converge uniformemente

Séries de Funções, $x \in D \subset \mathbb{R}$

$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ é uma série de funções se $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ for uma sucessão de funções

Ex. nas séries de potências

$$f_k(x) = a_k(x-c)^k$$

Exemplos

Ⓐ $\sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\frac{\sin(x)}{K^3}}^{f_n(x)}, \ x \in \mathbb{R}$ (Usando o Critério de Weierstrass)

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ é conv. (Dirichlet, $\alpha = 3 > 1$) então a série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ converge absolutamente

$$\boxed{f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3} \text{ é contínua em } \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

- Como esta série converge uniformente em $\mathbb{R}$, então:

$\boxed{1}$ $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ é contínua

$\boxed{2}$ $\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right) dx$

Integrar termo a termo

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b \frac{\sin(nx)}{n^3}\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left[-\frac{1}{n} \times \frac{\cos(nx)}{n^3}\right]_a^b\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{\cos(nb)}{n^4} + \frac{\cos(na)}{n^4}\right]$$

$\boxed{3}$ Derivar termo a termo

Como $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ conv. uni

e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ também converge uniformente

Prova pelo C.W.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{\left(\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)}^{f_n'(x)}$$

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, converge (Dirichlet, $\alpha = 2 > 1$)

$$S'(x) = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right]' = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{\sin(nx)}{n^3}\right]' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Derivar termo a termo

Noutra notação:

$$\frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{d}{dx} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$