Funções reais de várias variáveis

Cálculo II - Ag.2


Função
gradiente
variáveis
extremos
R^n

Definição

Uma função real (ou escalar) de n variáveis – um *campo escalar*,

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

é uma correspondência de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$, que associa a cada elemento de D, o domínio da função, um único elemento do *conjunto de chegada* $\mathbb{R}$.

Escreve-se

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & z = f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

ou

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto z = f(x_1, \ldots, x_n),$$

n variáveis independentes: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

variável dependente: z depende de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por meio de f.

Para definir rigorosamente uma função é preciso explicitar o

- domínio,
- o conjunto de chegada e
- uma regra que permita transformar cada elemento do domínio num único elemento do conjunto de chegada.

Domínio de $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \ldots, x_n) \text{ tem significado em } \mathbb{R}\}.$$

Contradomínio de $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

é o conjunto dos valores reais que a função pode tomar.

$$CD_f = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} : (x_1, \ldots, x_n) \in D\}.$$

Gráfico de $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

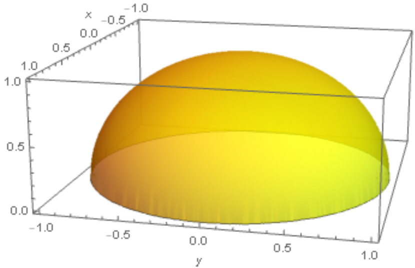
$$G(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in D, z{=}f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Exemplo 1

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

- $D_f = ?$
- $CD_f = ?$
- $G_f = ?$

Hemisfério norte



Exemplo 1

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $CD_f = [0, 1]$

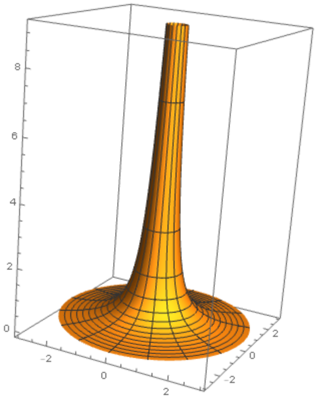
- $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$

Exemplo 2

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

- $D_f = ?$
- $CD_f = ?$
- $G_f = ?$

Trombeta de Gabriel
(Torricelli´s trumpet)



Exemplo 2

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

- $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- $CD_f = \mathbb{R}^+$

- $G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{x^2+y^2}\}$

Exercícios:

Indicar o domínio, o contradomínio e esboçar o gráfico das funções definidas por

- $f(x,y) = x^2 + y^2$
- $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$
- $f(x,y) = \ln(x - y)$

Indicar o domínio e o contradomínio das funções de três variáveis definidas por

- $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2}$
- $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$

Distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$

$$d((a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n))=\sqrt{(a_1-b_1)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}$$

Definição

Uma distância em $\mathbb{R}^n$ é qualquer função d que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $d(a,b)\geq 0$ e $d(a,b)=0 \Leftrightarrow a=b$,

(ii) $d(a,b)=d(b,a)$

(iii) $d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$ (desigualdade triangular).

para quaisquer $a,b,c\in\mathbb{R}^n$.

Questão: Existem outras distâncias, para além da distância euclideana?

Definição

A bola aberta de centro em $p=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{R}^n$ e raio $r>0$ é o conjunto $B_r(p)=\{x\in\mathbb{R}^n : d(x,p)<r\}$, formado pelos pontos que estão à distância de p inferior a r.

Analogamente,

Definição

A bola fechada de centro em $p=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{R}^n$ e raio $r>0$ é o conjunto $\overline{B}_r(p)=\{x\in\mathbb{R}^n : d(x,p)\leq r\}$, formado pelos pontos que estão à distância de p inferior ou igual a r.

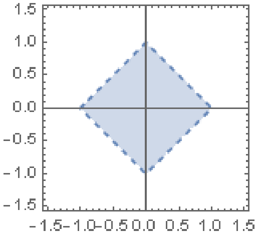
Questão: Qual a forma de uma bola???

distância do motorista de taxi:

$$d_T(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d_T(x,O) = |x_1| + |x_2|$$

$$B_1(0) = \{(x_1,x_2) : |x_1| + |x_2| < 1\}$$

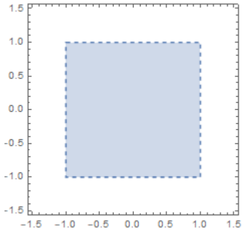


distância do máximo:

$$d_M(x,y) = \max\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\}$$

$$d_M(x,O) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

$$B_1(0) = \{(x_1,x_2) : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}$$



Um ponto p diz-se

- ponto interior de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se existir uma bola aberta de centro em p contida em D.
- ponto de acumulação de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se, para qualquer $r > 0$, a bola $B_r(p)$ tem pontos de $D \backslash \{p\}$, ou seja, $B_r(p) \cap (D \backslash \{p\}) \neq \emptyset$.
- ponto fronteiro de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se qualquer bola aberta de centro em p tem pontos que pertencem a D e pontos que não pertencem a D. Um ponto que não seja de acumulação diz-se um ponto isolado
- ponto exterior de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se for ponto interior do seu complementar.

$\mathrm{int}(D)$ O interior de D é o conjunto de todos os pontos interiores.

$\mathrm{ext}(D)$ O exterior de D é o conjunto de todos os pontos exteriores .

$\mathrm{fr}(D)$ A fronteira de D é o conjunto de todos os pontos fronteiros.

(D') O derivado de D é o conjunto de todos os pontos de acumulação.

Um conjunto é compacto se for limitado e fechado.

Abertos, fechados, limitados

$\mathrm{int}(D)$ O interior de D é o conjunto de todos os pontos interiores.

$\mathrm{ext}(D)$ O exterior de D é o conjunto de todos os pontos exteriores .

$\mathrm{fr}(D)$ A fronteira de D é o conjunto de todos os pontos fronteiros.

(D') O derivado de D é o conjunto de todos os pontos de acumulação.

Um conjunto D é

- aberto se todos os seus pontos são pontos interiores de D, isto é, se $D = \mathrm{int}(D)$.
- fechado se todos os pontos de fronteira de D lhe pertencem, isto é, se $\mathrm{fr}(D) \subseteq D$.
- limitado se existir uma bola $B_r(0)$ tal que $D \subseteq B_r(0)$.

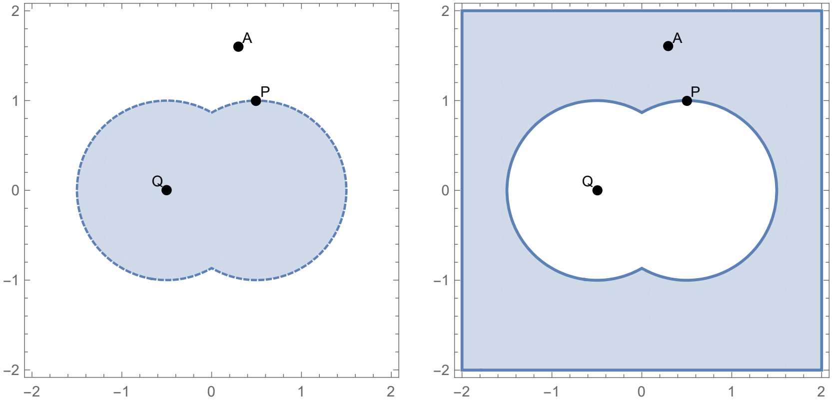
Um conjunto é compacto se for limitado e fechado.

- O interior de um conjunto coincide com o exterior do seu complementar.
- Um conjunto é aberto sse o seu complementar é fechado.
- Há conjuntos que não são abertos nem fechados.
- Há conjuntos que são abertos e fechados!

(Ver Guião 4, em http://elearning.ua.pt)

Exemplo

$$D = \{(x,y) : (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 < 1 \vee (x+\frac{1}{2})^2 + y^2 < 1\}$$

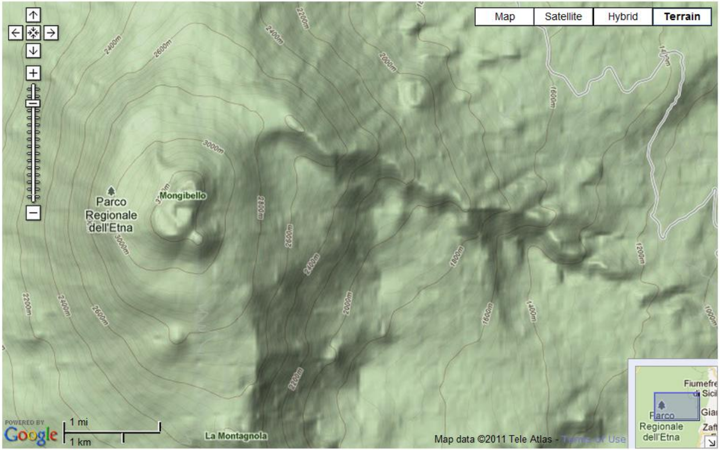


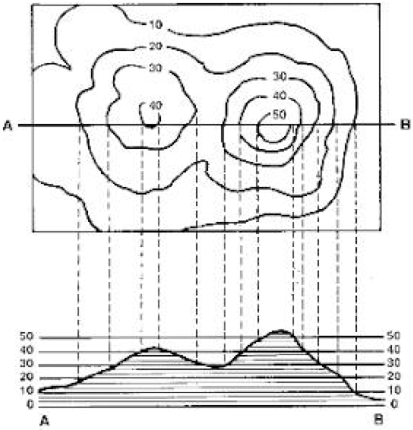
São abertos ou fechados os seguintes conjuntos?

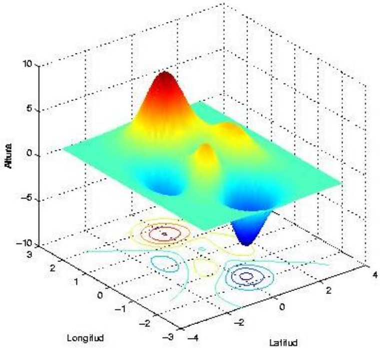
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x - y \leq 0\}$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + 4y^2 \leq 4\}$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 0 < x^2 + y^2 < 1\}$
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; 0 < z \leq 4\}$
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$
- $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

Quais deles são compactos?

Curvas de nível




10
20
30
40
30
40
50
A
B
50
40
30
20
10
0
A
B


Altura
Longitud
Latitud

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Curva de nível associada a k ($k \in \mathbb{R}$) é o conjunto

$$C_k = \{(x,y) \in D : f(x,y) = k\},$$

isto é, o conjunto dos pontos do domínio de f para os quais o valor da função é k.

$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Superfície de nível associada a k ($k \in \mathbb{R}$) é o conjunto

$$S_k = \{(x,y,z) \in D : f(x,y,z) = k\}.$$

E, definem-se de modo análogo as hiperfícies de nível, para funções com mais que três variáveis, as quais não se podem visualizar geometricamente.

Descrever geometricamente as curvas de nível das funções

- $f(x, y) = x^2 + y^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

Descrever geometricamente as superfícies de nível das funções

- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

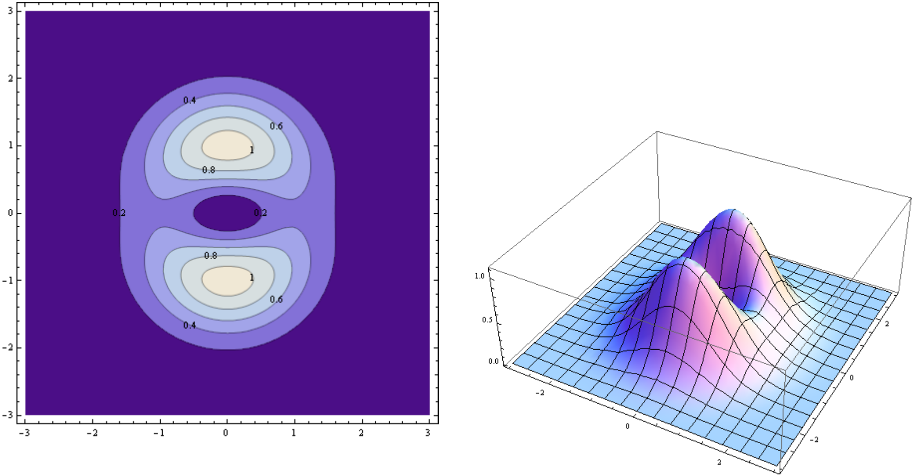
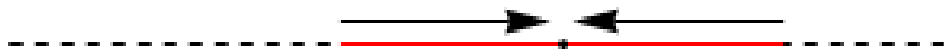
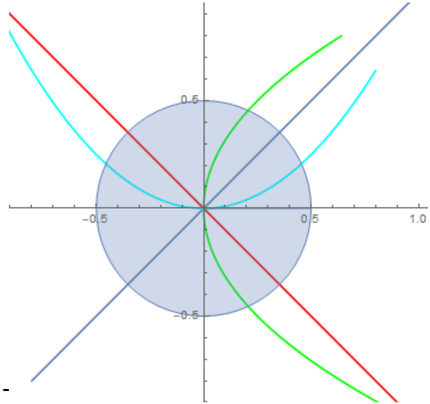


Figura: Curvas de nível e gráfico de $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)\, exp(-x^2 - y^2)$

Limites e continuidade de funções reais de várias variáveis





$n = 1$ $n = 2$

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e (a, b) um ponto de acumulação do seu domínio.

O limite da função f quando (x, y) tende para (a, b) é o valor L,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L,$$

se para toda a sucessão (x_k, y_k) de pontos de $D\backslash\{(a, b)\}$ tais que $x_k \to a$ e $y_k \to b$, a sucessão das imagens, $(f(x_k, y_k))$, converge para L.

Exemplo: O limite de $f(x, y) = \dfrac{3x^2 y}{x^2 + y^2}$ no ponto $(0, 0)$ é 0. Porquê?

Mas o limite de $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x > 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$ no ponto $(0, 0)$ não existe!

Porquê?

Teorema (álgebra dos limites)

Sejam $f, g\ :\ D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções escalares e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real com $f(D) \subseteq I$ tais que $\lim_{x \to p} f(x) = a$, $\lim_{x \to p} g(x) = b$, $\lim_{t \to a} \alpha(t) = c$ e p um ponto de acumulação de D. Então

- **(i)** $\lim_{x \to p} (f(x) + g(x)) = a + b$;
- **(ii)** $\lim_{x \to p} \lambda f(x) = \lambda a$, para todo o escalar λ;
- **(iii)** $\lim_{x \to p} f(x) g(x) = ab$;
- **(iv)** $\lim_{x \to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, se $b \neq 0$;
- **(v)** $\lim_{x \to p} (\alpha\ o\ f)(x) = c$.

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função e $p \in D$.

Definição

f é contínua no ponto p se para qualquer sucessão $(x_k) \in D$ tal que $x_k \to p$ se tem $f(x_k) \to f(p)$.
O domínio de continuidade de f é o conjunto de todos os pontos onde a função é contínua. A função f diz-se contínua se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Teorema

Sejam $f, g \ : \ D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções escalares e $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real com $f(D) \subseteq I$.

(i) Se f e g são funções contínuas no ponto p então $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ (sempre que $g(p) \neq 0$), e λf, para todo o escalar λ, são funções contínuas em p.

(ii) Se f é contínua em p e α é contínua em $f(p)$ então $\alpha \ o \ f$ é contínua em p.

Aplicação

A função $f(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(0, 0) = 1$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Em particular, são funções contínuas

- as funções constantes
- as projecções (para duas variáveis as projecções são as funções definidas por $f(x, y) = x$ e $g(x, y) = y$)
- as funções polinomiais
- as funções trigonométricas, exponencial, logarítmica
- quaisquer funções que envolvam somas, diferenças, produtos, quocientes e composições de funções polinomiais e outras funções contínuas conhecidas.

Aplicação

A função $f(x, y) = \sin x + \cos xy^2 + e^y$ é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Teorema de Weirstrass

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua, definida num conjunto D fechado e limitado (i.e., um compacto). Então f atinge em D um mínimo e um máximo absolutos.

Estudar o domínio de continuidade das funções

- $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$
- $f(x,y,z) = x^3 z^2 - xy + y^3 - 4$
- $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy-1}$
- $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$
- $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Estudar o domínio de continuidade das funções

- $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$
- $f(x, y, z) = x^3 z^2 - xy + y^3 - 4$
- $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy-1}$
- $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$
- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Será que o domínio de continuidade de uma função coincide sempre como domínio de uma função?

Proposição 1

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $A_1 \ldots A_n \subseteq D$ ($n \in \mathbb{N}$) com $D = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ e p um ponto de acumulação de A_i para qualquer $i \in \{1 \ldots n\}$. Se existirem os limites

$$\lim_{x \to p} f_{|A_i}(x) \; (i = 1, \ldots, n)$$

e tiverem todos o mesmo valor L então existe o limite de f em p e temos $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Aplicação

Considere a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{se} \quad y > 0 \\ x^2 + y^2 & \text{se} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

O $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$ existe. Qual é o seu valor?

Proposição 2

Sejam f e u funções reais de duas variáveis (resultado análogo é válido para n variáveis) e g uma função real de variável real, tais que $f(x,y) = g(u(x,y))$. Se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = c \ \text{ e } \ \lim_{z\to c} g(z) = L$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{z\to c} g(z) = L.$$

Aplicação

O limite da função $f(x,y) = \frac{1-e^{x-y}}{x-y}$ no ponto $(0,0)$ é -1 .

Proposição 3

Sejam f e g funções reais definidas em $D \subseteq \mathbb{R}^n (n \geq 2)$. Se $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ e g é uma função limitada numa vizinhança de x então $\lim_{x \to p} (f(x)g(x)) = 0$.

Aplicação

O limite da função $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ no ponto $(0, 0)$ é 0.

Não existência de limite

Em geral, provar que determinado limite não existe é mais simples do que provar que existe!!

Limites trajetoriais

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A e B subconjuntos de D e p um ponto de acumulação de A e de B. Se pelo menos um dos limites $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to p \\ x \in B}} f(x)$ não existe ou, existindo ambos se tem

$$\lim_{\substack{x \to p \\ x \in A}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to p \\ x \in B}} f(x)$$

então não existe $\lim\limits_{x \to p} f(x)$.

Aplicação

Mostrar que não existe o limite da função $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ no ponto $(0, 0)$ por dois processos: 1. aplicando este resultado;
2. Calculando os limites direcionais.

Limites iterados

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se existindo ambos os limites iterados se tem

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \neq \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

então não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Limites iterados

Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se existindo ambos os limites iterados se tem

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{y \to b} f(x, y) \right) \neq \lim_{y \to b} \left(\lim_{x \to a} f(x, y) \right)$$

então não existe $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$.

Aplicação

O limite da função $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no ponto $(0, 0)$ não existe.

- Não existe
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2},$$
como já se mostrou, ainda que existam e tenham o mesmo valor os limites iterados!!
- A função definida por
$f(x,y) = x\sin\frac{x}{y} + y\sin\frac{y}{x}$ se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, $f(0,y) = f(x,0) = 0$ tem limite 0 o ponto $(0,0)$, embora não existam os limites iterados!!

Determine, se existirem,

- $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2 + 5xy - y^3}$$
- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$
- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Aceda a http://siacua.web.ua.pt/ onde se encontra uma vasta coleção de exercícios com resolução detalhada.