Aula 06

Slide #102 EXTRA

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n^2}}_{f_n(x)}, \quad x \in [0,1] = D$

$$0 \leq |f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \frac{|x^n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D$$

E como, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ conv. (Dirichlet $\alpha = 2 > 1$) então pelo C.W. a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ conv. uniformemente em $D = [0,1]$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{\cos(nx)}{n^3}}_{f_n(x)}, \quad x \in [0, 2\pi] = D$

$$0 \leq |f_n(x)| = \left|\frac{\cos(nx)}{n^3}\right| = \frac{\overbrace{|\cos(nx)|}^{\in[0,1]}}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 2\pi]$$

E como, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ é conv. (Dirichlet $\alpha = 3 > 1$) então, pelo C.W., a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ conv. unif em $D = [0, 2\pi]$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 + x^4}$ em $D = \mathbb{R}$

$$0 \leq \left|\frac{1}{4n^2 + \underbrace{x^4}_{\geq 0}}\right| \leq \frac{1}{4n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ conv., o C.W. conclui que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2+x^4}$ conv. unif. em $\mathbb{R}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}, \quad x \in [0, +\infty[= D$

Note que $(x+2)^n \geq 2^n, \forall x \in D$

$$0 \leq |f_n(x)| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n(x+2)^n}\right| \leq \frac{1}{n\,2^n}, \quad \begin{array}{l}\forall n \in \mathbb{N} \\ \forall x \in [0, +\infty[= D\end{array}$$

Ora, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n}$ conv.

Basta comparar com $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, geométrica, $r = \frac{1}{2} \in]-1,1[$

$$\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pelo C.W:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 + x^4} \text{ conv. unif. em } \mathbb{R}_0^+$$

Slide #103 EXTRA

$\boxed{1}$

a)

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Como a série converge uniformente em $\mathbb{R}$. Pelo C.W. isso era quase imediato

$$0 \leq \frac{|\sin(nx)|}{n^4} \leq \frac{1}{n^4}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \text{ conv.}$$

Pelas propriedades das séries de funções: (como a série é unif. conv.)

- $S(x)$ é contínua pois $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^4}$ são contínuas $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b)

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^4}, \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \text{ é diferenciável}$$

$$f_n'(x) = \left[\frac{\sin(nx)}{n^4}\right]' = \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

$f_n'(x)$ é contínua ✓

Então $f \in C^1(\mathbb{R})$

Além disso:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3} \text{ conv. unif.} \quad \text{(Pelo C.W.)}$$

Logo, pelas propriedades da série de funções:

$$S'(x) = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^4} \right]'$$

$$\boxed{S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}}$$

Como $f_n'(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3}$ são funções contínuas

S' também é contínua pelas propriedades

Resposta:

$$S \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e } S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

$\boxed{2}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$, $x \in [1, +\infty[$

a)

$$0 \leq |e^{-nx}| = \frac{1}{e^{nx}} \leq \frac{1}{e^n}, \quad \forall x \in [1, +\infty[, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$x \geq 1$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n$ conv. (geométrica $r = \frac{1}{e} \in]-1, 1[$)

Pelo C.W. a série dada conv. unif em $[1, +\infty[$

b)

$S(x)$ é contínua pois $f_n(x) = e^{-nx}$, $x \in D$

$f_n'(x) = [e^{-nx}] = -n e^{-nx}$ é contínua em D

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-n e^{-nx})$ conv. unif.

$$0 \leq |-n e^{-nx}| = \frac{n}{e^{nx}} \leq \frac{n}{e^{nx}} \leq \frac{n}{e^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Ora $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{e^n}$ conv. (D'Alembert...)

↳ Pelo C.W. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ conv. unif

$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-n e^{-nx})$, S' é contínua pois $f_n'(x) = -n e^{-nx}$ são contínuas

$\boxed{3}$

Falta passar 7/03

—— // ——

Teorema de Abel (sai pouco, mas pode sair...)

—— // ——

Será que a Série de Potências : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-c)^n$ conv. uniformemente ?

Resposta:

- Supondo que o Raio de conv. $R > 0$ ou $R = +\infty$
- Supondo que $x \in \underset{b>a}{[a,b]} \subset]c-R, c+R[$

Sim, a SP conv. uniformemente em $[a,b]$

Prova pelo C.W. :

$$0 \leq |a_n \underbrace{(x-c)^n}_{\leq L}| \leq a_n L, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$$

com $L \in \mathbb{R}^+$, $L = \max_{x \in [a,b]} |x-c|^n$

Séries de Taylor notáveis

(A) $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad |x| < 1}$

(B) $\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$

(C) $\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}}$

(D) $\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}}$

$$\cos x = (\sin x)' = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]'$$

Derivar termo a termo

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)'$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cancel{(2n+1)} \times x^{2n}}{(2\cancel{n+1})(2n)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Normalmente, nos exercícios dão 1 e pedem outro !

$\boxed{\text{Slide \#113 EXTRA}}$

Sabendo $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \; x \in]-1,1[$

Obtenha uma SP para as funções seguintes indicando o maior I_c onde a representação é válida:

$\boxed{\left[-\ln(1-x)\right]' = \frac{1}{1-x} \text{ se } x \in]-1,1[}$

a) $f(x) = -\ln(1-x)$ oOO

$\Rightarrow -\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$

c = centro

Para $x \in [a,b] \subset]-1,1[$ a SP $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ conv. unif.

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,dt$$

Integrando termo a termo:

$$f(x) = -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^x t^n\,dt\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \; x \in]-1,1[$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1-\bullet) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\bullet^{n+1}}{n+1}, \; \bullet \in]-1,1[$$

$\boxed{\bullet \leftarrow (-x)}$ $\rightarrow$ como troca $\boxed{x \leftarrow (-x)}$

$$\ln(1-(-x)) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}, \; (-x) \in]-1,1[$$

$$\ln(1+x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \quad \text{e como } -(-1)^{n+1} = (-1)^n$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

K K

$\boxed{K = n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Mantem-se

$K = 1, 2, 3, \ldots$

$$\ln(1+x) = \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{K+1} x^K}{K}, \; x \in]-1,1[$$

Obtenha a Série de Maclaurin para $f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e diga qual é o maior intervalo onde a representação é válida.

Usando a representação Ⓑ

Falta passar 7/03

$$e^{\bullet} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\bullet^n}{n!}, \quad \bullet \in \mathbb{R}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}, \quad (-x) \in \mathbb{R}$$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$e^x - e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n(1-(-1)^n)}{n!}$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n(1-(-1)^n)}{2\,n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\underbrace{\left[\frac{1-(-1)^n}{2}\right]} \to 0 + \frac{x}{1} + 0 + \frac{x^3}{3!} \cdots$$

$$\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ é par} \\ 1, & n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Sucessão dos n ímpar: $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$

Logo, $\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ oO $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{-(-1) \times 1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad x \in]-1,1[$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1}, \quad x \in]-1,1[$$

Derivar termo a termo

$\to$ Para $n=0 \Rightarrow 0 \times x^{0-1} = 0$