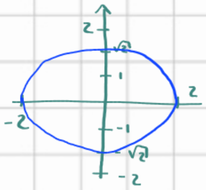
$\boxed{1}$

a) $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{0 < x^2 + 2y^2 < 4}\}$

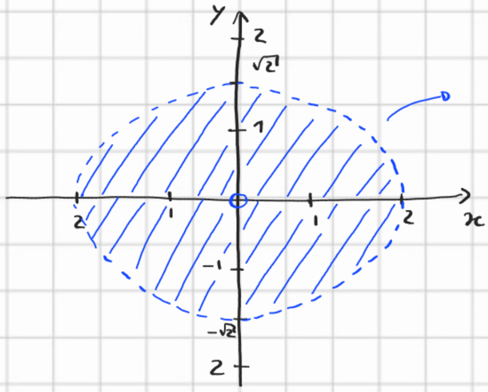
$\to x^2 + 2y^2 > 0 \ \wedge \ x^2 + 2y^2 < 4$

$x^2 + 2y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$

$x^2 + 2y^2 = 4 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1}_{\text{Elipse}} \longrightarrow$



Logo, S representado graficamente:



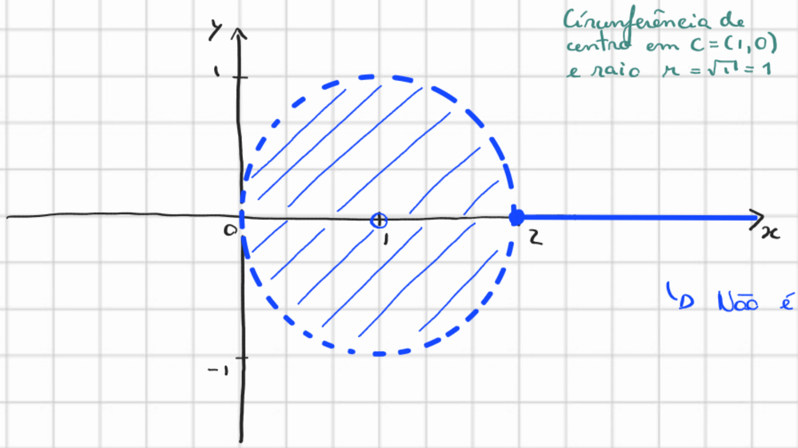
→ É aberto e não é fechado

b) $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{0 < (x-1)^2 + y^2 < 1}\} \cup \{ (x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2 \}$

$\to (x-1)^2 + y^2 > 0 \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 < 1$

$(x-1)^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 0 \quad \Big\| \quad \underbrace{(x-1)^2 + y^2 = 1}$

Circunferência de centro em $C = (1,0)$ e raio $r = \sqrt{1} = 1$



→ Não é aberto nem fechado

$\boxed{5}$

$$f(x,y,z) = e^x \operatorname{sen} x + \cos(z-3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \left[e^x \operatorname{sen} x + \cos(z-3y)\right]'_x$$

$$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \left[e^x \operatorname{sen} x + \cos(z-3y)\right]'_y$$

$$= 3 \sin(z-3y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\sin(z-3y)$$

$\boxed{8}$

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 - 6y \quad \underline{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^3 - 6x + \frac{y}{1+y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = \int 3x^2y^2 - 6y \, dx = 3y^2 \int x^2 \, dx - \int 6y \, dx = \cancel{3}y^2 \frac{x^3}{\cancel{3}} - 6yx + c(y)$$

$$= y^2x^3 - 6yx + c(y), \; c(y) \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

$$f(x,y) = \int 2yx^3 - 6x + \frac{y}{1+y^2} \, dy = 2x^3 \int y \, dy - \int 6x \, dy + \frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} \, dy$$

$$= \cancel{2}x^3 \frac{y^2}{\cancel{2}} - 6xy + \frac{1}{2} \ln|1+y^2| + c(x)$$

$$= x^3y^2 - 6xy + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + c(x), \; c(x) \in \mathbb{R} \text{ em intervalos}$$

Supondo que $c(x) = 0$:

$$\cancel{y^2x^3} - \cancel{6yx} + c(y) = \cancel{x^3y^2} - \cancel{6xy} + \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + 0$$

$$\Leftrightarrow c(y) = \frac{1}{2} \ln(1+y^2)$$

Logo uma solução seria:

$$f(x,y) = x^3y^2 - 6xy + \frac{1}{2} \ln(1+y^2)$$

9

Se $\frac{\partial f}{\partial y} = y^2$, então $f(x,y) = \frac{y^3}{3} + c(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3}{3} + c(x) = 0 + \frac{\partial c(x)}{\partial x} = \boxed{\frac{\partial c(x)}{\partial x}}$$

↳ Não tem componentes de y, logo $\frac{\partial f}{\partial x}$ nunca poderia ser $1 + xy^2$, logo não pode existir f nestas condições

12

a) $f(x,y) = \ln(x) + xy^2$

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \}$

b)

Plano tangente no ponto $(1,2,4)$

↳ $z = \underbrace{f(1,2)}_{4} + \nabla f(1,2) \cdot (x-1, y-2)$

$$= 4 + \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\,(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\,(y-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x} + y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{1}{1} + 2^2 = 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

$$z = 4 + 5(x-1) + 4(y-2)$$
$$\Leftrightarrow z = 4 + 5x - 5 + 4y - 8$$
$$\Leftrightarrow z = 5x + 4y - 9$$
$$\Leftrightarrow 5x + 4y - z - 9 = 0$$

Seja $\vec{v} = (5,4,-1)$ o vetor normal ao gráfico no ponto $(1,2,4)$
reta normal:

$$(x,y,z) = (1,2,4) + \alpha(5,4,-1), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\boxed{13}$

a) $f(x,y,z) = x \operatorname{sen}(yz)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \operatorname{sen}(yz) + x \times 0 = \operatorname{sen}(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 0 \times \operatorname{sen}(yz) + xz\cos(yz) = xz\cos(yz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \times \operatorname{sen}(yz) + xy\cos(yz) = xy\cos(yz)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\operatorname{sen}(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz) \right)$$

b)

- Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e as suas derivadas parciais também são contínuas em $\mathbb{R} \Rightarrow f$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.
- Logo, para todo vetor não nulo $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, existe a derivada de f segundo o vetor u em $p = (1,3,0)$, e temos:

$$D_{\vec{u}} f(1,3,0) = \nabla f(1,3,0) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1+4+1}} = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right)$$

$$\nabla f(1,3,0) = (0, 0, 1 \times 3 \times \underbrace{\cos(0)}_{1}) = (0,0,3)$$

Então:

$$D_{\vec{v}} f(1,3,0) = (0,0,3) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\boxed{14}$

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

a)

$$D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0 \} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

→ Aberto e não é fechado

→ Todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ exceto a origem $(0,0)$

b)

$$\begin{aligned} C_k &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = k \} \\ &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x^2+y^2) = k \} \\ &= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2+y^2 = e^k}_{} \} \end{aligned}$$

→ Circunferências de centro $(0,0)$ e raio $e^{\frac{k}{2}}$

c)

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} \right\} \text{Derivadas parciais contínuas em } D_f \quad (1)$$

- Como f é contínua em D_f e (1) $\Rightarrow f$ é diferenciável em D_f

· Logo para todo o vetor $\vec{v}$ não nulo, a derivada de f no ponto $(1,0)$ segundo $\vec{v}$ é:

$$D_{\vec{v}} f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \vec{v}$$

$\hookrightarrow \vec{v} = (v_x, v_y)$

$\hookrightarrow \nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \right)$

$$D_{\vec{v}} f(1,0) = \left(\frac{2}{1+0}, \frac{0}{1+0} \right) \cdot (v_x, v_y) = 2v_x$$

15

$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3 - z = \sqrt{x^2+y^2} \}$

$D_S = \mathbb{R}^3$

$$\boxed{z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}}$$

Seja $z = f(x,y) = 3 - \sqrt{x^2+y^2}$, o plano tangente no ponto $(3,4,-2)$ é:

$$z = \underbrace{f(3,4)}_{-2} + \nabla f(3,4) \cdot (x-3, y-4)$$

$-(x^2+y^2)^{1/2}$

$-\frac{1}{2}(x^2+y^2) \times 2x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{\cancel{2}} \times (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \times (\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$z' = -2 + \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) \cdot (x-3, y-4)$$

$$\Leftrightarrow z' = -2 + \frac{-3x}{5} + \frac{9}{5} - \frac{4y}{5} + \frac{16}{5}$$

$\times 5$

$$\Leftrightarrow 5z' = -3x - 4y - 10 + 9 + 16$$

$$\Leftrightarrow \boxed{5z' + 4y + 3x + 15 = 0} \longrightarrow \text{Plano tangente}$$

$$\boxed{(x,y,z) = (3,4,-2) + (3,4,5)\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ Reta normal

16

a) $f(x,y,z) = 3xy + z^2$, ponto genérico $p = (x_0, y_0, z_0)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= 3x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 2z \end{aligned}\right\} \nabla f(x,y,z) = (3y, 3x, 2z)$$

b)

$$C_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 4\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3xy + z^2 = 4\}$$

$$3xy + z^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow z = -\sqrt{4-3xy} \vee z = \sqrt{4-3xy}$$

Para o ponto $(1,1,1) \Rightarrow z = 1$, logo consideramos $g(x,y) = z = \sqrt{4-3xy}$, tal que:

$$g(1,1) = 1$$

O plano tangente à função g no ponto $(1,1,1)$ está definido por:

$$z = \underbrace{g(1,1)}_{1} + \nabla g(1,1) \cdot (x-1, y-1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2} \times (4-3xy)^{-1/2} \times (-3y) = -\frac{3y}{2\sqrt{4-3xy}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = -\frac{3}{2\times\sqrt{4-3}} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{3x}{2\sqrt{4-3xy}} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = -\frac{3}{2}$$

$$z = 1 + \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \cdot (x-1, y-1)$$

$$\Leftrightarrow z = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + 4$$

$\times 2$

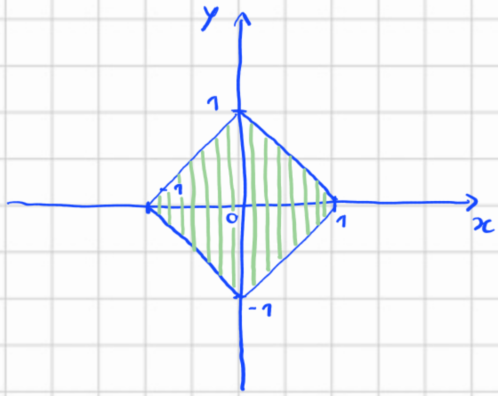
$$\Leftrightarrow 3x + 3y + 2z - 8 = 0$$

$\boxed{17}$ $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

a)

$$|y| \leq 1 - |x| \Rightarrow \begin{cases} y \leq 1 - |x|, & \text{se } y \geq 0 \\ -y \leq 1 - |x|, & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \leq 1 - x, & \text{se } x \geq 0 \wedge y \geq 0 & \boxed{1} \\ y \leq 1 + x, & \text{se } x < 0 \wedge y \geq 0 & \boxed{2} \\ y \geq x - 1, & \text{se } y < 0 \wedge x \geq 0 & \boxed{3} \\ y \geq -x - 1, & \text{se } y < 0 \wedge x < 0 & \boxed{4} \end{cases}$$



b)

$f \in \mathcal{C}^2(D)$

Como D é fechado e limitado $\Longrightarrow$ pelo Teorema de Weierstrass

$\Downarrow$

f admite o maior e o menor valor que f atinge

$\Longleftarrow$ Observando $f(x,y) = x^2+y^2$ em D concluimos que o máximo absoluto é 1 em $(0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)$ e o mínimo absoluto é 0 em $(0,0)$

$\boxed{21}$

a)

$$f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f'_x(x,y) = -\frac{1}{\cancel{2}} \times (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \times (\cancel{2}x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad D_{f'} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{\sqrt{x^2+y^2} \neq 0 \land x^2+y^2 \geq 0}_{x^2+y^2>0}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0\}$$

Logo, como $\underset{(\text{não existe } f'_x(0,0))}{(0,0) \notin D_{f'}} \Longrightarrow f$ não é diferenciável em $(0,0)$

b) Para $(0,0)$ ser maximizante absoluto de $f \Rightarrow f(0,0) \geq f(x,y)$, $(x,y) \in D_f$

$f(0,0) = 0$

Como $f(x) = -\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\geq 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$, logo $f(x,y) \leq 0 \Rightarrow f(x,y) \leq f(0,0)$ c.q.m.

$\boxed{27}$

a) $f(x,y) = xy\,e^{-x-y}$

$$f'_x(x,y) = y e^{-x-y} + x\left[0 + y(-1)e^{-x+y}\right] = y e^{-x-y} - xye^{-x-y}$$

$$f'_y(x,y) = x\left[e^{-x-y} + y(-1)e^{-x-y}\right] = x e^{-x-y} - xy\,e^{-x-y}$$

<u>Sistema de estacionariedade</u>:

$$\begin{cases} y \underbrace{e^{-x-y}}_{\neq 0, \forall x,y \in \mathbb{R}} (1-x) = 0 \\ x \underbrace{e^{-x-y}}_{\neq 0, \forall x,y \in \mathbb{R}} (1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(1-y) = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} x = 1 \\ x(1-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Pontos críticos: $P_0=(0,0)$ e $P_1=(1,1)$

Matriz Hessiana:

$$Hf(x,y)=\begin{bmatrix} \left(ye^{-x-y}-xye^{-x-y}\right)'_x & \left(ye^{-x-y}-xye^{-x-y}\right)'_y \\ \left(xe^{-x-y}-xye^{-x-y}\right)'_x & \left(xe^{-x-y}-xye^{-x-y}\right)'_y \end{bmatrix}$$

$$=(\dots)$$

b) $g(x,y)=x^3-2x^2y-x^2+4y^2$

$$\nabla g(x,y)=\begin{bmatrix} 3x^2-4xy-2x \\ -2x^2+8y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x^2-4xy-2x=0 \\ -2x^2+8y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(3x-4y-2)=0 \\ \end{cases}$$

$P_0=(0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x-4y-2=0 \\ -2x^2+8y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2} \\ -2x^2+6x-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ x=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\times(-2)\times(-4)}}{-4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=1/4 \\ x=1 \end{cases}$$

Pontos críticos: $P_0=(0,0)$
$P_1=(2,1)$
$P_2=(1,1/4)$

Matriz Hessiana:

$$Hg(x,y)=\begin{bmatrix} 6x-4y-2 & -4x \\ -4x & 8 \end{bmatrix}$$

$$Hg(0,0)=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} H_1=0 \\ H_2=-16<0 \end{array}$$

$P_0=(0,0)$ é um ponto de sela

$$Hf(2,1)=\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} H_1=6>0 \\ H_2=8\times6-8\times8<0 \end{array}$$

$8\times6-8\times8$

Logo $P_1=(2,1)$ é um ponto de sela

$$Hg(1, 1/4) = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} H_1 = 3 > 0 \\ H_2 = 24 - 16 > 0 \end{matrix} \Big\} \ P_2 = (1, 1/4) \text{ é um minimizante local}$$

não é global!

$$\lim_{y \to +\infty} g(0, y) = \lim_{y \to +\infty} (4y^2) = +\infty$$

$\boxed{31}$ $f(x,y) = xy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$

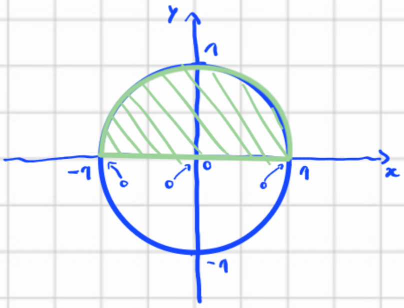
$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

Sistema de estacionariedade:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Logo } P_0 = (0,0) \text{ é um ponto crítico}$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} H_1 = 0 \\ H_2 = -1 < 0 \end{matrix} \Big\} \ P_0 \text{ é um ponto de sela}$$

- Estudemos nos pontos fronteiros de D:



Para $y = 0$: $f(0, y) = 0$

Para $y > 0$:

$f(x,y) = xy$, $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y > 0\}$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} y - 2x\lambda \\ x - 2y\lambda \\ -x^2 - y^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y - 2x\lambda = 0 \\ x - 2y\lambda = 0 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x\lambda \\ \cancel{x} = 4\cancel{x}\lambda^2 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \quad \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \lambda^2 = 1/4 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ \lambda = -1/2 \\ -x^2 - x^2 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = x \\ \lambda = 1/2 \\ -x^2 - x^2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ x^2 = 1/2 \end{cases} \vee \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \\ x^2 = 1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = -1/2 \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{y = -\sqrt{2}/2} \\ \lambda = -1/2 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{y = -\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \lambda = 1/2 \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = 1/2 \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$y > 0$ $\quad$ $y > 0$

Logo: $P_0 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são extremantes!

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \text{Mínimo global}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \longrightarrow \text{Máximo global}$$

$\boxed{32}$

Seja $g(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ a equação que define a distância de (x,y) a $(1,2)$

- Como $g'(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$ tem os mesmos mínimos/máximos, usarei $g'(x,y)$ para o exercício

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{min./max.:} & g'(x,y) \\ \text{Sujeito a:} & x^2+y^2 = 80 \end{array}}$$

$\hookrightarrow x^2+y^2-80=0$

Função lagrangeana:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - \lambda(x^2+y^2-80)$$

$$\Delta \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{bmatrix} 2(x-1) - 2\lambda x \\ 2(y-2) - 2\lambda y \\ -x^2 - y^2 + 80 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x-1}{x} \\ \cancel{2}(y-2) = \cancel{2}\,\frac{x-1}{x}\,y \\ x^2+y^2 = 80 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ y-2 = \left(1 - \frac{1}{x}\right)y \\ \text{———} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ \cancel{1} - 2/y = \cancel{1} - 1/x \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \\ y = 2x \\ x^2 + 4x^2 = 80 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{———} \\ \text{———} \\ x^2 = 80/5 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 5/4 \\ y = -8 \\ x = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 3/4 \\ y = 8 \\ x = 4 \end{cases}$$

Logo: $P_0 = (-4,-8)$ e $P_1 = (4,8)$ são extremantes.

$$f(-4,-8) = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$f(4,8) = \sqrt{(3)^2 + (6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo: $P_0 = (-4,-8)$ é o ponto mais longe e $P_1 = (4,8)$ é o ponto mais perto