

Introdução à Arquitetura de Computadores

Lógica Binária e Álgebra de Boole

Pedro M. Lavrador

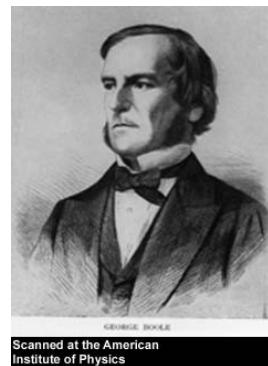
Departamento de Electrónica, Telecomunicações e Informática
Universidade de Aveiro
plavrador@ua.pt

Índice

- Lógica binária.
 - As operações lógicas básicas.
 - Portas Lógicas.
- Álgebra de Boole.
 - Axiomas e teoremas.
 - Soma de Produtos e Produto de Somas.
 - Minimização de funções booleanas.

Introdução

- George Boole (1815-1864)



- Introduziu as variáveis binárias e os três operadores lógicos fundamentais: AND, OR e NOT
- Foi o precursor da lógica binária na qual se baseiam atualmente os sistemas digitais.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

3

Lógica Binária

Operações Lógicas:

- Variáveis lógicas (ou Booleanas):
 - Podem assumir dois valores: 1 ou 0 (V ou F).
- A álgebra booleana fornece as ferramentas matemáticas necessárias: AND, OR e NOT

A	B	A AND B	A	B	A OR B	A	NOT A
0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0	0

- Operandos com n-bits são tratados como uma coleção de n valores:
 - A operação é efetuada de modo independente em cada bit.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

4

Operações Lógicas:

- Operações NAND e NOR

A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NAND: Not AND

A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

NOR: Not OR

28/02/2023

PML – IAC - 2023

5

Operações Lógicas:

- Operação Xclusive OR

A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$A \text{ XOR } B = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$$

Entradas diferentes

- Operação Xclusive NOR

A	B	A XNOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$A \text{ XNOR } B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Entradas iguais

28/02/2023

PML – IAC - 2023

6

Introdução:

- Claude Shannon (1916-2001) provou que era possível construir circuitos elétricos digitais que resolvessem todos os problemas que a Álgebra de Boole pode resolver.
- Dá-se o nome de Porta Lógica (*Logic Gate*) aos circuitos lógicos que implementam as funções lógicas.
 - Uma entrada: Porta NOT
 - Duas Entradas: AND, OR, NAND, NOR, XOR, XNOR
 - Entradas Múltiplas

28/02/2023

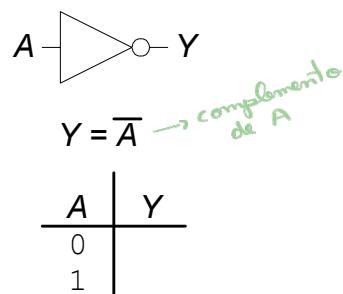
PML – IAC - 2023

7

Introdução:

- Portas Lógicas

NOT



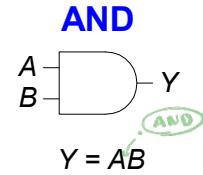
28/02/2023

PML – IAC - 2023

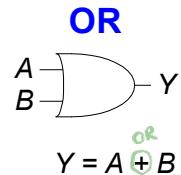
8

Introdução:

- Portas Lógicas



A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

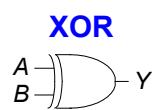
28/02/2023

PML – IAC - 2023

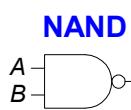
9

Introdução:

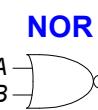
- Portas Lógicas



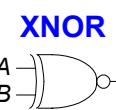
A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

28/02/2023

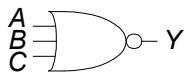
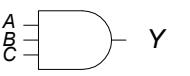
PML – IAC - 2023

10

Lógica Binária

Introdução:

- Portas Lógicas

NOR3  $Y = \overline{A+B+C}$ <table border="1" style="margin-top: 10px; width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	A	B	C	Y	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	AND3  $Y = ABC$ <table border="1" style="margin-top: 10px; width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>Y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	A	B	C	Y	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
A	B	C	Y																																																																						
0	0	0	1																																																																						
0	0	1	0																																																																						
0	1	0	0																																																																						
0	1	1	0																																																																						
1	0	0	0																																																																						
1	0	1	0																																																																						
1	1	0	0																																																																						
1	1	1	0																																																																						
A	B	C	Y																																																																						
0	0	0	0																																																																						
0	0	1	0																																																																						
0	1	0	0																																																																						
0	1	1	0																																																																						
1	0	0	0																																																																						
1	0	1	0																																																																						
1	1	0	0																																																																						
1	1	1	1																																																																						

28/02/2023 PML – IAC - 2023 11

Lógica Binária

Introdução:

- Níveis Lógicos
- Os valores 0 e 1 existem nos circuitos como tensões.

Por exemplo:

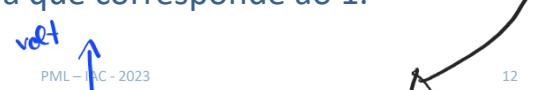
- 0 corresponde a *ground* ou 0V **GND**
- 1 corresponde à tensão de alimentação **VCC**
 - (atualmente $\sim 1.3V$, antes 5V ou 3.3V)

• Então é 1.0V? Corresponde a 0 ou 1?

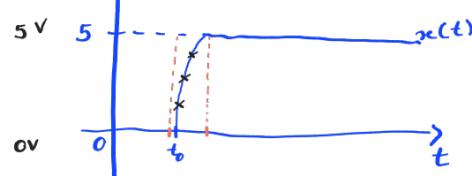
- E 3.2V?

• Há uma gama de tensões que correspondem ao nível lógico 0 e uma gama que corresponde ao 1.

Para os portos lógicos isto não é considerado



 28/02/2023 PML – IAC - 2023 12



Introdução:

- Ruído?
- O que é o ruído?
 - Tudo o que degrada a qualidade do sinal.
 - Pode ser uma resistência, imperfeições da fonte, acoplamento aos circuitos vizinhos...
- Vamos definir agora margem de ruído
 - Quantidade de ruído que suporta antes de causar ERRO

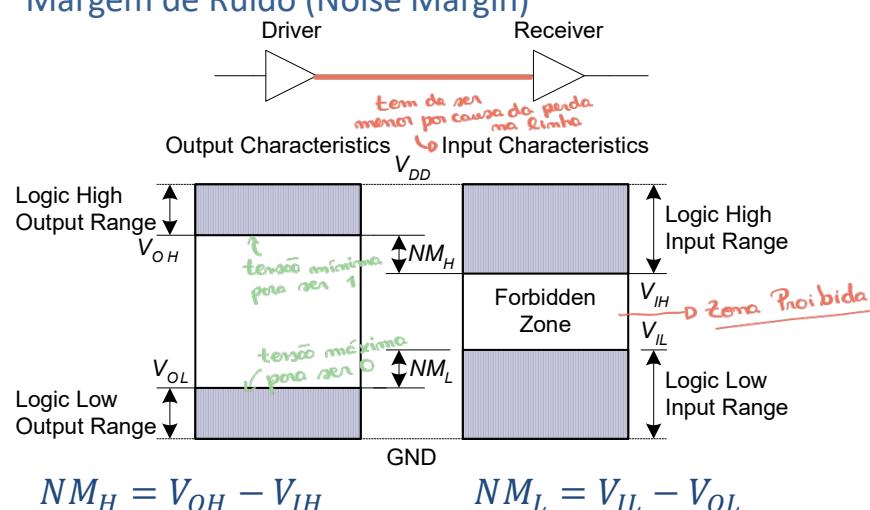
28/02/2023

PML – IAC - 2023

13

Introdução:

- Margem de Ruído (Noise Margin)



28/02/2023

PML – IAC - 2023

14

Introdução:

- Os circuitos lógicos podem ser de 2 tipos:
 - Lógica combinatória
 - Sem memória, i.e.,
 - As saídas são determinadas apenas pelos valores atuais das entradas.
 - Lógica Sequencial
 - Com memória
 - As saídas são determinadas pelas entradas atuais e passadas.

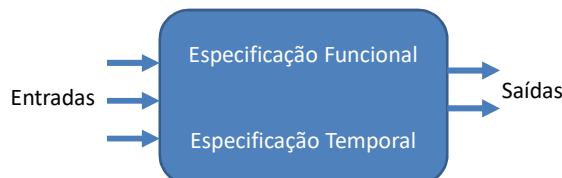
28/02/2023

PML – IAC - 2023

15

Introdução:

- Um **círculo lógico** tem:
 - Entradas
 - Saídas
 - Especificação Funcional → *a que fog?*
 - Especificação Temporal → *quanto tempo demora para a saída ser válida?*



28/02/2023

PML – IAC - 2023

16

Introdução:

- Especificações temporais:
 - Os componentes eletrónicos usados nos circuitos lógicos são contínuos e não discretos:
 - Logo, as transições entre estado não são instantâneas e por isso há um intervalo de tempo desde que as entradas mudam até que o valor da saída estabilize.
 - Durante esse período de tempo pode ocorrer que o valor da saída seja indefinido.
 - Chamamos a esse período **tempo de propagação** e está associado à frequência máxima a que um circuito digital pode operar.
 - A álgebra de Boole descreve o comportamento dos sistemas digitais em regime estacionário sem considerar estas variações nas transições.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

17

Introdução:

- Especificação Funcional descreve a relação (lógica) entre as entradas e a(s) saída(s) do circuito lógico.
- Normalmente é especificada como uma tabela de verdade ou como uma equação Booleana.
 - Vamos estudar agora como obter uma equação Booleana a partir de uma tabela de verdade, e como fazer a sua simplificação, usando:
 - Álgebra de Boole
 - Mapas de Karnaugh
 - Vamos ver também como implementar uma equação usando portas lógicas.

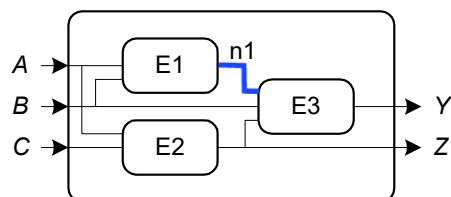
28/02/2023

PML – IAC - 2023

18

Introdução:

- Um circuito lógico pode ser composto por sub-circuitos e, nesse caso, definem-se:
 - Elementos de circuito (E_1, E_2, \dots)
 - Nós
 - Entradas
 - Saídas
 - Internos: n_1



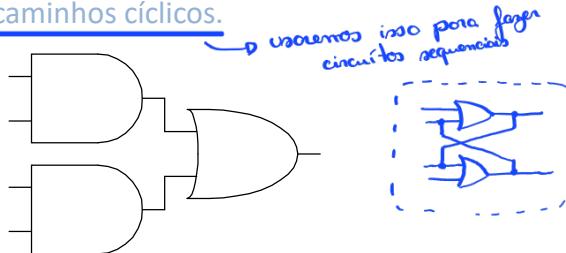
28/02/2023

PML – IAC - 2023

19

Introdução:

- Num circuito combinatório:
 - Cada elemento tem que ser combinatório;
 - Cada nó é uma entrada ou liga a uma (e uma só) saída de um elemento;
 - Não existem caminhos cíclicos.



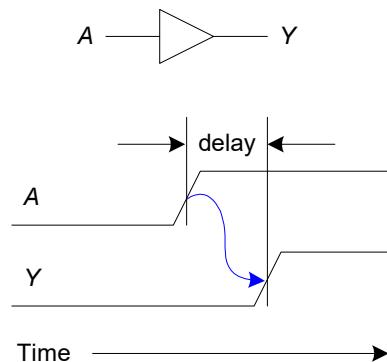
28/02/2023

PML – IAC - 2023

20

Algumas considerações sobre tempo

- Uma alteração no sinal de entrada demora algum tempo a produzir alteração da saída (a propagação não é instantânea).



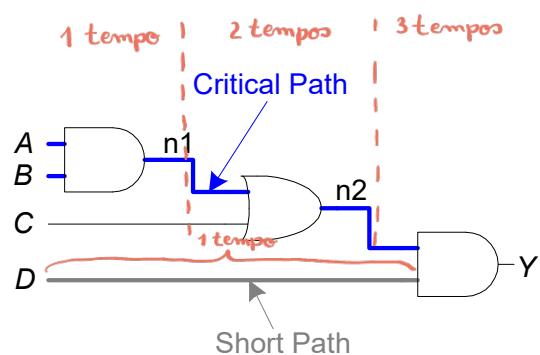
28/02/2023

PML – IAC - 2023

21

Algumas considerações sobre tempo

- Caminho curto e caminho longo.



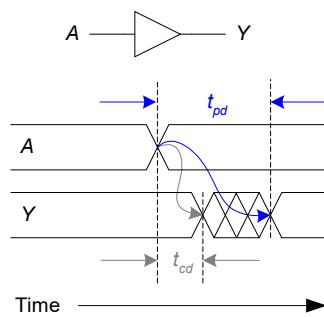
28/02/2023

PML – IAC - 2023

22

Algumas considerações sobre tempo

- Define-se **tempo de propagação (t_{pd})** como o tempo máximo que o sinal demora a propagar-se da entrada para a saída.
- Define-se **tempo de contaminação (t_{cd})** como o tempo mínimo que o sinal demora a propagar-se da entrada para a saída.



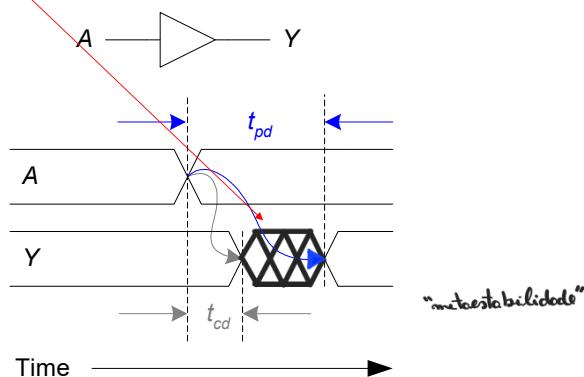
28/02/2023

PML – IAC - 2023

23

Algumas considerações sobre tempo

- Glitch:** quando apenas uma mudança da entrada produz mais do que uma mudança na saída (variações rápidas não previstas)



28/02/2023

PML – IAC - 2023

24

Índice

- Lógica binária.
 - As operações lógicas básicas.
- Álgebra de Boole.
 - Axiomas e teoremas.
 - Soma de Produtos e Produto de Somas.
 - Minimização de funções booleanas.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

25

Álgebra de Boole: Definições e Teoremas

Motivação: O piquenique do Ben

- O Ben foi fazer um piquenique. Ele gosta de piqueniques se não chover e se não aparecerem formigas.
- Escreva uma equação lógica que determine em função de chover e aparecerem formigas se o Ben gosta do piquenique.
 - Definir as entradas
 - Definir a saída
 - Formalizar o sistema.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

26

Motivação: O piquenique do Ben

- O problema consiste em determinar se o Ben gostou ou não do piquenique.
 - Chamamos à variável de saída G.
- As entradas do sistema são:
 - A Chuva: C
 - As Formigas: F
- Podemos escrever a tabela de verdade do problema:

C	F	G
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

28/02/2023

PML – IAC - 2023

27

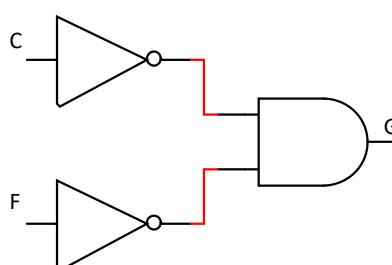
Motivação: O piquenique do Ben

- Podemos agora descrever a saída do problema como:

$$G = \bar{C}\bar{F}$$

- E G pode ser obtido de C e F através do seguinte circuito:

C	F	G
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



28/02/2023

PML – IAC - 2023

28

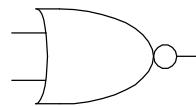
Motivação: O piquenique do Ben

- Podemos também reconhecer a tabela de verdade da função NOR:

$$G = \overline{C + F}$$

- E G pode ser obtido de C e F através do seguinte circuito:

C	F	G
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



28/02/2023

PML – IAC - 2023

29

Representação de Funções

- Uma função lógica pode ser representada, como:
 - Uma tabela de verdade;
 - Uma equação algébrica
 - Um circuito lógico
- Como as três formas representam a mesma função têm que ser equivalentes.
- Vamos estudar:
 - Como passar da Tabela de Verdade para a equação algébrica
 - Como simplificar a equação algébrica
 - Como representar o circuito Lógico

28/02/2023

PML – IAC - 2023

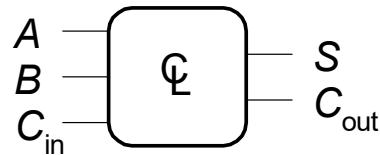
30

Equação Booleana

- Uma equação Booleana permite fazer a especificação funcional da saída em função das entradas:

$$S = F(A, B, C_{in})$$

$$C_{out} = F(A, B, C_{in})$$



$$\begin{aligned} S &= A \oplus B \oplus C_{in} \\ C_{out} &= AB + AC_{in} + BC_{in} \end{aligned}$$

28/02/2023

PML – IAC - 2023

31

Álgebra de Boole: Definições

- Complemento:
– $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$
- Literal: variável ou o seu complemento
– A, \bar{B}, C
- Implicante: Produto de Literais
– $AB, \bar{B}C, ABC\bar{C}$
- Mintermo: Produto que inclui todas as variáveis
– $ABC, A\bar{B}C, AB\bar{C}$
- Maxtermo: Soma que inclui todas as variáveis
– $(A + B + C), (A + \bar{B} + C), (A + B + \bar{C})$

28/02/2023

PML – IAC - 2023

32

Precedências

- Precedência dos operadores:

$$Y = A + BC$$

- Lê-se

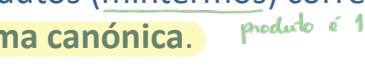
$$Y = (A + B)C \text{ ou } Y = A + (BC) ?$$

- A prioridade mais elevada é do operador NOT, seguindo-se o AND e depois o OR.
– Logo neste caso lê-se $Y = A + (BC)$

28/02/2023

PML – IAC - 2023

33

- ## Álgebra de Boole: Definições e Teoremas
- A tabela de verdade que descreve um problema lógico pode sempre ser descrita como:
 - Uma Soma de Produtos (SoP) 
 - Um Produto de Somas (PoS)
 - A descrição de uma função Booleana como uma Soma de Produtos (mintermos) corresponde à primeira forma canónica. 
 - A descrição como um Produto de Somas (maxtermos) corresponde à segunda forma canónica de representação. 

28/02/2023

PML – IAC - 2023

34

Soma de Produtos (SoP)

- Uma tabela de verdade de N entradas tem 2^N linhas que descrevem o valor da saída para cada combinação diferente das entradas
- Cada linha corresponde a um mintermo, i.e., um produto (AND) de literais *entre ou entrada complementada*
- Cada mintermo assume o valor 1 na sua linha e só nessa linha *produto*
- Somam-se (OR) os mintermos que assumem o valor 1.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

35

Soma de Produtos: Exemplo

1. forma canónica

- Escreva a forma Soma de Produtos de Y que é função de duas entradas, A e B, descrita pela seguinte tabela verdade:

A	B	Y	minterm	minterm name
0	0	0	$\bar{A} \bar{B}$	m_0
0	1	1	$\bar{A} B$	m_1
1	0	0	$A \bar{B}$	m_2
1	1	1	$A B$	m_3

o mintermo 2 só dá um em 2, todos os outros é 0

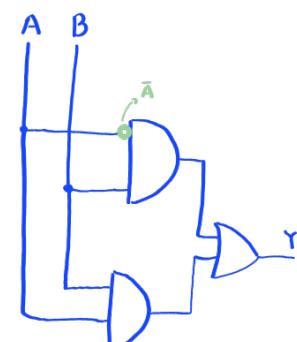
Para a 1. forma canónica SoP utilizamos os mintermos que têm Y=1 (m_1 e m_3)

$F(A, B) = m_1 + m_3$
 $= \bar{A} B + A B$

28/02/2023

PML – IAC - 2023

36



Produtos de Somas (PoS) (dual da SoP)

2^o: forma canónica

- Cada linha corresponde a um maxtermo, i.e., uma soma (OR) de literais
- Cada maxtermo assume o valor 0 na sua linha e só nessa linha
- Multiplicam-se (AND) os maxtermos que assumem o valor 0.

A	B	Y	maxterm	maxterm name
0	0	0	$A + B$	M_0
0	1	1	$A + \bar{B}$	M_1
1	0	0	$\bar{A} + B$	M_2
1	1	1	$\bar{A} + \bar{B}$	M_3

$$Y = F(A, B) = (A + B)(\bar{A} + B) = \Pi(0, 2)$$

! O maxtermo 2 só dá zero em 2, todos os outros é 1

Somas que dão zero e em que $Y=0$

28/02/2023

PML – IAC - 2023

37

! Se fizermos a tabela de verdade de SoP e PoS é igual

Exemplo: O Almoço do Carlos

- O Carlos foi comer à cantina. Ele come (C) se:
 - A cantina estiver aberta (A)
 - A cantina não servir apenas brócolos (\bar{B})
- Escreva a tabela de verdade que determina as condições em que o Carlos almoça (C)

A	B	C
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$C = A\bar{B} \quad 1^{\text{o}} \text{FC} \Rightarrow \text{SoP}$$

$$C = (A + B)(A + \bar{B})(\bar{A} + B) \quad 2^{\text{o}} \text{FC} \Rightarrow \text{PoS}$$

2^o FC \Rightarrow PoS

- Escreva C na forma SoP e PoS.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

38

Produto de Somas e Soma de Produtos

- Qualquer tabela de verdade pode ser escrita usando PoS & SoP
- Mas... uma pode ser mais simples que outras, dependendo do caso
- no caso geral a descrição pode ser demasiado complexa para ser útil.
- Vamos estudar álgebra de Boole que nos vai permitir simplificar as expressões:
 - Os fundamentos são os mesmos da Álgebra, mas mais simples (apenas temos dois valores possíveis)
- Todos os Axiomas e teoremas tem um dual, i.e., continuam a verificar-se se trocarmos os 0's por 1's e os AND's por OR's e vice-versa.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

39

Axiomas

→ dig-se, enquanto que os teoremas demonstram - se

- | | |
|--|---|
| • A1: Valor Binário
$B=0$ se $B \neq 1$ | • A1': Valor Binário
$B=1$ se $B \neq 0$ |
| • A2: NOT
$\bar{0} = 1$ | • A2: NOT
$\bar{1} = 0$ |
| • A3,A4 e A5: AND
$0 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$
$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ | • A3,A4 e A5: OR
$1 + 1 = 1$
$0 + 0 = 0$
$1 + 0 = 0 + 1 = 1$ |

28/02/2023

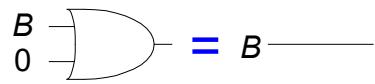
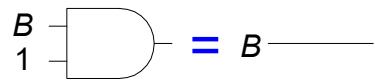
PML – IAC - 2023

40

12 Teoremos:**Teorema 1: Identidade (elemento neutro)**

- $B \cdot 1 = B$

- $B + 0 = B$



28/02/2023

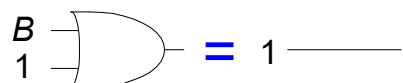
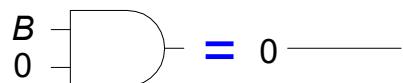
PML – IAC - 2023

41

Teorema 2: Elemento Absorvente

- $B \cdot 0 = 0$

- $B + 1 = 1$



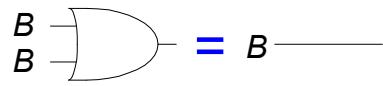
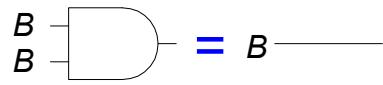
28/02/2023

PML – IAC - 2023

42

Teorema 3: Idempotência

- $B \cdot B = B$  $\begin{array}{l} B \cdot B = B \\ 0 \cdot 0 = 0 \\ 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$
- $B + B = B$



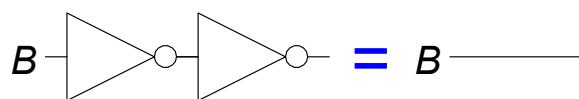
28/02/2023

PML – IAC - 2023

43

Teorema 4: Involução

- $\bar{\bar{B}} = B$



28/02/2023

PML – IAC - 2023

44

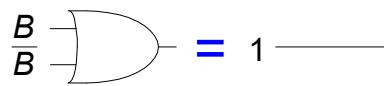
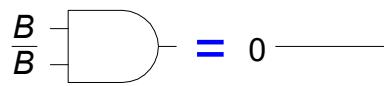
Teorema 5: Complementaridade

- $B \cdot \bar{B} = 0$

$$\begin{array}{c} B \cdot \bar{B} = 0 \\ \hline 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 \cdot 0 = 0 \end{array}$$

- $B + \bar{B} = 1$

$$\begin{array}{c} B + \bar{B} = 1 \\ \hline 0 + 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 \end{array}$$



28/02/2023

PML – IAC - 2023

45

Sumário dos Teoremas

	Theorem	Dual	Name
T1	$B \cdot 1 = B$	$T1' \quad B + 0 = B$	Identity
T2	$B \cdot 0 = 0$	$T2' \quad B + 1 = 1$	Null Element
T3	$B \cdot B = B$	$T3' \quad B + B = B$	Idempotency
T4		$\bar{\bar{B}} = B$	Involution
T5	$B \cdot \bar{B} = 0$	$T5' \quad B + \bar{B} = 1$	Complements

28/02/2023

PML – IAC - 2023

46

Teoremas de várias variáveis

- Teorema 6: Comutatividade

— $B \cdot C = C \cdot B$

— $B + C = C + B$

- Teorema 7: Associatividade

— $(B \cdot C) \cdot D = B \cdot (C \cdot D)$

— $(B + C) + D = B + (C + D)$

- Teorema 8: Distributividade

— $(B \cdot C) + (B \cdot D) = B \cdot (C + D)$

— $(B + C) \cdot (B + D) = B + (C \cdot D)$ *

* O único que é diferente da álgebra convencional.

$$B(C + D) = BC + BD$$

$$B + (CD) = (B+C) \cdot (B+D)$$

B	C	D	$B + (CD)$	$(B+C) \cdot (B+D)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

28/02/2023

PML – IAC - 2023

47

Teoremas de várias variáveis

- Teorema 9: Absorção (*Covering*)

— $B \cdot (B+C) = B$

— $B + (B \cdot C) = B$

- Teorema 10: Adjacência (Combining)

— $(B \cdot C) + (B \cdot \bar{C}) = B$

— $(B+C) \cdot (B+\bar{C}) = B$

- Teorema 11: Consenso

— $(B \cdot C) + (\bar{B} \cdot D) + (C \cdot D) = (B \cdot C) + (\bar{B} \cdot D)$

— $(B+C) \cdot (\bar{B}+D) \cdot (C+D) = (B+C) \cdot (\bar{B}+D)$

termo redundante 8

28/02/2023

PML – IAC - 2023

48

Demonstração dos Teoremas

- Estes teoremas podem ser demonstrados?
- Uma forma é usar a indução perfeita^{indução direta}, que é simples para teoremas com um número finito de variáveis.
 - Consiste em demonstrar na tabela de verdade que o teorema se verifica para todos os valores das variáveis.
- Exemplo teorema da adjacência (*Combining*)

B	C	$(B.C) + (B.\bar{C})$	B
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

28/02/2023

PML – IAC - 2023

49

Simplificação de Equações Lógicas

- Exemplo 1:

$$\begin{aligned}
 Y &= A(AB + ABC) \\
 &= A(AB(1+C)) && (\text{T8 - Distributividade}) \\
 &= A(AB.(1)) && (\text{T2' - El. Absorvente}) \\
 &= A(AB) && (\text{T1 - Identidade}) \\
 &= (AA)B && (\text{T7 - Associatividade}) \\
 &= AB && (\text{T3 – Idempotência})
 \end{aligned}$$

} Temos de saber os nomes

28/02/2023

PML – IAC - 2023

50

Teorema 12: Leis de DeMorgan

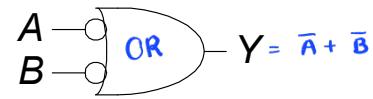
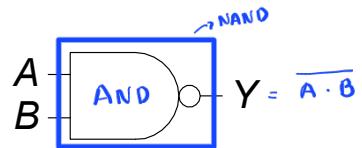
- A negação do produto é a soma das negações:

$$\overline{B_0 \cdot B_1 \cdot B_2 \dots} = \overline{B_0} + \overline{B_1} + \overline{B_2} + \dots$$

- Corolário:

- Uma porta NAND equivale a uma porta OR com entradas negadas;

- $Y = \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$



Teorema 12: Leis de DeMorgan

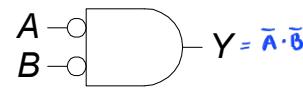
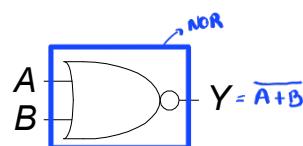
- A negação da soma é o produto das negações

$$\overline{B_0 + B_1 + B_2 \dots} = \overline{B_0} \cdot \overline{B_1} \cdot \overline{B_2} \dots$$

- Corolário:

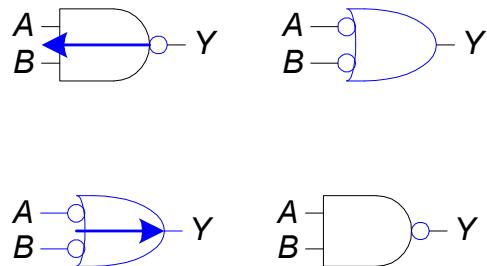
- Uma porta NOR equivale a uma porta AND com entradas negadas.

- $Y = \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$



“Bubble Pushing”

- Troca-se a gate OR/AND por AND/OR
- E empurram-se as bolhas



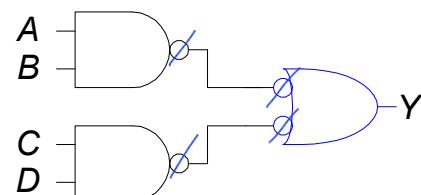
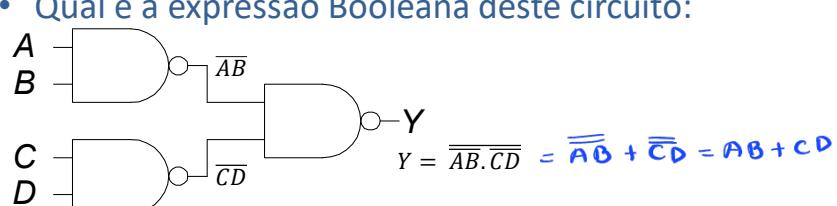
28/02/2023

PML – IAC - 2023

53

“Bubble Pushing”

- Qual é a expressão Booleana deste circuito:



$$Y = AB + CD$$

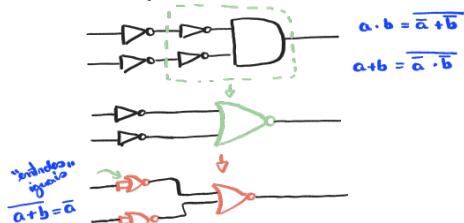
28/02/2023

PML – IAC - 2023

54

Conjunto completo de operadores

- Define-se **conjunto completo de operadores** o conjunto de operadores que permite a implementação de qualquer função booleana.
- São Conjuntos Completos de Operadores:
 - {AND, OR, NOT}
 - {AND, NOT}
 - {OR, NOT}
 - {NAND}** !
 - {NOR}**
- Um conjunto completo com apenas um tipo de portas pode facilitar o trabalho de quem projeta os circuitos. *Regulidade favorece a facilidade*



28/02/2023

PML – IAC - 2023

55

Operadores NAND e NOR

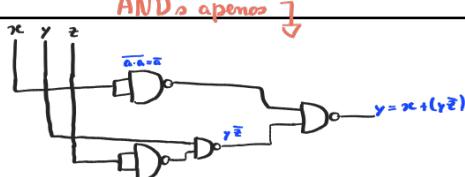
- Para escrever uma função apenas com operadores NAND coloca-se na forma de SoP e de seguida aplica-se o teorema da involução (dupla negação) e as leis de DeMorgan.
- Para escrever só com operadores NOR começa-se com a forma PoS. *, Não esquecer!*
- Exemplo:

$$\begin{aligned} - x + (y \cdot \bar{z}) &= \overline{x + (y \cdot \bar{z})} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{y} \cdot \overline{\bar{z}} \\ - x + (y \cdot \bar{z}) &= \overline{(x + y) \cdot (x + \bar{z})} = \overline{x + y} + \overline{x + \bar{z}} \\ &\quad \text{PoS } \checkmark \qquad \text{NOR's apenas} \checkmark \\ - x + (y \cdot \bar{z}) &= \overline{x} \cdot (\overline{y} \cdot \overline{\bar{z}}) \end{aligned}$$

28/02/2023

PML – IAC - 2023

56



Outras formas canónicas de representação

- Formalizando o caso geral da representação canónica de funções booleanas temos:

- 1^a forma canónica: SoP

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_i \cdot m_i$$

AND-OR

- 2^a forma canónica: PoS

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{2^n-1} (f_i + M_i)$$

OR-AND

Tabela de verdade

- E ainda ...

Outras formas canónicas de representação

- 3^a forma canónica: SoP

NAND-NAND

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \overline{\prod_{i=0}^{2^n-1} f_i \cdot m_i}$$

- 4^a forma canónica: PoS

NOR-NOR

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \overline{\sum_{i=0}^{2^n-1} f_i + M_i}$$

Formas canónicas de representação

- Exercício:
- Determinar as formas canónicas da função:
- $f(x, y, z) = x \cdot y + \bar{z}$
 - Sugestão: Escrevendo a tabela de verdade obtém-se facilmente a 1^a e a 2^a formas. As formas NAND-NAND e NOR-NOR são obtidas a partir destas.

x	y	z	$f = xy + \bar{z}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

28/02/2023

1^a Forma SoP: $f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z} + xyz$

3^a Forma NAND: $f = \overline{\overline{x}\bar{y}\bar{z}} \cdot \overline{\bar{x}y\bar{z}} \cdot \overline{x\bar{y}\bar{z}} \cdot \overline{xy\bar{z}} \cdot \overline{xyz}$

2^a Forma Pos: $f = (x+y+z) \cdot (x+\bar{y}+\bar{z}) \cdot (\bar{x}+y+\bar{z})$

4^a Forma NOR: $f = \overline{(x+y+z)} + \overline{(x+\bar{y}+\bar{z})} + \overline{(\bar{x}+y+\bar{z})}$

PML – IAC - 2023

59

Passar da lógica para os circuitos

- A implementação direta da forma Soma de Produtos origina uma implementação lógica a dois níveis:
 - ANDs seguidos de ORs
- Convenção de desenho:
 - Entradas à esquerda (ou em cima)
 - Saídas à direita (ou em baixo)
 - Usam-se linhas retas
 - O fluxo das Gates é da esquerda para a direita

28/02/2023

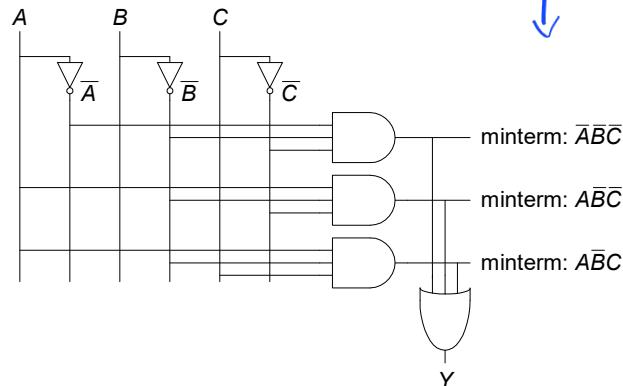
PML – IAC - 2023

60

Passar da lógica para os circuitos

- Exemplo:

$$- Y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$



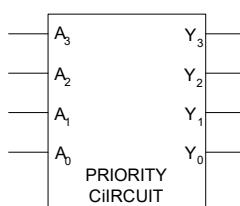
28/02/2023

PML – IAC - 2023

61

Circuitos com múltiplas saídas

- Exemplo:
- Circuito de Prioridades
 - Tem 4 entradas e 4 saídas.
 - Fica ativa a saída correspondente à entrada ativa mais significativa.



A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	x	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	x	x	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	x	x	x	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

28/02/2023

PML – IAC - 2023

62

Don't Cares

- Podemos simplificar a tabela de verdade usando o símbolo X para representar os casos em que a saída é independente de alguma(s) das entradas.

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	X	0	0	1	0
0	1	X	X	0	1	0	0
1	X	X	X	1	0	0	0

$\downarrow \text{Ignoramos os Don't Cares}$

28/02/2023

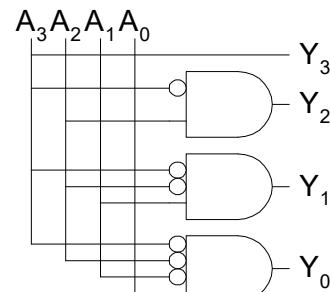
PML – IAC - 2023

63

Circuitos com múltiplas saídas

- Circuito de Prioridades: Implementação

A_3	A_2	A_1	A_0	Y_3	Y_2	Y_1	Y_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	X	0	0	1	0
0	1	X	X	0	1	0	0
1	X	X	X	1	0	0	0



28/02/2023

PML – IAC - 2023

64

Índice

- Lógica binária.
 - As operações lógicas básicas.
 - Portas Lógicas.
- Álgebra de Boole.
 - Axiomas e teoremas.
 - Soma de Produtos e Produto de Somas.
 - Minimização de funções booleanas.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

65

Simplificação de funções booleanas



Mapas de Karnaugh

Solução para as simplificações

- As expressões Booleanas podem ser minimizadas combinando algebraicamente os termos.
- Os mapas de Karnaugh são um método de determinar graficamente a minimização das equações.
- Começamos por representar a tabela de verdade num Mapa e desenhamos “círculos” sempre que houver 1's em quadrados adjacentes.
 - Entre cada linha (coluna) apenas pode variar um bit
- Na expressão final usamos apenas os literais que são invariantes em cada “círculo”.

28/02/2023

PML – IAC - 2023

66

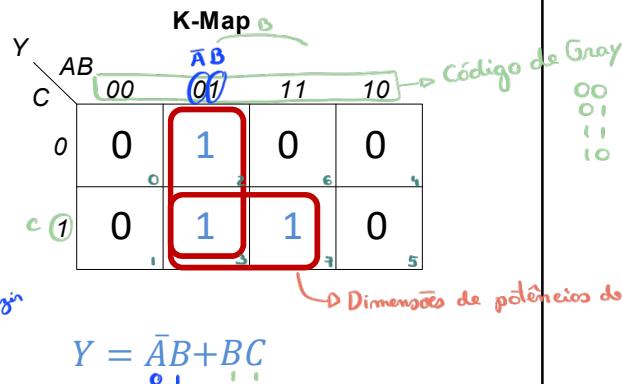
Mapas de Karnaugh

- Exemplo com 3 entradas

Truth Table

	A	B	C	Y
0 -	0	0	0	0
1 -	0	0	1	0
2 -	0	1	0	1
3 -	0	1	1	1
4 -	1	0	0	0
5 -	1	0	1	0
6 -	1	1	0	0
7 -	1	1	1	1

$$\begin{aligned}
 Y &= \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} C \\
 &= \overline{A} B + B C
 \end{aligned}
 \quad \text{→ desenhamos para depois reduzir}$$



28/02/2023

PML – IAC - 2023

67

Mapas de Karnaugh: Regras

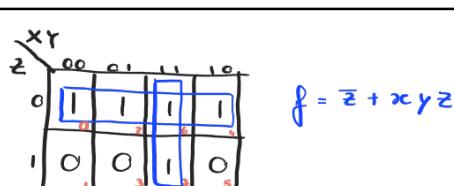
- Cada 1 no mapa tem que estar dentro de pelo menos um “círculo”
- O número de quadrados cobertos por um círculo tem que ser uma potência de 2, em cada direção
- O “círculo” pode fechar-se pelas arestas do mapa
- Um *don't care* (X) inclui-se num “círculo” se ajudar a simplificar a equação

28/02/2023

PML – IAC - 2023

68

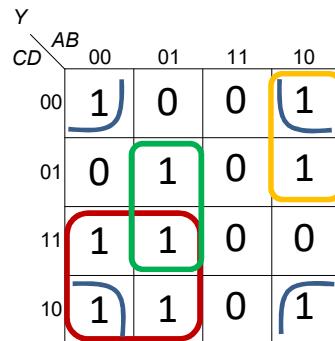
x	y	z	$f = xy + \bar{z}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



Mapas de Karnaugh

- Exemplo com 4 entradas:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0



$$Y = \bar{A}C + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}BD + A\bar{B}\bar{C}$$

28/02/2023

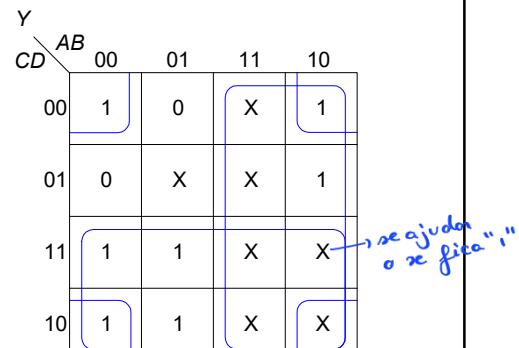
PML – IAC - 2023

69

Mapas de Karnaugh com *don't care*

- Exemplo com 4 entradas:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	X
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X



$$Y = A + \bar{B}\bar{D} + C$$

28/02/2023

PML – IAC - 2023

70