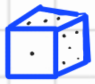
Aula 15

Folha 4.

$\boxed{4}$

 ⇝ até que tenhamos 2 pares

Equação de recorrência: para o nº de exp que terminam no n-ésimo de experiências ou antes → nº de experiências

Sucessão:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \begin{cases} a_n = \\ \text{cond. iniciais} \end{cases}$$

$$a_n = \underbrace{a_{n-1} \ \dots}\ ?$$

$$\underbrace{\_\_ \quad \_\_ \quad \_\_ \quad (\dots) \quad \_\_}_{(n-1)\ \text{lançamentos}} \quad \_\_$$

Par

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sair 1 par} \longmapsto 3(n-1) \\ \text{e} \\ (n-2)\ \text{ímpares} \longmapsto 3^{n-2} \\ \text{e} \\ n\text{-ésimo} \longmapsto 3 \end{array}\right\} \quad a_n = a_{n-1} + 3(n-1)\times 3^{n-2} \times 3, \ n\geq 1$$

número de exp. que terminam antes do n-ésimo lançamento

$a_1 = 0$

(+) Exercícios na Folha 4

Séries e Funções geradoras

ex: Escolher 4 letras de um conjunto de AAA, BB, C, DDDD

$$(1+A+A^2+A^3)\times(1+B+B^2)\times(1+C)\times(1+D+D^2+D^3)$$

O nº de escolhas a considerar é dado pelo número de termos da expansão do produto anterior na forma: $\boxed{A^i B^j C^k D^l}$ tal que $i+j+k+l=4$

$i \leq 3, \ j \leq 2, \ k \leq 1, \ l \leq 4$

Substituir A, B, C, D por x obtém-se o desenvolvimento:

polinómios geradores:

$$\underbrace{(1+x+x^2+x^3)}_{P_A}\underbrace{(1+x+x^2)}_{P_C}\underbrace{(1+x)}_{P_C}\underbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4)}_{P_D} =$$

$$= \sum_{k=0}^{10} c_k x^k \longrightarrow c_4 = 20$$

E se fosse $n = 2$ letras

$$C_2 = 9 \begin{cases} \{A, A\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\} \\ \{B, B\}, \{B, C\}, \{B, D\} \\ \{C, D\}, \{D, D\} \end{cases}$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) x^n$ série geradora ordinária (ou função geradora ordinária) associada à sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $a_n \equiv$ nº de maneiras de contar com n objetos (indistinguíveis, iguais, votação secreta)

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ série geradora exponencial (objetos distinguíveis, bolas numeradas, votação aberta)

ex: s.g.e. da sucessão: $1, 1, 1, \dots, \underbrace{1}_{a_n}, \dots; (1)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{1}_{a_n} \times \frac{x^n}{n!} = e^x$$

ex: s.g.e. da sucessão $1, 2, 4, 8, 16, \dots, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$$

ex: s.g.e. para o número de permutações (c/repetição de seq. de palavras de comprimento n em $\{a, b, c\}$), contendo:

→ um nº ímpar de a

→ um nº par de b

→ qualquer nº de c

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \dots + \underbrace{\binom{9}{3, 4, 2}}_{\frac{9!}{3!4!2!} = 4921} \frac{x^3 x^4 x^2}{9!} + \dots$$