Aula 13

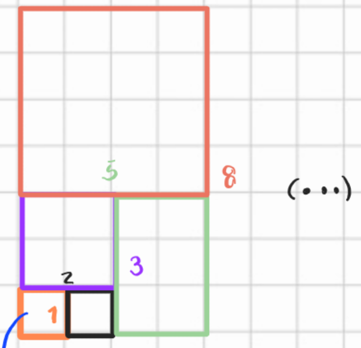
Sucessão de números de Fibonacci

$$\underbrace{1}_{F_0},\ \underbrace{1}_{F_1},\ \underbrace{2}_{F_2},\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots,\ \underbrace{F_n}_{?},\ \dots$$

Coelhos:

$$\begin{cases} F_0 = 1,\ F_1 = 1 \\ \underbrace{F_n}_{\substack{\text{nº de casais} \\ \text{de coelhos após} \\ \text{o mês } n}} = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2 \end{cases}$$

Quadrados:



$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 5,\ a_5 = 8,\ \dots$

Soma da série de fibonacci (soma dos n primeiros)

$\underline{F_0 + F_1 + \dots + F_{n-1}}$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \cancel{F_2} - \boxed{F_0} \\
+\ F_2 &= \cancel{F_3} - \boxed{F_1} \\
+\ F_3 &= \cancel{F_4} - \cancel{F_2} \\
+\ F_4 &= \cancel{F_5} - \cancel{F_3} \\
&\ \vdots \\
+\ F_{n-2} &= \boxed{F_{n-1}} - \cancel{F_{n-3}} \\
+\ F_{n-1} &= \boxed{F_n} - \cancel{F_{n-2}}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^{n} F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} F_k = \cancel{F_0} - \cancel{F_0} + F_{n-1} + F_n - \underbrace{F_1}_{1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} F_k = \underbrace{F_{n-1} + F_n}_{F_{n+1}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_{n+1} - 1$$

Equações de Recorrência (de ordem k)

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k})$$

ou x_n

"Ex Ⅱ: (Simples)

$$a_n = 6a_{n-2} - a_{n-1}$$

Profundidade 2, exige 2 condições iniciais

$a_n = (-3)^n$ é solução ? Porquê?

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}: 1, -3, 9, -27, 81, \dots, (-3)^n, \dots$

De facto:

$$6(-3)^{n-2} - (-3)^{n-1} = (-3)^{n-1}\big(\underbrace{6(-3)^{-1}}_{-2} - 1\big)$$
$$= (-3)^{n-1} \times (-3)^1$$
$$= (-3)^n$$

Procuramos soluções na forma: $a_n = q^n$

$$q^n = 6q^{n-2} - q^{n-1}$$
$$\Leftrightarrow q^n - 6q^{n-2} + q^{n-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow q^n \times q^{-(n-2)} - 6q^{n-2} \times q^{-(n-2)} + q^{n-1} \times q^{-(n-2)} = 0$$
$$\Leftrightarrow q^2 - 6 + q^1 = 0 \quad \Leftrightarrow \underbrace{q^2 + q - 6 = 0}_{\text{eq. característica}} \quad \Leftrightarrow q = 2 \vee q = -3$$

$$\boxed{a_n = \alpha(-3)^n + \beta(2)^n}$$

comb. linear das soluções da eq. característica

Mas se, $a_0 = 2$, $a_1 = 0$ $\Longrightarrow$ $\alpha = -4$, $\beta = 6$

Logo:

$$a_n = -4(-3)^n + 6(2)^n, \quad n \geq 0$$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Solução de $\begin{cases} a_n = 6a_{n-2} - a_{n-1} \\ a_0 = 2 \\ a_1 = 0 \end{cases}$

Eq. de Recorrência Lineares Homogénias (de ordem K)

$$\boxed{1} \quad \underbrace{a_n}_{q^n} = c_1 \underbrace{a_{n-1}}_{q^{n-1}} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k \underbrace{a_{n-k}}_{q^{n-k}}$$

c_i, $i = 1, 2, \dots, k$ coef. const., K condições iniciais

eq. característica:

$$q^k - c_1 q^{k-1} - \dots - c_k = 0 \rightarrow K \text{ raizes características } ⊛$$

"ex: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

eq. caract.:

$q^2 - 2q + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (q-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow q = 1$

⊛

- K soluções distintas reais $q_1, q_2, \dots, q_K$

$$(q-q_1)(q-q_2)\cdots(q-q_K) = 0$$

$$a_n = \alpha_1 q_1^n + \alpha_2 q_2^n + \dots + \alpha_K q_K^n$$

- j soluções cada uma delas de mult. $m_j > 0$

$$(q-q_1)^{m_1}(q-q_2)^{m_2}\cdots(q-q_j)^{m_j} = 0$$

$$\begin{aligned} a_n = {} & (D_0 + D_1 n + \dots + D_{m_1-1} n^{m_1-1}) q_1^n + \\ & + (E_0 + E_1 n + \dots + D_{m_2-1} n^{m_2-1}) q_2^n + \\ & + \dots + \\ & + (Z_0 + Z_1 n + \dots + Z_{m_j-1} n^{m_j-1}) q_j^n \end{aligned}$$

"ex: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n \geq 3$

$a_1 = 0$, $a_2 = 1$

eq. caract.

$q^2 - 2q - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (q-1)^2 = 0$

$a_n = (D_0 + D_1 n) 1^n = D_0 + D_1 n$

Cond. iniciais $\begin{cases} D_0 + D_1 = 0 \\ D_0 + 2D_1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} D_0 = -1 \\ D_1 = 1 \end{cases}$

$a_n = -1 + n$, $n \geq 1$

Eq. de Recorrência Lineares não homogénea (de ordem K)

$$\boxed{2} \quad a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + \overbrace{f(n)}^{d_n \text{ (nos slides)}}$$

Solução geral: $a_n = \underbrace{a_n^{(h)}}_{\text{sol. da parte homogénia } \boxed{1}} + a_n^{(p)} \rightarrow$ solução particular de $\boxed{2}$

Obter $a_n^{(p)}$:

1.º caso: $f(n) = c p^n$, c, p constante, $p \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$?

$a_n^{(p)} = A\, n^m p^n$

constante a determinar usando $\boxed{2}$

$m \in \mathbb{N}$ é a multiplicidade de p enquanto raiz característica da eq. homogénia

↳ $m = 0$ se p não é raiz característica

2º caso: $f(n)$ é um pol. de grau j, $j \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$

$$a_n^{(p)} = (A_0 + A_1 n + \dots + A_j n^j)\, n^m,$$ $m \in \mathbb{N}$ é a multiplicidade de 1 enquanto raiz característica

↳ $m = 0$ se 1 não é raiz característica

3º caso: $$f(n) = \underbrace{f_1(n)}_{a_{n,1}^{(p)}} + \underbrace{f_2(n)}_{a_{n,2}^{(p)}} + \dots + \underbrace{f_k(n)}_{a_{n,k}^{(p)}}$$

$$a_n^{(p)} = a_{n,1}^{(p)} + a_{n,2}^{(p)} + \dots + a_{n,k}^{(p)}$$

Exemplo de aplicação:

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + f(n), & n \geq 2 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{cases}$$

$\boxed{1}$ $f_1(n) = 2^n$

Sol. da eq. homogénia $(a_n)^{(h)}$: $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$

eq. característica: $q^2 - 3q + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (q-1)(q-2) = 0$

Raízes caract. $q_1 = 1$, $q_2 = 2$

Então, a solução geral da eq. homogénia: $a_n^{(h)} = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n$, $n \in \mathbb{N}$

Obter $(a_n)^p$:

$f(n) = c p^n$, com $c = 1$ e $p = 2$

Sol. particular: $a_{n,1}^{(p)} = A n^m 2^n$, $p = 2$ é raiz caract. de multiplicidade $m = 1$

$\Leftrightarrow a_{n,1}^{(p)} = A n 2^n$

Obter A:

$\boxed{1}$ $\boxed{a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n}$

substituindo vem...

$$A n 2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + A\,2(n-2)2^{n-2} = 2^n$$

dividir por 2^{n-1}

$$\Leftrightarrow 2^1 A n - 3A(n-1)2^0 + A\cancel{2}(n-2)\cancel{2}^{-1} = 2^1$$

$$\Leftrightarrow A(2\cancel{n} - 3\cancel{n} + 3 + \cancel{n} - 2) = 2$$

$$\Leftrightarrow A = 2$$

Logo: $a_{n,1}^{(p)} = 2n2^n = n2^{n+1}$

solução particular de $f_1(n)$

Sol. geral de $\boxed{1}$ é:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_{n,1}^{(p)} \Leftrightarrow a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n + n 2^{n+1}$$

com as condições iniciais dadas:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ \alpha_2 = -6 \end{cases}$$

$$(a_n) = \left(6 - 6\,2^n + n 2^{n+1}\right),\ n \in \mathbb{N}$$

$\boxed{2}$ $$f(n) = \overbrace{2^n}^{f_1(n)} + \overbrace{(n+1)}^{f_2(n)}$$

$$a_n = a_n^{(h)} + a_{n,2}^{(p)}, \qquad f_2(n) = \overbrace{n+1}^{\text{Pol de grau } j=1}$$

Solução de $f_2(n)$

Solução de $\boxed{a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n+1}$ $\boxed{2}$

$a_{n,2}^{(p)} = (A_0 + A_1 n)\, n^m$, com $m = 1$, pois 1 é raiz característica de multiplicidade $m = 1$

$$\Leftrightarrow a_{n,2}^{(p)} = (A_0 + A_1 n)\, n$$

substituindo $a_{n,2}^{(p)}$ em $\boxed{2}$ vem:

$A_0 = -7/2$ e $A_1 = -1/2$, pelo que, a solução geral de

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n + (n-1)$ é dada por:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_{n,1}^{(p)} + a_{n,2}^{(p)}$$

$$\hookrightarrow = \alpha_1 + \alpha_2 2^n + n 2^{n+1} - \frac{7}{2} n - \frac{1}{2} n^2,\ n \in \mathbb{N}$$

Condições iniciais
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4 - \frac{7+1}{2} = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$$