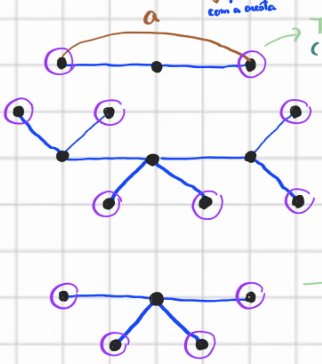
Aula 24

Floresta

Se adicionarmos uma aresta temos um ciclo, logo o grafo, com a aresta, não é uma árvore

F: (Floresta)



T1 (Árvore)

T_2 (Árvore)

T_3 (Árvore)

→ Vértices de grau 1 são Folhas!

↳ T_1, T_2, T_3 são árvores

$F = (V, E)$

$|V| = 17$

$\underbrace{|E|}_{\mathcal{E}(F)} = \underbrace{|V|}_{\mathcal{V}(F)} - 1 = 16$

resultados teóricos dos slides (5) e (6)

Teorema: (caracterização de uma árvore)

- Se $G = (V, E)$ é um grafo simples com n vértices, então são equivalentes as seguintes afirmações:

$\boxed{1}$ - G é uma árvore

$\boxed{2}$ - G não tem ciclos e tem $(n-1)$ arestas

$\boxed{3}$ - G é conexo e tem $(n-1)$ arestas

$\boxed{4}$ - G é conexo e cada aresta é uma ponte (G mínimo/conexo)

$\boxed{5}$ - Qualquer 2 vértices de G estão unidos por um único caminho

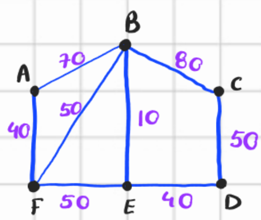
$\boxed{6}$ - G não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo (G máximo/acíclico)

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2} \Rightarrow \boxed{3} \Rightarrow \boxed{4} \Rightarrow \boxed{5} \Rightarrow \boxed{6} \Rightarrow \boxed{1}$ (...) São equivalentes!

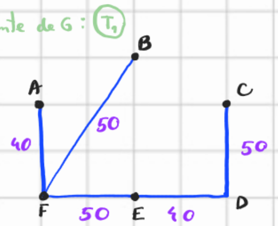
Árvore abrangente de $G = (V, E)$

↳ é um subgrafo de G contendo todos os vértices de G (subgrafo abrangente)

ex:



Árvore abrangente de G: T_1



1) Número de árvores abrangentes?

2) T_1 de custo total 230 é de custo total mínimo?

(algoritmo de Kruskal e Himo)

- Responderemos depois...

Lema: Cada árvore finita T com pelo menos 2 vértices tem pelo menos dois vértices de grau um (Folhas)

Dem: $T = (V, E)$

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \underbrace{|E|}_{(n-1)} = 2n - 2$$

Por outro lado, se não existem pelo menos 2 vértices de grau 1:

$$\sum_{v \in V} d(v) \geq 2n - 1$$

?

Teorema: (condição e necessária para qualquer G que seja uma floresta)

• Grafo finito G é uma floresta $\underset{\Longleftrightarrow}{\text{se e só se}}$ $\mathcal{E}(G) - \mathcal{V}(G) + cc(G) = 0$

Dem: ($\Longrightarrow$)

• G é Floresta com K componentes conexos $G_1, G_2, \dots, G_K$

$$\begin{cases} \mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(G_1) + \mathcal{E}(G_2) + \dots + \mathcal{E}(G_K) \\ \mathcal{V}(G) = \mathcal{V}(G_1) + \mathcal{V}(G_2) + \dots + \mathcal{V}(G_K) \end{cases}$$

cada j: $\underbrace{\mathcal{E}(G_j) = \mathcal{V}(G_j) - 1}_{\text{nº de arestas é o nº de vértices menos 1}} \Leftrightarrow \mathcal{E}(G_j) - \mathcal{V}(G_j) + 1 = 0$

$$\sum_{j=1}^{K} \left(\left[\mathcal{E}(G_j) - \mathcal{V}(G_j) \right] + \underbrace{1}_{cc(G_j) = 1} \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \mathcal{E}(G) - \mathcal{V}(G) + \underbrace{K}_{cc(G)} = 0$$

Dem: ($\Longleftarrow$)

Ora, $\underbrace{\mathcal{E}(G) - \mathcal{V}(G) + K} = 0$

$$\underbrace{\left(\mathcal{E}(G_1) - \mathcal{V}(G) + 1 \right)}_{\geq 0} + (\dots) + \underbrace{\left(\mathcal{E}(G_K) - \mathcal{V}(G_K) + 1 \right)}_{\geq 0} = 0$$

Logo: Só pode ser, $j = 1, \dots, K$, $\mathcal{E}(G_j) - \mathcal{V}(G_j) + 1 = 0$

Ou seja, cada componente conexa é uma árvore

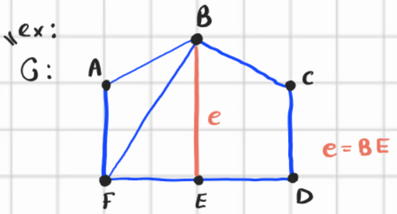
Logo g é uma floresta!

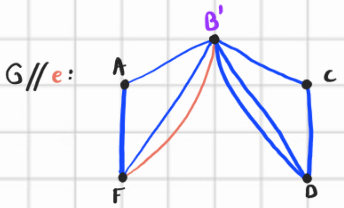
Provamos que: $\boxed{\text{Grafo finito G é uma floresta}}$ $\underset{\Longleftrightarrow}{\text{se e só se}}$ $\boxed{\mathcal{E}(G) - \mathcal{V}(G) + cc(G) = 0}$

Operação de fusão de extremos de uma aresta

Nota: Todo o grafo conexo define uma árvore abrangente

ex:





e = BE

Nota: G/e diferente de G//e

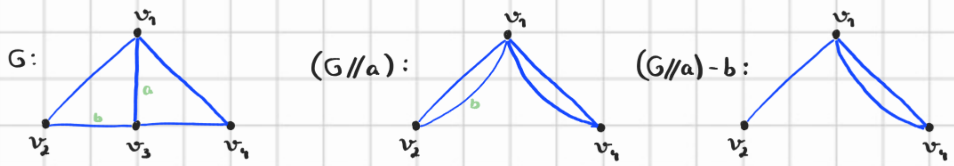
↑ contração da aresta e ↑ fusão da aresta e

Teorema: Dadas duas arestas distintas a e b de G verifica-se que

$$(G//a) - b = (G - b) // a$$

↳ A operação de fusão de extremos comutam com a operação de eliminação de arestas

ex:



Teorema: Dado G grafo finito e conexo e $a \in E_G$ que não é um lacete, então:

$$\boxed{\tau(G) = \tau(G-a) + \tau(G//a)}$$

Sendo $\tau(G)$ o número de árvores abrangentes de G

"tau"

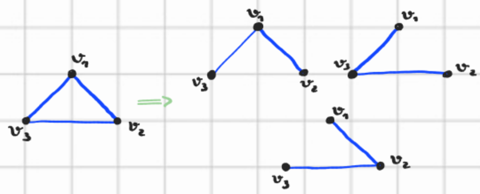
Casos particulares:

1 - G não é conexo $\Rightarrow \tau(G) = 0$

2 - G é uma árvore $\Rightarrow \tau(G) = 1$

3 - G é um ciclo com K arestas $\Rightarrow \tau(K) = K$

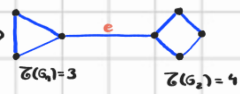
K = 3:



4 - G é um grafo com 2 vértices ligados por K arestas $\Rightarrow G(K) = K$

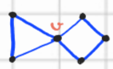
5 - G contém uma ponte unindo dois subgrafos G_1 e G_2

$$\Rightarrow \tau(G_1) \cdot \tau(G_2) = \tau(G)$$



6 - G resulta de dois subgrafos G_1 e G_2 que têm um único vértice em comum

$$\Rightarrow \tau(G_1) \cdot \tau(G_2) = \tau(G)$$



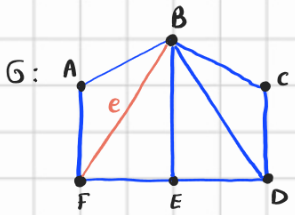
7 - Teorema (Fórmula de Cayley)

com $G = K_n$ → grafo simples completo com n vértices

então: $\tau(G) = n^{n-2}$

$\tau(K_n) = n^{n-2}$

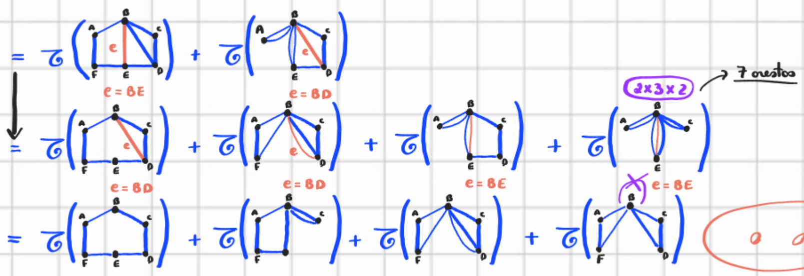
Aplicação da fórmula recursiva para determinar o nº de árvores abrangentes



$e = BF$

$\Rightarrow \boxed{\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/\!/e)}$

Aplicando a fórmula a cada componente



$= 54$

$\boxed{\text{Ver foto 29/05}}$

2 lacetes eliminados