Aula 11

Triângulo de Pascal

Soma de todos os elementos de uma linha

$$\begin{array}{lccccccccccl}
n=0 & & & & & 1 & & & & & \longrightarrow & 2^0 \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow & 2^1 \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow & 2^2 \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longrightarrow & 2^3 \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longrightarrow & 2^4 \\
\dots & & & & & (\dots) & & & & & & \dots
\end{array}$$

$X = \{1, 2, \dots, N\}$ $\quad |P(X)| = 2^n$

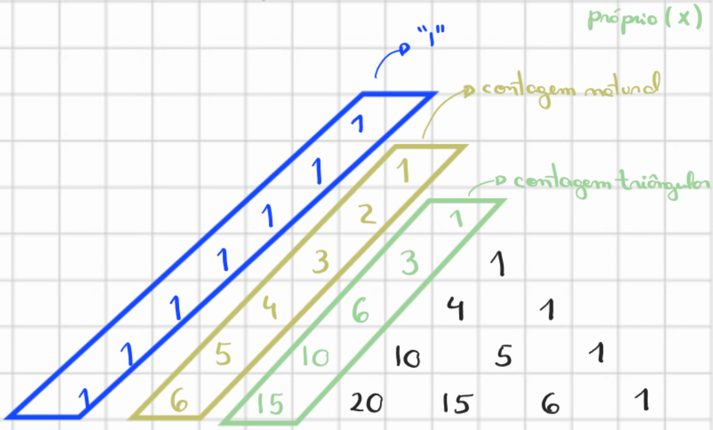
$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\{\}} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\text{ele próprio } (X)} = 2^n$$

· **Propriedades:**

1 · $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2 · $\underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{nº de subconjuntos de X com k elem.}} = \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{nº de subconjuntos que não tem k elementos}} + \underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{nº de subconjuntos que contêm k elementos}}$

3 · $P(X) = \{\{\}\} \cup \{\{1\} \cup \dots\} \cup \dots \cup \{X\}$



Teorema Binomial de Newton

Verifica sempre:

$\boxed{2 + (n-2) = n}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \underbrace{a^0 b^n}_{\text{zero "a"'s e n "b"'s}} + \binom{n}{1} \underbrace{a^1 b^{n-1}}_{\text{um "a" e n-1 "b"'s}} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

Soma tem de dar n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

"Ex₁":

$$(\underbrace{x}_{a} + \underbrace{y}_{b})^{3 \to n} = (x+y)(x+y)(x+y)$$

$$= \underbrace{yyy}_{\text{n de "y" e 0 de "x"}} + \underbrace{yyx + yxy + xyy}_{\text{n-1=2 de "y" e 1 "x"}} + \underbrace{yxx + xyx + xxy}_{\text{n-2=1 de "y" e 2 "x"}} + \underbrace{xxx}_{\text{n-3=0 de "y" e 3 "x"}}$$

$$\Downarrow \binom{3}{0} \qquad \Downarrow \binom{3}{1} \qquad \Downarrow \binom{3}{2} \qquad \Downarrow \binom{3}{3}$$

$$= \overbrace{y^3} + \overbrace{xy^2 + xy^2 + xy^2} + \overbrace{x^2y + x^2y + x^2y} + \overbrace{y^3}$$

"Ex₂": Expandir $(2x - 3y)^5 = \underbrace{\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} (2x)^k (-3y)^{5-k}}_{\binom{5}{0}(2x)^0(-3y)^5 + \dots + \binom{5}{5}(2x)^5(-3y)^0}$

→ Obter o coef. de $x^2 y^3$:

$$\underbrace{C_x}_{?} \, x^2 y^3$$

$$\binom{5}{2} (2x)^2 (-3y)^{5-2} = \binom{5}{2} 2^2 \times (-3)^3 \, x^2 \, y^3$$

$$= \underbrace{10 \times 4 \times (-27)}_{C_x} \, x^2 \, y^3$$

Propriedades:

1. $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \underbrace{1^{n-k}}_{1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

2. $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$

Combinações com repetição

! Matéria nova

$$\boxed{\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}}$$

- Comb. com repetição de n elementos de k a k, é uma maneira de escolher k elem. de entre $\{1,2,\dots,n\}$ sem considerar a ordem, isto é, é uma sequência $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ de números em $\underbrace{\{0,1,2,\dots\}}_{\text{nº de vezes que aparecem}}$, s_i, com

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots + \underbrace{s_i}_{\substack{\text{nº de vezes} \\ \text{que } i=1,2,\dots,n, \\ \text{escolhido}}} + \dots + s_n = k$$

- Multiconjunto $\longrightarrow$ $M = \{\underbrace{x_1, \dots x_1}_{a_1 \text{ vezes}}, \dots, \underbrace{x_n, \dots x_n}_{a_n \text{ vezes}}\}$

$$= \{x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n}\}$$

(M, v)

$v: X \longrightarrow \mathbb{N}$

$\quad x_i \longrightarrow v(x_i)$

Logo, $\underbrace{|M|}_{\text{Cardinal de } M} = \sum_{x \in X} v(x)$

Ex:

$Q = \{$Número de soluções da eq. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k\}$

Sendo $n = 3$ e $k = 5$:

$C = $ Comb c/ repetição

$S = \{$Seq. binária com $k = 5$ uns e $\underbrace{n-1}_{2}$ zeros$\}$

$R = \{$distribuir $k = 5$ obj. iguais por $n = 3$ caixas$\}$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \longleftrightarrow (s_1, s_2, s_3)$

Uma solução:

↳ $2 + 3 + 0 = 5 \longleftrightarrow (2,3,0) \longleftrightarrow \underbrace{1\ 1}_{2}\ 0\ \underbrace{1\ 1\ 1}_{3}\ 0\ \underbrace{\ }_{0} \longleftrightarrow \boxed{\cdot\cdot}\ \boxed{\cdot\cdot\cdot}\ \boxed{\ }$

- Ou seja, distribuir 5 bolas por 3 caixas

$C = \{$nº de subconjuntos de $X\}$

- Das caixas: $\boxed{\cdot\cdot}\ \boxed{\cdot\cdot\cdot}\ \boxed{\ } \longleftrightarrow \{1,2,4,5,6\}$

$X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $|X| = 7 = k + (n-1)$

$A \subseteq X$, $A \in P(X)$

Outra solução:

$2 + 2 + 1 = 5 \longleftrightarrow (2,2,1) \longleftrightarrow 110110 1 \longleftrightarrow \boxed{\cdot\cdot}\ \boxed{\cdot\cdot}\ \boxed{\cdot} \longleftrightarrow \{1,2,4,5,7\}$

- Logo, uma solução, uma sequência binária, ..., é uma combinação com repetição

↳ $|Q| = |S| = |R| = |C| = \left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{7}{5}$

$M = \{x_1, x_1, x_2, x_2, x_3\}$, $\underbrace{|M|}_{\text{cardinal de } M} = \sum_{x \in X} v(x)$

(M, v) $\quad v(x_1) = 2$

$v : X \longrightarrow \mathbb{N}$ $\quad v(x_2) = 2$

$x_i \longrightarrow v(x_i)$ $\quad v(x_3) = 1$

Exemplo: $X = \{1, 2, 3\}$

$\left(\!\binom{3}{4}\!\right) : \{1, 1, 2, 2\}$

comb c/ repetição de $n = 3$ elem. 4 a 4

$(s_1, s_2, s_3) = (2, 2, 0) \longleftrightarrow 110110$

$s_1 + s_2 + s_3 = k$

$$\left(\!\binom{3}{4}\!\right) = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2}$$

$\boxed{3}$ Folha prática 3

a) $\underbrace{8}_{}$ presentes iguais

8 bolos iguais

5 Crianças: C_1 C_2 C_3 C_4 C_5

$\boxed{\bullet\bullet}$ $\boxed{}$ $\boxed{\bullet\bullet}$ $\boxed{\bullet}$ $\boxed{\bullet\bullet\bullet}$ $\longleftrightarrow$ $\underbrace{110011010111}_{k+(n-1) = 8+(5-1) = 12 \text{ posições na sequência}}$

$$\left(\!\binom{5}{8}\!\right) = \binom{8+5-1}{8} = \binom{12}{8}$$

1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1

12 posições $\binom{12}{8}$ ou $\binom{12}{4}$

8 uns $\quad$ 4 zeros

b) $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$

$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^8$

C_1, C_2, C_3, C_4, C_5

Outro exercício:

Qual o número de possibilidades de escolher 10 bolas de um nº ilimitado de bolas vermelhas, azuis e verdes:

a) Sem restrições

Q_1: C_1 $\boxed{\bullet\bullet\bullet}$ C_2 $\boxed{\bullet\bullet\bullet\bullet}$ C_3 $\boxed{\bullet\bullet\bullet}$

C_{verm} $\quad$ 0 $\quad$ C_{azul} $\quad$ 0 $\quad$ C_{verdes}

$k = 10$ e $n = 3$

$M_1 : \{c_1, c_1, c_1, c_2, c_2, c_2, c_2, c_3, c_3, c_3\}$ $\longrightarrow (s_1, s_2, s_3) = (3, 4, 3)$

$$|M| = \left(\!\binom{3}{10}\!\right) = \binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = \binom{12}{2} = P_T$$

$\circledast$

b) Pelo menos 5 bolos vermelhos

C_1 C_2 C_3

$k' = k - 5$
$= 5$

$\Rightarrow$ comb. de 5 uns e 2 zeros

$\binom{7 \text{ lugares}}{2 \text{ zeros}} = \binom{7 \text{ lugares}}{5 \text{ uns}}$

$$\left(\!\binom{3}{5}\!\right) = \binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2}$$

c) no máximo 5 bolos são vermelhos

C_1 C_2 C_3

Total

$P_T = P_1 + P_2$

alínea a)

P_1: 10 bolos com pelo menos 6 vermelhos

P_2: No máximo 5 vermelhos

$$\left(\!\binom{3}{4}\!\right) = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4}$$

$k'' = k - 6$
$= 4$

$P_2 = P_T - P_1$

$$\Leftrightarrow P_2 = \binom{12}{2} - \binom{6}{4}$$

$$= \frac{12!}{2!\,10!} - \frac{6!}{4!\,4!} = 6 \times 11 - \frac{6 \times 5}{4} = 66 - 15 = 51$$