Slides Reduzidos

Matemática Discreta

Ano Letivo 2022/23 (Versão: 18 de Abril de 2023)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo IV
Recorrência e Funções Geradoras

Parte 2

Séries e funções geradoras

Introdução

A questão

Em problemas de contagem, tipicamente procuramos o número a_n de maneiras de «fazer algo» com n objetos (distinguíveis ou indistinguíveis).

Exemplos (de «fazer algo»)

- «sequências binárias» $\rightsquigarrow$ $a_n = 2^n$.
- «sequências binárias com três uns» $\rightsquigarrow$ $a_n = \binom{n}{3}$.
- «colocar bolas indistinguíveis nas caixas C_1, C_2, C_3» $\rightsquigarrow$ $a_n = \left(\!\binom{3}{n}\!\right)$.
- $\boxed{\text{«colocar bolas indistinguíveis em três caixas tal que a primeira caixa não é vazia e a terceira tem um número par de bolas»}}$ $\rightsquigarrow$ $a_n = ??$.
- «Partições de $\{1, 2, \dots, n\}$» $\rightsquigarrow$ $a_n = ??$.

A questão

Em problemas de contagem, tipicamente procuramos o número a_n de maneiras de «fazer algo» com n objetos (distinguíveis ou indistinguíveis).

A estratégia

Para descobrir estes números, é muitas vezes útil de

1. decompor o problema em subproblemas mais simples.
2. Para o tal, é importante de saber como «compor problemas (de contagem)».
3. Além disso, precisamos de saber que cálculo com as sucessões associadas corresponde à «composição de problemas».

Nesta parte do Capítulo IV ...

- ... aprenderemos operações com «estruturas combinatórias» e as operações correspondentes com as sucessões associadas.
- O cálculo com estas sucessões é uma generalização do cálculo com polinómios, por isso é conveniente escrever a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como uma série formal de potências

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n;$$

  ou na forma exponencial

$$a_0 + a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}x^n.$$

- Além disso, veremos como este cálculo ajuda na resolução de equações de recorrência.

ÍNDICE

1. Séries formais de potências

Séries formais de potências

Uma **série formal de potências** é dada por uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números (naturais, racionais, … ou até complexas); mas escrevemos mais intuitivamente (com algum símbolo x)

$$\mathcal{A} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Nota

- O «somatório» na definição acima é apenas notação (por enquanto não somamos nada).
- A série formal de potências $\mathcal{A}$ é igual a série formal de potências

  $$\mathcal{B} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots$$

  se e só se $a_n = b_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos

Determinamos a série formal de potências correspondente ao problema de contar as maneiras de «colocar bolas indistinguíveis em caixas (suficientemente grande)».

- «distribuir n bolas em três caixas numeradas»:

$$1 + 3x + \cdots + \left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) x^n + \ldots$$

- «colocar n bolas numa única caixa»:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

- «colocar n bolas numa única caixa com no máximo 4 lugares»:

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + 0x^5 + \cdots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

- «colocar n bolas numa única caixa com exatamente 4 lugares»:

$$0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 1x^4 + 0x^5 + \cdots = x^4.$$

Exemplos

- Cada número a podemos interpretar como a série

$$a = a + 0x + 0x^2 + \dots .$$

  Em particular:

$$\begin{aligned} \text{a série nula:} \quad & 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots . \\ \text{a série «um»:} \quad & 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots . \end{aligned}$$

- Mais geral, os polinómios $a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k$ podemos identificar com as séries formais de potências da forma

$$a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k + 0x^{k+1} + 0x^{k+2} + \dots .$$

Exemplos

- A série exponencial: $\exp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$
- A série uniforme: $U = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$
- A série dos números de Fibonacci: $\mathrm{fib} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + \ldots$

2. A ÁLGEBRA DAS SÉRIES FORMAIS

É um espaço vetorial

- **Soma**:
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n.$$

- **Multiplicação por um escalar**:
$$\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n.$$

- A **série nula**
$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^n$$
é o elemento neutro da adição.

- Verificam-se as leis de comutatividade, associatividade, ...

O produto

Para as séries formais de potências $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, define-se o **produto** $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

A série formal de potências $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$ é o elemento neutro da multiplicação.

Nota

Para os polinómios (vistos como séries formais de potências), o produto definido acima coincide com o produto habitual de polinómios.

Exemplo (fórmula binomial)

Para cada $n \in \mathbb{N}$: $$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.$$

O produto

Para as séries formais de potências $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, define-se o **produto** $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

A série formal de potências $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \ldots$ é o elemento neutro da multiplicação.

Nota

Para os polinómios (vistos como séries formais de potências), o produto definido acima coincide com o produto habitual de polinómios.

Nota

No cálculo com séries formais de potências, verificam-se as leis de comutatividade, associatividade, distributividade, ...

Definição

Uma série $\mathcal{B}$ diz-se **série inversa** da série $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 1$.

Nota

Dada $\mathcal{A}$, se existe, uma tal série $\mathcal{B}$ é única e escrevemos $\mathcal{A}^{-1}$ em lugar de $\mathcal{B}$.

Exemplo

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &\quad - (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) = 1;\end{aligned}$$

ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é a série inversa da série $(1-x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}, \qquad \text{escrevemos também } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Exemplo

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x}.$$

De facto, com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n$:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 1 + (\alpha x + \alpha^2 x^2 + \alpha^3 x^3 + \dots) \\ &= 1 + (\alpha x)(1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \dots) \\ &= 1 + (\alpha x)\,\mathcal{A},\end{aligned}$$

portanto, $\mathcal{A}(1 - \alpha x) = 1$.

Exemplo

Consideremos a série fib da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$f_0 = f_1 = 1 \quad \text{e} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

Então:

$$\begin{aligned}
\mathrm{fib} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\
&= 1 + x + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n\right) \\
&= 1 + x + x(\mathrm{fib} - 1) + x^2\,\mathrm{fib};
\end{aligned}$$

portanto, $1 = \mathrm{fib} - x\,\mathrm{fib} - x^2\,\mathrm{fib} = \mathrm{fib}(1 - x - x^2)$, logo

$$\mathrm{fib} = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Definição

A série formal de potências $\mathcal{A}$ diz-se **invertível** quando existe uma série formal de potências $\mathcal{B}$ com $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 1$ (ou seja, quando $\mathcal{A}$ tem inversa).

E quando é?

Dada $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, procuramos $\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n$ tal que $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = 1$, isto é,

$$\begin{aligned}
1 &= a_0 b_0 & &\rightsquigarrow & b_0 &= \frac{1}{a_0} \qquad \text{supondo que} \quad a_0 \neq 0,\\
0 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 & &\rightsquigarrow & b_1 &= -\frac{1}{a_0} a_1 b_0,\\
&\vdots\\
0 &= a_0 b_n + \cdots + a_n b_0 & &\rightsquigarrow & b_n &= -\frac{1}{a_0}(a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0).
\end{aligned}$$

Conclusão

A série formal de potências $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ é invertível se e só se $a_0 \neq 0$.

Substituição

Para as séries formais de potências $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ com $b_0 = 0$, define-se a série obtida por **substituir $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$**:

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{B}^n = a_0 + a_1 \mathcal{B} + a_2 \mathcal{B}^2 + \dots$$

Como o termo constante b_0 de $\mathcal{B}$ é igual a 0, todos os termos em $\mathcal{B}^m$ de grau $0, 1, \dots, m-1$ são igual a 0. Portanto, para calcular o termo m de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, basta considerar

$$a_0 + a_1 \mathcal{B} + \dots + a_m \mathcal{B}^m.$$

Exemplo

Consideremos as séries $\exp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ e $\mathcal{B} = x^2$. Então,

$$\exp(\mathcal{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

com $c_n = 0$ quando n é ímpar e $c_n = \frac{1}{(n/2)!}$ quando n é par.

Substituição

Para as séries formais de potências $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ com $b_0 = 0$, define-se a série obtida por **substituir $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$**:

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{B}^n = a_0 + a_1\mathcal{B} + a_2\mathcal{B}^2 + \dots$$

Como o termo constante b_0 de $\mathcal{B}$ é igual a 0, todos os termos em $\mathcal{B}^m$ de grau $0, 1, \dots, m-1$ são igual a 0. Portanto, para calcular o termo m de $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, basta considerar

$$a_0 + a_1\mathcal{B} + \dots + a_m\mathcal{B}^m.$$

Nota (apenas informação)

O termo c_n da ordem n de $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ é, por exemplo, dado por

$$c_n = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ j_1 + \dots + j_k = n}} a_k b_{j_1} \dots b_{j_k}.$$

Teorema

Sejam $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}$ séries formais de potências onde o termo constante de $\mathcal{B}$ é igual a zero. Verificam-se es seguintes propriedades.

1. $(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)(\mathcal{B}) = \mathcal{A}_1(\mathcal{B}) + \mathcal{A}_2(B)$.
2. $(\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2)(\mathcal{B}) = \mathcal{A}_1(\mathcal{B}) \cdot \mathcal{A}_2(\mathcal{B})$.

Corolário

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ séries formais de potências onde o termo constante de $\mathcal{B}$ é igual a zero e $\mathcal{A}$ é invertível. Então,

$$\mathcal{A}(\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B})\,.$$

Exemplo

Consideremos outra vez a série formal de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n$. Então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n = \mathrm{U}(\alpha x) = \frac{1}{1-\alpha x}\,.$$

3. Interpretação combinatorial

Problemas de contagem: objetos «indistinguíveis»

Sobre o produto

Consideremos um problema de contagem **A** e um problema de contagem **B**, com objetos «indistinguíveis», e com as séries associadas

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Questão. O que os coeficientes $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ do produto $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão a contar?

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \qquad & \mathbf{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} & & \mathcal{B} \end{array}} \quad \longmapsto \quad \boxed{\begin{array}{c} ?? \\ \downarrow \\ \mathcal{A}\,\mathcal{B} \end{array}}$$

Sobre o produto

Consideremos um problema de contagem **A** e um problema de contagem **B**, com objetos «indistinguíveis», e com as séries associadas

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Questão. O que os coeficientes $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ do produto $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão a contar?

De facto, c_n é igual ao número de maneiras (denotado por $\mathbf{A} * \mathbf{B}$) de

- partir a coleção de n objetos indistinguíveis em duas partes E_1 (de n_1 elementos) e E_2 (de n_2 elementos) disjuntas, ou seja, escrever $n = n_1 + n_2$.
- aplicar o problema **A** a E_1 (há a_{n_1} maneiras), e
- aplicar o problema **B** a E_2 (há $b_{n_2} = b_{n-n_1}$ maneiras).

Ou seja, obtém-se: $\text{Série}(\mathbf{A} * \mathbf{B}) = \text{Série}(\mathbf{A}) \cdot \text{Série}(\mathbf{B})$.

Exemplo

Consideremos a questão **A**:

> *colocar n bolas indistinguíveis numa única caixa (suficientemente grande).*

Portanto, a série correspondente a **A** é a série uniforme $U = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

A questão $\mathbf{A} * \mathbf{A}$ é a seguinte:

- partir a coleção de n bolas indistinguíveis em duas partes E_1 (de n_1 elementos) e E_2 (de n_2 elementos) disjuntas ($n = n_1 + n_2$),
- colocar E_1 numa caixa,
- colocar E_2 numa (outra) caixa.

Ou seja, $\mathbf{A} * \mathbf{A}$ é o problema de distribuir n bolas indistinguíveis em duas caixas.

Exemplo

Consideremos a questão **A**:

> *colocar n bolas indistinguíveis numa única caixa (suficientemente grande).*

Portanto, a série correspondente a **A** é a série uniforme $U = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

$\mathbf{A} * \mathbf{A}$ é o problema de distribuir n bolas indistinguíveis em duas caixas, cuja série formal de potências é a série

$$U \cdot U = \text{Série}(\mathbf{A} * \mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{2}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n .$$

Tendo em conta que $U = \frac{1}{1-x}$, obtém se

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{2}{n}\!\!\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n .$$

Nota

De mesmo modo, para cada $m \in \mathbb{N}$, obtém-se

$$U^m = \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) x^n .$$

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Substituir αx nas séries acima, obtém-se

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) \alpha^n x^n ;$$

portanto, para $m \geq 1$,

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} \alpha^n x^n .$$

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos indistinguíveis em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n tais objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção (de facto, o número de elementos) em duas partes disjuntas: E_1 (k elementos) e E_2 ($n-k$ elementos);
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, «há uma maneira» se $k \leq 2$ e é «impossível» para $k > 2$;
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto «há uma maneira».

Sendo c_n o número de maneiras de … (ver acima) …, então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots) = \mathrm{U} + x\,\mathrm{U} + x^2\,\mathrm{U}\,.$$

Em particular, $c_4 = 3$.

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos indistinguíveis em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto em cada das primeiras três caixas e no máximo dois objetos em cada das últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ... (ver acima) ..., então

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= (1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2) \\ &\qquad \text{[Um produto de 5 séries]} \\ &= (1+x)^3(1+x+x^2)^2 \\ &= (1+3x+3x^2+x^3)(1+2x+3x^2+2x^3+x^4) \\ &= 1+5x+12x^2+18x^3+18x^4+12x^5+5x^6+1x^7.\end{aligned}$$

Logo, há $c_4 = 18$ tais maneiras.

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir vinte objetos indistinguíveis em quatro caixas numeradas de modo que hajam no máximo dez objetos em cada uma das primeiras três caixas e pelo menos dois objetos na última caixa caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ... (ver acima) ..., então

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= (1+\dots+x^{10})^3(x^2+x^3+\dots) \\ &= (\mathrm{U} - x^{11}\,\mathrm{U})^3\, x^2\ \mathrm{U} = x^2(1-x^{11})^3\,\mathrm{U}^4 \\ &= x^2 \left(\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}(-1)^k x^{11\,k}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{4}{n}\!\!\right) x^n\right) \\ &= x^2\,(1-3x^{11}+3x^{22}-x^{33})\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\!\!\binom{4}{n}\!\!\right) x^n\right).\end{aligned}$$

Logo, há $c_{20} = \left(\!\!\binom{4}{18}\!\!\right) - 3\left(\!\!\binom{4}{7}\!\!\right) = \binom{31}{3} - 3\binom{10}{3} = 970$ tais maneiras.

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir n objetos indistinguíveis em duas caixas numeradas de modo que haja um número par de objetos na primeira caixa.

Sendo c_n o número de maneiras de ... (ver acima) ..., então

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= (1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x + x^2 + \dots) \\
&= \mathrm{U}(x^2)\ \mathrm{U} \\
&= \frac{1}{(1-x^2)(1-x)} = \frac{1}{(1+x)(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \\
& \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{2}{n}\!\!\right) x^n.
\end{aligned}$$

Logo, há $c_n = \frac{1}{4}(1 + (-1)^n) + \frac{1}{2}(n+1)$ tais maneiras.

Preparação

No que se segue consideremos problemas de contagem com objetos distinguíveis (por exemplo, bolas numeradas). Sendo a_n o número de maneiras correspondente, veremos que é conveniente considerar a série exponencial

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.$$

Em geral, notamos que o coeficiente de índice n do produto

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\right)$$

é

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}}{n!}.$$

Consideremos ...

Consideremos um problema de contagem **A** e um problema de contagem **B**, com objetos «distinguíveis», e com as séries exponenciais associadas

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \quad e \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

Seja c_n o número de maneiras (denotado por $\mathbf{A} * \mathbf{B}$) de

- partir o conjunto $\{1, \dots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n-k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar o problema **A** ao conjunto E_1, há a_k maneiras;
- aplicar o problema **B** ao conjunto E_2, há b_{n-k} maneiras.

Logo, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\right)$, ou seja,

$$\text{SérieExp}(\mathbf{A} * \mathbf{B}) = \text{SérieExp}(\mathbf{A}) \cdot \text{SérieExp}(\mathbf{B}).$$

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos numerados em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, «há uma maneira» se $|E_1| \leq 2$ e é «impossível» para $|E_1| > 2$;
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto «há uma maneira».

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n = (1 + x + \frac{1}{2}x^2)(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots).$$

Em particular, $c_4 = 11$.

As séries ordinárias e exponenciais

Dada um «problema de contagem» com a correspondente sucessão

$$c_n = \text{o número de maneiras de} \dots \text{ com } n \text{ objetos},$$

consideremos as seguintes séries associadas a $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A **série geradora ordinária**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,.$$

Utilizamos esta série no caso de «objetos indistinguíveis»: bolas «iguais», votação secreta, ...

A **série geradora exponencial**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n \,.$$

Utilizamos esta série no caso de «objetos distinguíveis»: bolas numeradas, votação aberta, ...

Nota

Também se utiliza a designação função geradora, embora neste momento não interpretamos as séries formais como funções (ou seja, ainda não consideramos a questão de convergência).

Nota

Consideremos um problema de contagem **A** com objetos distinguíveis, e a_n denota o número de maneiras de aplicar **A** ao conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Suponhamos que $a_0 = 0$ e seja

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

a correspondente série geradora exponencial. Sendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n = \exp(\mathcal{A})$$

a série obtida por substituir $\mathcal{A}$ em $\exp$, então

c_n é o número de maneiras de

- escolher uma partição P de $\{1, 2, \dots, n\}$, e
- aplicar **A** a cada bloco de P.

Fatorial duplo

Para cara $n \in \mathbb{N}$: $\quad n!! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!! & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$

Nota

- Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n!!$ é o produto de todos os números naturais não superiores a n e com a paridade de n.
- Para cada $n \geq 1$, $n!!(n-1)!! = n!$.

Exemplo

Para cada $k \in \mathbb{N}$, $(2k)!! = 2^k k!$. De facto, com $n = 2k$:

$$\begin{aligned} n!! &= 2 \cdot 4 \cdot 6 \ \dots \ (n-2) \cdot n \\ &= (2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \dots (2(k-1)) \cdot (2k) = 2^k k! \end{aligned}$$

TPC: E se n for ímpar? Como $n!! = \frac{n!}{(n-1)!!}$ ...

Exemplo

Determinarmos o número de partições de $\{1, 2, \dots, n\}$ em blocos de dois elementos.

Intuitivamente, escolhemos uma partição e «aceitamos» se cada bloco tem exatamente dois elementos. Como a série geradora exponencial de «aceitar se tem exatamente dois elementos» é

$$\frac{x^2}{2},$$

o número de tais partições é o coeficiente de $\frac{x^n}{n!}$ na série $\exp(\frac{x^2}{2})$. Calculamos:

$$\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{x^{2n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} x^{2n}.$$

Portanto, $c_0 = 1$ e

$$c_m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ for ímpar,} \\ (m-1)!! & \text{se } m \text{ for par, } m \geq 2. \end{cases}$$

4. Séries vs. funções

Recordamos do Cálculo

- Interpretando a série formal de potências

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

como uma série de potências em $\mathbb{R}$ (ou em $\mathbb{C}$), então existe um R com $0 \leq R \leq \infty$ (o raio de convergência) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ é absolutamente convergente, para cada $t \in \,]-R, R[$.

- Se $R > 0$, associamos à série $\mathcal{A}$ a função

$$\mathcal{A} \colon \,]-R, R[\, \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

A função $\mathcal{A}$ admite derivadas de cada ordem em $]-R, R[$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{\mathcal{A}^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemplos

1. O polinómio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$ defina a função polinomial

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_kt^k.$$

3. A série (formal) $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ tem o raio de convergência $R = \frac{1}{2}$; portanto, a série $\mathcal{A}$ define a função

$$\mathcal{A} \colon \left] \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n = \frac{1}{1-2t}.$$

4. A série (formal) $\exp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ tem o raio de convergência $R = \infty$; de facto, a série $\exp$ define a função

$$\exp \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Nota

O cálculo com séries formais corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais conveniente). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula, a série «um» corresponde à função definida por $t \longmapsto 1$,
- a soma de séries corresponde à soma de funções,

$$\boxed{\text{Aqui:}\quad (f+g)(t) = f(t) + g(t)}$$

- a multiplicação por escalares de séries corresponde à multiplicação por escalares de funções,

$$\boxed{\text{Aqui:}\quad (\alpha \cdot g)(t) = \alpha \cdot g(t)}$$

- o produto de séries corresponde ao produto de funções.

$$\boxed{\text{Aqui:}\quad (f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)}$$

- A substituição de séries corresponde à composição de funções.

Exemplo

A função geradora ordinária fib da sucessão dos números de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 2$) é dada por

$$\mathrm{fib}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n = \frac{1}{1-t-t^2}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi$ (o número de ouro), o raio de convergência é $R = \frac{1}{\phi}$.

Exemplo

Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$.

Então, a função geradora exponencial correspondente f é definida por

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nt)^k}{k!} = e^{nt}.$$

Nota

Considerando as propriedades da função exponencial, obtemos logo para a série formal $\exp$:

$$\exp^k = \exp(kx), \qquad \text{(substituir } kx \text{ em } \exp)$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$. Em particular, $\exp^{-1} = \exp(-x)$.

Exemplo

Qual é o número p_n de partições ordenadas (E_1, E_2) de $\{1, \ldots, n\}$ em duas partes não-vazias?

Como se trata de objetos «distinguíveis», consideremos a correspondente série exponencial $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{n!} x^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) = (\exp - 1) \cdot (\exp - 1).$$

Logo,

$$\mathcal{P} = \exp(2x) - 2\exp + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 1,$$

e por isso $p_0 = 0$ e, para $n \geq 1$, $p_n = 2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1)$.

Finalmente, o número de partições de $\{1, \ldots, n\}$ em duas partes não-vazias é $2^{n-1} - 1$, para $n \geq 1$ (ver também o exercício 10, folha 4).

Exemplo

Determinarmos o número $a_{m,n}$ de funções sobrejetivas do tipo $\{1,\dots,m\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$.

Fixamos $m \in \mathbb{N}$, e consideremos as seguintes questões sobre um conjunto finito X:

1. **F**: funções $\{1,\dots,m\} \longrightarrow X$,
2. **S**: funções sobrejetivas $\{1,\dots,m\} \longrightarrow X$,
3. **U**: «fazer nada» (um elemento).

Tento em conta que uma função $\{1,\dots,m\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$ é dada por um subconjunto X de $\{1,\dots,n\}$ (a imagem) e uma função sobrejetiva $\{1,\dots,m\} \longrightarrow X$,

$$\mathbf{F} = \mathbf{S} * \mathbf{U}, \qquad \text{logo} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^m \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} \frac{x^n}{n!}\right) \exp$$

Exemplo

Determinarmos o número $a_{m,n}$ de funções sobrejetivas do tipo $\{1,\dots,m\} \longrightarrow \{1,\dots,n\}$.

e por isso

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^m \frac{x^n}{n!}\right)\exp(-x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^m \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right).$$

Consequentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{m,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^m.$$

Nota

Recordamos que, para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n .$$

Consideremos agora o coeficiente binomial generalizado: para $r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{r}{n} = \frac{\overbrace{r(r-1)\dots(r-n+1)}^{n \text{ fatores}}}{n!}, \qquad \text{em particular} \quad \binom{r}{0} = 1 .$$

Pelos resultados do **Cálculo**, a série de Taylor da função f definida por $f(x) = (1+x)^r$ é dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n,$$

e este série converge absolutamente em $]-1,1[$ para $f(x)$.

Nota

Sendo assim, definimos a série formal de potências $(1+x)^r$ (com $r \in \mathbb{R}$) por

$$(1+x)^r := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \,.$$

Ainda pelos resultados do **Cálculo**, verifica-se a igualdade

$$(1+x)^r \cdot (1+x)^s = (1+x)^{r+s}$$

para todos os x com $|x| < 1$, portanto, esta igualdade também é válida para as séries formais.

Por exemplo, concluímos, para todos os $r, s \in \mathbb{R}$ e todo o $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} \,.$$

5. A derivada e o integral

Definição

Seja

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

uma série de potências formal. Então,

- a derivada de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal

$$\mathcal{A}' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

- o integral de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal

$$\int \mathcal{A} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Séries formais vs. funções

- As séries de potências formais $\mathcal{A}'$ e $\int \mathcal{A}$ têm o mesmo raio de convergência como a série $\mathcal{A}$.
- Dentro do intervalo de convergência da série $\mathcal{A}$, a derivada (formal) e o integral (formal) correspondem às operações com as funções definidas pelas séries.

  Mais concretamente,

  - a função definida pela série formal $\mathcal{A}'$ é a derivada da função definida pela série $\mathcal{A}$;
  - para cada elemento x do intervalo de convergência,

$$\left(\int \mathcal{A}\right)(x) = \int_0^x \mathcal{A}(t)\,dt.$$

As operações algébricas

As operações «derivada» e «integral» com as séries formais obedecem as regras conhecidas do cálculo com funções:

- $(\mathcal{A}+\mathcal{B})' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$ e $\int(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \int\mathcal{A} + \int\mathcal{B}$;
- $(\alpha\,\mathcal{A})' = \alpha\,\mathcal{A}'$ e $\int(\alpha\,\mathcal{A}) = \alpha\int\mathcal{A}$;
- $(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B})' = \mathcal{A}'\cdot\mathcal{B} + \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}'$;
- se $\mathcal{A}$ é invertível, então $\left(\mathcal{A}^{-1}\right)' = -\mathcal{A}'\cdot\mathcal{A}^{-2}$.

  Notação mais intuitiva:

$$\left(\frac{1}{\mathcal{A}}\right)' = -\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}^2}.$$

- $(\mathcal{A}\circ\mathcal{B})' = (\mathcal{A}'\circ\mathcal{B})\cdot\mathcal{B}'$.
- Para cada série formal $\mathcal{A}$: $\left(\int\mathcal{A}\right)' = \mathcal{A}$.

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exemplo

Consideremos

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \int (1-x)^{-1}.$$

Portanto, a correspondente função é dada por, para $x \in]-1, 1[$,

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x).$$

6. Voltando às equações de recorrência

Exemplo

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \tag{*}$$

Exemplo

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \tag{*}$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideremos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

$$(c \cdot 2^n)_{n\geq 1}.$$

Também verifica-se facilmente que a sucessão «constante» $(-1)_{n\geq 1}$ é uma solução de (*); assim, a solução geral de (*) é dada por

$$(c \cdot 2^n - 1)_{n\geq 1}.$$

Finalmente, tendo em conta a condição inicial $a_1 = 1$, obtemos $1 = 2c - 1$, ou seja, $c = 1$. Assim, a solução é

$$a_n = 2^n - 1.$$

Exemplo (Torre de Hanói)

Equação de recorrência: $a_n = 2a_{n-1} + 1$ (para $n \geq 2$) e $a_1 = 1$.

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ correspondente.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= x + 2x\mathcal{A} + \frac{x^2}{1-x} = 2x\mathcal{A} + \frac{x}{1-x};
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} &= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\
&= \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n + 1\Big) - \Big(\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) x^n,
\end{aligned}$$

e obtém-se $a_n = 2^n - 1$.

Exemplo

Equação de recorrência: $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad a_0 = 3,\ a_1 = 4.$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad x^n \quad + 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad x^n \\
&= 3 + 4x + x(\mathcal{A} - 3) + 6x^2 \mathcal{A} \\
&= (6x^2 + x)\mathcal{A} + x + 3;
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\mathcal{A} = \frac{x+3}{-6x^2 - x + 1} = \frac{x+3}{(1-3x)(1+2x)}.
$$

Procuramos agora a decomposição em «frações simples».

Exemplo

Consideremos

$$\frac{x+3}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x};$$

multiplicando ambos os lados por $(1-3x)$ obtemos

$$\frac{x+3}{1+2x} = A + \frac{B(1-3x)}{1+2x},$$

com $x = \frac{1}{3}$ obtemos $A = \dfrac{\frac{1}{3}+3}{1+\frac{2}{3}} = 2.$ De forma semelhante obtém-se $B = 1$, por isso

$$\mathcal{A} = \frac{2}{1-3x} + \frac{1}{1+2x}.$$

Exemplo

Consequentemente:

$$\mathcal{A} = 2\,\frac{1}{1-3x} + \frac{1}{1+2x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$$

Assim, o coeficiente de x^n é $a_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n$.

Exemplo

Finalmente, consideremos

$$a_n = \text{o número de ordens totais em } \{1, \dots, n\},$$

aqui obtém-se a equação de recorrência linear (mas não de coeficientes constantes)

$$a_n = n\, a_{n-1} \quad (n \geq 1), \qquad a_0 = 1.$$

Agora consideremos a série exponencial $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$:

$$\mathcal{A} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, a_{n-1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + x\mathcal{A}.$$

Portanto,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!} x^n,$$

e por isso $a_n = n!$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

- Desenvolver a série ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (ou a série exponencial $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$) utilizando a equação de recorrência e as condições inicias até
- obtemos tipicamente

$$\mathcal{A} = \frac{\text{polinómio 1}}{\text{polinómio 2}} = \frac{\text{polinómio 1}}{(1-\lambda_1 x)^{n_1} \dots (1-\lambda_k x)^{n_k}}\,.$$

- Escrever $\mathcal{A}$ na forma

$$\mathcal{A} = \text{polinómio} + \left(\dots + \frac{\text{constante}}{1-\lambda_i x} + \frac{\text{constante}}{(1-\lambda_i x)^2} + \dots \right).$$

- Recordar (e utilizar) que

$$\frac{1}{(1-\lambda x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\!\!\binom{m}{n}\!\!\right) \lambda^n x^n\,.$$

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad e \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} + x\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.

Utilizando a segunda equação, obtém-se $\mathcal{B} = x\mathcal{A} + 2x\mathcal{B} + \frac{x}{1-2x}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} (1-2x)\mathcal{A} - x\mathcal{B} &= \frac{x}{1-x}, \\ -x\mathcal{A} + (1-2x)\mathcal{B} &= \frac{x}{1-2x}; \end{aligned}$$

ou seja, na linguagem de matrizes:

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Agora precisamos paciência ...

O sistema

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a regra do Cramer, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{1-x} & -x \\ \frac{x}{1-2x} & (1-2x) \end{vmatrix} = \frac{x(1-2x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-2x} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)(1-2x)},$$

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & \frac{x}{1-x} \\ -x & \frac{x}{1-2x} \end{vmatrix} = x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a regra do Cramer, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{1-x} & -x \\ \frac{x}{1-2x} & (1-2x) \end{vmatrix} = \frac{x(1-2x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-2x} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)(1-2x)},$$

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & \frac{x}{1-x} \\ -x & \frac{x}{1-2x} \end{vmatrix} = x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Portanto:

$$\mathcal{A} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)}, \qquad \mathcal{B} = \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)}.$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n.
\end{aligned}$$

Conclusão:

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4}3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{g\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+1}{1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n.
\end{aligned}$$

Conclusão:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - 2^n + \frac{3}{4}3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$