Aula 12

Permutações simples

$X = \{1, 2, 3\}$, $|X| = 3$ → 123, 132, 213, 231, 312, 321

$\underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 3!$

Permutações com repetição

• Número de permutações com repetição num multiconjunto:

Ex₁:

$M_1 = \{1,1,2,2\}$ de $n = 4$ elementos

$M_1 = (X, v(x))$, $X = \{1, 2\}$

6 permutações com repetição $|M_1| = 4$

$\# \{1122, 1212, 1221, 2211, 2121, 2112\}$

4 elementos

$$\frac{4!}{2!\,2!} = \binom{4}{2,2} = \boxed{\binom{n}{n_1, n_2}, \; n_1 + n_2 = n}$$

número multinomial

Ex₂:

$M_2 = \{1, 1, 2, 2, 2\}$

$|M_2| = 5$

$$\binom{5}{2, 3} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,2!} = 10$$

Ex₃:

$M_3 = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3\}$ em $X = \{1, 2, 3\}$

$|M_3| = 7$

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!\,3!\,2!} = \frac{7 \times 2 \times 3 \times 5 \times \cancel{2 \times 2} \times \cancel{3!}}{\cancel{2} \times \cancel{3!} \times \cancel{2}} = 7 \times 30 = 210$$

Teorema:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = m \qquad \underbrace{\binom{m}{m_1, m_2, \dots, m_k}}_{\text{coeficiente multinomial}} = \frac{m!}{m_1!\, m_2! \dots m_k!}$$

Dif:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, \quad |X| = m$$

$$m_1, m_2, \dots, m_k \in \{0, 1, \dots\}, \quad m_1 + m_2 + \dots + m_k = m$$

O nº de seq. $(A_1, A_2, \dots, A_k)$, $|A_i| = m_i$, $j, i = 1, 2, \dots, k$, $A_i \subseteq X$, $\underbrace{A_i \cap A_j = \emptyset}_{\text{Disjuntos}}$, $i \neq j$

é dado por $\binom{m}{m_1, m_2, \dots, m_k}$

Ex4:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$, $|X| = 4 = m$ → Sequências de 2 conjuntos

(A_1, A_2), $|A_1| = |A_2| = 2$, $k = 2$

$A_1, A_2 \subseteq X$, seq. possíveis

$$\#\{(\overset{A_1}{\{1,2\}}, \overset{A_2}{\{3,4\}}), (\{1,3\}, \{2,4\}), (\{1,4\}, \{2,3\}) \overset{\neq}{,} (\{2,3\}, \{1,4\}), (\{2,4\}, \{1,3\}), (\{3,4\}, \{1,2\})$$

$$\binom{4}{m_1, m_2} = \binom{4}{2, 2} = 6$$

$m_1 = m_2 = 2$

Ex5:

$X = \{1, 2, 3\}$ → Partimos o conjunto em subconjuntos

seq. possíveis (A_1, A_2)

$|A_1| = 2$, $|A_2| = 1$

$$\binom{3}{2, 1} = 3$$

$(\{1,2\}, \{3\})$, $(\{1,3\}, \{2\})$, $(\{2,3\}, \{1\})$

Formula multinomial

Teorema: $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$$

Igualdade Combinatoria

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_k} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \dots, n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_k-1}$$

Só para explicar o slide $\boxed{30}$ para uma demonstração

Ex:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_i \subseteq X$

$|X| = n = 4$, $n_1 = n_2 = 2$, $|A_1| = 2 = |A_2|$

$$\binom{4}{2,2} = \binom{3}{1,2} + \binom{3}{2,1}$$

3 Partições de $\{1,2,3\}$ 3

$$\overbrace{(\{1\},\{2,3\}), (\{2\},\{1,3\}), (\{3\},\{1,2\})} \quad \overbrace{(\{1,2\},\{3\}), (\{1,3\},\{2\}), (\{2,3\},\{1\})}$$

$$(\{1\} \cup \{4\}, \{2,3\}) = (\{1,4\}, \{2,3\})$$

Ex:

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Partições (A_1, A_2, A_3), $|A_1| = 1$, $|A_2| = 2$, $|A_3| = 3$

Partições

$\{(A_1, A_2, A_3)$ de X do tipo $(1,2,3)\}$

Existem:

$$\binom{6}{1,2,3} = \binom{5}{0,2,3} + \binom{5}{1,1,3} + \binom{5}{1,2,2}$$

P_1: do tipo $(0,2,3)$, por ex...

$B_1 = \{\}$, $B_2 = \{2,3\}$, $B_3 = \{1,4,5\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$

P_2: do tipo $(1,1,3)$, por ex...

$B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2\}$, $B_3 = \{3,4,5\}$

P_3: do tipo $(1,2,2)$, por ex...

$B_1 = \{1\}$, $B_2 = \{2,3\}$, $B_3 = \{4,5\}$