Folha Semana 2

$\boxed{1}$

$$\varphi \equiv \exists z \left(f\left(s(s(a)), z\right) = x \wedge R\left(s(a), z\right)\right)$$

- Variável livre: x
- A fórmula φ não é fechada pois existem variáveis livres.

M:

$D = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
$R(x,y)$: " x é menor que y (em $\mathbb{N}$)"
$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$(n, m) \mapsto f(n,m) = n \cdot m$
$s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$n \mapsto s(n) = n+1$
A constante "a" interpreta-se por $0 \in \mathbb{N}$

V:

$V(x) = 6$ e $V(z) = 1$

$$\varphi \equiv \underset{\text{Quantificador existencial}}{\exists z} \left(f\left(s(s(a)), z\right) = x \wedge R\left(s(a), z\right)\right)$$

a)

Para o Par (M, V):

$$f(s(s(a)), v^{z}_{o}) = v(x) \wedge R(s(a), v^{z}_{o})$$
$$\equiv f(s(s(0)), v^{z}_{o}) = 6 \wedge R(s(0), v^{z}_{o})$$
$$\equiv f(s(1), v^{z}_{o}) = 6 \wedge R(1, v^{z}_{o})$$
$$\equiv f(2, v^{z}_{o}) = 6 \wedge R(1, v^{z}_{o})$$

Como para $v^{z}_{o} = 3$:

$$f(2, 3) = 6 \wedge \underbrace{R(1, 3)}_{1 < 3}$$

$\equiv 6 = 6 \wedge 1$
$\equiv 1$, a formula é válida nesta interpretação

b)

$$\exists x\ \varphi \equiv \exists x \exists z \left(f(s(s(a)), z) = x \wedge R(s(a), z) \right)$$

Para o Par (M, V):

$$\exists x\ \varphi \equiv f(2, v^{z}_{o}) = v^{x}_{o} \wedge R(1, v^{z}_{o})$$

E como para $V^{z}_{o} = 2$ e $v^{x}_{o} = 4$:

$$\underbrace{f(2,2)}_{2 \times 2} = 4 \wedge \underbrace{R(1,2)}_{1 < 2}$$

$\equiv 4 = 4 \wedge 1$

$\equiv 1$, logo a formula é válida nesta interpretação

c)

$$\forall x\ \varphi \equiv \forall x \exists z \left(f(s(s(a)), z) = x \wedge R(s(a), z) \right)$$

Para o par (M, V):

$$\forall x\ \varphi \equiv f(2, v^{z}_{o}) = v^{x}_{o} \wedge R(1, v^{z}_{o})$$

E como para $v^{z}_{o} = 0$ e $v^{x}_{o} = 1$:

$$\underbrace{f(2,0)}_{2 \times 0} = 1 \wedge \underbrace{\underbrace{R(1,1)}_{1 < 1}}_{\perp}$$

$\equiv 0 = 1 \wedge 0$

$\equiv 0$, logo a fórmula é inválida para esta interpretação