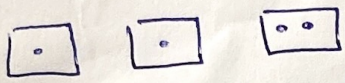
Princípio da gaiola dos pombos

n bolas em m caixas.

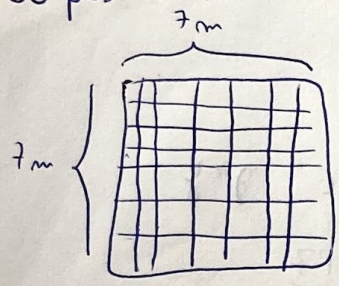
→ Se $n > m$ ⇒ pelo menos uma caixa irá conter mais do que uma bola



↳ Se existirem mK bolas então uma caixa tem pelo menos K bolas

---

ex: 50 pessoas numa sala $7m \times 7m$



→ sala dividida em quadrados 1×1 m logo 49 quadrados

Como queremos colocar 50 pessoas em 49 quadrados e $50 > 49$, pelo PGP existe pelo menos um quadrado onde tem mais que uma pessa. ~~logo a distância~~ Como a distância máxima em um quadrado 1×1 é $\sqrt{2}$, então existem pelo menos 2 pessoas a uma distância inferior ~~ou igual~~ ou igual a $\sqrt{2}$

$\sqrt{2} < 1{,}5$ ⇒ logo, inferior a 1.5 metros.

- Princípio da Bijeção (Multiplição e Adição)

Se existe $f: A \to B$ ou $f: B \to A$

então: $|A| = |B|$

---

ex:

$A = \{1, 2, \ldots, 9\}$

$$\underset{|A|}{9} \times \underset{|A|}{9} \times \underset{|A|}{9} \times \underset{|A|}{9} \times \underset{|A|}{9} = 9^5$$

Princípio da multiplicação

$\boxed{\text{Se for ou usamos o P. da adição}}$

---

nº de palavras comp. 5 com $\{"a", "b", "c", "C", "\gamma"\}$

$|"("| = |")"|$ → Slide 17

$(\; (\; _ \;) \;) \to 3$

2 parentises:

$(\; _ \; _ \; _ \;)$

$(\; _ \; _ \;) \; _$

$(\; _ \;) \; _ \; _$

$_ \; (\; _ \; _ \;)$

$_ \; _ \; (\; _ \;)$

$_ \; (\; _ \;) \; _$

$\to 6 \times 3^3$

Sem parentises: $_ \; _ \; _ \; _ \; _ \to 3^5$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$3 + 6 \times 3^3 + 3^5$

$= 3 + 162 + 243$

$= 408$

- Arranjos com repetição:

$$A^{r}(n,K) = n^{K}$$

- Arranjos sem repetição:

$$A^{s}(n,K) = \frac{n!}{(n-K)!}$$

- Combinações sem repetição:

$$C_K^n = \binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}$$

- Triângulo de Pascal:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$(\cdots) \quad (\cdots)$$

$n=0$ 1

$n=1$ 1 1

$n=2$ 1 + 2 1

$n=3$ 1 3 3 1

$$\boxed{\binom{n}{K} = \binom{n-1}{K-1} + \binom{n-1}{K}}$$

$$\boxed{\binom{n}{K} = \binom{n}{n-K}}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^{n}}$$

!!!

- Multiplicação generalizada

11 jogadores (sem rep) em 20 jogadores

ex:

$$\overline{20} \times \overline{19} \times \dots \times \overline{10} = A_{11}^{20} = \frac{20!}{(20-11)!}$$

$$A_K^N = \frac{N!}{(N-K)!}$$ ← Ordem!

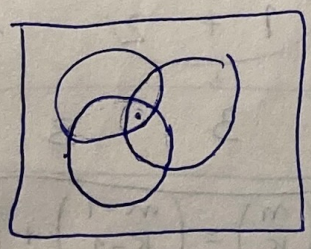
—//—

- equipos diferentes de 11 jogadores com 20 jogadores

$$C_{11}^{20} = \binom{20}{11} = \frac{20!}{11!(20-11)!}$$ ← Sem ordem!

$$C_K^N = \binom{N}{K} = \frac{N!}{K!(N-K)!}$$

- Princípio inclusão - exclusão



$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

ex: Número de bytes (seq. de comp $n=8$) que começa em 1 ou termina em 00.

Começe com 1:

$$\underline{1}\ \underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _}_{2^7} + \underbrace{_\ _\ _\ _\ _\ _}_{2^6}\ \underline{0}\ \underline{0} - \underbrace{\underline{1}\ _\ _\ _\ _\ _}_{2^5}\ \underline{0}\ \underline{0}$$

$$= 2^7 + 2^6 - 2^5$$

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$$

Teorema binomial de Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

ex: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

$\boxed{x=1}$

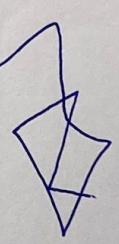
$\hookrightarrow \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}_{\text{Teor. Triangulo de Pascal}}$

Combinações com repetição:

$$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Permutações com repetição:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$



Formula multinomial:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

Igualdade combinatória:

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \ldots, n_k} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \ldots, n_k} + \ldots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \ldots, n_k-1}$$

• Equações de Recorrência: (exemplos)

Lineares homogéneas

1 $\boxed{a_n = 6a_{n-2} - a_{n-1}}$

$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 0 \end{cases}$

$$q^2 + q - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = -3 \vee q = 2$$

$$a_n = \alpha(-3)^n + \beta(2)^n$$

Substituir com condições iniciais:

e temos a_n

2 $\boxed{a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}}$

$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 4 \\ a_2 = 18 \end{cases}$

$$q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = 1 \vee \underbrace{q = 2}_{\text{multiplicidade } 2}$$

$$a_n = \alpha(1)^n + \underbrace{(\beta(2)^n + \gamma n(2)^n)}_{D_0 q_2^n + D_1 n q_2^n + D_2 n^2 q_2^n + \dots + D_{m_i - 1} n^{m_i - 1} q_2^n}$$

Substituindo...

$$a_n = 2 - 2 \times 2^n + 3n2^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Lineares não homogéneas

1 $\boxed{a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + f(n)}$

$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{cases}$

$f(n) = 2^n$

$$\boxed{a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}}$$

Solução eq. homogénia

$$q^2 - 3q + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (q-1)(q-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow q = 1 \vee q = 2$$

$$\boxed{a_n^{(h)} = \alpha 1^n + \beta 2^n}$$

~~Solução eq~~ Obter $a_n^{(p)}$:

$f(n) = 2^n = cp^n$, $c = 1 \wedge p = 2$

$$a_n^{(p)} = A n^{m} 2^n$$

m é a multiplic. de p enquanto raiz característica da eq. homogénia

$$= A n^{1} 2^n$$

Obter A:

$$A n 2^n = 3A(n-1)2^{(n-1)} - 2A(n-2)2^{n-2}$$

$(\dots)$

$$A = 2 \Rightarrow \boxed{a_n^{(p)} = n2^{n+1}}$$

Logo: $a_n = \alpha 1^n + \beta 2^n + n2^{n+1}$

com as condições iniciais resolvemos

2 $\boxed{a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + \underbrace{2^n}_{f_1(n)} + \underbrace{(n+1)}_{f_2(n)}}$

$$\boxed{a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}}$$

$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{cases}$

$$\boxed{a_n^{(p)} = a_{n,1}^{(p)} + a_{n,2}^{(p)}}$$

$a_{n,1}^{(p)} = n2^{n+1}$

$$a_n^{(h)} = \alpha 1^n + \beta 2^n$$

$$a_{n,1}^{(p)} = n2^{n+1}$$

$m = 1$ ⊛ m é a multiplic. de 1 enquanto raiz característica

$$a_{n,2}^{(p)} = ?$$

$f(n) = n + 1$ pol de grau 1 $\rightarrow$ $a_{n,2}^{(p)} = (D_0 + D_1 n) n^{m}$

$$= (D_0 + D_1 n) n$$

$$= D_0 n + D_1 n^2$$

Obter D_0 e D_1:

$$(D_0 + D_1 n)n = 3(D_0 + D_1(n-1))(n-1) - 2(D_0 + D_1(n-2))(n-2)$$

$(\dots)$

Pode não estar certo (exemplo)

$$D_0 = -7/2 \wedge D_1 = -1/2$$

$$a_n = \alpha 1^n + \beta 2^n + n^{2n+1} + \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -2 \end{cases}$ $\{(\dots)\}$ (exemplo)

$$a_n = 2 + 2^{n+1} + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Raizes Caracteristicas Complexas:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$$

$$q^2 - 2q + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2}}{2} \Leftrightarrow q = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow \boxed{q = 1 \pm i}$$

módulo: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\boxed{a \pm bi}$

argumento:

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

Usamos a fórmula: $\boxed{a_n = (r)^n (\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$

Neste caso...

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left(\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \beta \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= (\sqrt{2})^n \left(\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \beta) = 1 \\ \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + \beta) = 3 \end{cases} \begin{cases} \alpha = \frac{2}{\sqrt{2}} - \beta \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \end{cases}}$$

$$\ldots \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow a_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(n \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)\right), n \in \mathbb{N}$$

Nota: Não tendo uma equação de recorrência linear podemos:

→ Fazer substituições

→ Usar séries...

- **Série geradora ordinária:**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n) x^n$$, a_n é o nº de maneiras de contar com n objetos (indistinguíveis/iguais)

- **Série geradora exponencial:**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$, a_n é o nº de maneiras de contar com n objetos (distinguíveis/numerados)

ex: $a_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

$a_n = 2^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$

- **Igualdades úteis:**

- $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha x)^n = \frac{1}{1-\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$
- $(1+x)^r = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{r}{n} x^n$

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\cdots(r-(n-1))}{n!}, \binom{r}{0} = 1$$

- $\left(\frac{1}{1-x}\right)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{n} x^n$
- $\left(\frac{1}{1+\alpha x}\right)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{n} \alpha^n x^n, \alpha \in \mathbb{R}$

- Progressão aritmética:

$$1 + 2 + \dots + n, \quad a_{n+1} = a_n + 1, \quad r = 1$$

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n}$$

- Progressão geométrica:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n, \quad a_{n+1} = a_n \times r, \quad r = x$$

$$\boxed{S_n = a_1 \times \frac{(1 - r^n)}{1 - r}}$$

- Fatorial duplo:

$$n!! = \begin{cases} 1, & n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ n(n-2)!!, & n \geq 2 \end{cases}$$

Ex:

$$\left.\begin{array}{l} n!! = n(n-2)(n-4)(n-6)\times\dots\times 1 \\ (n-1)!! = (n-1)(n-3)(n-5)(n-7)\times\dots\times 1 \end{array}\right\} \times \Rightarrow n! = n!!\,(n-1)!!$$

$$\Rightarrow n!! = \frac{n!}{(n-1)!!}$$

• Teoremas / Resultados:

Grafos Simples

- $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$ → "Soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas"

Corolário

⇒ • O número de vértices de grau impar é par

Digrafo:

- $\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |E|$

• Passeio ≠ Trajeto ≠ Caminho

→ Todos

→ Não tem arestas repetidas

⇓

Círculo

trajeto fechado

$v_i = v_f$

→ Não tem vertices repetidos

⇓

Ciclo

caminho fechado

$v_i = v_f$

Nota:

→ Todos os caminhos são trajetos. Todos os ciclos são círculos

→ Num grafo simples um ciclo tem pelo menos 3 vértices

• Distância entre dois vértices:

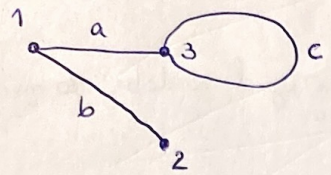
→ Caminho de menor ~~dis~~ comprimento entre eles

→ ∞ se não existir caminho entre eles

Nota: $dist_G(u,v) \leq dist_G(u,y) + dist_G(y,v)$

• Matriz de incidência:

G:

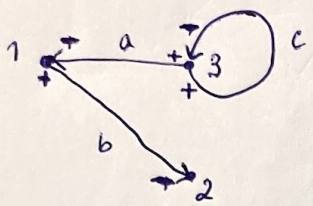


	a	b	c
1	1	1	0
2	0	1	0
3	1	0	2

laçete!

$$\Longrightarrow M_G = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

$\vec{G}$:



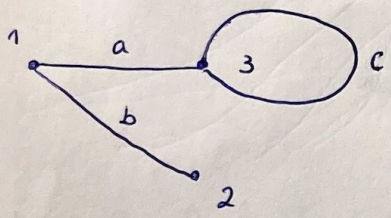
	a	b	c
1	-1	+1	0
2	0	-1	0
3	+1	0	2

laçete!

$$\Longrightarrow M_{\vec{G}} = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

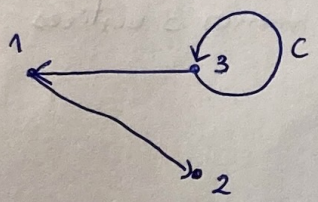
• Matriz de adjacência:

G:



$$\Longrightarrow A_G = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{array} = A_G^T$$

$\vec{G}$



$$\Longrightarrow A_{\vec{G}} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \neq A_{\vec{G}}^T$$

Grafo conexo:

→ O grafo G com pelo menos um vértice diz-se conexo quando todos os seus vértices são conexos

↳ Existe um caminho entre quaisquer 2 vértices

→ Não conexo ⟹ desconexo

$u \overset{\text{conexos}}{\sim} v$: quando x e y são conexos (existe sempre um caminho entre u e v)

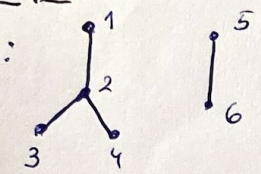
$\boxed{u \sim v \iff v \sim u}$

Nota:

Se G é conexo ⟹ $|V_G| \leq |E_G| + 1$

exemplo:

G:



• $dis(1,5) = \infty$

Logo, G não é conexo.

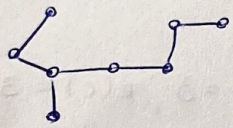
$\boxed{cc(G) = 2}$

$\Uparrow$

$\underbrace{G_1 = G[\{1,2,3,4\}] \quad G_2 = G[\{5,6\}]}$

G_1 e G_2 são subgrafos de G, neste caso, componentes conexos de G

F: (conexo)



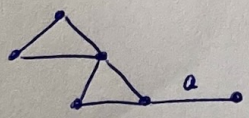
⟹ $\boxed{cc(F) = 1}$

Ponte:

→ a é uma ponte de G se a eliminação de a aumenta o número de componentes de G

$cc(G) = 1$

G:



$\boxed{cc(G-a) = cc(G) + 1 = 2}$

Teorema:

→ G contem um caminho P tal que: $comp(P) \geq \delta(G)$

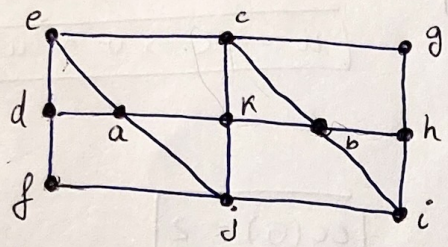
grafo simples

Menor dos graus dos vértices de G

→ Se $\delta(G) \geq 2$ então G contém um ciclo C, tal que: $comp(C) \geq \delta(G) + 1$

Cintura / Excentricidade / Diametro / Raio / Centro:

G:



→ Cintura de g:

~~• Maior distância entre v e todos os vértices de G~~

• Circuito de menor comprimento (caso não exista ⇒ $g(G) = \infty$

$g(G) = 3$, ex: $C = (c, K, b, c)$

→ Excentricidade dos vértices:

• Maior distância entre v e todos os vértices de G

$e(a) = 3$, $e(b) = 3$, $e(c) = 3$

$e(d) = 4$, $e(e) = 3$, $e(f) = 4$

$e(g) = 4$, $e(h) = 4$, $e(i) = 3$

↳ o excentricidade máxima

$e(j) = 3$, $e(K) = 2$

↳ excentricidade mínima

→ Diametro de G: $diam(G) = \max_{v \in V_G} e(v) = 4$

• Maior excentricidade dos vértices de G

→ Raio de G: $r(G) = \min_{v \in V_G} e(v) = 2$

• Menor " ... "

→ Centro de G:

• Conjunto de vértices centrais ⇒ $e(v) = r(G)$

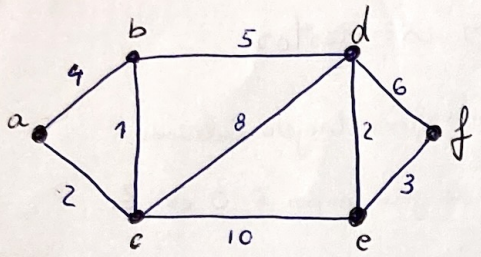
O vertice central é K

↖ único com excentricidade mínima

- **Algoritmo de Dijkstra:** (cálculo de menor custo entre 2 vértices)

  - marca(v) = "custo" do caminho de menor custo entre start e v (até ao momento)
  - ant(v) = antecessor de v ≠ start no caminho de menor custo entre ...

// ex:



- Caminho de menor custo entre os vértices a e f?

Nota:

Matriz de custos:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 4 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ b & 4 & 0 & 1 & 5 & \infty & \infty \\ c & 2 & 1 & 0 & 8 & 10 & \infty \\ d & \infty & 5 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ e & \infty & \infty & 10 & 2 & 0 & 3 \\ f & \infty & \infty & \infty & 6 & 3 & 0 \end{array}$$

Por: (menor(v), antecessor(v))

a	b	c	d	e	f	menor	temp
(0, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	a	{b, c, d, e, f}
	(4, a)	(2, a)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	c	{b, d, e, f}
	(3, c)		(10, c)	(12, c)	(∞, -)	b	{d, e, f}
			(8, b)	(12, c)	(∞, -)	d	{e, f}
				(10, d)	(14, d)	e	{f}
					(13, e)	f	∅

Acumula!

$C_m = (a, c, b, d, e, f)$ de custo $w(C_m) = 13$

- **Circuito Euleriano**: Trajeto fechado contendo todos os arestos do grafo

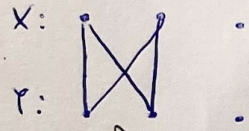
  => O grafo finito e conexo admite um circuito Euleriano <u>se e só se</u> todos os vértices de G <u>têm grau par</u>!

- **Trajeto Euleriano**: Trajeto contendo todos os arestos

  => O grafo finito e conexo admite um trajeto Euleriano <u>se e só se</u> o número de vértices de grau ímpar é <u>0</u> ou <u>2</u>

- **Grafo bipartido**: G com pelo menos 2 vértices é bipartido <u>se e só se</u> não tem circuitos de comprimento ímpar

ex:



Para voltar tem sempre de ter comprimento par

- **Grafo regular**: Um grafo diz se <u>K-regular</u> quando todos os vértices têm grau K

• **Homomorfismo de grafos:** $G = (V_G, E_G, \Psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \Psi_H)$

• Um homomorfismo de G em H é um par $f: V_G \to V_H$

$h: E_G \to E_H$

de funções tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$

$$(\Psi_G(e) = \{u, v\}) \Rightarrow (\Psi_H(h(e)) = \{f(u), f(v)\})$$

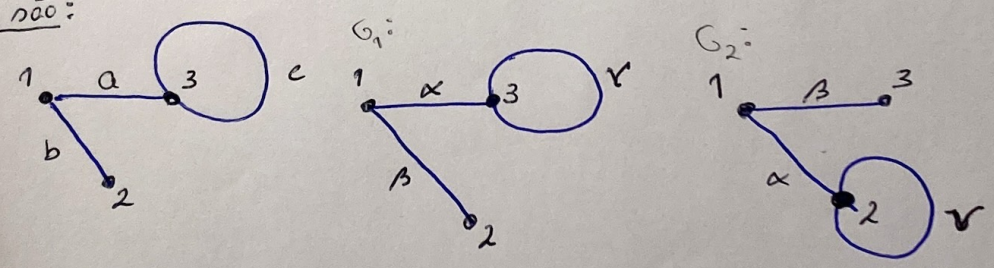
Grafo simples: $h(uv) = f(u)f(v)$

• Um homomorfismo de G em H é um isomorfismo de G em H se tem um homomorfismo de grafos inversos

• Grafos dizem-se isomorfos quando existe um isomorfismo entre eles

"ex: "Iguais a menos da etiquetação dos vértices e aresta"

Grafos são:



$\phi : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$
(bijetiva)

$1 \longrightarrow 1$

$2 \longrightarrow 3$

$3 \longrightarrow 2$

Preservando a relação de adjacência entre os vértices

"ex:

grau 3 → $N_{G_1}(3) = \{1, 3\}$

$N_{G_2}(2) = \{1, 2\}$

• Logo: G_1 e G_2 são isomorfos

$G_1 \cong G_2$?

Se existir:

→ $\phi : V(G_1) \to V(G_2)$
(bijetiva)

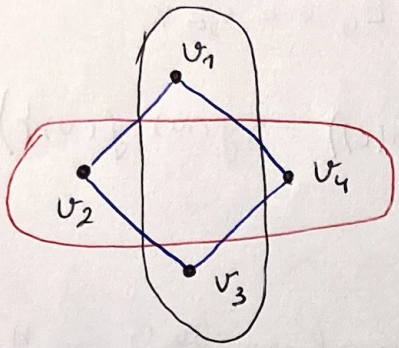
→ preservar a relação de adjacência entre vértices

• Grafo bipartido: $G = (V, E, \Psi)$

→ se $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$

⇒ $G[X]$ e $G[Y]$ são grafos nulos

Ex:



$X = \{v_1, v_3\}$

$Y = \{v_2, v_4\}$

• G com pelo menos 2 vértices é bipartido se e só se não tem circuitos de comprimento ímpar

- **Afirmações equivalentes:**

→ G é uma árvore → Pelo menos dois vértices de grau 1 !

→ G não tem ciclos e tem $(n-1)$ arestas (vértices)

→ G é conexo e tem $(n-1)$ arestas

→ G é conexo e cada aresta é uma ponte

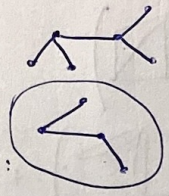
→ Qualquer 2 vértices de G estão unidos por um único caminho

→ G não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo

— // —

- Um grafo finito é uma floresta se $|V_G| = |E_G| + cc(G)$

G:



$10 = 8 + 2 = 10$ //

F:

$4 = 3 + 1 = 4$ //

- **Árvore abrangente de G:** subgrafo de G contendo todos os vértices de G

→ $\boxed{(G//a) - b = (G - b)//a}$

→ $\boxed{\tau(G) = \tau(G-a) + \tau(G//a)}$!

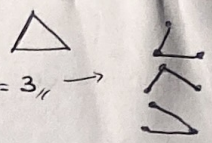
número de árvores abrangentes de G

Casos particulares:

- G não é conexo ⇒ $\tau(G) = 0$
- G é ~~conexo~~ uma árvore ⇒ $\tau(G) = 1$
- G é um ciclo com K arestas ⇒ $\boxed{\tau(G) = K}$
- G é um grafo com 2 vértices ligados por K arestas ⇒ $\tau(G) = K$
- G contém uma ponte unindo dois grafos G_1 e G_2 ⇒ $\boxed{\tau(G) = \tau(G_1) \times \tau(G_2)}$
- G resulta de dois subgrafos G_1 e G_2 que têm um único vértice em comum ⇒ $\boxed{\tau(G) = \tau(G_1) \cdot \tau(G_2)}$

- Fórmula de Cayley:

K_3:



$3^{3-2} = 3$ //

→ Grafo Simples e completo de n vértices com $G = K_n$:

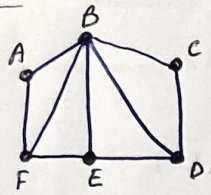
$$\Rightarrow \tau(G) = n^{n-2}$$

K_5:

- Fórmula recursiva para determinar o nº de árvores abrangentes:

Não é completo!

ex: G:

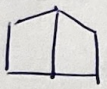
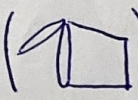
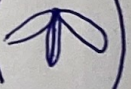


Sabendo que: $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G // e)$

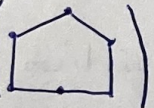
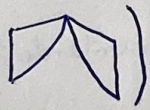
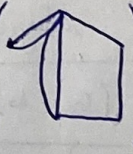
$e_1 = BF$

$\tau(G) = \tau($ $) + \tau($ $)$

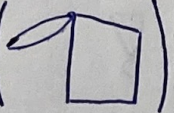
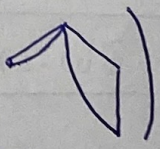
$e_2 = BD$

$= \tau($  $) + \tau($ $)$ $e_3 = BD$ $+ \tau($  $) + \underbrace{\tau($  $)}_{3 \times 2 \times 2 = 12}$

$e_4 = BE$

$= \underbrace{\tau($  $)}_{5} + \underbrace{\tau($  $)}_{3 \times 3} + 2\,\tau($  $) + 12$

$e_5 = BE$

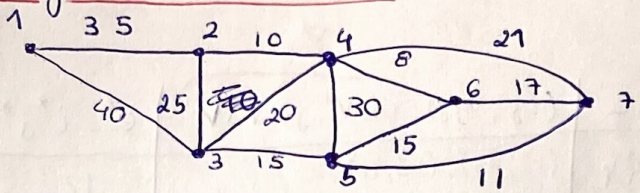
$= 5 + 9 + 2 \times \underbrace{\tau($  $)}_{2 \times 4} + 2 \times \underbrace{\tau($  $)}_{2 \times 3} + 12$

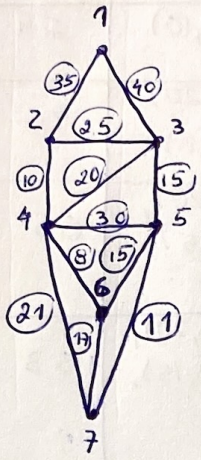
$= 14 + 2 \times 8 + 2 \times 6 + 12$

$= 14 + 40$

$= 54$ // árvores abrangentes

Árvore abrangente de custo mínimo:





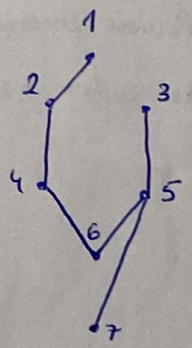
$e_1 = \underset{w=8}{46}$, $e_2 = \underset{w=10}{24}$, $e_3 = \underset{w=11}{57}$, $e_4 = \underset{w=15}{56}$,

$e_5 = \underset{w=15}{35}$, $e_6 = \underset{w=17}{67}$, $e_7 = \underset{w=20}{34}$, $e_8 = \underset{w=21}{47}$,

$e_9 = \underset{w=25}{23}$, $e_{10} = \underset{w=30}{45}$, $e_{11} = \underset{w=35}{12}$, $e_{12} = \underset{w=40}{13}$

Kruskal:

i	e_i	$w(e_i)$	Insere e_i?	$T = G[E']$
1	46	8	Sim	
2	24	10	Sim	
3	57	11	Sim	
4	56	15	Sim	
5	35	15	Sim	
6	67	17	Não	Contem ciclo
7	34	20	Não	Contem ciclo
8	47	21	Não	" "
9	23	25	Não	" "
10	45	30	Não	" "
11	12	35	Sim	
~~12~~	~~13~~	~~40~~	Não!	Conexo!

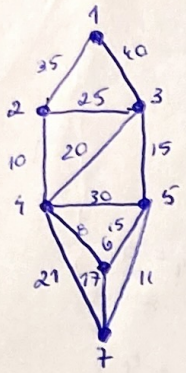


$\Rightarrow T = (V, E')$ conexo! $|E'| = 6$

De Prim

$E' = \{12, 35, 56, 57, 24, 46\} \Rightarrow$ custo total $= 8 + 10 + 11 + 15 + 15 + 35 = 94$

De Prim:



V'	E'	(ij, w_{ij}), $i \in V', j \in V \setminus V'$	$e^* = i^* j^*$
$\{1\}$	$\{\}$	(12,35), (13,40)	12
$\{1,2\}$	$\{12\}$	(13,40), (23,25), (24,10)	24
$\{1,2,4\}$	$\{12,24\}$	(13,40), (23,25), (43,20), (45,30), (47,21), (46,8)	46
$\{1,2,4,6\}$	$\{12, 24, 46\}$	(13,40), (23,25), (43,20), (45,30), (47,21), (65,15), (67,17)	65
$\{1,2,4,6,5\}$	$\{12, 24, 46, 65\}$	(13,40), (23,25), (43,20), (47,21), (67,17), (53,15), (57,11)	53
$\{1,2,4,6,5,3\}$	$\{12, 24, 46, 65, 53\}$	(47,21), (67,17), (57,11)	57
$\{1,2,4,6,5,3,7\}$	$\{12,24,46,65,53,57\}$	Para!, $V = V'$	

Logo: Árvore abrangente de custo mínimo é $T = (V, E')$, $E' = \{12, 24, 46, 65, 53, 57\}$

de custo $35 + 10 + 8 + 15 + 15 + 11 = 94$