Aula 09

P. Bijeção:

$X = \{1, 2, \dots, n\}$
$|X| = n$

$f : P(X) \longrightarrow B^n$, $\underbrace{b_1\ b_2\ \dots\ b_n}_{n \text{ bits}}$
$(b_1, b_2, \dots, b_n)$
$b_i \in \{0,1\}$

$B = \{0,1\}$

- f bijetiva $\longrightarrow$ $\boxed{f \text{ é bijetiva} \Longleftrightarrow f \text{ é invertível}}$

$\underbrace{|P(X)|}_{\text{conj. de todos os subconjuntos}} = |B^n| = 2^n$

$f^{-1} : B^n \longrightarrow P(X)$

P. Adição

$A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos $\underbrace{A_i \cap A_j = \{\}}_{\text{conjuntos disjuntivos}}$, $i \neq j$,

$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$ ← $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$

P. Multiplicação

$A_1, A_2, \dots, A_n$ conjuntos finitos,

$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n|$

- Exemplo: Quantos números de telefone podem ser atribuídos em $\underset{A}{\text{Aveiro}}$, $\underset{C}{\text{Coimbra}}$ e $\underset{P}{\text{Porto}}$

A: 2 3 4 $\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}_{\in D}$

C: 2 3 9 $\overbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}$

P: 2 2 $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\in D}$

$D = \{0, 1, \dots, 9\}$, $|D| = 10$

$|A \cup C \cup P| \overset{\text{P. Adição}}{=} \underset{10^6}{|A|} + \underset{10^6}{|C|} + \underset{10^7}{|D|}$ P. Multiplicação

$= 2 \times 10^6 + 10^7$

Multiplicação generalizada:

$$\underbrace{P_1}\times\underbrace{P_2}\times\underbrace{P_3}\times\ \cdots\ \times\underbrace{P_m}$$

P_i = nº de possibilidades (maneiras) de realizar o procedimento

Ex.: [1] Quantas maneiras existem para escolher 11 $^{=K}$ jogadores de um conj. de 20 $^{=N}$:

! Depois de escolher um, não posso escolher o mesmo $\{J_1, J_2, J_3, \ldots, J_{20}\}$

$$\underset{N}{\underline{\quad}\,20} \times \underset{N-1}{\underline{\quad}\,19} \times \underset{N-2}{\underline{\quad}\,18} \times \underset{N-3}{\underline{\quad}\,17} \times \cdots \times \underset{N-10}{\underline{\quad}\,10} = \frac{20!}{9!} = \frac{N!}{(N-K)!}$$

[2] Quantas equipas diferentes de 11 $^{=K}$ jogadores posso ter quando escolho de 20 $^{=N}$ jogadores

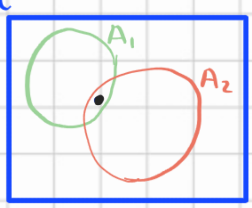
$$C_{11}^{20} = \binom{20}{11} = \frac{20!}{11!\,9!} = \frac{N!}{K!(N-K)!}$$

Adição generalizada

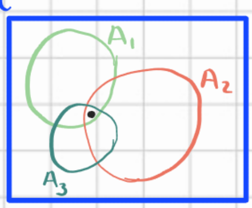
- Princípio da inclusão - exclusão:

A_1, A_2 , $A_1 \cap A_2 = \{\}$ → "O que tínhamos antes"

$\mathcal{U}$



$\mathcal{U}$



$A_1 \cap A_2 \neq \{\}$
$A_1 \cap A_3 \neq \{\}$
$A_2 \cap A_3 \neq \{\}$
$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \{\}$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

!

Teorema (mais geral): $A_1, A_2, \ldots, A_m$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_m| - |A_1 \cap A_2| - \ldots - |A_{m-1} \cap A_m| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots + |A_{m-2} \cap A_{m-1} \cap A_m| - \ldots + \underbrace{(-1)^{m+1}}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

$\begin{cases} 1 \text{ , se } m \text{ ímpar} \\ -1 \text{ , se } m \text{ par} \end{cases}$

Ex: Determine o número de bytes (seq. binários de comp. $n=8$) que começa em $\underline{1}$ ou termina em $\underline{00}$

$$\underbrace{b_1}_{1}\times\underbrace{b_2}_{2}\times\underbrace{b_3}_{2}\times\underbrace{b_4}_{2}\times\underbrace{b_5}_{2}\times\underbrace{b_6}_{2}\times\underbrace{b_7}_{2}\times\underbrace{b_8}_{2} + \underbrace{b_1}_{2}\times\underbrace{b_2}_{2}\times\underbrace{b_3}_{2}\times\underbrace{b_4}_{2}\times\underbrace{b_5}_{2}\times\underbrace{b_6}_{2}\times\underbrace{b_7}_{1}\times\underbrace{b_8}_{1} - \underbrace{b_1}_{1}\times\underbrace{b_2}_{2}\times\underbrace{b_3}_{2}\times\underbrace{b_4}_{2}\times\underbrace{b_5}_{2}\times\underbrace{b_6}_{2}\times\underbrace{b_7}_{1}\times\underbrace{b_8}_{1}$$

Repetidos

$$= \underbrace{2^7}_{|A|} + \underbrace{2^6}_{|B|} - \underbrace{2^5}_{|A\cap B|}$$

$$|A| = \left|\{(1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8) : b_i \in \{0,1\},\ i=\{2,\dots,8\}\}\right| = 2^7$$

P. Multiplicação

$$|B| = \left|\{(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,0,0) : b_i \in \{0,1\},\ i=\{1,\dots,6\}\}\right| = 2^6$$

$$|A\cap B| = \left|\{(1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,0,0) : b_i \in \{0,1\},\ i=\{2,\dots,6\}\}\right| = 2^5$$

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$= 2^7 + 2^6 - 2^5$$

Formulação alternativa

Subconj. vs propriedades

O nº de elementos de X que não possui nenhuma das propriedades $p_1, p_2, \dots, p_m$ é dado por:

Este "−" troca os sinais todos

$$|X\setminus A| = |X| - N(1) - N(2) - \dots - N(m)$$
$$+ N(1,2) + \dots + N(m-1,m)$$
$$- N(1,2,3) - \dots - N(m-2,m-1,m)$$
$$+ \dots + (-1)^m N(1,\dots,m)$$

X menos A

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap \dots \cap A_{i_m}| = \underbrace{N(i_1, i_2, \dots, i_k)}$$

O número de elementos que têm pelo menos as propriedades $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m,\quad A_i = \{x\in X : p_i(x)\}$$