Aula 08

Teorema de Dirichlet (P.G.P.)

Para todos os $\alpha \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, existem inteiros p e q com $q \in \{1,2,3,\dots,n\} = [n]$, tal que:

primeiros n elementos

$$\boxed{|q\alpha - p| < \frac{1}{n}} \quad (*)$$

$q > 0$

$$\Leftrightarrow \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn} \leq \frac{1}{q^2}$$

Nota:

Math.floor() $\lfloor x \rfloor$ maior inteiro "a" com $x \geq a$

ou

Math.ceil() $\lceil x \rceil$ menor inteiro "a" com $x \leq a$

$\lfloor 2.9 \rfloor = 2$ $\quad \lceil 2,9 \rceil = 3$

$\lfloor 2.1 \rfloor = 2$ $\quad \lceil 2,1 \rceil = 3$

$0 \quad \frac{1}{n}$

(*) Demonstração

$$f : \underbrace{\{0,1,2,\dots,n\}}_{|A| = n+1} \longrightarrow \underbrace{\{ \overbrace{[0,\tfrac{1}{n}[}^{I_0}, \overbrace{[\tfrac{1}{n},\tfrac{2}{n}[}^{I_1}, \dots, \overbrace{[\tfrac{n-1}{n}, 1[}^{I_{n-1}} \}}_{B}, \quad f \text{ não é injetiva}$$

$\frac{n}{n}$

B conj. de subconjuntos $\in [0,1[$ $\qquad |B| = n-1+1 = n$

$$k \longrightarrow f(k) = I, \quad x_k \in I$$

- Existem l e k em A, $l < k$, t.q., $x_l, x_k \in I_j$

$$|x_k - x_l| < \frac{1}{n}, \quad \text{com } x_k = k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor$$

$$\Big| \underbrace{(k-l)\alpha}_{q} - \big(\underbrace{\lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor l\alpha \rfloor}_{p} \big) \Big| < \frac{1}{n}$$

Princípio da Bijeção !

se Existe $f : A \longrightarrow B$ ou

$f : B \longrightarrow A$, bijetiva !

então $|A| = |B|$

Ex. 1

$$\overbrace{\overset{a_1}{2}\overset{a_2}{3}\overset{a_3}{4}\overset{a_4}{5}}^{\in a} = \overbrace{2\times 10^3 + 3\times 10^2 + 4\times 10^1 + 5\times 10^0}^{\in c}$$

$\uparrow\ \uparrow\ \uparrow\ \uparrow$

A A A A

4 posições com símbolos A

$A = \{1, 2, \ldots, 9\}$

$(a_1, a_2, a_3, a_4) \longrightarrow 2345$

$n = 4$, n-uplo

4 símbolos A

$f : A^4 \longrightarrow C$

Bijetiva $|A^4| = |C|$

$|A^4| = |A| \times |A| \times |A| \times |A| = |A|^4 = 9^4 = |C|$

P. Multiplicação

$$\frac{A}{9} \times \frac{B}{10} \times \frac{B}{10} \times \frac{B}{10} = 9 \times 10^3 = |C|$$

↳ Neste Ex. !

Ex. 2

$X = \{1, 2\}$, $|X| = 2$

$P(X) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$, $|P(x)| = 2^2 = 4$

$\underbrace{\text{Conjunto de todos os subconjuntos que é possível obter com X}}_{\text{conj. dos partes de } x}$

$\underbrace{|P(x)|}_{\text{nº de subconj. de x}} = ?$, quando $|x| = n \in \mathbb{N}$

Define-se $f : P(X) \longrightarrow B^n$, $B = \{0, 1\}$, $|B| = 2$

$A \longrightarrow f(A) = \underbrace{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}_{\substack{n\text{-uplo} \\ \text{seq. binária de} \\ \text{comprimento } n}}$

$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$|x| = n$

(*) Logo, $|P(x)| = |B^n| = 2^n$

tal que:

$$a_i = \begin{cases} 1 & , \text{se } x_i \in A \\ 0 & , \text{se } x_i \notin A \end{cases}$$

, f é bijetiva

Ex:

$X = \{\}$ $\quad f: P(\{\}) \longrightarrow \{0,1\}^0$

$|X| = 0$ $\quad \{\} \to$ 0-uplo $\emptyset$

— // —

$X = \{1,2,3,4,5\}$ $\quad f: P(X) \longrightarrow \{0,1\}^5$

$A \longrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$

$P(X) = \{\ldots, \{1,3,4\}, \ldots\}$

$f(A) = f(\{1,3,4\}) = \underbrace{(1,0,1,1,0)}_{10110}$

$A = \{3\}$, $f(A) = (0,0,1,0,0)$

$A = \{\}$, $f(A) = (0,0,0,0,0)$

$A = \{1,2,3,4,5\} = X$, $f(A) = (1,1,1,1,1)$

— // —

Como f é bijetiva, então $|P(X)| = |B^m| = 2^m$

Prova que f é bijetiva:

→ Injetiva:

$A, B \in P(X)$, $A \neq B$

$\exists i \in \mathbb{N} : x_i \in A$ e $x_i \notin B$

i-ésima parte de $f(A) = 1$ $\qquad A = \{\ldots, x_i, \ldots\} \subseteq X$

" " $f(B) = 0$ $\qquad B = \{\ldots, \underbrace{x_i - 1, x_i + 1}_{\text{Não existe } x_i}, \ldots\} \subseteq X$

Logo, $f(A) \neq f(B)$ ✓

→ Sobrejetiva: para qualquer uplo imagem tem sempre um objeto X associado

$\forall a \in B^m \ \exists c \in P(X) : f(c) = A$

Seja $a = (a_1, a_2, \ldots, \underbrace{a_m}_{\text{"0" ou "1"}}) \in B^m$

então $c = \{x_i \in X : a_i = 1\}$,

tal que $f(c) = a$,

$f(c) = (a_1, a_2, \ldots, \underbrace{1}_{a_i}, \ldots, a_m)$

Nota: f é invertível, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 1, 2, \dots, n$

$$f^{-1} : B^n \longrightarrow P(X)$$
$$\underbrace{a}_{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \longmapsto f^{-1}(a) = C$$

$n = 4$: $\quad a = (1,1,0,1) \longmapsto C = \{1,2,4\} \subseteq X = \{1,2,3,4\}$

$$|B^4| = \underset{|B|=2}{2^4}$$