Aula 19

Exercícios de Exames:

1 Quantas seq. de comprimento n se podem formar escolhendo símbolos em $\{a, b, c, d, e\}$, tal que o número de a's seja par e o número de b's seja ímpar.

Série geradora associada à solução:

$$S'(x) = \underbrace{\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)}_{\text{número de } a's}\underbrace{\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)}_{\text{número de } b's}\underbrace{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)^3}_{\text{número de } c's,\, d's,\, e's \to (e^x)^3}$$

$$e^x = 1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \dots \qquad e^x = \cancel{1} + x + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$+ \qquad\qquad\qquad\qquad - $$

$$e^{-x} = 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \dots \qquad e^{-x} = -\cancel{1} + x - \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2\times\left(\frac{x^2}{2!}\right) + \dots \qquad e^x - e^{-x} = 2x + 2\times\frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \qquad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Logo: $S(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \times \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \times e^{3x}$

Pretende-se: $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(\,?\,)}_{(s_n)_{n\in\mathbb{N}}} \frac{x^n}{n!}$

Ora,

$$S(x) = \frac{e^{2x} - \cancel{1} + \cancel{1} - e^{-2x}}{4} \times e^{3x} = \frac{e^{5x} - e^x}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\times\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overbrace{(5x)^n}^{5^n x^n}}{n!} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}(5^n - 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{\frac{(5^n - 1)}{4}} \frac{x^n}{n!}$$

↳ solução

Para $n=2$: $s_2 = \dfrac{(5^2 - 1)}{4} = \dfrac{24}{4} = 6 \longrightarrow$ bc, bd, be / cb, db, eb

2 Número de maneiras de distribuir n melões (iguais) por 5 caixas, tal que uma caixa fique com um nº par de melões e outra com um nº ímpar, não havendo restrições nas outras caixas

$$S(x) = \underbrace{(x + x^3 + x^5 + \dots)}_{\substack{\text{número na caixa} \\ \text{Impar}}} \times \underbrace{(1 + x^2 + x^4 + \dots)}_{\text{" " Par}} \times \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^3}_{\substack{\text{número nas caixas} \\ \text{sem restrição}}}$$

$$\frac{1}{1-x^2} \times x \qquad \sum_{k=0}^{n} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2} \qquad \left(\frac{1}{1-x}\right)^3$$

$$S(x) = \frac{x}{\underbrace{1-x^2}_{(1-x)(1+x)}} \times \frac{1}{1-x^2} \times \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^2(1-x)^3} \ (\dots)$$

↳ Dava muito trabalho! Acaba aqui!

3 $a_n = 2n\,a_{n-1} + 2^n n!\,, \quad a_0 = 1$ — coeficientes não constantes

$\boxed{a_n = n!\,b_n}$ ou $\boxed{\text{usando a função geradora exponencial}}$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2n\,a_{n-1} + 2^n n!) \frac{x^n}{n!} \qquad (a_0 = 1)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^n$$

$$= 1 + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^n$$

$$= 1 + 2x \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{n!}}_{A(x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^n$$

$$\Rightarrow A(x)(1-2x) = \underbrace{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^n}_{\sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}}$$

$$\Leftrightarrow A(x)(1-2x) = \frac{1}{1-2x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2+n-1}{n} (2^n x^n)$$

$$\binom{n+1}{n} = \binom{n+1}{1} = n+1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(n+1)\,n!\,2^n}_{a_n} \frac{x^n}{n!}$$