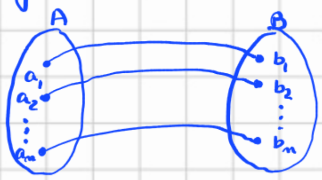
Aula 07

Princípio de Enumeração combinatória

- Princípio da Gaiola de Pombos $\longleftrightarrow$ Teorema de Dirichlet
- P. da Multiplicação
- P. da adição

Relembrar:

$f: A \longrightarrow B$



$|A| = n \qquad |B| = n$

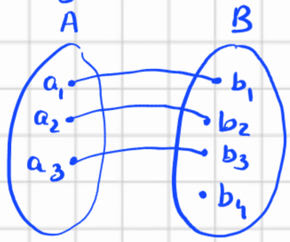
f é bijetiva, ou $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$

$\boxed{1}$ injetiva $\forall x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$
(ou $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$)

$a \rightarrow b$
$\neg b \rightarrow \neg a$

$\boxed{2}$ sobrejetiva $\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$

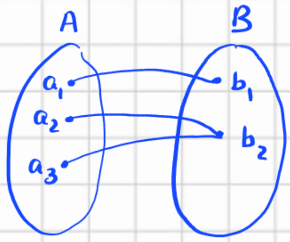
$g: A \rightarrow B$



$|A| < |B|$

g é injetiva mas não sobrejetiva

$h: A \longrightarrow B$



h é sobrej. mas não é injetiva

Ex.:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^3$$

Injetiva: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \underbrace{f(x_1)}_{(x_1)^3} \neq \underbrace{f(x_2)}_{(x_2)^3}$

Sobrejetiva: $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R}$ $\quad \underbrace{f(x)}_{x^3} = y \iff x = \sqrt[3]{y}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{y}$

> ! **Teorema:** f é bijetora $\underset{\Longleftarrow}{\underline{\text{sse}}}$ f é invertível
> $\Longrightarrow$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto g(x) = x^2 - 1$

Como para $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = 3 = f(x_2)$, logo g não é injetiva

Princípio da Gaiola dos Pombos

"n pombos voam para m gaiolas. Se $n > m$, então pelo menos uma gaiola irá ter mais de um pombo"

Ex₁:

$m = 4$ Caixas / gaiolas

objetos / pombos

$n = 5 > 4$, uma das gaiolas (caixas) tem pelo menos um pombo (objeto)

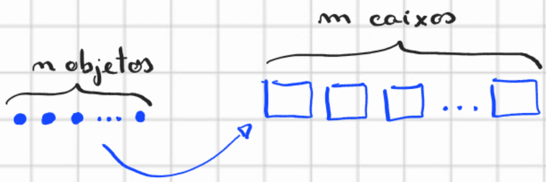
Ex₂:

$n = 8 > 7$

$m = 7$

$n = 15 > \underbrace{2}_{k} \times \underbrace{7}_{m} \mapsto$ pelo menos $\underbrace{3}_{k+1}$ numa dada caixa

Formulação PGP



Se $n > km$, então pelo menos uma das caixas contém $(k+1)$ ou mais bolas

$$\underbrace{\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor}_{\substack{k \text{ menor inteiro} \\ \text{superior a } \frac{n}{m}}} + 1 = k + 1$$

Raciocínio

(I) Conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $|A| = 5$

$A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3, 4, 5\}$

$A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

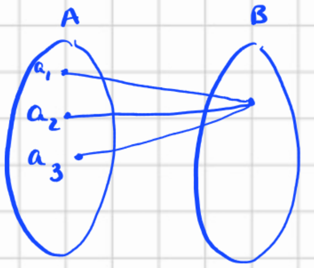
$\underbrace{|A|}_{3} > \underbrace{K}_{2}\,\underbrace{m}_{2}$, logo existe A_2 com $|A_2| = K+1 = 3$

II Funções

Se $|A| > K|B|$, então existe $b \in |B|$ com

$$|\{x \in A : f(x) = b\}| > K \quad \text{(pelo menos } K+1\text{)}$$

$f : A \longrightarrow B$



$|A| = 3$ $\quad$ $|B| = 1$

$\underbrace{|A|}_{3} > 2 \times \underbrace{|B|}_{1}$

$|f^{-1}(b_1)| = \underbrace{3}_{K+1}$

$\downarrow$

$|\{a_1, a_2, a_3\}|$

$f(a_1) = b_1$
$f(a_2) = b_1$
$f(a_3) = b_1$