Aula 16

Números de Fibonacci

$$\underbrace{1}_{F_0}, \underbrace{1}_{F_1}, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots, F_n, \ldots$$

Sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem como série geradora $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = F_0 x^0 + F_1 x^1 + \ldots$

Séries e funções geradoras

ex:

Série geradora: $\sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$

Série geométrica: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1\times x^0 + 1\times x^1 + 1\times x^2 \ldots = \frac{1}{1-x}$

$a_n = 1$

Sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $1, 1, 1, 1 \ldots$

se $|x|<1$, nem sempre uma série representa uma função: é preciso que seja convergente

Mas, em MD usamos as séries (formais) para fazer contagem, i.e., apenas os coeficientes interessam

Série geradora ordinária: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Exercício: Número de possibilidades de distinguir n bolas (indistinguíveis) por 3 caixas:

C_1 C_2 C_3

1 Opção

- Coincide com o nº de soluções da equação (inteiros):

$$x_1 + x_2 + x_3 = n$$

é dado por:

$$\left(\!\!\binom{3}{n}\!\!\right) = \underbrace{\boxed{\binom{n+3-1}{n}}}_{= c_n}$$

Usando séries geradoras:

2 Opção

- C_1: $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- C_2: $\ldots$ } Igual
- C_3: $\ldots$

multiplicando

Logo: $\left(\frac{1}{1-x}\right)^3 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \boxed{\binom{n+3-1}{n}} x^n$ $= c_n$

Caso geral:

$$\boxed{\left(\frac{1}{1-x}\right)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} x^n}$$

Igualdades úteis (séries/funções geradoras)

1. $$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

2. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$$

3. $$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha x)^n = \frac{1}{1-\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$$

4. $$\left(\frac{1}{1-x}\right)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\binom{n+m-1}{n}}_{\binom{n+m-1}{m-1}} x^n$$

5. $$\left(\frac{1}{1+x}\right)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{n} (-1)^n x^n$$

6. $$\left(\frac{1}{1-\alpha x}\right)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{n} \alpha^n x^n, \alpha \in \mathbb{R}$$

7. $$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\binom{r}{n}}_{\text{coef. binómio generalizado}} x^n, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\dots(r-(n-1))}{n!}, \quad \binom{r}{0} = 1$$

Relembrar ainda

- Progressão aritmética: $1 + 2 + \dots + n$, $a_{n+1} = a_n + r$, $r = 1$

  pode não ser 1

  $$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} n$$

- Progressão geométrica: $1 + x + x^2 + \dots + x^n$, $a_{n+1} = a_n \times r$, $r = x$

  pode não ser 1

  $$S_n = a_1 \times \frac{(1-r^n)}{1-r}$$

Álgebra das séries

- Produto: $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

  $A \to a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

  $B \to b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$

  $$A \cdot B = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \text{ com } c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

  $$\to \underbrace{(a_0 b_0)}_{c_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k b_{n-k}} x^0 + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{c_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k b_{n-k}} x^1 + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{c_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k b_{n-k}} x^2 + \dots$$

- Série inversa: $\underbrace{A \cdot B}_{\text{série inversa de } A} = 1 \Longrightarrow A \cdot A^{-1} = 1$

ex:

$\boxed{1}$ $$\underbrace{(1-x)}_{A}\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}_{A^{-1}} = 1$$

$\boxed{2}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, $$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$$

$$\hookrightarrow = 1 + \alpha x(\underbrace{1 + \alpha x + \alpha^2 x^2 + \ldots}_{A})$$

Assim:

$$A = 1 + \alpha x A$$
$$\Leftrightarrow A - \alpha x A = 1$$
$$\Leftrightarrow A\underbrace{(1-\alpha x)}_{A^{-1}} = 1$$

Função geradora $F(x)$, da sucessão dos n.º de Fibonacci:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n \geq 2 \\ f_0 = 1, \; f_1 = 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(f_n x^n) = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}(f_{n-1} + f_{n-2})x^n$$

$$\Leftrightarrow F(x) = 1 + x + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} f_{n-1} x^n}_{\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^{n+1}}_{x\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n}} + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} f_{n-2} x^n}_{\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^{n+2}}_{x^2\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n}}$$

Substituindo no início:

$$F(x) = 1 + x + x\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n}_{F(x)-F(0)} + x^2\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n x^n}_{F(x)}$$

$$\Leftrightarrow F(x) = 1 + x + x(F(x) - 1) + x^2 F(x)$$

$$\Leftrightarrow F(x) - x F(x) - x^2 F(x) = 1 + \cancel{x} - \cancel{x}$$

$$\Leftrightarrow F(x)(1 - x - x^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Operação de substituição

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \quad \boxed{\text{com } b_0 = 0}$$

substitui B em A

$$A \circ B = A(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n B^n$$

$$= a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_m B^m + \dots + a_n B^n + \dots$$

$B = b_1 x + b_2 x^2 + \dots$, termo de grau 0 nulo

$B^2 = (b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^2$, termos de grau 0, 1 nulos

$B^3 = (b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^3$, termos de grau 0, 1, 2 nulos

(...)

$B^m = (b_1 x + b_2 x^2 + \dots)^m$, termos de grau $0, 1, \dots, m-1$ nulos

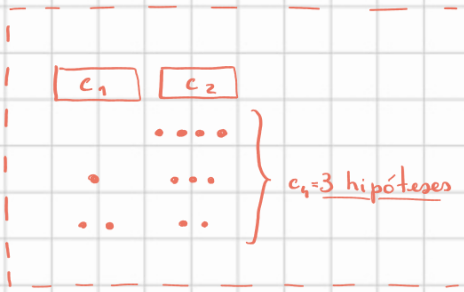
Assim: o termo m de $A(B)$ é

$$\boxed{a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_m B^m}$$

Interpretação combinatorial (exercícios)

1 Número de possibilidades de colocar 4 objetos iguais em 2 caixas, tal que, no máximo, 2 objetos na primeira caixa:

indistinguíveis



C_1 $\quad$ C_2

Séries geradoras $\longrightarrow$ $\underbrace{(1 + x + x^2)}_{\text{pol. gerador}} = p_1 \qquad (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = p_2$

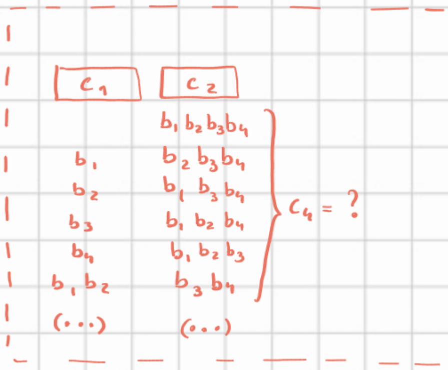
$$p_1 p_2 = \sum_{n=0}^{6} c_n x^n = c_0 x^0 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6$$

$$= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + x^2(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 3x^3 + \underbrace{3}_{c_4 = 3} x^4 + 2x^5 + x^6$$

Assim: resposta é 3.

• E se forem objetos distinguíveis?



$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \frac{x^n}{n!} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)$$

$$= (\dots) + \underbrace{(1 + 4 + 6)}_{c_4 = 11} \times \frac{x^4}{4!} + (\dots)$$

Assim: resposta é 11.