Aula 14

Equações de recorrência

$$a_n = \overbrace{c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}}^{a_n^{(h)}} + \overbrace{f(n)}^{a_n^{(p)}}, \quad c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \dots, k$$

$f(n)$: cp^n, $p \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

pol. de grau j, $j = 0, 1, 2, \dots$

$$\hookrightarrow a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

ex:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-2} + n, & n \geq 2 \\ a_0 = 0,\ a_1 = 1 \end{cases}$$

n ← pol. de grau 1

$$a_n^{(h)}: \ a_n - a_{n-2} = 0 \quad \boxed{a_n = q^n}$$

$$q^n - q^{n-2} = 0$$

<u>Eq. característica</u>: $q^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (q-1)(q+1) = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{q = 1 \vee q = -1}_{\text{Raízes características}}$$

De onde vem,

$$a_n^{(h)}: \ c_1 + c_2 (-1)^n$$

<u>Solução particular $a_n^{(p)}$</u>:

$$a_n^{(p)} = n^{m} \underbrace{(A_0 + A_1 n)}_{\text{polinómio de grau } j=1} \overset{m=1}{=} A_0 n + A_1 n^2$$

multiplicidade de 1 enquanto raiz característica

$m = 0$: se 1 não é raiz característica

<u>Determinar A_0 e A_1</u>: (substituindo em $a_n^{(p)}$ em $\boxed{a_n = a_{n-2} + n}$)

$$A_0 n + A_1 n^2 = A_0 (n-2) + A_1 (n-2)^2 + n$$

$$\Leftrightarrow \cancel{A_0 n} + A_1 n^2 - \cancel{A_0 n} + 2A_0 - A_1 (n^2 - 4n + 4) = n$$

$$\Leftrightarrow \cancel{A_1 n^2} + 2A_0 - \cancel{A_1 n^2} + 4A_1 n - 4A_1 = n$$

$$\Leftrightarrow (2A_0 - 4A_1) + \underbrace{4A_1}\, n = \underset{1\times}{n}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A_0 - 4A_1 = 0 \\ 4A_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = 1/2 \\ A_1 = 1/4 \end{cases}$$

<u>calcular c_1 e c_2</u>:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 & (n=0) \\ c_1 - c_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 & (n=1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -1/8 \\ c_1 = 1/8 \end{cases}$$

<u>Portanto</u>: $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} \Leftrightarrow a_n = c_1 + c_2(-1)^n + \frac{1}{2} n + \frac{1}{4} n^2$,

$$\Leftrightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{1}{2} n + \frac{1}{4} n^2}$$

Raízes Características Complexas (igual, mas aplicamos umas fórmulas)

par de raízes complexas: $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$

ex:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_0 = 1, \ a_1 = 3 \end{cases}$$] Homogénea

Eq. característica: $\boxed{q^2 - 2q + 2 = 0}$

$$\Leftrightarrow q = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow q = 1 \pm i$$

$$a_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \\ c_1(1+i) + c_2(1-i) = 3 \end{cases}$$ (...)

Era complicado, por isso:

ou

módulo: $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$

argumento: $tg\,\theta = \frac{b}{a} \Leftrightarrow tg\,\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow a_n = (\underbrace{\sqrt{2}}_{r})^n \left(\alpha \cos(n \underbrace{\tfrac{\pi}{4}}_{\theta}) + \beta \sin(n \underbrace{\tfrac{\pi}{4}}_{\theta}) \right), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \sqrt{2}\left(\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + \beta \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Logo:

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos(n \tfrac{\pi}{4}) + 2 \sin(n \tfrac{\pi}{4}) \right), \ n \geq 0$$

Equações de recorrência não lineares

→ Tentar uma substituição de variáveis a_n para b_n, adequada, de modo a que a eq. de recorrência em b_n seja linear

ex:

$$\begin{cases} \boxed{a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1}_{\,n \geq 1}, \ a_0 = 2 \\ a_n \geq 0 \ \hookrightarrow n \geq 0 \end{cases}$$

Fazendo $a_n^2 = b_n$:
$$\begin{cases} b_n = 2b_{n-1} + 1, \ n \geq 1 \\ b_0 = a_0^2 = 4 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ Resolvemos normalmente:

$$b_n = b_n^{(h)} + b_n^{(p)}$$

$\boxed{b_n = q^n}$: $q - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{q = 2}$ Raiz característica

$$b_n^{(h)} = c\, 2^n, \; c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Termo não homogénio é um pol. de grau zero e 1 não é raiz característica ($m = 0$) $\Rightarrow b_n^{(p)} = A\, n^m = A$

$$A = 2A + 1 \Leftrightarrow A = -1$$

Logo: $b_n = c\, 2^n - 1$

$$b_0 = 4 \Rightarrow c - 1 = 4 \Leftrightarrow c = 5$$

$\hookrightarrow \boxed{b_n = 5 \times 2^n - 1, \; n \geq 0}$

Assim, a solução do problema original é:

$a_n = \sqrt{b_n}$, $a_n \geq 0$ $\hookrightarrow$ Diz-se no enunciado

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{5 \times 2^n - 1}, \; n \in \mathbb{N} \\ a_0 = 2 \end{cases}$$

Solução: sucessão de termo geral $\rightarrow \left(\sqrt{5 \times 2^n - 1}\right)_{n \geq 0}$

—//—

ex:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}, \; n \geq 2 \\ a_0 = a_1 = 2, \; a_n > 0, \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \Leftrightarrow \log_2(a_n) = \log_2(a_{n-1} \cdot a_{n-2}) \Leftrightarrow \underbrace{\log_2(a_n)}_{b_n} = \underbrace{\log_2(a_{n-1})}_{b_{n-1}} + \underbrace{\log_2(a_{n-2})}_{b_{n-2}}$$

$\boxed{b_n = \log_2(a_n)} \Rightarrow b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$

Fibonacci

$$\begin{cases} b_n = b_{n-1} + b_{n-2}, \; n \geq 2 \\ b_0 = \log_2(a_n) = 1 \\ b_1 = \log_2(a_n) = 1 \end{cases}$$

Nota: para facilitar escolhemos a base 2, para $\log_2(2) = 1$

Resolvíamos, e voltávamos para a_n, com:

$$\boxed{b_n = \log_2(a_n) \Leftrightarrow 2^{b_n} = 2^{\log_2(a_n)} \Leftrightarrow a_n = 2^{b_n}, \; n \in \mathbb{N}}$$

"ex:

$$\begin{cases} a_n = n\, a_{n-1} \\ a_0 = 1 \end{cases}$$

$a_1 = 1 = 1!$

$a_2 = 2 = 2!$

$a_3 = 3 \times 2 = 3!$

$a_4 = 4 \times 3 \times 2 = 4!$

$\vdots$

então: $\boxed{a_n = n!\, b_n}$

$$\underbrace{a_{n+1} = (n+1)!\, b_{n+1}}$$

$$\cancel{n!}\, b_n = n\, \cancel{(n+1)!}\, b_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow b_n = b_{n+1}$$

Eq. característica: $q - 1 = 0 \Leftrightarrow q = 1$

$$b_n = c(1)^n = c \text{ , como } a_0 = 1 = 0! \Rightarrow b_0 = a_0 = 1$$

$$b_0 = 1 \Rightarrow 1! \times c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$b_n = \cancel{c}^{\,1} \Rightarrow a_n = n!\, \cancel{c}^{\,1}$$

Solução: $(n!\, \cancel{c}^{\,1})_{n \in \mathbb{N}} = (n!)_{n \in \mathbb{N}}$

Sucessão dos números de Fibonacci

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ , } n \geq 2 \\ F_0 = 1 \text{ , } F_1 = 1 \end{cases}$$

Eq. característica: $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$

Número de ouro

$$q^2 - q - 1 = 0 \Leftrightarrow q = \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{\varphi} \vee q = \overbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{\phi}$$

$$F_n = \alpha\, \varphi^n + \beta\, \phi^n \text{ , } n \geq 0$$

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\varphi + \beta\phi = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ \varphi & \phi & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \phi - \varphi & 1 - \varphi \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & \phi \end{array}\right]$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$1 - \varphi = \frac{2}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\phi}$

(...) Alguns contas (Sabendo: $\phi \cdot \varphi = -1$, $\phi + \varphi = 1$, $\phi - \varphi = \sqrt{5}$)

$$\boxed{F_n = \frac{\phi^{n+1} - \varphi^{n+1}}{\sqrt{5}}}$$