Aula 10

Ex: Ainda sobre Princípio Inclusão Exclusão: Tenho foto 16/03 !

$\boxed{1}$

$A_1 = \{$Alunos que viram Parte 1$\}$
$A_2 = \{$" " Parte 2$\}$
$A_3 = \{$" " Parte 3$\}$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \underbrace{47}_{|A_1|} + \underbrace{43}_{|A_2|} + \underbrace{32}_{|A_3|} - \underbrace{33}_{|A_1 \cap A_2|} - \underbrace{27}_{|A_1 \cap A_3|} - \underbrace{25}_{|A_2 \cap A_3|} + \underbrace{22}_{|A_1 \cap A_2 \cap A_3|} = 59$$

$\boxed{2}$

$A_1 = \{$nota $\geq 15\}$
$A_2 = \{$nota $\leq 15\}$

$$468 = 211 + 382 - \overbrace{|A_1 \cap A_2|}^{\text{nota} = 15}$$

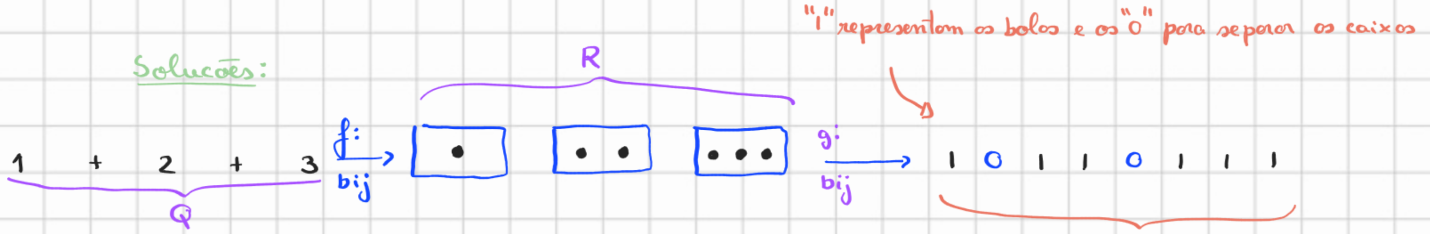
$\Leftrightarrow 468 = 593 - |A_1 \cap A_2|$
$\Leftrightarrow |A_1 \cap A_2| = 125$

$$\begin{array}{r} 593 \\ -468 \\ \hline 125 \end{array}$$

Princípio da Bijecão (outra vez)

Ex$_1$: $x_1 + x_2 + x_3 = \underbrace{6}_{k}$ ($n = 3$)

Soluções:



S = Seq. binárias com $\underline{k = 6}$ "1" e $\underbrace{n-1}_{}$ "0", $\underbrace{n-1}_{} = 2$

$|Q| = |R| = |S|$ → podemos arranjar funções bijetivas

Depois das sequências binárias, ainda podemos usar subconjuntos:

$1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1 \longleftrightarrow A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ (5 e 6 são "0")

$X = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$
$A \subseteq X$, $A \in P(X)$, $|P(X)| = 2^8$

Caso geral:

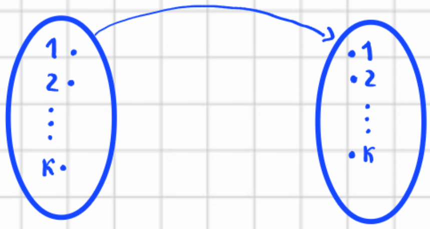
$X = \{1, 2, 3, \ldots, k+m\}$, $|X| = k+m$
$A \subseteq X$, $A \in P(X)$, $|P(X)| = 2^{k+m}$

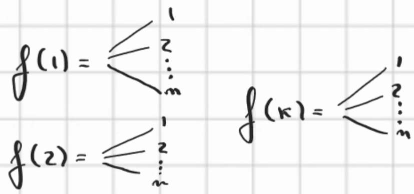
Agrupamento e identidade combinatória

• Arranjos com repetição de $\underline{n}$ elementos $\underline{k}$ a $\underline{k}$

$$\underbrace{A^r(n,k)}_{n^k} = \underbrace{n}_{1} \times \underbrace{n}_{2} \times \underbrace{n}_{3} \times \ldots \underbrace{n}_{k} = n^k$$

$$f: \{1, 2, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$





Nota: $A^r(0,0) = 0^0 = 1$

Ex: Para 6 pessoas, perguntar qual o $\underbrace{\text{dia da semana}}_{7 \text{ casos}}$ do aniversário:

$$A^r(7,6) = 7^6$$

— // —

• Arranjos sem repetição (simples) de $\underline{n}$ elementos $\underline{k}$ a $\underline{k}$

$$A^s(n,k) = \underbrace{n}_{1} \times \underbrace{(n-1)}_{2} \underbrace{(n-2)}_{3} \cdots \underbrace{\overbrace{(n-(k-1))}^{n-k+1}}_{k}$$

k posições nos começa no zero

$$= \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-(k-1))\cancel{(n-k)\cdots \times 1}}{\cancel{(n-k)\cdots \times 1}}$$

$$A^s = \frac{n!}{(n-k)!}$$

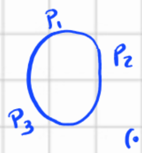
Nota: $A^s(n,n) = \frac{n!}{\underbrace{0!}_{1}} = n! = P_n$, permutações de n elementos

Ex: banco corrido: $A^s(4,3) = 4! = A^s(4,4)$

$n = 4$

↳ sentar $k = 3$

mesa redonda:



(...)

$P_1\ P_2\ P_3$

$P_2\ P_3\ P_1$

$P_3\ P_1\ P_2$

casos iguais

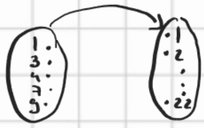
$$\frac{A^s(4,3)}{3!}$$

$$C^n_k = \boxed{\frac{A^s(n,k)}{k!}}$$

Exercício 1: Determine o nº de funções:

$\{1,2,\ldots,22\}$

$$f : \underbrace{\{1,3,4,7,9\}}_{A,\ |A|=5} \longrightarrow \{1,2,\ldots,22\} = [22] = B,\ |B|=22$$



a) Sem restrições:

$i=1$: $f_1(1)=1$, $f_1(3)=2$, $f_1(4)=3$, $f_1(7)=4$, $f_1(9)=5$

$i=2$: $f_2(1)=1$, $f_2(3)=1$, $f_2(4)=1$, $f_2(7)=1$, $f_2(9)=1$

$$\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$$
$$22 \times 22 \times 22 \times 22 \times 22$$

$$A^r(22,5) = 22^5$$

b) f_i é injetiva (sem repetições, não podemos duplicar imagens)

$$22 \times 21 \times 20 \times 19 \times 18$$ → Princípio da Mult.

$$A^s(22,5) = \frac{22!}{(22-5)!}$$

c) f_i é sobrejetiva

Definição: $\forall_y \in B\ \exists x \in A\ f(x)=y$

Pelo menos $22-5=17$ elementos em B, ficam por utilizar, logo f_i nunca pode ser sobrejetiva.

$|A| < |B|$, logo não pode ser sobrejetiva

R: zero f_i nestas condições

— // —

$\boxed{\text{• Combinações sem repetição (simples) de } n \text{ elementos } k \text{ a } k}$

$$C^n_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$X = \{1,2,3\}$, $|X| = \underbrace{3}_{n}$

$P(X) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

$C^3_0 = 1$; $C^3_1 = 3$; $C^3_2 = 3$; $C^3_3 = 1$

Triang de Pascal:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & \boxed{1} & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & \boxed{1} & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

$\rightarrow$ Soma $= 2^n = 2^3 = 8 = |P(x)|$

Exemplo:

$$P_{\text{Ganhar}} = \frac{\text{N.º de Apostas}}{\underbrace{C^{50}_{5}}_{\text{5 números de 50}} \times \underbrace{C^{12}_{2}}_{\text{2 estrelas de 12}}}$$

Probabilidade de ganhar

Propriedades:

$\boxed{1}$ • $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\boxed{2}$ • $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$\boxed{3}$ • $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

$$
\begin{array}{ccccccc}
& & & 1 & & & \\
& & 1 & & 1 & & \\
& 1 & + & 2 & =3 + & 1 & = 2^2 = 4 \\
1 & & 3 & & 3 & & 1
\end{array}
$$

Explicação de $\boxed{1}$ com funções:

$n = 4$, $k = 3$

$X = \{1,2,3,4\}$, $|X| = n$
$Y = \{1,2,3\}$, $|Y| = k$

conjunto dos respostos

$\{A \subseteq X : |A| = 3\} = \{A \subseteq X : |A| = 3,\ 4 \notin A\} \cup \{A \subseteq X : |A| = 4,\ 4 \in A\}$

$= \{\{1,2,3\}\} \cup \{\{1,3,4\},\{1,2,4\},\{2,3,4\}\}$

$= \{A \subseteq Y : |A| = 3\} \cup \{B \cup \{4\} : B \subseteq Y,\ |B| = 2\}$