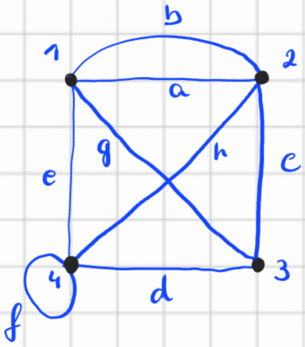
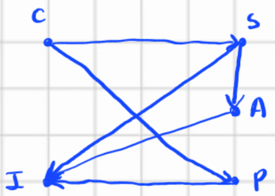
$\boxed{2}$

$$M_G = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



$\boxed{4}$

$\vec{D}$:



$\boxed{7}$

Seja $n = v(G) \geq 2$.

<u>Gráfo conexo</u>:

$$d(v) \in \underbrace{\{1, \ldots, n-1\}}_{n-1}$$

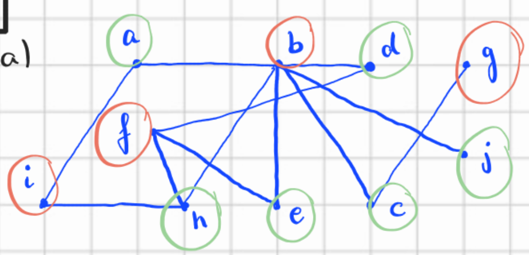
<u>Grafo não conexo</u>:

$$d(v) \in \underbrace{\{0, \ldots, n-2\}}_{n-1}$$

Como para um grafo com n vértices existem $n-1$ graus possíveis para cada vértices, logo como $n > n-1$ pelo PGP podemos concluir que existe pelo menos 2 vértices com o mesmo grau.

$\boxed{17}$

a)



• G é bipartido pois apenas tem circuitos de comprimento ímpar.

"exemplo de bipartição

$V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$

$X = \{a, h, e, d, c, j\}$

$Y = \{i, f, b, g\}$

b) 1 única!

c) Sim, por exemplo: $V = X' \cup Y \cup W$ e $X \cap Y \cap W = \emptyset$

$X' = \{a, h, e, d\}$

$Y = \{i, f, b, g\}$

$W = \{c, j\}$

18

a) 20 convidados

$C(x)$: Número de convidados que um convidado conhece

$C(x) \in \{0, \underbrace{1, \dots, 18}_{19 \text{ hipóteses}}\}$

Existe um convidado que não conhece ninguém

$C(x) \in \{\underbrace{1, 2, \dots, 19}_{19 \text{ hipóteses}}\}$

Em ambos casos existem 19 hipóteses e 20 convidados, e como 20 > 19 pelo PGP existem pelo menos 2 convidados que conhecem o mesmo número de convidados

b)

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2|E|$$

$10 \times 19 + 10 \times 10 = 190 + 100 = 290 \to$ par

Logo é possível!

19

$|E| = 25$

• Número max. de cidades!

$\delta(v) = 4$

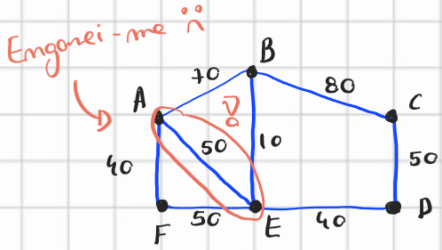
$$\sum_{c_i \in V} d(c_i) = 2 \times 25 = 50$$

$\underbrace{11}_{\text{11 com 4 saídas}} \times 4 = 44$

$44 + \underbrace{6}_{\text{1 com 6 saídas}} = 50$ //

12 cidades!

29



a) Queremos a árvore abrangente de custo mínimo!

De Prim:

V'	E'	$(ij, w_{ij}), i \in V', j \in V \setminus V'$	$e^* = i^* j^*$
{A}	{}	(AF,40), (AB,70), (AE,50)	AF
{A,F}	{AF}	(AB,70), (AE,50), (FE,50)	FE
{A,F,E}	{AF, FE}	(AB,70), (ED,40), (EB,10)	EB
{A,F,E,B}	{AF, FE, EB}	(BC,80), (ED,40)	ED
{A,F,E,B,D}	{AF, FE, EB, ED}	(BC,80), (DC,50)	DC
{A,B,C,D,E,F}	{AF, FE, EB, ED, DC}	V = V', Parar!	

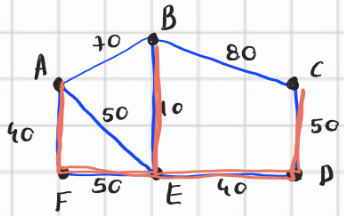
$e_{m} = \{AF, FE, EB, ED, DC\} \Rightarrow w_{cm} = 40 + 50 + 10 + 40 + 50 = 190$

"ou"

Kruskal:

Ordenar: $e_1 = \underset{10}{EB}$, $e_2 = \underset{40}{ED}$, $e_3 = \underset{40}{AF}$, $e_4 = \underset{50}{CD}$,
$e_5 = \underset{50}{FE}$, $e_6 = \underset{50}{AE}$, $e_7 = \underset{70}{AB}$, $e_8 = \underset{80}{BC}$

i	e_i	$w(e_i)$	Inserir e_i?	$T = G[E']$
1	EB	10	Sim	
2	ED	40	Sim	
3	AF	40	Sim	
4	CD	50	Sim	
5	FE	50	Sim	
6	AE	50	Não!	Conexo!



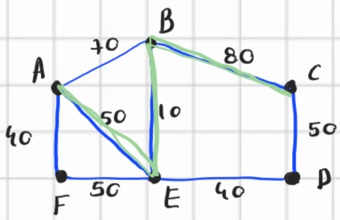
$C_m = \{EB, ED, AF, CD, FE\}$
$w_{cm} = 10 + 40 + 40 + 50 + 50 = 190$

$T = (V', E')$
$\Downarrow$
$V = V'$ $\quad |E'| = 5$

b) Caminho de custo mínimo entre A e C: Algoritmo de Dijkstra

Par (menor, antecessor)

	A	B	D	E	F	C	menor	temp
0	(0, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	(∞, -)	A	{B, C, D, E, F}
		(70, A)	(∞, -)	(50, A)	(40, A)	(∞, -)	F	{B, C, D, E}
		(70, A)	(∞, -)	(50, A)		(∞, -)	E	{B, C, D}
		(60, E)	(90, E)			(∞, -)	B	{C, D}
			(90, E)			(140, B)	D	{C}
						(140, B)	C	∅



$w_{cm} = 140$

$c_m = \{AE, EB, BC\}$

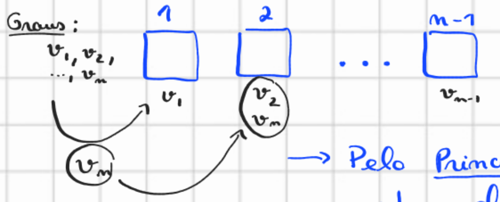
7 $G = (V_G, E_G)$ grafo simples de ordem pelo menos 2

$|V_G| \geq 2$, mostrar que existe pelo menos 2 vértices com o mesmo grau

$|V_G| = n$

Grafo conexo:

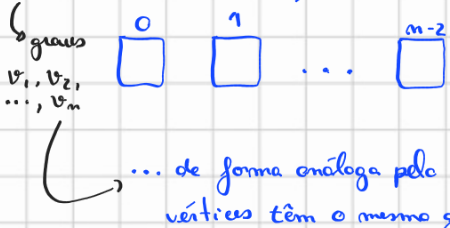
$\forall v \in V_G \quad d(v) \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ↗ graus



→ Pelo Princípio da Gaiola dos Pombos existem pelo menos 2 vértices com o mesmo grau

Grafo desconexo:

$d(v) \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ ↳ graus



... de forma análoga pelo PGP, pelo menos 2 vértices têm o mesmo grau

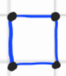
11 G grafo simples

a)

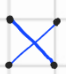
$\underbrace{G \text{ é regular}}_{\substack{K\text{-regular},\ K \in \mathbb{N} \\ \text{(todos os vértices têm grau } K)}} \Rightarrow \underbrace{G^c \text{ é regular}}_{(n-1-K)\text{-regular}}$

$|V(G)| = n$

$\underset{\text{vértices}}{n = 4}$: 2-regular ↖ G:



$\underbrace{4-1-2}_{n-1-K}$ → 1-regular G^c:



Verdadeiro.

b) G e G^c ambos n-regulares $\Rightarrow$ ordem de G é par

Sabemos que: (pela alínea anterior) $\underbrace{r}_{\text{todos os vértices têm grau } r} = \boxed{n - 1 - r} \Rightarrow n = \underbrace{2r + 1}_{\text{Ímpares}}$

Logo: o número de vértices é sempre ímpar!

Falso.

c) G conexo $\Longrightarrow G^c$ conexo

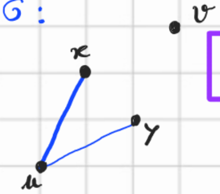
K_1: K_1^c:

conexo   nulo (não conexo)

Falso.

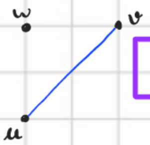
d) G não é conexo $\Longrightarrow G^c$ é conexo

G:



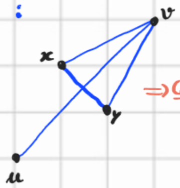
$\boxed{uv \notin E(G)}$

G:



$\boxed{uv \in E(G)}$

G^c:



$\Rightarrow$ Conexo $uv \in E(G^c)$

G^c:

$uw \in E(G^c)$
$wv \in E(G^c)$

$\rightarrow$ existe caminho entre u e v (apesar de $uv \notin E(G^c)$)

Verdadeiro.

$\boxed{16}$

$G_1 = (V_1, E_1)$ é bipartido, pois não possui circuitos de comprimento ímpar:

$V_1 = V_x \cup V_y$, $V_x \cap V_y = \emptyset$, com $V_x = \{a, e, d, h\}$, $V_y = \{c, b, f, g\}$

vértices a uma distância par

G_1 é 3-regular só existem arestas unindo vértices de V_x com vértices de V_y

$G_2 = (V_2, E_2)$ não é bipartido, uma vez que tem circuitos de comprimento ímpar. Por exemplo, $C = (1, 2, 3, 1)$, $comp(C) = 3$.

Isomorfos $\longrightarrow$ representar de maneira diferente, mantendo a relação entre os vértices

ex:

H_1: bipartido

H_2: bipartido

$\Big\}$ H_1 não é isomorfo a H_2

$G_1 \cong G_2$?

Isomorfo

• Se existir, $\phi : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$
bijetiva
preservando a relação de adjacência entre vértices

G_2:

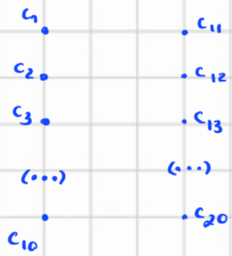
circuitos de grau ímpar

• Como, G_1 e G_2 têm ambos 8 vértices e 12 arestas, e são 3-regulares, no entanto, G_1 não é isomorfo a G_2, uma vez que não é possível preservar as relações de adjacência entre vértices (rel. de vizinhança):

→ G_1 apenas tem circuitos de comp. par, enquanto G_2 tem também circuitos de comp. ímpar

$\boxed{18}$

a) F:



$F = (V, E)$, $V = \{c_1, c_2, \dots, c_{20}\}$

$E = \{a_1, a_2, \dots, a_{20}\}$, $m \in \mathbb{N}$

É possível que $d_F(c_i) \neq d_F(c_j)$, $i \neq j$, $\forall c_i, c_j \in V$?

<u>Graus possíveis</u>:

$$\left.\begin{array}{l} d_F(c_i):\ 0, 1, 2, \dots, 18 \\ d_F(c_i):\ 1, 2, 3, \dots, 19 \end{array}\right\} \text{19 graus distintos}$$

$$\underset{c_1}{\boxed{d_1}} \quad \underset{c_2}{\boxed{d_2}} \quad \dots \quad \underset{c_{19}}{\boxed{d_{19}}}$$

• Para atribuir a 20 convidados $c_1, c_2, \dots, c_{20}$, donde, pelo menos dois vértices com o mesmo grau, logo pelo menos 2 convidados conhecem o mesmo número de pessoas.

• <u>Não é possível</u>!

b)

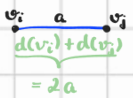
10 vértices com grau 19 cada um
$(c_1, c_2, \dots, c_{10})$

+

restantes vértices têm grau 10 cada um
$(c_{11}, c_{12}, \dots, c_{20})$

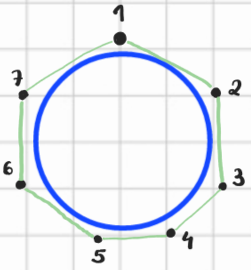
<u>Teorema</u>: $\underbrace{\sum_{c_i \in V} d_F(c_i)}_{10\times 19 + 10\times 10 = 290} = \underbrace{2|E|}_{\text{Par}}$

• <u>É possível</u>!



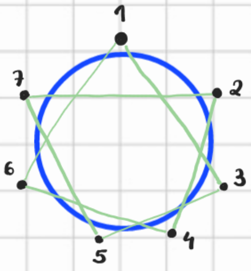
$\boxed{20}$

G_1:



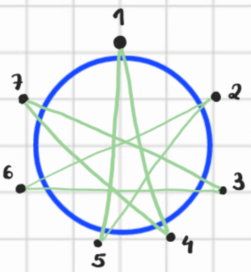
$G_1 \cong G_2$

G_2:



$G_2 \cong G_3$

G_3:



$G_1 \cong G_3$

• Bastava desenhar os gráficos, e provar que existiam 3 representações distintas para o mesmo grafo

$\Downarrow$ Não era pedido!

Isomorfismo:

$\phi : V(G_1) \longrightarrow V(G_2)$ (bijetiva)

$1 \longrightarrow 1$

$2 \longrightarrow 3$

$3 \longrightarrow 5$

$4 \longrightarrow 7$

$5 \longrightarrow 2$

$6 \longrightarrow 4$

$7 \longrightarrow 6$

$N_{G_1}(1) = \{2,7\}$, $\phi(1) = 1$

$N_{G_2}(\underbrace{\phi(1)}_{1}) = \{3,6\} \Rightarrow \phi(2) = 3$
$\phi(7) = 6$

$N_{G_1}(2) = \{1,3\}$, $\phi(2) = 3$

$N_{G_2}(\underbrace{\phi(2)}_{3}) = \{1,5\} \Rightarrow \phi(1) = 1$
$\phi(5) = 5$

$N_{G_1}(3) = \{2,4\}$, $\phi(3) = 5$

$N_{G_2}(\underbrace{\phi(3)}_{5}) = \{3,7\} \Rightarrow \phi(2) = 3$
$\phi(4) = 7$

$N_{G_1}(4) = \{3,5\}$, $\phi(4) = 7$

$N_{G_2}(\underbrace{\phi(4)}_{7}) = \{5,2\} \Rightarrow \phi(3) = 5$
$\phi(5) = 2$

Fimdem!