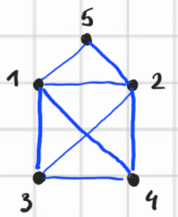
Aula 22

Passeios/Trajetos/Caminhos em grafos

H:

Grafo simples →



$H = (V_H, E_H, \psi_H)$

vértice inicial ↝ vértice final

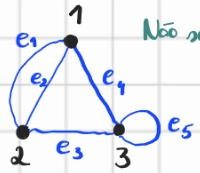
Passeio: $P_1 = (1, \underbrace{4, 2, 1}_{\text{vértices interiores}}, 3)$

São Trajetos (não têm arestas repetidas)
Não são Caminhos (têm vértices repetidos)

Dependendo da complexidade do grafo a notação varia

H:

Multigrafo →



Passeio: $P_1^M = (1, e_1, 2, e_2, 1, e_4, 3, e_5, 3)$

Passeios ≠ Trajetos ≠ Caminho

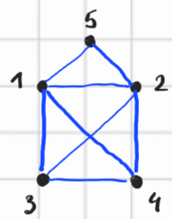
- todos
- não podem ter arestas repetidas
- não podem ter vértices repetidos $v_j \neq v_i$ → ex: $P_2 = (5, 2, 3, 4, 1)$
  - Passeio ✓
  - Trajeto ✓
  - Caminho ✓

- Todo o Caminho é um Trajeto que por sua vez é um Passeio

Circuitos/ciclos em grafos

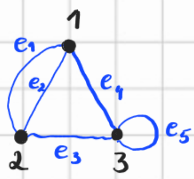
H:

Grafo simples →



H:

Multigrafo →



Circuito: trajeto fechado (não se repetem arestas e o vértice inicial é igual ao vértice final)
Ciclo: caminho fechado (não se repetem vértices e o vértice inicial é igual ao vértice final)
↳ o último é repetido!

Em H:

$P_3 = (\underbrace{1, 5, 2, 1, 3, 4, 1}_{\text{Iguais}})$ ⇝ É um circuito, mas não é um ciclo!

$P_4 = (\underbrace{1, 5, 2, 4, 1}_{\text{Iguais}})$ ⇝ É um ciclo, logo é um circuito

Notas:

1) Todos os caminhos são trajetos. Todos os ciclos são circuitos

2) Num grafo simples um ciclo tem pelo menos 3 vértices.

↳ 

$P=(1,2,1)$

$P=(1,2,3,1)$

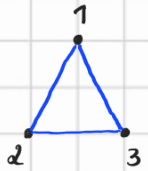
Comprimento de um passeio

↳ comp(P) é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui

$\text{comp}(P_1) = 4$

$\text{comp}(P_3) = 6$

↑ ex anteriores



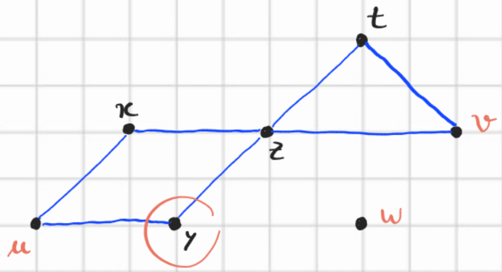
$P_5 = (1,3,2,1,3)$

$\text{comp}(P_5) = 4$

Distância entre vértices u, v e $w \in V_G$

↳ • Comprimento do menor dos caminhos entre u e v

↳ • ∞ no caso de não existir qualquer caminho entre u e v



$\text{dist}_G(u,v) = 3$

$\text{dist}_G(u,w) = \infty$

$\text{dist}_G(u,u) = 0$

$\text{dist}_G(u,v) \leq \text{dist}_G(u,y) + \text{dist}_G(y,v)$

Existem caminhos "compridos"...

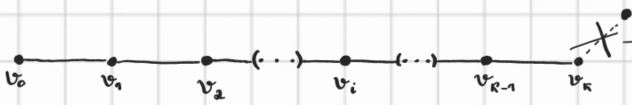
Teorema: Seja $G=(V_G, E_G)$ um grafo simples finito

(1) – G contém um caminho P tal que:

$$\boxed{\text{comp}(P) \geq \delta(G)}$$

→ menor dos graus dos vértices de G

Demonstração: Seja o caminho de maior comprimento em G: $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$



→ Não existe!

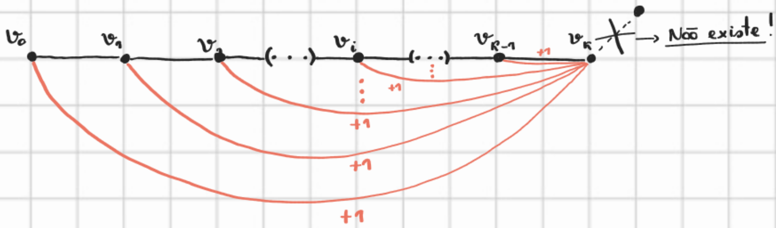
(caminho de maior comprimento)
⇓
Não tem mais vizinhos

• Todos os vizinhos de v_k estão em $P \implies \text{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G)$

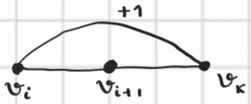
(2) – Se $\delta(G) \geq 2$ então G contém um ciclo C, tal que:

$$\boxed{\text{comp}(C) \geq \delta(G) + 1}$$

Demonstração: Seja o caminho de maior comprimento em G: $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$



• Todos os vizinhos de v_k estão em P



(v_1, v_{i+1}, v_k, v_i)

$comp(C) = 3 \geq \delta(G)+1$

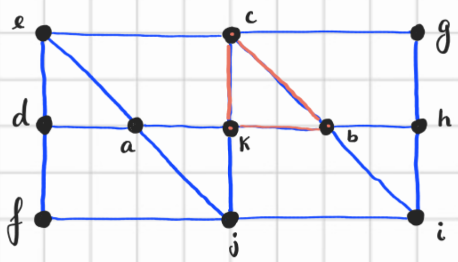
Para cada v:
maior de distancia entre v todos os vértices

Cintura / Exentricidade / Diametro / Raio / Centro

- Cintura de G: $g(G)$
- Excentridade de cada vértice: $e(v)$
- Diametro de G: $diam(G)$
- Raio de G: $r(G)$
- Centro de G: $c(G)$

ex:

G:



• **Cintura de G:**
↳ circuito de menor comprimento (caso não existam circuitos $\Rightarrow g(G)=\infty$)

$g(G) = 3$ ex: $C = (c, k, b, c)$

Distância entre os vértices: comprimento do menor caminho entre os vértices!

• **Excentricidade dos vértices:**
↳ maior distância entre v e todos os vértices de G

$e(a) = 3$, $e(b) = 3$, $e(c) = 3$,
$e(d) = 4$, $e(e) = 3$, $e(f) = 4$,
$e(g) = 4$, $e(h) = 4$, $e(i) = 3$,
$e(j) = 3$, $e(k) = 2$

$e(h) = 4$ → excentricidade máxima
$e(k) = 2$ → excentricidade mínima

• **Diametro de G:**
↳ maior excentricidade dos vértices de G

$diam(G) = \max_{v \in V_G} e(v) = 4$

• **Raio de G:**
↳ menor excentricidade dos vértices de G

$r(G) = \min_{v \in V_G} e(v) = 2$

- Centro de G:
  ↳ conjunto dos vértices centrais, onde $e(v) = r(G)$

O vértice K

⟶ Nota: é o único com excentricidade mínima

Conexidade

- Grafos conexos: existe sempre caminhos entre quaisqueres 2 vértices

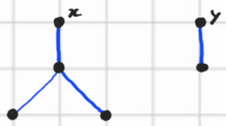
"ex: H:

⟶ $\boxed{|V_H| = |E_H| + 1}$

(não existem vértices isolados)

- Grafos desconexos: não existe sempre caminhos entre quaisqueres 2 vértices

"ex: G:



⟶ entre x e y não existe caminho
$dist(x, y) = \infty$

Relação de conexidade ⟶ $\sim$

- $x \sim y$: quando x e y são conexos (existe sempre um caminho entre x e y), $\forall x, y \in V_G$

Grafo conexo

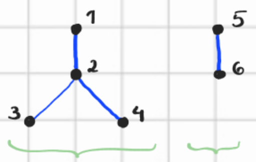
Nota: é uma relação de equivalência em V_G:

- Refletiva: $x \sim x$, $\forall x \in V_G$
- Simétrica: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, $\forall x, y \in V_G$
- Transitiva: $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow x \sim z$, $\forall x, y, z \in V_G$

Componentes conexos

G:

Grafo desconexo ⟶

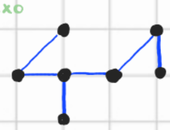


⟶ entre 1 e 5 não existe caminho
$dist(1, 5) = \infty$

$G_1 = G[\{1, 2, 3, 4\}]$ ↵ ↳ $G_2 = G[\{5, 6\}]$

- G_1 e G_2 são subgrafos de G, neste caso, componentes conexos de G
  ↳ $cc(G) = 2$

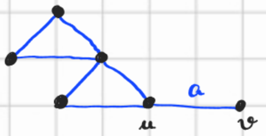
Nota: Para o grafo H anterior, $cc(H) = 1$
↳ Conexo



Ponte

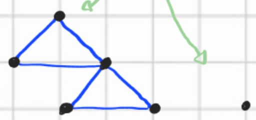
Teorema: Aresta $\underline{a}$ é uma ponte, $\varphi(a) = \{u, v\}$

G :



$\boxed{cc(G) = 1}$

$\boxed{cc(G - a) = cc(G) + 1 = 2}$



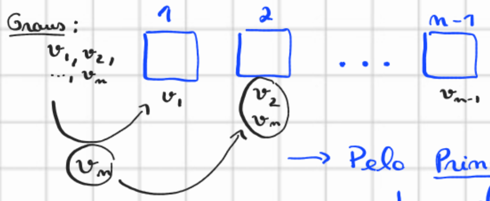
ex: Folha 5 $\boxed{7}$

$G = (V_G, E_G)$ grafo simples de ordem pelo menos 2
$|V_G| \geq 2$, mostrar que existe pelo menos 2 vértices com o mesmo grau

$|V_G| = n$

Grafo conexo:

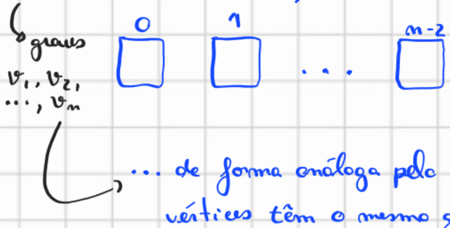
$\forall v \in V_G \quad d(v) \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ → graus



→ Pelo Princípio da Gaiola dos Pombos existem pelo menos 2 vértices com o mesmo grau

Grafo desconexo:

$d(v) \in \{0, \overbrace{1, \ldots, n-2}^{!}\}$



... de forma análoga pelo PGP, pelo menos 2 vértices têm o mesmo grau