• **Tautologia:** Verdadeira em todos os interpretações

• **Consistente:** Alguma dos interpretações é verdadeira

• **Contradição (ou inconsistência):** Falso ~~pa~~ em todos os interpretações

• **Implicação:**

a	b	a → b	¬a ∨ b
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

• antecedente → consequente

- a → b
- se a então b
- a é uma condição suficiente para que b
- b é uma condição necessária para que a
- a só se b
- b caso se verifique a

$$\boxed{a \to b \equiv \neg a \vee b}$$

$$a \to b \equiv \neg b \to \neg a$$

Nota: Um "ou" tem sempre significado inclusivo

"exceto se" → significa "ou" inclusivo

a "ou" b

a "exceto se" b

⟹

a	b	a ∨ b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

• **Equivalente:** $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

• **Literal:** é uma variável ou a negação de uma variável

ex: p, q, $\neg r$ são literais

não literais: $\neg\neg p$, $p \rightarrow q$ não são literais

• **Forma normal conjuntiva: (FNC)**

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m,$$

Cláusula

onde cada $\boxed{\varphi_i = L_1 \vee \dots \vee L_k}$

Literal

ex: $\varphi \equiv (\underbrace{sol}_{L_1} \vee \underbrace{casa}_{L_2}) \wedge (\underbrace{frio}_{L_3} \vee \underbrace{passear}_{L_4}) \wedge \neg casa$

φ_1 φ_2 φ_3

• **Forma normal disjuntiva: (FND)**

$$\varphi = \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_m,$$

Cláusula

onde cada $\boxed{\varphi_i = L_1 \wedge \dots \wedge L_k}$

Literal

$\varphi \equiv (\underbrace{neva}_{L_1} \wedge \underbrace{frio}_{L_2}) \vee (\neg frio) \vee (\neg passear)$

φ_1 φ_2 φ_3

Nota:

$p \wedge q \wedge r$ está nos dois: FNC, FND

$p \vee q \vee r$ está nos dois: FNC, FND

Método de Resolução:

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ se e só se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\psi \vdash \bot$

Prova!

$\bot$: cláusula vazia (Falso)

Igual a:

$\mathcal{C} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ é inconsistente

Falso para todas as interpretações

ex:

Provar: $\boxed{p \vee q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow r \models r}$

1 Usando o método de resolução:

FNC:

$c_1 \equiv p \vee q$

$c_2 \equiv \neg p \vee r$

$c_3 \equiv \neg q \vee r$

$c_4 \equiv \neg r$

$\mathcal{C} = \{p \vee q, \neg p \vee r, \neg q \vee r, \neg r\}$

Resolução:

$c_1: p \vee q$

$c_2: \neg p \vee r$

$c_5: q \vee r$ Res(c_1, c_2)

$c_3: \neg q \vee r$

$c_6: r$ Res(c_5, c_3)

$c_4: \neg r$

$\bot$ Res(c_6, c_4)

Logo, pode se concluir que $\mathcal{C}$ é inconsistente.

Assim:

$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv \boxed{(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \models r}$

Verdadeiro!

• Conjunto consistente de fórmulas: existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ em 1

"ex:

$$\mathcal{C} = \{\neg p, p \to q, q\}$$

Para $p = 0$ $\Rightarrow$ $\overset{\neg 0}{\neg p} \equiv 1$

$q = 1$ $\quad \overset{0 \to 1}{p \to q} \equiv 1$

$\overset{1}{q} \equiv 1$

• Fórmula consequência (semântica ou lógica):

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n \models \underbrace{\psi \equiv 1}$$

Logo: consequência lógica de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$

"ex:

$a \to b, a \models b$ — Este tem de ser verdade!

a	b	a → b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\boxed{\models \neq \vdash}$$

Quando $a \equiv 1$, $a \to b \equiv 1$ } $b \equiv 1$

• Teorema: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ se e só se $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ é inconsistente

↳ Falso para todas as interpretações

2 Por definição de consequência lógica

p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

→ Para todas as interpretações para o qual:

$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \equiv 1$

o $r \equiv 1$

Logo: $\boxed{(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \models r}$

• Lógica de Primeira ordem:

$P_1 \equiv \forall n \, (\exists m \, (n > m))$

var. ligados

Fórmula fechada
(não existem variáveis livres)

$$\overbrace{\underbrace{(x<y)}_{\text{fórmula}} \rightarrow \underbrace{((\underbrace{x+z}_{\text{termo}}) < (\underbrace{y+z}_{\text{termo}}))}_{\text{fórmula}}}^{\text{fórmula}}$$

$\forall x, y, z$

$$\overbrace{(\forall_x \exists y \; \underbrace{x<y}_{\text{var. ligados}}) \wedge (a < x)}^{\text{fórmula}}$$

$\hookrightarrow$ var. livre

• Interpretação:

Par: (M, V)

Valorização: Associa a cada variável de x um elemento $V(x) \in D$

Estrutura:
- Domínio (D)
- constante $a^M \in D$
- função: $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ $\quad f^n : D^n \rightarrow D$
- Predicados: P^M

Nota:

$(M, V) \models \exists x \, \psi$, quando <u>para algum</u> $a \in D$, $(M, V^{\frac{x}{a}}) \models \psi$

$(M, V) \models \forall x \, \psi$, quando <u>para todo</u> $a \in D$, $(M, V^{\frac{x}{a}}) \models \psi$

"ex:

(M, V)

$\forall x \; P(x, a)$

$D = \{1, 2, 3\}$

$(a = 1$, constante$)$

$P(x, a)$: "$x > a$"

$P = \{2, 3\} \subseteq D$

$V(x) = 1 \in D$ $\quad \underbrace{1 > 1}_{\text{Falso}}$

• A fórmula é falsa para esta interpretação (M, V)

$\exists x \; P(x, a)$

$D = \{1, 2, 3\}$

$(a = 1$, constante$)$

$P(x, a)$: "$x > a$"

$V(x) = 3 \Rightarrow \underbrace{3 > 1}_{\text{verdadeiro}}$

(*) Só precisamos de verificar para 1 caso, porque é $\exists x$

(*) • Logo, a fórmula é verdadeira para esta interpretação (M, V)

- Fórmulas válidas (tautologia): Sempre verdadeira para todas as interpretações

- Fórmulas consistentes: Verdadeira para pelo menos uma interpretação

- Fórmulas inconsistentes (contradição): Sempre falsa para todas as interpretações

Nota: (M_1, V_1) é um modelo ~~de~~ para φ se φ é sempre verdadeira para esta interpretação

- Forma normal prenex: $\underbrace{Q_1 x_1, \dots Q_m x_m}_{Q \text{ denota-se por } \text{"}\exists\text{" ou "}\forall\text{"}} \ \varphi$

ex:
$$\forall x \,(P(x,a) \longrightarrow \exists y\, Q(y,a))$$
$$\equiv \underbrace{\forall x}_{Q_1} \underbrace{\exists y}_{Q_2} \underbrace{(P(x,a) \longrightarrow Q(y,a))}_{\varphi} \quad \text{FNP}$$

- Forma normal de Skolem: $\underbrace{\forall x_1 \dots \forall x_2}_{\text{Quantificadores universais}} \boxed{\varphi}$ ↳ Na Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Como obter:

$\boxed{1}$ caso: $\exists y\, \forall x \forall z \; P(x,y,z)$

$\boxed{y = a \text{ (constante de Skolem)}}$

$$\forall x \forall z \; P(x,a,z) \quad \text{FNS}$$

$\boxed{2}$ caso: $\forall x \exists y \,(P(x,y) \longrightarrow Q(y,a))$ constante!

$\boxed{y = f(x) \text{ (função de Skolem)}}$

$$\forall x\,(P(x,f(x)) \longrightarrow Q(f(x),a)) \equiv \underbrace{\overbrace{\forall x\,(\neg P(x,f(x)) \vee Q(f(x),a))}^{\text{FNC}}}_{\text{FNS}}$$

$\boxed{3}$ caso: $\exists x \forall y \forall z \exists w \; P(x,y,z,w)$

$\boxed{\begin{matrix} x = a & \text{(constante de Skolem)} \\ w = f(y,z) & \text{(função de Skolem)} \end{matrix}}$

$$\forall y \forall z \; P(a,y,z,f(y,z)) \quad \text{FNS}$$

- **Movimentação dos quantificadores:**

$$(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x)) \equiv \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$$

$$(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, Q(x)) \equiv \exists x\, (P(x) \vee Q(x))$$

Nota:

$$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \not\equiv \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x)) \not\equiv \exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$$

Resolver problemas...

Renomear variáveis:

$$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \equiv \forall x\, \forall y\, (P(x) \vee Q(y))$$

$$(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x)) \equiv \exists x\, \exists y\, (P(x) \wedge Q(y))$$

- **Unificação:**

$$w = \{ Primo(x, y),\ Primo(Tomas, y) \}$$

Definição: σ diz-se o unificador mais geral (umg) de um conjunto de expressões w quando para cada unificador θ de w existe uma substituição λ tal que:

"Após"

$$\theta = \lambda \triangle \sigma$$

Nota: Não se pode fazer $\sigma = \{ f(x)/x \}$! (*)

Ex:

$\mathcal{E} = \{ Q(x), Q(A) \}$ é unificável com $\sigma = \{ A/x \}$

$\mathcal{E} = \{ R(\underbrace{x, y}), Q(\underbrace{z}) \}$ não é unificável

→ nº de argumentos diferentes + funções diferentes

$\mathcal{E} = \{ f(x), f(f(z)) \}$ é unificável com $\sigma = \{ f(z)/x \}$

$\mathcal{E} = \{ f(x), f(f(x)) \}$ não é unificável (*)

· Algoritmo de unificação:

» ex: $\boxed{1}$ $\boxed{W = \{ Primo(Tomás, y), Primo(x, y) \}}$

0. K=0 $W_0 = W, \ K = 0, \ \sigma_0 = \varepsilon$ (subst. vazia)

contador K

$D_0 = \{ x, Tomás \}$

$\sigma_1 = \{ Tomás/x \} \Delta \sigma_0 = \{ Tomás/x \}$

$W_1 = W_0 \sigma_1 = \{ Primo(Tomás, y), Primo(Tomás, y) \}$

$= \{ Primo(Tomás, y) \}$

1. K = 1

$D_1 = \emptyset$

Como $\underbrace{|W_1|}_{\text{número de termos de } W_1} = 1$, então $\sigma_1 = \{ Tomás/x \}$ é o unificador mais geral.

—— // ——

$\boxed{2}$ $\boxed{W = \{ P(f(x), z, \underset{\text{const.}}{a}), P(y, u, x) \}}$

0. K=0 $W_0 = W, \ \sigma_0 = \varepsilon$

$D_0 = \{ f(x), y \}$

$\sigma_1 = \{ f(x)/y \} \Delta \sigma_0 = \{ f(x)/y \}$

$W_1 = W_0 \sigma_1 = \{ P(f(x), z, a), P(f(x), u, x) \}$

→ Podia ter escolhido $\{u/z\}$

1. K=1

$D_1 = \{ z, u \}, \ \sigma_2 = \{ z/u \} \Delta \{ f(x)/y \} = \{ z/u, f(x)/y \}$

$W_2 = W_1 \sigma_2 = \{ P(f(x), z, a), P(f(x), z, x) \}$

2. K = 2

$D_2 = \{ a, x \}, \ \sigma_3 = \{ a/x \} \Delta \{ z/u, f(x)/y \} = \{ a/x, z/u, f(a)/y \}$

$W_3 = W_2 \sigma_3 = \{ P(f(a), z, a), P(f(a), z, a) \}$

$= \{ P(f(a), z, a) \}$

3. K = 3

Como $|W_3| = 1$, então $\sigma_3 = \{ a/x, z/u, f(a)/y \}$ é o unificador mais geral!

- **Método de Resolução:**

→ **Resolvente binária de duas cláusulas c_1 e c_2:**

$$\begin{array}{l} c_1 : P(a) \vee Q(a) \\ c_2 : \neg P(a) \vee R(y) \\ \hline c_3 : Q(a) \vee R(y) \quad RB(c_1, c_2) \end{array}$$

→ **Fator de uma cláusula**

$$\begin{array}{l} c_1 : P(x) \vee Q(x) \\ c_2 : \neg P(a) \vee R(y) \\ \hline c_3 : \quad ? \end{array}$$

umg de $\{P(x), P(a)\}$ é $\sigma_0 = \{a/x\}$

$c_1' \equiv c_1 \sigma_0 = P(a) \vee Q(a)$

$$\begin{array}{l} c_1' : P(a) \vee Q(a) \\ c_2 : \neg P(a) \vee R(y) \\ \hline c_3 : Q(a) \vee R(y) \quad RB(c_1 \sigma_0, c_2) \text{ ou } RB(c_1', c_2) \end{array}$$

ex: $\boxed{21}$ Folha 1

a)

$\mathcal{U} = \{x : x \text{ é um animal}\}$

$P(x)$: "x tem pelo"

$M(x)$: "x é mamífero"

$C(x)$: "x é coelho"

$U(x)$: "x é urso"

$F_1 : \forall x (P(x) \rightarrow M(x))$

$F_2 : \forall x (U(x) \rightarrow P(x))$

$F_3 : \forall x (C(x) \rightarrow M(x))$

$F_4 : U(w)$

$F_5 : C(B)$

$F_6 : P(S)$

Nota:

constantes:
- Winnie ≡ W
- Bugsbunny ≡ B
- Sylvester ≡ S

b) i

Provar que: $\boxed{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 \models M(w)}$

- Skolenização das cláusulas e renomear variáveis:

$F_1: \forall x(\neg P(x) \vee M(x))$

$c_1: \neg P(x) \vee M(x)$

$F_2: \forall x(\neg U(x) \vee P(x))$

$c_2: \neg U(x) \vee P(x)$

$F_3: \forall x(\neg C(x) \vee M(x))$

$c_3: \neg C(x) \vee M(x)$

$F_4: U(w)$

$c_4: U(w)$

$F_5: C(B)$

$c_5: C(B)$

$F_6: P(S)$

$c_6: P(S)$

$c_7: \neg M(w)$

$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$

Método de resolução:

$c_2: \neg U(x) \vee P(x)$

$c_4: U(w)$

$c_2': \neg U(w) \vee P(w)$

$c_4: U(w)$

$c_8: P(w) \quad RB(c_2', c_4)$

unificador mais geral de $\{U(x), U(w)\}$ é $\sigma_0 = \{w/x\}$

$c_2' = c_2\sigma_0 = \neg U(w) \vee P(w)$

$c_1: \neg P(x) \vee M(x)$

$c_8: P(w)$

$c_1': \neg P(w) \vee M(w)$

$c_9: M(w) \quad RB(c_8, c_1')$

$c_7: \neg M(w)$

$c_{10}: \perp \quad RB(c_9, c_7)$

unificador mais geral de $\{P(w), P(x)\}$ é $\tau_0 = \{w/x\}$

$c_1' = c_1\tau_0 = \neg P(w) \vee M(w)$

- Uma vez que existe uma dedução de $\perp$ a partir do conjunto $\mathcal{C}$ de cláusulas correspondente a $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, \neg M(w)\}$, ou seja, mostra que este conjunto é inconsistente

$\mathcal{C}$ é inconsistente

→ Logo, é verdade que $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 \models M(w)$ → Logo, Winnie é mamífero!

→ ... na verdade ... $F_1, F_2, F_4 \models M(w)$, a partir de $\{c_1, c_2, c_4, \neg M(w)\}$ deduz-se $\perp$