Aula 21

Grafos Simples

Teorema: Para todo o grafo simples $G = (V, E, \psi)$:

Somatório dos graus dos vértices ← $$\boxed{\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|}$$

Prova →

$|V| = n$

$|E| = m$

$$M_G = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} e_1 \cdots e_i \cdots e_m \\ \left[\begin{array}{ccc} — & \vdots & — \\ & \vdots & \\ — & 1 & — \\ — & \vdots & — \\ — & 1 & — \\ — & \vdots & — \\ & - & — \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \Sigma = d(v_1) \\ \vdots \\ \Sigma = d(v_j) \\ \vdots \\ \\ \\ \Sigma = d(v_n) \end{array}$$

matriz de incidência

$v_j \overset{e_i}{—} v_k$

↳ a aresta e_i é contada 2 vezes (um pelo $d(v_j)$ e outra pelo $d(v_k)$)

Corolário: $\boxed{\text{O nº de vértices de grau ímpar é par!}}$

$$\hookrightarrow \sum_{v \in V} d(v) = \underbrace{\sum_{v \in V} d^P(v)}_{\text{Par}} + \sum_{v \in V} d^I(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{Par}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sum_{v \in V} d^I(v)}_{} = \underbrace{2|E| - \sum_{v \in V} d^P(v)}_{\text{Par}}$$

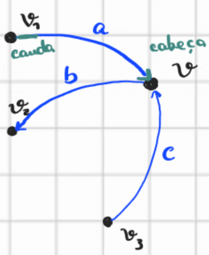
↳ logo o nº de vértices de grau ímpar é par

Digrafos

Teorema: Para todo o digrafo (grafo orientado) simples $\vec{G} = (V, E, \psi)$ finito:

$$\boxed{\sum_{v \in V} \underbrace{d^+(v)}_{\text{semigrau de saída de } v} = \sum_{v \in V} \underbrace{d^-(v)}_{\text{semigrau de entrada de } v} = |E|}$$

ex:



a: $d^+(v_1) = 1$, $d^-(v) = 1$

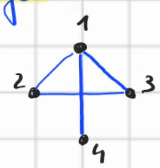
b: $d^+(v) = 1$, $d^-(v_2) = 1$

c: $d^+(v_3) = 1$, $d^-(v) = 1$

+ 3 → número de arestas

Homomorfismo de grafos

$G = (V_G, E_G, \psi_G) \rightarrow$



$\longrightarrow$

$f: V_G \rightarrow V_H$

1 → 1

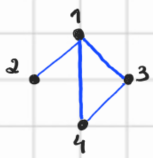
2 → 3

3 → 4

4 → 2

Para chegar de G a H

$H = (V_H, E_H, \psi_H) \rightarrow$



Se o grafo for simples não precisamos da função H

↓ é completamente determinada por $f: V_G \rightarrow V_H$

$h: E_G \rightarrow E_H$

12 → 13

13 → 14

e 14 → 12 por exemplo

23 → 34

Ou seja,

$$\varphi_G(e) = \underbrace{\overset{1}{\hat{u}}\,\overset{4}{\hat{v}}}_{\{u\,v\}} \Rightarrow \varphi_H(h(e)) = \overset{1}{\widehat{f(u)}}\,\overset{2}{\widehat{f(v)}}$$

- Homomorfismo de G em H é o par de funções (f, h)
- Se existir Homomorfismo de G em H e de H em G, então eu tenho um isomorfismo

Isomorfismo entre grafos simples

Não preciso de φ

G e H é dado por uma função bijetiva $\boxed{G = (V_G, E_G),\ H = (V_H, E_H)}$

$\underset{f}{\phi} : V_G \to V_H$, tal que para todos os vértices $u, v \in V_G$, tem-se

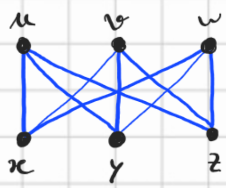
$$uv \in E_G \Leftrightarrow f(u)\,f(v) \in E_H$$

aresta transformada

Nota: $\boxed{G \cong H}$ significa G é isomorfo a H

ex: Mostrar que os dois grafos seguintes são isomorfos:

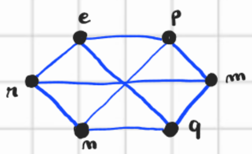
G:



$d(v^*) = 3 \to$ gráfico regular

$v^* \in V_G$

H:



$|V_G| = |V_H| = 6$

$|E_G| = |E_H| = 9$

Pretende-se encontrar uma bijeção:

$$\phi : \{u, v, w, x, y, z\} \to \{e, p, m, n, q, r\},$$

que preserva a relação de adjacência entre os vértices.

Como todos os vértices têm o mesmo grau escolhemos arbitrariamente:

$$\phi(u) = e, \quad \overset{\text{vizinhança}}{N_G(u)} = \{x, y, z\}$$

$$N_H(e) = \{r, q, p\}$$

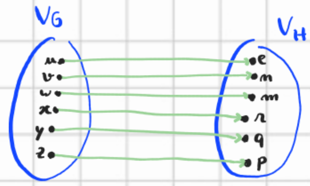
Assim, por exemplo:

$$\phi(x) = r,\ \phi(y) = q,\ \phi(z) = p$$

opcional $\to$ $\phi(v) = n$, $\phi(w) = m$

u adjacente a x, y, z, pelo que, $\phi(u) = e$, têm que ser adjacentes a $\phi(x), \phi(y)$ e $\phi(z)$

ϕ :

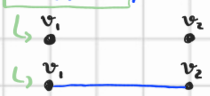


Número de grafos simples com p vértices, $v_1, v_2, \dots, v_p$

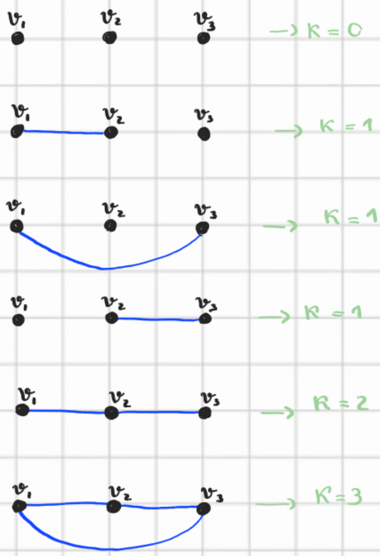
n.º máximo de arestas : $\binom{p}{2} = C_2^p$

$\hookrightarrow$ n.º de subconjuntos do conjunto formado por todos os pares não ordenados de

$\{v_1, v_2, \dots, v_p\} : \{\}, \{v_1\}, \dots \underbrace{\{v_1, v_2\}}, \dots \{v_1, v_2, v_3\}$



$\{v_1, v_2, v_3\}$:

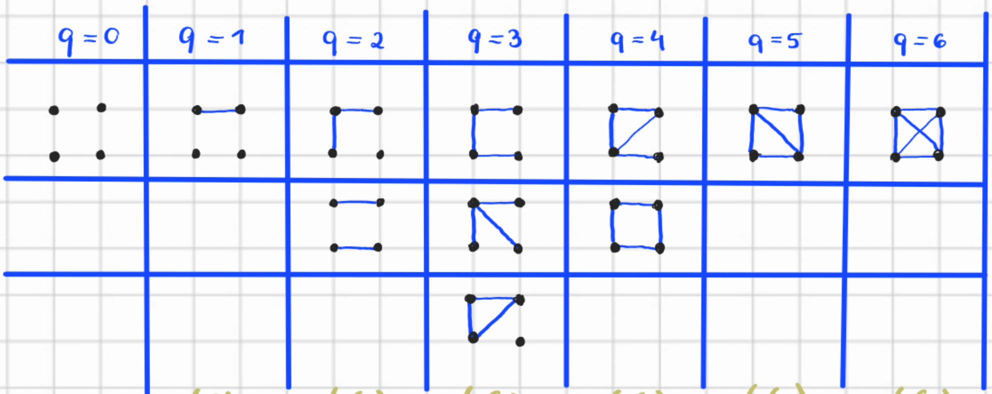


Para $p = 4$:

$\rightsquigarrow \binom{4}{2} = \frac{\cancel{4} \times 3 \times 2}{\cancel{2} \times \cancel{2}} = 6$ arestas

$\hookrightarrow$ número de grafos que contêm q arestas
$0 \leq q \leq \binom{p}{2} = 6$

Classes de grafos com q arestas e p = 4 vértices (apenas rep. por grafos não isomorfos)



$\boxed{\text{Caso geral: } = 2^{\binom{p}{2}}}$

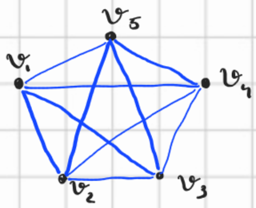
$\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^{\binom{4}{2}}$

$\hookrightarrow$ 6 linhas do triângulo de pascal

grafos isomorfos entre si!

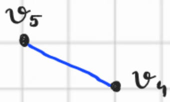
Subgrafos

K_5
(V, E)



$[\ \ ] \longrightarrow$ induzido

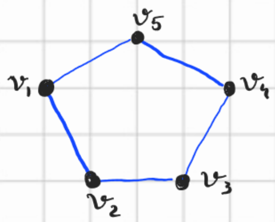
$$\underbrace{G_1}_{\text{subgrafo de } K_5} = K_5 - \{v_1, v_2, v_3\} = K_5[V \setminus \{v_1, v_2, v_3\}] = K_5[\{v_4, v_5\}]$$



$$G_2 = \underbrace{K_5 - v_5}_{K_4}$$

Subgrafo adjacente

ex: K_5 contém 5 vértices:

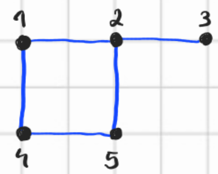


$$\hat{E} = \{v_1 v_5, v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, v_4 v_5\}$$

$$G_3 = K_5[\hat{E}], \ \hat{E} \subseteq E$$

ex:

H:



$$\tilde{E}_H = \{23, 25\} \subseteq E_H$$

$$\underbrace{H[E - \tilde{E}]}_{\text{grafo induzido por } E - \tilde{E}}:$$

<u>Diferente de $H - \tilde{E}$</u>! $\longrightarrow$