1

a)

$$\exists y\ P(x,y)$$

var. livre

var. li

- x livre
- y ligada

Extra: (interpretação)

$\underbrace{P(x,y)}_{\text{predicado binário}}$: "x divide y"

$P(\underbrace{f(x_1,x_2)}_{\text{termo}}, \underbrace{y}_{\text{termo}})$

$P(2,6) \equiv V$

$\forall x \exists y\ P(x,y) = 1$

b)

$$\left(\forall x\ (P(x) \to Q(x))\right) \to (\neg P(x) \vee Q(y))$$

- x livre e ligagada

var. ligada

var. livre

- y livre

c)

$$\exists x\,(P(y,z) \wedge \forall y\,(\neg Q(x,y) \vee P(y,z)))$$

var. ligada

var. livre

- x ligada
- y livre e ligada
- z livre

d) $P(a, f(a,b))$

- a e b livres

e) $\exists x\,(P(x) \to \neg Q(x))$

- x ligada

f) $\forall x\,((P(x) \wedge C(x)) \to \exists y\, L(x,y))$

$\equiv \forall x\, \exists y\,((P(x) \wedge C(x)) \to L(x,y))$

- x e y ligados

2

a) "Todos os aves têm penas

Domínio = {aves}

Penas(x) : "x tem penas"

LOP: $\forall x$ Penas(x)

ou

Domínio = {animais}

Aves(x) : "x é ave"

Penas(x) : "x tem penas"

LOP: $\forall x$ (Ave$(x) \to$ Penas(x))

b) "Todas as crianças são mais novas que os seus pais"

Domínio = { humanos }

Criança (x) : "x é criança"

Pai (y, x) : "y é pai de x"

MaisNovo(x, y) : "x é mais novo que y"

$$\forall x \forall y \; (\text{Criança}(x) \land \text{Pai}(y,x)) \longrightarrow \text{MaisNovo}(x,y))$$

c) "Todos os insetos são mais leves do que algum mamífero"

Domínio = { animais }

Inseto(x) : "x é um inseto"

Mamífero(x) : "x é um mamífero"

MaisLeve(x, y) : "x é mais leve que y"

$$\forall x \exists y (\text{Inseto}(x) \longrightarrow \text{Mamífero}(x) \land \text{MaisLeve}(x,y))$$

! $\underbrace{\text{Inseto} \land \text{Mamífero} \rightarrow \text{MaisLeve}}$

Não funciona, pois quando Mamífero ≡ 0 a implicação é verdadeira

d) "Nenhum número é menor do que zero"

Domínio = { números }

MenorIgual(x) : "zero é menor ou igual que x"

$$\forall x (\text{MenorIgual}(x))$$

e) $\forall x (\text{Menor}(x))$

f)

Com a definição do domínio podemos tornar tudo mais fácil

Domínio = { números primos }

Par(x) : "x é par"

$$\exists x (\neg \text{Par}(x))$$

Se Domínio = { números }

$$\exists x (\text{primo}(x) \land (\neg \text{Par}(x)))$$

g) Domínio = { números pares }

Primo(x) : "x é primo"

$$\forall x (\text{Primo}(x))$$

$$\forall x \; \text{Par}(x) \longrightarrow \text{Primo}(x)$$

3

$c(x)$: "x é uma explicação clara"
$s(x)$: "x é satisfatória"
$d(x)$: "x é uma desculpa"

Domínio = { todos os textos em português }

a) Para qualquer que seja o texto em português se é uma explicação clara então é satisfatória

"Todas as explicações claras são satisfatórias"

b) Existe pelo menos um texto em português que é uma desculpa e não é satisfatória

"Algumas desculpas não são satisfatórias"

c) Existe pelo menos um texto em português que é uma desculpa e não é uma explicação clara

"Há desculpas que não são uma explicação clara"

Normalmente é assim o teste!

4

a)

$D = \Pi$

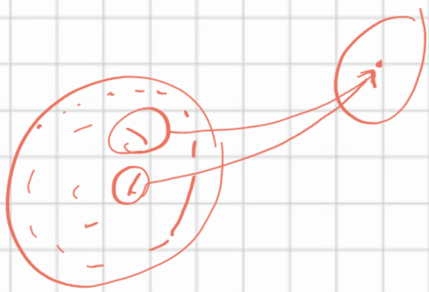
$$\forall x \left(r(x) \rightarrow \exists y \left(c(y) \wedge i(x,y) \right) \right)$$

b)

$$\exists x \left(r(x) \rightarrow \exists y \left(c(y) \wedge [\neg i(x,y)] \right) \right)$$

c)

$$\forall x \left(r(x) \rightarrow \exists y \left(c(y) \wedge [\neg i(x,y)] \right) \right)$$



5

a)

$$\forall x \left(Casa(x) \wedge Grande(x) \rightarrow Cara(x) \right)$$

b)

$$\forall x \left(Apartamento(x) \rightarrow \exists y \; Casa(y) \wedge Grande(y) \wedge PMenor(x,y) \right)$$

6

Domínio = { humanos }

a)

$$\forall x \exists y (gosta(y,x))$$

b)

$$\forall x \forall y (gosta(x,y) \longrightarrow gosta(y,y))$$

c)

$$\neg(\forall x \exists y (gosta(y,x))) \equiv \exists x \forall y (\neg gosta(y,x))$$

"Existe alguém de quem ninguém gosta"

7

$\neg(\forall x \; P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$ e $\neg(\exists x \; P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$

$$\neg(\forall y \exists x ((q(x) \rightarrow p(y)) \vee (p(y) \wedge q(x))))$$

$$\equiv \exists y \forall x (\neg((\neg q(x) \vee p(y)) \vee (p(y) \wedge q(x))))$$

Distributividade

$$\equiv \exists y \forall x (\neg((\neg q(x) \vee \underbrace{p(y) \vee p(y)}_{p(y)}) \wedge (\neg q(x) \vee p(y) \vee q(x))))$$

comutatividade

$$\equiv \exists y \forall x (\neg((\neg q(x) \vee p(y)) \wedge \underbrace{(\underbrace{\neg q(x) \vee q(x)}_{1} \vee p(y))}_{1}))$$

$$\equiv \exists y \forall x (\neg(\underbrace{(\neg q(x) \vee p(y)) \wedge 1}_{\neg q(x) \vee p(y)}))$$

$$\equiv \exists y \forall x (\neg(\neg q(x) \vee p(y)))$$

ou

De Morgan

Dupla negação

$$\equiv \boxed{\exists y \forall x (q(x) \wedge \neg p(y))}$$

$$\equiv \exists y \forall x \neg(q(x) \rightarrow p(x))$$

8

$$Q: \forall x \exists y ((t(x) \wedge v(y,x)) \rightarrow \neg p(x,y))$$

$(\mathcal{U}, v)$ $\quad D = \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$

$t(x)$: $x > 1$

$v(y,x)$: $y = x+1$

$p(x)$: $\underbrace{x \text{ divide } y}_{y \text{ é múltiplo de } x}$

a) Valor lógico de $Q, (M, v^{\frac{x}{a}}) \models a$

Para todo $\underline{x} = a \in D = \mathbb{N}$

• $v(x) = 1$

$$\Big(\underbrace{t(v(x))}_{\underbrace{t(1)}_{\emptyset}} \wedge v(y, v(x))\Big) \longmapsto \emptyset$$

$$\emptyset \longrightarrow \neg p(1, y) \equiv 1$$

• $\underline{x > 1} \longmapsto t(x) \equiv 1$

ou $V(x) > 1$

(i) $\boxed{y \neq x+1} \longmapsto v(y, x) \equiv \emptyset$

$$(1 \wedge \emptyset) \longmapsto \neg p(x, y) \equiv 1$$

(ii) $\boxed{y = x+1} \longmapsto \underbrace{\neg p(x, y) \equiv 1}_{\text{Isto tem de ser verdadeiro}}$?

Ora com $x > 1$

temos de verificar se $\underline{x}$ divide $\underline{x+1}$

$$\frac{(x+1)}{x} = K, \; K \in \mathbb{Z}$$

$(\Leftarrow) \; 1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\notin \mathbb{Z}} = K$, logo $K \notin \mathbb{Z}$, assim é impossível que x divide$(x+1)$ para $\underline{x > 1}$

ou

$$\underbrace{K-1}_{\in \mathbb{Z}} \neq \frac{1}{x} \notin \mathbb{Z}$$

logo x não divide $(x+1)$

$$\neg p(x, y) \equiv 1$$

$$\underbrace{(\underbrace{t(x)}_{1} \wedge \underbrace{v(y, x)}_{1})}_{1} \longrightarrow \underbrace{\neg p(x, y)}_{1}$$

$$1 \longrightarrow 1 \equiv 1$$

• Logo, (M, V) é um modelo de Q (Q é valida nesta interpretação)

↳ Para valores de x e y em $\mathbb{N}$ Q é verdadeiro

b) Já provamos que Q é um modelo (sempre verdadeira), logo para qualquer variável do Domínio Q é verdadeiro, assim para $V(x) = 1$ e $V(y) = 2$ também é verdade.

Provando

$V(x) = 1$ e $V(y) = 2$

$$t(x) = t(1) = \emptyset$$

$$v(y, x) = v(v(y), v(x)) \equiv 1$$

$$p(x, y) = p(v(x), v(x)) = p(1, 2) \equiv 1 \longmapsto \neg p(x, y) \equiv \emptyset$$

Assim $\overset{t(x)}{(\emptyset}\wedge \overset{p(y,x)}{1)} \to \overset{\neg p(x,y)}{\emptyset}$

$\equiv \emptyset \to \emptyset \equiv 1$, logo Q é verdadeiro para esta interpretação

$\boxed{9}$

$X = \{A, B, C\}$ e α, β e γ constantes

$\alpha \mapsto A$, $\beta \mapsto A$ e $\gamma \mapsto B$

$f: f(A) = B,\ f(B) = C,\ f(C) = C$

$R: \{(B,A), (C,B), (C,C)\}$

a)

$R(\alpha, \beta) = R(A,A)$ que não existe logo para esta interpretação a fórmula é falsa

b)

$\exists x\ f(x) = \beta$

$\equiv \exists x\ f(x) = A$

• $\underline{x = A}$: • $\underline{x = B}$ • $\underline{x = C}$

$f(A) = B_{\times}$ $f(B) = C_{\times}$ $f(C) = C_{\times}$

• Como não existe nenhuma valoração de x para o qual $f(x) = A$ é válida, então para esta interpretação a fórmula dada é falsa.

c)

$\forall w\ R(f(w), w)$

• $\underline{w = A}$ • $\underline{w = B}$ • $\underline{w = C}$

$R(f(A), A) = R(B,A)$ ✓ $R(f(B), B) = R(C,B)$ ✓ $R(f(C), C) = R(C,B)$ ✓

Logo, como para toda a valorização de w, $R(f(w), w)$ é verdadeira, então para esta interpretação a fórmula dada é verdadeira

$\boxed{10}$

a) $\varphi \equiv \forall x \, (P(x,a) \rightarrow \neg Q(x,a))$

M_1:

Estrutura

$D = \{1,2,3\}$

$P(x,a)$: "$x \geq a$"

$Q(x,a)$: "$x \neq a$"

Com a const. $a = 3$, (M_1, V_1):

Dá um modelo para φ

Para esta interpretação é sempre verdadeira

$\underbrace{1 \geq 3}_{0} \longrightarrow \underbrace{1 = 3}_{0} \equiv 1$

$\underbrace{2 \geq 3}_{0} \longrightarrow \underbrace{2 = 3}_{0} \equiv 1$

$\underbrace{3 \geq 3}_{1} \longrightarrow \underbrace{3 = 3}_{1} \equiv 1$

Fórmula consistente

Havia mais interpretações!

Interpretação (M_2, V_2) para a qual φ não é válida (falsa)

M_2:

$D = \{1,2,3\}$

$P(x,a)$: "$x \geq a$"

$Q(x,a)$: "$x = a$"

Com a const. $a = 3$, (M_2, V_2):

$\underbrace{1 \geq 3}_{0} \longrightarrow \underbrace{1 \neq 3}_{0} \equiv 1$

$\underbrace{2 \geq 3}_{0} \longrightarrow \underbrace{2 \neq 3}_{0} \equiv 1$

$\underbrace{3 \geq 3}_{1} \longrightarrow \underbrace{3 \neq 3}_{0} = 0$

↳ logo para esta interpretação a fórmula é falsa

Logo, a fórmula não é uma tautologia (pois existem interp. para a qual a fórmula é falsa)

b) $\varphi \equiv \exists x \exists y \, \big(P(x,y) \wedge \forall z (\neg Q(x,y) \vee P(y,z))\big)$

$\equiv \exists x \exists y \forall z \, \big(P(x,y) \wedge (Q(x,y) \longrightarrow P(y,z))\big)$

M_1:

$D = \{1,2,3\}$

$P(x,y)$: "$x \neq y$"

$Q(x,y)$: "$x \geq y$"

Interpretação (M_1, V_1) é um modelo de φ:

$V_1(x) = 2$ e $V_1(y) = 3$

$1 \wedge \underbrace{(0 \longrightarrow 3 \neq z)}$

$\underline{V_1(z) = 1}$

$1 \wedge (0 \rightarrow 1)$

$\equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$

$\underline{V_1(z) = 2}$

$1 \wedge (0 \rightarrow 1)$

$\equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$

$\underline{V_1(z) = 3}$

$1 \wedge (0 \rightarrow 0)$

$\equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$

• Logo para a interpretação (M_1, V_1) a fórmula é sempre verdadeira

M_2:

$D = \{1,2,3\}$

$P(x,y)$: "$x + 3 = y$"

$Q(x,y)$: "$x \geq y$"

Interpretação (M_2, V_2) em que φ é não válida:

• $\underline{V_1(x) = 1}$:

• $\underset{(\forall z)}{\underline{V_1(y) = 1}}$: $\underbrace{4 = 1}_{0} \wedge \underbrace{(1 \geq 1 \longrightarrow 4 = z)}_{\text{Não interessa, dará sempre zero}}$

$\equiv 0$

• $\underset{(\forall z)}{\underline{V_1(y) > 1}}$: $\underbrace{5 = \overbrace{V_1(y)}^{\in\{2,3\}}}_{0} \wedge (1 \geq 2 \longrightarrow 5 = z)$

$\equiv 0$

• $\underline{V_1(x) > 1}$:

• $\underset{(\forall z)}{\underline{V_1(y) = 1}}$: $\underbrace{\underbrace{\overbrace{V_1(x)}^{\in\{2,3\}} + 3}_{\geq 5} = 1}_{0} \wedge (V_1(x) \geq 1 \longrightarrow V_1(x) + 3 = z)$

$\equiv 0$

- $\underline{v_1(y) > 1}$ $(\forall z)$: $\underbrace{\underbrace{v_1(x)+3}_{\geq 5} = \underbrace{v_1(y)}_{\in\{2,3\}}}_{0} \wedge (v_1(x) \geq 1 \longrightarrow v_1(x)+3 = z)$

- Logo para toda a valorização de x, y e z a formula é inválida para esta interpretação

$\boxed{11}$

a) $(\forall x\ S(x)) \longrightarrow (\exists z\ P(z)) \equiv \forall x\, \exists z\, (\neg S(x) \vee P(z))$

b) $\neg(\forall x\, (S(x) \longrightarrow P(x))) \equiv \exists x\ \neg(S(x) \longrightarrow P(x))$

$\equiv \exists x\ \neg(\neg S(x) \vee P(x))$

De Morgan
Dupla negação

$\equiv \exists x\ (S(x) \wedge \neg P(x))$

c) $\forall x\, (P(x) \longrightarrow (\exists y\ Q(x,y)))$

$\equiv \forall x\, \exists y\, (\neg P(x) \vee Q(x,y))$

d)

$\exists x\, (\neg(\exists y\ P(x,y)) \longrightarrow \exists z\, (Q(z) \longrightarrow R(x)))$

$\equiv \exists x\, (\forall y\, (\neg P(x,y)) \longrightarrow \exists z\, (Q(z) \longrightarrow R(x)))$

Dupla negação

$\equiv \exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \vee (\neg Q(z) \vee R(x)))$

$\equiv \exists x\, \forall y\, \exists z\, (P(x,y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))$

e)

$\forall x\, \exists y\, \exists z\, ((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$

Distributivi:

$\equiv \forall x\, \exists y\, \exists z\, ((\neg P(x,y) \vee R(x,y,z)) \wedge (Q(x,z) \vee R(x,y,z)))$, na forma normal conjuntiva

$\boxed{12}$

a)

$\neg((\forall x\ P(x)) \longrightarrow (\exists y\ P(y))) \equiv \neg(\neg(\forall x\ P(x)) \vee (\exists y\, P(y)))$

De Morgan

$\equiv (\forall x\ P(x)) \wedge (\forall y\ \neg P(y)) \equiv \forall x\, \forall y\, (\underbrace{P(x) \wedge (\neg P(y))}_{\text{como temos uma conjunção}})$ $\underline{\text{FNS}}$

outra mudança de var. para mostrar que era falsa

$\equiv \forall z\ (P(z) \wedge (\neg P(z))) \equiv \bot$

$\equiv \forall z\ (P(z) \wedge (\neg P(z))) = \bot$

b) $\neg\left(\left(\forall x P(x)\right) \to \left(\exists y \forall z Q(y,z)\right)\right) \equiv \neg\left(\neg\left(\forall x P(x)\right) \vee \exists y \forall z \left(Q(y,z)\right)\right)$

De Morgan

$\equiv \forall x\, P(x) \wedge \neg\left(\exists y \forall z\, (Q(y,z))\right)$

$\equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall y\, \exists z\, \neg Q(y,z)$ — $z = f(x,y)$, uma função de Skolem

$\equiv \forall x\, \forall y\, \left(P(x) \wedge \neg Q(y, f(x,y))\right)$

c) $\forall x\, \exists y\, \exists z\, \left((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z)\right)$

$y = f(x)$, $z = g(x)$ > funções de Skolem

$\equiv \forall x\left(\left(\neg P(x, f(x)) \wedge Q(x, g(x))\right) \vee R(x, f(x), g(x))\right)$

FNS

13

$S = \{\underbrace{P \vee R}_{c_1}, \underbrace{\neg Q \vee R}_{c_2}, \underbrace{\neg S \vee Q}_{c_3}, \underbrace{\neg P \vee S}_{c_4}, \underbrace{\neg Q}_{c_5}, \underbrace{\neg R}_{c_6}\}$

Usando o método de resolução:

$c_3: \neg S \vee Q$
$c_5: \neg Q$
$c_7: \neg S \quad Res(c_3, c_5)$

$c_7: \neg S$
$c_4: \neg P \vee S$
$c_8: \neg P \quad Res(c_7, c_4)$

$c_8: \neg P$
$c_1: P \vee R$
$c_9: R \quad Res(c_8, c_1)$

$c_9: R$
$c_6: \neg R$
$\perp$

Logo, o conjunto S é inconsistente, isto é, não existe uma interpretação para que todos os clausulos do conjunto sejam verdadeiros

14

a)

$E\theta \equiv P(h(\hat{\theta}(x)), \hat{\theta}(z), f(\hat{\theta}(z)))$
$\equiv P(h(a), g(x), f(g(x)))$

b)

$E\theta \equiv F(a, h(a), \hat{\theta}(x), h(\hat{\theta}(y)))$
$\equiv F(a, h(a), f(y), h(a))$

$\boxed{15}$

a)

$W = \{P(f(x), z), P(y, a)\}$

0. $K = 0$, $W_0 = W$, $\sigma_0 = \varepsilon$

$D_0 = \{f(x), y\}$

$\sigma_1 = \{f(x)/y\} \Delta \sigma_0 = \{f(x)/y\}$

$W_1 = W_0\sigma_1 = \{P(f(x), z), P(f(x), a)\}$

1. $K = 1$

$D_0 = \{z, a\}$

$\sigma_2 = \{a/z\} \Delta \sigma_1 = \{a/z, f(x)/y\}$

$W_2 = W_1\sigma_2 = \{P(f(x), a), P(f(x), a)\}$
$= \{P(f(x), a)\}$

unificador mais geral do conjunto de fórmulas

b)

$W = \{P(f(x), x), P(z, a)\}$, a const., x e z var.

0. $K=0$, $W_0 = W$, $\sigma_0 = \varepsilon$

$D_0 = \{f(x), z\}$

$\sigma_1 = \{f(x)/z\} \Delta \sigma_0 = \{f(x)/z\}$

$W_1 = W_0\sigma_1 = \{P(f(x), x), P(f(x), a)\}$

1. $K = 1$

$D_1 = \{x, a\}$

$\sigma_2 = \{a/x\} \Delta \sigma_1 = \{a/x, f(a)/z\}$

$W_2 = W_1\sigma_2 = \{P(f(a), a), P(f(a), a)\}$

$= \{P(f(a), a)\}$

2. $K = 2$

Como $|W_2| = 1$, então $\sigma_2 = \{a/x, f(a)/z\}$ é o unificador mais geral (W é unificável) c)

$W = \{ P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z,w), f(w)) \}$

0. $K = 0, \; W_0 = W, \; \sigma_0 = \varepsilon$

$D_0 = \{ a, b \}$

Nenhuma variável pertence a D_0, logo W não é unificável

d)

$W = \{ S(x, y, z), S(u, g(v,v), v) \}$

0. $K = 0, \; W_0 = W, \; \sigma_0 = \varepsilon, \; D_0 = \{ x, u \}$

$\sigma_1 = \{ u/x \} \Delta \sigma_0 = \{ u/x \}$

$W_1 = W_0 \sigma_1 = \{ S(u, y, z), S(u, g(v,v), v) \}$

1. $K = 1, \; D_1 = \{ y, g(v,v) \}$

$\sigma_2 = \{ g(u,v)/y \} \Delta \sigma_1 = \{ g(v,v)/y, u/x \}$

$W_2 = W_1 \sigma_2 = \{ S(u, g(v,v), z), S(u, g(v,v), v) \}$

2. $K = 2, \; D_2 = \{ z, v \}$

$\sigma_3 = \{ z, v \} \Delta \sigma_2 = \{ v/z, g(v,v)/y, u/x \}$

$W_3 = W_2 \sigma_3 = \{ S(u, g(v,v), v), S(u, g(v,v), v) \}$

$= \{ S(u, g(v,v), v) \}$

$|W_3| = 1$, logo σ_3 é um unificador mais geral de W

e)

$W = \{ P(x, x), P(y, f(y)) \}$

0. $K = 0, \; W_0 = W, \; \sigma_0 = \varepsilon, \; D_0 = \{ x, y \}$

$\sigma_1 = \{ y/x \} \Delta \sigma_0 = \{ y/x \}$

$W_1 = W_0 \sigma_1 = \{ P(y, y), P(y, f(y)) \}$

1. $K = 1, \; D_1 = \{ y, f(y) \}$

Como a única var. y em D_1 ocorre em $f(y)$, logo W não é unificável

f) $W = \{ Q(f(a), g(x)), Q(y, y) \}$

0. $K = 0, \ W_0 = W, \ \sigma_0 = \varepsilon, \ D_0 = \{ f(a), y \}$

$\sigma_1 = \{ f(a)/y \} \circ \sigma_0 = \{ f(a)/y \}$

$W_1 = W_0 \sigma_1 = \{ Q(f(a), g(x)), Q(f(a), f(a)) \}$

1. $K = 1, \ D_1 = \{ g, f \}$

Como não existe nenhuma variável em D_1, W não é unificável

g) $W = \{ Q(f(x), y), Q(z, g(w)) \}$

0. $K = 0, \ W_0 = W, \ \sigma_0 = \varepsilon, \ D_0 = \{ f(x), z \}$

$\sigma_1 = \{ f(x)/z \} \circ \sigma_0 = \{ f(x)/z \}$

$W_1 = W_0 \sigma_0 = \{ Q(f(x), y), Q(f(x), g(w)) \}$

1. $K = 1, \ D_1 = \{ y, g(w) \}$

$\sigma_2 = \{ g(x)/y \} \circ \sigma_1 = \underbrace{\{ g(x)/y, f(x)/z \}}_{\text{u.m.g.}}$

$W_2 = W_1 \sigma_2 = \{ Q(f(x), g(w)), Q(f(x), g(w)) \} = \{ Q(f(x), g(w)) \}$

$\boxed{16}$

$W = \{ C(x, \text{SenhorAneis}, y), C(\text{Maria}, z, f(t)), C(w, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul})) \}$

0. $K = 0, \ W_0 = W, \ \sigma_0 = \varepsilon, \ D_0 = \{ x, \text{Maria}, w \}$

$\sigma_1 = \{ \text{Maria}/x, \text{Maria}/w \} \circ \sigma_0 = \{ \text{Maria}/x, \text{Maria}/w \}$

$W_1 = W_0 \sigma_1 = \{ C(\text{Maria}, \text{SenhorAneis}, y), C(\text{Maria}, z, f(t)), C(\text{Maria}, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul})) \}$

1. $K = 1, \ D_1 = \{ \text{SenhorAneis}, z \}$

$\sigma_2 = \{ \text{SenhorAneis}/z \} \circ \sigma_1 = \{ \text{SenhorAneis}/z, \text{Maria}/x, \text{Maria}/w \}$

$W_2 = W_1 \sigma_2 = \{ C(\text{Maria}, \text{SenhorAneis}, y), C(\text{Maria}, \text{SenhorAneis}, f(t)), C(\text{Maria}, \text{SenhorAneis}, f(\text{Mesa})) \}$

2. $K = 2, \ D_2 = \{ y, f(t), f(\text{MesaAzul}) \}$

$\sigma_3 = \{ f(\text{MesaAzul})/y, \text{MesaAzul}/t \} \circ \sigma_2 = \underbrace{\{ f(\text{MesaAzul})/y, \text{MesaAzul}/t, \text{SenhorAneis}/z, \text{Maria}/x, \text{Maria}/w \}}_{\text{u.m.g.}}$

$w_3 = w_2\sigma_3 = \{C(\text{Maria}, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul})), C(\text{Maria}, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul})),$
$C(\text{Maria}, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul}))\}$
$= \{C(\text{Maria}, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul}))\}$

$\boxed{17}$

a) $c_1 = P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a))$

Seja $\sigma_1 = \{a/x\}$, um fator de c_1 é $c'_1 = c_1\sigma_1 = P(a) \vee P(a) \vee Q(f(a)) \vee Q(f(a))$
$= P(a) \vee Q(f(a))$

b) $c_2 = P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y)$

Seja $\sigma_2 = \{f(y)/x\}$, um fator de c_2 é $c'_2 = c_2\sigma_2 = P(f(y)) \vee P(f(y)) \vee Q(f(y), y)$
$= P(f(y)) \vee Q(f(y), y)$

$\boxed{18}$

a)
$$
\begin{array}{rl}
c_1: & \neg P(x) \vee Q(x, b) \\
c_2: & P(a) \vee Q(a, b) \\
\hline
c_1\sigma_1: & \neg P(a) \vee Q(a, b) \\
c_2: & P(a) \vee Q(a, b) \\
\hline
c_3: & Q(a, b) \quad RB(c_1\sigma_1, c_2)
\end{array}
$$

$\sigma_1 = \{a/x\}$

b) Não existe, pois não dá para unificar $w = \{Q(x, x), Q(a, f(a))\}$

$\sigma_1 = \{a/x\}, \; w_1 = \{Q(a, a), Q(a, f(a))\}$
$D_1 = \{a, f(a)\}$
não existem variáveis no conjunto dos dif.

$\boxed{19}$

$F_1: \forall x\, (G(x) \rightarrow \forall y\, (P(y) \rightarrow L(x, y)))$

$F_2: \exists x\, G(x)$

$\neg F_3: \neg(\exists x\, \forall y\, (P(y) \rightarrow L(x, y)))$

Quero mostrar que: $F_1, F_2 \models F_3$

$S = \{F_1, F_2, \neg F_3\}$
↳ conjunto de cláusulas correspondente

<u>Skolenização de F_1:</u>

$F_1: \forall x\, \forall y\, (\neg G(x) \vee (\neg P(y) \vee L(x, y)))$

$\equiv \forall x\, \forall y\, (\underbrace{\neg G(x) \vee (\neg P(y)) \vee L(x, y)}_{c_1})$ <u>FNS</u>

Skolenização de F_2:

$F_2 : \exists x \; G(x)$, $x = a$ const. de Skolen

$\underbrace{G(a)}_{c_2}$ FNS

Skolenização de $\neg F_3$:

$\neg F_3 : \forall x \exists y \neg(\neg P(y) \vee L(x,y))$

Lei de Morgan
Dupla negação

$\equiv \forall x \exists y (P(y) \wedge (\neg L(x,y)))$,

seja $y = f(x)$ função de Skolen

$\forall x (\underbrace{P(f(x))}_{c_3} \wedge \underbrace{(\neg L(x,f(x))}_{c_4})$ FNS

trocamos de variáveis!

$S = \{ \neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y) , G(a) , P(f(z)) , \neg L(w,f(w)) \}$

(usamos o método de resolução, para mostrar que S é inconsistente!

umg de $\{G(x), G(a)\}$ é $\sigma_1 = \{a/x\}$

$$\begin{array}{ll} c_1\sigma_1 : & \neg G(a) \vee \neg P(y) \vee L(a,y) \\ c_2 : & G(a) \\ \hline c_5 : & \neg P(y) \vee L(a,y) \quad RB(c_1\sigma_1, c_2) \end{array}$$

umg de $\{P(y), P(f(z))\}$ é $\sigma_2 = \{f(z)/y\}$

$$\begin{array}{ll} c_5\sigma_2 : & \neg P(f(z)) \vee L(a,f(z)) \\ c_3 : & P(f(z)) \\ \hline c_6 : & L(a,f(z)) \quad RB(c_5\sigma_2, c_3) \end{array}$$

umg de $W_0 = \{L(a,f(z)), L(w,f(w))\}$

AU

$\sigma_1 = \{a/w\}$ $\quad W_1 = \{L(a,f(z)), L(a,f(a))\}$

$\sigma_2 = \{a/z\} \Delta \sigma_1 = \{a/z, a/w\}$

$W_2 = \{L(a,f(a)), L(a,f(a))\}$

$= \{L(a,f(a))\}$

$$\frac{\begin{array}{l} C_6\sigma_2 : \ L(a, f(a)) \\ C_4\sigma_2 : \neg L(a, f(a)) \end{array}}{\bot \quad RB(C_6\sigma_2, C_4\sigma_2)}$$

Logo, como o conjunto S é inconsistente verifica-se:

$$\boxed{F_1, F_2 \models F_3}$$

20

a)

$D = \{ \text{humanos} \}$
$U(x)$: "x é aluno da UA"
$E(x)$: "x estuda com afinco"
$P(x)$: "x passa a MD"

$F_1: \forall x \left(U(x) \land E(x) \rightarrow P(x) \right)$

$F_2: U(João)$

$F_3: E(João)$

b)

Provar que: $F_1, F_2, F_3 \models \underbrace{P(João)}_{F_4}$

Skolenização

$F_1: \forall x (U(x) \land E(x) \longrightarrow P(x)) \equiv \forall x (\neg (U(x) \land E(x)) \lor P(x))$

De Morgan

$\equiv \forall x (\underbrace{\neg U(x) \lor \neg E(x) \lor P(x)}_{C_1})$ FNS

$F_2: U(João)$

$F_3: E(João)$

$\neg F_4: \neg P(João)$

$\mathcal{C} = \{ \underbrace{\neg U(x) \lor \neg E(x) \lor P(x)}_{C_1}, \underbrace{U(João)}_{C_2}, \underbrace{E(João)}_{C_3}, \underbrace{\neg P(João)}_{C_4} \}$

Para provar que o João passa a MD, basta provar que $\mathcal{C}$ é inconsistente pelo princípio de resolução.

Seja $\sigma = \{ João/x \}$, $C_1\sigma = \{ \neg U(João) \lor \neg E(João) \lor P(João) \}$

$$\frac{\begin{array}{l} C_1\sigma : \neg U(João) \lor \neg E(João) \lor P(João) \\ C_2 : U(João) \end{array}}{C_5 : \neg E(João) \lor P(João) \quad RB(C_1\sigma, C_2)}$$

$$\frac{\begin{array}{l} C_5 : \neg E(João) \lor P(João) \\ C_3 : E(João) \end{array}}{C_6 : P(João) \quad RB(C_5, C_3)}$$

$c_6: P(João)$
$c_4: \neg P(João)$

$\perp$ $RB(c_6, c_4)$

Logo, $\mathcal{C}$ é inconsistente $\Longrightarrow$ João passa a Matemática Discreta !

$\boxed{21}$

a)

$\mathcal{U} = \{x : x \text{ é animal}\}$
$P(x)$: "x tem pelo"
$M(x)$: "x é mamífero"
$U(x)$: "x é um urso"
$C(x)$: "x é um coelho"

$F_1: \forall x\,(P(x) \to M(x))$ $F_4: U(W)$

$F_2: \forall x\,(U(x) \to P(x))$ $F_5: C(B)$

$F_3: \forall x\,(C(x) \to M(x))$ $F_6: P(S)$

const. $\begin{cases} W \equiv \text{Winnie} \\ B \equiv \text{Bugsbunny} \\ S \equiv \text{Sylvester} \end{cases}$

b)

i.

Prova-se que: $\boxed{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 \models M(W)}$

uma vez que existe uma dedução de $\perp$ a partir do conjunto $\mathcal{C}$ de cláusulas correspondente a $\{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, \neg M(W)\}$, ou seja, mostrar que este conjunto é inconsistente

Skolenização das cláusulas e renomear variáveis:

$F_1: \forall x\,(\neg P(x) \vee M(x))$
$c_1: \neg P(x) \vee M(x)$

$F_4: U(W)$
$c_4: U(W)$

$F_2: \forall x\,(\neg U(x) \vee P(x))$
$c_2: \neg U(y) \vee P(y)$

$F_5: C(B)$
$c_5: C(B)$

$F_3: \forall x\,(\neg C(x) \vee M(x))$
$c_3: \neg C(z) \vee M(z)$

$F_6: P(S)$
$c_6: P(S)$

$c_7: \neg M(W)$

$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$

Método de Resolução:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{c_2 : \neg U(y) \vee P(y) \qquad c_4 : U(w)}{c_8 : P(w) \quad RB(c_2\sigma_1, c_4)} \qquad c_1 : \neg P(x) \vee M(x)}{c_9 : M(w) \quad RB(c_8, c_1\sigma_2)} \qquad c_7 : \neg M(w)}{\bot \quad RB(c_9, c_7)}$$

$\sigma_1 = \{w/y\}$, unificador mais geral de $\{U(x), U(w)\}$

$\sigma_2 = \{w/x\}$, unificador mais geral de $\{P(w), P(x)\}$

Logo Winnie é Mamíf. ← $\bot$

Nota: Provamos que: $\boxed{F_1, F_2, F_4 \models M(w)}$, a partir de $\{c_1, c_2, c_4, \neg M(w)\}$ deduz-se $\bot$

ii.

! Só estamos a utilizar as cláusulas que são necessárias para dar menos trabalho

✓ Winnie: $F_1, F_2, F_4 \models M(w)$ ← Winnie é mamífero

—//—

Bugsbunny: $F_3, F_5 \models M(B)$

Dedução de $\bot$ a partir de $\mathcal{C}_2 = \{c_3, c_5, c_{10}\}$, onde $c_{10} = \neg M(B)$
$= \{\neg C(z) \vee M(z), C(B), \neg M(B)\}$

$$\frac{\dfrac{c_3 : \neg C(z) \vee M(z) \qquad c_{10} : \neg M(B)}{c_{11} : \neg C(B) \quad RB(c_3\sigma_3, c_{10})} \qquad c_5 : C(B)}{\bot \quad RB(c_{11}, c_5)}$$

$\sigma_3 = \{B/z\}$, unificador mais geral de $\{M(z), M(B)\}$

↳ Logo Bugsbunny é mamífero !

—//—

Sylvester: $F_1, F_6 \models M(S)$

Dedução de $\bot$ a partir de $\mathcal{C}_3 = \{c_1, c_6, c_{12}\}$, onde $c_{12} = \neg M(S)$

$$\frac{\dfrac{c_1 : \neg P(x) \vee M(x) \qquad c_6 : P(S)}{c_{13} : M(S) \quad RB(c_1\sigma_4, c_6)} \qquad c_{12} : \neg M(S)}{\bot \quad RB(c_{13}, c_{12})}$$

$\sigma_4 = \{S/x\}$, unificador mais geral de $\{P(x), P(S)\}$

↳ Logo Sylvester é mamífero !

iii.

Sylvester: $\underbrace{P(S)}_{c_6} \models \underbrace{\neg P(S)}_{c_{14}}$ $P(S)$

$c_6 : P(S)$

$c_{14} : \neg P(S)$

$\perp$ $RB(c_6, c_{14})$

Logo Sylvester tem pelos!

—//—

Winnie: $\underbrace{P(W)}_{c_8} \models P(W)$ $\underbrace{\neg P(W)}_{c_{15}}$

$c_8 : P(W)$

$c_{15} : \neg P(W)$

$\perp$ $RB(c_8, c_{15})$

Logo Winnie tem pelos!

—//—

Bugsbunny: Será que: $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 \models \underbrace{P(B)}_{\neg P(B),\ c_{16}}$?

Não! Pois a partir de $\mathcal{C}_4 = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_{16}\}$ não se deduz $\perp$, logo o Bugsbunny não é consequência de $F_1, F_2, \dots, F_6$, i.e, $(F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_6) \rightarrow P(B)$ não é tautologia

$\neg(F_1, F_2, \dots, F_6 \models P(B)) \equiv F_1, F_2, \dots, F_6 \not\models P(B)$

22

a) $\forall x \; SH() \longrightarrow TSP(x)$

$\forall x \; \neg TSP(x)$

$\forall x \; SH(x) \vee \exists H(x)$