Aula 05

- Formulas válidas (tautologia)
  - → sempre verdadeira para todas as interpretações
- Formulas consistentes
  - → verdadeira para pelo menos uma interpretação
- Formulas inconsistentes (contradição)
  - → sempre falsa para todas as interpretações

Exemplo:

Folha 1

$\boxed{10}$

a) $f \equiv \forall x\, (P(x,a) \rightarrow \neg Q(x,a))$

M:

Estrutura

$D = \{1,2,3\}$

$P(x,a)$: "$x \geq a$"

$Q(x,a)$: "$x \neq a$"

Com a const. $a = 3$, (M_1, V_1):

Dá um modelo para f

Para esta interpretação é sempre verdadeira

$\underbrace{1 \geq 3}_{0} \longrightarrow \underbrace{1 = 3}_{0} \equiv 1$

$\underbrace{2 \geq 3}_{0} \longrightarrow \underbrace{2 = 3}_{0} \equiv 1$

$\underbrace{3 \geq 3}_{1} \longrightarrow \underbrace{3 = 3}_{1} \equiv 1$

Fórmula consistente

Havia mais interpretações !

Interpretação (M_2, V_2) para a qual f não é valida (falsa)

M:

$D = \{1,2,3\}$

$P(x,a)$: "$x \geq a$"

$Q(x,a)$: "$x = a$"

Com a const. $a = 3$, (M_2, V_2):

$\underbrace{1 \geq 3}_{0} \longrightarrow \underbrace{1 \neq 3}_{0} \equiv 1$

$\underbrace{2 \geq 3}_{0} \longrightarrow \underbrace{2 \neq 3}_{0} \equiv 1$

$\underbrace{3 \geq 3}_{1} \longrightarrow \underbrace{3 \neq 3}_{0} = 0$

↳ logo para esta interpretação a formula é falsa

Logo, a formula não é uma tautologia (pois existem interp. para a qual a formula é falsa)

— // —

Ideia do Método de Resolução na LPO

$\varphi_1 \equiv \overbrace{\forall}^{\text{quantificador universal}} x\ (gato(x) \rightarrow gordo(x))$

$\varphi_2 \equiv gato(Tom)$

$\psi \equiv gordo(Tom)$

$\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$

Cláusulas $= \{ \overbrace{\neg gato(\underline{x}) \vee gordo(\underline{x})}^{c_1}, \overbrace{gato(Tom)}^{c_2}, \overbrace{\neg gordo(Tom)}^{c_3} \}$

sigma (letra grega)

• Como temos variáveis precisamos de substituições em termos

$\sigma = \{ Tom/x \}$

$c_1\sigma :\ \cancel{\neg gato(Tom)} \vee gordo(Tom)$

$c_2 :\ \cancel{gato(Tom)}$

$c_4 :\ gordo(Tom) \qquad Res(c_1\sigma, c_2)$

$c_3 :\ \neg gordo(Tom)$

$\perp \qquad Res(c_4, c_3)$

→ Assim, o conjunto das cláusulas é inconsistente.

Logo, ψ é consequência lógica (ou semântica) de φ_1 e φ_2

$$\varphi_1, \varphi_2 \models \psi$$

Formas normais

• **Forma normal prenex**

$$\forall x\ (P(x,a) \rightarrow \exists y\ Q(y,a))$$

$$\equiv \underbrace{\forall x}_{Q_1} \underbrace{\exists y}_{Q_2} \underbrace{(P(x,a) \rightarrow Q(y,a))}_{\psi} \qquad \text{FNP}$$

$x_1 \rightarrow y_1$

$x_2 \rightarrow y_2$

...

• **Forma normal de Skolem**

$$\forall x\ \exists y\ (P(x,a) \rightarrow Q(y,a))$$

$$\equiv \underbrace{\forall x}_{\text{Quantificadores universais}}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{\psi}$$

↳ na FNC

(*) Como fazer a seguir

Movimentação dos quantificadores

Universal

- $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, Q(x)) \equiv \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$

- $\underbrace{(\forall x\, F(x)) \vee (\forall x\, G(x))}_{\varphi_1} \not\equiv \underbrace{\forall x\, (F(x) \vee G(x))}_{\varphi_2}$

Prova por contradição

Interpretação $D = \{1, 2\}$
(M, v)

F(1)	F(2)	G(1)	G(2)
1	0	0	1

$\longrightarrow$ Em (M, v): $\varphi_1 \equiv 0$
$\varphi_2 \equiv 1$
Logo: $\varphi_1 \not\equiv \varphi_2$

Existencial

- $(\exists x\, F(x)) \vee (\exists x\, G(x)) \equiv \exists x\, (F(x) \vee G(x))$

- $(\exists x\, F(x)) \wedge (\exists x\, G(x)) \not\equiv \exists x\, (F(x) \wedge G(x))$

Para resolver estes problemas:

Renomear variáveis:

$\to (\forall x\, F(x)) \vee (\forall x\, G(x)) \equiv \forall x\, \forall y\, (F(x) \vee G(y))$

$\to (\exists x\, F(x)) \wedge (\exists x\, G(x)) \equiv \exists x\, \exists y\, (F(x) \wedge G(y))$

Obter fórmulas na forma normal de Skolem

$\underbrace{\forall x_1\, \forall x_2 \ldots \forall x_n}_{\text{Quantificadores universais}}\ \underbrace{\psi}_{\text{FNC}}$

1.º caso:

$\exists y\, \forall x\, \forall z\ \ P(x, y, z)$

$y = a$ (constante de Skolem)

$\forall x\, \forall z\ P(x, a, z)$

FNS

2.º caso:

$\forall x\, \exists y\, (P(x, y) \to Q(y, a))$

constante

$x_1 \to y_1$
$x_2 \to y_2$
$\ldots$
$x_n \to y_m$

$y = f(x)$ (função de Skolem)

1 argumento

FNS

$\forall x\, (P(x, f(x)) \to Q(f(x), a)) \equiv \forall x\, \underbrace{(\neg P(x, f(x)) \vee Q(f(x), a))}_{\text{1 cláusula}}$

3.º caso:

$\exists x \forall y \forall z \exists w \; P(x,y,z,w)$

$x = a$ (constante de Skolem)

$w = f(y,z)$ (função de Skolem)

2 argumentos

$\forall y \forall z \; P(a,y,z,f(y,z))$

FNS

$W = \{P(x,a), P(y,a), P(z,a)\}$

$W\sigma = \{P(x,a)\}$

$\sigma = \{x/y, x/z\}$

Unificação (juntar as expressões, com substituições)

$W = \{P(x,a), P(y,a)\}$ ou $w = \{P(x,a), P(y,a)\}$

$W\sigma_1 = \{P(x,a)\}$ $w\sigma_2 = \{P(y,a)\}$

Fazendo:

$\sigma_1 = \{\underbrace{x/y}\}$ $\sigma_2 = \{y/x\}$

No lugar de y ficou x

↳ **Substituição de variáveis em termos e em fórmulas:**

$\sigma = \{t_1/v_1, t_2/v_2, t_3/v_3, \dots, t_m/v_m\}$

Ex: Predicado com 3 argumentos: $P(x,y,z)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sigma : \{\text{variáveis}\} \rightarrow \{\text{termo}\} \\ \hat{\sigma} : \{\text{termos}\} \rightarrow \{\text{termos}\} \end{array}}$$

Ex₁:

$P(x,y,z)$, $\sigma = \{c/x, f(z)/y, \cancel{z/z}\}$ → não é necessário

$= c$ $= f(z)$ $= z$

$\hat{\sigma}(P(x,y,z)) = P(\hat{\sigma}(x), \hat{\sigma}(y), \hat{\sigma}(z))$

$= P(c, f(z), z)$

Ex₂:

$D = \{\text{Humano}\}$

MaisAlto(x,y)

Pai(x,y)

Irmão(x,y)

expressões

$E_1 \equiv$ MaisAlto$(x,y) \wedge$ Pai(y,x)

$E_2 \equiv$ Irmão$(x,z) \wedge$ MaisAlto(z,x)

$\sigma = \{\text{Pedro}/x, \text{António}/y, \text{Ana}/z\}$

$E_1\sigma =$ MaisAlto(Pedro, António) $\wedge$ Pai(António, Pedro)

$E_2\sigma =$ Irmão(Pedro, Ana) $\wedge$ MaisAlto(Ana, Pedro)

$W = \mathcal{E} = \{E_1, E_2\}$, $W\sigma = \{E_1\sigma, E_2\sigma\}$

slides utilizam $\mathcal{E}$

tal que:

$= \{E\sigma \mid E \in W\}$

• Conjunto de expressões (termos, fórmulas)

Não confundir!

Para a substituição vazia: $\varepsilon = \emptyset$ ↳ $\{\}$

$E_1 \varepsilon = E_1$

Composição de substituições

Utilizando exemplo anterior ±:

$\sigma = \{A/x, Pai(x,z)/y\}$

$\theta = \{Irmão(y,A)/x, B/z\}$

θ após σ

$E = MaisAlto(x,y)$

$\boxed{\theta \triangle \sigma}$

primeiro faz-se o sigma!

$\theta \triangle \sigma \neq \sigma \triangle \theta$

$E(\theta \triangle \sigma) = (E\sigma)\theta$

$E\sigma = \{MaisAlto(A, Pai(x,z))\}$

$(E\sigma)\theta = \{MaisAlto(\underbrace{\hat{\theta}(A)}_{A}, Pai(\underbrace{\hat{\theta}(x)}_{Irmão(y,A)}, \underbrace{\hat{\theta}(z)}_{B}))\}$

$= \{MaisAlto(A, Pai(Irmão(y,A), B))\}$

E se quisermos $E(\sigma \triangle \theta)$?