Aula 02

Notação
Importante

$\boxed{p, q, r \text{ são variáveis proposicionais}}$

①

$(p \wedge (\neg p)) \rightarrow q$

Sempre Falso

Taltologia

Implicação

$\equiv \neg(p \wedge (\neg p)) \vee q$

De Morgan / Dupla negação

$\equiv (\neg p \vee p) \vee q$

$\equiv 1 \vee q$

$\equiv 1$

Taltologia ✓

implicação

Lembrar que: $\boxed{p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q}$

! Estas formulas não estão no slide 26!

Lei da Absorção

$\boxed{p \vee (p \wedge q) \equiv p}$ ou $\boxed{p \wedge (p \vee q) \equiv p}$

$p \mapsto 0$

$0 \vee (\underbrace{0 \wedge q}_{0}) \equiv 0$

$p \mapsto 1$

$1 \vee (1 \wedge q) \equiv 1$

②

$(p \wedge q \wedge r) \vee \underline{(p \wedge r) \vee r}$

abs.

$\equiv (\underbrace{p \wedge q}_{\varphi} \wedge r) \vee r$

abs.

$\equiv r$

Outras leis:

"Basta pensar que para a implicação não ser uma tautologia verificamos para "$\underbrace{1 \rightarrow 0}$", caso se verifique não é igual a 1"

"Caso que não deveria acontecer"

$(p \wedge q) \rightarrow p \equiv 1$

$(p \wedge q) \rightarrow q \equiv 1$

Simplificação

$p \rightarrow (p \vee q) \equiv 1$ Adição

Modus Ponens (modo que afirma)

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

tautologia

$\equiv (p \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow q$

?

Quais leis?

$\equiv \underbrace{(p \wedge (\neg p))}_{0} \vee (p \wedge q) \rightarrow q$

?

$\equiv (p \wedge q) \rightarrow q$

Simplificação

$\equiv 1$

Modus Tollens (modo que nega)

$$((p \to q) \wedge (\neg q)) \to \neg p$$ → Fácil de pensar e entender

Tautologia

$$((a \to c) \wedge (\neg c)) \to \neg a$$

Se ele foi a Aveiro então comprou ovos moles (a = ele foi a Aveiro, c = comprou ovos moles)

- Ele não comeu ovos moles ⟹ Logo, ele não foi a Aveiro

Dedução correta

+ Importante!

Forma normal Conjuntiva (FNC)

$$\varphi = \underbrace{\varphi_1} \wedge \underbrace{\varphi_2} \wedge \dots \wedge \underbrace{\varphi_n}_{\text{Cláusula}}$$

Cada cláusula

$$\varphi_i = \underbrace{L_1} \vee \underbrace{L_2} \vee \dots \vee \underbrace{L_K}_{\text{Literal}}$$

Forma normal Disjuntiva (FND)

$$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \dots \vee \varphi_n$$

$$\varphi_i = L_1 \wedge L_2 \wedge L_3$$

Ex:.

$$\varphi \equiv \underbrace{(\text{sol} \vee \text{casa})}_{\varphi_1} \wedge \underbrace{(\text{frio} \vee \text{passear})}_{\varphi_2} \wedge \underbrace{\neg\text{casa}}_{\varphi_3}$$

//

$$\varphi = (\text{neva} \wedge \text{frio}) \vee (\neg \text{frio}) \vee (\neg \text{passear})$$

FNC e FND:
(está nos dois)

$$\underbrace{p \wedge q \wedge r}_{\varphi_1} \quad \text{FND}$$

$$\underbrace{p}_{\varphi_1} \wedge \underbrace{q}_{\varphi_2} \wedge \underbrace{r}_{\varphi_3} \quad \text{FNC}$$

Também se aplica:

$$\underbrace{p}_{\varphi_1} \vee \underbrace{q}_{\varphi_2} \vee \underbrace{r}_{\varphi_3}$$

$$\underbrace{p \vee q \vee r}_{\varphi_1}$$

Conjunto de fórmulas consistentes

- Existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ em 1

Ex:. $\mathcal{C} = \{\neg p, \; p \to q, \; q\}$

Para $p \mapsto 0$

$q \mapsto 1$

$\mathcal{C} = \{\text{chove}, \; \neg\text{chove} \to \text{passear}, \; \neg\text{passear}\}$

I_1:

uma interpretação para as fórmulas de $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} \text{chove} \mapsto 1 \\ \text{passear} \mapsto 0 \end{cases}$$

Fórmula consequência (semântica ou lógica) → "Usar na lógica a consequência das afirmações verdadeiras"

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n \models \underbrace{\psi \equiv 1}_{\substack{\text{Conseq. lógica} \\ \text{de } \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n}}$$

Se

- Existe uma interpretação I para a qual

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n$ têm o valor 1,

Então

- ψ tem valor 1 em I

Exs:

Este tem de ser verdade

$$a \to b, a \models b$$

a	b	a → b
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

I

$$\boxed{\varphi \to \psi, \psi \to \theta \quad \dots \quad \varphi \to \theta}$$

$$\boxed{\models \neq \vdash}$$

Teorema:

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \models \psi$ se e só se $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$ é inconsistente

Ex:.

Modus Ponens

$(a \to b) \wedge a \models b$ se e só se $\overbrace{\neg a \vee b}^{\varphi_1}, \overbrace{a}^{\varphi_2} \models \overbrace{b}^{\psi}$

$$\neg\Big[\underbrace{\big((a \to b) \wedge a\big) \to b}_{\text{Tautologia}}\Big] \equiv \emptyset \quad \text{Contradição (inconsistente)}$$

Implic

$$\equiv \neg\Big(\neg\big((a \to b) \wedge a\big) \vee b\Big)$$

De Morgan

$\equiv ((a \to b) \land a) \land \neg b$

$\equiv (\underbrace{(\neg a \lor b)}_{\varphi_1} \land \underbrace{a}_{\varphi_2}) \land \underbrace{\neg b}_{\neg\psi}$ ← Se isto for inconsistente...

⊛ Regra da resolução

$\varphi \equiv \underbrace{(a \lor b)}_{c_1} \land \underbrace{\neg a}_{c_2}$

$c_1 : a \lor b$

$c_2 : \neg a$

$c_3 : b \quad Res(c_1, c_2)$

FNC

$\varphi \equiv \underbrace{(a \lor b)}_{c_1} \land \underbrace{(\neg b \lor c)}_{c_2}$

$c_1 : a \lor \cancel{b} = b \lor a$

$c_2 : \cancel{\neg b} \lor c$

$c_3 : a \lor c \quad Res(c_1, c_2)$

Método de Resolução

1.- Converter $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ para FNC

2.- Negar a conclusão (consequência) ψ
converter $\neg\psi$ na FNC

3.- Aplicar a regra da Resolução ⊛
às cláusulas obtidas até se obter $\underbrace{\bot}_{\text{cláusula vazia}}$ (falso)
ou
não se pode aplicar a regra da resolução e neste caso não se verifica: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ (é falso)