MPEI 2023-2024

Variáveis Aleatórias

Motivação

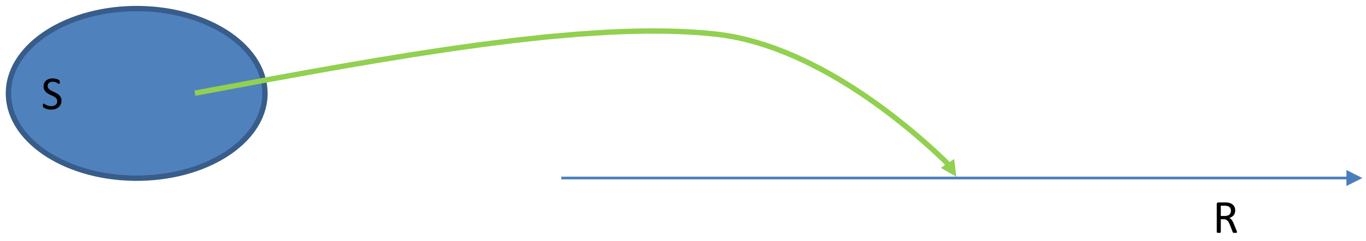
- A probabilidade é uma função sobre eventos (conjuntos)
- Utilização das ferramentas da análise matemática (ex: derivação) não é imediata
  - Especialmente se os resultados da experiência não forem números

- Se conseguirmos **mapear o espaço de amostragem (*S*) para a reta real** facilita o uso das ferramentas de análise e aritmética

- Na maioria dos casos o mapeamento não é artificial
  - Muitas vezes não nos interessa os eventos mas uma grandeza numérica relacionada
    - Exemplo: número de caras em N lançamentos de uma moeda

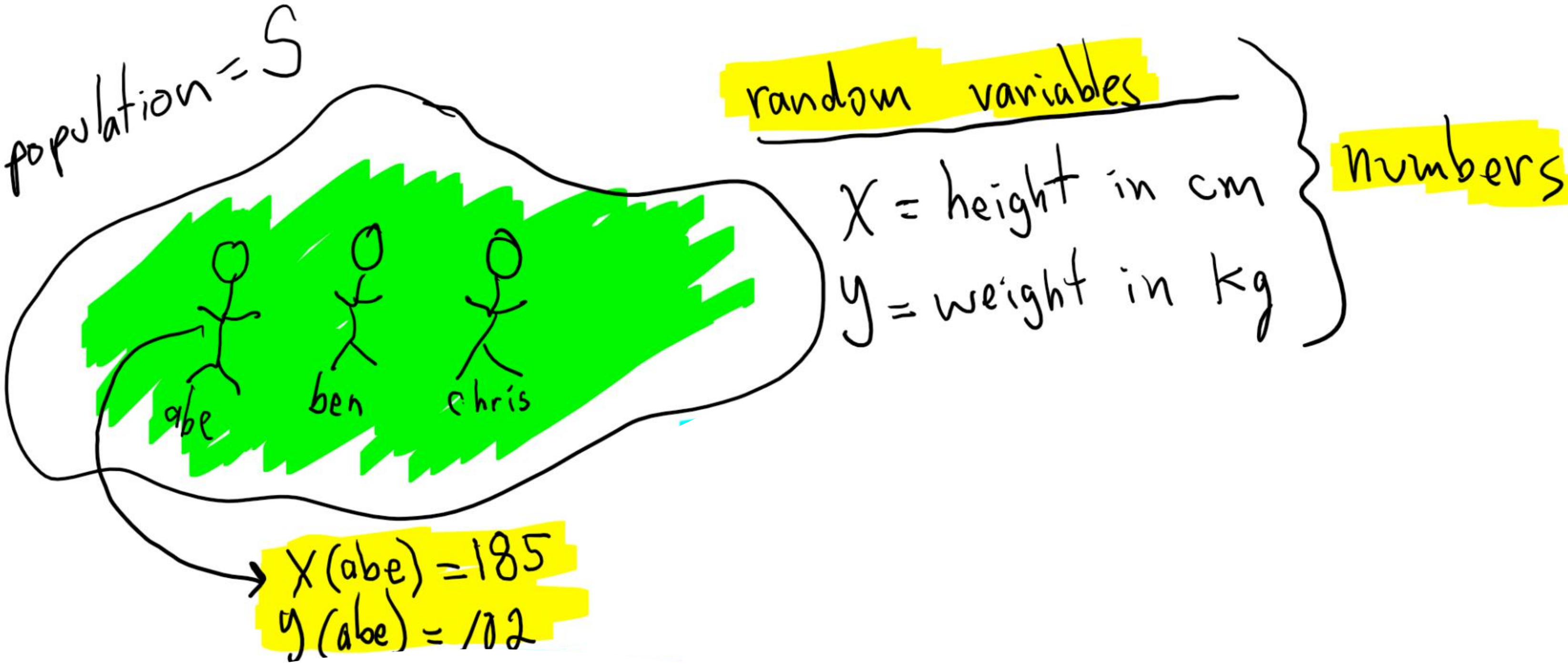
Conceito de variável aleatória

- Uma função que mapeia o espaço de amostragem na recta real é designada de **VARIÁVEL ALEATÓRIA**
  - *Random Variable* em Inglês



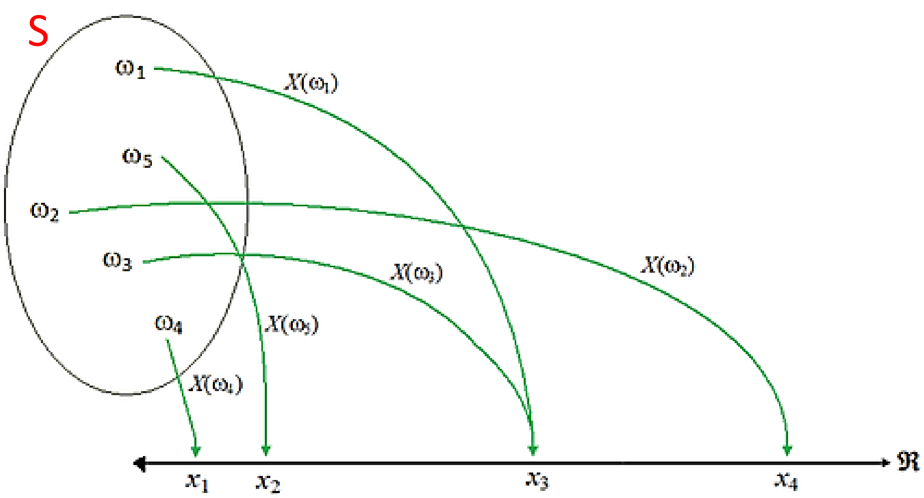
- Numa definição “informal”:
- uma Variável Aleatória é o resultado numérico das nossas experiências (aleatórias)

Exemplos de Variáveis aleatórias



Variável Aleatória - Definição

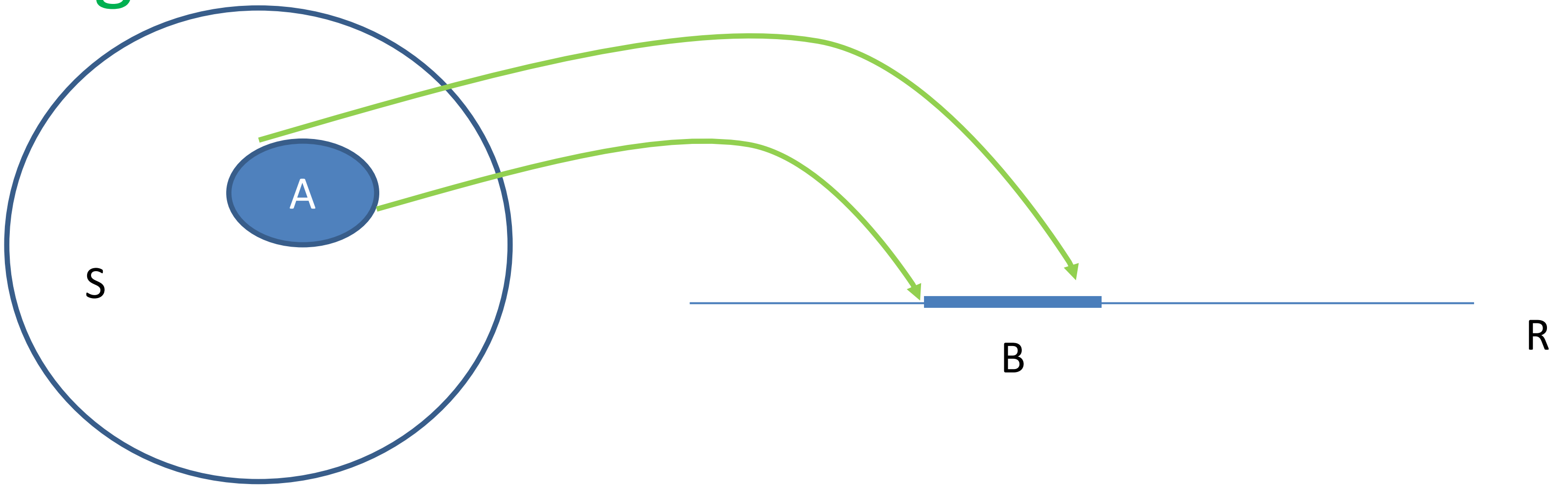
- Uma variável aleatória escalar X é formalmente definida como sendo um mapeamento de um espaço amostral S para a recta real



  – A qualquer elemento ω de S associa-se uma imagem $X(\omega)$ na recta real

Caso contínuo

- Se os conjuntos que representam os eventos forem contínuos, o mapeamento é para um segmento da recta real



- *A* e *B* são acontecimentos equivalentes

Tipos de Variáveis aleatórias

- **Discretas**
  - se os valores que a variável aleatória pode assumir forem finitos → Não existe limites
    - ou infinitos mas contáveis
    - Exemplo: número de acessos por minuto a uma página web
- **Contínuas**
  - se os valores que pode assumir formarem um ou vários intervalos disjuntos é limitada!
    - Exemplo: Duração de uma aula no Zoom
- **Mistas**
  - onde se verificam os atributos que definem os 2 tipos anteriores ↳ ex: a chegada das pessoas às aulas

Tipos

- Discreta/contínua ou mista ?

VA	Tipo ? (D,/C,/M)
Número de palavras com erro numa página	C
Atraso com que chega às aulas TP	M → C : primeiros minutos; → D : depende ...
Número de caixas abertas no supermercado	C
Tempo de espera numa caixa de supermercado	D
Número de páginas relevantes para uma procura num motor de pesquisa (ex: Google)	D
Número de "bugs" num módulo de código	D
...	

↳ Não é facil!

Caracterização das variáveis aleatórias

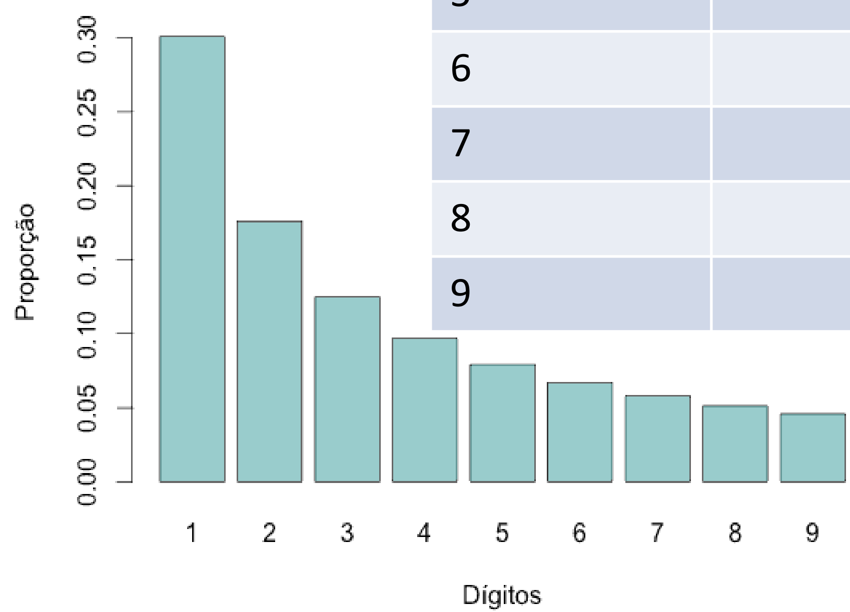
Parte 1

Distribuição de probabilidades

- As variáveis aleatórias são caracterizáveis por:
  - Conjunto de valores que podem assumir
  - E as probabilidades associadas

- Ou seja pela “distribuição de probabilidades”

Digito	Probabilidade
1	30,1
2	17,6
3	12,5
4	9,6
5	7,9
6	6,7
7	5,8
8	5,1
9	4,6



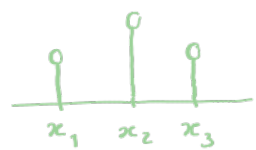
Função (massa) de probabilidade

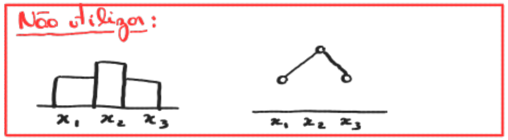
- Uma variável aleatória discreta escalar $\boldsymbol{X}$ é especificada por:

1. Conjunto de valores que pode assumir: $x_i, i = 1,2, \ldots$

2. Probabilidade associada a cada um desses valores: $\boldsymbol{p_X(x_i)}$
   - **Denominada de função massa de probabilidade**
     - **Probability Mass Function em Inglês**
   - **ou mais simplesmente $\boxed{\text{função de probabilidade}}$**

$$\boldsymbol{p_X(x_i) = P(X = x_i)}$$





Todos os valores 1,2,...

Onde $\boldsymbol{P(X = x_i) = P(w : X(w) = x_i)}$

Função de probabilidade

- Os axiomas da probabilidade implicam:

- $\boldsymbol{p_X(x_i) \geq 0}$

- $\boxed{\sum_i p_X(x_i) = 1}$ → confirmar sempre

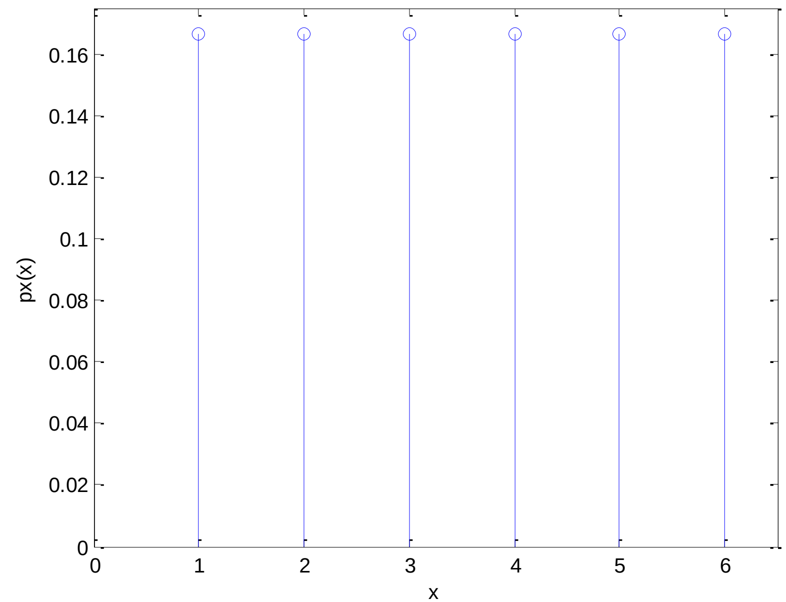
Exemplo de função de probabilidade

- Lançamento de dado equilibrado e $\boldsymbol{X}$ igual ao número que sai
- $\boldsymbol{X}$:Variável aleatória discreta

- *Função de probabilidade*

  x_i={1,2,3,4,5,6}

  $\boldsymbol{p_X(x_i)}$=1/6



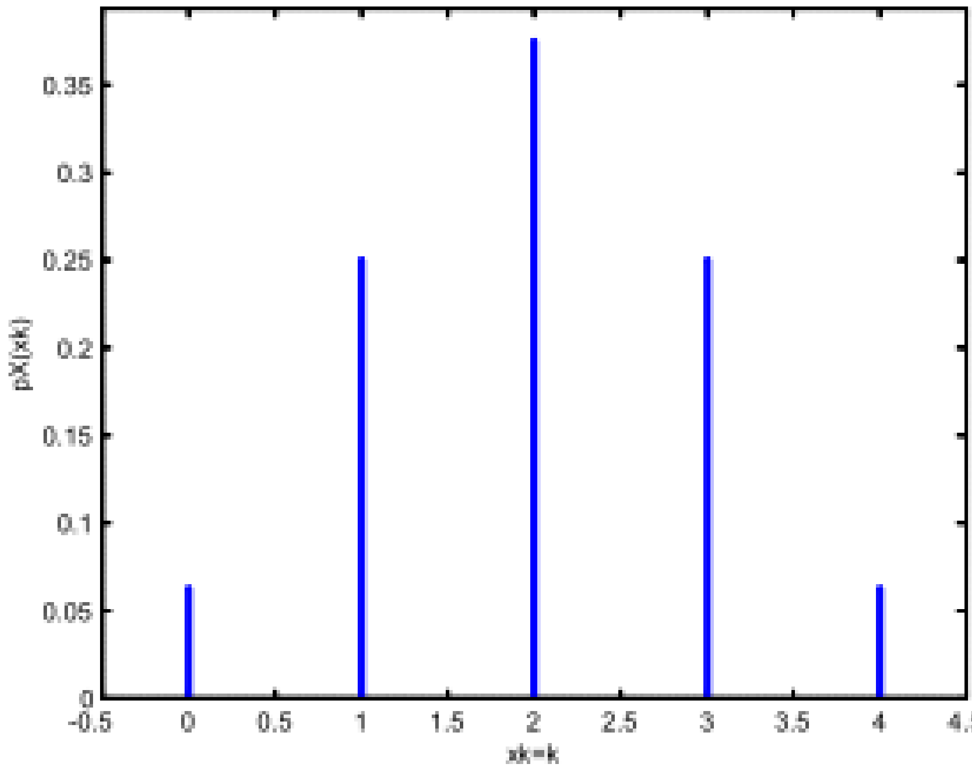
- %% Matlab

```
xi = 1:6; p=ones(1,6)/6;
stem(xi,p), xlabel('x'), ylabel('px(x)');
```

• equiprováveis!

Outro exemplo de função massa de probabilidade

variável aleatória representando o número de “caras” em 4 lançamentos de uma moeda

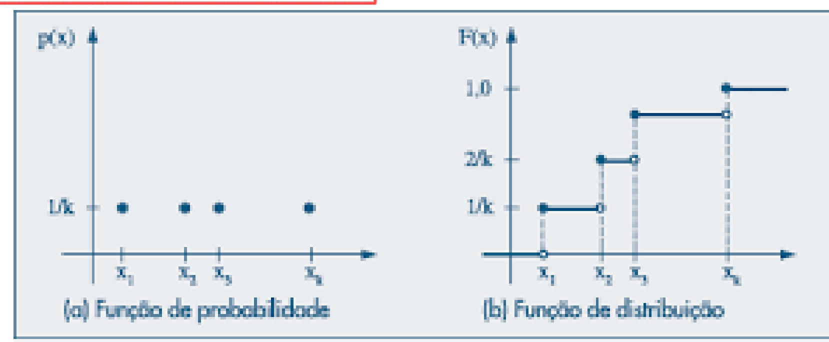


Função distribuição acumulada (discreta)

- Uma variável aleatória (discreta) pode ser também especificada pela sua função distribuição acumulada (fda), definida como
- $\boxed{F_X(x) = \boldsymbol{p_X(X \leq x)} = \sum_{i:x_i \leq x} p_X(x_i)}$

↳ ex: probabilidade das pessoas terem um peso menor ou igual a 80 kg

⇒ Soma dos $p_x(x \leq 80)$



(a) Função de probabilidade (b) Função de distribuição

- Dos axiomas e corolários:

É uma função não decrescer

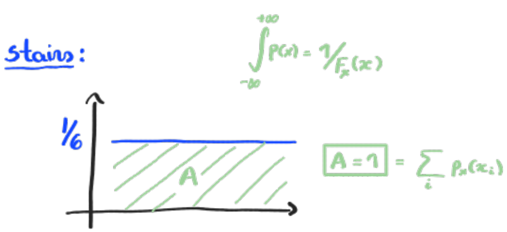
↳ é acumuladora

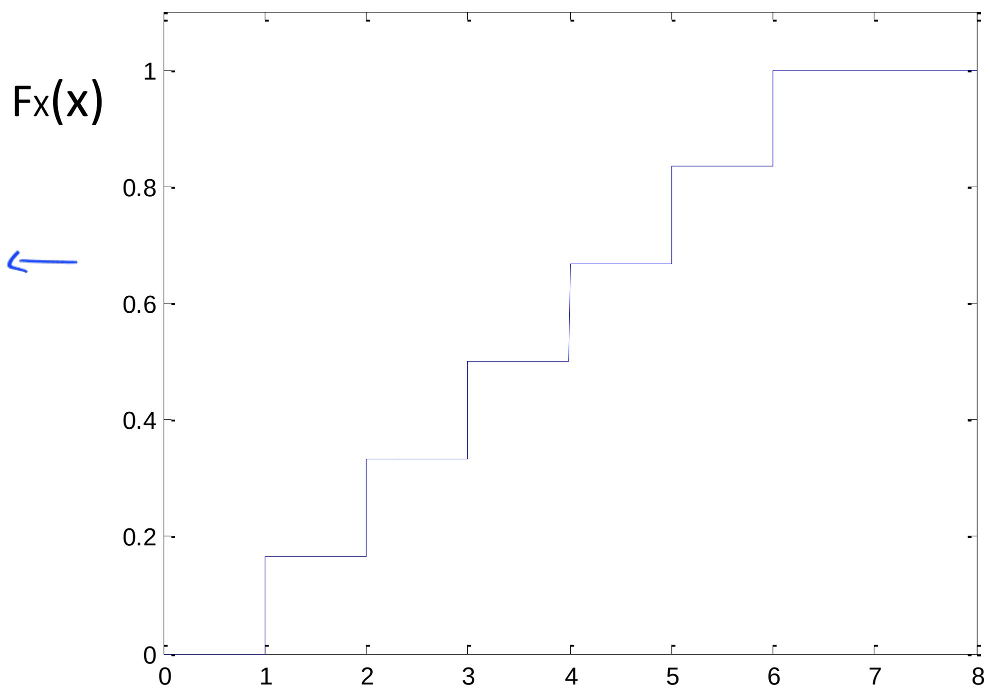
$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

Exemplo de função de distribuição

- Para uma variável aleatória discreta a função distribuição acumulada é uma função em escada





Variáveis aleatórias contínuas

- Também pode ser especificada pela sua função distribuição acumulada
- A definição é idêntica para o caso contínuo e discreto

$$F_X(x) = Prob(X \leq x)$$

- $F_X(x)$ é agora contínua

- Propriedades:

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

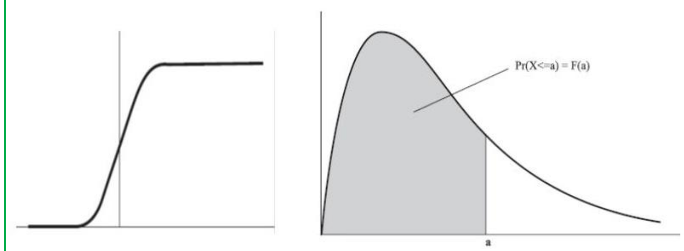
$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\boxed{a < b \Rightarrow F_X(a) \leq F_X(b)}$$ → Função não decrescente

$$\boxed{\boldsymbol{P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)}}$$ → Para fazer intervalos!

Função de distribuição acumulada

FX(x) = Pr (X ≤ x)



$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du,$$

Variáveis aleatórias contínuas

- Podem ser especificada pela sua função de densidade de probabilidade $f_X(x)$

    Probability density function (pdf) em Inglês

- Obtém-se derivando a função de distribuição

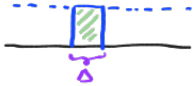
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

→ é sempre preciso um certo delta

$P(X = x) = 0$

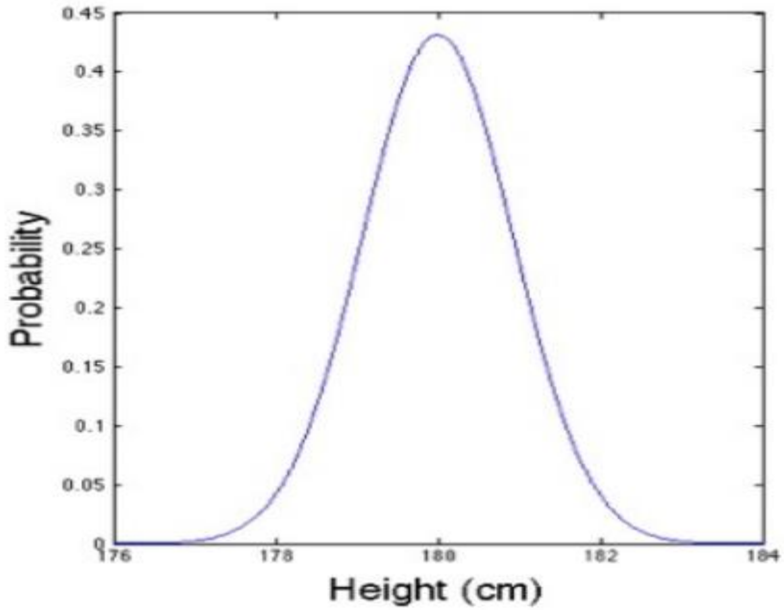
$\hookrightarrow f_x(x) = 0 = \underbrace{F(x) - F(x)}$

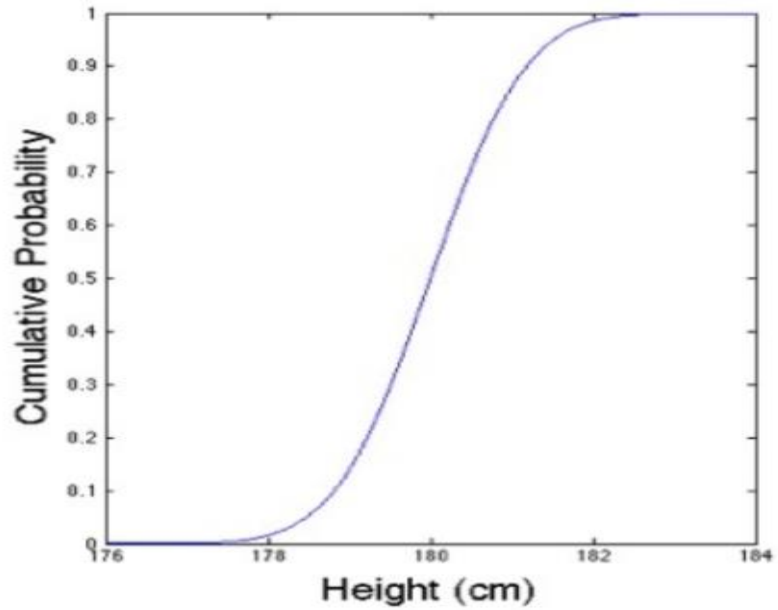
$f_x(x) \times \Delta \Rightarrow F(x+\Delta) - F(x)$



Relações entre funções de densidade e de distribuição (caso contínuo)

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$
- Exemplo de par de funções de densidade e de distribuição





Função de DENSIDADE de probabilidade

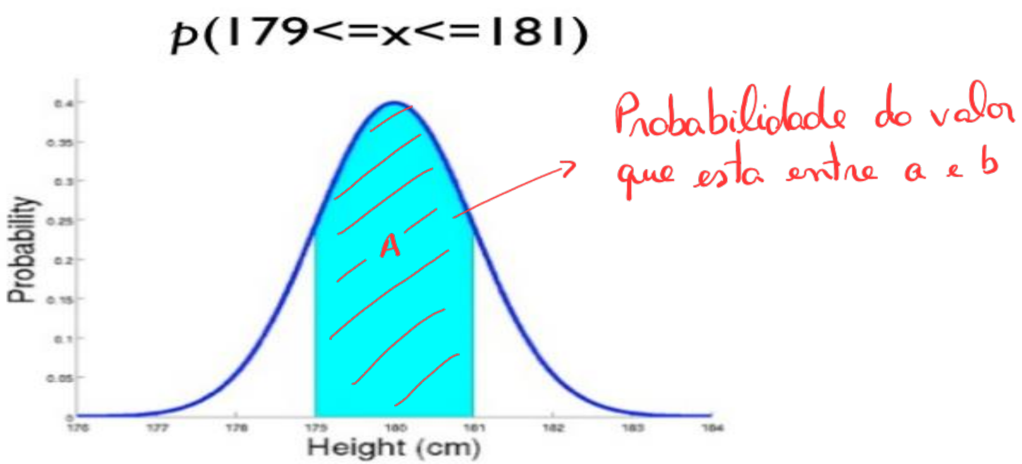
- $f_X(x)$ não é uma probabilidade …
  - Apenas define os valores de probabilidade quando integrada num intervalo
    - $p(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx$

- $f_X(x)dx$ é a probabilidade da variável $\boldsymbol{X}$ pertencer ao intervalo $(x, x + dx)$, sendo dx um acréscimo infinitesimal

- $f_X(x) \equiv \frac{prob}{dx}$ → daí o nome "densidade"

Probabilidades e função de densidade

- $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$



- A probabilidade é a área debaixo da curva
- $\boxed{\text{Área total da curva} = 1}$

Caracterização das variáveis aleatórias

Parte 2

Motivação

- As funções apresentadas anteriormente fornecem uma descrição completa de uma variável aleatória

- Mas em muitos casos não necessitamos de toda a informação
  - Exemplo:
    - no caso dos “bugs” em módulos de código saber o valor médio pode ser suficiente

Média ou Valor esperado

- Consideremos *N* lançamentos de um dado

Ex: 4 1 6 6 5 5 5 3 4 2 …

$\frac{N_1 \times 1 + N_2 \times 2 + N_3 \times 3 + \dots + N_6 \times 6}{\alpha} \Rightarrow p(1) \times 1 + p(2) \times 2 + \dots = \sum p(x_i)\, x_i$

$p(1)$

<u>Para um dado equilibrado:</u>

$\text{média} = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \dots$

$= \frac{1}{6} \times 21 = 3.5$ // Faz sentido!

Média = (1+1+..1 + 2+2+…+2 + …) / *N*

= (numDe1s x 1 + numDe2s x 2 …) /*N*

= numDe1s/*N* x 1 + NumDe2s/*N* x 2 + …

Assumindo que N tende para infinito

= p(1) x 1 + p(2) x 2 + p(3) x 3 … +p(6) x 6

$= \sum_i \boldsymbol{p(x_i) x_i} \qquad com\ x_i = 1,2, \dots 6$

Valor esperado

- Formalizemos um pouco mais …

- Dizemos que o valor esperado de $\boldsymbol{X}$ é o valor médio de $\boldsymbol{X}$ ao repetirmos as experiências indefinidamente
  - É representado por E[X]

- Sendo X_i o valor da v. a. $\boldsymbol{X}$ na experiência i, este valor é:

variável aleatória

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

Valor esperado (continuação)

- Representando por x_i os m diferentes valores que X_i pode assumir e por $K_{i,n}$ o número de vezes que ocorre cada x_i , o nosso limite passa a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1\, K_{1,n} + x_2\, K_{2,n} + \cdots + x_m\, K_{m,n}}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \lim_{n\to\infty} \frac{K_{i,n}}{n} = \boxed{\sum_{i=1}^{m} x_i\, P(X = x_i\,)}$$

Valor esperado

- Só existe valor esperado se existir o limite

- O limite existe se X_i tiver limite inferior e superior finitos, o que é verdade no mundo real
  - Ex: o peso de uma pessoa nunca é negativo

Valor esperado

- O termo “valor esperado” é algo enganador…
- Não é na realidade algo que devemos esperar que ocorra
  - Pelo contrário, muitas vezes é muito pouco provável ou mesmo impossível de ocorrer
    - Exemplo: valor médio do lançamento do dado (=3,5)

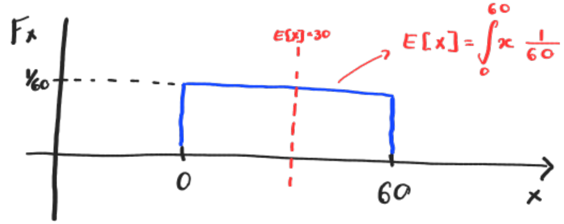
- Apesar desta dificuldade com o seu nome, o valor esperado desempenha um papel central em Probabilidades e Estatística

Valor esperado : E[X]

é igual ao valor médio!

- No caso discreto: $\boxed{E[X] = \sum_i x_i \, p(x_i)}$

- No caso contínuo: $\boxed{E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_X(x) dx}$



$$E[x] = \int_0^{60} x \frac{1}{60} dx = \frac{1}{60} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{60} = \frac{60^2}{120} = \frac{\cancel{60^2}}{\cancel{60} \times 2} = 30$$

Propriedades do valor esperado

- E[X] é um operador linear

Sendo a e c constantes ($\in R$) e X e Y variáveis aleatórias:

$E[aX] = a\,E[X]$

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

$E[X+c] = E[X] + c$

Exemplo de cálculo de E[X]

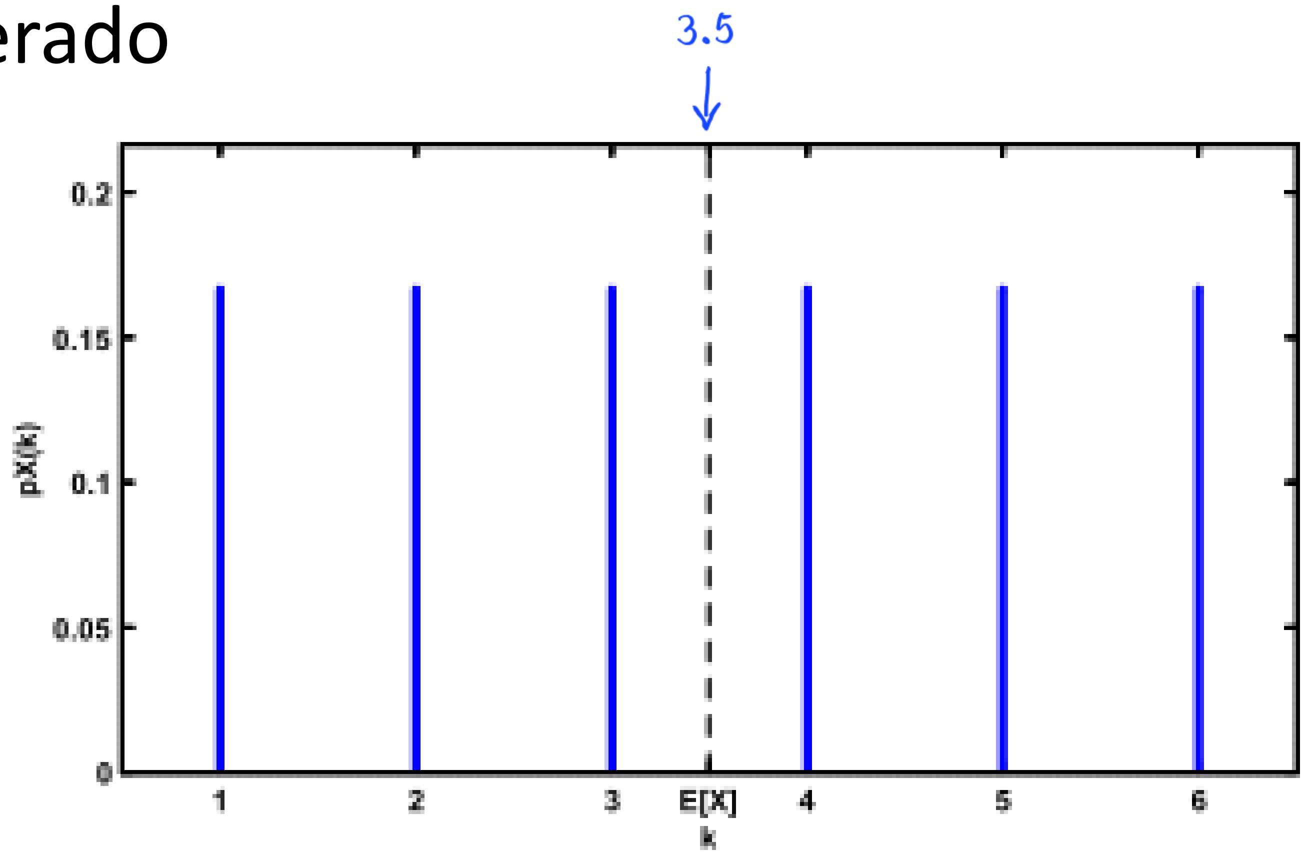
x_i	$p_X(x_i)$	$x_i\, p_X(x_i)$
-1	0.1	-.1
0	0.2	.0
1	0.4	.4
2	0.2	.4
3	+0.1	.3
	1.0	**1.0**
	Verificação ✓	

$\boxed{\sum p(x_i) = 1}$

$\boxed{E[X] = 1.0}$

Exemplo: lançamento de 1 dado

- Função de probabilidade para o resultado do lançamento de uma dado e respetivo valor esperado



Outro exemplo:

$$E[x] = \sum x_i \, p_x(x_i)$$
$$= 1\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3} + 3\times\frac{1}{3}$$
$$= 6\times\frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$E[x^2] = \sum x_i^2 \, p_x(x_i)$$
$$= 1\times\frac{1}{3} + 4\times\frac{1}{3} + 9\times\frac{1}{3}$$
$$= \frac{14}{3}$$

$$E^2[x] = 4 \implies Var(x) = E[x^2] - E^2[x] = \frac{14}{3} - \frac{8}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

↳ desvio $= \sqrt{2}$

A Média pode não ser suficiente

- Se pretendermos comparar as classificações de duas turmas práticas de MPEI é suficiente sabermos a média ?

- Posso ter a mesma média e turmas muito diferentes:
  - Uma turma com a generalidade dos alunos próximos dessa média
  - Outra turma com classificações muito mais dispersas entre 0 e 20

- Uma medida dessa "dispersão" é dada pela variância

Variância

- Ideia base:

  Usar a diferença dos valores da variável para a média (valor esperado) e fazer a sua média

- Para evitar o cancelamento de diferenças negativas e positivas, em vez de usar diretamente o valor da diferença utilizar o seu valor ao quadrado

- $Var(X) = E[\quad (X - E(X))^2 \quad]$

Variância

- Aplicando a definição de valor esperado temos:
- var(X)=σ^2 = $\sum_i [\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X})]^{\boldsymbol{2}}\; p(x_i)$

- Propriedade importante:

$$\boxed{\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X]}$$

!

  – Demonstra-se facilmente de $E[(X - E(X))^2]$ usando as propriedades de E[X]

  – Facilita muitos cálculos, evitando uso direto da definição

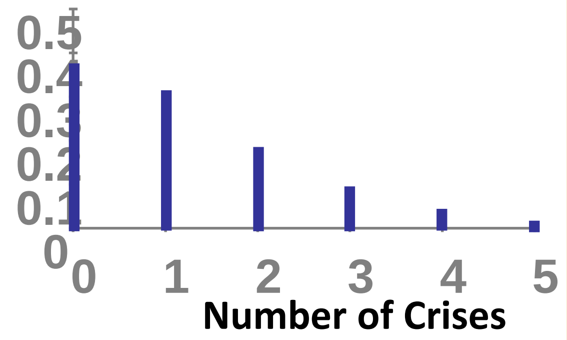
Desvio padrão

- A raiz quadrada da variância é o desvio padrão

$\sqrt{var(X)}$

- Muitas vezes representado por σ

Exemplo (discreto)



xi	p(xi)	(xi-μ)	$(xi-E(X))^2$	$(xi-E(X))^2$ p(xi)
0	.37	-1.15	1.32	.49
1	.31	-0.15	0.02	.01
2	.18	0.85	0.72	.13
3	.09	1.85	3.42	.31
4	.04	2.85	8.12	.32
5	.01	3.85	14.82	.15
				1.41

Variância - propriedades

- Sendo X uma variável aleatória e c uma constante :

- Soma de uma constante:

  $\mathrm{var}(X+c)=\mathrm{var}(X)$

- Multiplicação por um factor de escala

  $\mathrm{var}(c\,X) = \boxed{c^2}\,\mathrm{var}(X)$

Média e variância - interpretação

- E[*X*] pode ser interpretado como:
  - Valor médio de X
  - Centro de gravidade da função massa de probabilidade (caso discreto) ou função de densidade de probabilidade

    $P_X(x_i)$

    $F_X(x_i)$

- Desvio padrão / Variância dá uma medida da dispersão da variável aleatória
  - Pequenos valores indicam var. aleatória muito concentrada em torno da média
    - Se for zero não temos var. aleatória (todos valores iguais à média)

Momentos de ordem *n*

- Os conceitos de média e variância podem ser generalizados …

- Momento de ordem n (caso discreto):

$$m_n = E[X^n] = \sum_i \boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{n}} p_X(x_i)$$

Apareceu em
var(X)= $E[X^2] - E^2[X]$

- Exemplo (dados)

$$E[X^2] = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \frac{1}{6} + 3^2 \frac{1}{6} + \ \ldots$$

$$= \frac{1+2+4+9+16+25+36}{6} = \ 15{,}1667$$

Momentos centrados de ordem *n*

- A generalização da variância resulta nos momentos centrados de ordem *n*

- $E[(X - E[X])^n] = \sum_i (x_i - E[X])^{\boldsymbol{n}} \; p_X(x_i)$

- A variância é o momento centrado de 2ª ordem

Exemplo de aplicação

- Qual o valor da variância dos valores obtidos no lançamento de um dado honesto ?

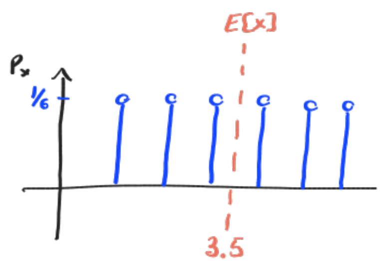
- var(X) ?
- $\text{var}(X) = E[X^2] - E^2[X]$
- $E[X^2] = ?$
- $E^2[X] = ?$

$E[x] = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$

$E[x^2] = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} + \frac{36}{6} = \frac{91}{6} \simeq 15.17$

$E^2[x] = 12.25$

$\text{Var}(x) = 15.17 - 12.25 \simeq 2.67$



Tópicos da aula (resumo)

- Variável aleatória (conceito e definição)

- Função massa de probabilidade e função densidade de probabilidade
- Função de distribuição acumulada

- Valor esperado
- Média e Variância
- Momentos

Para saber mais…

- Capítulo 4 do livro "Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática", F. Vaz e A. Teixeira, Ed. Sílabo, set 2021.

- Link(s)
  - http://www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/randomVariables.htm