Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2023-2024

Aleatório

- Em termos qualitativos, "qualquer coisa" que não seja previsível com certeza absoluta

- Acontecimento (evento) cujo resultado não possa ser determinado com certeza absoluta
  - Caso contrário é determinístico

- adj. Que repousa sobre um acontecimento **incerto**, fortuito: contrato aleatório.
  Diz-se de uma grandeza que pode tomar certo número de valores, a cada um dos quais está ligada uma probabilidade.
    - De: **dicionário online de português**

- http://www.priberam.pt/dlpo/aleat%C3%B3rio

Probabilidade

"Medida do grau de certeza associado a um resultado proveniente de um fenómeno de acaso"

- Palavra usada pela primeira vez por Bernoulli (1654-1705)

Então qual o interesse ?

- Qual o interesse em estudar algo que não se pode prever ?

- Na maioria das aplicações existe algum tipo de regularidade que se manifesta se o número de observações / experiências for elevado

Problema Exemplo 1

- Qual a probabilidade de acertar num PIN/**password** de 4 dígitos escolhendo um PIN completamente ao acaso?

E de 20 dígitos ?

$$P_N = \frac{1}{10^N}$$

dígitos

Experiência aleatória …

- **Experiência aleatória**
  - Procedimento que deve produzir um resultado
  - Mas mesmo que seja repetido nas mesmas condições não garante que o resultado seja idêntico
  - Resultado imprevisível
  - Exemplo:
    - Escolher aleatoriamente uma letra do alfabeto

Experiência aleatória ...

- A uma experiência aleatória são associados
  - Espaço de amostragem (conj. de resultados possíveis)
  - Conjunto de acontecimentos (ou eventos)
  - Lei de probabilidade

Espaço de amostragem

- Conjunto (S) de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória
  - Em geral representado por S (do inglês “Sample Space”)

- Resultados têm de ser mutuamente exclusivos e não divisíveis

- Discreto se for contável
  - i.e. se contiver um número finito de elementos ou se contiver um número infinito em que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos inteiros
- Contínuo se não for contável

- Elementos de S são designados por resultados elementares

Acontecimentos / eventos

- Os resultados elementares das experiências não constituem necessariamente os únicos itens de interesse nas experiências
  - Exemplo:
    - No caso da contagem de mensagens de email podemos estar interessados no facto de o número total exceder um determinado limiar (nº > L)

- **Acontecimento (evento)** A é um subconjunto de S
  - S é obviamente um subconjunto de si próprio e constitui o evento certo
  - O conjunto vazio, ϕ, também é subconjunto e representa o evento impossível

Lei de probabilidade

- **Atribui probabilidade aos vários eventos**

- Probabilidade: número associado a um evento
  - que indica a "verosimilhança" de esse evento ocorrer quando se efetua a experiência
  - valor entre 0 e 1 (às vezes é usada a escala 0 a 100%)

    Não recomendado
    - 1 para acontecimento certo
    - 0 para acontecimento impossível

Cálculo de probabilidades

Como é que se definem/obtêm as probabilidades associadas a eventos ?

- Através de **medição**

- Através da construção de **modelos** probabilísticos

- Probabilidades **teóricas**

- Probabilidades **empíricas**

- Probabilidades subjetivas
  - Exemplo:
    - Um Médico diz que tem 95 % de certeza de que determinada pessoa tem uma determinada doença
    - Uma casa de apostas estimou em 1/5 a probabilidade de Portugal ser campeão Europeu em 2016
      - E fomos Campeões ☺
  - Não nos interessam nesta UC

Diferentes abordagens

- Teoria **clássica** (de Laplace)
  – Probabilidades teóricas

- **Frequencista**
  – Probabilidades empíricas

- Teoria **matemática**

Teoria Clássica

Noção clássica

Simon de Laplace (1749-1827)

- "*Pour étudiér un phénoméne, il faut réduire tous les evénements du même type à un certain nombre de cas également possibles, et alors la probabilité d'un événement donné est une fraction, dont le numérateur représente le nombre de cas favorables à l'événement e dont le dénominateur représente par contre le nombre des cas possibles*"
  - pg 17 livro "O Acaso"

- Primeiro reduzir o fenómeno a um conjunto de resultados elementares, **"casos", igualmente prováveis**

$$\boxed{P(acontecimento) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}}$$

Exemplo

- **Lançamento de 1 DADO**
  - Honesto
    - => qualquer face igualmente provável
- Probabilidade de obter certa face, ex: a 5 ? $\rightarrow \frac{1}{6}$
- 6 resultados ou <u>eventos elementares</u>
  - Representáveis pelo conjunto {1,2,3,4,5,6} $= S$
- Ao evento "saída da face 5" apenas corresponde um caso favorável

  --> P("face 5")=1/6

Variante do problema

- E se 2 faces tivessem o 5 marcado ?

- Espaço de amostragem ?
  - S={1,2,3,4,5} ?   => casos possíveis =5 ?
  - $S=\{1,2,3,4,\underbrace{\mathbf{5}_5,\mathbf{5}_6}_{\text{São diferentes!}}\}$

- P("sair 5")=2/6

Regras básicas (**OU**)

- P(“sair face maior que 4”) ?

  = P(“sair face 5 ou face 6”) = P({5,6}) = 2/6

  = P({5})+P({6})

- P(“face par”)=P({2})+P({4})+P({6})=1/2
- P(“qualquer face”) = 6 x 1/6 =1 // Acontecimento certo!

… $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sempre ??? → Apenas se $P(A \cap B) = 0$, A e B são disjuntos

Regras básicas

- P("face menor ou igual a 4")

  =1 – P("face maior que 4")

  = 1 – 2/6 = 4/6

Regra do **complemento**

$$\boxed{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

Regras básicas (E)

- P("face par E face menor ou igual a 4")=

  = P("face par") x P("face menor ou igual a 4")

  $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

  De facto existem 2 possibilidades em 6 , {2,4}

  … $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

  Sempre? ….

  (só se os acontecimentos forem independentes)

Aplicação das regras (OU novamente)

- P("face par OU face menor ou igual a 4") = ?

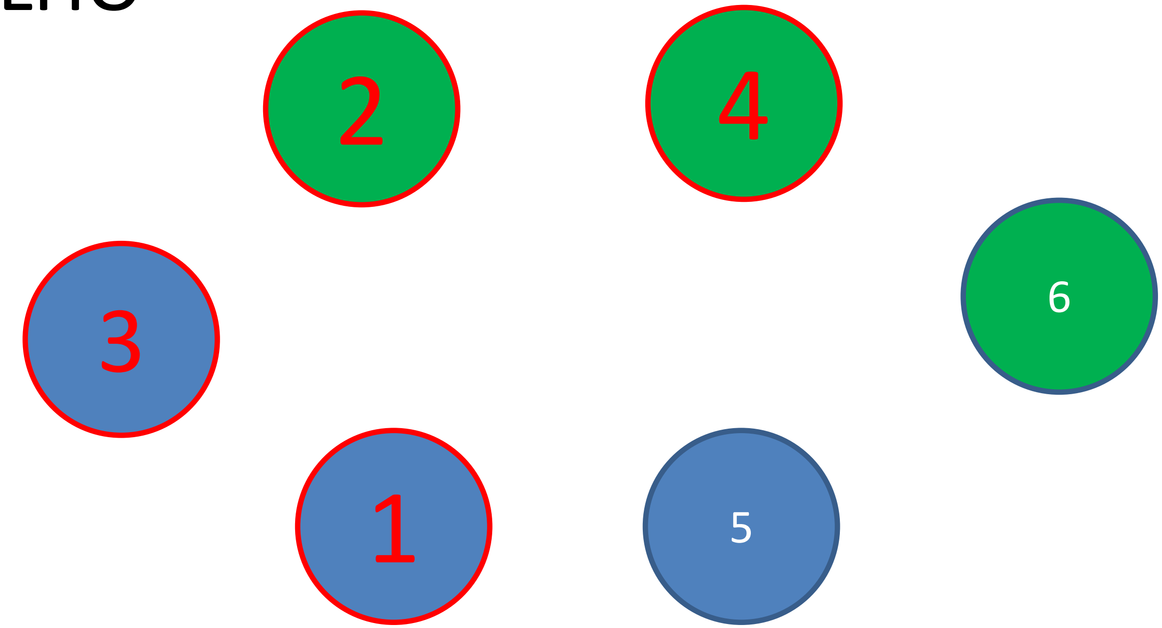
- Se fizermos P("face par")+ P("face menos ou igual a 4") dá 7/6 > 1 !!

Nota: no teste dizemos que está errado, dá sempre alguns pontos!

- Qual o erro ? → Não são disjunto ⇒ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Acontecimentos

- A="face par" e fundo VERDE
- B="face menor ou igual a 4" limite e texto a VERMELHO



...

Temos 3 com fundo verde => $P(A) = ½$

Temos 4 com vermelho => $P(B) = 2/3$

… mas temos 2 casos com fundo verde e limite e texto vermelho

- No mínimo perigoso ☺

- Estávamos a contar 2 vezes a intersecção

- $P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(A \cap B)$

  $= ½ + 2/3 - 2/6 = 3/6+4/6-2/6 = 5/6$

Testando as regras ...

- Considere uma **família com 2 filhos** e que a probabilidade de nascer um rapaz é igual à de nascer uma rapariga.

- Designando o nascimento de um filho por M e uma filha por F, qual a probabilidade de MF ?

$P(M) = P(F) = 0.5$ $\qquad$ MM FF / MF FM $\Rightarrow P(MF) = \frac{1}{4}$

- Qual a probabilidade de pelo menos 1 rapaz numa família com 2 filhos ?

MM ~~FF~~ / MF FM $\Rightarrow P = \frac{3}{4}$

Resolução

- Pelo menos 1 rapaz => MF ou FM ou MM

- MF é a intersecção (“e”) de M no primeiro e F no segundo = ½ * ½

- Similar para MM e FM

- P(MF) + P(MM) + P(FM) = ¾
  - Devido à união (“ou”)

Não esquecer

- Estas regras e definição clássica ASSUMEM dados honestos, moedas honestas, igual probabilidade de nascer rapaz e rapariga, equiprobabilidade para os eventos elementares

- Uma questão que surge naturalmente é se na prática tais valores são ou não razoáveis ?

Simples mas não perfeita

- Conceptualmente é extremamente simples e pode ser aplicada praticamente a todas as experiências

- Tem, no entanto, algumas desvantagens:
  – Em muitos casos requer considerável dispêndio de tempo
  – As experiências devem poder ser repetidas em condições idênticas
  – Quando o espaço amostral é infinito surgem questões de fiabilidade uma vez que só podemos efetuar um número finito de repetições da experiência
  – A própria obtenção dos valores coloca algumas questões:
    - Quantos ensaios se tem de efetuar para termos medidas fiáveis ?
    - Como se lida com medições sujeitas a erro ?