Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2023-2024

Abordagem Frequencista

Noção **Frequencista**

- Noção introduzida por De Moivre (1718)

- Repete-se a experiência um certo número de vezes (*N*)

- Determina-se o número de vezes que ocorre o acontecimento que nos interessa (k)
  - (ex: “sair face 5 num dado”)

- Determina-se $f=k/N$ → Como N é muito grande $f(A) \rightarrow p(A)$
  - ou seja a frequência relativa de ocorrência

- Usa-se esta frequência como uma medida empírica de probabilidade

Frequência relativa e probabilidade

- A frequência relativa do evento *A* é portanto:

$$f(A) = \frac{\#\ ocorrências\ do\ evento\ A}{N}$$

- Se a frequência relativa convergir quando *N* aumenta, então o limite da frequência relativa é a probabilidade de *A*

$$p(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{\#\ ocorrências\ de\ A}{N}$$

Frequência relativa (cont.)

- $0 \le f(A) \le 1$

- Numa experiência com K resultados possíveis em N experiências:
  - S= $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_K\}$
  - O resultado A_i ocorre N_i vezes
  - Cada um dos resultados possíveis terá uma frequência relativa de $f(A_i) = N_i/N$

  - $\sum_{i=1}^{K} f(A_i) = \frac{(N_1 + N_2 + \dots + N_K)}{N} = 1$

Exemplo em **Matlab**

- Probabilidade de **sair 2 caras em 3 lançamentos**

- Como se simula a experiência de lançar uma moeda ?

CCC OCC
CCO OCO
COC OOC
COO OOO

$\Rightarrow P = \frac{3}{8}$ (Teoria clássica)

- Como se simula a experiência de 3 lançamentos?
- Como se repete "muitas" vezes ?
- Como contar as ocorrências do evento ?

Simular lançamentos …

% simular 1 lançamento (de uma moeda)

lan= rand() <0.5 % assumiremos que 1 = "cara"

% simular os 3 lançamentos

lan_3= rand (3, 1) < 0.5   % ou l3 = rand(1,3) > 0.5

% repetir N vezes

N= 1e6   % mas comecem com valor pequeno

lancamentos= rand(3,N) < 0.5;   % importante o ";"

$$\text{3 lançamentos} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\text{N vezes}} \right.$$

ocorrências → freq. Relativa → prob

% contar num ocorrências de “2 caras”

% contar num caras (1s) em cada experiência

% (que se encontram numa coluna da matriz lancamentos)

```
numCarasNaExperiencia= sum (lancamentos);
```

! Por colunas [2 0 3 1 ... 0]

% contar vezes em que esse número de caras é 2

```
numOcorrencias =    sum (numCarasNaExperiencia ==2)
```

% calcular frequência relativa

```
fr  = numOcorrencias / N
```

% usar como estimativa da probabilidade

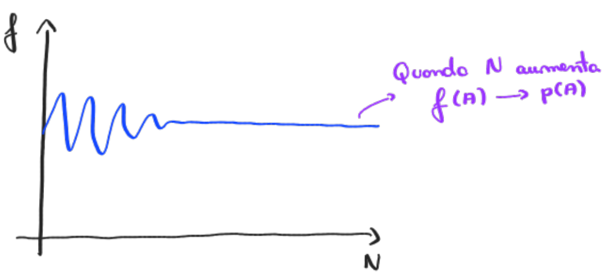
```
pA= fr
```

Variação com *N*

```
% variação da frequência relativa em função de N

N= 1e5
lancamentos = rand(3,N) < 0.5;
sucessos= sum(lancamentos)==2;  % 1 = sucesso
fabsol =  cumsum(sucessos);
frel = fabsol ./ (1:N);

plot(1:N, frel);
```



Simples mas não perfeita

- Conceptualmente é extremamente simples e pode ser aplicada praticamente a todas as experiências

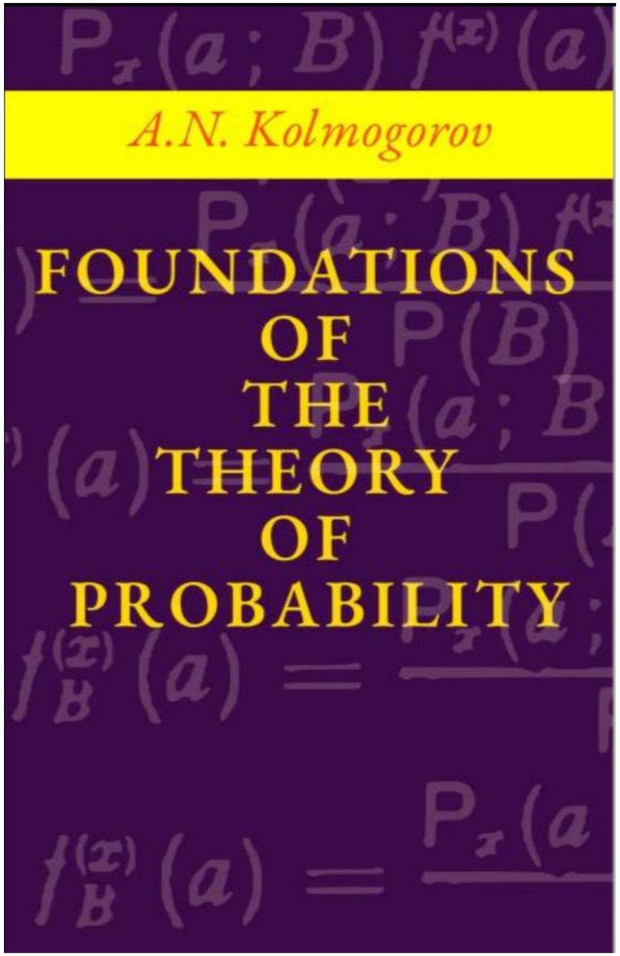
- Tem, no entanto, algumas desvantagens:
  - Em muitos casos requer considerável dispêndio de tempo
  - As experiências devem poder ser repetidas em condições idênticas
  - Quando o espaço amostral é infinito surgem questões de fiabilidade uma vez que só podemos efetuar um número finito de repetições da experiência
  - A própria obtenção dos valores coloca algumas questões:
    - Quantos ensaios se tem de efetuar para termos medidas fiáveis ?
    - Como se lida com medições sujeitas a erro ?

Teoria Axiomática de Probabilidade

Definição axiomática de probabilidade

- Em 1933, Kolmogorov estabeleceu a DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE POR AXIOMATIZAÇÃO
  – na sua obra Foundations of the Theory of Probability

- com base nas propriedades das frequências relativas e das operações sobre conjuntos



O que é uma axiomática?

Em determinado ponto da evolução de uma teoria de pensamento matemático, torna-se imperioso ordenar, sistematizar e relacionar todos os conhecimentos entretanto nela reconhecidos, isto é, proceder à sua **AXIOMATIZAÇÃO**

Axiomática de probabilidades

Os teoremas são derivados dos axiomas

- Axioma 1 - probabilidades são não-negativas
  P(A) > = 0
- Axioma 2 – normalização (S tem probabilidade 1)
  P(S) =1

- Axioma 3a – Se A e B forem mutuamente exclusivos
  P(A U B) = P(A) + P(B)

- Axioma 3b – Se A1, A2, … for uma sequência infinita de acontecimentos mutuamente exclusivos ($\forall_{i \neq j} Ai \ \cap Aj = \emptyset$)

$$\boxed{P(\cup_{k=1}^{\infty} Ak) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Ak)}$$

↳ é simplesmente a soma das Probabilidades!

Teoremas

- Como sabem, às afirmações que se obtêm dedutivamente a partir dos axiomas, ou de outros teoremas já deles obtidos por dedução, chamamos TEOREMAS

Teoremas / Corolários :

Prob. do acontecimento complementar

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Demonstração

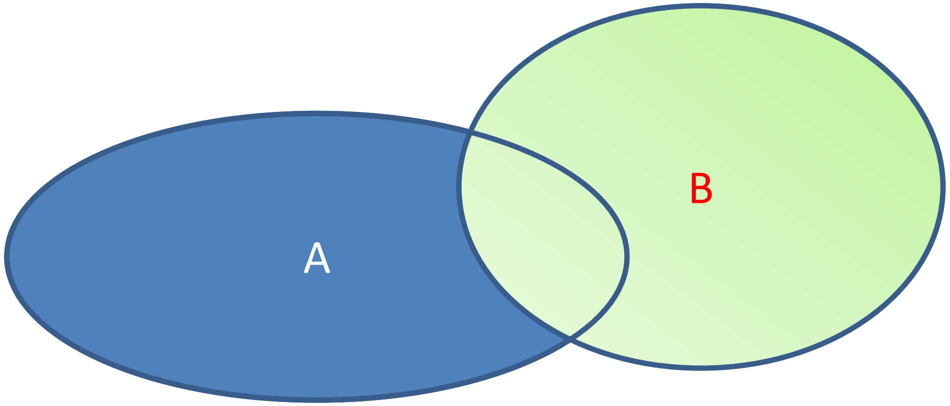
- Como $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- E $A \cup \bar{A} = S$

- Pelo axiomas 2 e 3:
- $P\,(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(S)$ ...
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

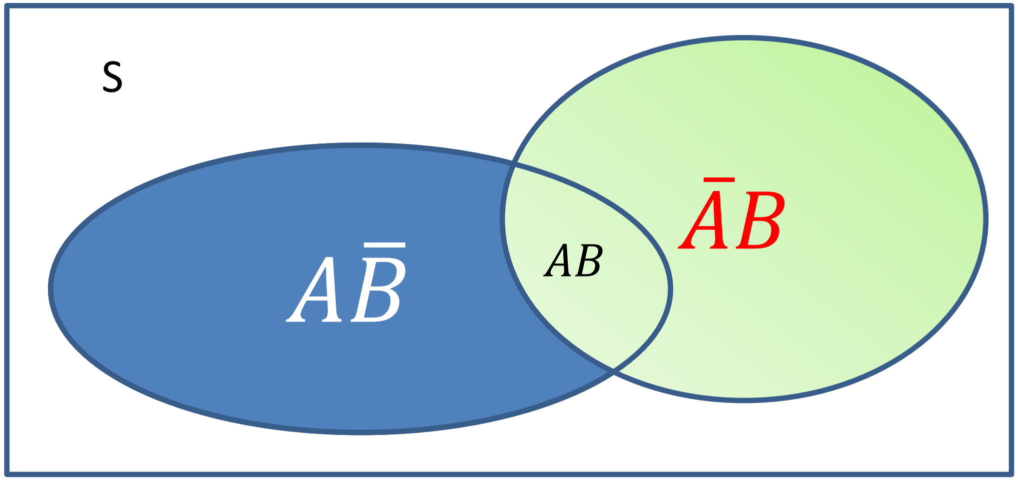
Teorema/Corolário:
Probabilidade da união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Com AB$\equiv A \cap B$



Demonstração



$A \cup B = A\bar{B} \; \cup AB \cup \bar{A}B$, disjuntos

Logo (axioma):

$$\mathrm{P}(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B)$$

Adicionando e subtraindo P(AB)

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \big(P(A\bar{B}) + P(AB)\big) + P\big((\bar{A}B) + P(AB)\big) - P(AB)$$
$$= \qquad P(A) \qquad + P(B) \qquad - P(AB)$$

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
  - Escolha de um número real no intervalo [a,b]
- Seja o acontecimento A "número pertencer a [c,d]"

- P(A)= (d-c)/ (b-a)

- A probabilidade de qualquer ponto $x \in [a, b]$ é igual a 0
  - Ter, por exemplo,]c,d[dará igual

Só podemos ter probabilidade entre zonas com tamanho determinado

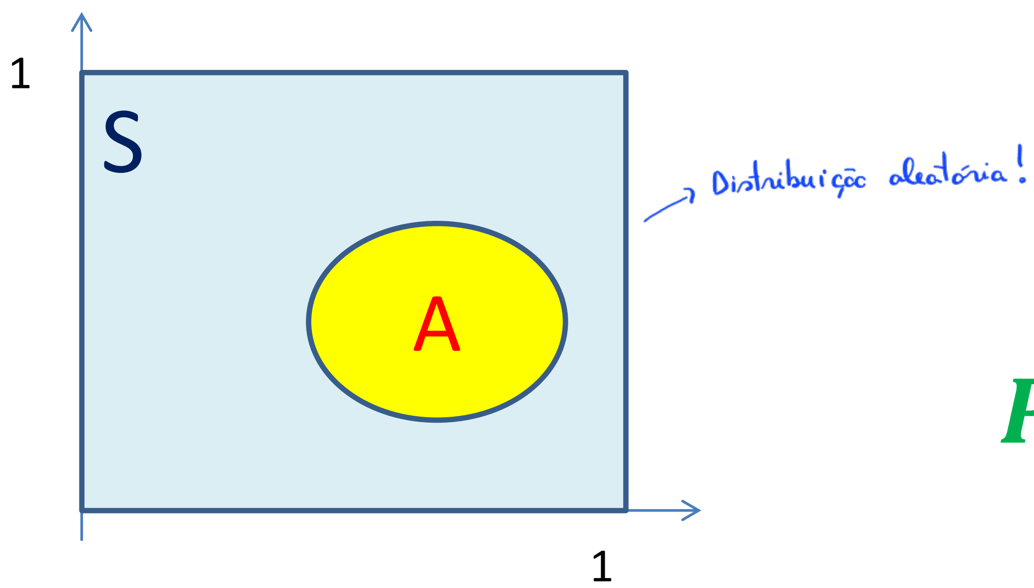
Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
  - Escolha de um número real no intervalo [0,60] relativo ao atraso de chegada a uma aula de 60m
- Seja o acontecimento A “chegar dentro da tolerância, i.e. [0,15[
- P(A)= (15-0)/ (60-0) = 0.25
  - Assumindo que podem chegar em qualquer altura da aula ☹
    - O que não é válido

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- No caso de um par de números reais *x, y* entre 0 e 1

$$S = \{x, y : x \in [0,1] \cap y \in [0,1]\}$$



$$\boldsymbol{P(A) = \frac{Área\ (A)}{Área\ (S)}}$$

A axiomática é compatível com as teorias anteriores ?

Sim, como era de esperar.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: «p(A) não negativo»

  – pois se as frequências relativas são números não negativos também convergem para um número não negativo.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 2: «p(E)=1»

  – pois as frequências relativas de um acontecimento certo são sempre 1, logo, tendem para 1.

A definição frequencista de probabilidade satisfaz a axiomática

- Satisfaz o axioma 3: «Se (A e B são incompatíveis) então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e de B»
  - pois se os acontecimentos A e B são incompatíveis não têm resultados comuns, a frequência relativa de AUB é a frequência relativa de A mais a frequência relativa de B e o limite da soma das duas sucessões é a soma dos limites.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Lei de Laplace
  - Num espaço finito de resultados equiprováveis a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de resultados favoráveis a A (#A) e o número de resultados possíveis (#E)

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 1: «p(A) não negativo»

  – Pois p(A)=#A / #E o que significa que p(A) é o quociente entre um número real não negativo e um número positivo.

A Lei de Laplace verifica a axiomática

- Satisfaz o axioma 2: «p(E)=1»

  – Pois $p(E)= \#E \;/\; \#E$ é o quociente entre dois números iguais.

Exemplo: Axioma 3

- Satisfaz o axioma 3:

  "Se A e B são incompatíveis então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e de B"

- Se A e B são disjuntos

$$\#(AUB)=\#A+\#B$$

E então:

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#E} = \frac{\#A + \#B}{\#E} = \frac{\#A}{\#E} + \frac{\#B}{\#E} = p(A) + p(B)$$

Exemplo: Probabilidade de 2 caras em 5 moedas

$P_{cara} = 0.55$

Dependendo da posição das caras: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)} = \frac{4 \times 5}{2} = 10$

$\boxed{C} \quad \boxed{} \quad \boxed{C} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$

$0.55 \times 0.45 \times 0.55 \times 0.45 \times 0.45$

sem considerar a ordem $\longrightarrow$ $\boxed{p \times (1-p) \times p \times (1-p) \times (1-p)} \xrightarrow{\text{Considerando ordem}} p^k \times (1-p)^{n-k} \times \binom{n}{k}$

Neste caso: $P(\text{2 caras em 5 lançamentos}) = p^2 \times (1-p)^{5-2} \times \binom{5}{2}$

$= (0.55)^2 \times (0.45)^3 \times 10$

$\approx 0.276 \ldots$

Exemplo - *k* ocorrências em *n* experiências

- *n* lançamentos de moeda de 1 Euro

P() = P(F) = p ; P(Verso) = P() = 1-p

- P(FVVFFF)= P(F)xP(V) … = p (1-p) (1-p) p p p

- P(FVVFFF) = $p^{\# \, Faces}\,(1-p)^{\# \, Versos}$

$$= p^4(1-p)^2$$

Para aprender mais …

- Capítulos iniciais do livro "[Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática]"
  - F. Vaz e A. Teixeira, Ed. Sílabo, set 2021.

- Links para material online:
  - http://www.stat.berkeley.edu/~stark/SticiGui/Text/probabilityAxioms.htm

- Capítulos iniciais do Livro "O Acaso"
  - Joaquim Marques de Sá, Gradiva