Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2023-2024

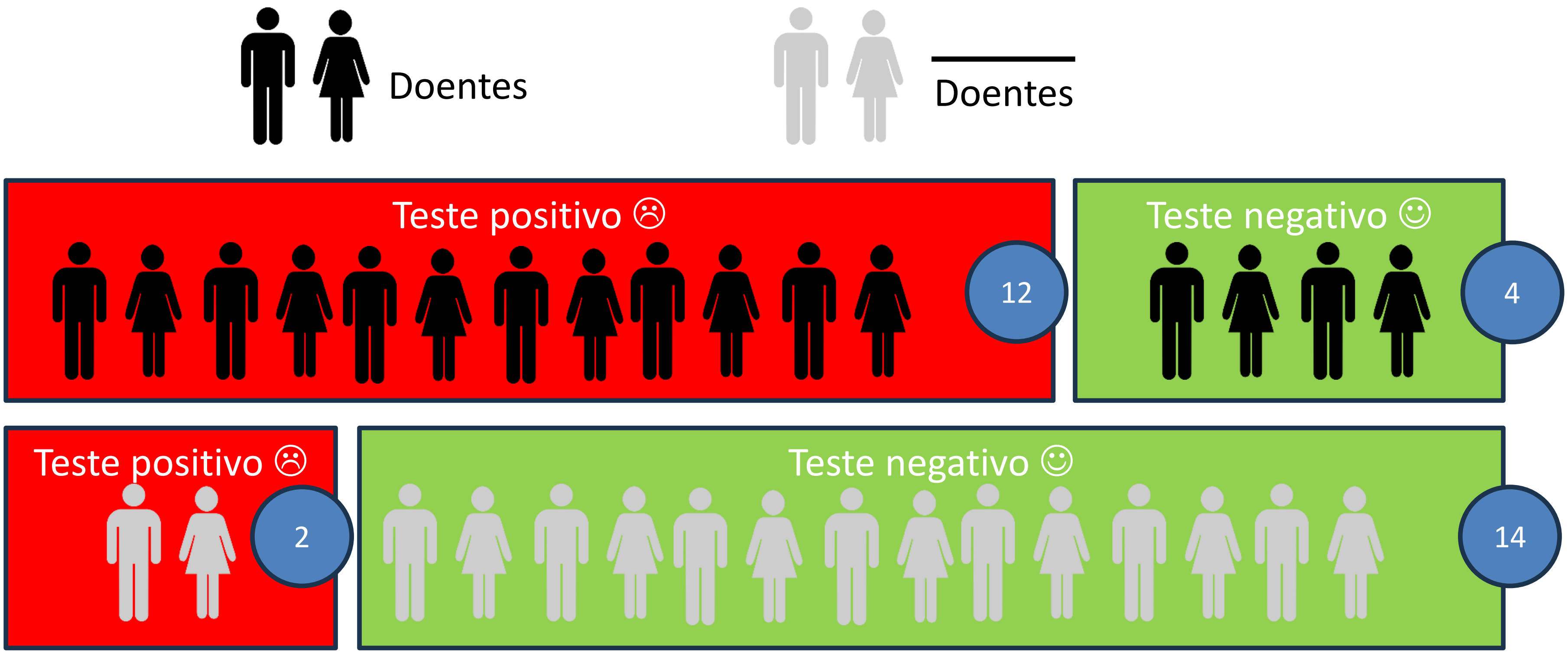
Probabilidades Condicionais

Probabilidade condicional

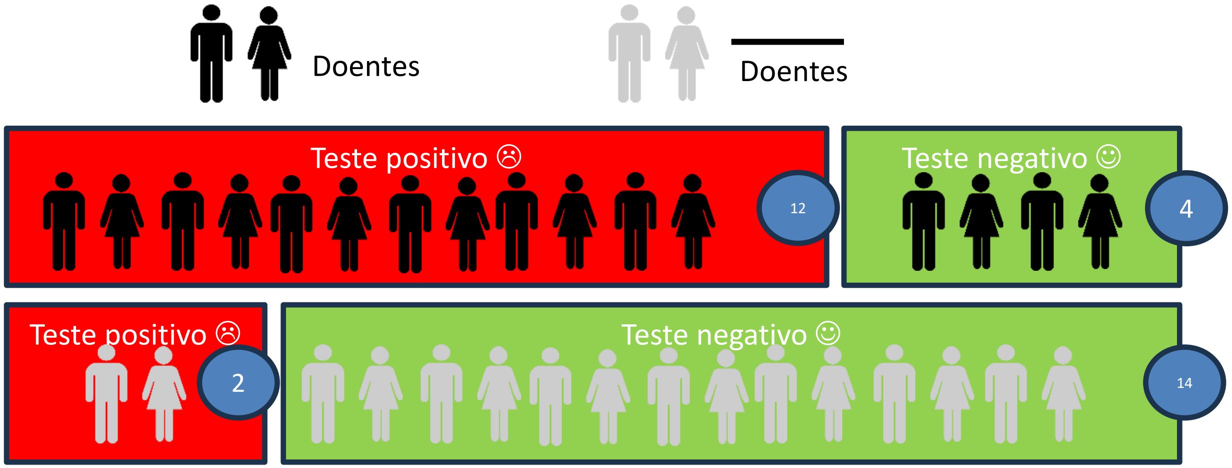
- Muitas vezes interessa-nos saber a probabilidade de um evento assumindo que sabemos que ocorreu outro evento
  - A sabendo que B
- Exemplos:
  - Probabilidade de amanhã estar sol **dado que hoje esteve sol**
  - Probabilidade de **sair novamente cara no 5º lançamento de uma moeda** quando os resultados anteriores foram sempre cara
  - Probabilidade de **ter uma doença sabendo que o exame que fiz deu positivo**

Probabilidade de estar doente quando exame deu positivo

- Consideremos a seguinte situação



- P("doente sabendo que exame deu positivo")



$\Rightarrow$ 16 doentes

$\Rightarrow$ 16 não doentes

- P("estar doente")
  - Casos favoráveis ? 16
  - Casos possíveis ? 32

$\Rightarrow P = \frac{16}{32} = 0.5$

Por observação: $P = \frac{12}{14}$

- P("estar doente alguém que teve teste positivo") = ?
  - Casos possíveis ?
    - 14
  - Casos favoráveis ?
    - 12

$$P(D \mid P) = \frac{P(D \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{12}{32}}{\frac{14}{32}} = \frac{12}{14} = \frac{\# D \cap P}{\# P} = \frac{12}{14}$$

Doença e Exame Positivo

- P("doente sabendo que exame deu positivo") =?

Exame Pos / Doente	P	$\overline{P}$	
D	12 casos = x	4 casos	16 casos = d (doentes)
$\overline{D}$	2 casos	14 casos	16 casos
	14 casos = p (positivos)		32 casos = N

- **P(D e P)** = ?
- **P(D e P)** = $\frac{12}{32} = \frac{x}{N} = \frac{x}{d} \times \frac{d}{N}$

$$= \boldsymbol{P(P \text{ dado } D) \times P(D)}$$

Também pode ser :

- **P(D e P)** = $\frac{12}{32} = \frac{x}{N} = \frac{x}{p} \times \frac{p}{N}$

$$= \boldsymbol{P(D\ dado\ P) \times P(P)}$$

- $\boldsymbol{P(P \mid D)}$= **P(D e P) /** $\boldsymbol{P(D)}$ e $\boldsymbol{P(D \mid P)}$= **P(D e P) /** $\boldsymbol{P(P)}$

- No nosso exemplo: $\boldsymbol{P(D \mid P)}$= (12/32) / (14/32) = 12/14

Probabilidade condicional

- Por vezes dois acontecimentos estão relacionados
  - A ocorrência de um depende ou faz depender a ocorrência do outro

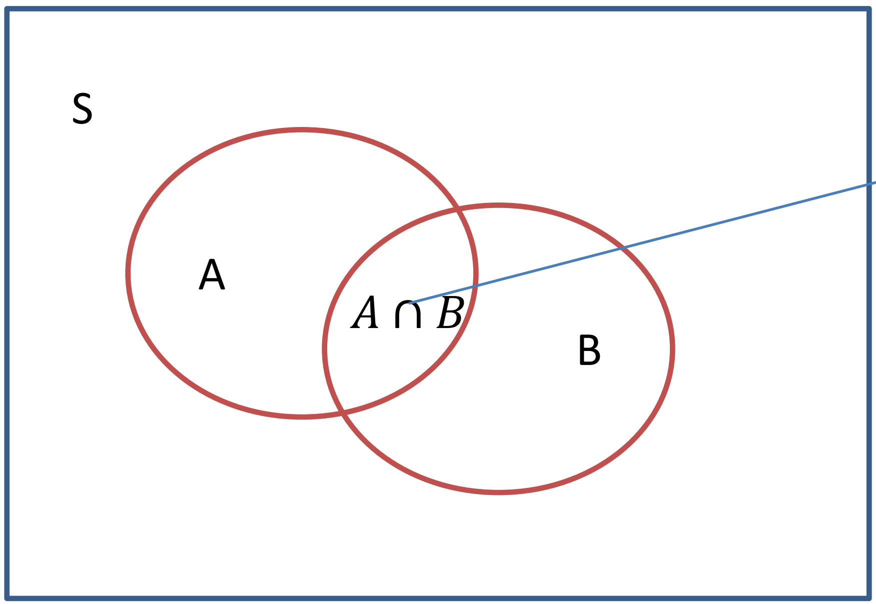
- A Probabilidade de ocorrência de um evento A com a informação de que o evento B ocorreu é a designada **PROBABILIDADE CONDICIONAL** de A dado B
  - Definida por:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{\boldsymbol{P(AB)}}{P(B)} \; se \; P(B) \neq 0}$$

Indefinida se P(B)=0

Interpretação da probabilidade condicional

- $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ se $P(B) \neq 0$



Zona onde A se realiza,
Sabendo que B ocorreu

S a considerar passa a ser
o conjunto B

Exemplo de aplicação

- 2 números de 1 a 4, N1 e N2

N2→	1	2	3	4
1				
2		B / 2	B /3	B /4
3		B /3		
4		B /4		

- Evento B = "min(N1,N2)=2"
- Evento M = "max(N1,N2)"

- **P(M=1|B) =**
  P("max()=1" & "min()=2") / P("min()=2") =
  …
  =0

- P(M=2|B) = …
  = 1/5

Regra da cadeia: P(AB), P(ABC) …

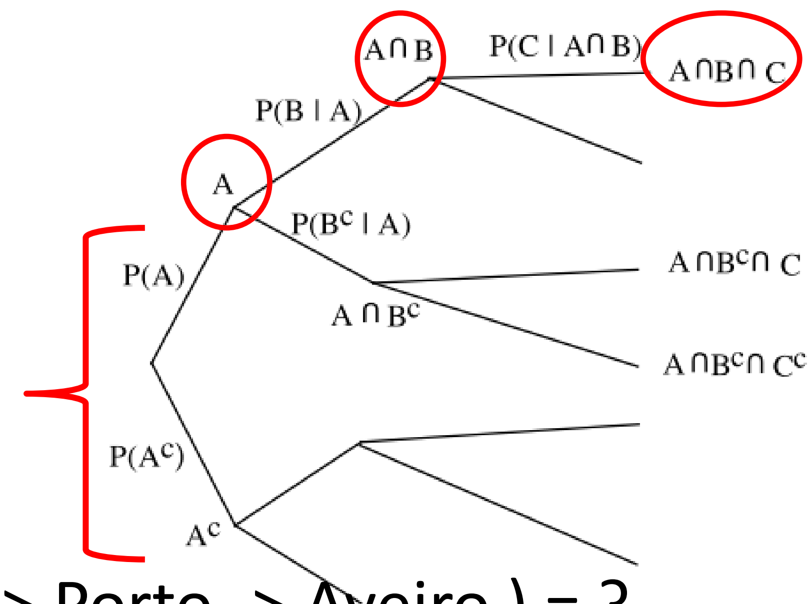
- $P(AB) = P(A|B) \times P(B)$

- Aplicando sucessivamente temos (regra da cadeia)

$$
\begin{aligned}
&P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) \\
&= P(A_1|A_2 \ldots A_n) \times P(A_2 A_3 \ldots A_n) \\
&= P(A_1|A_2 \ldots A_n) \\
&\times P(A_2|A_3 \ldots A_n) \ldots P(A_{n-1}|A_n) \times P(A_n)
\end{aligned}
$$

Regra da cadeia / multiplicação

- $P(ABC) = P(A)P(B|A)\,P(C|AB)$



Faz todo o sentido!

- P(Lisboa -> Porto -> Aveiro) = ?
- = P (começar em Lisboa)

  x P(viajar para Porto DADO que se está em Lisboa)

  x P(viajar para AVEIRO DADO que se fez Lisboa Porto…

Problema com 2 urnas…

- Consideremos 2 urnas, designadas por X e Y, contendo bolas brancas e pretas:
  - X contém 4 brancas e 5 pretas e
  - Y contém 3 brancas e 6 pretas.

  18 bolas
- Escolhe-se uma urna ao acaso e extrai-se uma bola. Qual a probabilidade de sair bola branca?

- **P("bola branca")**

= P("branca da urna X OU branca da urna Y")

= P("branca E urna X")+P("branca E urna Y")

= P("branca"|"urna X") x P("urna X") + P("branca"|"urna Y") x P("urna Y")

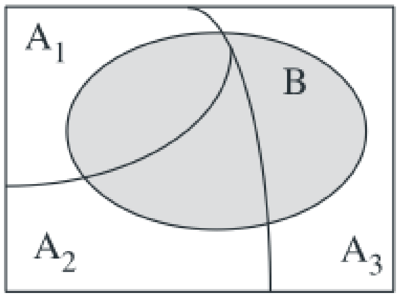
= (4/9)x(1/2)+(3/9)x(1/2) ≈ 0,39

$$P(B) = P(B_X \cup B_Y)$$
$$= P(B|X)P(X) + P(B|Y)P(Y)$$
$$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{18} \simeq 0{,}39$$

Lei da Probabilidade total

- Dividir para conquistar
- Partição do espaço de amostragem em A_1, A_2, A_3
- Ter $P(B|A_i)$, para todos os i

- $$P(B) = \overbrace{P(B|A_1)P(A_1)}^{P(A_1 B)} + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$



$P(B) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B)$

Em geral: $\mathrm{P(B)} = \sum_j P(B|A_j)P(A_j)$

Generalização da solução para o problema das urnas

Condicionamento inverso

- Continuando com as urnas …
  Um problema muito importante

- **Sabemos que saiu bola branca…**
  e pretendemos saber de que urna foi obtida

- **Problema Inverso** (condicionamento inverso)

$$P(\text{“urna X”} \mid \text{“temos bola branca”}) = ?$$

Resolvido pela primeira vez pelo Reverendo Thomas Bayes (1702-1761)

P("urna X" | "temos bola branca") = ?

- Sabemos calcular
  P("bola branca" | "urna X")
  mas agora trocaram-nos as voltas !
- Será que sabemos algo que pode ajudar?
- Uma ajuda: P(AB) = P(BA)

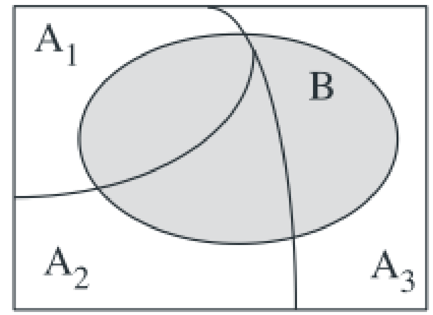
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ e } P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

- Temos portanto: $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
- E, muito interessante :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Regra de Bayes

- Probabilidades *a priori* $P(A_i)$
- Sabemos $P(B|A_i) \ \ \forall i$



- Pretendemos calcular $\boldsymbol{P(A_i|B)}$
  - i.e. $P(A_i)$ dado que B ocorreu

- $P(A_i|B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$

$$= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}$$

Passa de A|B para B|A

Aplicando ao problema das urnas

- **P("urna X" | "bola branca")** $= \frac{P(XB)}{P(B)} = \frac{P(B|X)\,P(X)}{P(B)}$

  temos

$$= \frac{P(\text{"bola branca"}|\text{"}urna\ X\text{"}) \times P(\text{"}urna\ X\text{"})}{P(\text{"bola branca"})}$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{4}{7}$$

- P("urna Y" | "bola branca")=

$$\ldots = \frac{\left(\frac{3}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{3}{7}$$

$$= 1 - P(\text{"urna X"}|\text{"bola branca"})$$

Causa e efeito

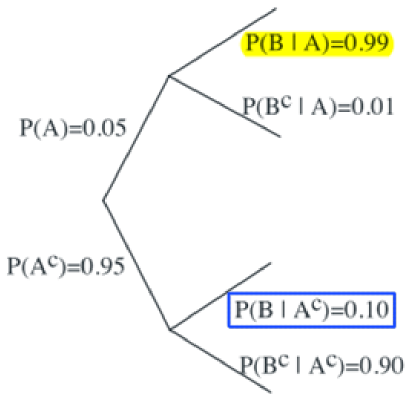
- No evento “urna X se bola branca” podemos considerar que a saída de bola branca é o EFEITO da causa “urna X”
- A Regra de Bayes, em consequência, pode ser escrita da seguinte forma:

$$P(\text{"causa"}|\text{"efeito"}) = \frac{P(\text{"efeito"}|\text{"causa"}) \times P(\text{"causa"})}{P(\text{"efeito"})}$$

Exemplo de aplicação Regra de Bayes - radar

Evento A: avião voando na zona do radar
P(A)= 0.05

Evento B: Aparece algo no ecrã do radar
P(B|A)= 0.99



P(A | B)= ?

- P(A ∩ B) =
=P(B|A) P(A)
=0,99 x 0,05

- P(B) =
$$= P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$$
- P(A | B) =
$$= \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$$
$$= \frac{0{,}99 \times 0{,}05}{0{,}1445} = 0.3426$$
(valor baixo)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\overset{0.99}{P(B|A)}\,\overset{0.05}{P(A)}}{P(B)}$$

$$P(B) = P(BA) + P(B\bar{A}) = P(B|A)P(A) + \underset{0.10}{P(B|\bar{A})}\,\underset{0.95}{P(\bar{A})}$$

Independência

Independência

- 2 acontecimentos são independentes sse

  P(AB) = P(A)P(B) !

  - Simétrico relativamente a A e B
  - Aplica-se mesmo que P(A)=0
  - Implica P(A|B)=P(A)   [mas não é a definição]
    - Ocorrência de B não fornece informação sobre ocorrência de A

- Generalização…

  os acontecimentos $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ são independentes sse

  $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$$

Independência vs independência 2 a 2

- Experiência:
  2 lançamentos de moeda
- Acontecimentos
  - A: primeira é caras
  - B: segunda é caras
  - C: mesmo resultado em ambas

HH	HT
TH	TT

- $P(C)$? $\frac{1}{2}$ P(A) ? $\frac{1}{2}$ P(B) ? $\frac{1}{2}$

  2/4=1/2
- $P(C \cap A) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

  1/4 = 1/2 x 1/2
  C e A indep.
- $P(C \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

  1/4 = 1/2 x 1/2
  C e B indep.
- $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ …. $A\ e\ B\ ind.$
- $P(C \cap B\ \cap A) =$

$$\boxed{\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$!

Independência 2 a 2 não implica independência

Independência e acontecimentos mutuamente exclusivos

- Em geral dois acontecimentos que sejam mutuamente exclusivos e tenham probabilidade não nula não podem ser independentes

$$0 = P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

implicaria que um deles tenha probabilidade nula

- Em geral considera-se que acontecimentos em experiências distintas são independentes (experiências independentes)

Sequências de experiências independentes

- Se uma experiência aleatória for composta por *n* experiências independentes e se A_k for um acontecimento que diga respeito à experiência *k*, é razoável admitir que os *n* acontecimentos são independentes

- Então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots \cap A_n) = \mathrm{P}(A_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_n)$$

Experiências de Bernoulli

- Uma **experiência de Bernoulli** consiste em realizar uma experiência e registar se um dado acontecimento se verifica (sucesso) ou não (falha)

- Exemplo: Sair cara no lançamento de 1 moeda

Qual a **probabilidade de *k* sucessos em *n* ensaios** **independentes** ?

- Seja ***p*** a probabilidade de sucesso e **(1-*p*)** a de falha
- A probabilidade de *k* sucessos e (*n*-*k*) falhas é:

$$p^k \, (1-p)^{n-k}$$

- *k* sucessos em *n* experiências podem ocorrer de C_k^n maneiras

- Então a probabilidade pedida é:

$$\boldsymbol{P_n(k) = C_k^n \;\; p^k \;\; (1-p)^{n-k}}$$

Lei Binomial

Visão frequencista e probabilidade condicional

- Do ponto de vista frequencista, considerando os eventos *A* e *B* e *N* experiências, podemos escrever:

- $P(A|B) \approx \frac{k_{A\ e\ B}/_{N}}{k_B/_{N}} = \frac{k_{A\ e\ B}}{k_B}$

- Onde $k_{A\ e\ B}$ é o número de ocorrência de "A e B"
  - Que também se pode denominar por frequência absoluta e representar por f_{AB}

Simulação

- Como fazer para ter P(A|B) ?

- Realizar *N* experiências

- Contar o número de ocorrências de *AB*
  Será $f AB$ (frequência absoluta)
- Contar número de ocorrências de *B*
  $f B$

- $P \cong \frac{f AB / N}{f B / N} = \frac{f AB}{f B}$

Exemplo de simulação
(Independência vs independência 2 a 2)

- Relembremos:

  2 lançamentos de moeda

  A: primeira é caras

  B: segunda é caras

  C: mesmo resultado em ambas

- $P(C \mid A \cap B)$ = 1

simulação

```
% P(C | A e B) =  P(C e A e B) / P(A e B)
N= 1e5;
m1= rand(1,N) < 0.5;  % registo lançamentos da 1ª moeda
m2= rand(1,N) < 0.5;  % registo lançamentos da 2ª moeda


ABC= (m1==m2) & (m1==1) & (m2==1);   % C: iguais   A: primeira caras
                                     % B: segunda caras
fABC=sum(ABC,1);

AB =   (m1==1) & (m2==1);    %  A: primeira caras  B: segunda caras

fAB=sum(AB,1);

p=fABC/fAB
```

Principais assuntos até agora

- Probabilidade
- Teorias de Probabilidade (Clássica, Frequencista, Axiomática)
- Probabilidade Condicional
  - 3 Ferramentas muito importantes
    - Regra da multiplicação
    - Teorema da Probabilidade total
    - Regra Bayes
- Independência
- Aplicação da teoria Frequencista a probabilidades condicionais

Não esquecer

- Independência de 2 eventos
- Independência de um conjunto de eventos
- Probabilidade condicional

$$P(A|B) = {}^{P(A \cap B)}\!\big/_{P(B)}$$

- Regra da multiplicação:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

- Probabilidade total:

$$\mathrm{P(B)} = \sum_j P(B|A_j)P\big(A_j\big)$$

Regra de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \;\; P(B|A_i)}{P(B)}$$

Para aprender mais …

- Capítulos iniciais do livro "Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática", F. Vaz e A. Teixeira, Ed. Sílabo, set 2021.