Departamento de Física
Universidade de Aveiro

# Modelação de Sistemas Físicos

## 3ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 2 Movimento a uma dimensão:
Método de Euler de integração numérica. Erro de truncatura.

Bibliografia:
Cap. 2: Serway, cap. 2; Sørenssen, cap. 4; Villate, cap. 1

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \dfrac{dx}{dt}$ → derivada da posição

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ → derivada da velocidade → segunda derivada da posição

Se se conhecer uma destas quantidades, saberemos as outras duas.

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

<u>ou, comenado da aceleração</u>

Cálculo integral: $a_x(t)$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$$

Calculado (i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Definição de derivada $\dfrac{d}{dt}$ de uma função

momento depois

momento

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{(t+\delta t) - t}$$

definição da derivada

$$= v_x(t)$$

# Método de Euler (método numérico de integração)

Leonhard Euler 1707-1783

$$v_x(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t)-x(t)}{\delta t}$$

aproximado por

$$v_x(t) \approx \frac{x(t+\delta t)-x(t)}{\delta t}$$ com $\delta t$ pequeno (mas não zero)

Então

$$\frac{x(t+\delta t)-x(t)}{\delta t} \approx v_x(t) \quad \Rightarrow \cancel{\delta t} \times \frac{x(t+\delta t)-x(t)}{\cancel{\delta t}} \approx v_x\,(t)\times\delta t$$

$$\Rightarrow \quad x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t)\times\underbrace{\delta t}_{\text{finito}}$$

Se soubermos no mesmo instante, $t$,

a **posição** $x(t)$ e a **velocidade** $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ (a sua derivada)

Pode-se calcular (aproximadamente) o valor da posição num instante posterior, $x(t+\delta t)$.

## Método de Euler (método numérico de integração)

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t)\times\delta t$$

Se se conhecer $x(0) = x_0$ (posição inicial)

Obtêm-se $x(\delta t) = x_0 + v_x(0)\times\delta t$ ( posição em $\delta t$)

**e de novo** $x(\delta t+\delta t) = x(\delta t) + v_x(\delta t)\times\delta t$

e $x(2\delta t+\delta t) = x(2\delta t) + v_x(2\delta t)\times\delta t$ etc.

Dividimos em pequenos intervalos

$x(0) \rightarrow x(\delta t) \rightarrow x(2\delta t) \rightarrow (\ldots)$

$\leftarrow \delta t \rightarrow \quad \leftarrow \delta t \rightarrow$

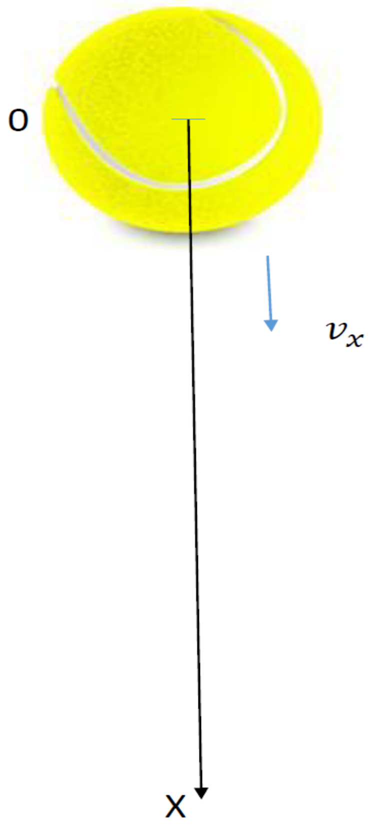
$t=0 \quad t=\delta t \quad t=2\delta t$

$\boxed{\text{Pode-se calcular a posição em qualquer instante posterior ao instante inicial.}}$

Fácil de programar. Numa linguagem de programação pode-se usar o ciclo (loop) porque a expressão é sempre idêntica.

**Tem-se de escolher o passo temporal $\delta t$ de modo a conseguir a convergência da solução**

**Exemplo:** Queda livre de um objeto sem resistência do ar, quando largado ( $v_x(t_0) = 0$ ).
A aceleração é constante.




$$t_0 = 0$$
$$x(0) = 0$$
$$v_x(0) = 0$$
$$a_x(t) = +g \quad \text{( constante)}$$

Tem-se movimento uniformemente acelerado.

Já resolvemos este problema por integração analítica.

Agora vamos encontrar a velocidade e a posição
por um método numérico: **Método de Euler, como teste!**

**Tarefa:** Implementar em python o método de Euler para resolver a equação diferencial $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$, no problema da queda da bola de ténis

$$x(0) = x_0$$
$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x\,(0)\times\delta t$$
$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x\,(\delta t)\times\delta t$$
$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x\,(2\delta t)\times\delta t$$

...

$$x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + v_x\,((N-1)\delta t)\times\delta t$$
$$\underbrace{x(N\delta t + \delta t)}_{\text{depois de N passos temporais}} \approx x(N\delta t) + v_x\,(N\delta t)\times\delta t$$

**INPUT:** $\delta t$ = passo temporal

$t_0$ = 0 instante inicial

$t_f$ = instante final

$x_0 = 0$

$v_x(0) = 0$

e sabemos $\boxed{v_x(t) = gt}$

**Cálculo Científico: Lida-se com números**

Pacote numpy é conveniente: Usa 'arrays'

```
a=numpy.zeros(n+1)
```
(Array de zeros)

```
b=numpy.array([1,2,5 ])

t=numpy.linspace(t0,tf,n+1)
```

Tarefa: Implementar em python o método de Euler para o problema da queda da bola de ténis

## Relação entre passo de tempo e número de passos

Com $N$ passos de $\delta t$, o tempo decorrido é

$$\boxed{t_f - t_0 = N\,\delta t}$$

Ex:

$t_f - t_0 = 2\,s$

$\delta t = 0{,}1\,s$ (20 passos)

$N = \frac{2}{0{,}1} = 20$ → 21 pontos

ou $\delta t = \frac{2}{100} = 0{,}02\,s$

100 passos

Ou seja

$$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t}$$ número de passos

ou

$$\delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$$ passo temporal

Tarefa: Implementar em python o método de Euler para o problema da queda da bola de ténis

Array de tempos t

Array de posições x

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x(0) = x_0$ | $\rightarrow$ | $x[0]$ | corresponde ao instante t$[0]$ |
| $x(\delta t) \approx x_0 + v_x\ (0)\times\delta t$ | $\rightarrow$ | $x[1]$ | corresponde ao instante t$[1]$ |
| $x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x\ (\delta t)\times\delta t$ | $\rightarrow$ | $x[2]$ | corresponde ao instante t$[2]$ |
| $x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x\ (2\delta t)\times\delta t$ | $\rightarrow$ | $x[3]$ | corresponde ao instante t$[3]$ |
| … | | | |
| $x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + v_x\ ((N-1)\delta t)\times\delta t$ | $\rightarrow$ | $x[n]$ | corresponde ao instante t$[n]$ |

indexação: de 0 a n, num total de n+1 elementos

# Cap. 2 Movimento a 1 dimensão

```
# Queda sem resistência do ar
# Integração numérica de dx/dt = vx, pelo Método de Euler
import numpy as np
```

constantes

```
dt=0.01                     # passo de tempo
tf=4.0
t0=0
x0=0
v0x=0

g=9.80
```

Para inteiro

Ex: 0,9999

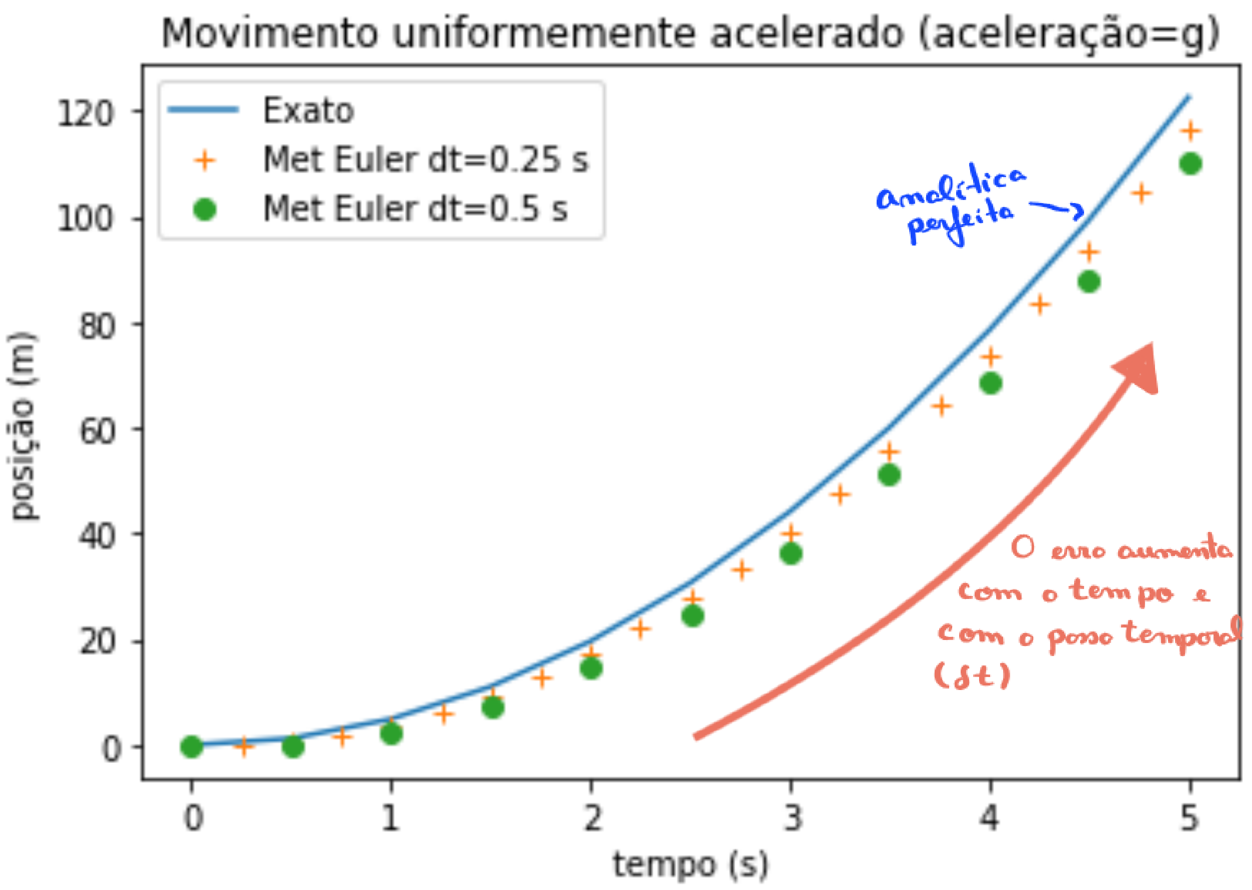
```
n=np.int((tf-t0)/dt+0.1)  # +0.1 para garantir não arredondar para baixo
print('n',n)

t=np.zeros(n+1)             # n+1 elementos; último índice n
x=np.zeros(n+1)
vx=np.zeros(n+1)

vx[0]=v0x
t[0]=t0
x[0]=x0
```

| t | 0 | $\delta t$ | $2\delta t$ | $3\delta t$ |
|---|---|---|---|---|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 |

```
# Método de Euler (n+1 elementos)
for i in range(n):
    vx[i]=g*t[i]
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt  # último x[n]= x[n-1]+vx[n-1]*dt
    t[i+1]=t[i]+dt
```

Método de Euler (método numérico de integração)

**Escolha do passo temporal $\delta t$**




$\delta t$ = passo temporal
$N$ número de passos

Para um tempo final $t_f$ ($t_0$=instante inicial)

$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t}$ ou $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$

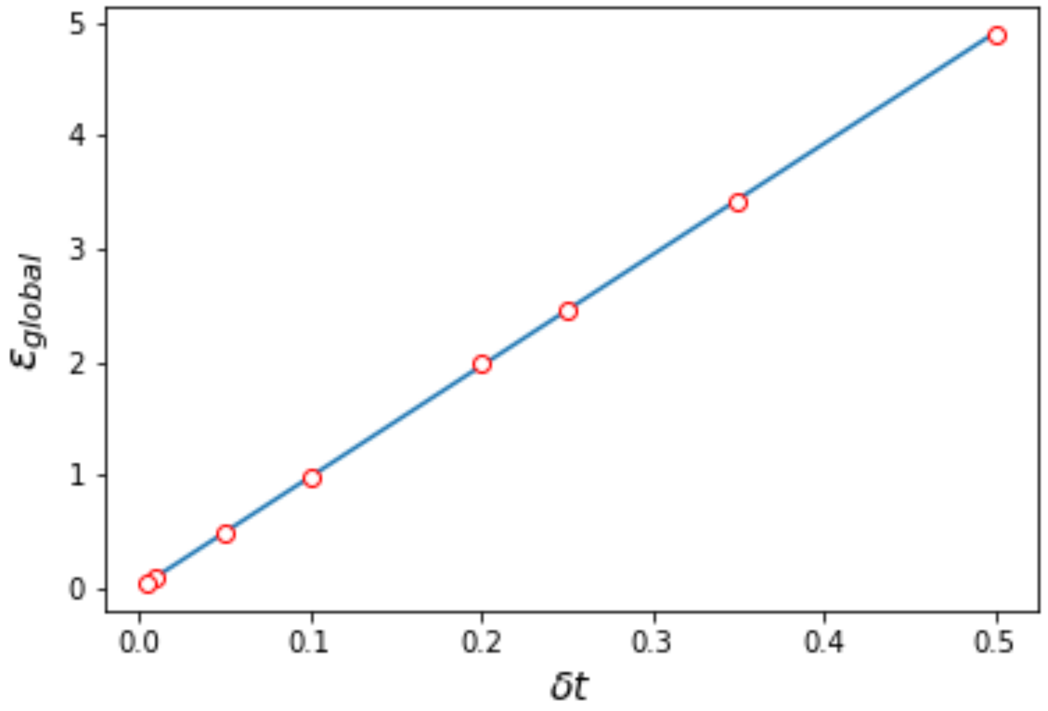
$N$ e $\delta t$ são inversamente proporcionais

No problema da queda livre t=2 s

**Cálculo da variação do erro com o passo $\delta t$.**

| $\delta$t | $N$ | $x(2)_{Euler}$ | $\varepsilon_{global} = \lvert x(2)_{exato} - x(2)_{Euler} \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 4 | 14.7 | 4.9 |
| 0.25 | 8 | 17.15 | 2.45 |
| 0.1 | 20 | 18.62 | 0.98 |
| 0.05 | 40 | 19.1 | 0.50 |
| 0.01 | 200 | 19.502 | 0.10 |
| 0.005 | 400 | 19.550 | 0.05 |
| $x(2)_{exato}$ | | **19.6000** | |

$\frac{\delta t}{2}$ o $\frac{\text{erro}}{2}$ também




O erro global do método de Euler é linear no passo.

É proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos N.

Leonhard Euler 1707-1783

**e a velocidade?**

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} = a_x(t)$$

aproximado por $$\frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t)$$

Para $\delta t$ pequenos, então espera-se que

$$\frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t) \qquad \Rightarrow \qquad v_x(t+\delta t) - v_x(t) \approx a_x\ (t) \times \delta t$$

$$\Rightarrow \qquad v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\ (t) \times \delta t$$

Se soubermos no mesmo instante, $t$,
a velocidade $v_x(t)$ e a aceleração $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$ (a sua derivada)
Pode-se calcular o valor da velocidade num instante posterior, $t + \delta t$.

Método de Euler (método numérico de integração) **cálculo de velocidade**

$$v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\ (t)\times\delta t$$

Se se conhecer $v_x(0) = v_{x0}$

Obtêm-se $v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x\ (0)\times\delta t$

**e de novo** $v_x(\delta t+\delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x\ (\delta t)\times\delta t$

e

$$v_x(2\delta t+\delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x\ (2\delta t)\times\delta t$$

Pode-se calcular a velocidade em qualquer instante posterior ao instante inicial.

$$\boxed{v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\ (t)\times\delta t}$$

Método de Euler (método numérico de integração)

## velocidade e posição

$$\boxed{v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x\,(t)\times\delta t \qquad\qquad x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x(t)\times\delta t}$$

Se se conhecer

$v_x(0) = v_{x0}$ $\qquad\qquad$ $x(0) = x_0$

Obtêm-se

$v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x\,(0)\times\delta t$ $\qquad\qquad$ $x(\delta t) \approx x_0 + v_x\,(0)\times\delta t$

aproveitamos...

e de novo

$v_x(\delta t+\delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x\,(\delta t)\times\delta t$ $\qquad\qquad$ $x(\delta t+\delta t) \approx x(\delta t) + v_x\,(\delta t)\times\delta t$

e

$v_x(2\delta t+\delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x\,(2\delta t)\times\delta t$ $\qquad\qquad$ $x(2\delta t+\delta t) \approx x(2\delta t) + v_x\,(2\delta t)\times\delta t$

...

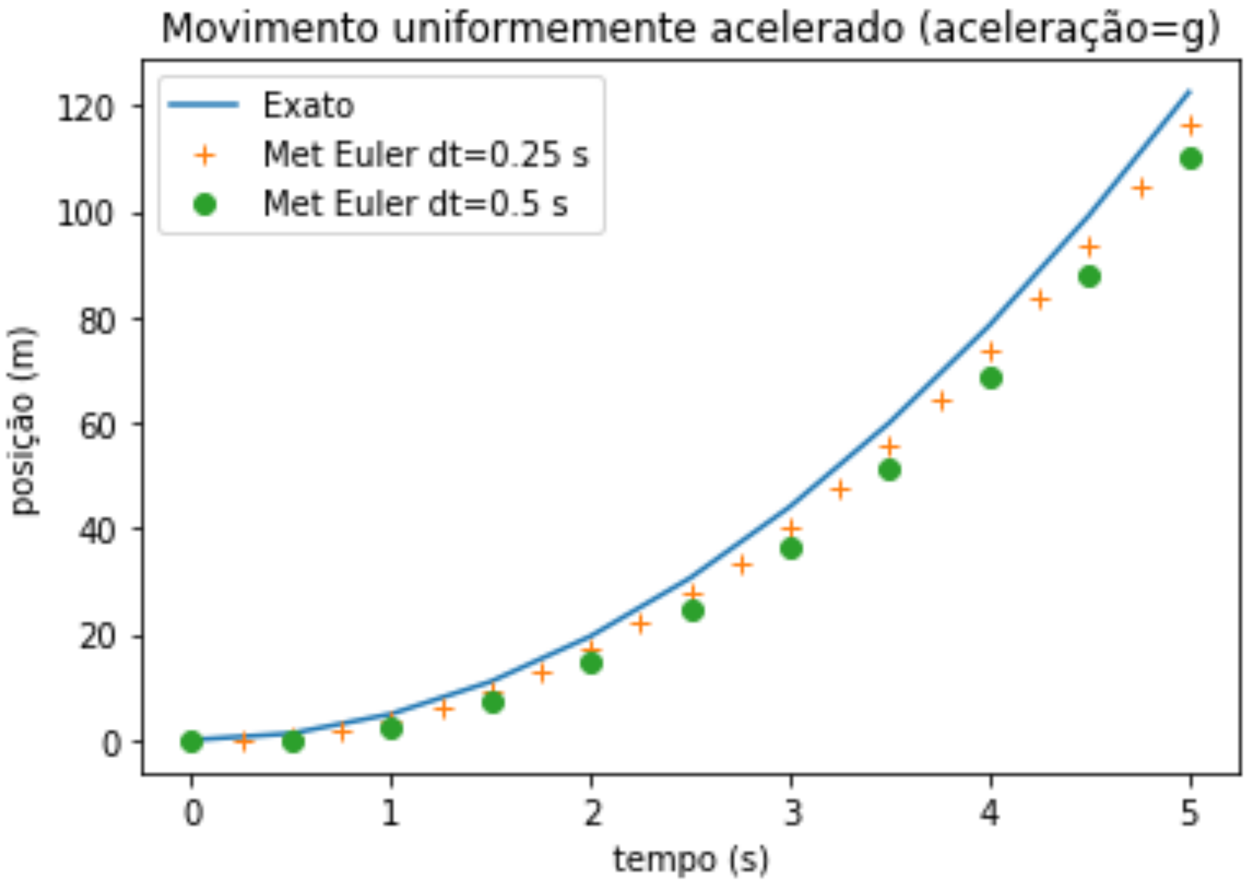
...

```
# Queda sem resistência do ar
# Integração numérica de dx/dt = vx, pelo Método de Euler
import numpy as np

dt=0.01                         # passo de tempo
tf=4.0
t0=0
x0=0
v0x=0

g=9.80

n=np.int((tf-t0)/dt+0.1)  # +0.1 para garantir não arredondar para baixo
t=np.zeros(n+1)             # n+1 elementos; último índice n
x=np.zeros(n+1)
vx=np.zeros(n+1)

vx[0]=v0x
t[0]=t0
x[0]=x0

# Método de Euler (n+1 elementos)
for i in range(n):
    ax[i] = g    # neste exemplo é simples,
                 # mas pode ser qualquer função de x[i] e vx[i]

    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    vx[i+1]=vx[i] + ax[i]*dt      # atualizar velocidade sabendo aceleração
    t[i+1]=t[i]+dt
```

Apenas muda-se esta parte

Método de Euler (método numérico de integração)

**Escolha do passo temporal $\delta t$**




$\delta t$ = passo temporal
$N$ número de passos

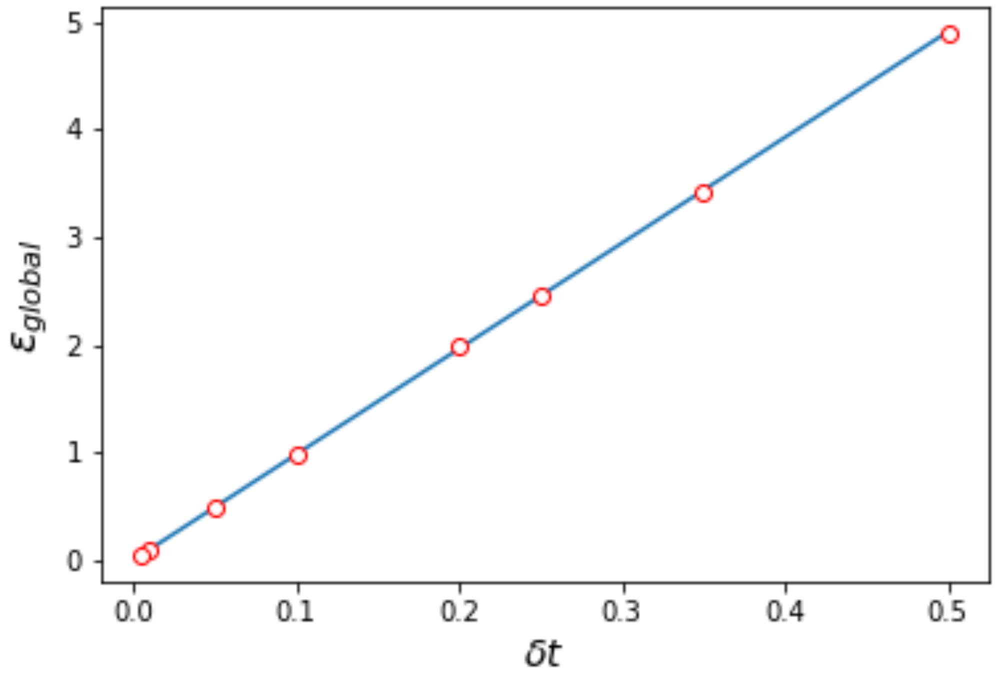
Para um tempo final $t_f$ ($t_0$=instante inicial)

$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t}$ ou $\delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$

$N$ e $\delta t$ são inversamente proporcionais

No problema da queda livre t=2 s
Cálculo da variação do erro com o passo $\delta t$.

| $\delta$t | $N$ | $x(2)_{Euler}$ | $\varepsilon_{global} = \lvert x(2)_{exato} - x(2)_{Euler} \rvert$ |
|---|---|---|---|
| 0.5 | 4 | 14.7 | 4.9 |
| 0.25 | 8 | 17.15 | 2.45 |
| 0.1 | 20 | 18.62 | 0.98 |
| 0.05 | 40 | 19.1 | 0.50 |
| 0.01 | 200 | 19.502 | 0.10 |
| 0.005 | 400 | 19.550 | 0.05 |
| $x(2)_{exato}$ | | **19.6000** | |




O erro global do método de Euler é linear no passo.

É proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos N.

## Erro cometido na aproximação de Euler?

Como a velocidade já não é perfeita o erro da posição vai acumular

$$\underbrace{\frac{v_x(t+\delta t)-v_x(t)}{\delta t}}_{a(t)} = \underbrace{a_x(t)}_{a_{Euler}(t)} + \underbrace{\text{erro cometido na aproximação de Euler}}_{=|a(t)-a_{Euler}|}$$

Série de Taylor:

$$v_x(t+\delta t) = v_x(t) + \underbrace{\left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t}_{} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^3 + \sigma(\delta t^4)$$

Derivada da velocidade vezes o tempo → é a aceleração

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta t^n}{n!} = 0$$

*Método de Euler* $\quad v_x(t+\delta t) \simeq v_x(t) + a_x(t)\,\delta t$ (valor aproximado)

*Exato* $\quad v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\left.\frac{d^2v_x}{dt^2}\right|_t \delta t^{\,2}}_{} + \frac{1}{3!}\left.\frac{d^3v_x}{dt^3}\right|_t \delta t^{\,3} + \sigma(\delta t^4)}_{\text{erro (de truncatura)}}$

este é muito maior que os outros logo é quase igual ao erro

*Método de Euler* $v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t$

*Exato* $v_x(t+\delta t) = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{d^2 v_x}{dt^2}\Big|_t \delta t^{\,2} + \frac{1}{3!}\frac{d^3 v_x}{dt^3}\Big|_t \delta t^{\,3} + \mathcal{O}(\delta t^4)}_{\text{erro (de truncatura)}}$

Erro de truncatura local (um passo) proporcional a $\delta t^{\,2}$.

Erro total $\approx N\delta t^2 = N\left(\frac{t_f-t_0}{N}\right)^2 = \frac{(t_f-t_0)^2}{N}$

$= (t_f-t_0)\underbrace{\left(\frac{t_f-t_0}{N}\right)}_{\delta t} = (t_f-t_0)\,\delta t$

O cálculo de $v_x(t_f)$ usou N passos temporais $\delta t$.

Como o erro de uma soma se acumula, o erro global ao fim de $N$ passos é proporcional a $N\ \delta t^{\,2}$

que é igual a $N\left(\frac{t_f-t_0}{N}\right)^2 = \frac{(t_f-t_0)^2}{N} = (t_f-t_0)\delta t$

Euler:

$v(t+\delta t) = v(t) + a(t)\delta t$

$v(0) = 0$

$v(\delta t) = 0 + g\,\delta t$

$v(2\delta t) = g\delta t + g\delta t = g(2\delta t)$

$v(3\delta t) = g2\delta t + g\delta t = g(3\delta t)$

O erro de truncatura é proporcional ao inverso do número de passos $N$, e proporcional ao passo $\delta t$

**Problema:** Considere a queda de um objeto sem resistência do ar. Neste movimento a aceleração é constante durante todo o movimento. Se considerar no ciclo do seu programa quando calcula a velocidade em função do tempo usando o método de Euler, a solução numérica é exata. Porquê?

↳ velocidade numérica é igual a velocidade analítica

$a = g$

$v = gt$

derivada da velocidade é a aceleração

$a' = g' = 0$

$$v(t+\delta t) = v(t) + \underbrace{\frac{dv}{dt}\delta t}_{g} + \underbrace{\frac{d^2v}{d^2t}}_{0}\delta t^2 + \dots$$

$$g \quad + \quad 0 \quad\quad + \quad 0$$