

Modelação de Sistemas Físicos

13ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 9

Osciladores acoplados: Modos Normais.

Osciladores acoplados forçados.

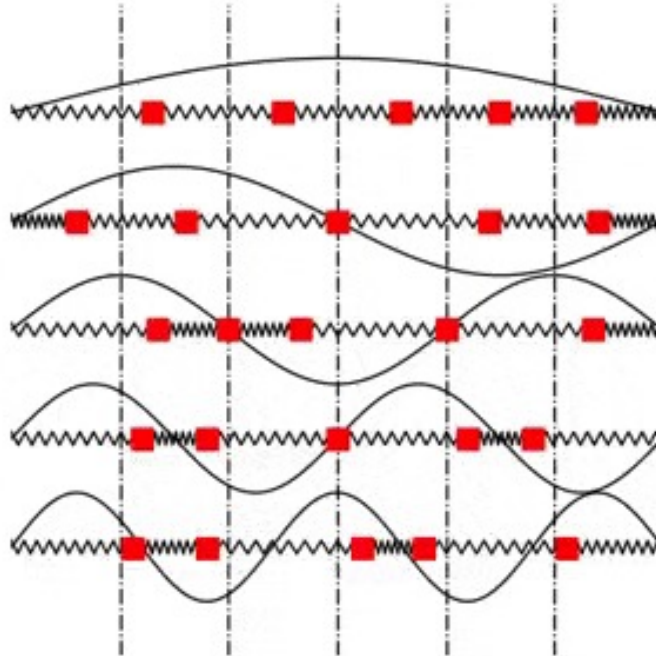
Resolução de problemas.

Bibliografia:

Capítulo 9

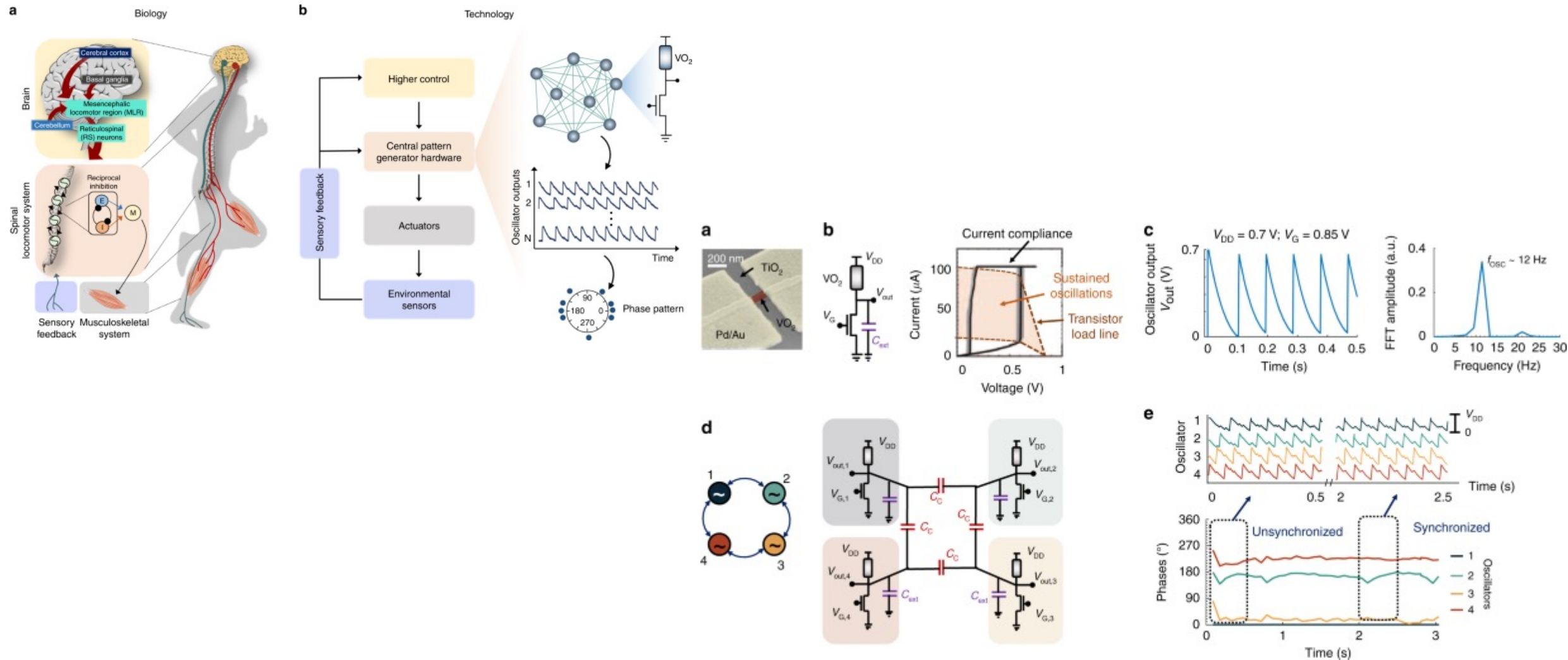
Osciladores Acoplados e Ondas

©2017, Bhaskar Kamble

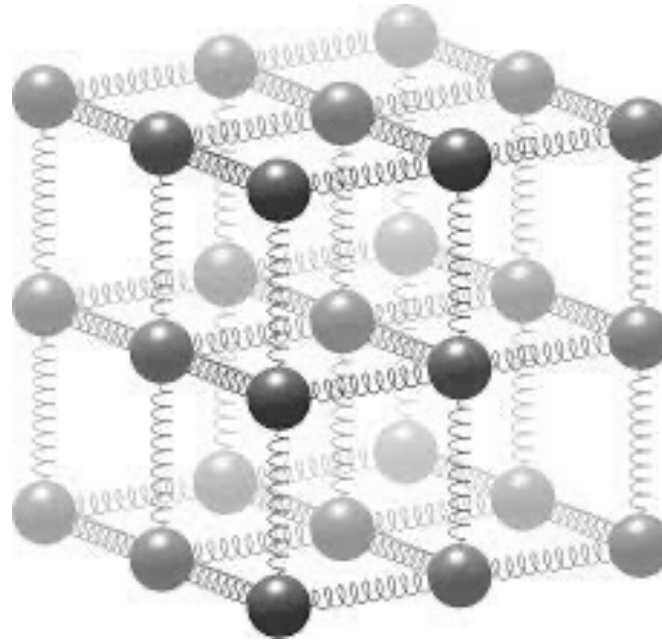


[Waves and oscillations \(bhaskar-kamble.github.io\)](https://bhaskar-kamble.github.io)

Programmable coupled oscillators for synchronized locomotion, Dutta et al., *Nature Communications*, 2019

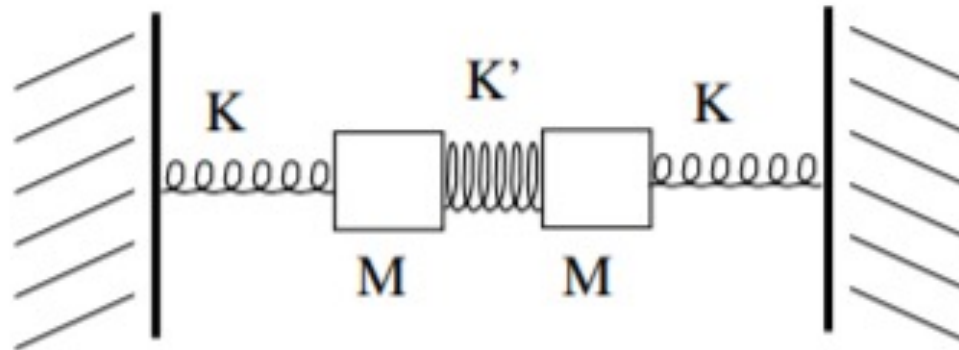


Modelos da matéria



Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k' , e ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k

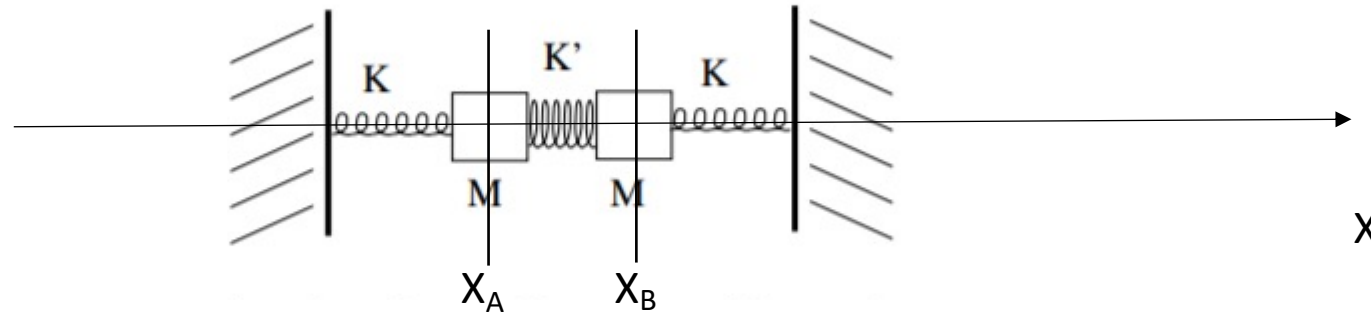


Como são as oscilações? Que frequências?

Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k' , e ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k .

Como são as oscilações? Que frequências?



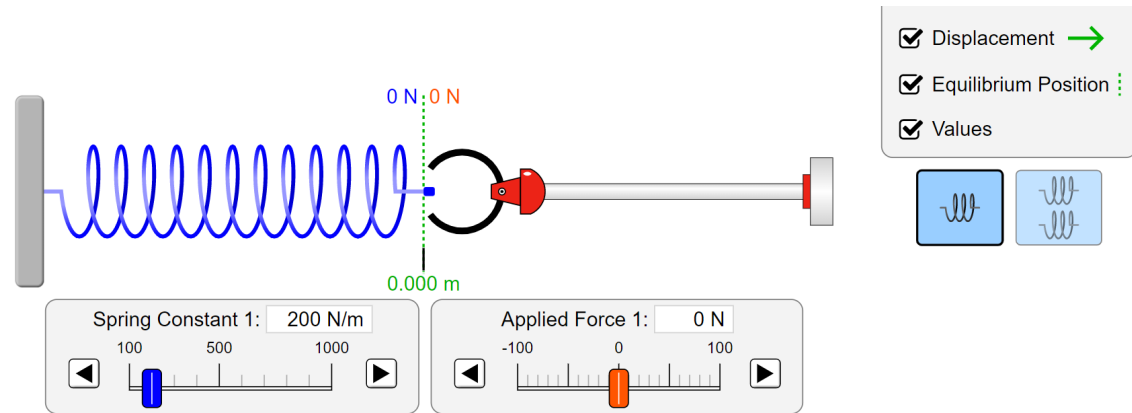
Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 2 corpos.

- Que forças aplicada a cada um dos corpos?
- Equação dinâmica de Newton para cada corpo
- Resolver a eq. dinâmica pelo método de Euler-Cromer (oscilações)

Mola: Posição de equilíbrio e comprimento da mola

Equilíbrio:

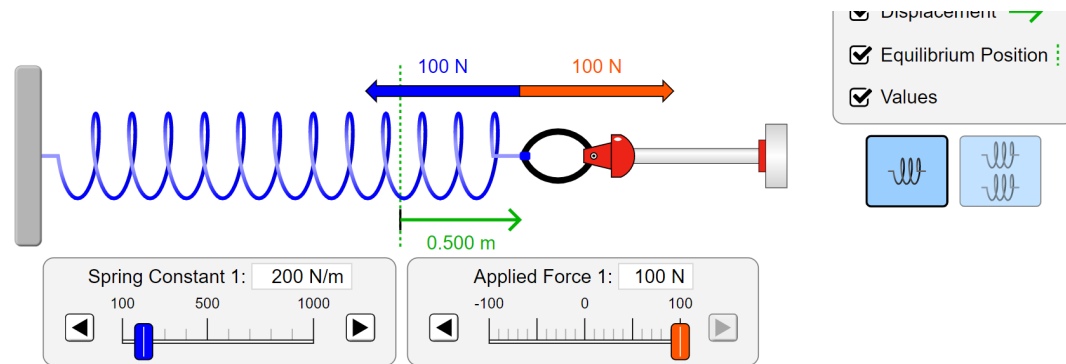
Posição x_{eq} e comprimento da mola l_{eq}



Mola distendida:

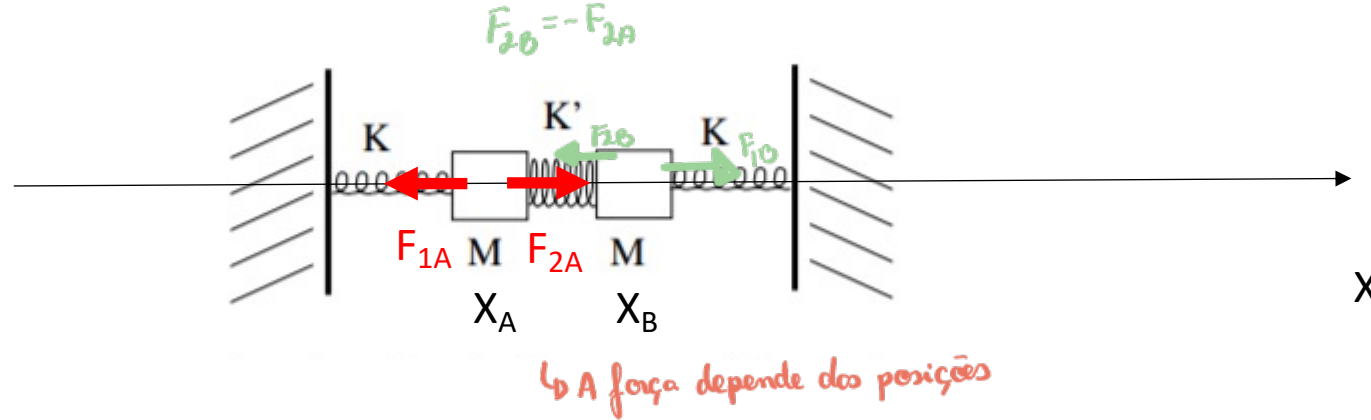
O afastamento $x - x_{eq}$ à posição de equilíbrio é quanto o comprimento da mola l aumentou

$$x - x_{eq} = l - l_{eq}$$



Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k' , e ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k



Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 2 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

Que forças aplicada a cada um dos corpos?

Corpo A: $F_{1A} = -k(x_A - x_{Aeq})$

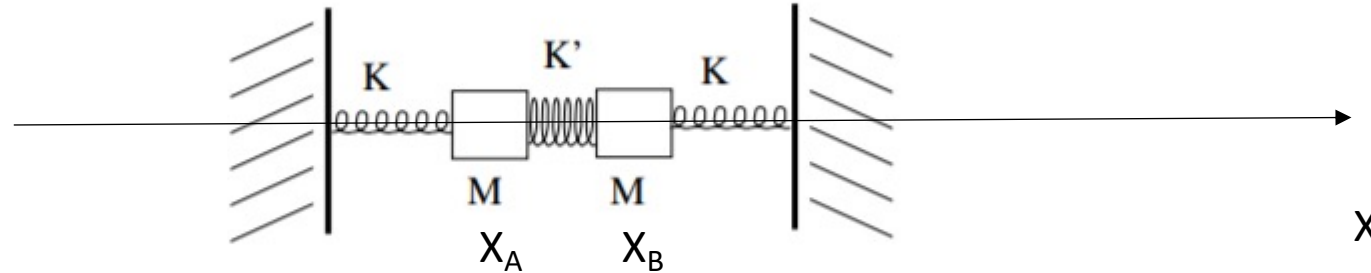
$$F_{2A} = +k'(x_B - x_A)$$

Corpo B: $F_{3B} = -k(x_B - x_{Beq})$

$$F_{2B} = -k'(x_B - x_A) = -F_{2A}$$

Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k' , e ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k



Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 2 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

Equação dinâmica de Newton para cada corpo

Corpo A
$$m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k (x_A - x_{Aeq}) - k' [(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$$

↳ dependência em x_B

Corpo B
$$m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k (x_B - x_{Beq}) + k' [(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$$

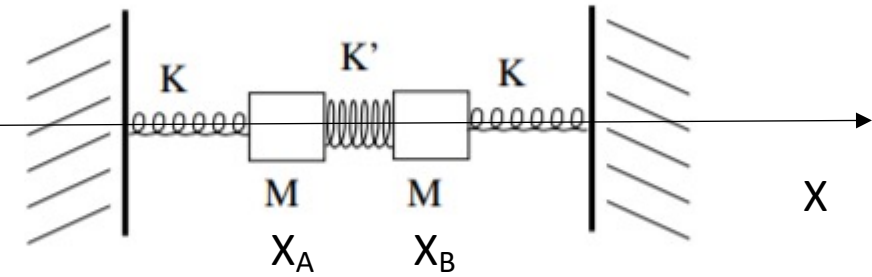
↳ dependência em x_A

Note: as equações estão acopladas: Na equação do corpo A aparece a coordenada do corpo B

↳ Muito sensíveis a condições iniciais!

Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k' , e ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k



Corpo A $m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k (x_A - x_{Aeq}) - k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

Corpo B $m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k (x_B - x_{Beq}) + k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

Cálculo Numérico:

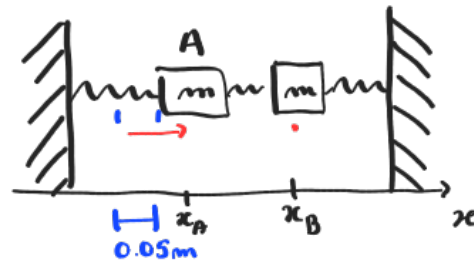
$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$$

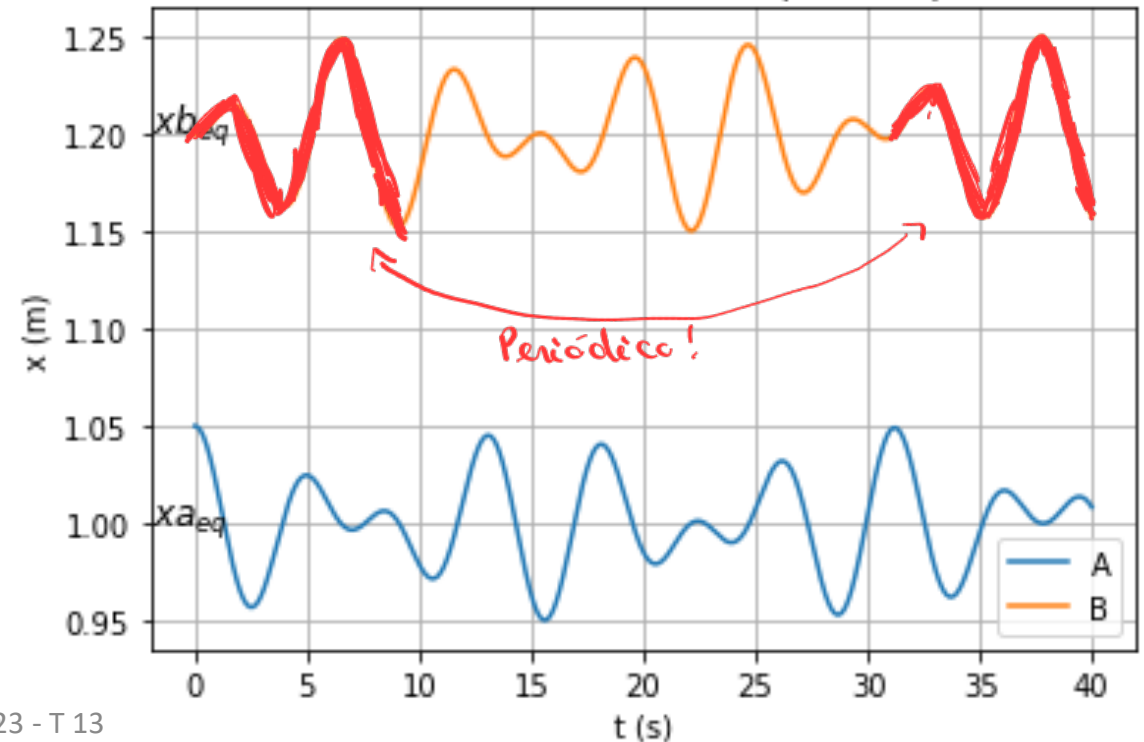
$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$



2 Osciladores Harmônicos Simples Acoplados



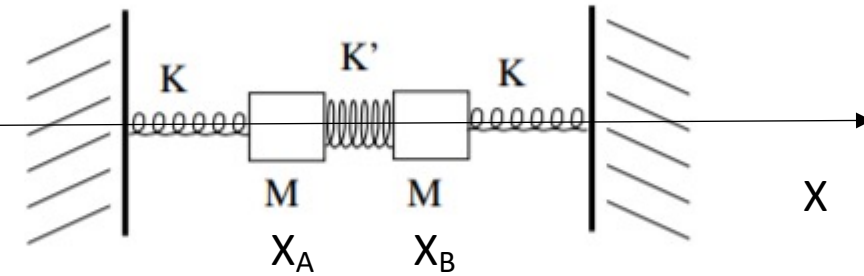
Movimento não parece periódico.

Temos de aumentar o instante final para se verificar se existe repetição.

→ É periódico!

Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k' , e ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k



Corpo A $m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k (x_A - x_{Aeq}) - k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

Corpo B $m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k (x_B - x_{Beq}) + k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}; x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$

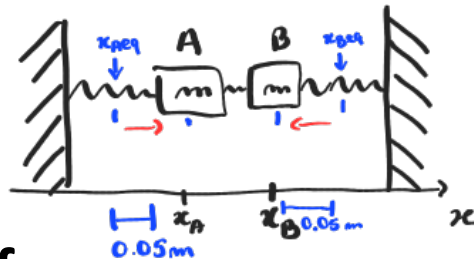
Condições iniciais:

Igualmente afastados das suas posições de equilíbrio

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq} + 0.05 \text{ m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$

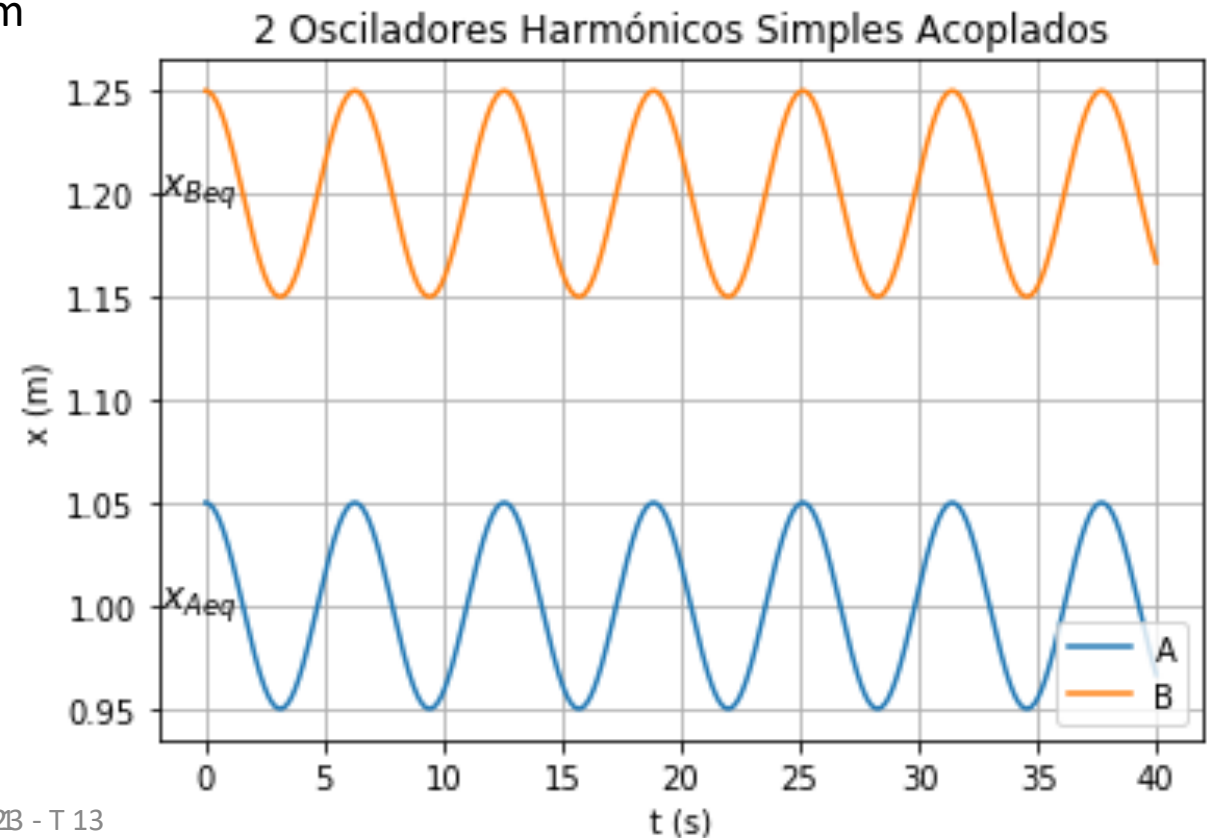


A mola do meio não interfere

Movimento periódico harmónico

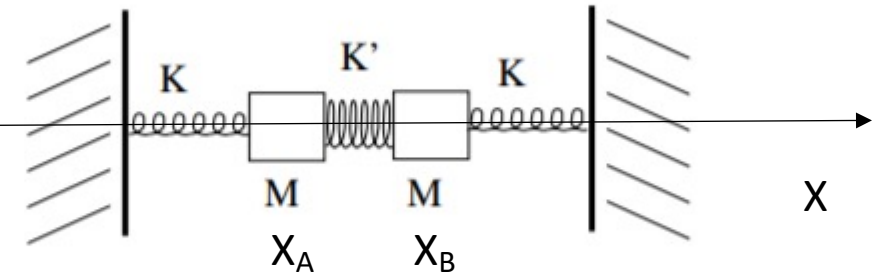
$$T = 6.283 \text{ s} \quad A = x_{eq} + 0.05 \text{ m}$$

$$\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$$



Osciladores Acoplados

2 corpos A e B acoplados através de uma mola de constante elástica k' , e ligados a um ponto fixo através de molas de constante elástica k



Corpo A $m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k (x_A - x_{Aeq}) - k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

Corpo B $m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k (x_B - x_{Beq}) + k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}; x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$

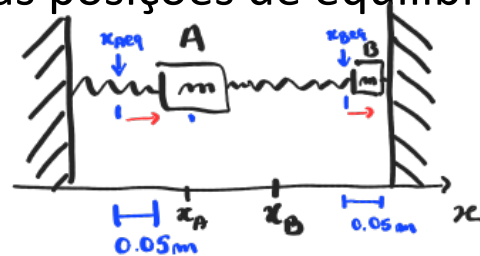
Condições iniciais:

Igualmente afastados das suas posições de equilíbrio

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq} - 0.05 \text{ m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$

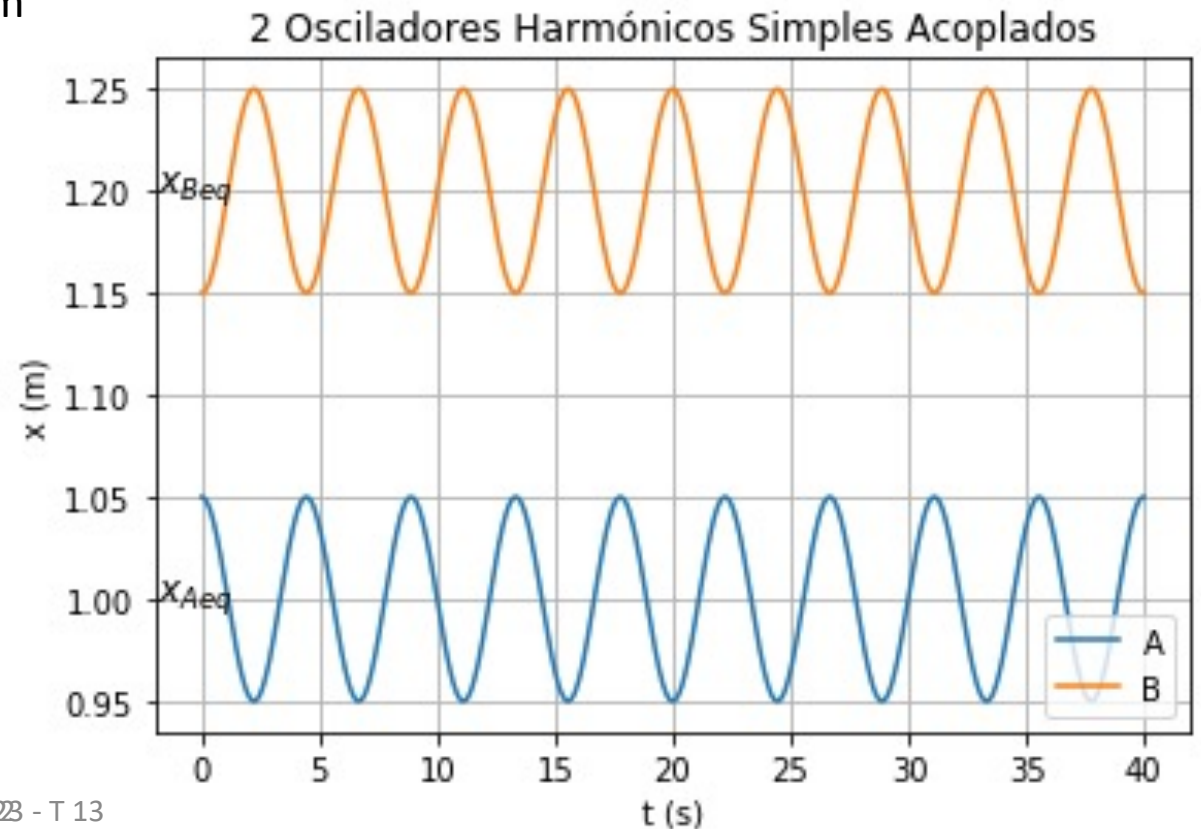


Corpos com movimento em espelho

Movimento periódico harmónico

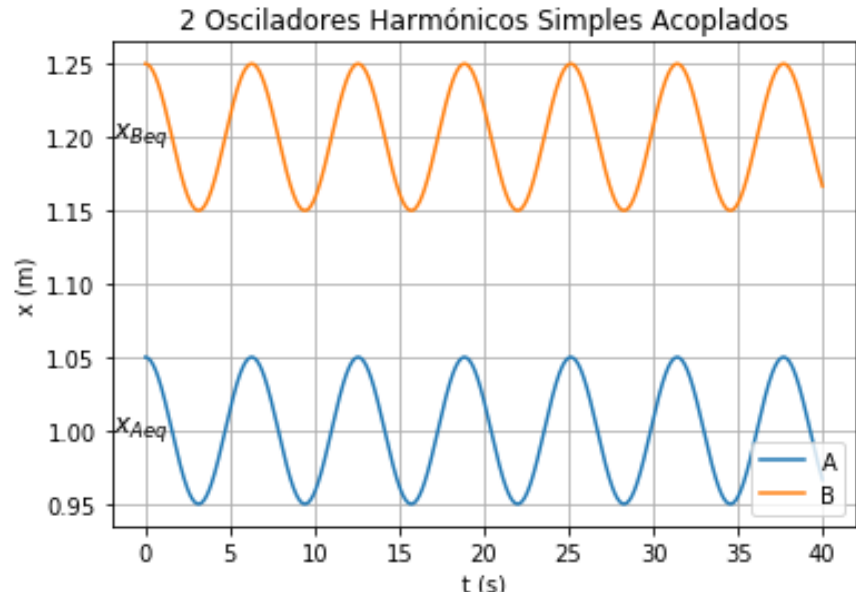
$$T = 4.442 \text{ s} \quad A = x_{eq} + 0.05 \text{ m}$$

$$\omega_2 = 1.414 \text{ rad/s}$$

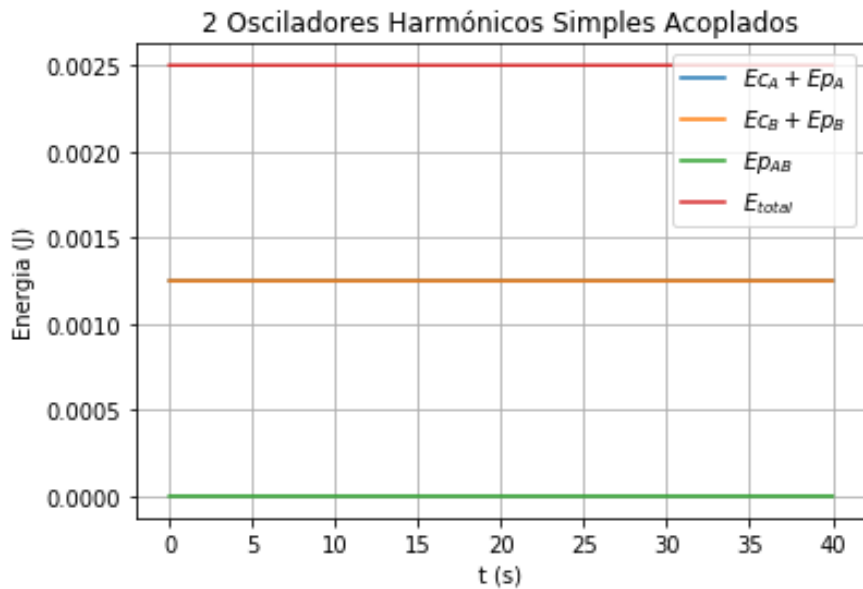


Modos Normais

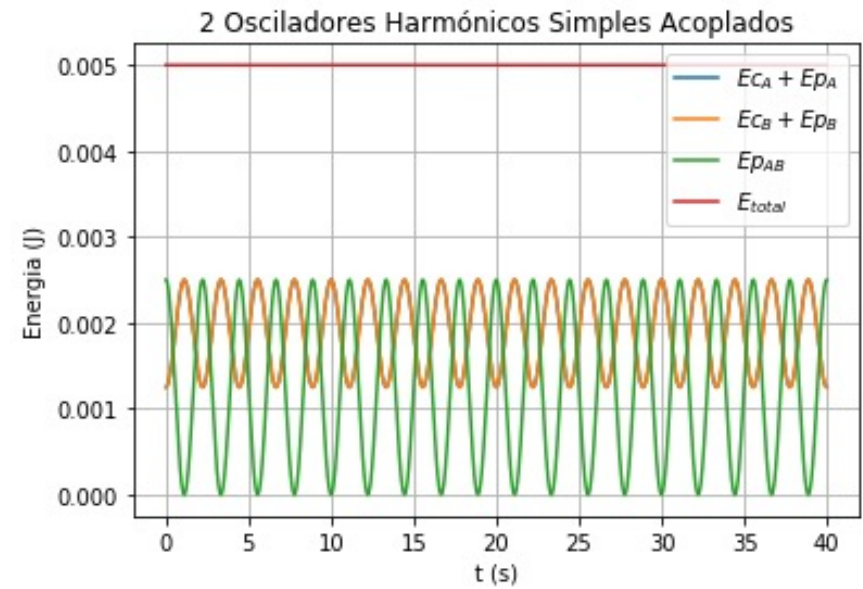
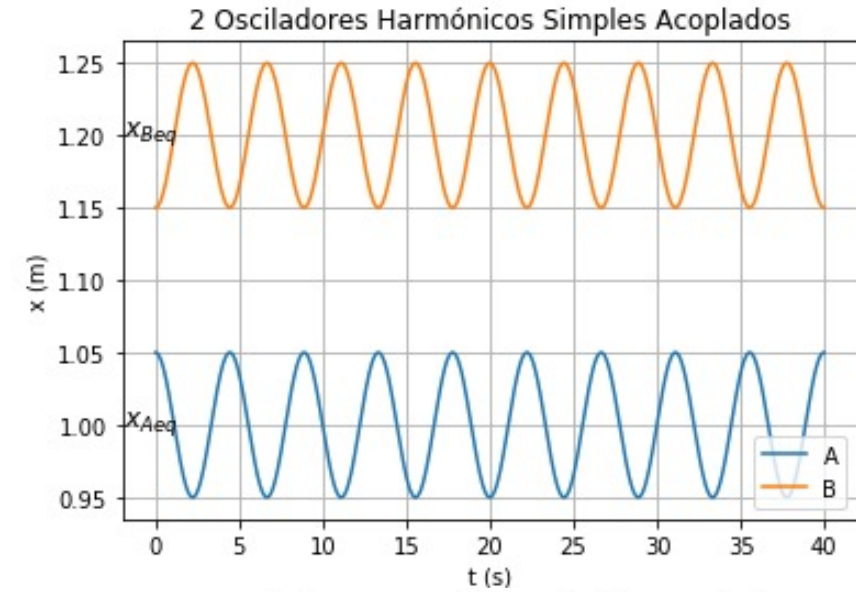
Modo normal 1 $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$



movimento
sinusoidal simples



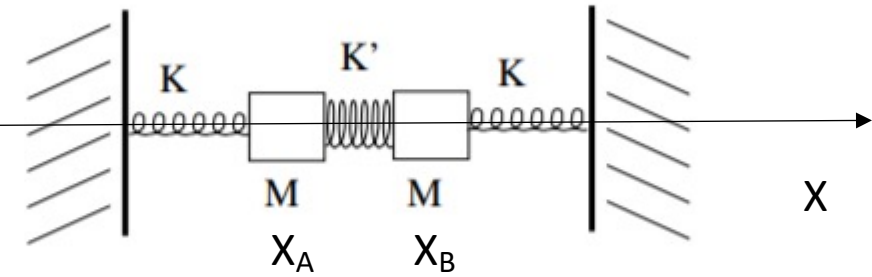
Modo normal 2 $\omega_2 = 1.414 \text{ rad/s}$



Modos Normais

Corpo A $m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

Corpo B $m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$



$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m}$ $x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$

Condições iniciais:

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$

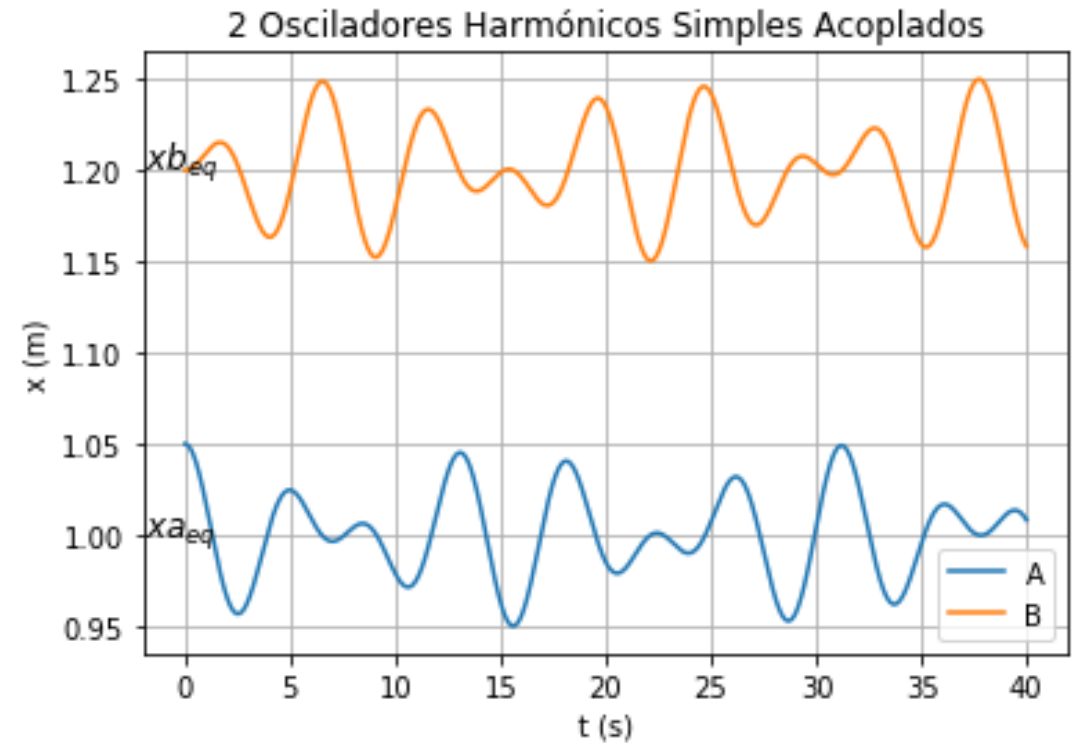
$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Movimento não periódico

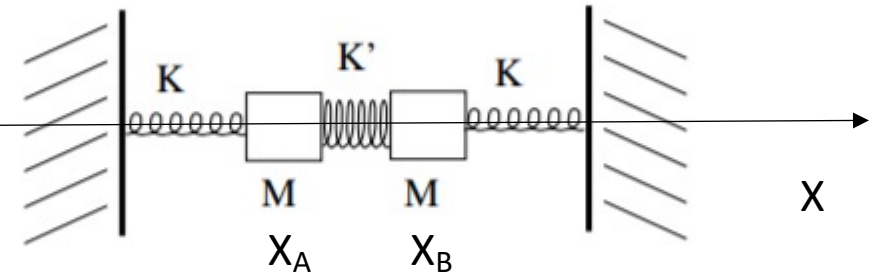
É uma sobreposição dos modos normais?

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} ?$$



Modos Normais

$$\begin{aligned} \text{Corpo A} \quad m \frac{d^2 x_A}{dt^2} &= F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) \\ \text{Corpo B} \quad m \frac{d^2 x_B}{dt^2} &= F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) \end{aligned}$$



Substituindo

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

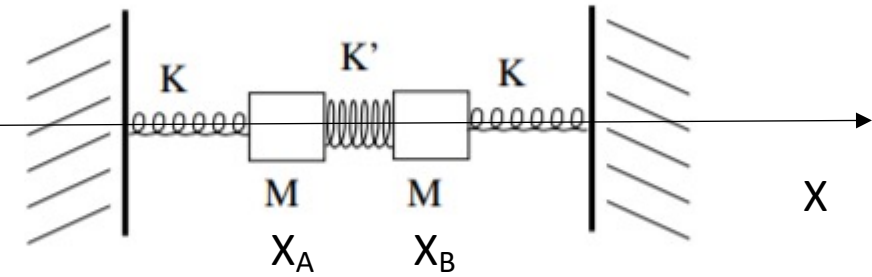
Obtêm-se (problema de valores e vetores próprios): $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$

Sobreposição dos dois modos normais é solução válida.

E as amplitudes e as fases iniciais: A_1, A_2, ϕ_1 e ϕ_2 ?

Modos Normais

$$\begin{aligned} \text{Corpo A} \quad m \frac{d^2 x_A}{dt^2} &= F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) \\ \text{Corpo B} \quad m \frac{d^2 x_B}{dt^2} &= F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) \end{aligned}$$

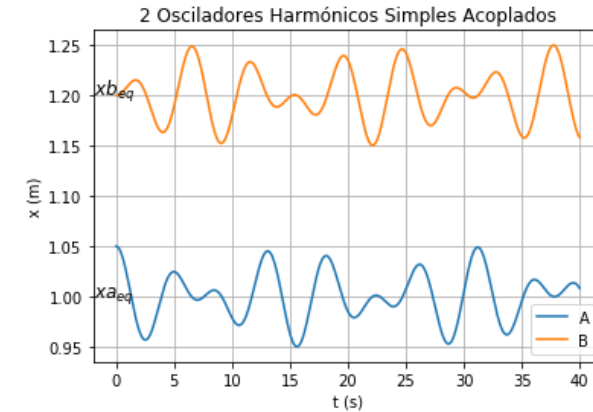


$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$



$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ v_{xA} = -\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) - \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ v_{xB} = -\omega_1 A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + \omega_2 A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

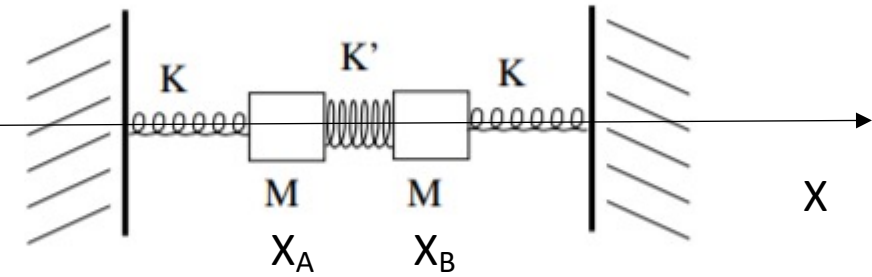
$$\text{para } t = 0 \quad \begin{cases} x_{eqA} + 0.05 = x_{eqA} + A_1 \cos(\phi_1) + A_2 \cos(\phi_2) \\ x_{eqB} = x_{eqB} + A_1 \cos(\phi_1) - A_2 \cos(\phi_2) \\ 0 = -\omega_1 A_1 \sin(\phi_1) - \omega_2 A_2 \sin(\phi_2) \\ 0 = -\omega_1 A_1 \sin(\phi_1) + \omega_2 A_2 \sin(\phi_2) \end{cases}$$

4 equações a 4 incógnitas.

$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad \text{e} \quad A_1 = A_2 = 0.025 \text{ m}$$

Modos Normais

$$\begin{aligned} \text{Corpo A} \quad m \frac{d^2 x_A}{dt^2} &= F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) \\ \text{Corpo B} \quad m \frac{d^2 x_B}{dt^2} &= F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) \end{aligned}$$

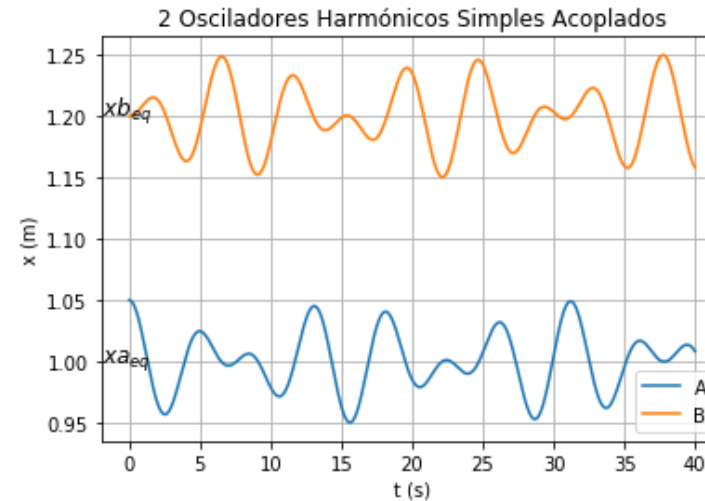


$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$



Movimento não periódico

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Certo! Com $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$

Mas é uma sobreposição de 2 movimentos harmônicos

Qualquer movimento de 2 corpos acoplados por interação elástica é uma sobreposição de MODOS NORMAIS

Modos Normais

Corpo A $m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k (x_A - x_{Aeq}) - k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

Corpo B $m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k (x_B - x_{Beq}) + k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq}))$

$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m}$ $x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$ $k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$

$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Problema 9.1:

Obter a evolução dos corpos A e B

a) Usando o método de Euler-Cromer

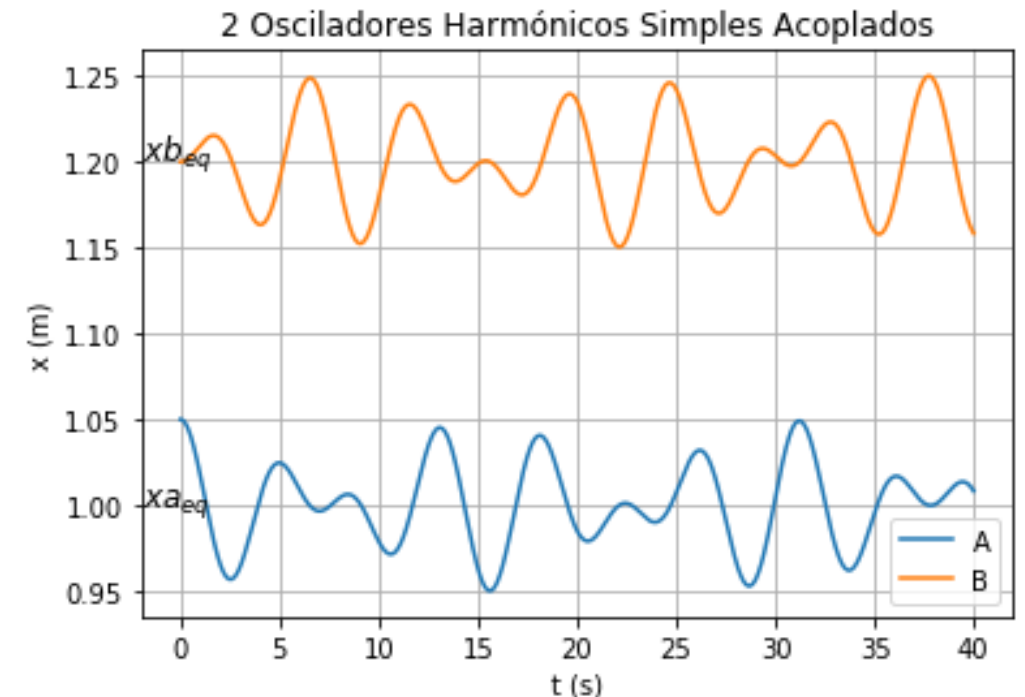
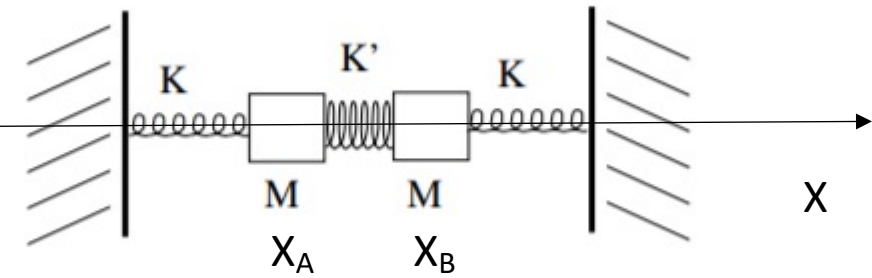
b) usando a sobreposição dos modos normais

$$\begin{cases} x_A(t) = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B(t) = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

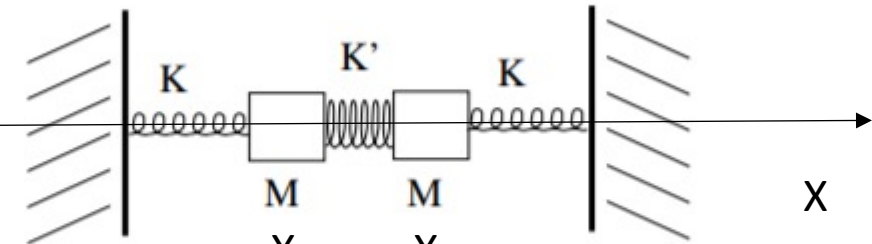
Com $\phi_1 = \phi_2 = 0$ e $A_1 = A_2 = 0.025 \text{ m}$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = 1.414 \text{ rad/s}$

c) e verificar que as soluções encontradas são a mesma (iguais)



Modos Normais



Amortecido:

Corpo A $m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k (x_A - x_{Aeq}) - k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - b v_{Ax}$

Corpo B $m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k (x_B - x_{Beq}) + k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - b v_{Bx}$

$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$

$b = 0.05$

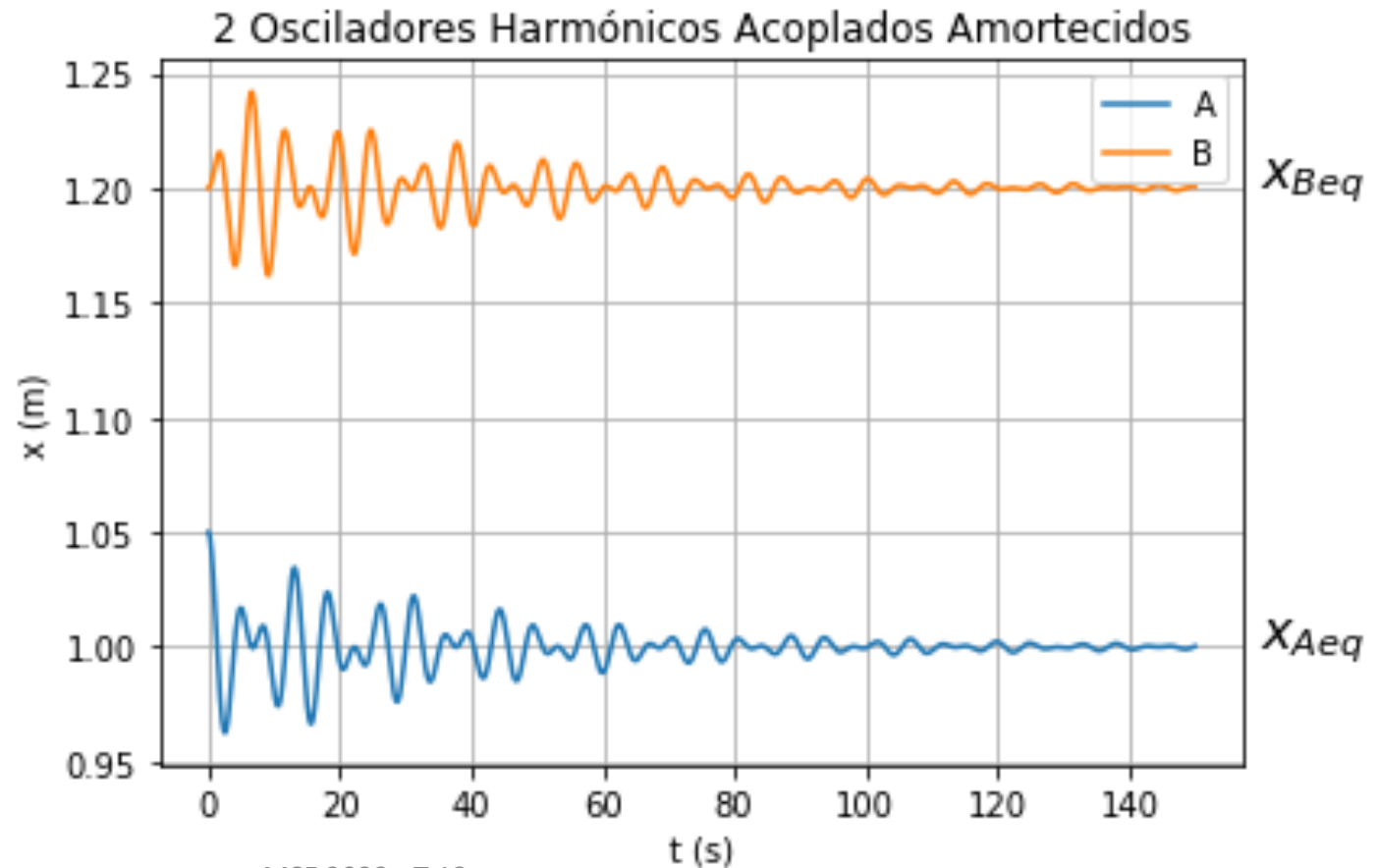
$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$

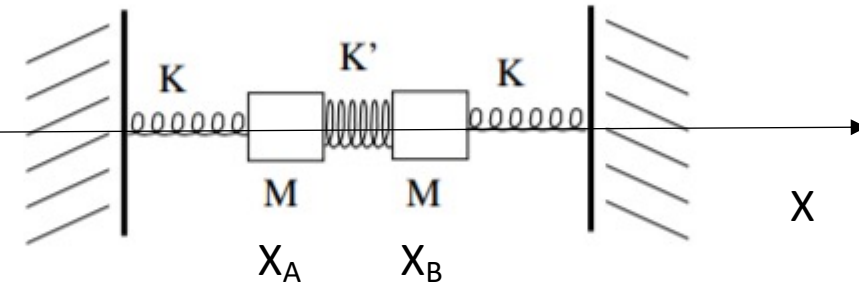
$x_{B0} = x_{Beq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$

Ambos os osciladores tendem para a
Sua posição de equilíbrio



Modos Normais



Forçado no corpo A:

$$\text{Corpo A} \quad m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k (x_A - x_{Aeq}) - k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - b v_{Ax} + F_0 \cos(\omega_f t)$$

$$\text{Corpo B} \quad m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k (x_B - x_{Beq}) + k' ((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - b v_{Bx}$$

$$k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5 \frac{\text{N}}{\text{m}}; m = 1 \text{ kg}$$

$$b = 0.05 \text{ kg/s}$$

$$F_0 = 0.005 \text{ N}; \omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

$$x_{Aeq} = 1.0 \text{ m} \quad x_{Beq} = 1.2 \text{ m}$$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq} + 0.05 \text{ m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$$

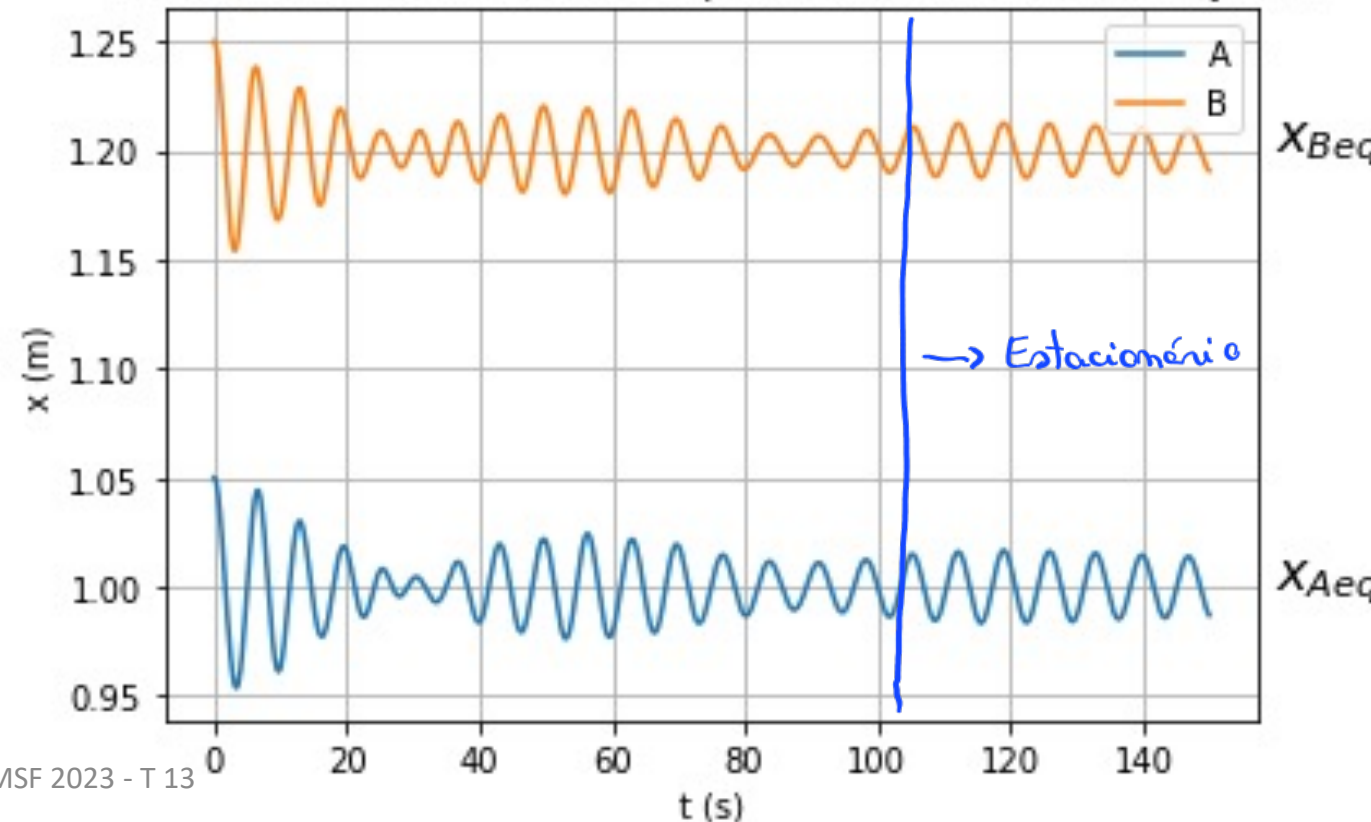
Cada oscilador tende para um regime estacionário

Harmónico simples. (?)

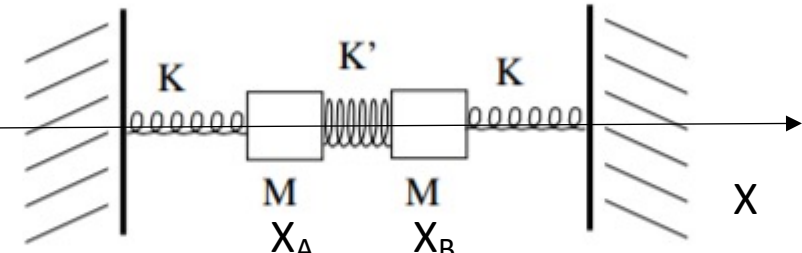
Podemos calcular

a amplitude, a frequência e a forma sinusoidal.

2 Osciladores Harmónicos Acoplados Amortecidos e Forçados



Modos Normais



Forçado no corpo A:

$$\text{Corpo A} \quad m \frac{d^2 x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k(x_A - x_{Aeq}) - k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - b v_{Ax} + F_0 \cos(\omega_f t)$$

$$\text{Corpo B} \quad m \frac{d^2 x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k(x_B - x_{Beq}) + k'((x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})) - b v_{Bx}$$

$$\Rightarrow \omega_0 \approx \omega_f$$

Ressonância nos dois corpos na **frequência dos modos normais** (como no caso de um oscilador)

• 2 frequências de vibração

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1 \text{ rad/s} \text{ e } \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}} = 1.414 \text{ rad/s}$$

