Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

4ª Aula Teórica

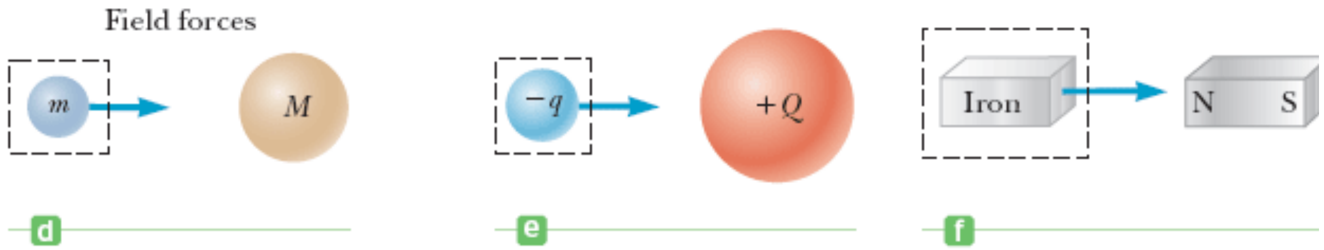
Sumário:
Cap. 3 Forças e vetores

Bibliografia:
Cap. 3: Serway, cap. 3 e 5; Sørenssen, cap. 5 e 6; Villate, cap. 4

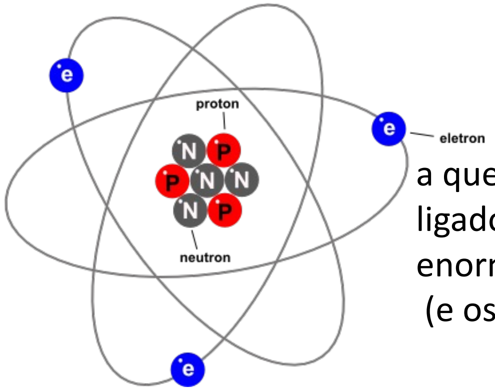
Força = massa × aceleração

Forças alteram o movimento

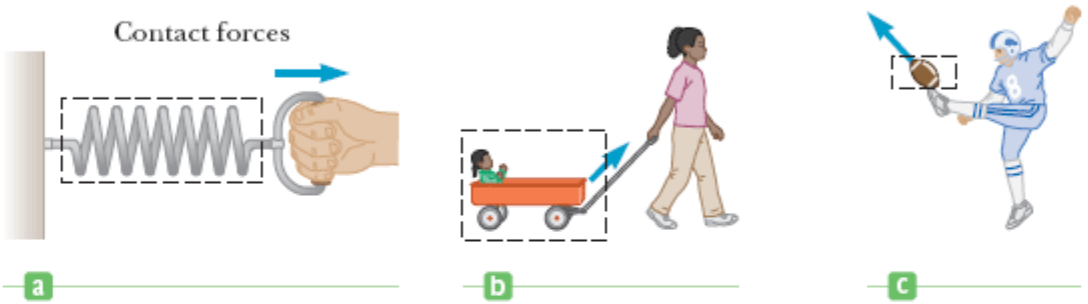
Força gravitacional   Força elétrica   Força magnética

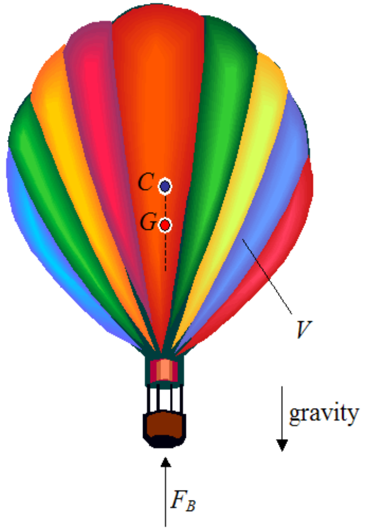


Força nuclear

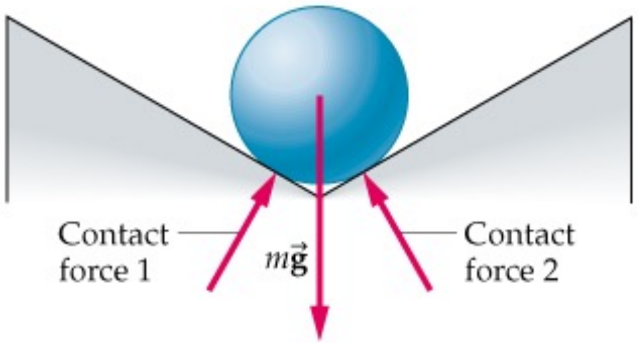


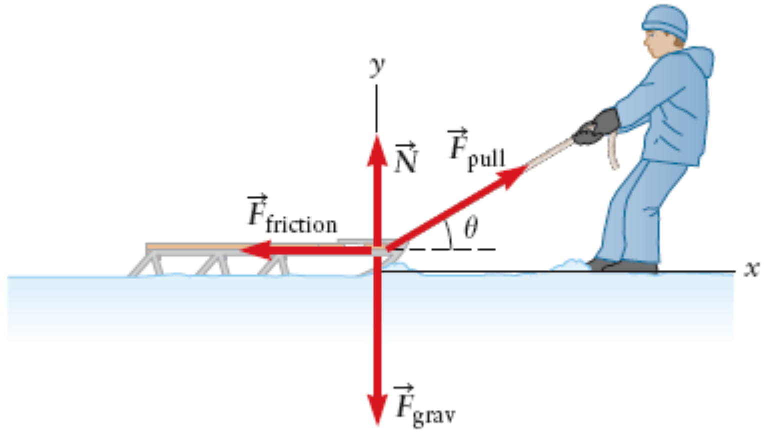
a que mantem os protões ligados, mais forte que a enorme forte repulsão elétrica (e os neutrões ligados)





Impulsão

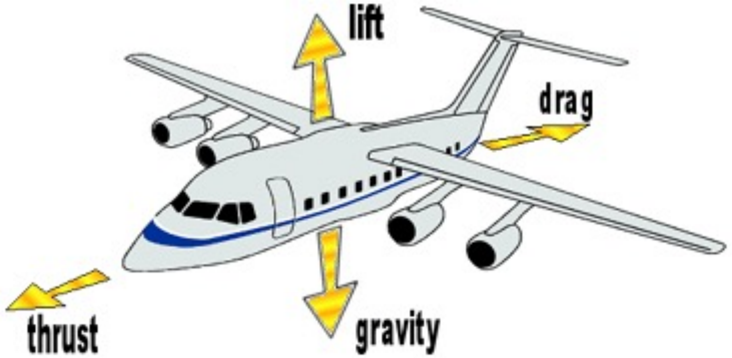


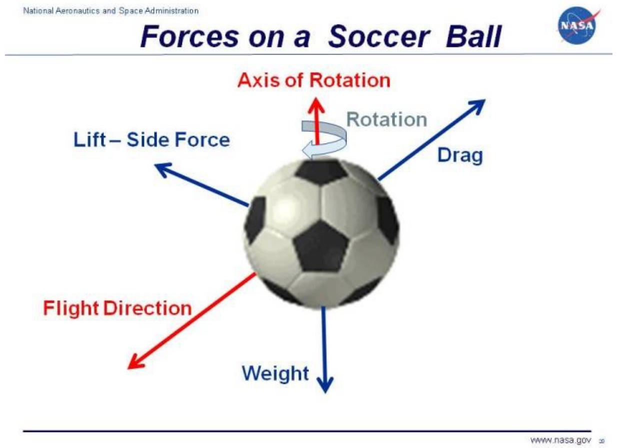


FORÇA é um VETOR

indica-se $\vec{F}$

a sua intensidade por $|\vec{F}|$





Os princípios da Mecânica:

Isaac Newton 1642 - 1726

1ª lei de Newton: Quando $\vec{F} = 0$, $a = 0$
o corpo ou está parado ou move-se a uma velocidade constante.

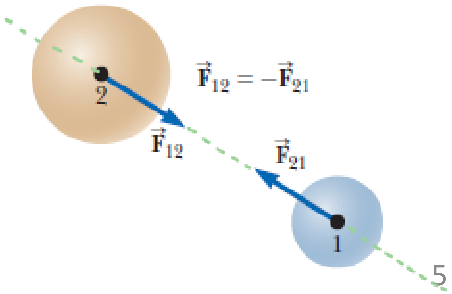
2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.
A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo.
É a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

3ª lei de Newton: Quando 2 corpos interatuam,
$\vec{F}_{12}$ a força no corpo 1 devido à interação com o corpo 2, e
$\vec{F}_{21}$ a força no corpo 2 devido à interação com corpo 1,

ângulo da linha entre eles

$$\vec{F}_{12} = \boxed{-}\vec{F}_{21}$$

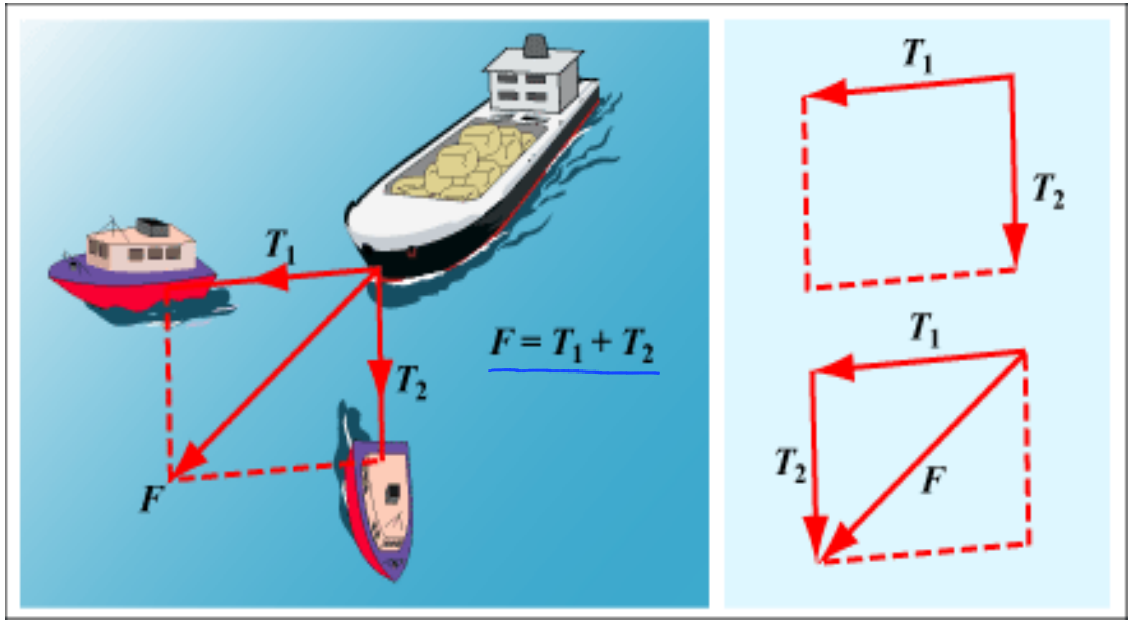


2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.
A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo.
A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

Se as forças aplicadas ao um objeto forem conhecidas,
pode-se determinar o movimento do objeto – a sua posição e velocidade.

Forças determinam-se por experiências
Ou por modelos teóricos, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.

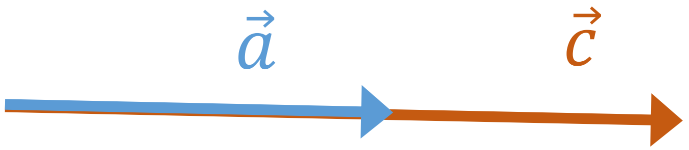


T_1
T_2
F
$F = T_1 + T_2$
T_1
T_2
T_1
T_2
F

Cap. 3 Forças e vetores

Vetor $\vec{a}$

$|\vec{a}|$ = módulo ou norma = intensidade, magnitude ou comprimento de $\vec{a}$



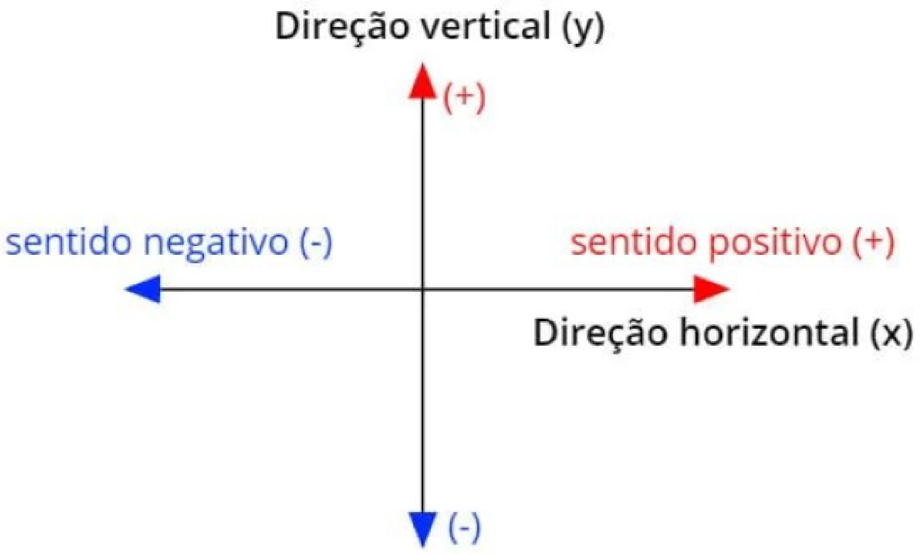
$\vec{c} = \lambda\vec{a}$ outro vetor, mesma direção, magnitude diferente

$$|\vec{c}| = |\lambda||\vec{a}|$$

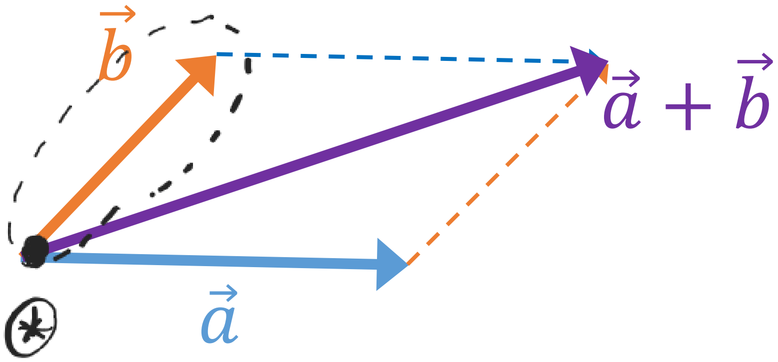
Vetor unitário: $\hat{\imath}$ tem $|\hat{\imath}|$= 1

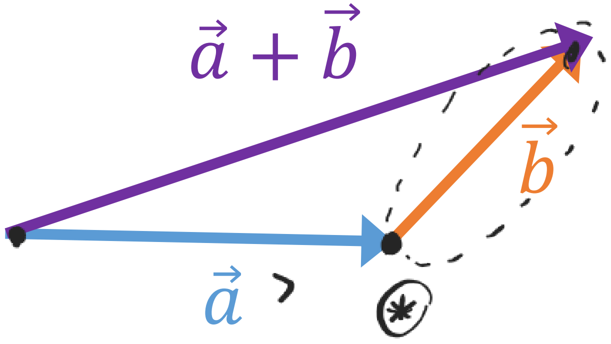
usado para indicar direção e sentido

$$\text{ex. } \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow \vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$$

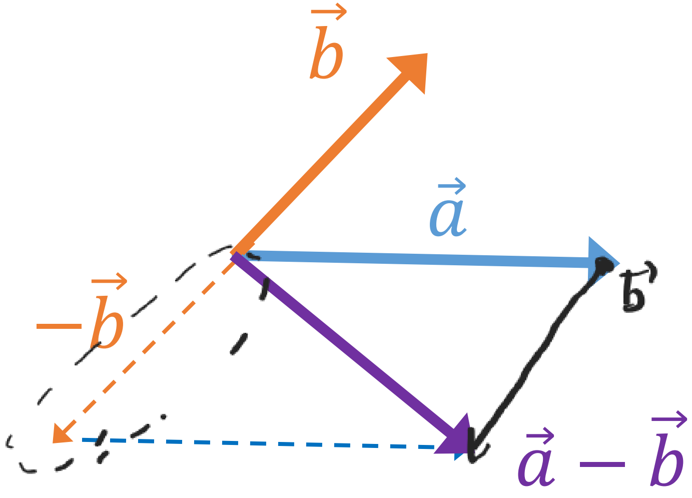


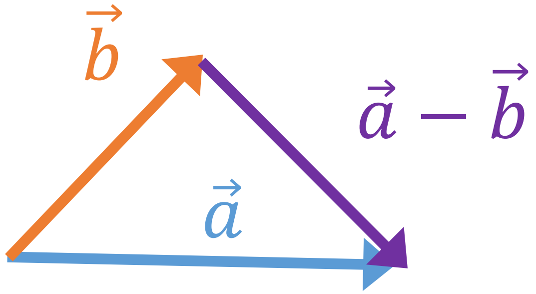
Soma de 2 vetores



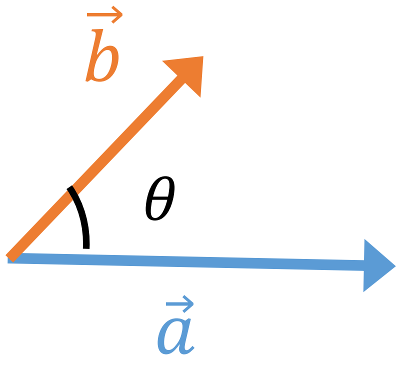


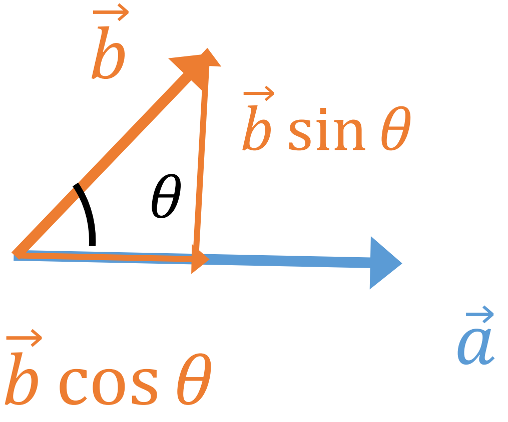
Diferença de 2 vetores





Produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$





projeção de $\vec{b}$ na direção (e sentido) de $\vec{a}$

também chamado produto interno

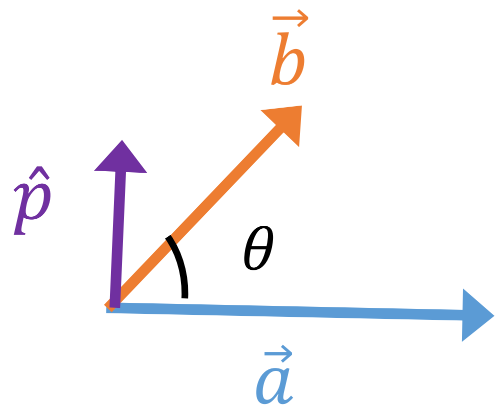
- Maior quando os vetores são mais alinhados
- Zero quando são perpendiculares

Produto vetorial

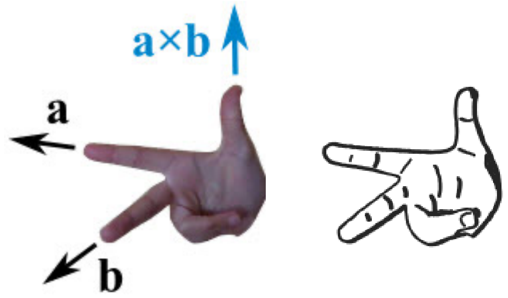
$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{p}$$

vetor unitário perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$

é um vetor perpendicular a amobs os vetores



Sentido de $\hat{p}$



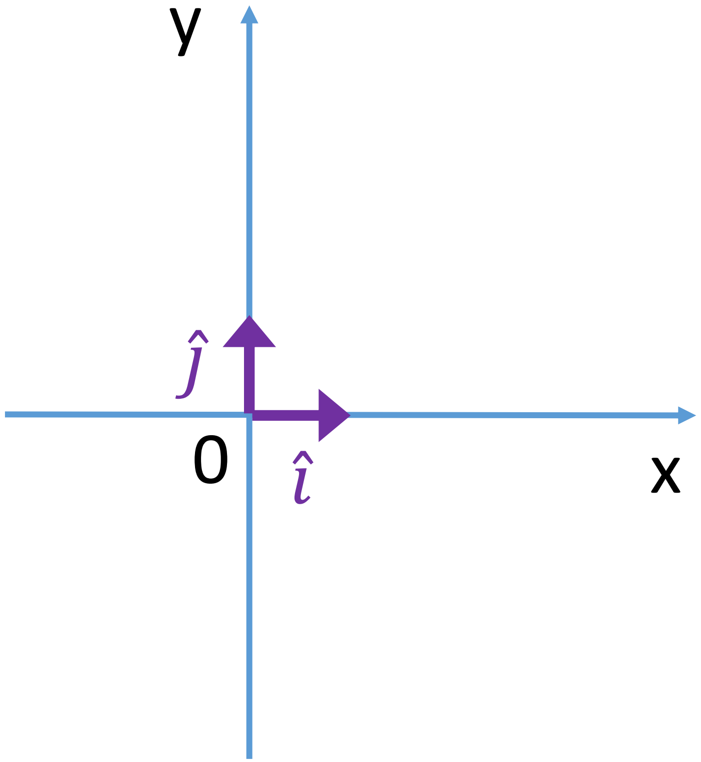
também chamado produto externo

- Máximo quando os vetores são perpendiculares
- Zero quando são paralelos

$$\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$$

Vetores em referenciais cartesianos

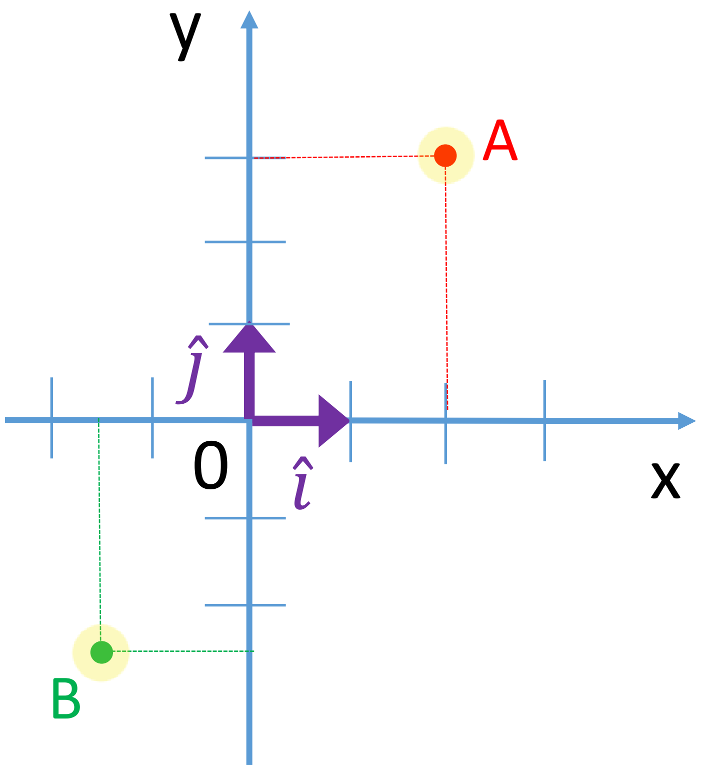
2 dimensões



$$|\hat{\imath}| = 1$$
$$|\hat{\jmath}| = 1$$
$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = 0$$

Vetores em referenciais cartesianos

2 dimensões



Posições dos pontos

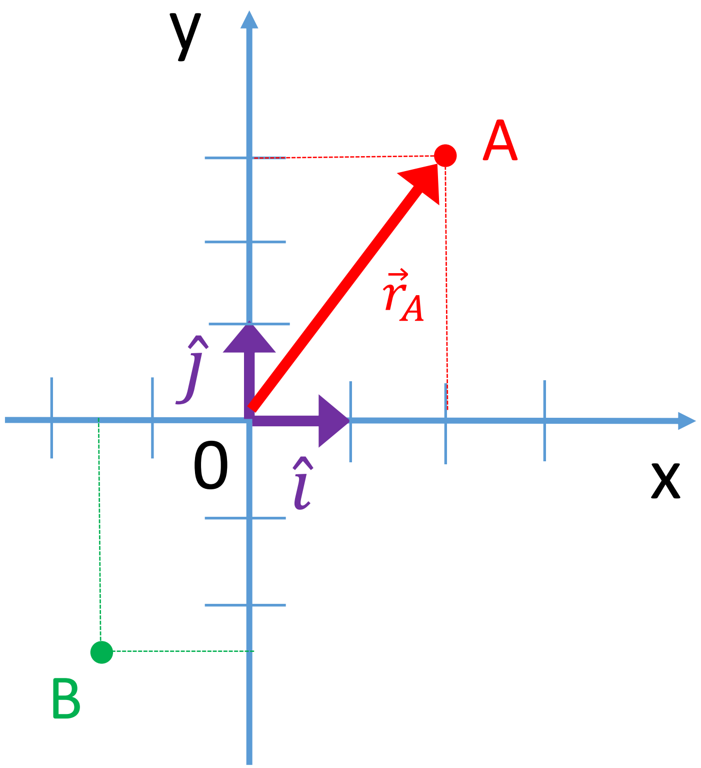
Orígem (0,0)

A em (2,3)

B em (-1.5,-2.5)

Vetores em referenciais cartesianos

2 dimensões



Posição A também indicada por um vetor $\vec{r}_A$, do orígem ao ponto A.

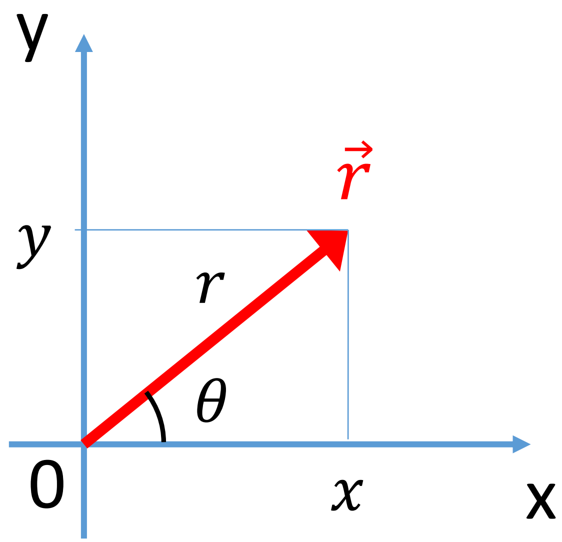
$\vec{r}_A = \vec{r}_{Ax} + \vec{r}_{Ay}$

$\vec{r}_{Ax} = A_x\hat{\imath}$ componente paralelo ao eixo X
$\vec{r}_{Ay} = A_y\hat{\jmath}$ componente paralelo ao eixo Y

$$A_x = \vec{r}_A \cdot \hat{\imath}$$
$$A_y = \vec{r}_A \cdot \hat{\jmath}$$

$\vec{r}_A = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$

Espaço a 2D – coordenadas polares



Vetor $\vec{r}$ definido por dois valores

(x, y) coordenadas cartesianas

$$x = \vec{r} \cdot \hat{\imath} = |\vec{r}| \cos\theta$$

$$y = \vec{r} \cdot \hat{\jmath} = |\vec{r}| \sin\theta$$

ou

(r, θ) coordenadas polares

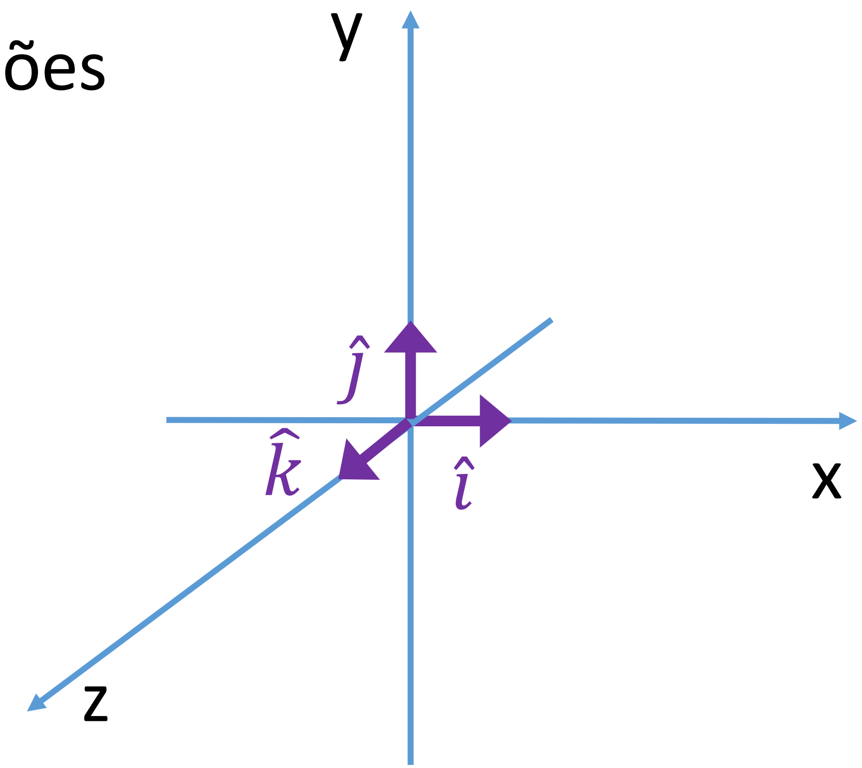
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} x / \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{"hipotenusa"}}$$

$$= \sin^{-1} y / \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vetores em referenciais cartesianos

3 dimensões

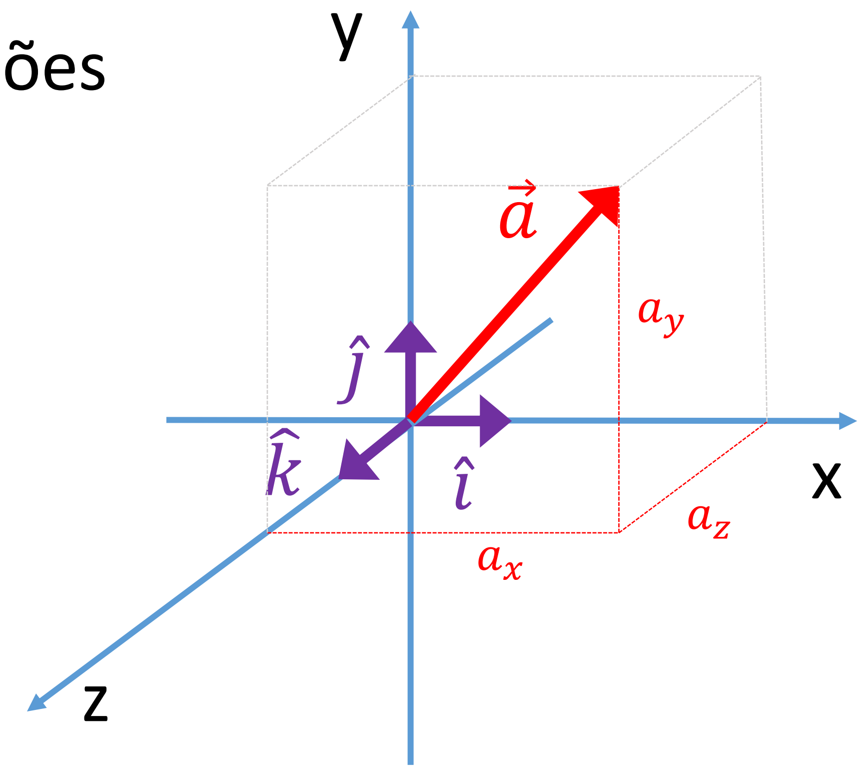


$$|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$
$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath} \quad \hat{\imath}\times\hat{k} = -\hat{\jmath}$$

Vetores em referenciais cartesianos

3 dimensões



$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$
$$= a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

Produto escalar

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k})$$

$$= a_x b_x \underbrace{\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}}_{1} + a_y b_y \underbrace{\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}}_{1} + a_z b_z \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}}_{1}$$

desde que $\boxed{\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$ **escalar**

$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = 1$ etc.

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

Produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{\imath} \times \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \times \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{z} \times \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\,(a_y b_z - a_z b_y) - \hat{\jmath}\,(b_z a_x - a_z b_x) + \hat{z}\,(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

calcular o determinante

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

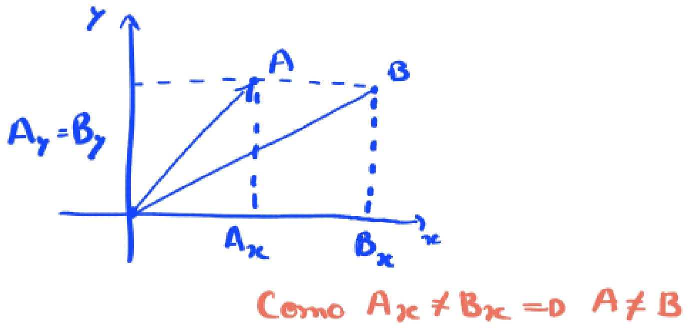
Ex.

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0)\hat{\imath} + (0 - 0)\hat{\jmath} + (1 - 0)\hat{k}$$

$$= \hat{k}$$

Igualdade entre vetores



$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

$$\vec{c} = c_x\hat{\imath} + c_y\hat{\jmath} + c_z\hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$$

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

Problemas

A. Considere

$\vec{a}$=(1,2,0) e $\vec{b}$=(3,-2,2).

Calcule

a) A sua soma $\vec{a} + \vec{b} = (4,0,2)$

b) A sua diferença $\vec{a} - \vec{b} = (-2,4,-2)$

c) O seu produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1\times 3 + 2\times(-2) + 0\times 2 = -1$

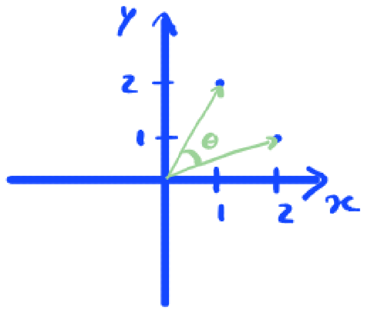
d) O seu produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-0) - \hat{j}(2-0) + \hat{k}(-2-6)$$

$$= (4,-2,-8)$$

B. Considere

$\vec{a}$=(2,1,0) e $\vec{b}$=(1,2,0). (Vetores a duas dimensões, pois ambos tem z=0) $\rightarrow$



Calcule

a) O módulo de cada vetor e o ângulo que formam. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\times 1 + 1\times 2 = 4$

$4 = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

b) O seu produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,3)$$