

# Modelação de Sistemas Físicos

## 15ª Aula Teórica

Sumário:

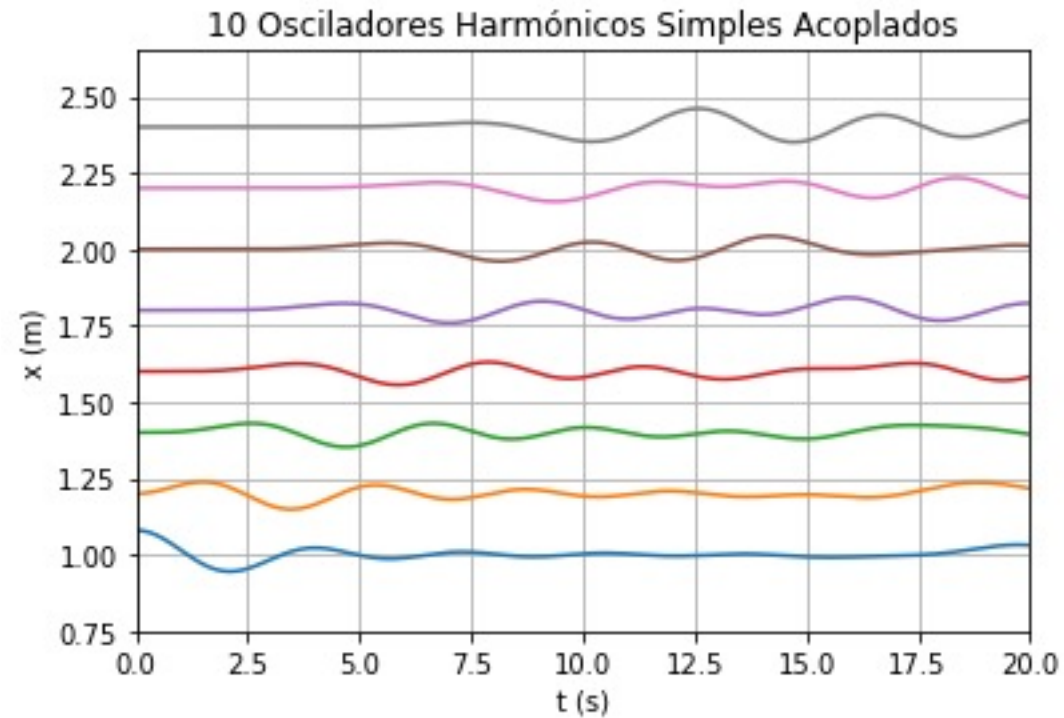
Cap. 9  
Ondas

Bibliografia: Serway Cap. 16

## N osciladores acoplados



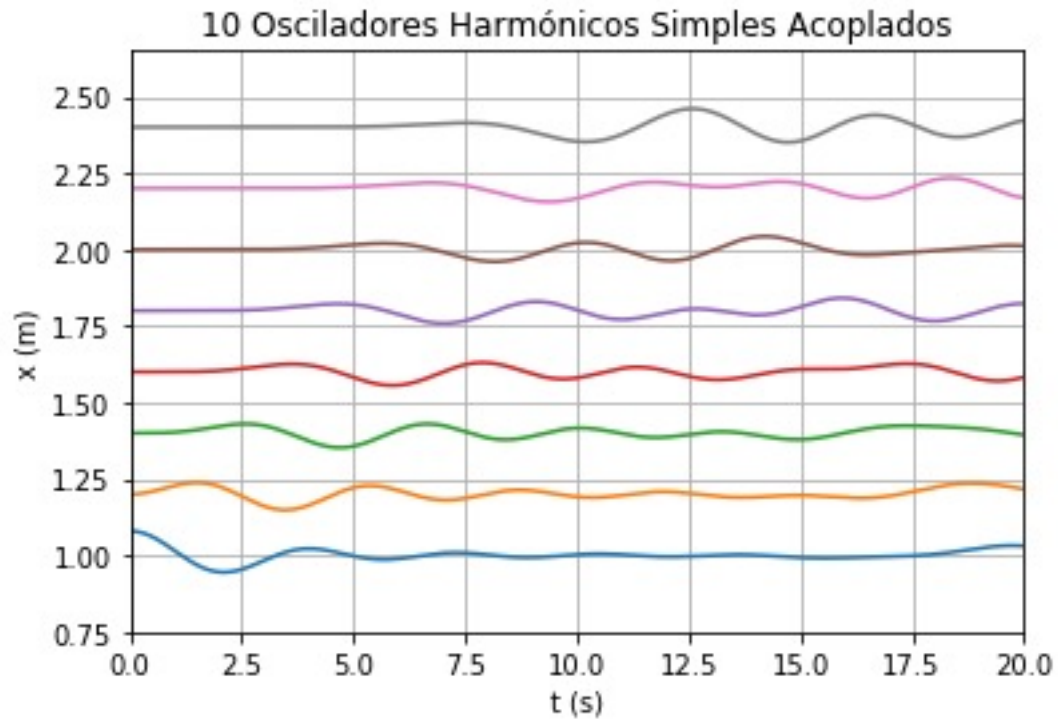
Propagação de um sinal em N osciladores acoplados



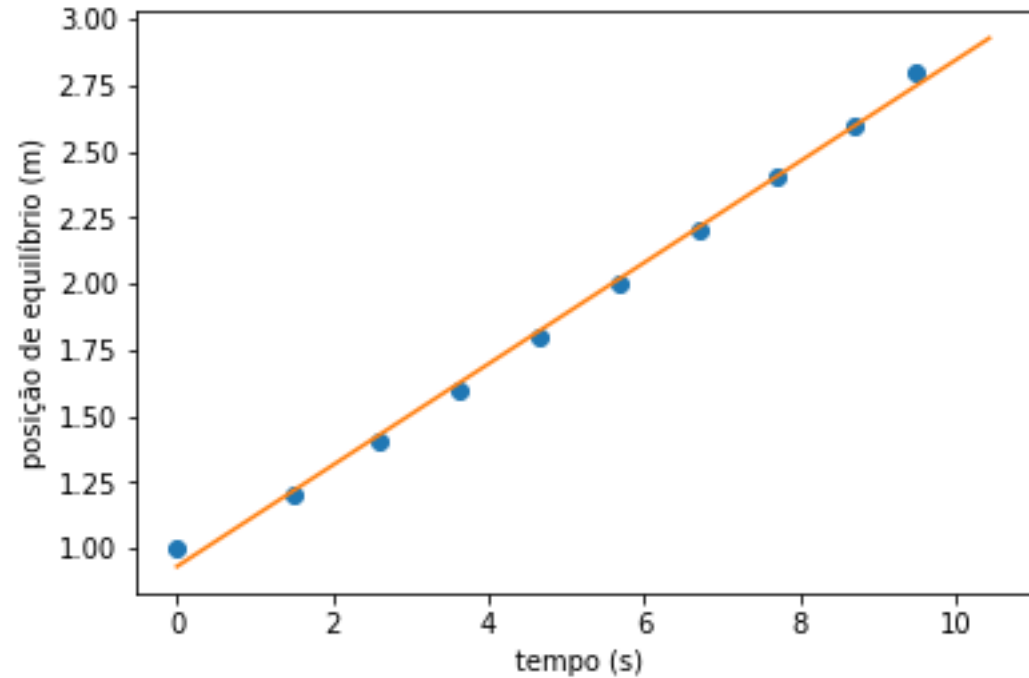
Acoplamentos de osciladores: Transmissão de energia, não instantânea

# N osciladores acoplados

Propagação de um sinal em N osciladores acoplados



Tempo do primeiro máximo

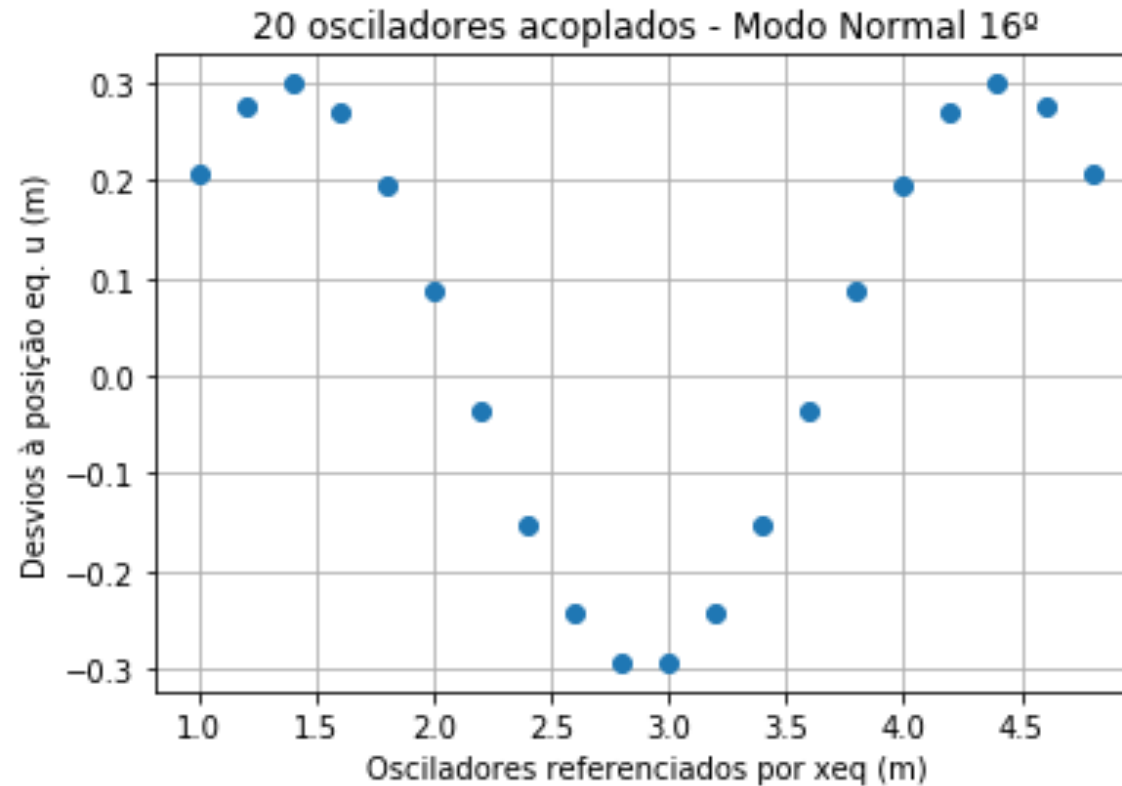


Velocidade de propagação da perturbação  $0.192 \pm 0.004$  m/s

Acoplamentos de osciladores: **Transmissão não instantânea de informação e de energia**

# MODOS NORMAIS

20 osciladores acoplados: modo normal 16º



# N osciladores acoplados

## 6 osciladores acoplados: modos normais

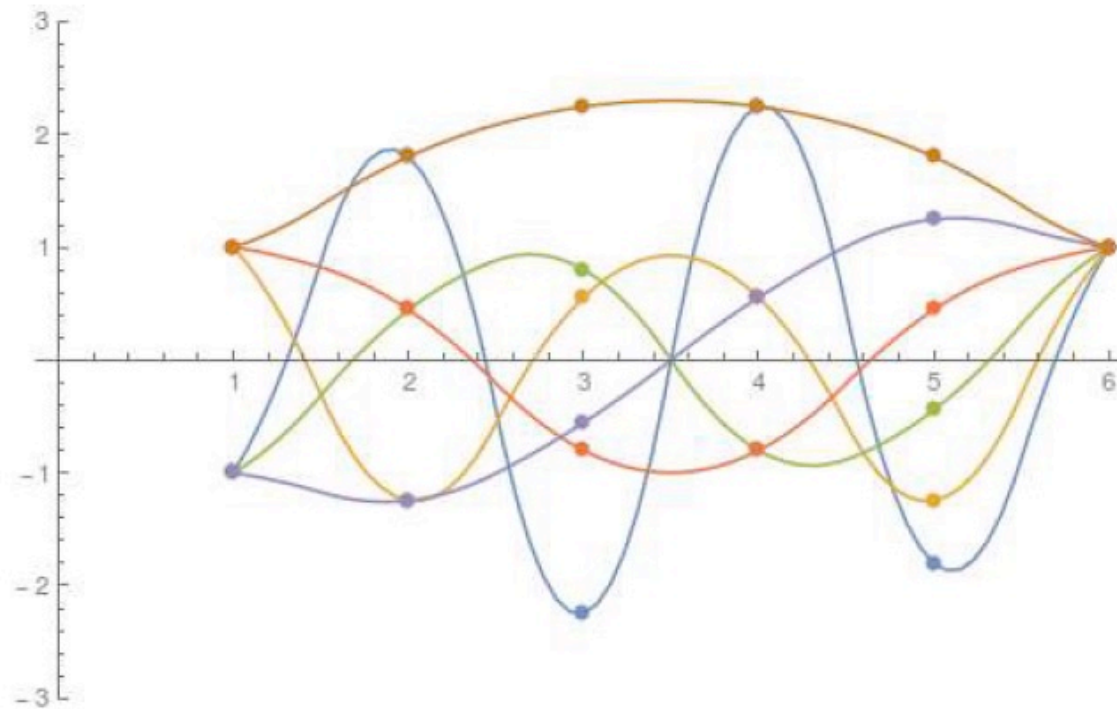


Figure 4. Normal modes displacements for the 6 mass system. These curves look like sine curves.

Os modos normais são um cosseno ou seno em cada corpo!

# MODOS NORMAIS Longitudinais e Transversais

[https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes_en.html)

The screenshot displays the PhET Normal Modes simulation interface. At the top, a horizontal orange line represents a string fixed between two black vertical bars. Three blue squares represent masses on the string. To the right of the string is a control panel with buttons for 'Initial Positions' and 'Zero Positions', a 'Number of Masses' slider set to 3, checkboxes for 'Show Springs' (checked) and 'Show Phases' (unchecked), and playback buttons (pause and play) with radio buttons for 'Normal' (selected) and 'Slow'. Below the string, a 'Normal Modes' panel shows three modes: 1, 2, and 3. Each mode has a corresponding blue wave icon, an amplitude slider, and a frequency value:  $0.77\omega_0$  for mode 1,  $1.41\omega_0$  for mode 2, and  $1.85\omega_0$  for mode 3. To the right of these sliders are two blue buttons with double arrows, one horizontal and one vertical. At the bottom of the interface is a black navigation bar with the text 'Normal Modes' on the left, a home icon, and two tabs labeled 'One Dimension' (active) and 'Two Dimensions'. On the right side of the navigation bar is the PhET logo.

# Onda sinusoidal

## N osciladores acoplados

Cada oscilador com movimento sinusoidal:

$$u_i = A \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$u_i = x_i - x_{i \text{ eq.}}$$

Transmissão de energia, não instantânea:

$$\phi_i \text{ varia com a posição } x_{i \text{ eq.}} : \phi_i = -c x_{i \text{ eq.}} \quad c \text{ constante}$$

variaveis contínuas:

$$\phi = -cx.$$

$$u = A \cos(\omega t - cx) \Rightarrow \textbf{Onda sinusoidal}$$

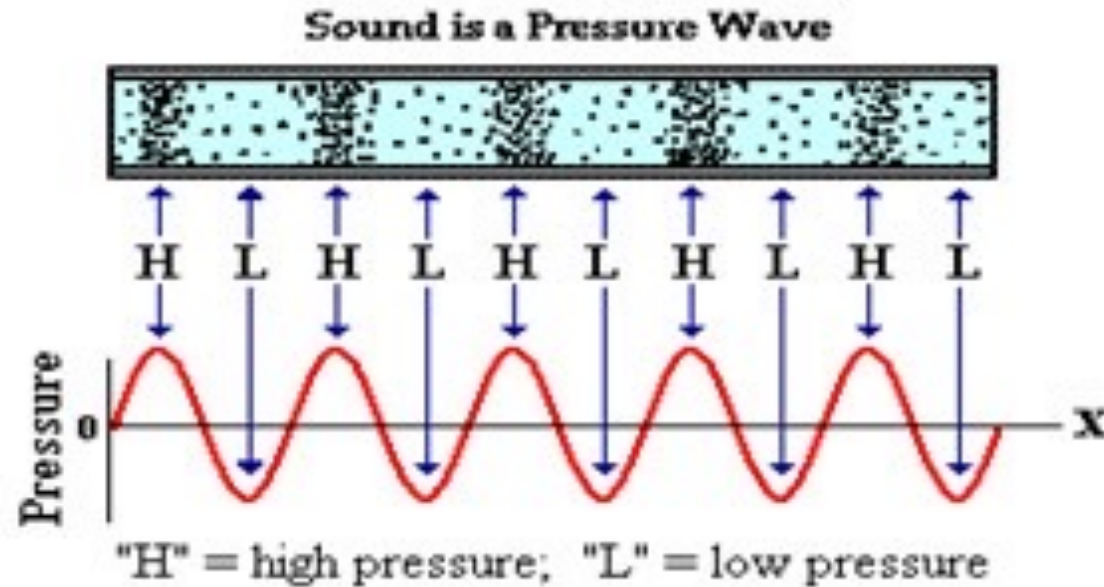
$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega^2 u$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -k^2 u$$

# Ondas

## Ondas longitudinais

perturbação do meio tem a mesma direção da propagação da onda

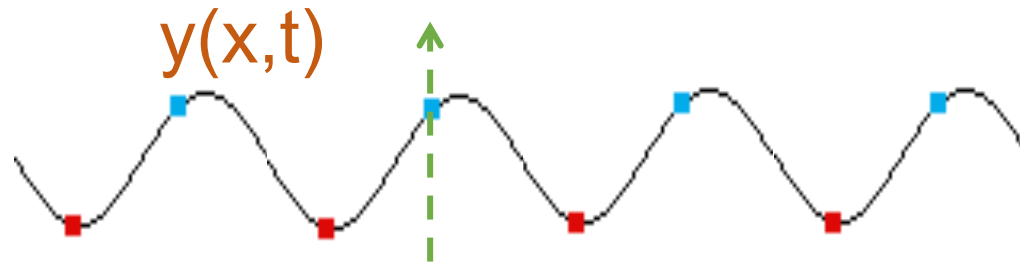




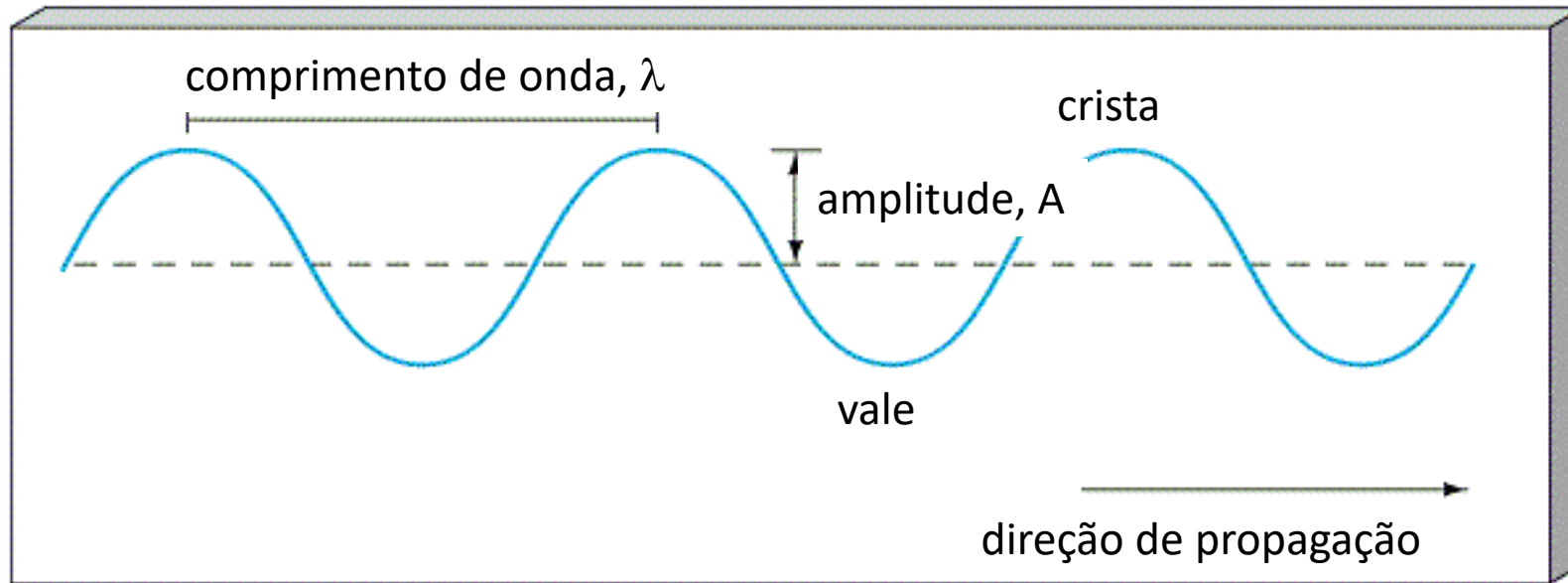
# Ondas

## Ondas transversais

a perturbação do meio é perpendicular à direção de propagação da onda



# Onda



**Repetição no tempo**

$$T$$
$$f = \frac{1}{T}$$
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

frequência angular

MSF 2023 - T 15

**Repetição no espaço**

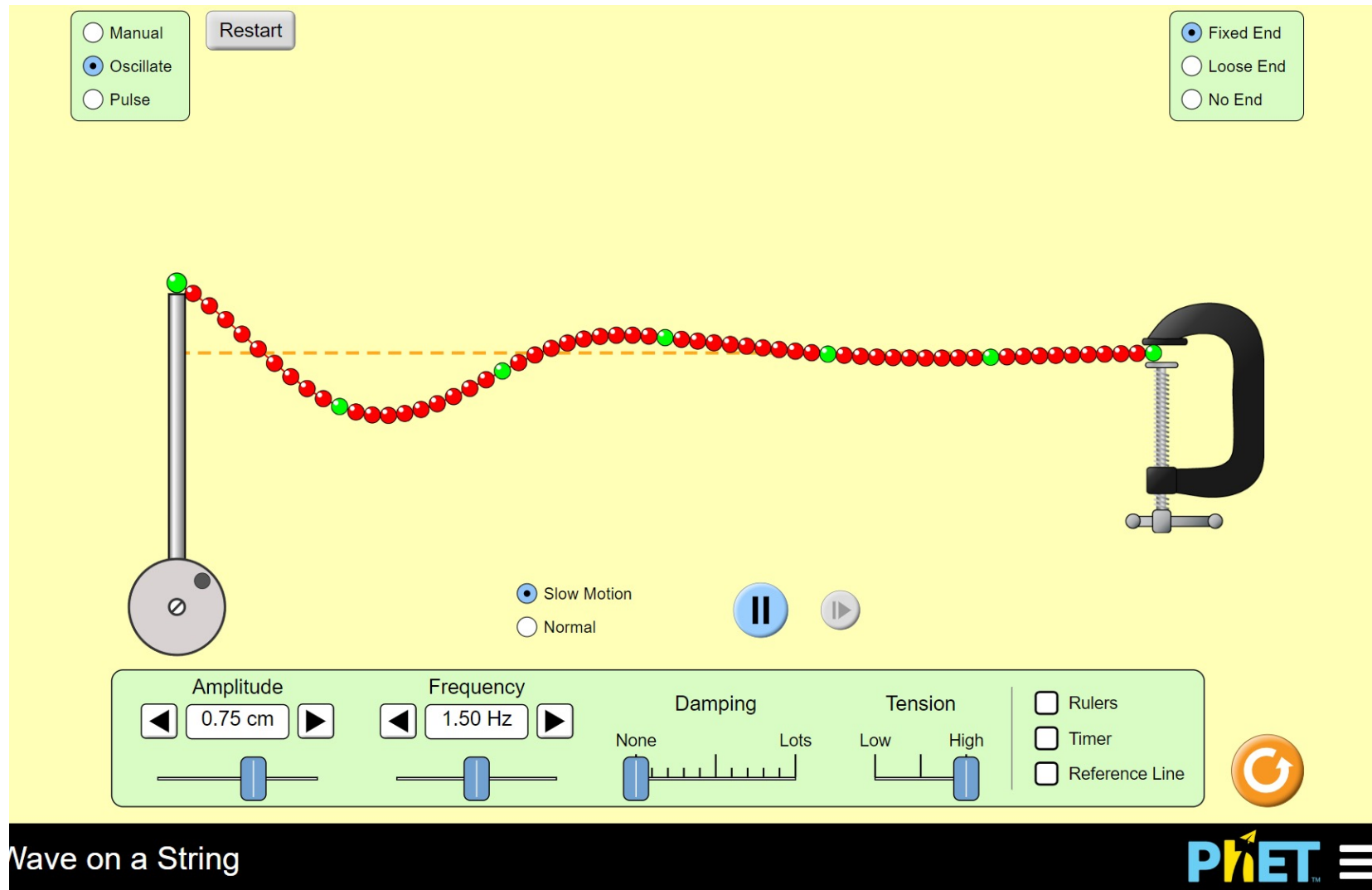
$$\lambda$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

número de onda

11

**Velocidade de propagação**

$$v = \lambda f$$



<https://phet.colorado.edu/pt/simulations/wave-on-a-string>

# Equação da Onda 1D

Com transmissão de energia, o movimento não é necessariamente sinusoidal

Número grande de osciladores acoplados,

Posições  $x_i$  a distância  $\delta x = x_{i+1} - x_i$

Massa  $m = M \delta x$

Ligadas por molas de coeficiente  $k = K/\delta x$

(se aumentar o número de osciladores,  $k$  deve aumentar e  $m$  deve diminuir)

$u_i$  = desvio do ponto de equilíbrio  
Longitudinal ou transversal

Equação de Newton:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u_i}{dt^2} &= k(u_{i+1} - u_i) - k(u_i - u_{i-1}) \\ &= k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \end{aligned}$$

# Equação da Onda 1D

Número grande de osciladores acoplados,  $m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})$

Escrever  $u_i = u(x_i, t)$ , função contínua de variáveis  $x$  e  $t$

Expansão de Taylor:

$$u_{i+1} = u_i + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{u_i} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{u_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3), \quad u_{i-1} = u_i - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{u_i} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{u_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

$$\Rightarrow m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = k \left\{ \left( u_i + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{u_i} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{u_i} \delta x^2 \right) - 2u_i + \left( u_i - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{u_i} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{u_i} \delta x^2 \right) \right\} + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

$$= k \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{u_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x^2 = \frac{K}{M \delta x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x^2 = \frac{K}{M} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**Equação da onda em 1D**

# Equação da Onda

**Equação da onda em 1D**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**Equação da onda em 3D**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

$u(x, t)$  = desvio da posição de equilíbrio a posição  $x$  e tempo  $t$

Pode ser longitudinal ou transversal

- Propagação de som
- Ondas no oceano
- Vibração de uma corda
- Ondas eletromagnéticas
- ...

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

# Equação da Onda 1D

## Solução geral meio infinito

Ex: corda muito comprida, fluido num tubo, água num canal...

Condição inicial:  $u(x, 0) = f(x)$

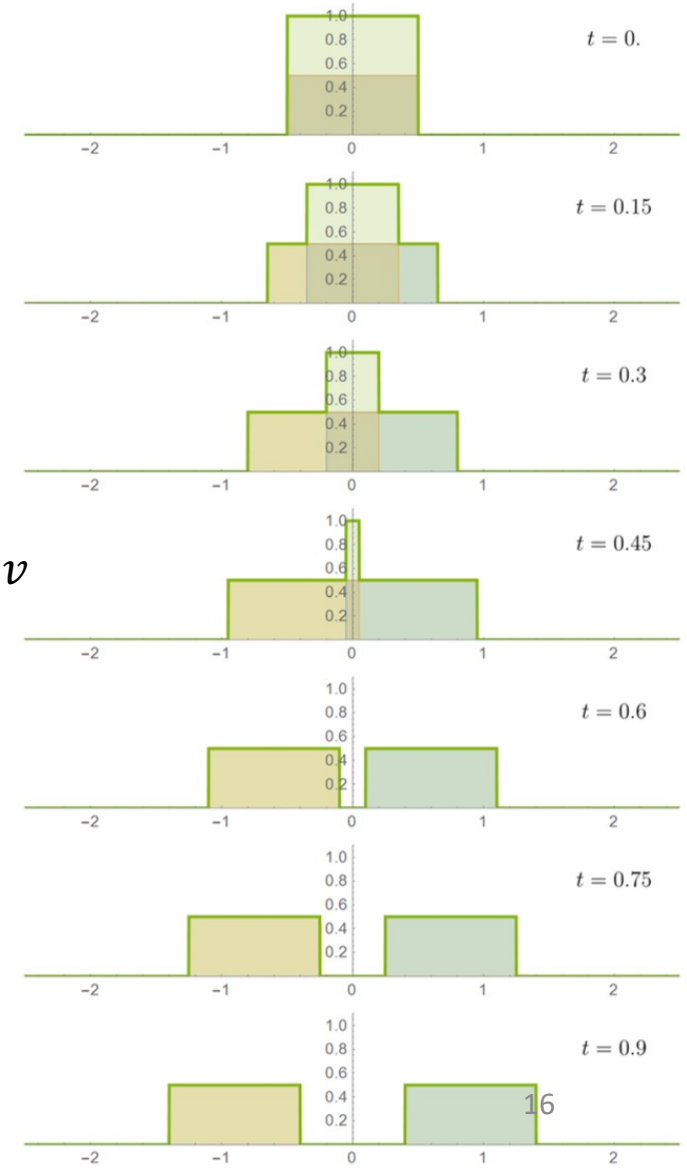
Duas soluções:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= f(x - vt) && \text{movimento à direita com velocidade } v \\ u_2(x, t) &= f(x + vt) && \text{movimento à esquerda com velocidade } v \end{aligned}$$

mantem-se a forma original da onda.

Sem outras condições, a solução geral é a sobreposição de  $u_1$  e  $u_2$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - vt) + f(x + vt)]$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

## Equação da Onda 1D

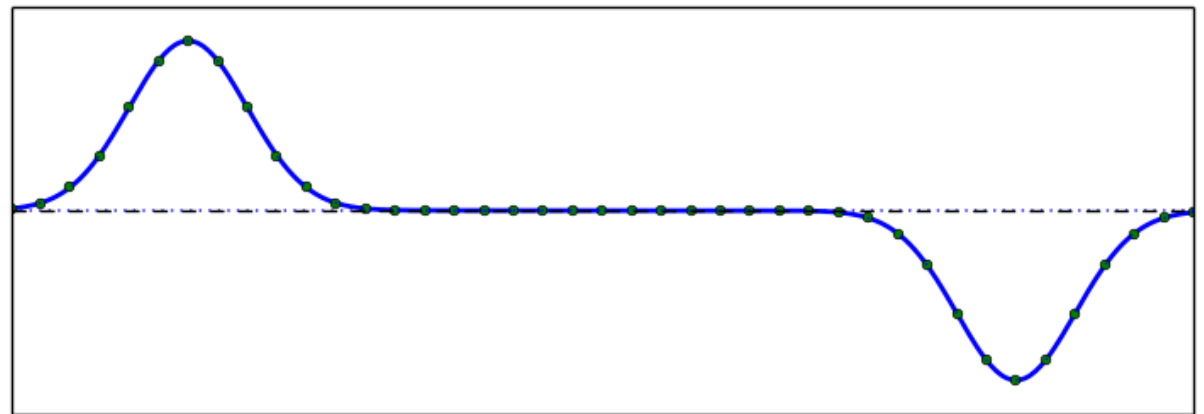
### Princípio de sobreposição

Se  $u_1(x, t)$  é uma solução, e  $u_2(x, t)$  é outra solução, então

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

é também uma solução

Ex: 2 pulsos movendo em sentidos opostos:





$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

## Equação da Onda 1D

meio finito: corda fixa nas extremidades 0 e L

Condições de fronteira:  $u(0, t) = 0, u(L, t) = 0$

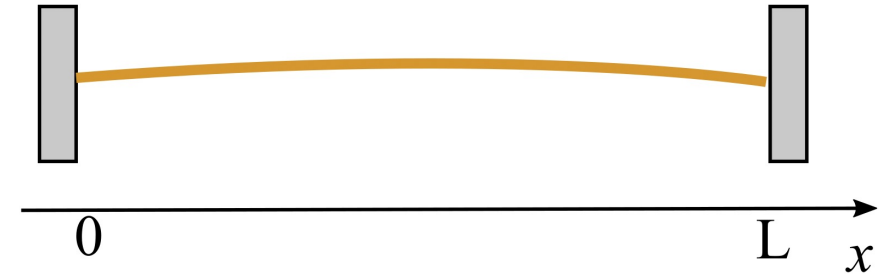
Tentar solução da forma  $u(x, t) = A \sin(kx) \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -k^2 u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \omega = \frac{k}{v}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = A \sin(kL) \cos(\omega t) = 0 \quad \Rightarrow kL = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$$

$$u(x, t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{Lv} t\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Modos normais de vibração**



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

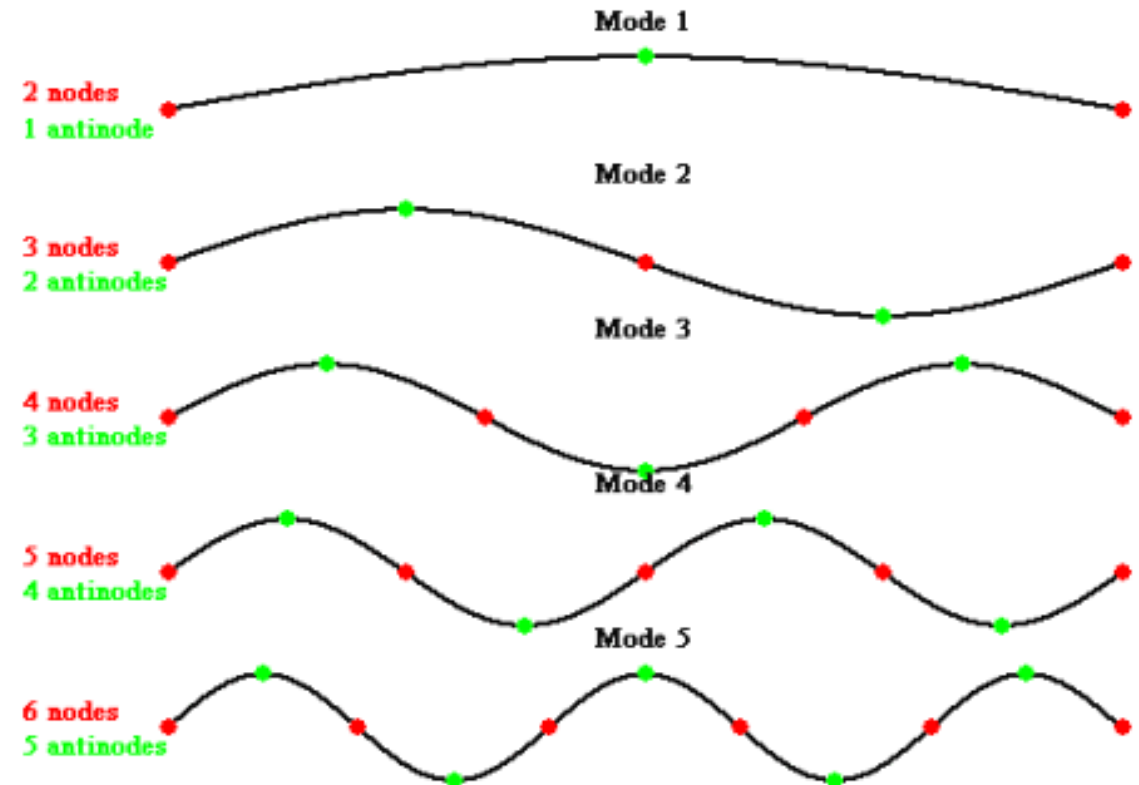
# Equação da Onda 1D



corda fixa nas extremidades 0 e L

$$u(x, t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{Lv}t\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

## Modos normais de vibração



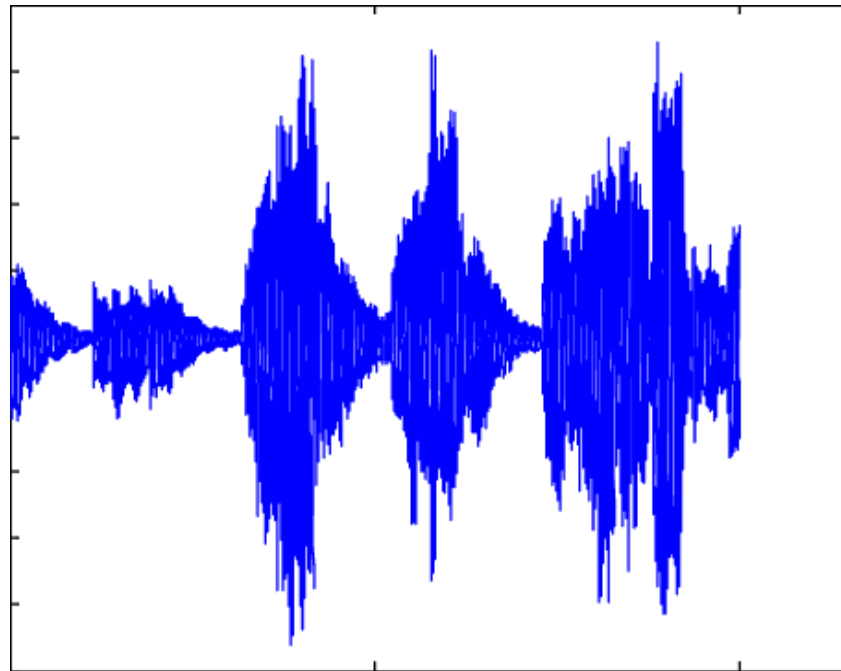
Qualquer movimento da corda é uma sobreposição dos MODOS NORMAIS

Compare: série de Fourier

# Sinais

Um sinal é uma função que varia em espaço e tempo, usada para transmitir informação

Ex. sinal elétrico ou ótico em telecomunicações, sinal eletromagnético para rádio ou televisão



# Sinais

Função de um sinal  $f(t)$

pode ser representado como a soma de funções sinusoidais, a série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ou

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(i\omega_n t) \, dt \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega_n = n2\pi/T$$

Os coeficientes ( $a_n$  e  $b_n$ , ou  $c_n$ ) podem ser considerados uma função de frequência  $\omega$

No limite  $T \rightarrow \infty$  os valores de  $\omega_n$  são contínuas: **Transformada de Fourier**

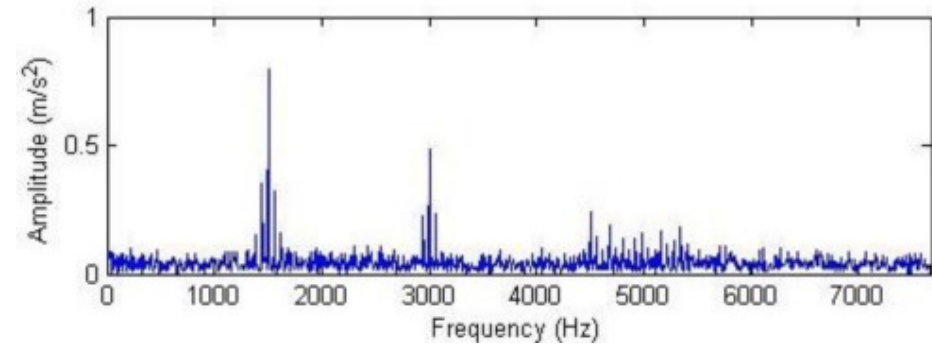
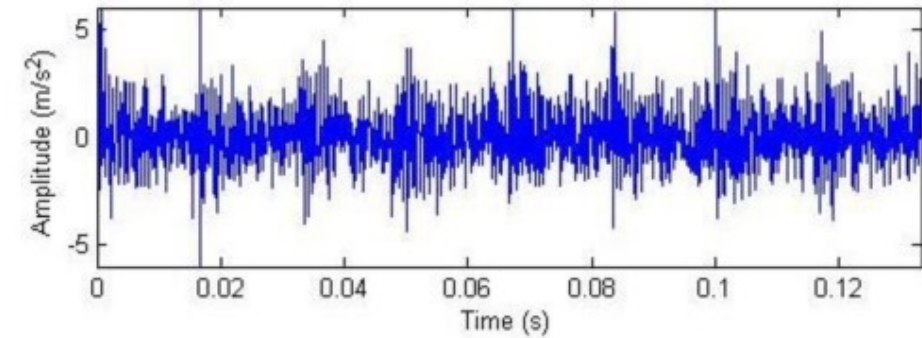
# Sinais

Um sinal pode ser representado:

no domínio de tempo:  $f(t)$  = forma de onda (*waveform*)

OU no domínio de frequências:  $c(\omega)$  = espectro

as duas representações contêm a mesma informação



# Digitalização de sinais

Para representar perfeitamente um sinal contínuo  $f(t)$ , durante um período  $T$ , precisamos de um número infinito de coeficientes de Fourier.

Se os dados foram em tempos discretos,  $f(t_i)$  com intervalo  $\delta t = t_{i+1} - t_i$ , é só preciso um número finito de coeficientes.

## Teorema de Nyquist:

Se um sinal não contém frequências maiores do que  $f$ , o sinal pode ser completamente determinado com valores medidos em pontos separados por menos do que  $\delta t = \frac{\pi}{\omega}$



Se os dados consiste de uma sequência de valores em tempos com intervalo  $\delta t$ , a frequência máxima necessário para representar o sinal é  $\omega = \frac{\pi}{\delta t}$ .

# Digitalização de sinais

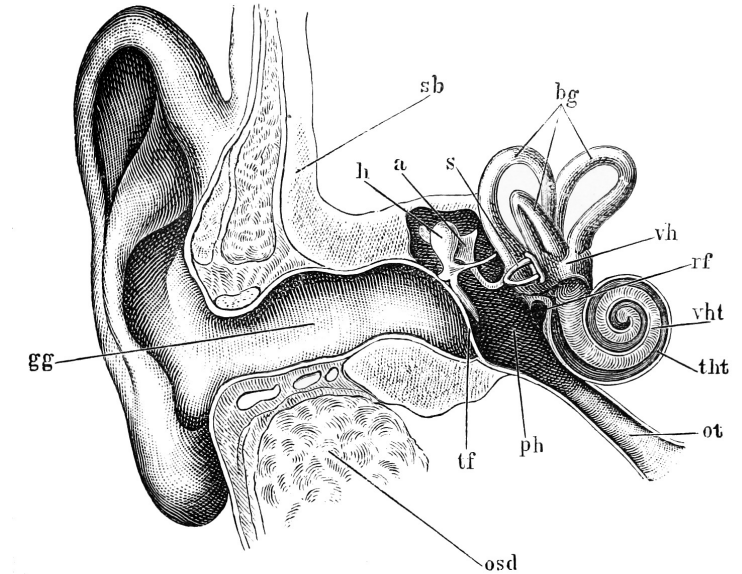
## Aplicação: Digitalização de sinal áudio

O sistema auditivo humano está limitado a perceber frequências entre 20 Hz e 20 000 Hz.

$f = 20000 \text{ Hz} \Leftrightarrow$  amostragem com  $\delta t = 1/40000s$  é suficiente para determinar o sinal dentro dos limites de percepção.

Um sinal audio pode ser digitalizado sem nenhum perda aparente de qualidade

Ex: Audio CD e MP3:          44100 valores por segundo

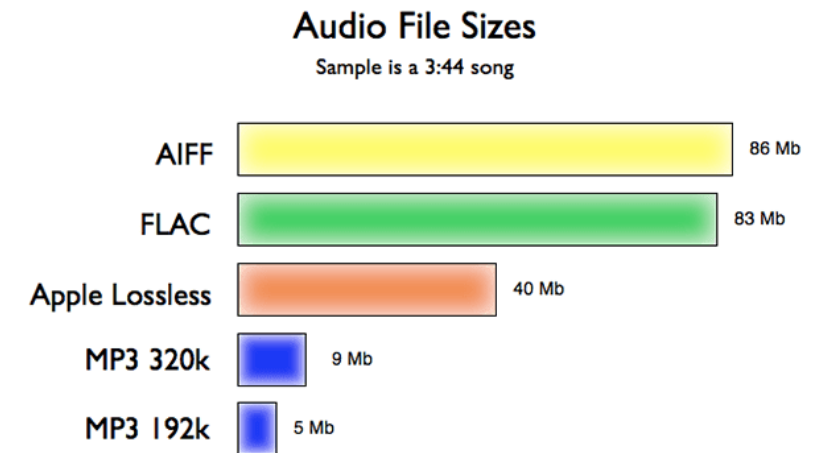


# Digitalização de sinais

## Compressão de sinal áudio

### Algoritmo MP3 (muito simplificado):

1. Amostragem do sinal audio  
44100 valores/s, amplitude 16--24bit /canal
2. Transformação discreta de Fourier  
representação no domínio de frequências
3. Modelo psicoacústica  
eliminar sons inaudíveis, redução seletiva de resolução
4. Compressão dos dados

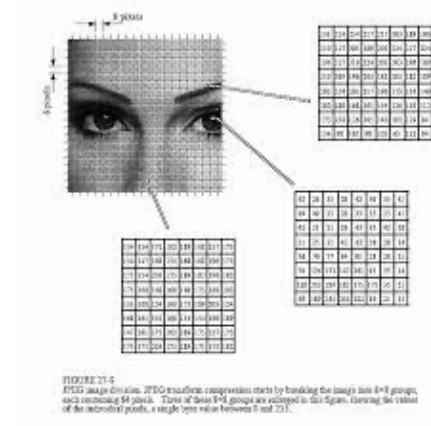




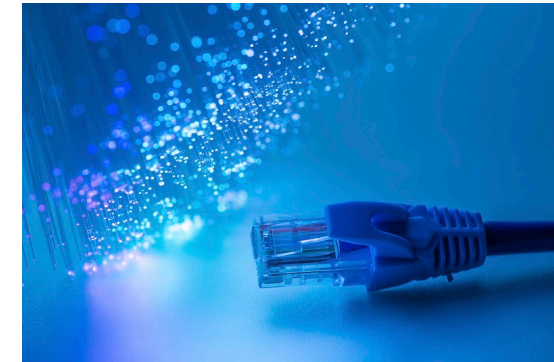
# Processamento de sinais

## Outras aplicações:

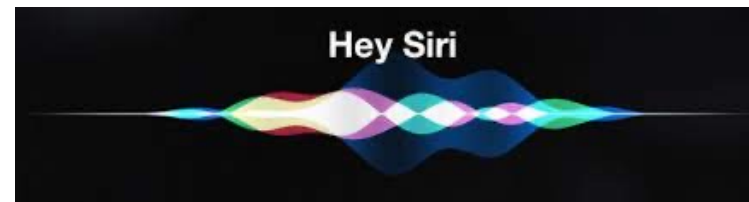
Processamento e compressão de video e imagens



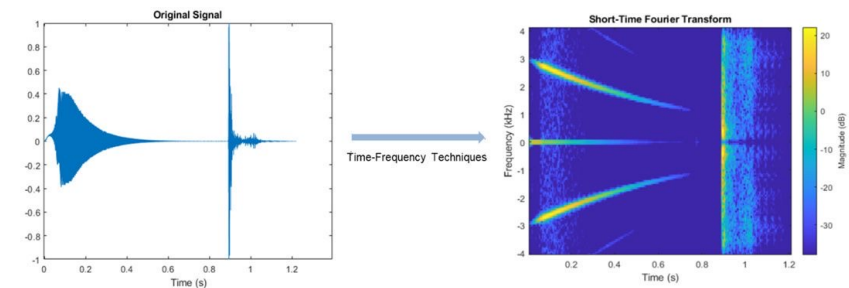
Telecomunicações (ex: dados fibra, celular)



Reconhecimento de fala



Aprendizagem de máquina (ex: feature extraction)



...



# 3º Teste

- **23 de Junho, 9h00,** salas para avisar (e-learning)

- Duas partes:

- Cálculo analítico - 50 % Duração ½ h

- Cálculo computacional-numérico - 50 % Duração 1 h

- de consulta

- sem acesso ao internet (incluindo documentação do python)

- **Matéria:**

- aulas teóricas Slides 10-15, aulas práticas 10-13:

- Oscilações: oscilador harmónico simples, amortecido, forçado (ressonância), quártico,...

- Caos

- Osciladores acoplados, modos normais

- Ondas

# Exame

- **23 de Junho, 9h00,** salas para avisar (e-learning)
- Duas partes:
  - Cálculo analítico - 50 % Duração 1h15m
  - Cálculo computacional-numérico - 50 % Duração 2 h
    - de consulta
    - sem acesso ao internet (incluindo documentação do python)
- **Matéria:**
  - todo!
  - aulas teóricas Slides 1-15, aulas práticas 1-13