Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

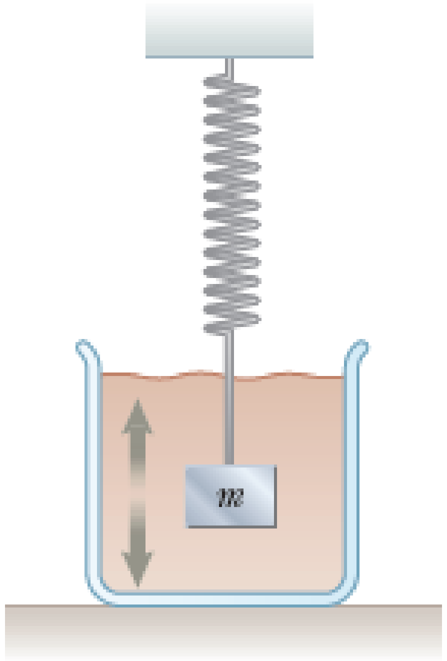
11ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 8 Oscilações Forçados
Oscilador Harmónico Forçado. Ressonância.
Oscilador Quártico Forçado. Sub-ressonâncias e curva de histerese.

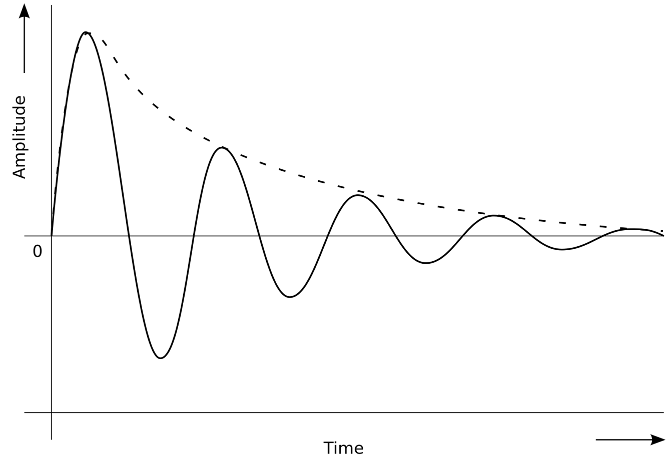
Bibliografia:
Cap. 7:

Oscilador Harmónico Amortecido



$$F_x^{resistência} = -bv_x$$

Oscilador Harmónico Amortecido Cálculo Analítico: Amortecimento fraco: $b < 2\,m\,\omega_0$



$$F_x = -k\,x - bv_x \Longrightarrow \qquad a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A_a \omega e^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega\,t + \phi) - A_a \frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega\,t + \phi\,) \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Sabendo $x(0)$ e $v_x(0)$ calcula-se A_a e ϕ :

$$\phi = arc\tan\left[-\left(\frac{v_x(0)}{x(0)} + \frac{b}{2m}\right)/\omega\right]$$

obtemos 2 valores . Temos de escolher qual deles é!

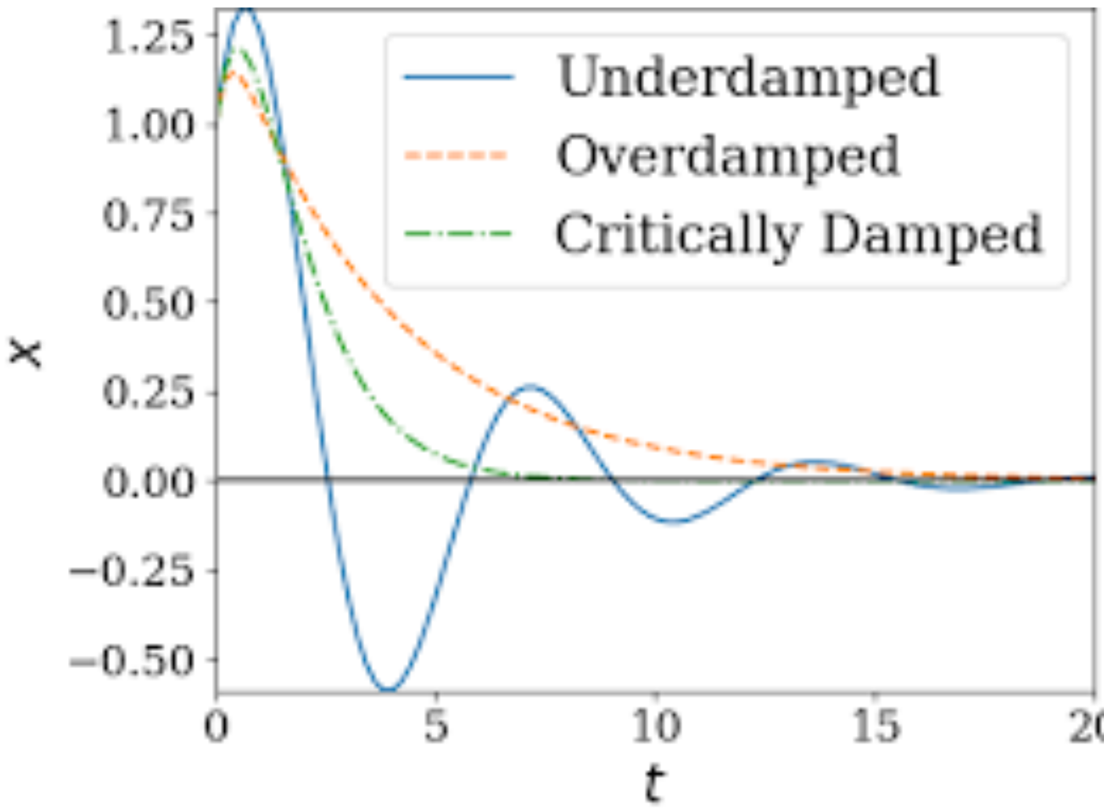
$$A_a = \sqrt{x(0)^{\,2} + \left(\left(v_x(0) + x(0)\frac{b}{2m}\right)/\omega\right)^2}$$

Oscilador Harmónico Amortecido   Outros casos

Amortecimento forte $b > 2\,m\,\omega_0$

Amortecimento tão forte que o corpo vai diretamente para a posição de equilíbrio, sem oscilar

Decaimente exponencial $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\{Ce^{\omega t} + De^{-\omega t}\}$



Amortecimento critico (ou excecional) $b = 2\,m\,\omega_0$

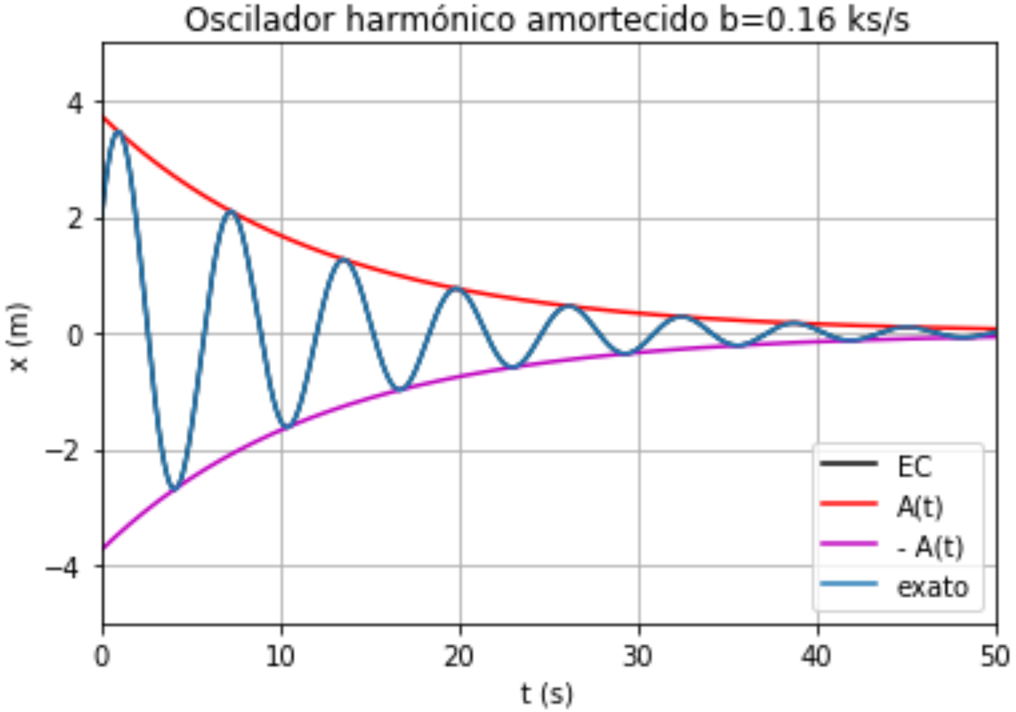
Quando começa o amortecimento forte

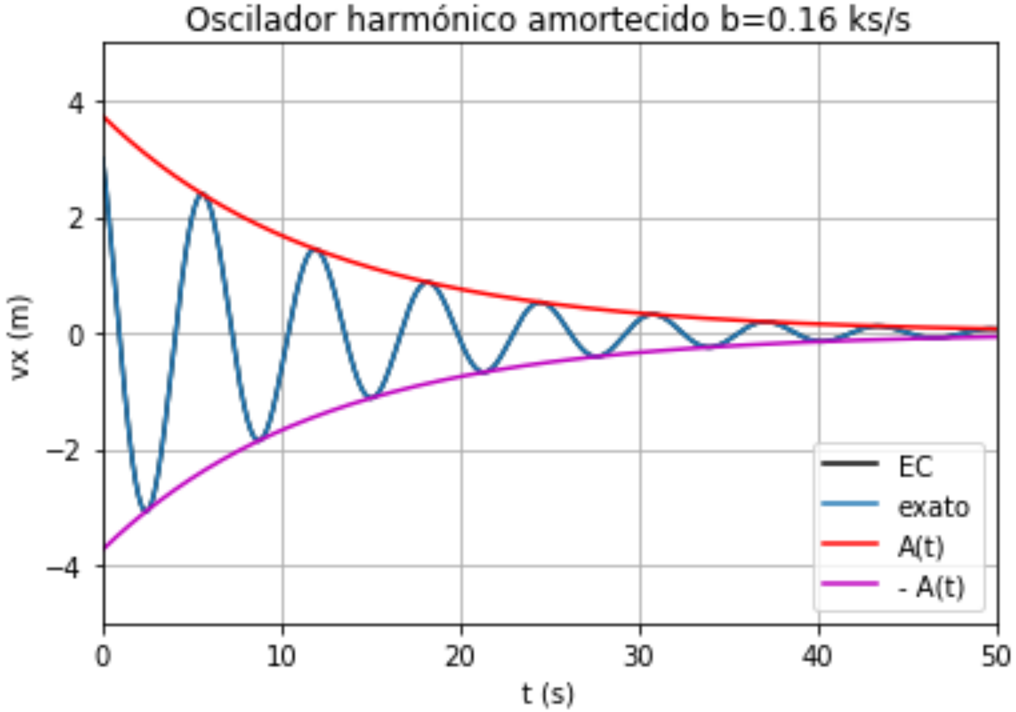
Decai o mais rapidamente possível $x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\{C + Dt\}$

$$A(t) = A_a e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$x(t) = A(t)\cos(\omega\, t + \phi\,)$$

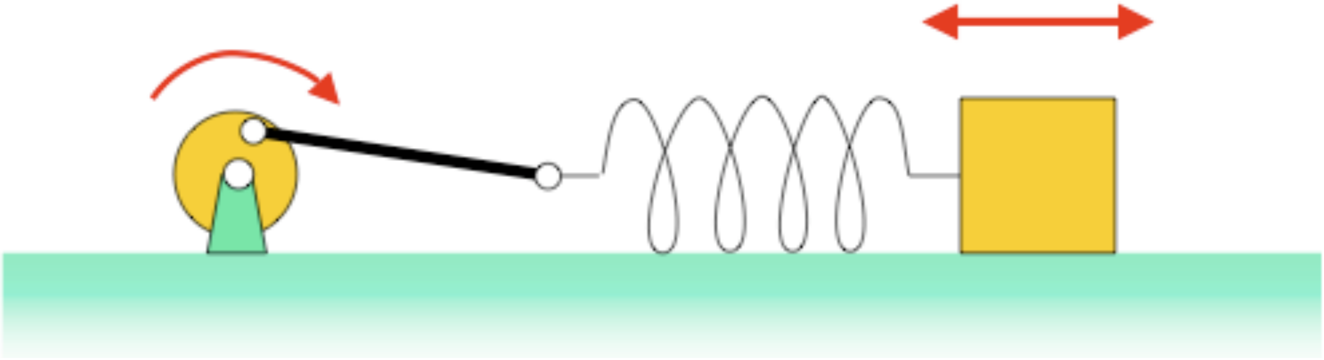
$$v_x(t) = -A(t)\,\left[\omega\sin(\omega\, t + \phi) + \frac{b}{2m}\cos(\omega\, t + \phi\,)\right]$$





Oscilador Harmónico Forçado

$$F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$$



Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Força externa $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

$$F_x = -k\,x\ - b v_x + F_0 \cos(\omega_f t)$$

$$\Longrightarrow\ \ a_x = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x - \frac{b}{m} v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{dv_x(t)}{dt} = -\dfrac{k}{m} x - \dfrac{b}{m} v_x + \dfrac{F_0}{m}\cos(\omega_f t) \\ \dfrac{dx}{dt} = v_x(t) \end{cases}$$

y'

equação diferencial de segunda ordem

duas equações acopladas de primeira ordem

Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Força externa $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

Cálculo Analítico:

$$F_x = -k\,x - bv_x + F_0 \cos(\omega_f t) \quad \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$$\Longrightarrow x(t) = A_a\, e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_a\, t + \phi) + A(\omega_f)\cos(\omega_f t + \alpha)$$

$$\alpha = arc\ \mathrm{tg}\,\frac{b\omega/m}{\omega_f^2 - \omega_0^2}$$

parte transiente = tende para zero (posição de equilíbrio)

parte estacionária = permanece no tempo

Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Força externa $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

Regime transiente

$$x(t) = A_a\, e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_a\, t + \phi\,) + A(\omega_f) \cos(\omega_f t + \alpha)$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Parte transiente solução idêntica ao oscilador amortecido sem força externa

A frequência ω_a é diferente da frequência ω_f da força exterior

Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

Força externa $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

Regime estacionário (permanente no tempo)

$$x(t) = A(\omega_f) \cos(\omega_f t + \alpha)$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\, \omega_f}{m}\right)^2}}$$

<u>Movimento harmónico simples</u>, com a mesma frequência da força externa

mas a amplitude depende da frequência ω_f da força exterior e da sua intensidade F_0
e do sistema mola-corpo expresso por ω_0, $k, m,$ e b.

Problemas cap 7 Movimento oscilatório harmónico simples

7. Uma mola exerce uma força $F_x = -k\, x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Calcule numericamente a lei do movimento, no caso em que a velocidade inicial é nula e a posição inicial 4 m.

b) Calcule a amplitude do movimento e o seu período, usando os resultados numéricos. $A = \frac{x_{MAX} - x_{MIN}}{2}$

c) Calcule a energia mecânica. É constante ao longo do tempo? Sim!

↳ Harmónico simples (não existem F_{NC})

<u>Oscilador Forçado e amortecido</u>

d) Ao oscilador está aplicada uma força exterior

$$F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$$

e uma força de amortecimento

$$F_x^{amort} = -b v_x$$

em que

$$b = 0.01 \text{ kg/s}$$
$$F_0 = 2\ N$$
$$\omega_f = 1 \text{ rad/s}$$

Determine numericamente (método de Euler-Cromer) a lei do movimento.

Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

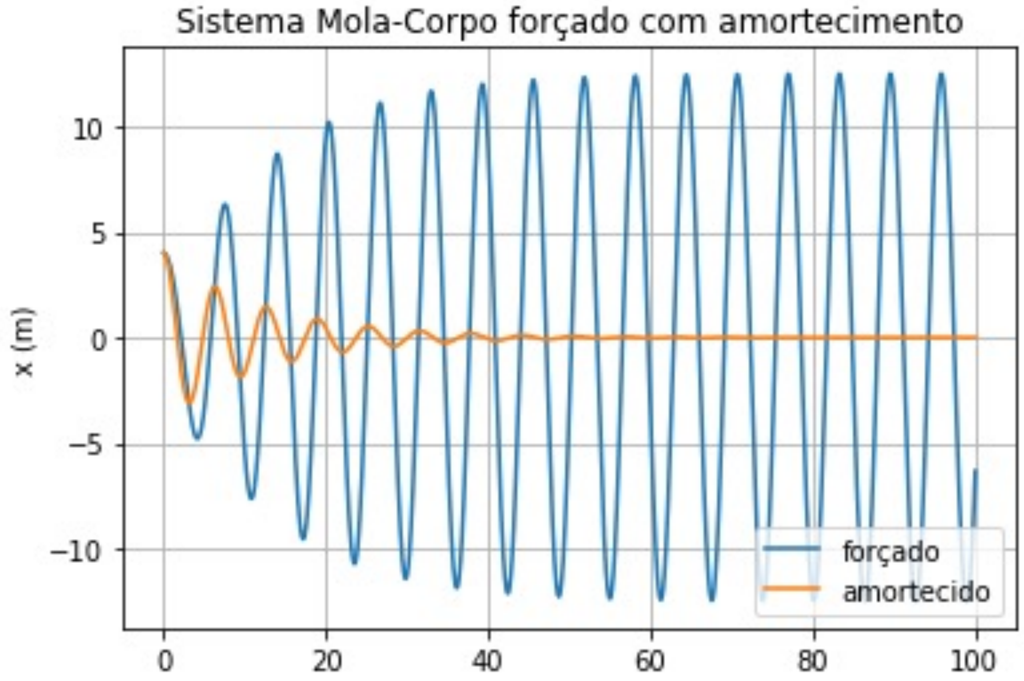
Força externa $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

Cálculo Numérico. Método de Euler-Cromer:

$$a_x = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}v_x + \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$

$x(t=0) = 4$ m
$v_x(t=0) = 0$
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

$b = 0.01$ kg/s
$F_0 = 2\ N$
$\omega_f = 1\ \mathrm{rad/s}$



regime transiente regime estacionário

Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

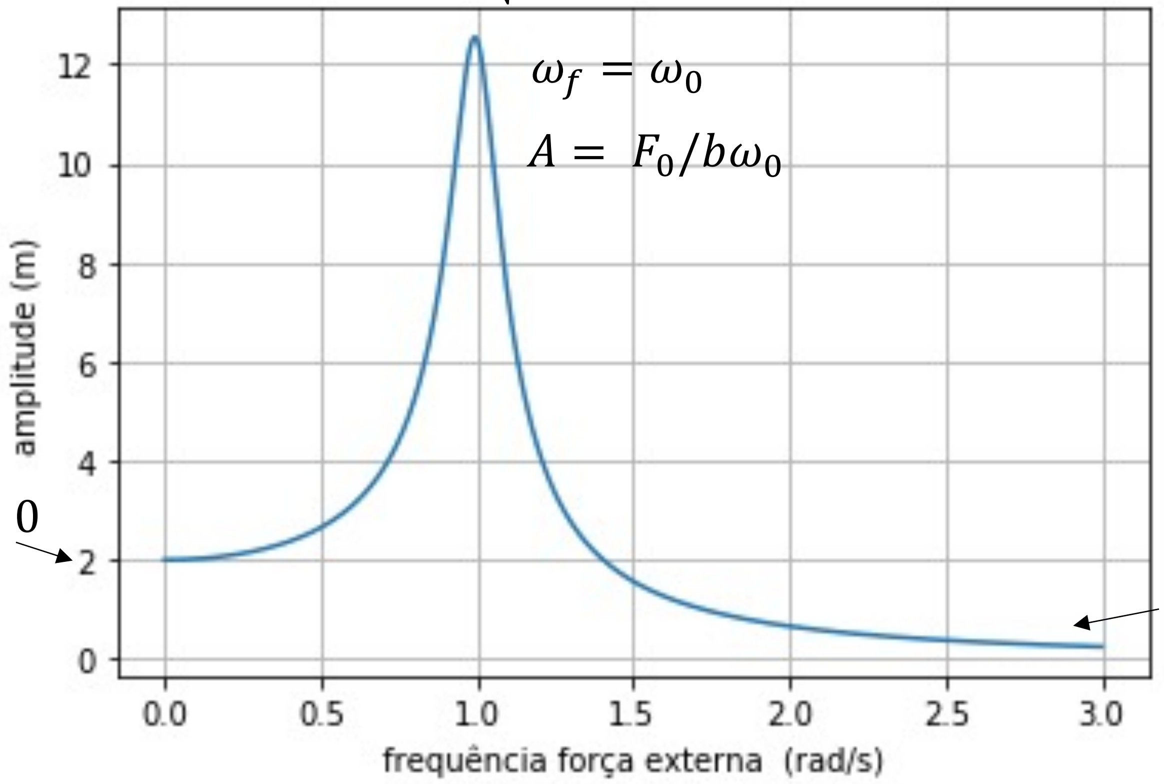
Amplitude no regime estacionário

$$A(\omega_f) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$x(t=0) = 4$ m
$v_x(t=0) = 0$ m/s
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 0.01$ kg/s

$F_0 = 2\ N$
$\omega_f = qualquer$ rad/s

$A(\omega_f = 0) = \frac{F_0}{k} \neq 0$



$\omega_f = \omega_0$

$A = F_0 / b\omega_0$

tende para zero

Amplitude não depende das condições iniciais

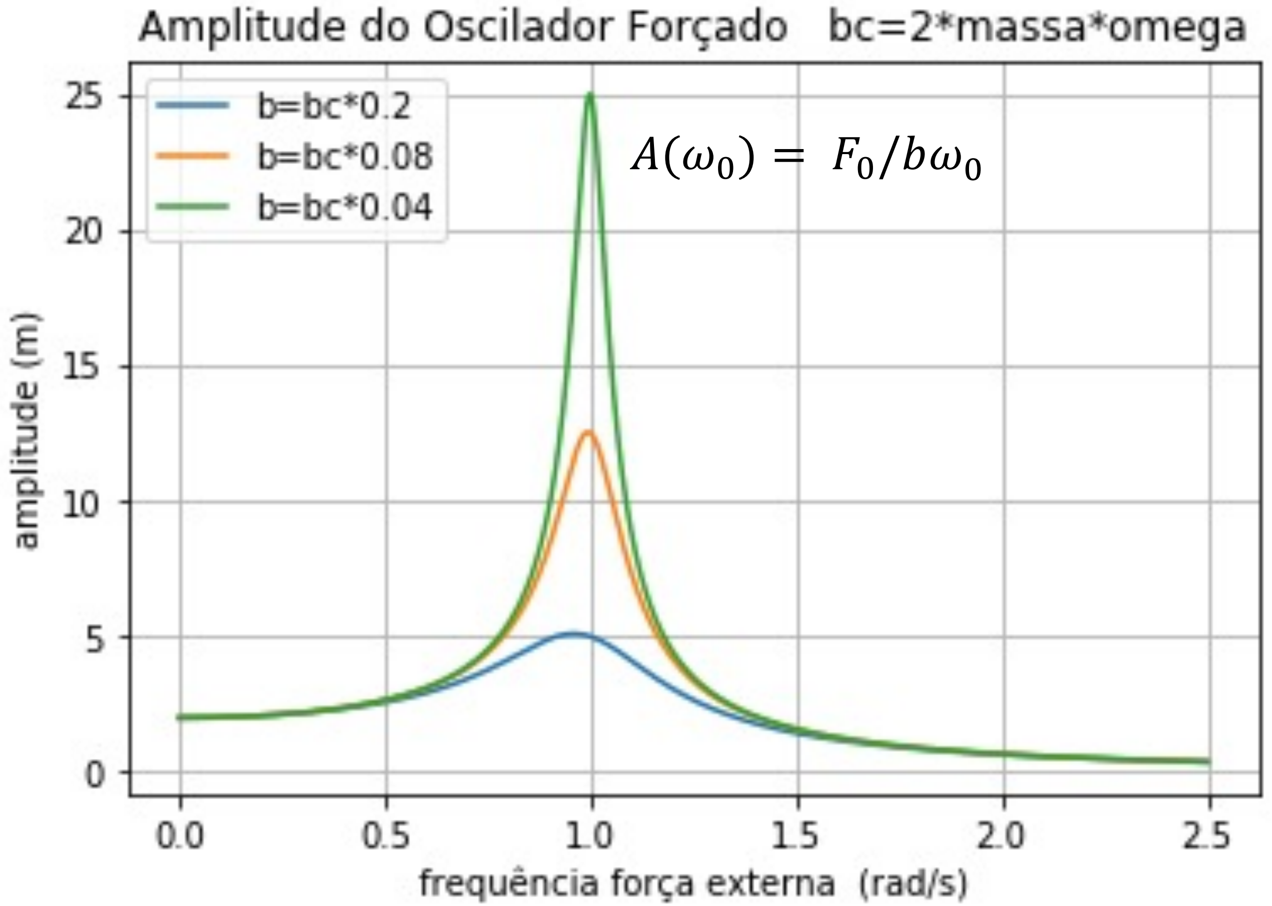
Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco) $F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$

Amplitude no regime estacionário

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\,\omega_f}{m}\right)^2}}$$

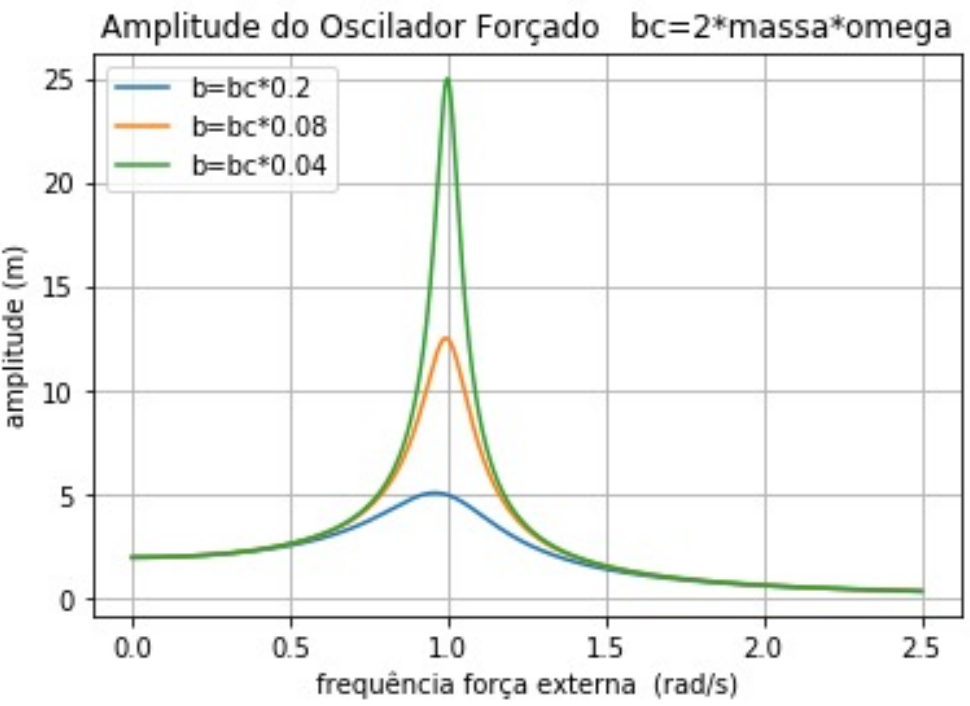
$x(t=0) = 4$ m
$v_x(t=0) = 0$ m/s
$k = 1$ N/m;
$m = 1$ kg
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s
$b = 3\ valores$ kg/s

$F_0 = 2\ N$
$\omega_f = qualquer$ rad/s



Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$$F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$$



RESSONÂNCIA

Amplitude máxima perto de $\boxed{\omega_f \simeq \omega_0}$

Mesmo quando F_0 é pequeno **a amplitude** (do movimento oscilatório simples do regime estacionário) **pode ser enorme** (e não depende das condições iniciais)

Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$$F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$$

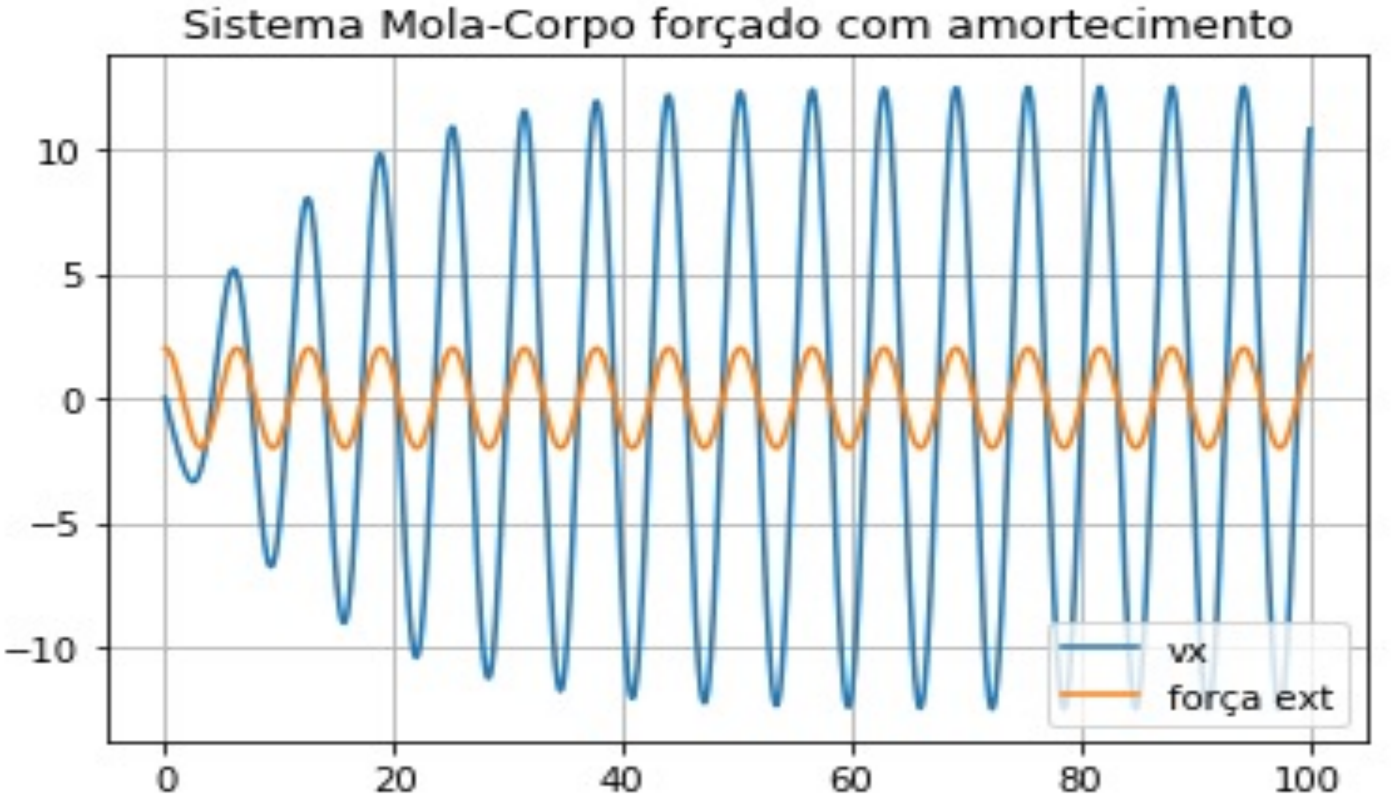
RESSONÂNCIA

Amplitude máxima perto de $\boxed{\omega_f \simeq \omega_0}$

Gráfico da velocidade e da força exterior em função do tempo mostra o mecanismo de ressonância.

No regime estacionário, a velocidade e a força exterior estão em fase.

Ou seja, a força exterior empurra o corpo sempre a favor (ou no sentido) da velocidade



Oscilador Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$$F_x^{ext} = F_0 \cos(\omega_f t)$$

RESSONÂNCIA

<u>Na ressonância, a velocidade e a força externa estão em fase</u>

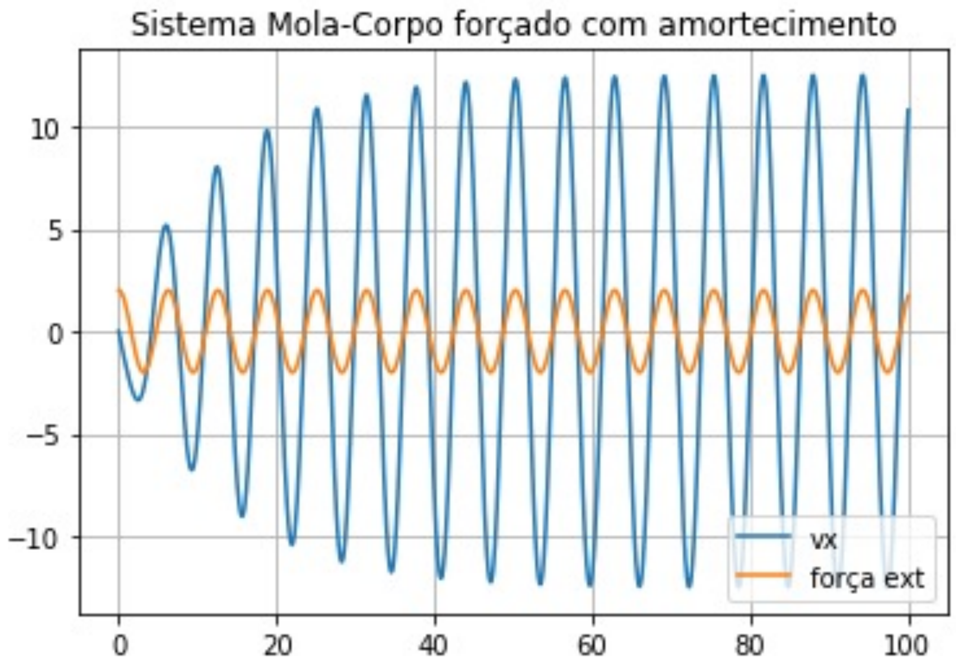
Em qualquer instante $\quad F_x v_x > 0$

$$F_x v_x = P_o$$

A potência fornecida pela força externa (pelo motor) é sempre positiva, e tomará o valor máximo.

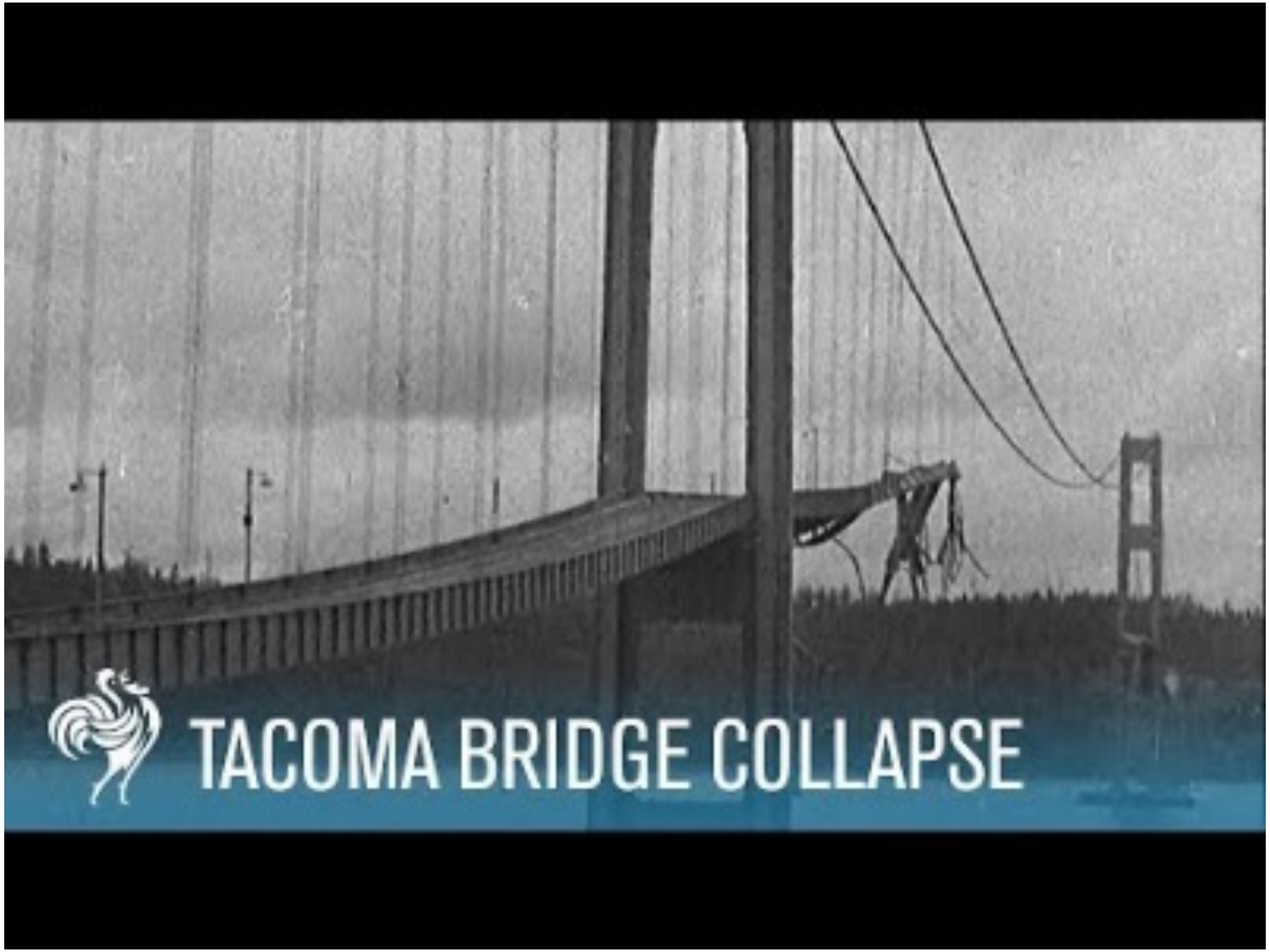
A energia mecânica $\quad E = \frac{1}{2}\, k\, A^2$ é máxima

A energia perdida devida à resistência do meio é máxima.



Ressonância

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!



https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU

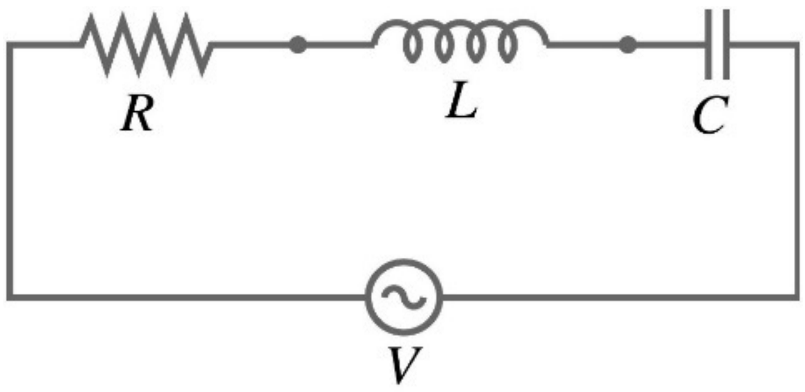
Nova ponte, 1950

Modelos extensivamente testados!

estrutura mais rígida,
aberturas para permitir a passagem do vento

Ainda não caiu.

Circuitos elétricos



R a resistência,
L a indutância da bobine e
C a capacidade do condensador

V fonte de tensão AC

Circuito RLC em série

A carga elétrica $Q(t)$ neste circuito varia (oscila) de acordo com

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Circuitos elétricos

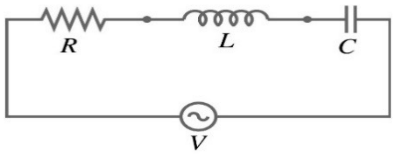
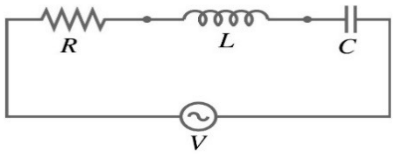


Tabela. As equações diferenciais dos sistema corpo-mola forçado e amortecido e dum circuito elétrico LRC em série e a equivalência dos seus coeficientes

Sistema corpo-mola-motor	**Circuito elétrico**
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - bv_x + F_0\cos(\omega_f t)$	$L\dfrac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\dfrac{dQ(t)}{dt} + \dfrac{1}{C}Q(t) = V_0\sin(\omega t + \phi)$
t	t
$x(t)$	$Q(t)$
$v_x = \dfrac{dx(t)}{dt}$	$I = \dfrac{dQ(t)}{dt}$
m	L
k	$\dfrac{1}{C}$
b	R
F_0	V_0
ω_f	ω

Circuitos elétricos



Se fizermos as substituições de acordo com a tabela, **as equações diferenciais de sistema corpo-mola-motor e de um circuito elétrico RLC em série transformam-se uma na outra:**

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx \;\; = F_0 \cos\left(\omega_f t\right)$$

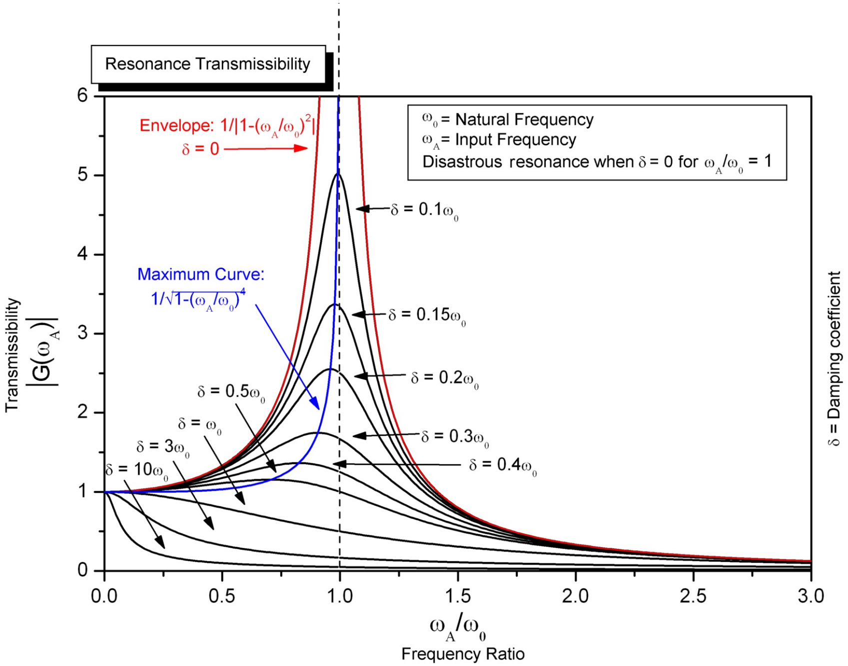
As equações são equivalentes.

Se soubermos, como sabemos, a solução de uma delas, sabemos também a solução da outra equação.

Em ressonância, no <u>sistema corpo-mola-motor</u> quando $\omega_f \approx \omega_{ressonancia} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$

e no <u>circuito elétrico RLC</u> em série quando a frequência do potencial elétrico aplicado $\omega \approx \omega_{ressonancia} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Ressonância nos circuitos elétricos

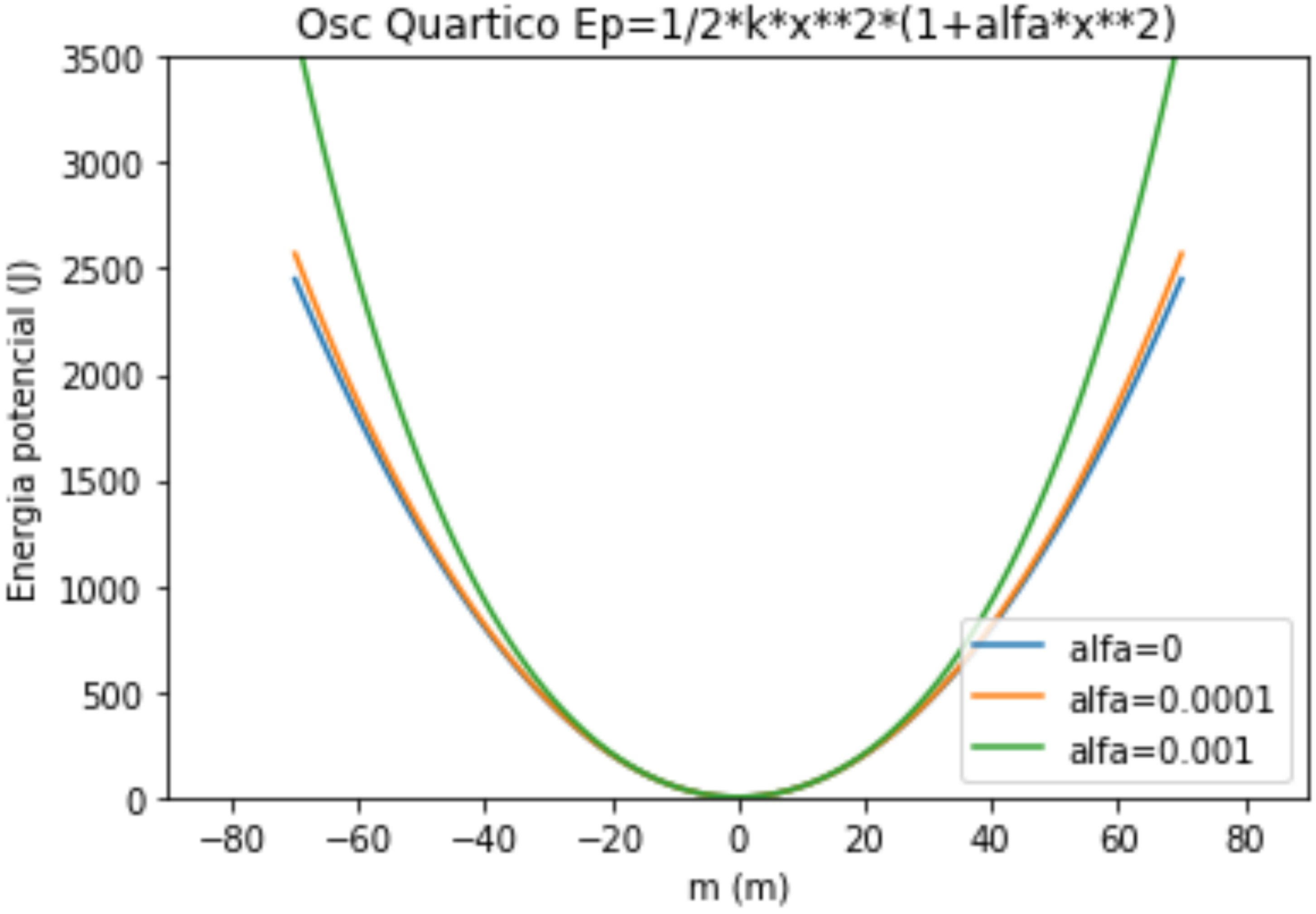


Um rádio recebe todas as ondas eletromagnéticas emitidas pelas estações de rádio.

O fenómeno ressonância permite amplificar no rádio a estação de rádio pretendida,

<u>mudando (sintonizando) a frequência ω_0 até coincidir</u> com a frequência que se pretende ouvir.

Oscilador Quártico Forçado

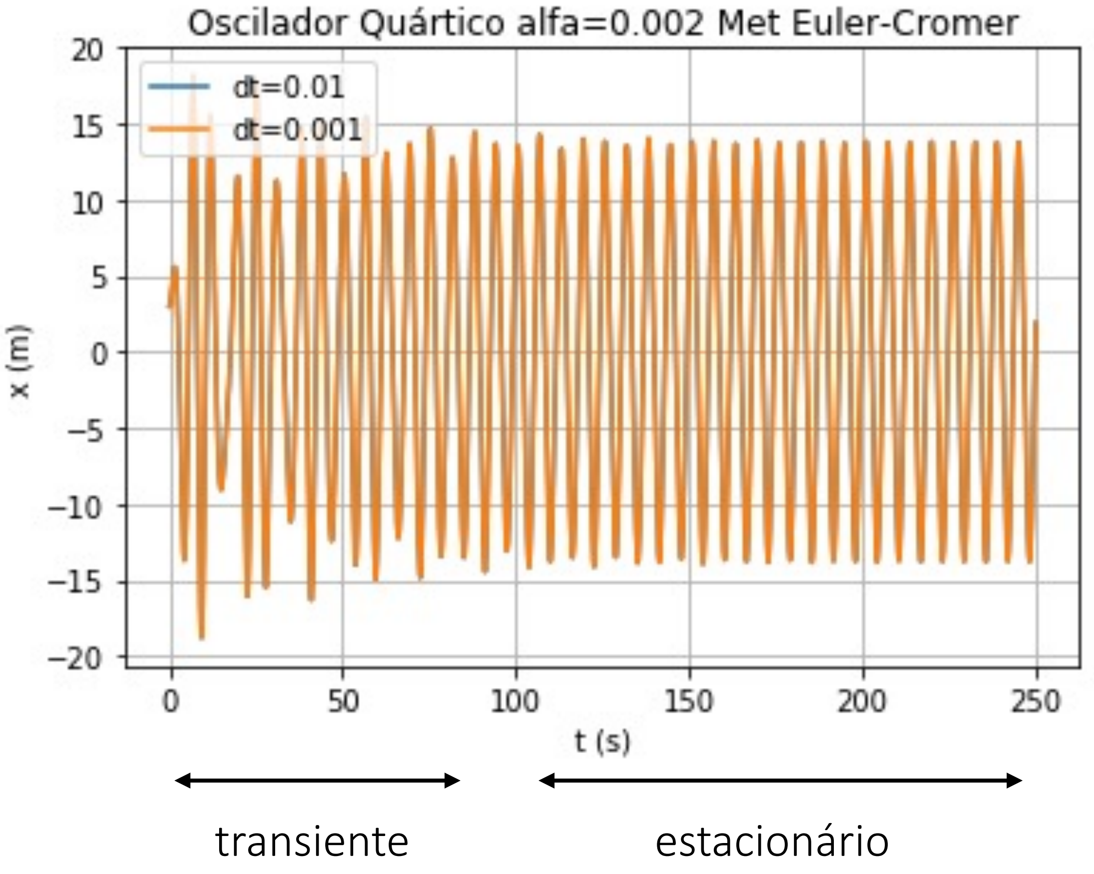


$$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 (1 + \alpha x^2)$$

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 (1 + \alpha x^2)$ α indica o afastamento ao oscilador harmónico simples

$F_x = -k\, x\, (1 + 2\alpha x^2) \; - b v_x + \; F_0 \cos(\omega_f t)$ Equação de Duffing



Necessário Cálculo Numérico:

Euler-Cromer converge (sempre?)

$x(t = 0) = 3$ m

$v_x(t = 0) = 0$

$k = 1$ N/m;

$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

$b = 0.05$ kg/s

$\alpha = 0.002\ \mathrm{m}^{-2}$

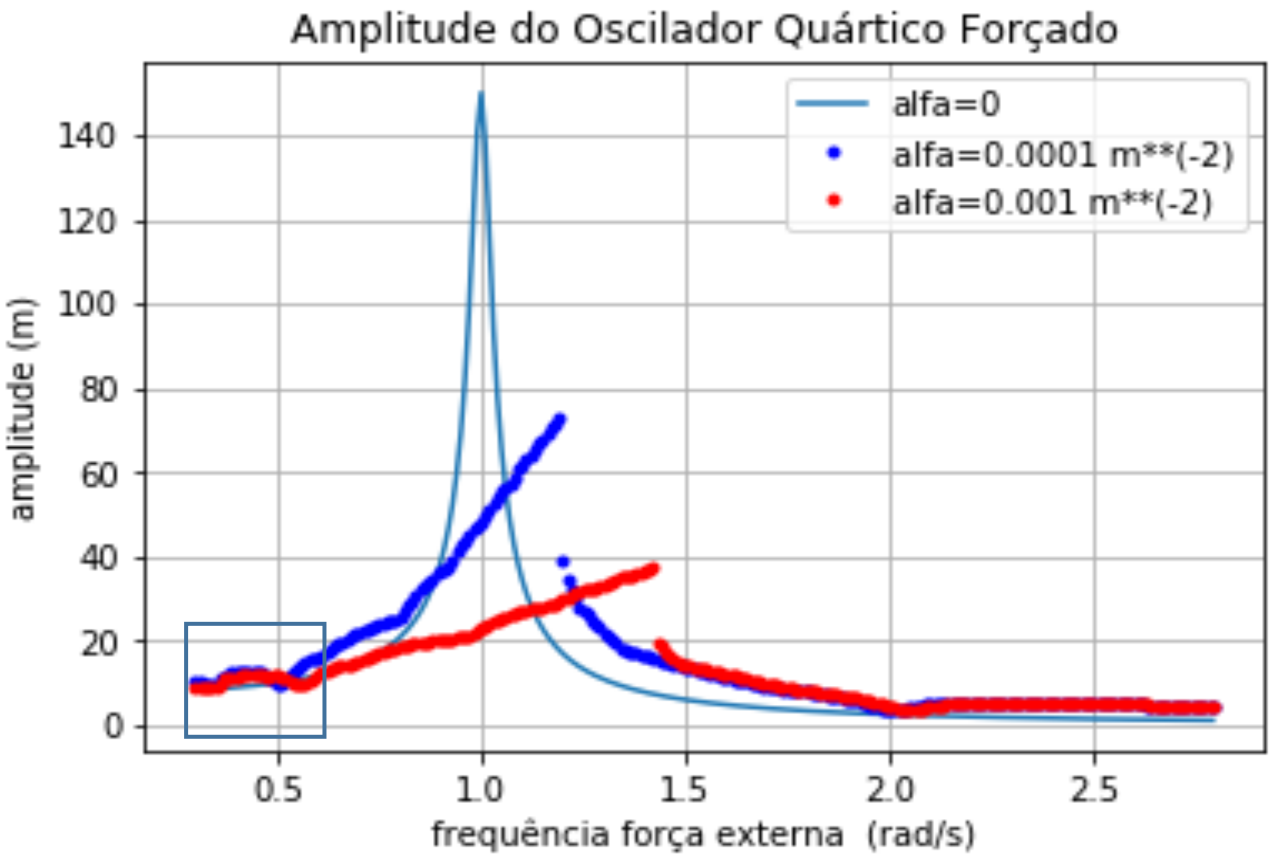
$F_0 = 7.5\ N$

$\omega_f = 1$ rad/s

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 (1 + \alpha x^2)$ α indica o afastamento ao oscilador harmónico simples

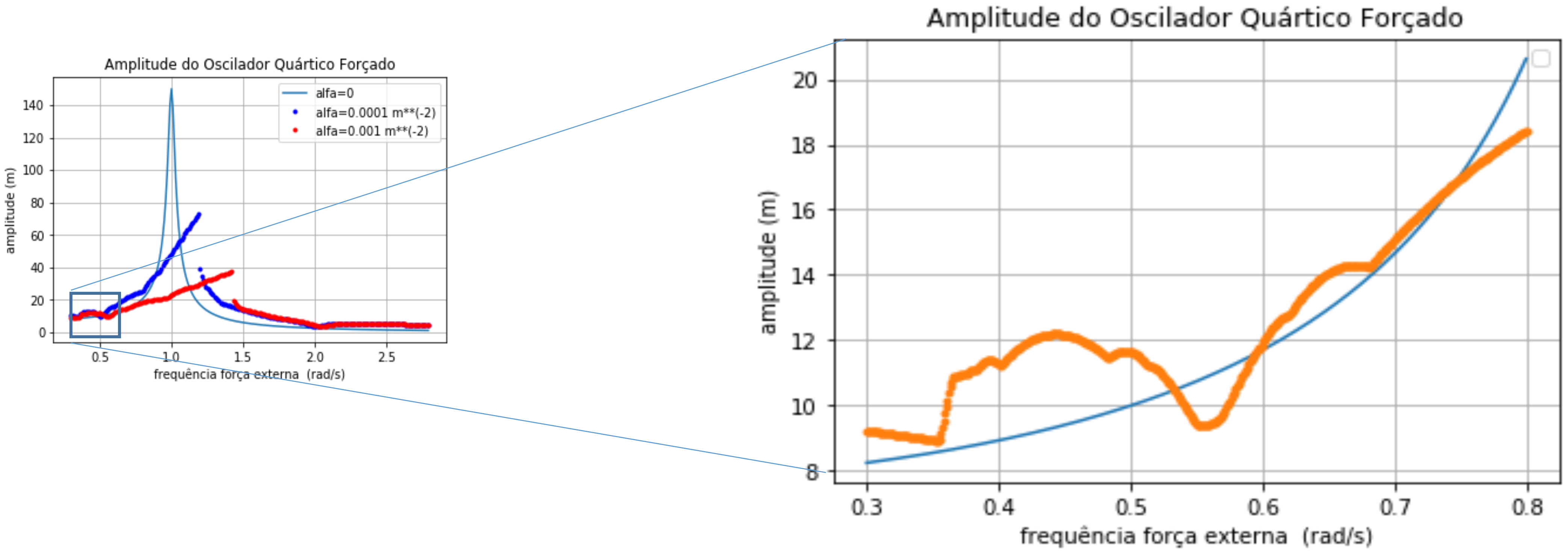
Ressonância



Amplitude diminui e a frequência de ressonância altera-se para valores mais elevados de α.

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 (1 + \alpha x^2)$ α indica o afastamento ao oscilador harmónico simples

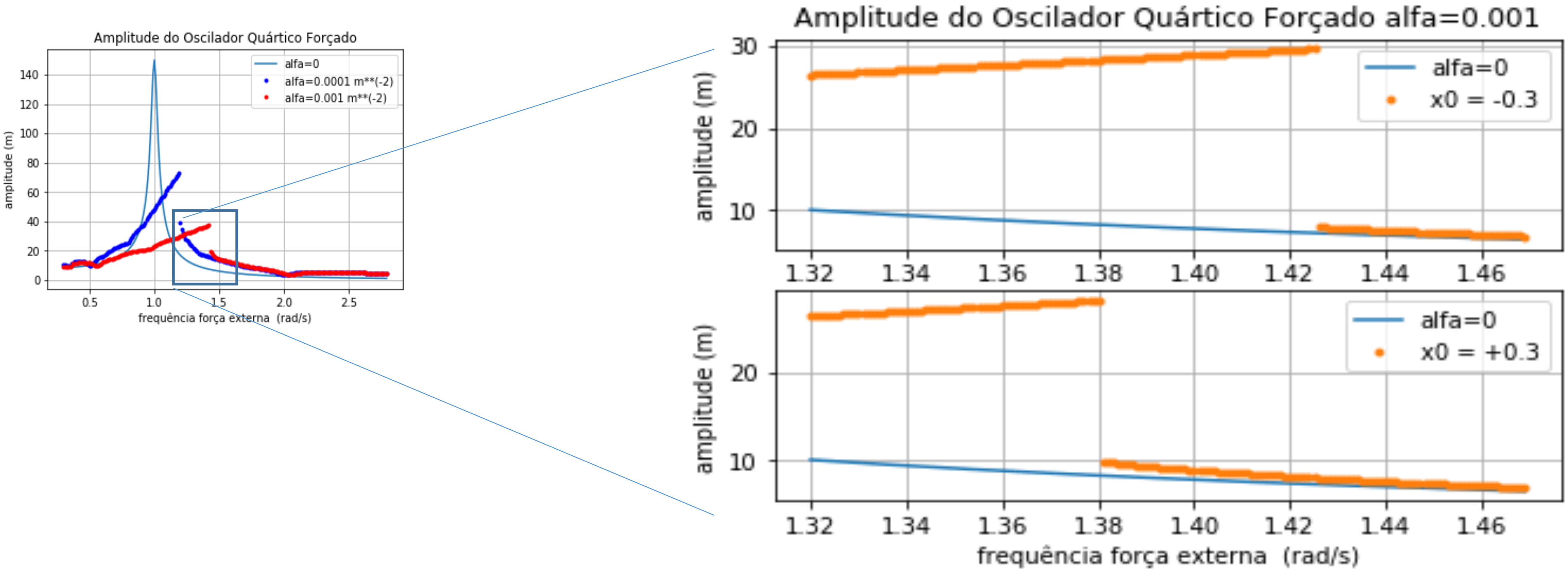


Para $\alpha = 0.001$ m^{-2} obtêm-se variações rápidas na zona $0.25 < \omega_f < 0.50$ rad/s.

Podemos ver um outro máximo da amplitude para $\omega_f \approx 0.44$ rad/s.
É um máximo inferior ao máximo principal, e ω_f é inferior à frequência ω_{f0}.
É por isso é chamada **ressonância sub harmónica.**

Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 (1 + \alpha x^2)$ α indica o afastamento ao oscilador harmónico simples

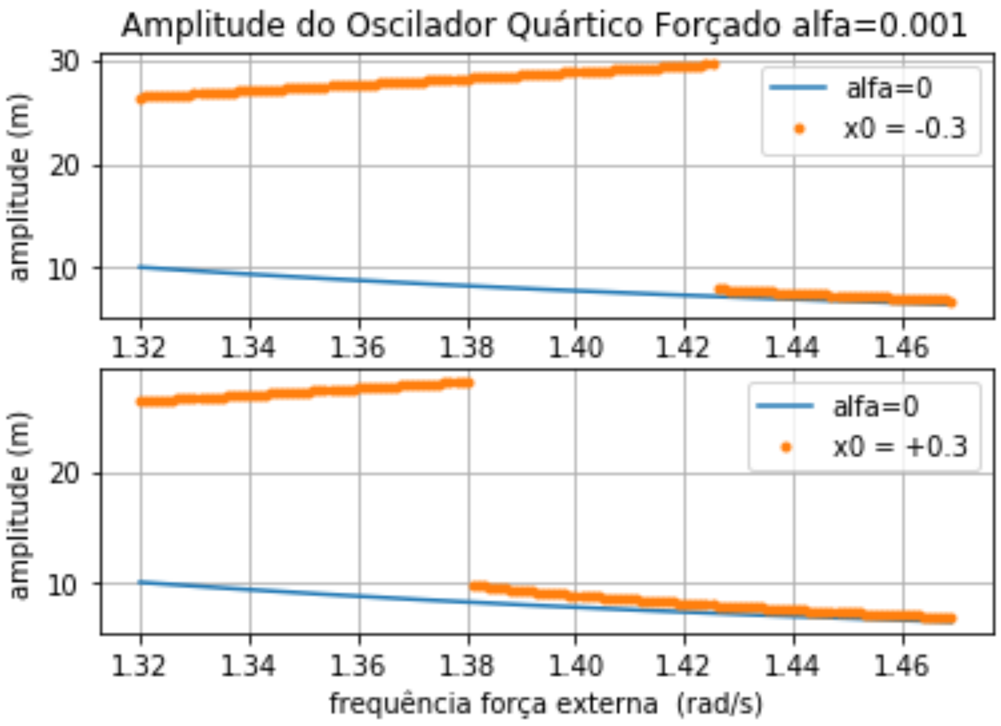


Amplitude depende das condições iniciais

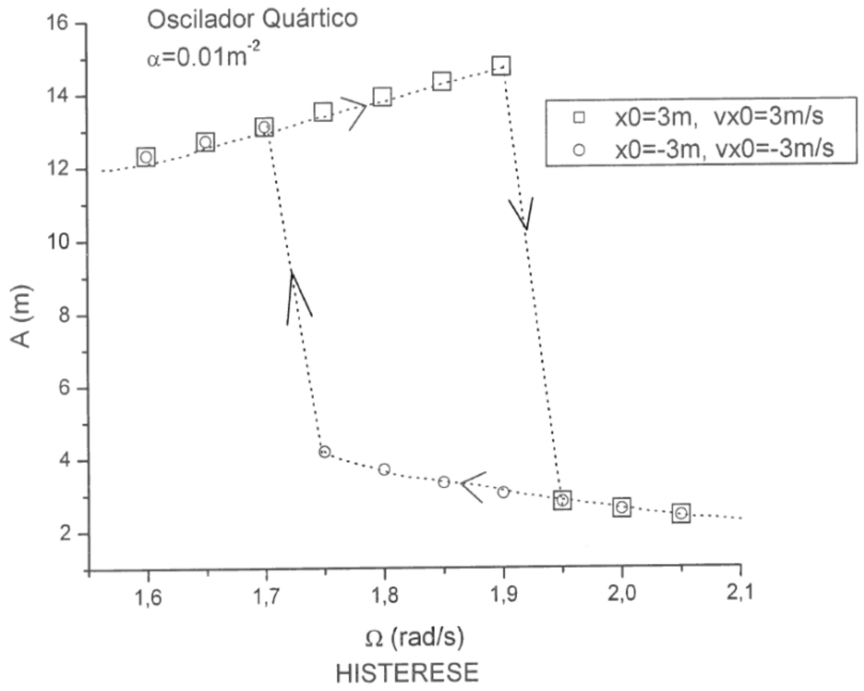
Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado (e com amortecimento fraco)

$E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 (1 + \alpha x^2)$ α indica o afastamento ao oscilador harmónico simples

Amplitude



Modelo de Histerese



Amplitude depende das condições iniciais