

Modelação de Sistemas Físicos

3ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 2 Movimento a uma dimensão:

Método de Euler de integração numérica. Erro de truncatura.

Bibliografia:

Cap. 2: Serway, cap. 2; Sørenssen, cap. 4; Villate, cap. 1

Cap. 2 Movimento a 1 dimensão

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t)$

Aceleração instantânea: $a_x(t)$

$$= \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}$$

derivada da posição
derivada da velocidade
segunda derivada da posição

Se se conhecer uma destas quantidades, saberemos as outras duas.

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

ou, comenado da aceleração

Cálculo integral: $a_x(t)$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

Calculado (i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos.

Definição de derivada $\frac{d}{dt}$ de uma função

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{(t + \delta t) - t} \quad \rightarrow \text{definição da derivada}$$

$= v_x(t)$

Handwritten notes in green:
→ momento depois (pointing to $t + \delta t$)
→ momento (pointing to t)

Método de Euler (método numérico de integração)

$$v_x(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}$$

aproximado por

$$v_x(t) \approx \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} \quad \text{com } \delta t \text{ pequeno (mas não zero)}$$

Então

$$\begin{aligned} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} &\approx v_x(t) &\Rightarrow \cancel{\delta t} \times \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\cancel{\delta t}} &\approx v_x(t) \times \delta t \\ & &\Rightarrow x(t+\delta t) &\approx x(t) + v_x(t) \times \delta t \end{aligned}$$

finito

Se soubermos no mesmo instante, t ,

a **posição** $x(t)$ e a **velocidade** $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ (a sua derivada)

Pode-se calcular (aproximadamente) o valor da posição num instante posterior, $x(t + \delta t)$.



Leonhard Euler 1707-1783

Método de Euler (método numérico de integração)

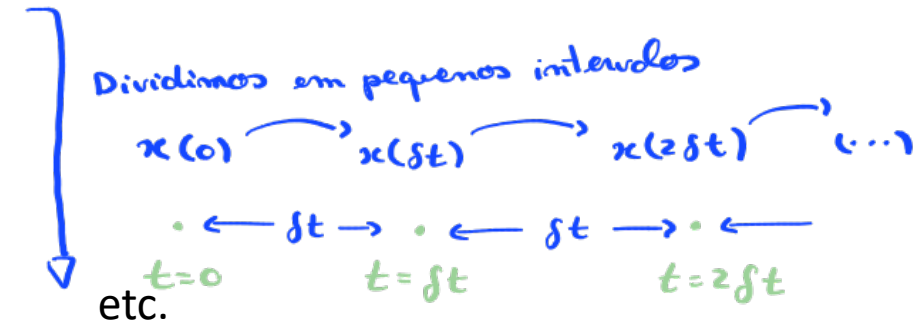
$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

Se se conhecer $x(0) = x_0$ (posição inicial)

Obtêm-se $x(\delta t) = x_0 + v_x(0) \times \delta t$ (posição em δt)

e de novo $x(\delta t + \delta t) = x(\delta t) + v_x(\delta t) \times \delta t$

e $x(2\delta t + \delta t) = x(2\delta t) + v_x(2\delta t) \times \delta t$



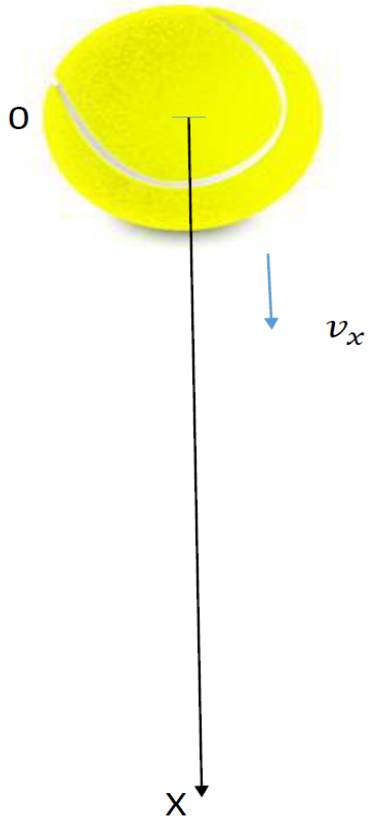
Pode-se calcular a posição em qualquer instante posterior ao instante inicial.

Fácil de programar. Numa linguagem de programação pode-se usar o ciclo (loop) porque a expressão é sempre idêntica.

Tem-se de escolher o passo temporal δt de modo a conseguir a convergência da solução

Exemplo:

Queda livre de um objeto sem resistência do ar, quando largado ($v_x(t_0) = 0$).
A aceleração é constante.



$$\begin{aligned}t_0 &= 0 \\x(0) &= 0 \\v_x(0) &= 0 \\a_x(t) &= +g \text{ (constante)}\end{aligned}$$

Tem-se movimento uniformemente acelerado.

Já resolvemos este problema por integração analítica.

Agora vamos encontrar a velocidade e a posição
por um método numérico: **Método de Euler, como teste!**

Tarefa: Implementar em python o método de Euler para resolver a equação diferencial $\frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$, no problema da queda da bola de ténis

$$x(0) = x_0$$

$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x(0) \times \delta t$$

$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x(\delta t) \times \delta t$$

$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x(2\delta t) \times \delta t$$

...

$$x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + v_x((N-1)\delta t) \times \delta t$$

$$x(N\delta t + \delta t) \approx x(N\delta t) + v_x(N\delta t) \times \delta t$$

depois de N passos temporais

INPUT: δt = passo temporal

t_0 = 0 instante inicial

t_f = instante final

$x_0 = 0$

$v_x(0) = 0$

e sabemos

$$v_x(t) = gt$$

✓ Cálculo Científico: Lida-se com números

Pacote numpy é conveniente: Usa 'arrays'

`a=numpy.zeros(n+1)` (Array de zeros)

`b=numpy.array([1,2,5])`

`t=numpy.linspace(t0,tf,n+1)`

Tarefa: Implementar em python o método de Euler para o problema da queda da bola de ténis

Relação entre passo de tempo e número de passos

Com N passos de δt , o tempo decorrido é

$$t_f - t_0 = N \delta t$$

Ou seja

$$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t} \text{ número de passos}$$

ou

$$\delta t = \frac{t_f - t_0}{N} \text{ passo temporal}$$

Ex:

$t_f - t_0 = 2 \text{ s}$

$\delta t = 0,1 \text{ s (20 passos)}$

$N = \frac{2}{0,1} = \underline{\underline{20}} \rightarrow \underline{\underline{21 \text{ pontos}}}$!

ou

$\delta t = \frac{2}{100} = 0,02 \text{ s}$
100 passos

Tarefa: Implementar em python o método de Euler para o problema da queda da bola de ténis

Array de tempos t

Array de posições x

$x(0) = x_0$	\rightarrow	$x[0]$	corresponde ao instante $t[0]$
$x(\delta t) \approx x_0 + v_x(0) \times \delta t$	\rightarrow	$x[1]$	corresponde ao instante $t[1]$
$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x(\delta t) \times \delta t$	\rightarrow	$x[2]$	corresponde ao instante $t[2]$
$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x(2\delta t) \times \delta t$	\rightarrow	$x[3]$	corresponde ao instante $t[3]$
...			
$x(N\delta t) \approx v_x((N-1)\delta t) + v_x((N-1)\delta t) \times \delta t$	\rightarrow	$x[n]$	corresponde ao instante $t[n]$

indexação: de 0 a n, num total de n+1 elementos

Cap. 2 Movimento a 1 dimensão

```
# Queda sem resistência do ar
# Integração numérica de  $dx/dt = vx$ , pelo Método de Euler
import numpy as np
```

constantes

```
dt=0.01 # passo de tempo
tf=4.0
t0=0
x0=0
v0x=0
```

```
g=9.80
```

```
n=np.int((tf-t0)/dt+0.1) # +0.1 para garantir não arredondar para baixo
print('n',n)
```

```
t=np.zeros(n+1) # n+1 elementos; último índice n
x=np.zeros(n+1)
vx=np.zeros(n+1)
```

```
vx[0]=v0x
t[0]=t0
x[0]=x0
```

t		0	δt	$2\delta t$	$3\delta t$
i		0	1	2	3

```
# Método de Euler (n+1 elementos)
```

```
for i in range(n):
    vx[i]=g*t[i]
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt # último  $x[n] = x[n-1] + vx[n-1]*dt$ 
    t[i+1]=t[i]+dt
```

Método de Euler (método numérico de integração)

Escolha do passo temporal δt

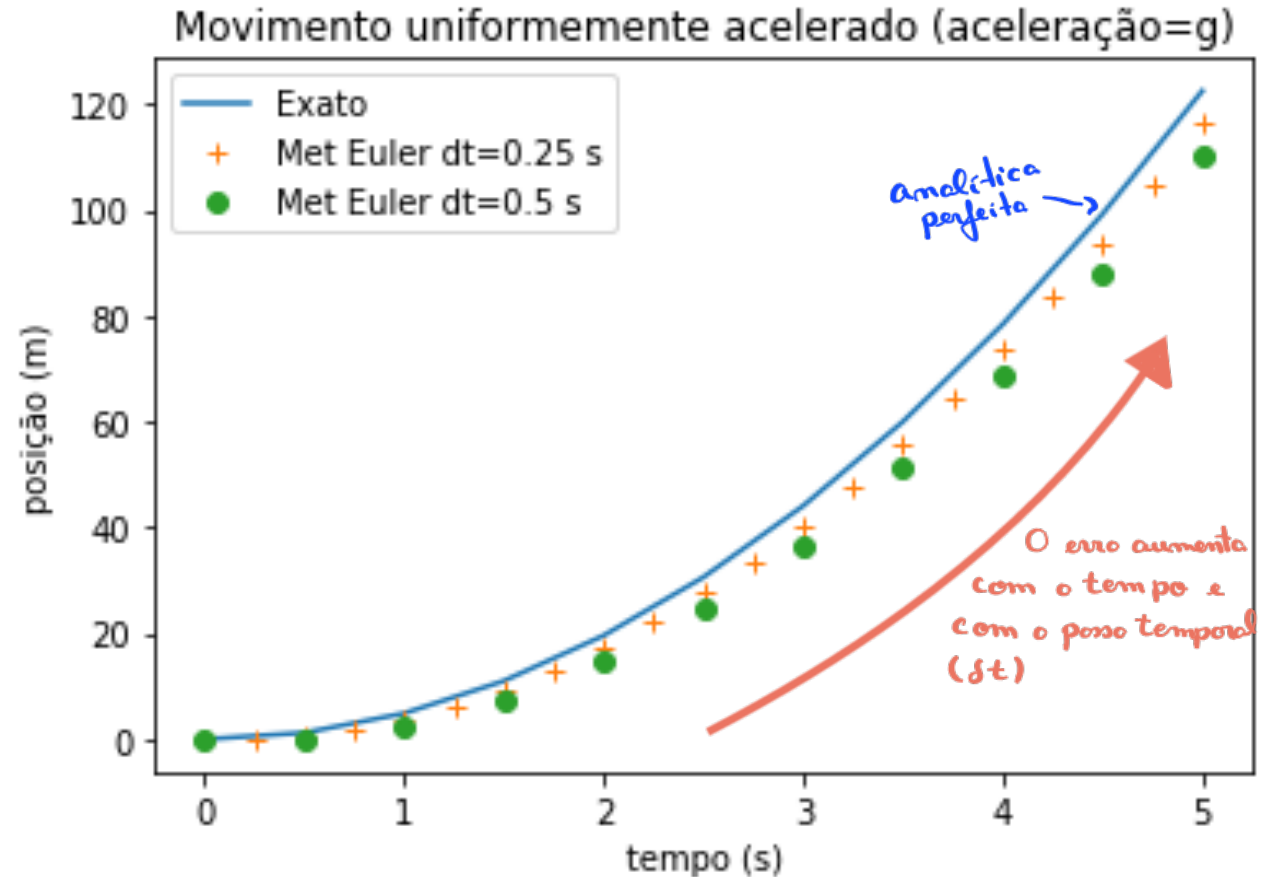
δt = passo temporal

N número de passos

Para um tempo final t_f (t_0 =instante inicial)

$$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t} \quad \text{ou} \quad \delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$$

N e δt são inversamente proporcionais

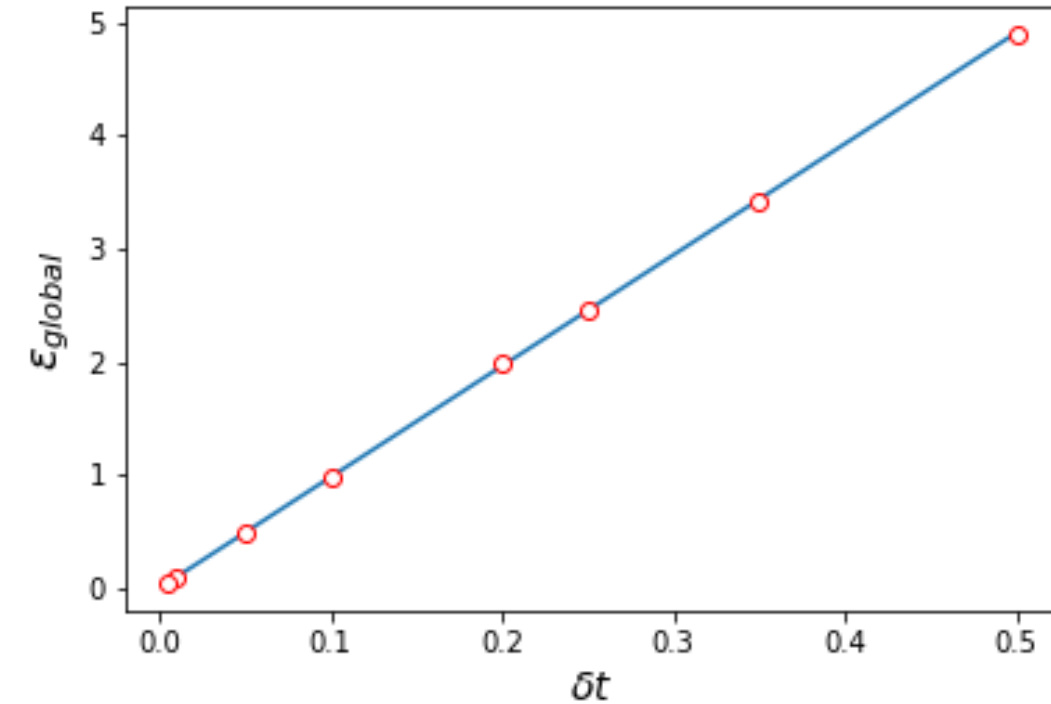


No problema da queda livre $t=2$ s

Cálculo da variação do erro com o passo δt .

δt	N	$x(2)_{Euler}$	$\varepsilon_{global} = x(2)_{exato} - x(2)_{Euler} $
0.5	4	14.7	4.9
0.25	8	17.15	2.45
0.1	20	18.62	0.98
0.05	40	19.1	0.50
0.01	200	19.502	0.10
0.005	400	19.550	0.05
$x(2)_{exato}$		19.6000	

↳ $\frac{\delta t}{2}$ o erro também



O erro global do método de Euler é linear no passo.

É proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos N .

e a velocidade?

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} = a_x(t)$$

aproximado por $\frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t)$

Para δt pequenos, então espera-se que

$$\frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{\delta t} \approx a_x(t) \quad \Rightarrow \quad v_x(t + \delta t) - v_x(t) \approx a_x(t) \times \delta t$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

Se soubermos no mesmo instante, t ,

a velocidade $v_x(t)$ e a aceleração $a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$ (a sua derivada)

Pode-se calcular o valor da velocidade num instante posterior, $t + \delta t$.



Leonhard Euler 1707-1783

Método de Euler (método numérico de integração) **cálculo de velocidade**

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

Se se conhecer $v_x(0) = v_{x0}$

Obtêm-se $v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x(0) \times \delta t$

e de novo $v_x(\delta t + \delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x(\delta t) \times \delta t$

e

$$v_x(2\delta t + \delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x(2\delta t) \times \delta t$$

Pode-se calcular a velocidade em qualquer instante posterior ao instante inicial.

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

Método de Euler (método numérico de integração)

velocidade e posição

$$v_x(t + \delta t) \approx v_x(t) + a_x(t) \times \delta t$$

$$x(t + \delta t) \approx x(t) + v_x(t) \times \delta t$$

Se se conhecer

$$v_x(0) = v_{x0}$$

$$x(0) = x_0$$

Obtêm-se

$$v_x(\delta t) \approx v_{x0} + a_x(0) \times \delta t$$

$$x(\delta t) \approx x_0 + v_x(0) \times \delta t$$

e de novo

$$v_x(\delta t + \delta t) \approx v_x(\delta t) + a_x(\delta t) \times \delta t$$

$$x(\delta t + \delta t) \approx x(\delta t) + v_x(\delta t) \times \delta t$$

e

$$v_x(2\delta t + \delta t) \approx v_x(2\delta t) + a_x(2\delta t) \times \delta t$$

$$x(2\delta t + \delta t) \approx x(2\delta t) + v_x(2\delta t) \times \delta t$$

...

...

aproveitamos...

Cap. 2 Movimento a 1 dimensão

```
# Queda sem resistência do ar
# Integração numérica de  $dx/dt = vx$ , pelo Método de Euler
import numpy as np

dt=0.01                                # passo de tempo
tf=4.0
t0=0
x0=0
v0x=0

g=9.80

n=np.int((tf-t0)/dt+0.1)  # +0.1 para garantir não arredondar para baixo
t=np.zeros(n+1)           # n+1 elementos; último índice n
x=np.zeros(n+1)
vx=np.zeros(n+1)

vx[0]=v0x
t[0]=t0
x[0]=x0

# Método de Euler (n+1 elementos)
for i in range(n):
    ax[i] = g              # neste exemplo é simples,
                           # mas pode ser qualquer função de x[i] e vx[i]

    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    vx[i+1]=vx[i] + ax[i]*dt      # atualizar velocidade sabendo aceleração
    t[i+1]=t[i]+dt
```

Apenas muda-se
esta parte

Método de Euler (método numérico de integração)

Escolha do passo temporal δt

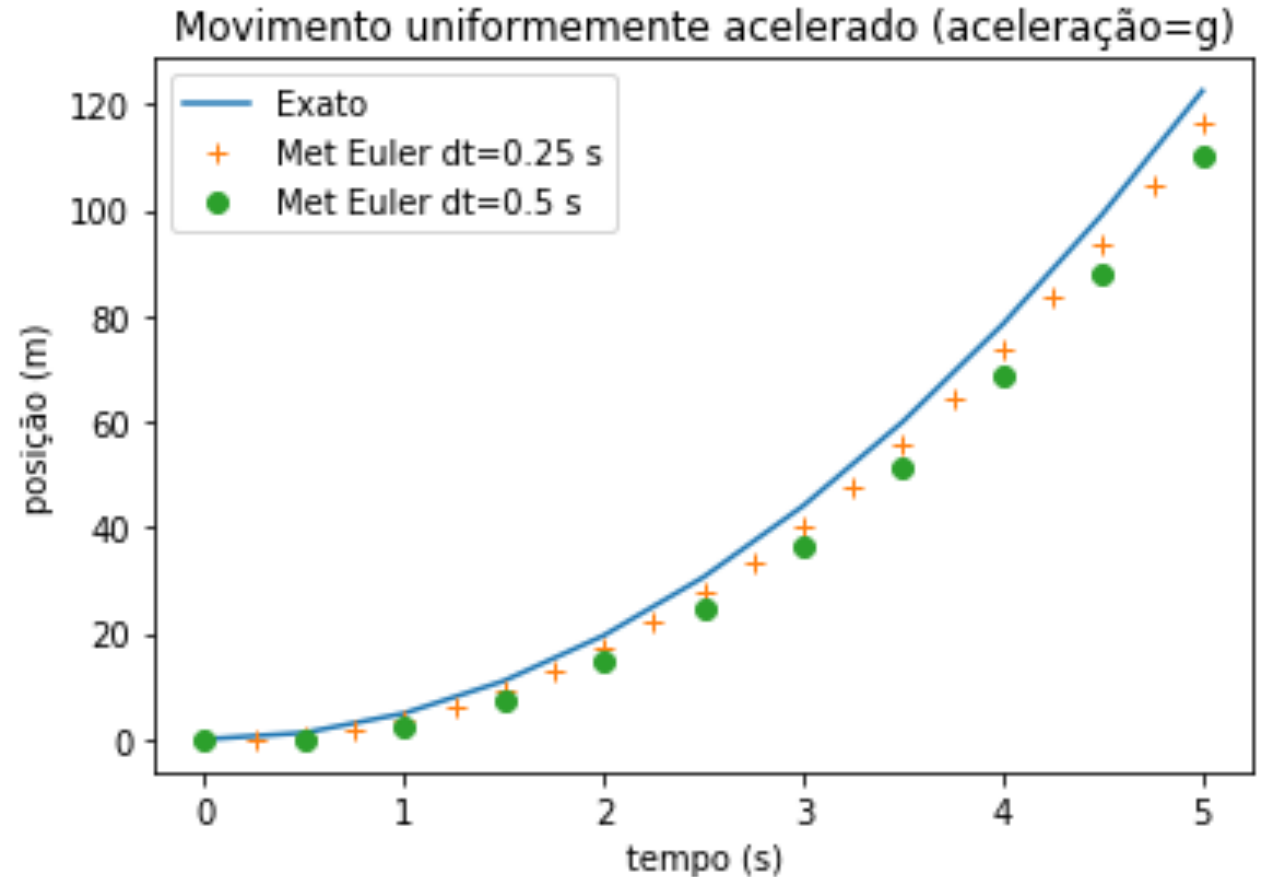
δt = passo temporal

N número de passos

Para um tempo final t_f (t_0 =instante inicial)

$$N = \frac{t_f - t_0}{\delta t} \quad \text{ou} \quad \delta t = \frac{t_f - t_0}{N}$$

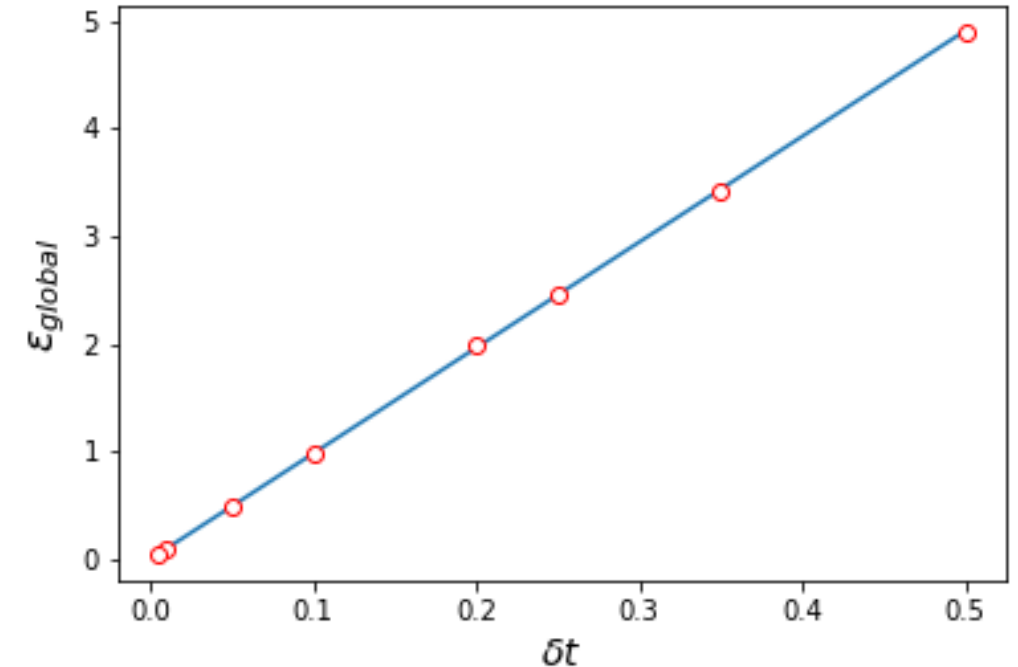
N e δt são inversamente proporcionais



No problema da queda livre $t=2$ s

Cálculo da variação do erro com o passo δt .

δt	N	$x(2)_{Euler}$	$\varepsilon_{global} = x(2)_{exato} - x(2)_{Euler} $
0.5	4	14.7	4.9
0.25	8	17.15	2.45
0.1	20	18.62	0.98
0.05	40	19.1	0.50
0.01	200	19.502	0.10
0.005	400	19.550	0.05
$x(2)_{exato}$		19.6000	



O erro global do método de Euler é linear no passo.

É proporcional ao passo, ou seja inversamente proporcional ao número de passos N .

Erro cometido na aproximação de Euler?

Como a velocidade já não é perfeita
o erro da posição vai acumular

$$\underbrace{\frac{v_x(t + \delta t) - v_x(t)}{\delta t}}_{a(t)} = \underbrace{a_x(t)}_{a_{Euler}(t)} + \underbrace{\text{erro cometido na aproximação de Euler}}_{= |a(t) - a_{Euler}|}$$

Série de Taylor:

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \underbrace{\frac{dv_x}{dt}\bigg|_t}_{\substack{\text{Derivada da} \\ \text{velocidade vezes} \\ \text{o tempo}}} \delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2 v_x}{dt^2}\bigg|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 v_x}{dt^3}\bigg|_t \delta t^3 + o(\delta t^4)$$

→ é a aceleração !

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta t^n}{n!} = 0$$

Método de Euler

$$v_x(t + \delta t) \simeq v_x(t) + \underline{a_x(t)} \delta t \quad (\text{valor aproximado})$$

Comparação com série de Taylor:

Exato

$$\hookrightarrow v_x(t + \delta t) = v_x(t) + a_x(t) \delta t + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d^2 v_x}{dt^2}\bigg|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 v_x}{dt^3}\bigg|_t \delta t^3 + o(\delta t^4)}_{\text{erro (de truncatura)}}$$

este é muito maior que
os outros logo é quase igual
ao erro

Método de Euler

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + a_x(t) \delta t$$

Exato

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + a_x(t) \delta t + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d^2 v_x}{dt^2} \Big|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 v_x}{dt^3} \Big|_t \delta t^3 + o(\delta t^4)}_{\text{erro (de truncatura)}}$$

Erro de truncatura local (um passo) proporcional a δt^2 .

O cálculo de $v_x(t_f)$ usou N passos temporais δt .

$$\begin{aligned} \text{Erro total} &\approx N \delta t^2 = N \left(\frac{t_f - t_0}{N} \right)^2 = \frac{(t_f - t_0)^2}{N} \\ &= (t_f - t_0) \underbrace{\left(\frac{t_f - t_0}{N} \right)}_{\delta t} = (t_f - t_0) \delta t \end{aligned}$$

Como o erro de uma soma se acumula, o erro global ao fim de N passos é proporcional a $N \delta t^2$

$$\text{que é igual a } N \left(\frac{t_f - t_0}{N} \right)^2 = \frac{(t_f - t_0)^2}{N} = (t_f - t_0) \delta t$$

O erro de truncatura é proporcional ao inverso do número de passos N ,
e proporcional ao passo δt

Euler:

$$v(t + \delta t) = v(t) + a(t) \delta t$$

$$v(0) = 0$$

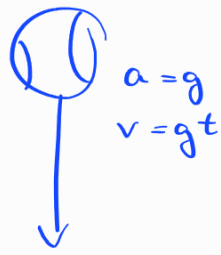
$$v(\delta t) = 0 + g \delta t$$

$$v(2\delta t) = g \delta t + g \delta t = g(2\delta t)$$

$$v(3\delta t) = g 2\delta t + g \delta t = g(3\delta t)$$

Problema: Considere a queda de um objeto sem resistência do ar. Neste movimento a aceleração é constante durante todo o movimento. Se considerar no ciclo do seu programa quando calcula a velocidade em função do tempo usando o método de Euler, a solução numérica é exata. Porquê?

↳ velocidade numérica é igual a velocidade analítica



derivada da velocidade é a aceleração $\rightarrow a' = g' = 0$

$$v(t + \delta t) = v(t) + \underbrace{\frac{dv}{dt}}_g \delta t + \underbrace{\frac{d^2v}{dt^2}}_{+0} \delta t^2 + \dots$$

$\underbrace{+0+0}_{\text{Erro} = 0}$