Departamento de Física
Universidade de Aveiro

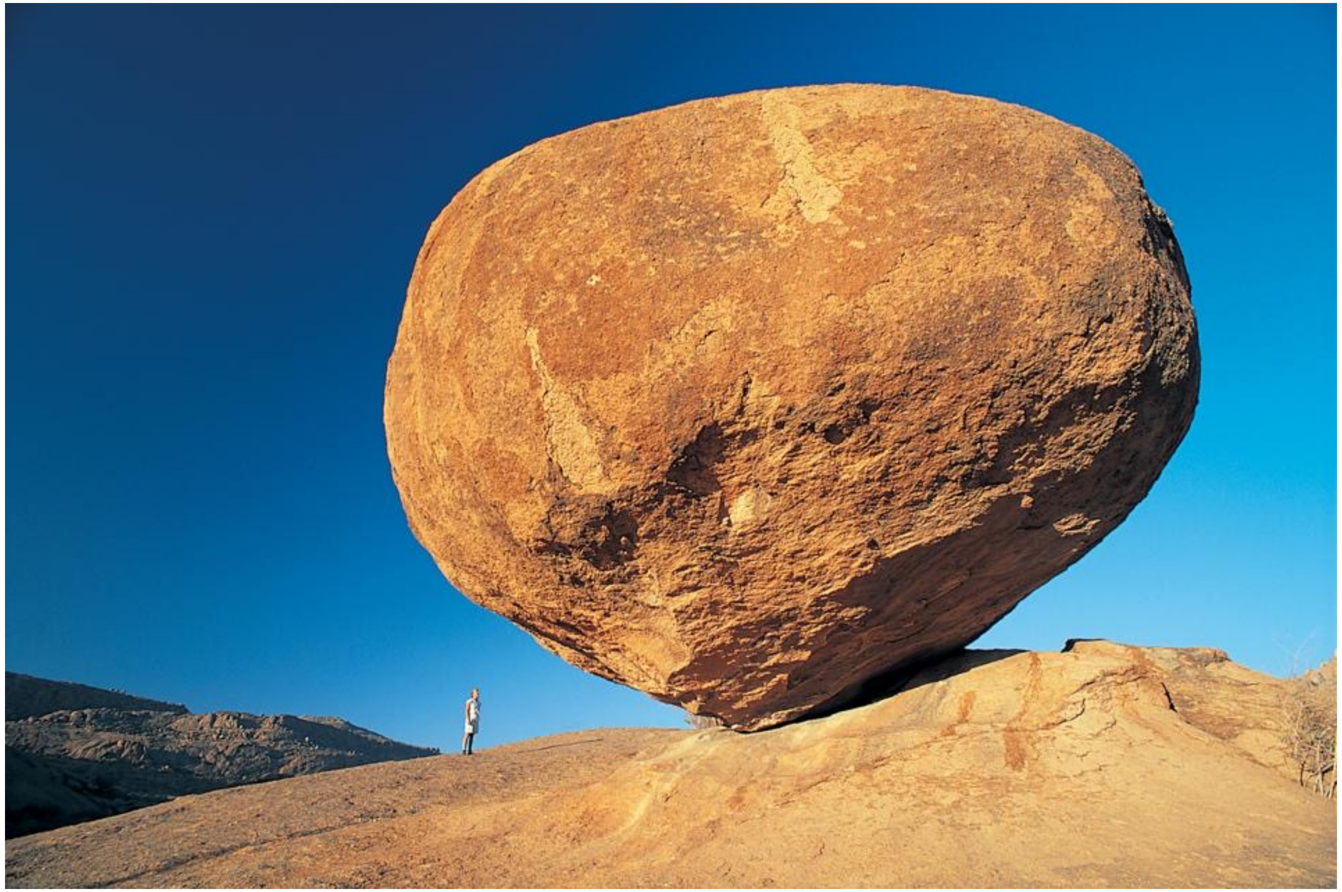
Modelação de Sistemas Físicos

7ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 5: Trabalho e energia

Bibliografia:
Cap. 5: Serway, cap. 7 e 8; Sørenssen, cap. 10 e 11; Villate, cap. 6

Cap. 5 Trabalho e Energia



$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \vec{r}(t)$$

obtemos a velocidade e a posição em função do tempo

Equivalente à equação fundamental da dinâmica:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \;= \int_C m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} \qquad , d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$$

ao longo da trajetória C.

A 1D: $$\int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = \int_{x_0}^{x_1} m\,a_x\,dx$$

Esta formulação permite determinar **a relação da velocidade com a posição**, (mesmo sem sabermos as relações temporais), pois a força em muitos casos depende da posição

Teorema Trabalho – Energia:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \; = \int_C m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} \qquad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}\,dt \qquad \frac{d}{dt}[v_x(t)^2] = 2\,\frac{d\,v_x(t)}{dt}\,v_x(t)$$

$$\int_C m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} \; = \int_{t_0}^{t_1} m\,\vec{a}(t)\cdot\vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\left(\frac{d\,v_x}{dt}\,v_x + \frac{d\,v_y}{dt}\,v_y + \frac{d\,v_z}{dt}\,v_z\right)dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m\,\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}[v_x(t)^2] + \frac{d}{dt}\left[v_y(t)^2\right] + \frac{d}{dt}[v_z(t)^2]\right)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)\Big|_{t_0}^{t_1} \; = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}|^2\Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$$

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \; = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$$

Trabalho feito no sistema é igual à energia cinetica adicionada

Teorema Trabalho – Energia

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

a partir da posição C_0 até à posição C_1.

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = **Trabalho** = $W_{0,1}$

$\frac{1}{2} m\, |\vec{v}|^2$ = **Energia Cinética** = E_c

a unidade é joule (J), J=kg $\cdot\, \mathrm{m}^2/s^2$

Se soubermos $|\vec{v}_0|$ e o trabalho efetuado $W_{0,1}$, obtemos $|\vec{v}_1|$

Exemplo de aplicação: (problema 5.1)

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

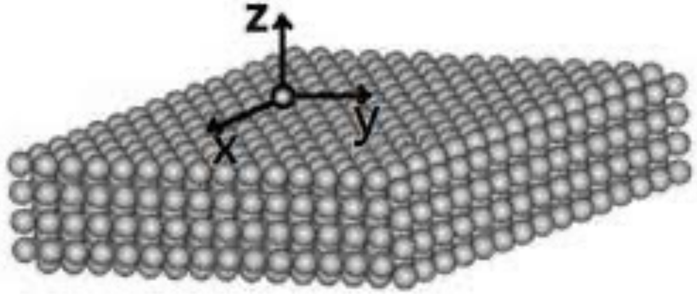
$$F_x = -\, F_0 \sin \frac{2\pi x}{b}$$

em que x é a posição do átomo e b a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal.

Se o átomo partir da posição x_0 com velocidade v_{0x}, qual a dependência da velocidade em função da posição?
É possível integrar analiticamente e calcular a lei do movimento e a lei da velocidade?

A 1D

$$\int_{x_0}^{x_1} F_x \, dx = \frac{1}{2} m \, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m \, |\vec{v}_0|^2$$



Exemplo de aplicação: (problema 5.1)

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -\,F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}$$

em que x é a posição do átomo e b a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal.

Se o átomo partir da posição x_0 com velocidade v_{0x}, como depende a velocidade em função da posição?

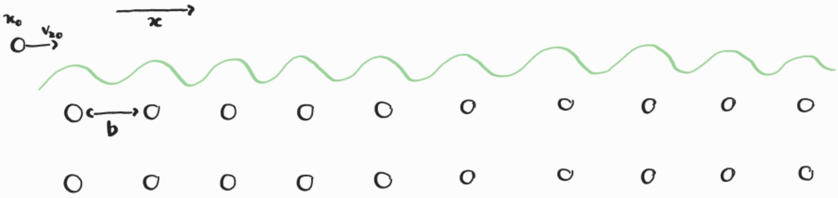
A 1D $\quad \int_{x_0}^{x_1} F_x\, dx = \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2}m\,|\vec{v}_0|^2$

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx = \int_{x_1}^{x_2} -\,F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}\; dx = -\,F_0\frac{b}{2\pi}\left(-\cos\frac{2\pi x}{b}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1} = \frac{b\,F_0}{2\pi}\left[\cos\frac{2\pi x_1}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right]$$

$$\frac{b\,F_0}{2\pi}\left[\cos\frac{2\pi x_1}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right] = \frac{1}{2}m\,v_{1x}^2 - \frac{1}{2}m v_{0x}^2$$

$$v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\,m}\left[\cos\frac{2\pi x_1}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right],$$

x_1 é uma posição qualquer



$$F_x = -F_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} -F_0 \sin\left(\frac{2\pi}{b} x\right) dx = \frac{b}{2\pi} F_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{b}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_1}$$

Exemplo de aplicação: (problema 5.1)

Um átomo move-se numa superfície (horizontal) de um cristal. O cristal exerce a força

$$F_x = -F_0 \sin\frac{2\pi x}{b}$$

em que x é a posição do átomo e b a distância interatómica dos átomos na superfície do cristal.
Se o átomo partir da posição x_0 com velocidade v_{0x}, como depende a velocidade em função da posição?

$$v_{1x}^2 = v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\,m}\left[\cos\frac{2\pi x_1}{b} - \cos\frac{2\pi x_0}{b}\right],$$ x_1 é uma posição qualquer

$x_0 = 0,$

$$v_x = \pm\sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\,m}\left[\cos\frac{2\pi x}{b} - 1\right]}$$

\+ sentido positivo do eixo OX

\- sentido negativo do eixo OX

Teorema Trabalho – Energia: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;= \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$

Exemplo: $F_x = -\, F_0 \sin\frac{2\pi x}{b} \;\Longrightarrow v_x = \pm\sqrt{v_{0x}^2 + \frac{b\,F_0}{\pi\, m}\left[\cos\frac{2\pi x}{b} - 1\right]}$ obtemos a velocidade em função da posição

Muitas forças relevantes dependem da posição (e outras constantes):

- Gravítica Peso: $\vec{P} = m\,\vec{g}$
- Gravítica Geral: $\vec{F}_{grav} = -G\,\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Elástica: $\vec{F} = -k\vec{r}$
- Elétrica: $\vec{F}_{elet} = -k\,\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Elétrica num campo*:* $\vec{F}_{elet} = q\vec{E}_{elet}$

Forças que não dependem da posição*:*

- Resistência do ar: $\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$
- Força de Magnus: $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v}$

Teorema Trabalho – Energia:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;= \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

Sobreposição do trabalho:

$\vec{F}$ é a força resultante de todas as forças aplicadas $\vec{F}_i$

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;= \int_C \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \;= \sum_i \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r} \;= \sum_i W_i \qquad\qquad W_i = \int_C \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

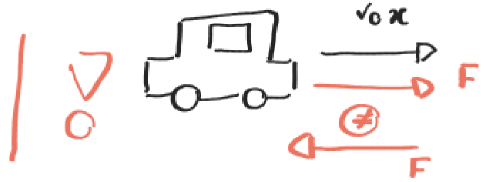
o trabalho feito é a soma do trabalho feito por cada força

Teorema Trabalho – Energia

<u>Trabalho realizado por uma força constante</u> $F_x = F_0$

Ex: **1D – O carro a acelerar ou a travar**

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x \, dx = \int_{x_0}^{x_1} F_0 \, dx = F_0 \ (x_1 - x_0) = F_0 \, \Delta x$$
$$= \begin{cases} + \text{ se força e deslocamento mesmo sentido (acelerar)} \\ - \text{ se força e deslocamento sentidos opostos (travar)} \end{cases}$$



Ex: **Peso** $F_y = -mg$ (eixo OY positivo a apontar para cima)

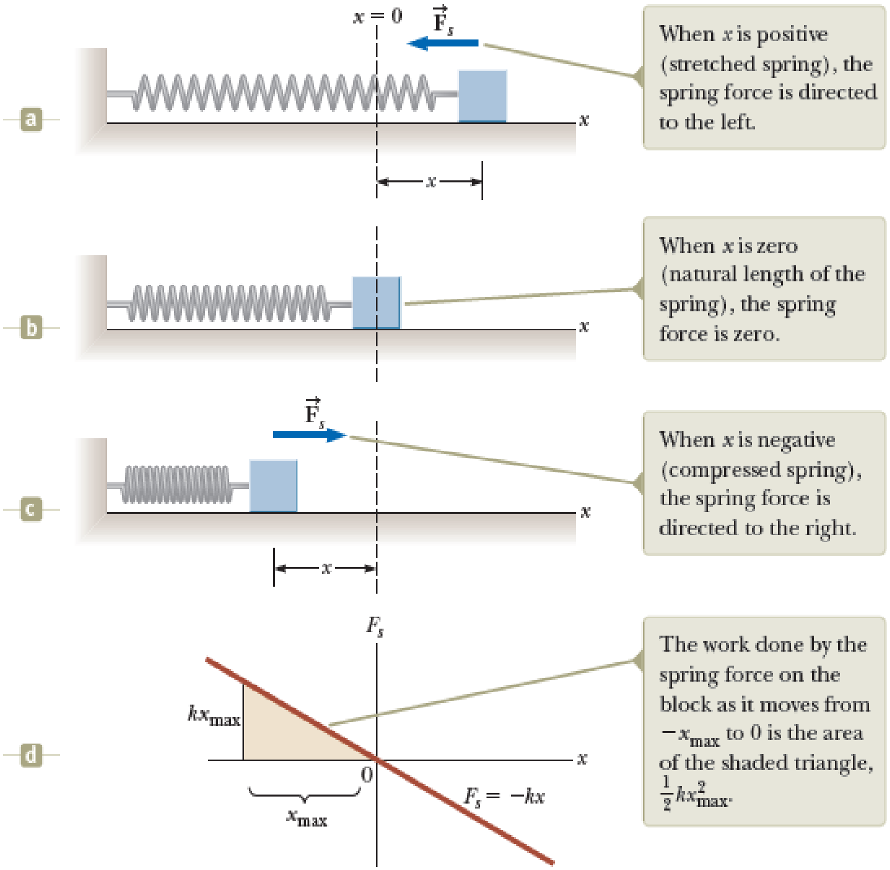
$$W_{0,1} = -m\, g\, (y_1 - y_0) = m\, g\, (y_0 - y_1) = \begin{cases} + \quad y_0 > y_1 : \text{ponto inicial mais alto} \\ - \quad y_0 < y_1 : \text{ponto inicial mais baixo} \end{cases}$$

Teorema Trabalho – Energia

<u>Trabalho realizado por uma força elástica</u> $\vec{F} = -k\,\vec{r}$

Ex: 1D $F_x = -k\,x$

$$W_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} F_x\,dx = \int_{x_0}^{x_1} -k\,x\;dx = -\frac{1}{2}k\,(x^2)\Big|_{x_0}^{x_1}$$
$$= \frac{1}{2}k({x_0}^2 - {x_1}^2)$$



Teorema Trabalho – Energia $W_{0,1} = \frac{1}{2} m\, v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2$

<u>Trabalho realizado por uma força constante</u> $F_y = -mg$ $W_{0,1} = m\, g\, y_0 - m\, g y_1$

<u>Trabalho realizado por uma força elástica</u> $F_x = -k\, x$ $W_{0,1} = \frac{1}{2} k\, {x_0}^2 - \frac{1}{2} k\, {x_1}^2$

São exemplos de forças conservativas (não há dissipação de energia)

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$$

trabalho pode ser descrito como uma diferença de energias *potenciais*

Força constante $F_y = -mg$ $E_p = m\, g\, y$ ou $E_p = m\, g\, y + Constante$

Força elástica $F_x = -k\, x$ $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$ ou $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2 + Constante$

Esta <u>constante é à nossa escolha</u>!

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$ (forças conservativas)

Teorema Trabalho – Energia $W_{0,1} = \frac{1}{2} m\, v_{1x}^2 - \frac{1}{2} m v_{0x}^2 = E_{c1} - E_{c0}$

<u>Por forças que dependem só da posição</u> $W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$

$\Rightarrow E_{c1} - E_{c0} = E_{p0} - E_{p1}$

Ou, $E_{c1} + E_{p1} = E_{c0} + E_{p0}$

Os pontos inicial (0) e final (1) são quaisquer:

$\Rightarrow\ E_c + E_p = \text{constante em todo o movimento}$

<u>Lei da conservação da Energia Mecânica</u> $E = E_c + E_p$

E_p = outra forma de energia : Energia Potencial

Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

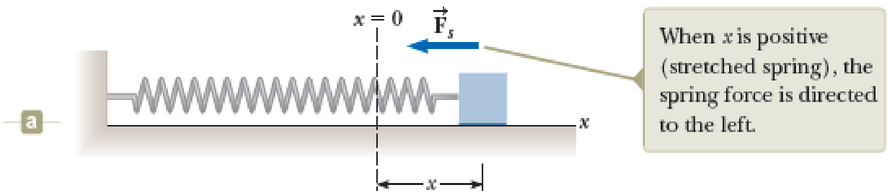
Por forças dependem só da posição

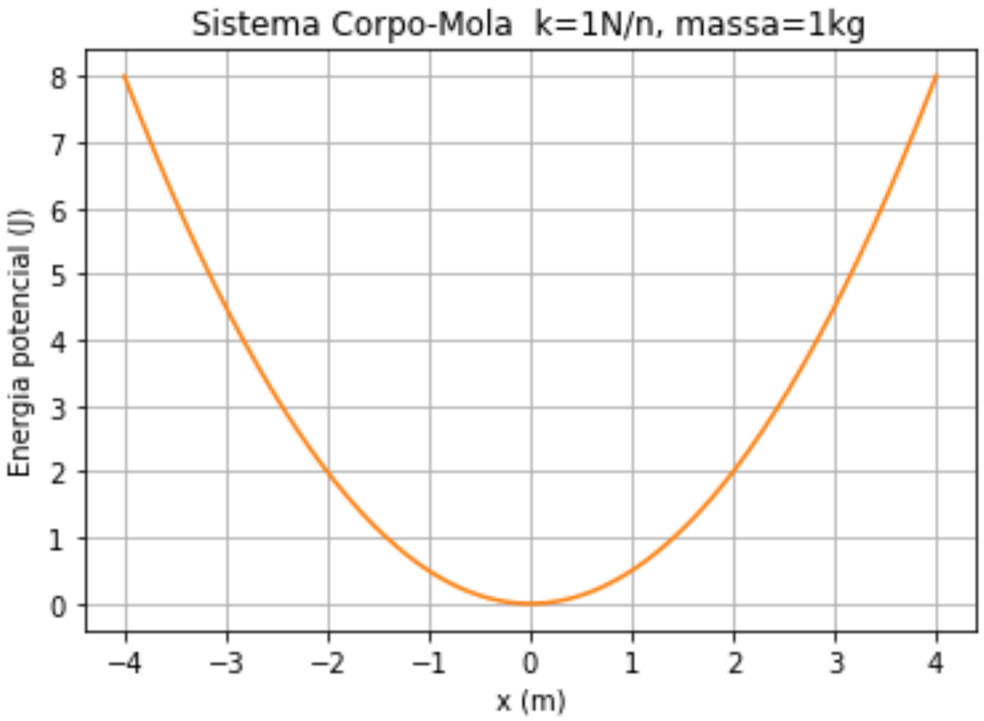
Peso: $E = \frac{1}{2} m\, v_y^2 + mgy$

Elástica $E = \frac{1}{2} m\, v_x^2 + \frac{1}{2} k\, x^2$

Temos sempre a velocidade num ponto como função da posição (se soubermos as condições iniciais ou equivalente)

Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$





Sistema mola-corpo $E_p = \frac{1}{2} k\, x^2$

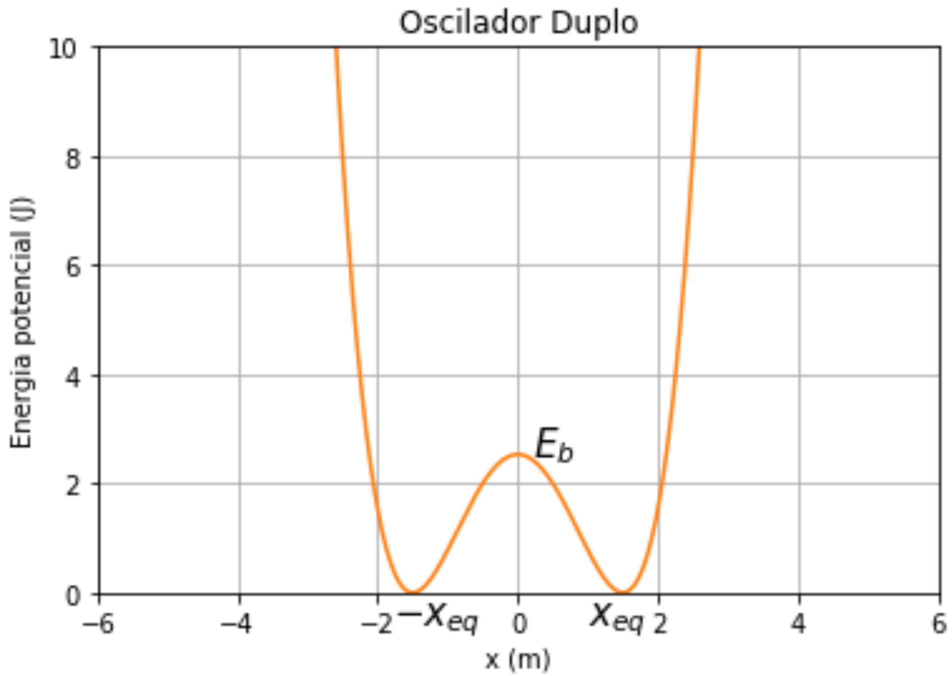
1. Se a energia total for $E = 8$ J,
o corpo não se desloca em $x < -0.4$ m nem em $x > 0.4$ m

Diagrama de Energia

2. Pontos em que a E_p é plana, é um ponto de equilíbrio, pois $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$

Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

Diagrama de Energia



Oscilador poço duplo $E_p = \frac{1}{2}k\left(x^2 - x_{eq}^2\right)^2$

Pontos de equilíbrio $F_x = -\frac{dE_p}{dx} = 0$

Estável: 2 pontos $(-x_{eq}, 0)$ e $(x_{eq}, 0)$

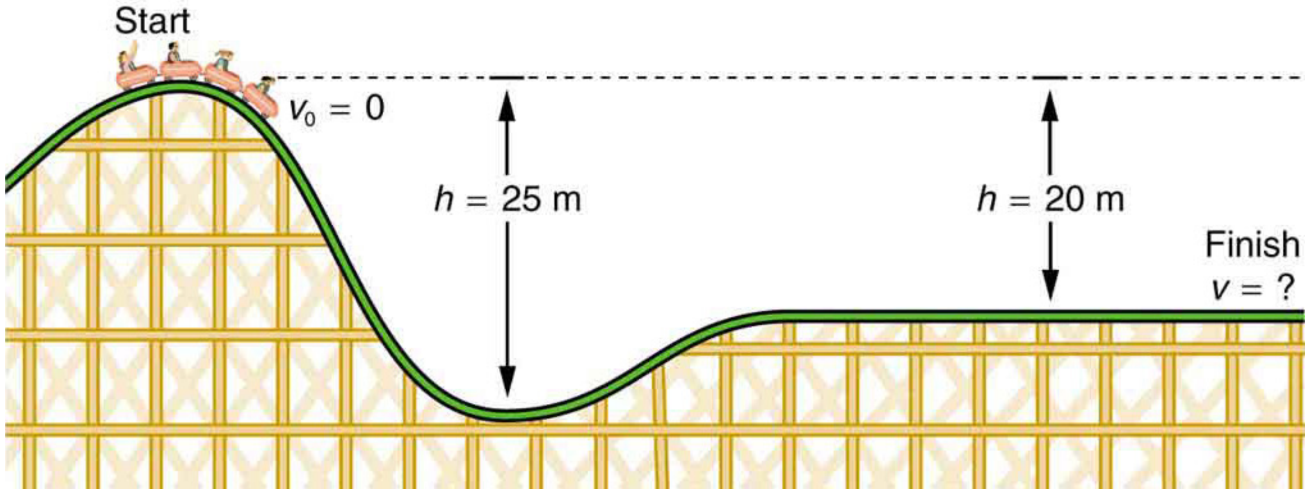
Instável: 1 ponto $(0,\ E_b)$

1. **Se a energia total do corpo for** $E < E_b$
   O corpo desloca-se ou na parte esquerda ou (exclusive) na parte direita, à volta de x_{eq}, limitado pelas posições em que a $E_p = E$

2. **Se a energia total do corpo for** $E > E_b$
   O corpo desloca-se na parte esquerda e na parte direita, à volta de x_{eq}, limitado pelas posições em que a $E_p = E$

Diagrama de Energia

Carruagem de massa m



1. Pontos de equilíbrio: $F_x = -\frac{dE_p}{dx}$

o mais baixo: ponto de equilíbrio estável

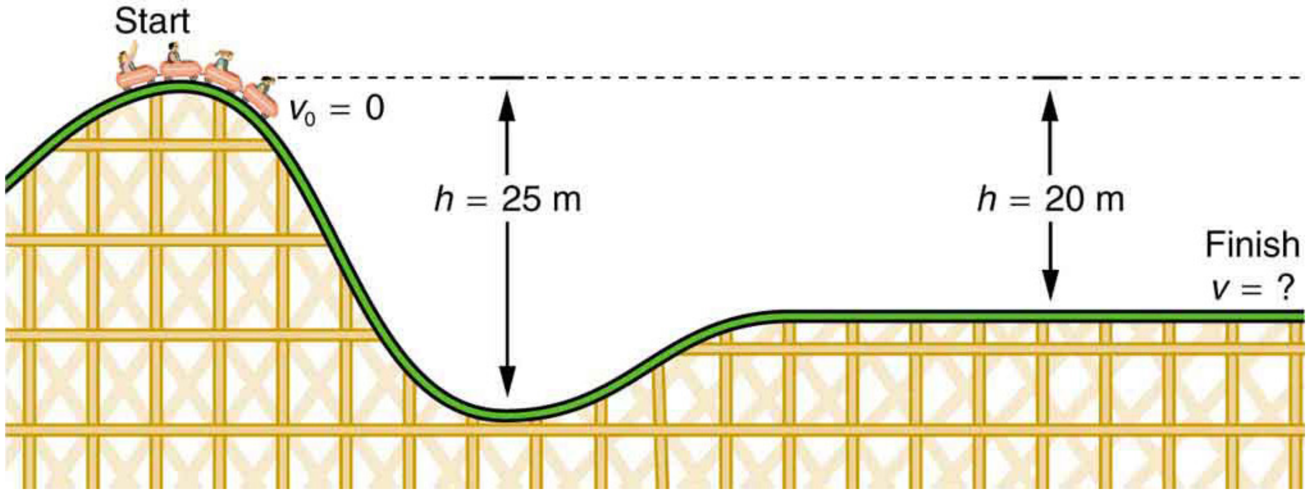
cimo da montanha: ponto de equilíbrio instável (a mais pequena perturbação faz o corpo sair da posição de equilíbrio)

2. Energia Mecânica: Instante inicial $v_0 = 0$ e $y_0 = 25$ m (ponto mais baixo $y = 0$)

$$E = E_c + E_p = 0 + m\,g\,y_0$$

Diagrama de Energia

Carruagem de massa m



2. Energia Mecânica : Instante inicial $v_0 = 0$ e $y_0 = 25$ m (ponto mais baixo $y = 0$)

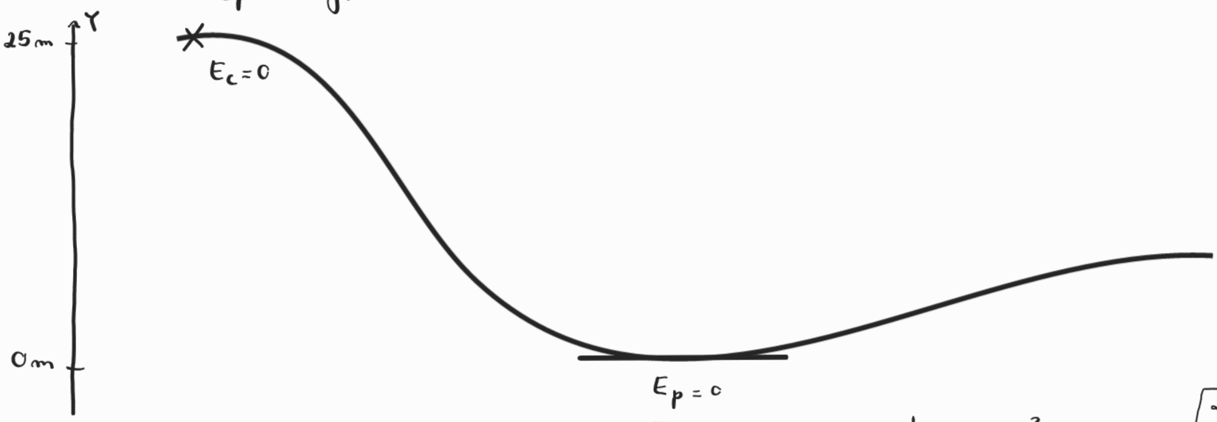
$$E = E_c + E_p = 0 + m\,g\,y_0$$

Problema:

Se a carruagem com os passageiros tiver a massa de 1000 kg, qual a velocidade

a) No ponto mais baixo?
b) na zona plana?

$$E_p = mgy_0 = 1000 \times 9.8 \times 25 \text{ J} = 250{,}000 \text{ J}$$

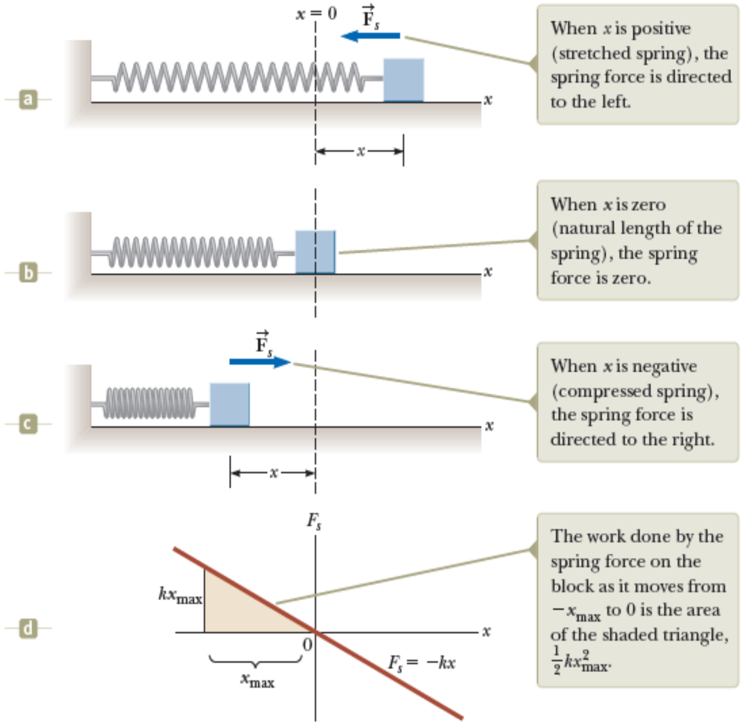


$E_p = 0$

$$E_c = 250{,}000 \text{ J} = \frac{1}{2}\, 1000\, v^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{250\cancel{000} \times 2}{1\cancel{000}}}$$

$$= \sqrt{500} = 22 \text{ m/s}$$

Sistema Mola-Corpo



Mola de constante elástica k
Corpo de massa m
Posição de equilíbrio $x_{eq} = 0$

Força: $F_x = -k\,x$

Energia potencial: $E_p = \frac{1}{2}k\,x^2$

Energia mecânica conserva-se: $E = \frac{1}{2}m\,v_x^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$

Problema:

Uma mola exerce uma força $F_x = -k\,x(t)$, em que k é a constante elástica da mola, num corpo de massa m. Considere $k = 1$ N/m e $m = 1$ kg.

a) Calcule a energia total, do sistema com as condições iniciais: $x_0 = 4$ m e $v_{0x} = 0$.

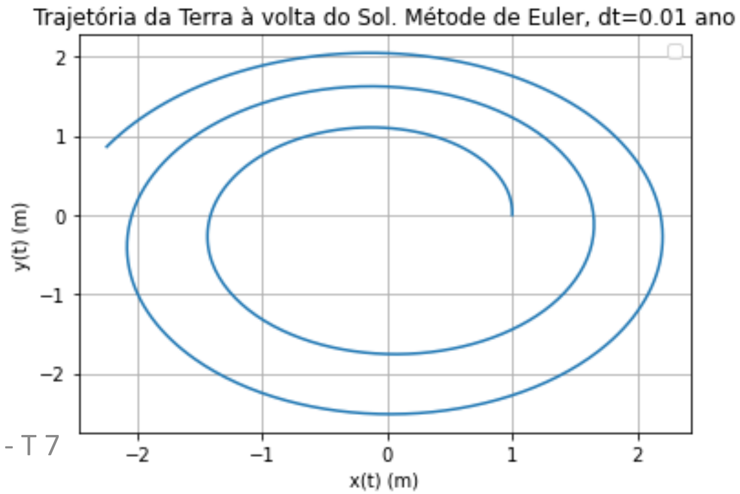
b) Compare o cálculo de energia mecânica se integrar numericamente as equações $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$ e $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ para encontrar a lei do movimento, usando o método de **Euler** e o método de **Euler-Cromer**

Métodos de Integração

Integração pelo método de Euler

```
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
   ax[i]=-gm/r**3*x[i]
   ay[i]=-gm/r**3*y[i]
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt x
```

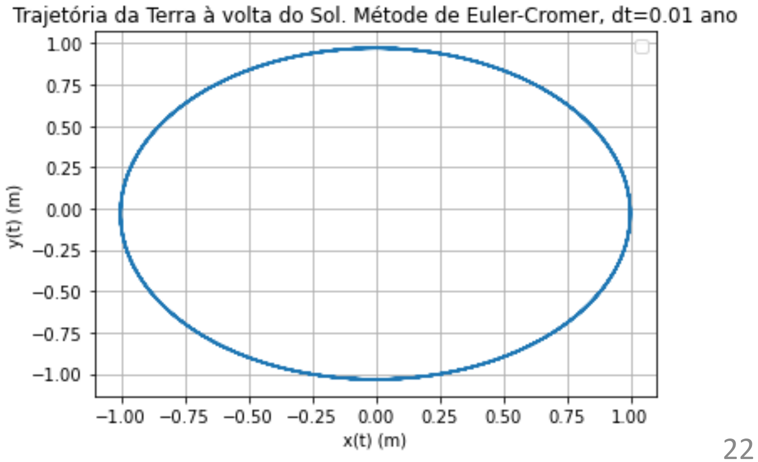
$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\ (t)\times\delta t$$



Integração pelo método de Euler-Cromer

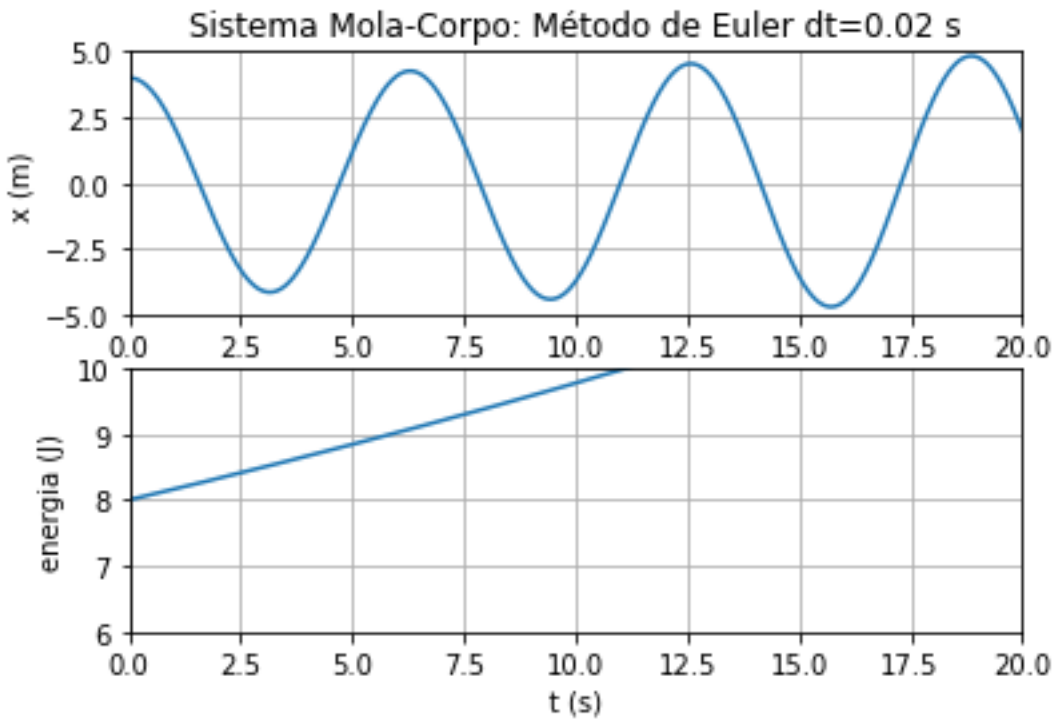
```
for i in range(n):
   t[i+1]=t[i]+dt
   r=np.sqrt(x[i]**2+y[i]**2)
   ax[i]=-gm/r**3*x[i]
   ay[i]=-gm/r**3*y[i]
   vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
   vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
   x[i+1]=x[i]+vx[i+1]*dt
   y[i+1]=y[i]+vy[i+1]*dt x
```

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\ (t+\delta t)\times\delta t$$

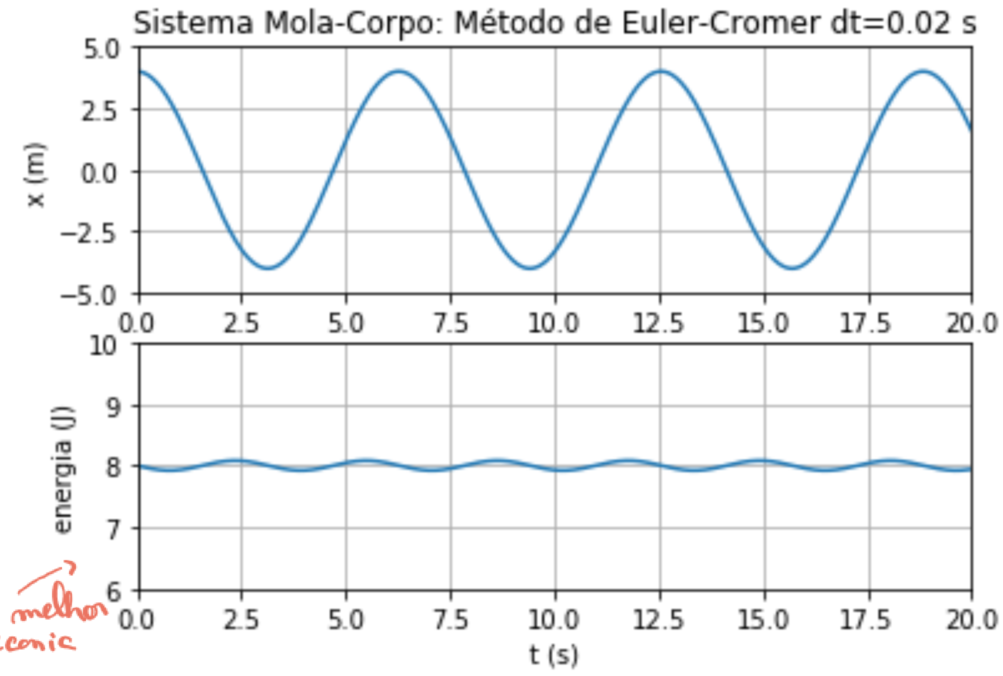


Sistema Mola-Corpo

b) Compare o cálculo de energia total se integrar numericamente as equações $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$ e $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ para encontrar a lei do movimento, usando o método de Euler e o método de Euler-Cromer



Conserva muito melhor a energia mecânic

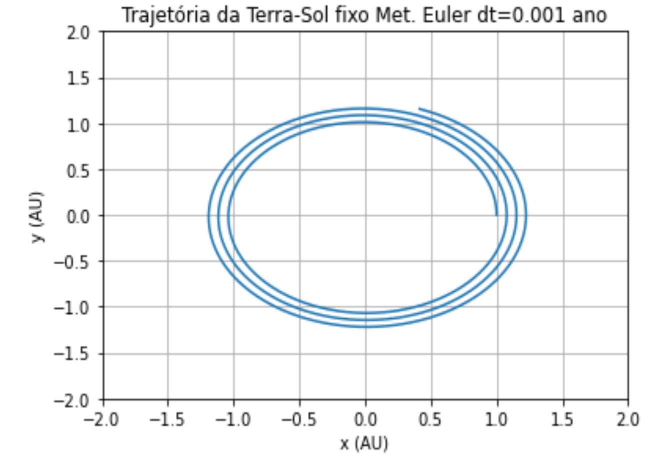


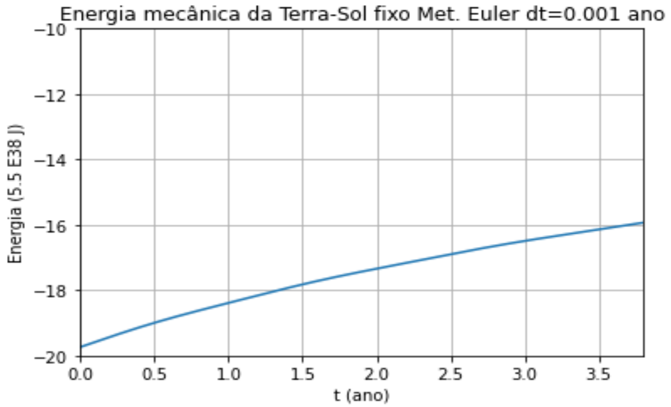
O método de Euler não conserva a energia mecânica

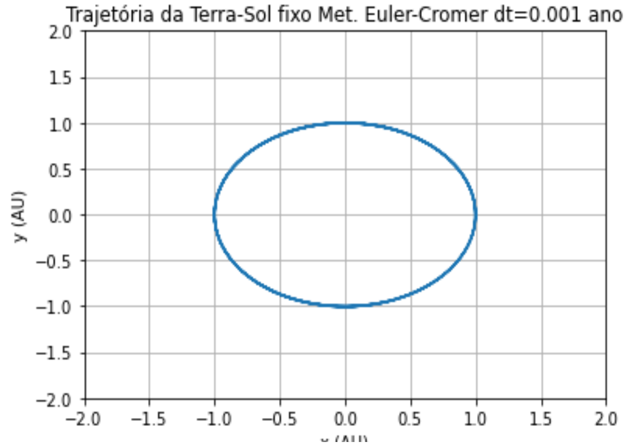
O método de Euler-Cromer conserva a energia mecânica

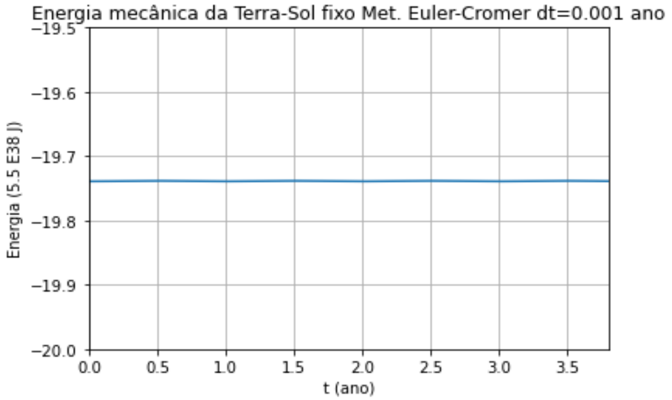
A **conservação da energia mecânica é um bom teste aos métodos de integração numérica.**
Recusam-se os métodos que não conservam a energia mecânica (para as forças conservativas)

Conservação de Energia mecânica como teste (ou critério) de validação do método numérico de integração





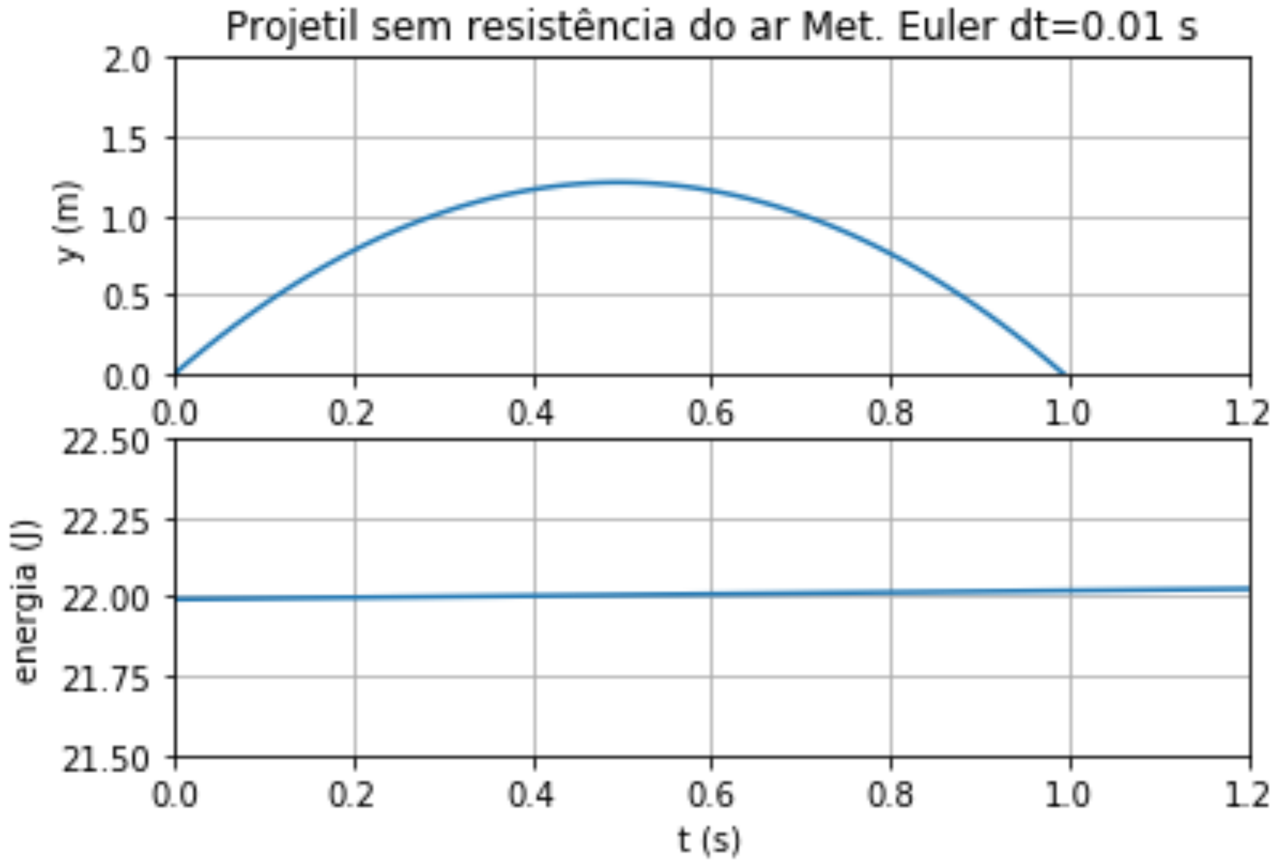




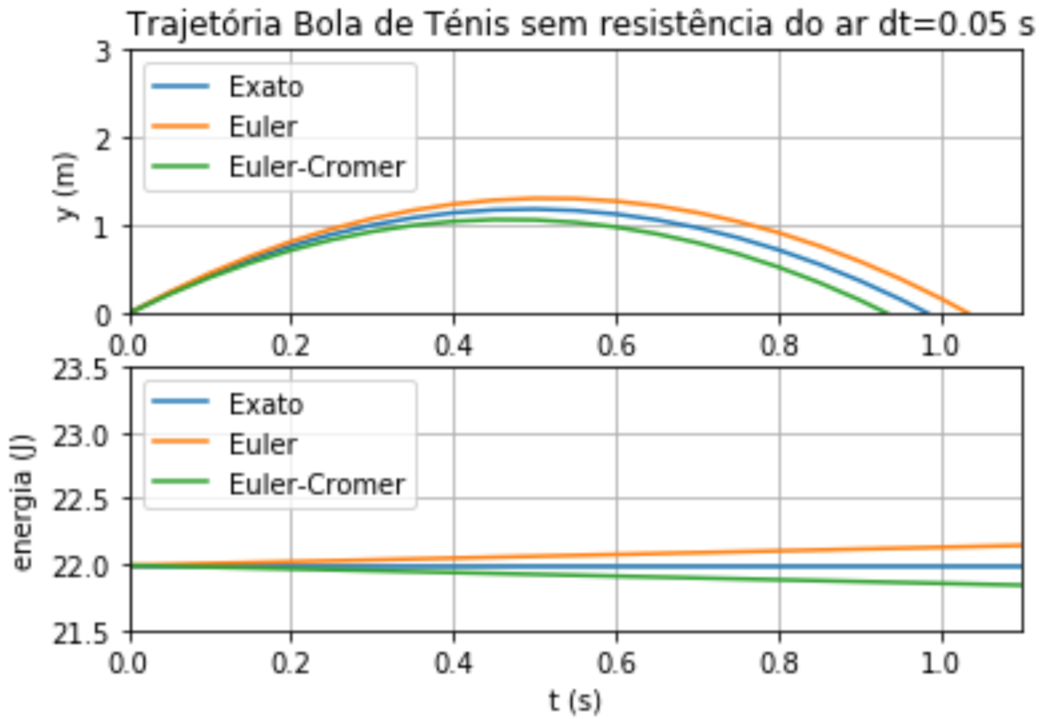
O **método de Euler**
não mantem a conservação de energia mecânica
(o que é falso neste caso)

O **método de Euler-Cromer**
mantem a conservação de energia mecânica (em média)

Conservação de Energia Mecânica como teste (ou critério) de validação do método numérico de integração



Conservação de Energia mecânica como teste (ou critério) de validação do método numérico de integração



Euler - Cromer

No caso movimento do projétil, sem resistência do ar (movimento não periódico) os métodos de Euler e de Euler-Cromer mantêm a mesma precisão no cálculo da energia mecânica.

Repare que o passo temporal não é pequeno, de modo a enfatizar os desvios à trajetória exata (a analítica) e à energia mecânica

Forças conservativas e não conservativas

<u>Forças conservtivas:</u> O trabalho pode ser escrito em termos de energia potencial:

$$\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} \;\; = E_{p0} - E_{p1}$$

↳ Trabalho é a diferença dos energias potenciais

Ex:

- Gravítica $\vec{F}_{grav} = -G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- Elástica $\vec{F} = -k\vec{r}$
- Elétrica $\vec{F}_{elet} = -k\frac{q\,Q}{|\vec{r}|^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

<u>Forças não conservtivas:</u> O trabalho **não** pode ser escrito em termos de energia potencial

$$W_{0,1}^{(não\ conservativo)} = \int_C \vec{F}^{(não\ conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

Ex:

- Resistência do ar $\vec{F}_{res} = -m\,D|\vec{v}|\vec{v}$
- Força de Magnus $\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2}A\,\rho_{ar}\,r\,\vec{\omega}\times\vec{v}$
- Atrito $\vec{F}_{atrito} = -\,\mu\,\left|\vec{N}\right|\hat{v}$

Trabalho de forças não conservativas

Teorema Trabalho – Energia: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;= \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$

e pela definição de energia potencial : $\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} \;= E_{p0} - E_{p1}$

<u>Sobreposição do trabalho:</u>

Notar: $\vec{F}$ é a força resultante de todas as forças aplicadas $\vec{F}_i$

$$\vec{F} = \vec{F}^{(conservativa)} + \vec{F}^{(não\ conservativa)}$$

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \;= \int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{F}^{(não\ conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1} + \int_C \vec{F}^{(não\ conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

Teorema trabalho - energia

$$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)}}$$

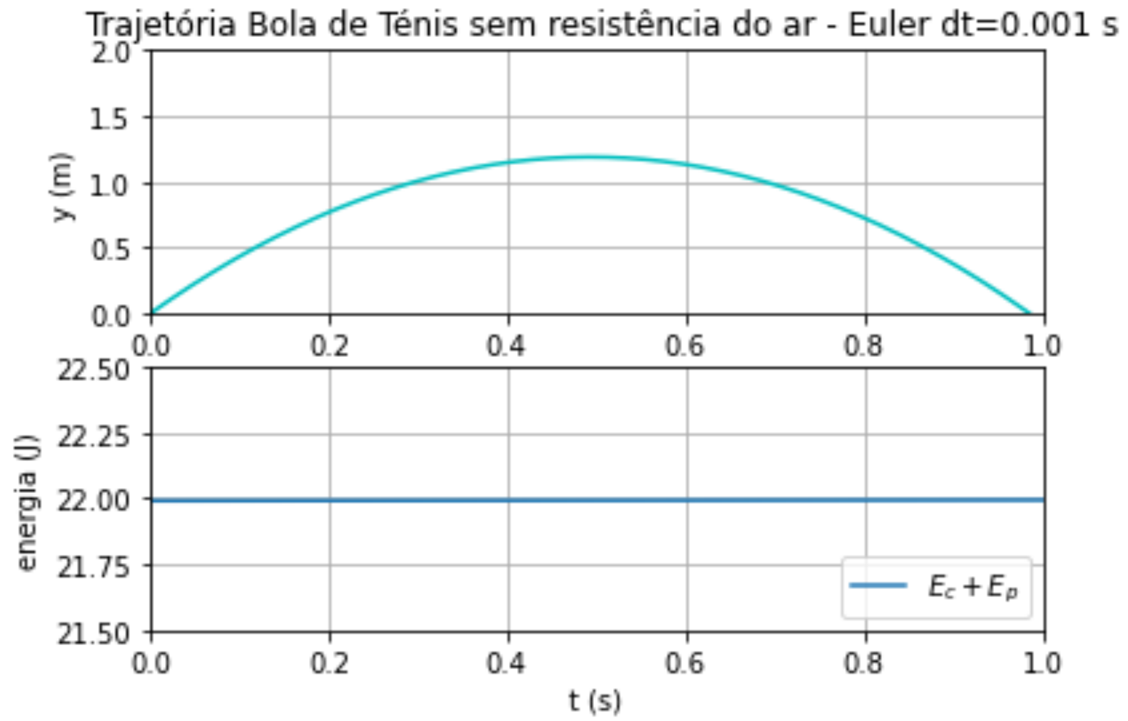
$\Rightarrow W^{(não\ conservativa)} = \Delta E_m$

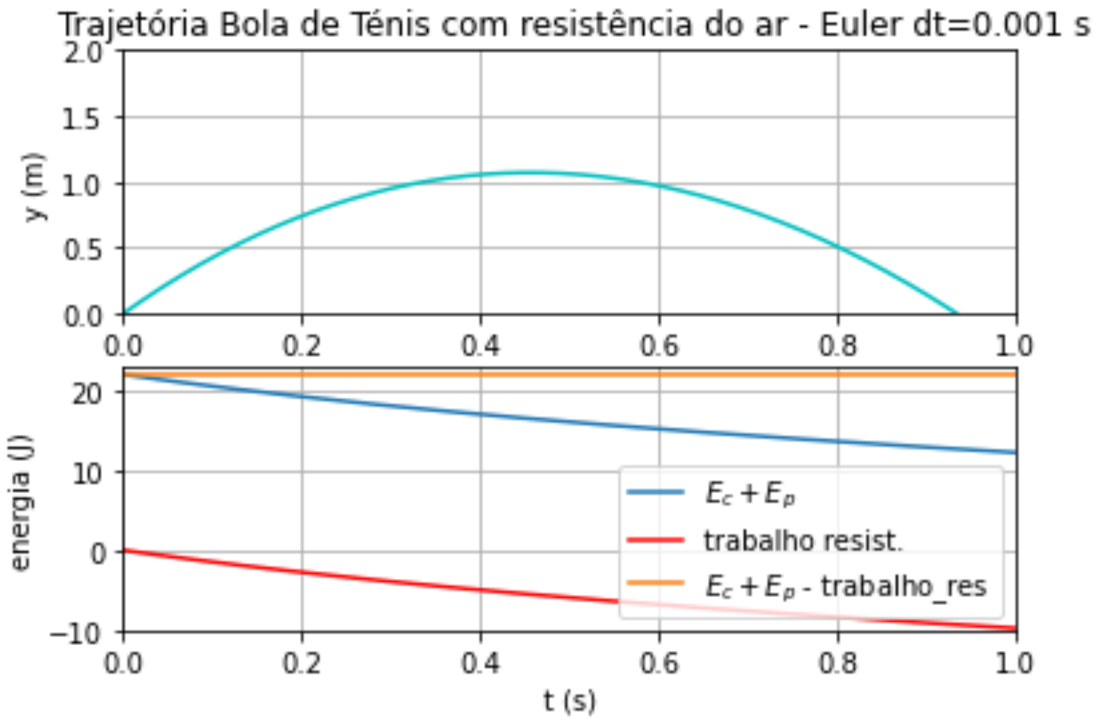
$$W_{0,1}^{(não\ conservativo)} = \int_C \vec{F}^{(não\ conservativa)} \cdot d\vec{r}$$

Trabalho de forças não conservativas

Ex: Movimento da bola de ténis com resistência do ar

$$E(0) = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$





Potência

Trabalho: $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C m\, \vec{a} \cdot d\vec{r}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt \qquad d\vec{r} = \vec{v}\, dt \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}\right)$$

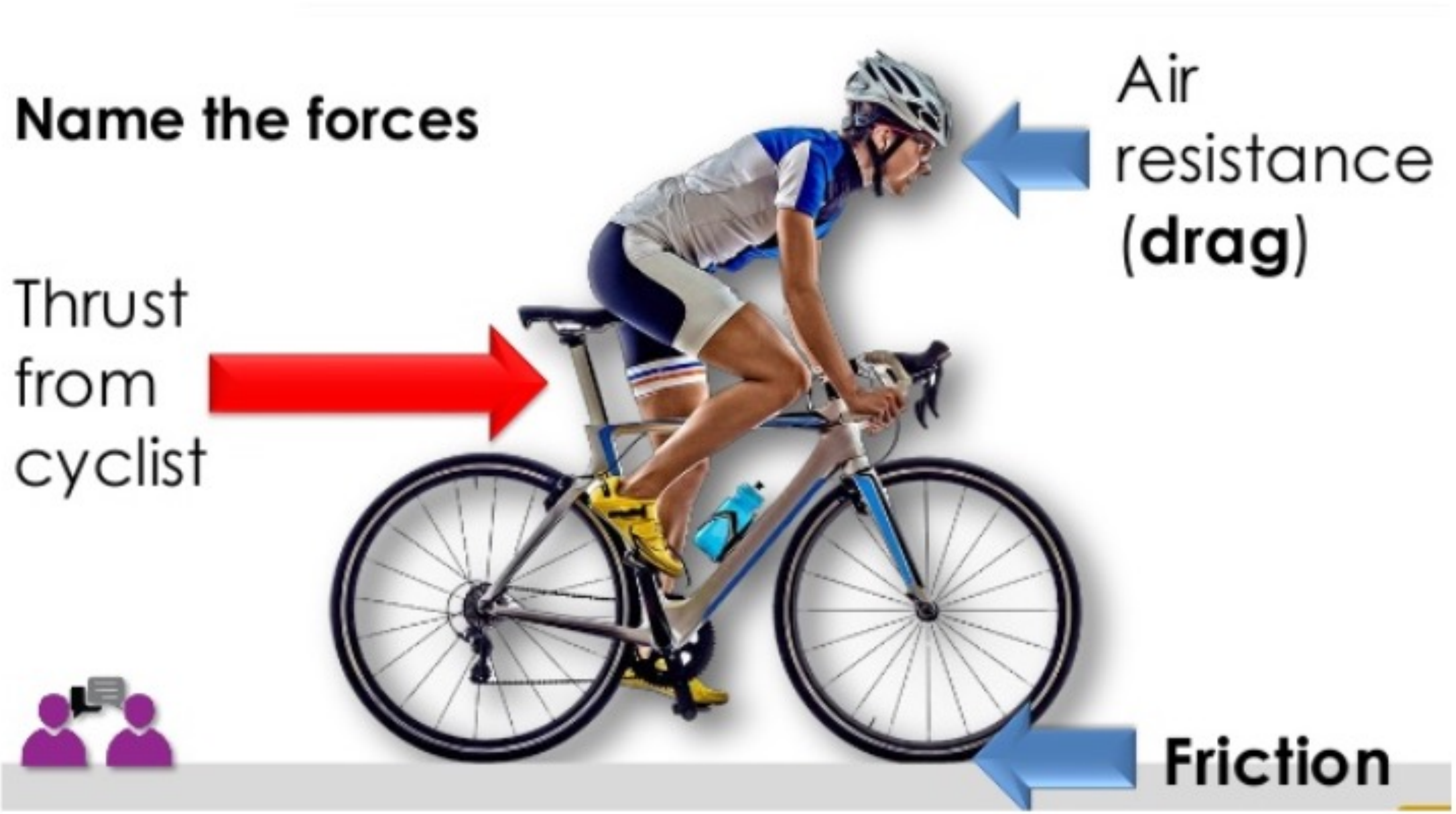
$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P_o = \text{Potência}$$

trabalho realizado por unidade de tempo

Unidade 1 W = 1 J/s

Potência desenvolvida por um ciclista:

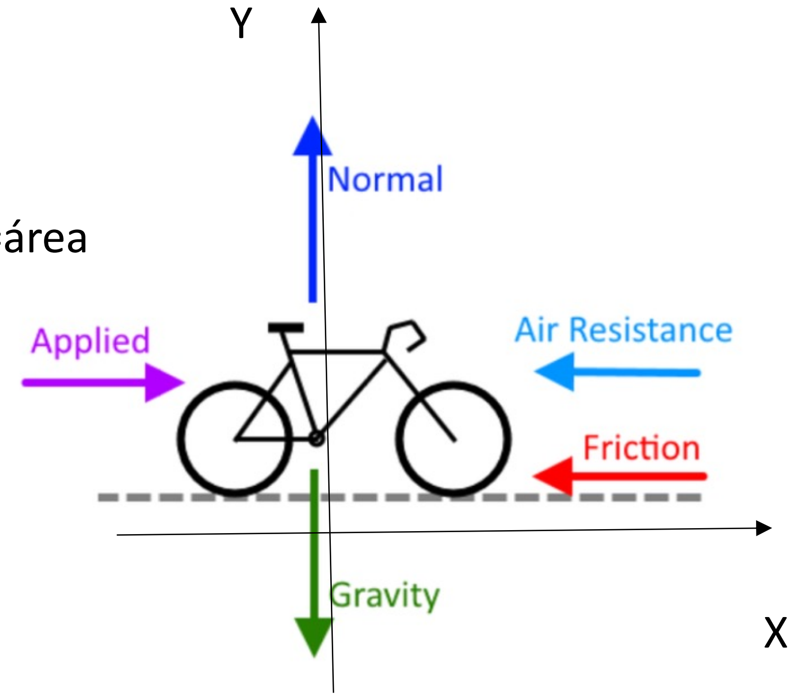
O ciclista para manter uma velocidade constante (força resultante nula) tem de pedalar.
O esforço do ciclista serve sobretudo para anular as forças de resistência do ar e a força de resistência ao rolamento (ou fricção).



Potência desenvolvida por um ciclista:
O ciclista para manter uma velocidade constante (força resultante nula) tem de pedalar.
O esforço do ciclista serve sobretudo para anular as forças de resistência do ar a força de resistência ao rolamento (ou fricção).

Forças:

- Força desenvolvida pelo ciclista $\vec{F}_{cic}$
- Força de resistência do ar $\vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} |\vec{v}|\, \vec{v}$, A=área
- Peso $\vec{P}$
- Normal $\vec{N}$
- Força de resistência ao rolamento ou fricção $|\vec{F}_{rol}| = \mu\, |\vec{N}|$



Potência

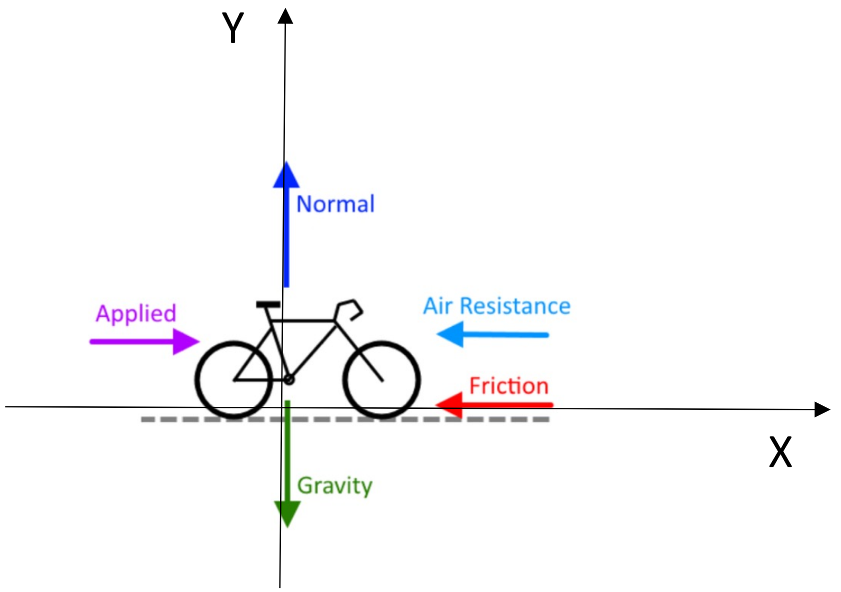
Forças:

$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} + 0 - F_{res} - F_{rol} + 0 \\ F_y = 0 - P + 0 + 0 + N \quad = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ 0 = -mg + N \end{cases} \qquad \begin{cases} F_x = F_{cic} - F_{res} - \mu N \\ N = mg \end{cases}$$

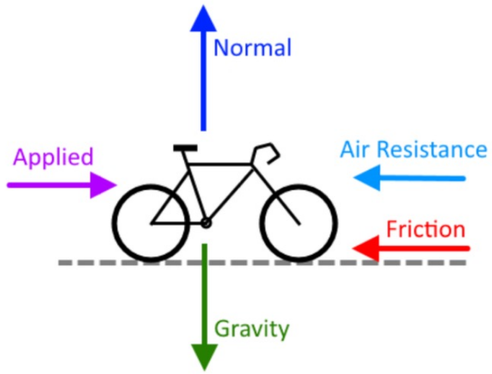
$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \dfrac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g \\ N = mg \end{cases}$$



Notação a seguir : $\left|\vec{N}\right| \equiv N$

Nunca confundir $\left|\vec{N}\right| \equiv N$ com a componente N_x

Potência



Forças:

$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g \\ N = mg \end{cases}$$

Qual a potência desenvolvida pelo ciclista manter uma velocidade uniforme (constante) (ou $F_x = 0$) ?

Potência $P_{o,cic} = F_{cic}\, v = ?$

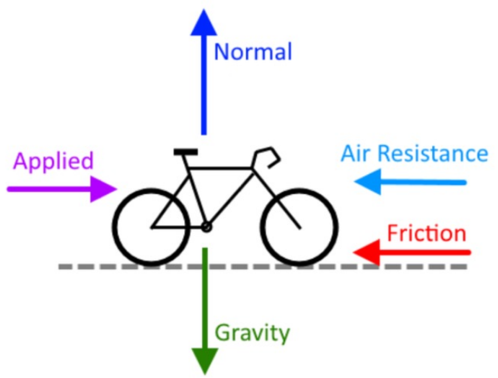
$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = 0$ e movimento sempre no sentido positivo $v_x = v$

$$\Rightarrow F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g$$

$$\Rightarrow P_{o,cic} = \left(\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g\right) v$$

Problema:

<u>Qual a potência desenvolvida pelo ciclista</u>
para manter uma <u>velocidade uniforme</u> (constante) de 30 km/k e de 40 km/h?
E o record mundial de velocidade 296.010 km/h?



O coeficiente de resistência μ de um piso liso de alcatrão é de 0.004
e o coeficiente de resistência do ar é $C_{res} = 0.9$
A massa do ciclista-bicicleta é de 75 kg,
e a área frontal dociclista-bicicleta é de $A = 0.30$ m²

$$F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = 0$$ e movimento sempre no sentido positivo $v_x = v$

$$\Rightarrow F_{cic} = \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g$$

$$\Rightarrow P_{o,cic} = \left(\frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v^2 + \mu\, m\, g\right) v$$

$v = 30$ km/h $\Rightarrow$ $P_{o,cic} = 120\text{ W} = 0.163\text{ cv}$
$v = 40$ km/h $\Rightarrow$ $P_{o,cic} = 260\text{ W} = 0.353\text{ cv}$

$v = 296.010$ km/h $\Rightarrow$ $P_{o,cic} = 92177\text{ W} = 125\text{ cv}$
como é possível??

Record mundial de velocidade   set 2018

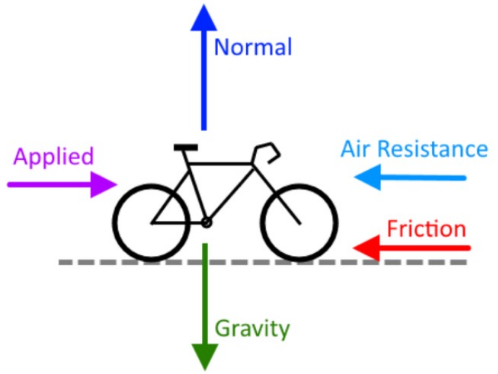
Denise Mueller-Korenek   183.932 mph (milhas/hora) = 296.010 km/h

Velocidade do ciclista

Reduzir drasticamente resistência do ar

https://www.youtube.com/watch?v=A6y_G_DJAzM

Como calcular a velocidade do ciclista?



Se soubermos a potência desenvolvida pelo ciclista podemos calcular a lei da velocidade e a lei do movimento

$$P_{cic}= F_{cic}\, v \quad \Longrightarrow \quad F_{cic}= P_{cic}/v$$

Forças:

$\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ F_y = -mg + N = 0 \end{cases}$$

$$m\, a_x = \frac{P_{o,cic}}{v} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g$$

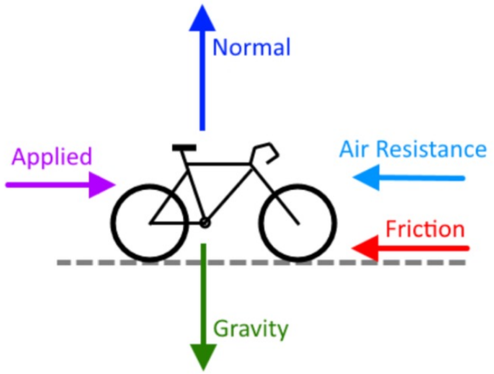
Problema 12: Determine a evolução temporal da velocidade de um ciclista, se este produzir continuamente a potência 0.4 cv e partir com um empurrão de 1 m/s?

a) Qual a sua velocidade terminal?

b) Ao fim de quanto tempo atinge 90% da sua velocidade terminal?

c) Quanto tempo leva a percorrer 2 km?

Considere as mesmas condições do ciclista do problema anterior.



Forças: $\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

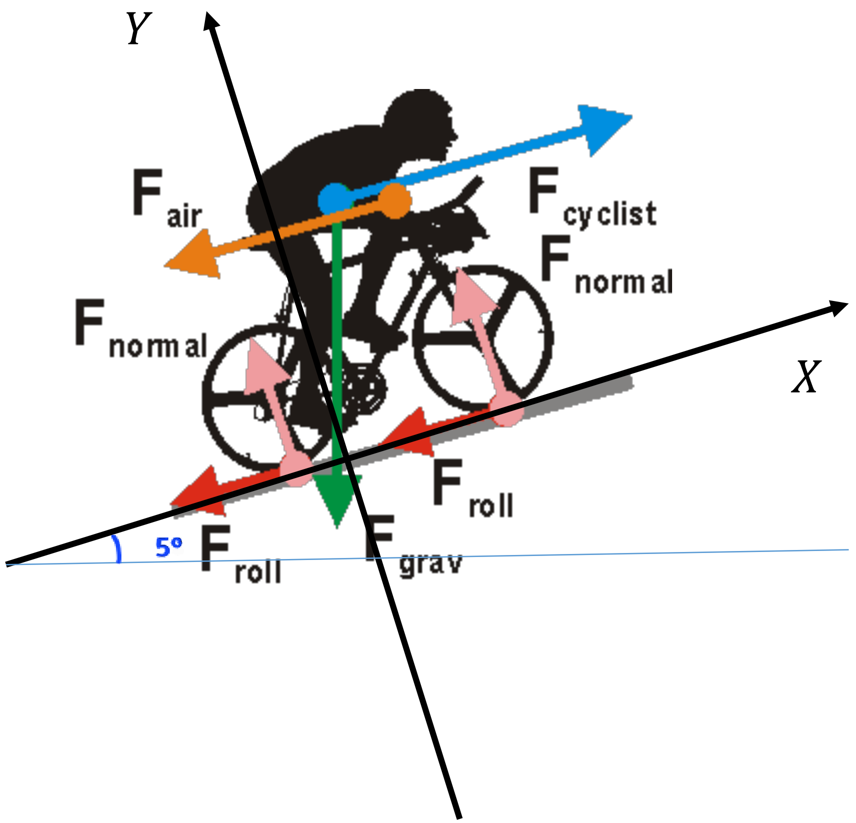
$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ F_y = -mg + N = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\, v} - \frac{C_{res}}{2m} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, g$$

Problema 13: O ciclista do problema anterior sobe uma colina com uma inclinação de 5º.

a) Quanto tempo demora a percorrer 2 km?

b) Qual a sua velocidade terminal?



Forças: $\vec{F} = \vec{F}_{cic} + \vec{P} + \vec{F}_{res} + \vec{F}_{rol} + \vec{N}$ segundo OX

$$\begin{cases} F_x = F_{cic} - P \sin 5º - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ F_y = -m\, g \cos 5º + N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{P_{o,cic}}{v} - P \sin 5º - \frac{C_{res}}{2} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, m\, g = m\, a_x \\ N = m\, g \cos 5^{\circ} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\, v} - g \sin 5^{\circ} - \frac{C_{res}}{2m} A\, \rho_{ar} v\, v_x - \mu\, g$$

Problema 12:

$$a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\,v} - \frac{C_{res}}{2m} A\,\rho_{ar} v\, v_x - \mu\, g$$

Problema 13:

$$a_x = \frac{P_{o,cic}}{m\,v} - g\sin 5^\circ - \frac{C_{res}}{2m} A\,\rho_{ar} v\, v_x - \mu\, g$$

Dados:

$\mu = 0.004$
$C_{res} = 0.9$
$m = 75$ kg
$A = 0.30$ m^2

$P_{o,cic} = 0.4$ cv
$v_0 = 1$ m/s

Solução numérica (Euler)