Departamento de Física
Universidade de Aveiro

# Modelação de Sistemas Físicos

## 5ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 3 Forças e movimento
Cap. 4 Movimento no plano e no espaço

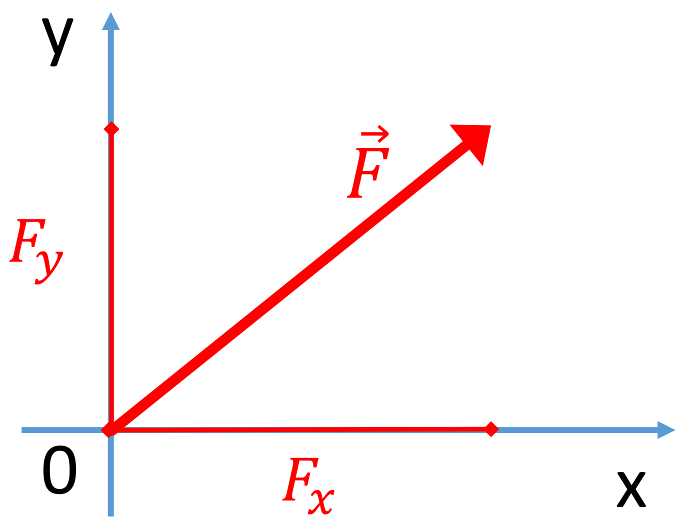
Bibliografia:
Cap. 3: Serway, cap. 3 e 5; Sørenssen, cap. 5 e 6; Villate, cap. 4
Cap. 4: Serway, cap. 4; Sørenssen, cap. 6; Villate, cap. 6


Força = massa × aceleração

## Componentes de uma força

Em 2D:

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$$




Em 3D:

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$$

$F_x, F_y, F_z$ escalares

$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ vetores unitários, paralelos aos eixos XX, YY, ZZ

**2ª Lei de Newton**: $\vec{F} = m\,\vec{a}$ $\qquad \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ → Dimensões

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.
A constante de proporcionalidade é a massa $m$ do corpo.
A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

Se as forças aplicadas ao um objeto forem conhecidas,
pode-se determinar o movimento do objeto – a sua posição e velocidade.

Forças determinam-se por experiências
Ou por modelos teóricos, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.

Relação entre as quantidade de interesse do **movimento a 1 dimensão**

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

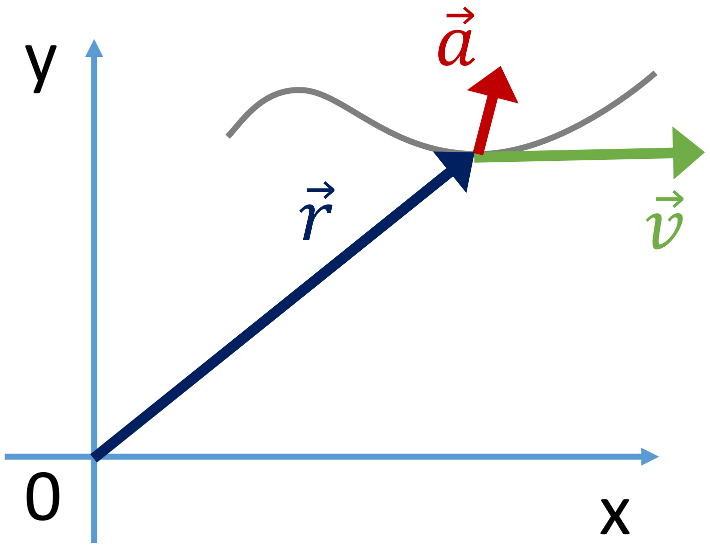
Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$

<u>Relação entre a força aplicada e a aceleração:</u>

$$F_x(t) = m\, a_x(t) \quad \Leftrightarrow \quad F_x(t) = m\frac{dv_x(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

*Agora, como fazemos em 3D?*

# Posição, velocidade e aceleração também são vetores




Posição $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$

Velocidade $\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$

Aceleração $\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$ | $y(t)$ | $z(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ | $v_y(t) = \frac{dy}{dt}$ | $v_z(t) = \frac{dz}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ | $a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$ | $a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}$

$$\vec{r}(t) = (x, y, z)$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

! A aceleração de $i$ só depende da posição em $i$, logo podemos considerar individualmente cada direção

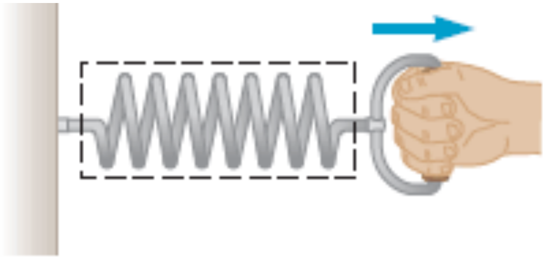
E se souber a aceleração instantânea? Sim, se soubermos as Forças aplicadas

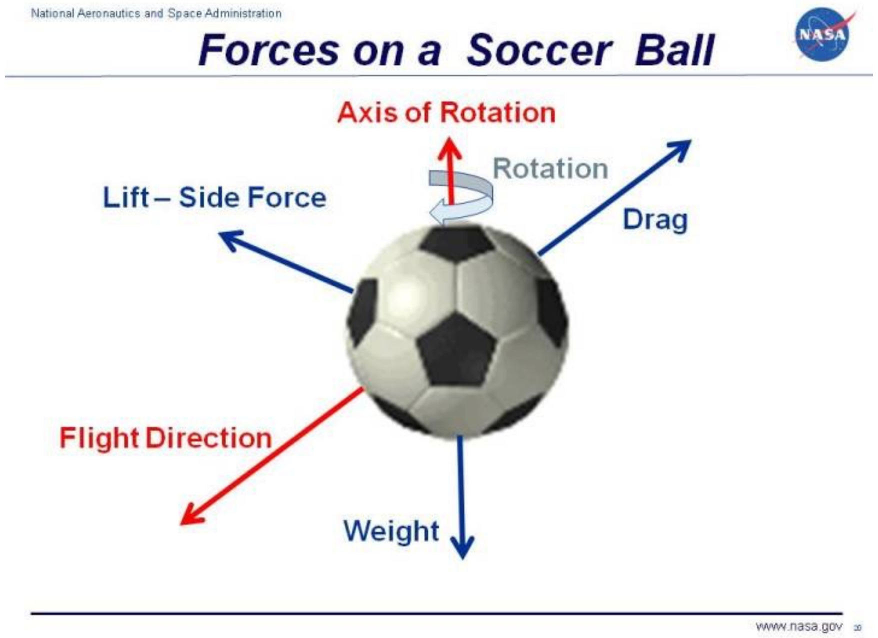
$$\begin{cases} F_x(t) = m a_x(t) \\ F_y(t) = m a_y(t) \\ F_z(t) = m a_z(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_x(t) = m \frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m \frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m \frac{v_z(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \Longrightarrow \vec{F}(t) = m\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\,\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

**O estudo e a previsão de trajetórias requer o conhecimento das Forças aplicadas ao objeto.**

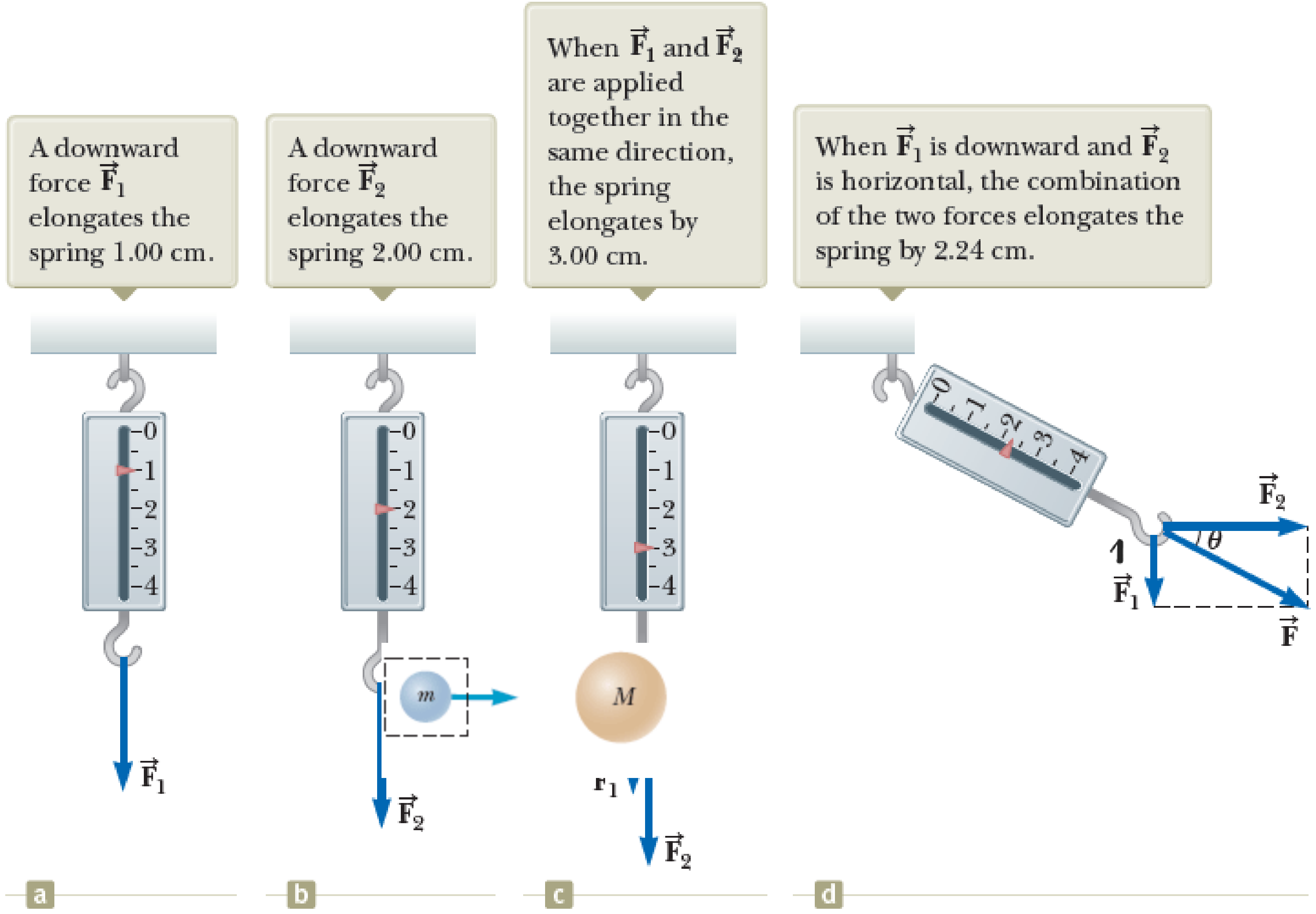
As forças são  obtidas por realização de experiências e medições



**As forças são obtidas por realização de experiências e medições.**

Exemplo: A mola e a força elástica




$$\begin{cases} F_x = -k\,x \\ F_y = -k\,y \\ F_z = -k\,z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = -k\vec{r}$$

$F = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$

$= 2.24$

# Ex: **Força de resistência do ar**

Experiências no volante de badmington

mesma direção da velocidade

- Força oposta à velocidade $\vec{F} = -C(v)\,\hat{v}$ $\quad \vec{v} = |\vec{v}|\hat{v} \quad \hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$

vetor unitário

- Proporcional ao quadrado da velocidade $|\vec{F}| \propto |\vec{v}|^2$

coeficiente que depende dos casos

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = -m\,D|\vec{v}|^2\underbrace{\hat{v}}_{=\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}} = -m\,D|\vec{v}|^{\cancel{2}}\frac{\vec{v}}{\cancel{|\vec{v}|}} = -m\,D|\vec{v}|\,\vec{v}$$

<u>A 1D</u>: $\quad \vec{v} = v_x\,\hat{\imath}$

$$|\vec{v}\,| = |v_x| \qquad \hat{v} = \frac{v_x}{|v_x|}\hat{\imath}$$

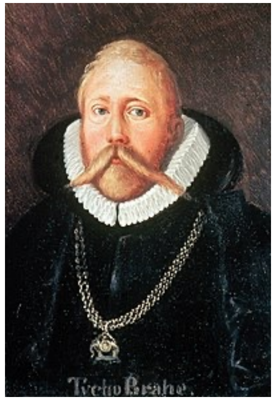
$$\Rightarrow \quad F_x = -m\,D|v_x|^2\frac{v_x}{|v_x|} = -m\,D|v_x|v_x$$

Expressão válida para qualquer sentido do eixo e sentido da velocidade.

Logo, $F_y = -m\,D|v_y|v_y$

**Gravidade revela-se como:**

- Força entre corpos celestes (planetas, estrelas, cometas, asteroides) e satélites e sondas espaciais
- Peso



Tycho Brahe
1546-1601

**Força entre corpos celestes:**

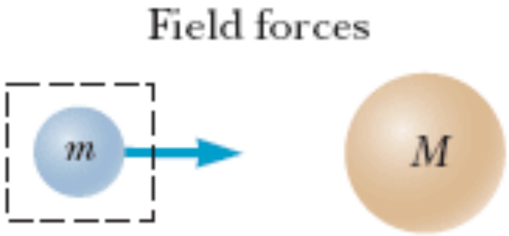
- Observação experimental de Tycho Brahe: medições precisas das posições e movimentos dos corpos celestes

- 3 Leis de Kepler (em concordância com as observações de Tycho Brahe):
    1. planetas com órbitas elíticas
    2. o segmento que une cada planeta ao sol, varre áreas iguais em tempos iguais.
    3. o quadrado do período de translação de um planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da sua órbita

Johannes Kepler
1571-1630

**Lei da gravidade de Newton** (prevê as leis de Kepler)

- Força atrativa ao longo da reta entre os dois corpos
- Proporcional a ambas as massas




$$\left|\vec{F}_{grav}\right| = G\frac{m\,M}{d^2},$$

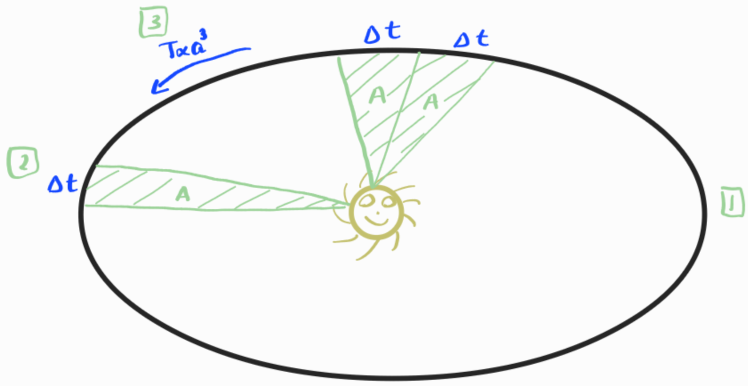
$$\vec{F}_{grav} = G\frac{m\,M}{|\vec{r}|^2}\,\hat{r}$$

$$|\vec{r}| = d, \qquad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$G = 6.67259 \times 10^{-11}$ N·m²/kg²

$d$ distância entre 2 corpos

Leis de Kepler:



**Gravidade revela-se como:**
- Força entre corpos celestes (planetas, estrelas, cometas, asteroides) e satélites e sondas espaciais
- Peso

**Peso:**
- Força vertical, aponta para baixo

$$|\vec{P}| = m\,|\vec{g}|, \qquad |\vec{g}| = g = 9.80 \text{ m/s}^2$$ aceleração da gravidade (na superfície da terra)

- $\vec{P}$ é a força gravítica que a Terra exerce em qualquer corpo de massa $m$.

- $R_T$ Distância do corpo (na superfície da Terra) até ao centro da Terra

$$|\vec{F}_{grav}| = G\frac{m\,M_{Terra}}{{R_T}^2}$$

$$|F_g| = G\frac{m\,M_T}{R_T^2}$$

$$\cancel{m}g = G\frac{\cancel{m}\,M_T}{R_T^2}$$

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2}$$

$$|\vec{P}| = m\,|\vec{g}|$$

$$\Rightarrow g = |\vec{g}| = G\frac{M_{Terra}}{{R_T}^2} = 9.82 \text{ m/s}^2$$

$G = 6.67259 \times 10^{-11}$ N·m2/kg2

$M_{Terra} = 5.97 \times 10^{24}$ kg

$R_T = 6.37 \times 10^{6}$ m (valor médio)

Podemos calcular o g com os valores da Terra

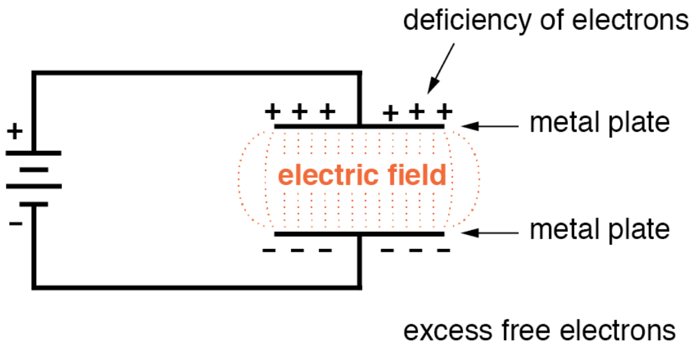
Charles-Augustin de Coulomb
1736-1806

## Força elétrica (eletrostática)

- Lei elétrica entre duas cargas, $q$ e $Q$ (por experiências e medições)
- Força atrativa entre cargas de sinais opostos e repulsiva entre cargas de igual sinal
- Na direção ao longo da reta entre as duas cargas

$$\left|\vec{F}_{elét}\right| = K\frac{q\,Q}{d^2}$$

$K = 8.987551 \times 10^9$ N·m²/C² (constante de Coulomb)
$d$ distância entre 2 cargas




- Força elétrica aplicada a um corpo de carga elétrica $q$ , num campo elétrico $\vec{E}_{elét}$

$$\vec{F}_{elét} = q\,\vec{E}_{elét}$$

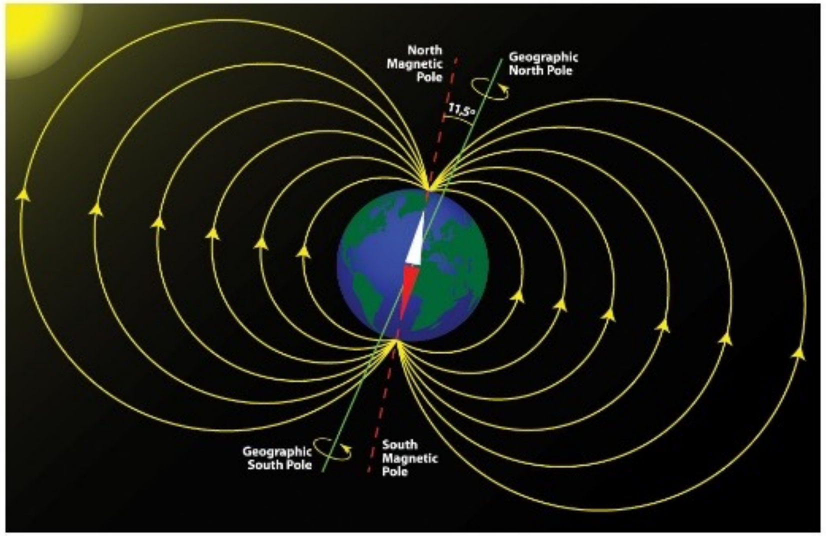
Charles-Augustin de Coulomb
1736-1806

## Força magnética

- Força magnética aplicada a um corpo de carga elétrica $q$ em movimento num campo magnético $\vec{B}_{mag}$

$$\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v} \times \vec{B}_{mag}$$

Produto escalar



## Força normal

$\vec{N}$ ou $\vec{n}$ é uma força de contato

Ex: na água é muito baixa !

- força exercida por uma superfície em resposta a uma força aplicada
- perpendicular à superfície, e oposto à força aplicada
- impede objectos cair/passar pela superfície (um sólido!)

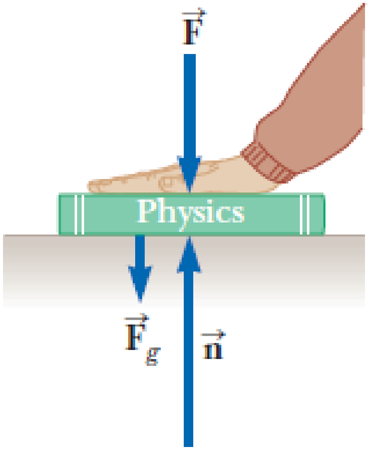



**Figure 5.9** When a force $\vec{F}$ pushes vertically downward on another object, the normal force $\vec{n}$ on the object is greater than the gravitational force: $n = F_g + F$.

Ex:

Forças aplicadas ao livro:

| | |
|---|---|
| Peso | $\vec{P}$ ou $\vec{F}_g$ |
| Força exercida pela mão | $\vec{F}$ |
| Normal | $\vec{n}$ |

Não existe movimento $\Rightarrow$ $\vec{P} + \vec{n} + \vec{F} = 0$ (1ª lei de Neton)

ou $\vec{n} = -(\vec{F} + \vec{P})$

## Força normal

$\vec{N}$ ou $\vec{n}$ é uma força de contato

- força exercida por uma superfície em resposta a uma força aplicada
- perpendicular à superfície, e oposto à força aplicada
- impede objectos cair/passar pela superfície (um sólido!)

*Qual a orígem dessa força?*

Forças eletrostáticas entre as eletrões nos dois objetos (repulsão) que resiste deformação e sobreposição

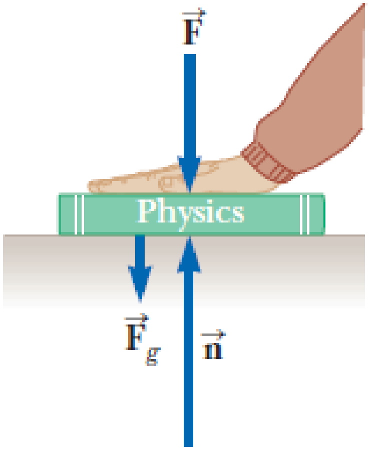



**Figure 5.9** When a force $\vec{F}$ pushes vertically downward on another object, the normal force $\vec{n}$ on the object is greater than the gravitational force: $n = F_g + F$.

Ex:

Forças aplicadas ao livro:

| | |
|---|---|
| Peso | $\vec{P}$ ou $\vec{F}_g$ |
| Força exercida pela mão | $\vec{F}$ |
| Normal | $\vec{n}$ |

Não existe movimento $\Rightarrow$ $\vec{P} + \vec{n} + \vec{F} = 0$ (1ª lei de Neton)

ou $\vec{n} = -(\vec{F} + \vec{P})$

<u>Projetando</u> no eixo OY $n_y = -F_y - P_y$

## Força de tensão

Força transmitida ao longo de um objeto extenso como uma corda ou barra

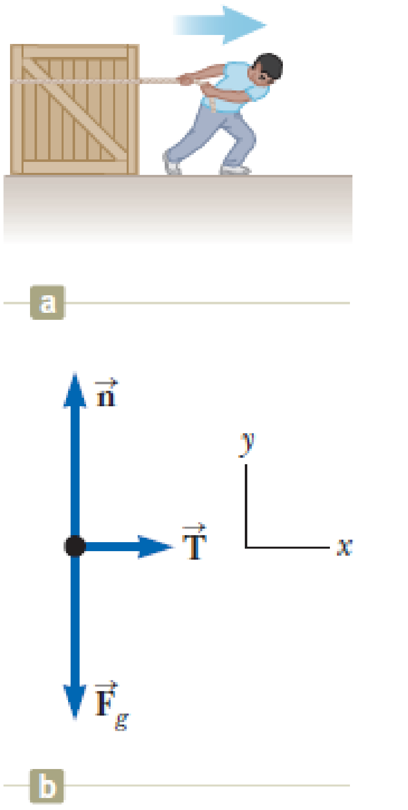
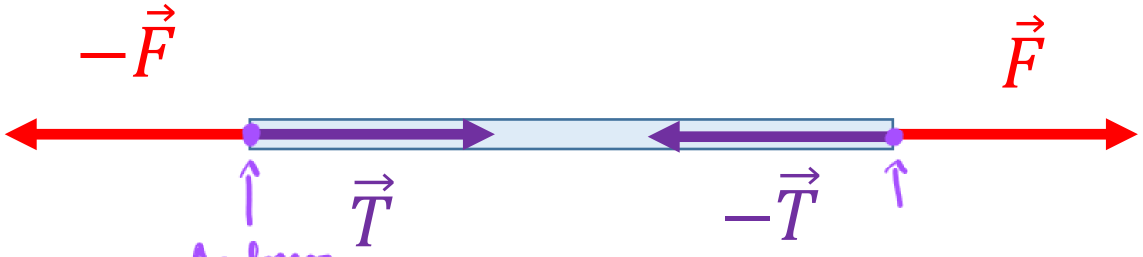
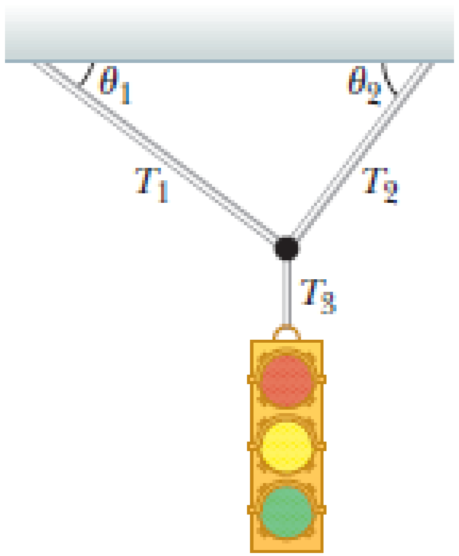



Figure 5.8 (a) A crate being pulled to the right on a frictionless floor. (b) The free-body diagram representing the external forces acting on the crate.




As forças estão em equilíbrio

$\Longrightarrow$ O objeto não é flexível




Ex: Tensão em direções diferentes

- O semáforo não cai porque a força resultante é nula.
- $\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$
- 1ª lei de Newton

# Cap. 4 Movimento no plano e no espaço

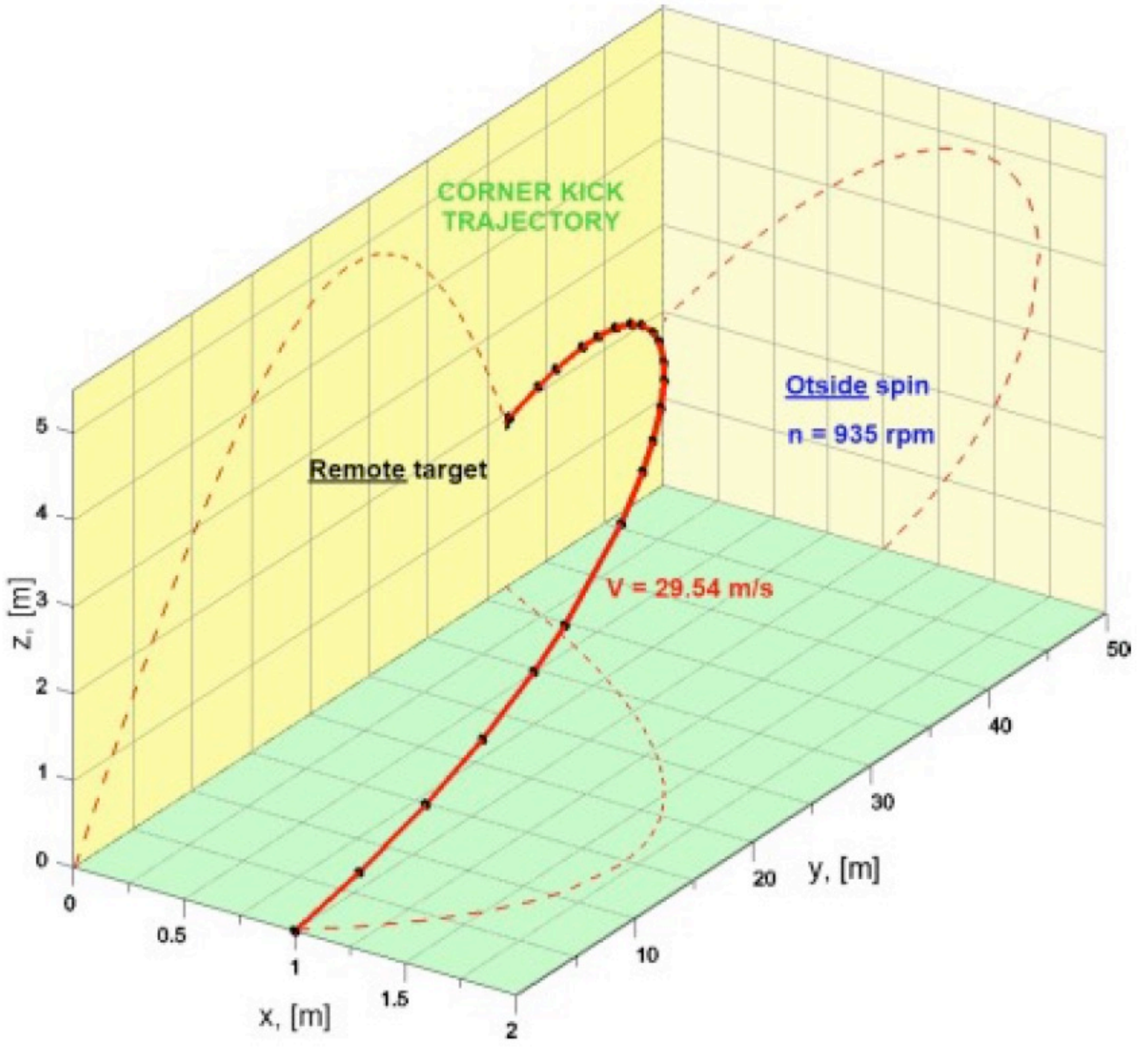



**Fig. 10.** Successful corner kick to remote target.

## Relação entre as quantidade de interesse do **movimento a 1 dimensão**

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

<u>E se souber a aceleração instantânea?</u>

$$F_x(t) = m\, a_x(t) \quad \Leftrightarrow \quad F_x(t) = m\frac{dv_x(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Cálculo integral: $a_x(t)$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt$$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x\, dx$$

$$\Leftrightarrow v_x(t) = \int_{t_0}^{t} a_x\, dx + v_x(t_0)$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$$

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): x$(t)$ $y(t)$ $z(t)$ $\vec{r}(t) = (x, y, z)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ $v_y(t) = \frac{dy}{dt}$ $v_z(t) = \frac{dz}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ $a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$ $a_z(t) = \frac{dv_z}{dt}$

E se souber a aceleração instantânea? Sim, se soubermos as Forças aplicadas

$$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}(t) = m\,\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$\begin{cases} F_x(t) = ma_x(t) \\ F_y(t) = ma_y(t) \\ F_z(t) = ma_z(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_x(t) = m\frac{dv_x(t)}{dt} \\ F_y(t) = m\frac{dv_y(t)}{dt} \\ F_z(t) = m\frac{v_z(t)}{dt} \end{cases}$$

$\vec{v}(t)$ e $\vec{r}(t)$ podem ser calculados **(i) por métodos analíticos ou (ii) por métodos numéricos**.

Um carro desce, sem fricção, uma colina inclinada de ângulo $\theta$ , com o motor desligado. Calcule a aceleração que adquire nessa descida.

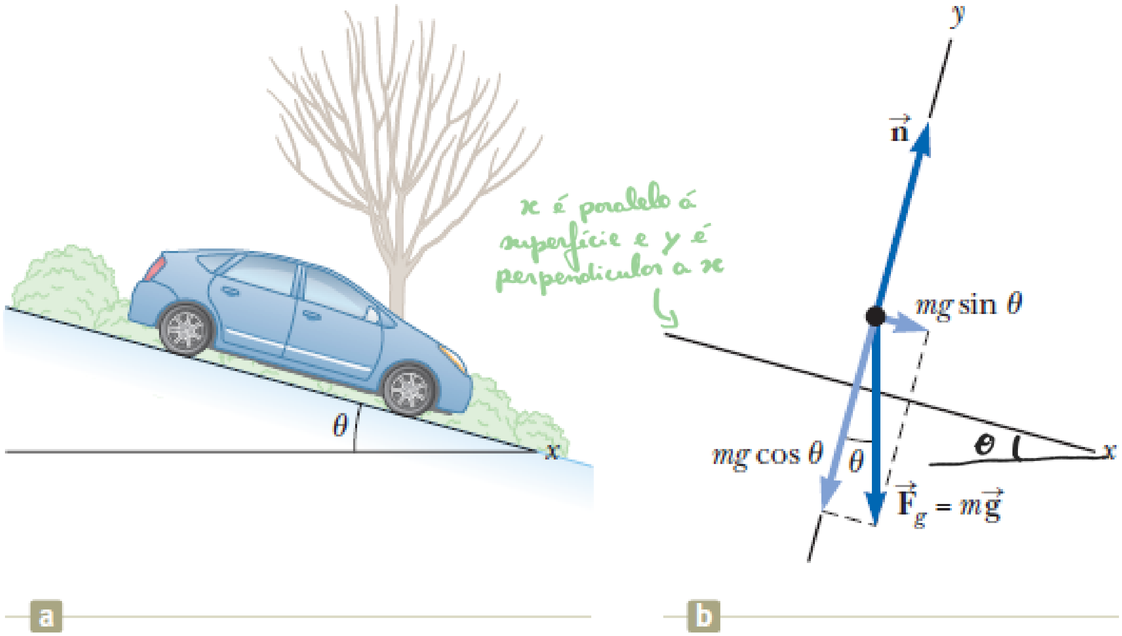



**Figure 5.11** (Example 5.6) (a) A car on a frictionless incline. (b) The free-body diagram for the car. The black dot represents the position of the center of mass of the car. We will learn about center of mass in Chapter 9.

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{n} = m\vec{a} \qquad \vec{F}_g = \vec{P}$$

$$\begin{cases} F_x = P_x + n_x = ma_x \\ F_y = P_y + n_y = ma_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{F_x = m\,g\sin\theta + 0 = ma_x} \\ F_y = \underbrace{-\,m\,g\cos\theta + |\vec{n}|}_{\cdot\text{O carro não afunda!}} = 0 \end{cases}$$

a força normal anula as forças na direção OY

$$\Longrightarrow \qquad \underline{a_x = g\sin\theta}$$

# Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

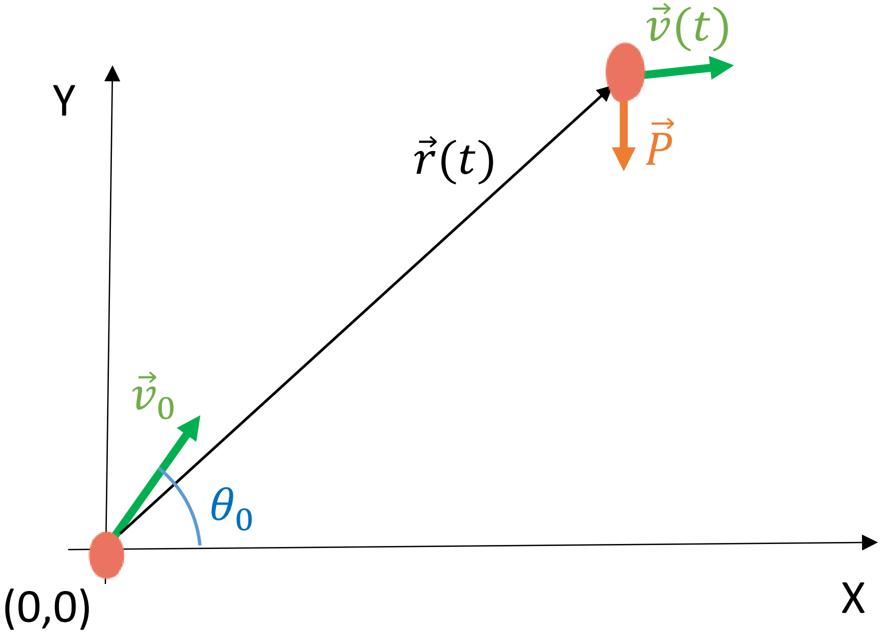

**Modelo:** O movimento ou a trajetória da bola é devido à bola estar sempre sujeita à força da gravidade.

**Aproximação:**
Num 1º estudo, não vamos considerar o efeito da resistência do ar, a rotação da bola, o efeito de altitude, impulsão, a rotação da Terra, …

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \quad \text{em que} \quad \vec{F} = \vec{P}$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo,
na posição $\vec{r}_0$
e inicia o seu movimento com
uma velocidade $\vec{v}_0$,
de rapidez (magnitude) $|\vec{v}_0|$
e a fazer um ângulo $\theta_0$ com a horizontal (solo)

# Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.




$\vec{r}_0 = (0,0)$

$\vec{v}_0 = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0 \, , |\vec{v}_0| \sin\theta_0)$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo,
na posição $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$

e inicia o seu movimento com
uma velocidade $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y})$
de rapidez (magnitude) $|\vec{v}_0|$
e a fazer um ângulo $\theta_0$ com a horizontal (solo)

aceleração:

$$\vec{P} = m\,\vec{a} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} P_x = ma_x \\ P_y = ma_y \end{cases}$$

Não há Resistência do ar

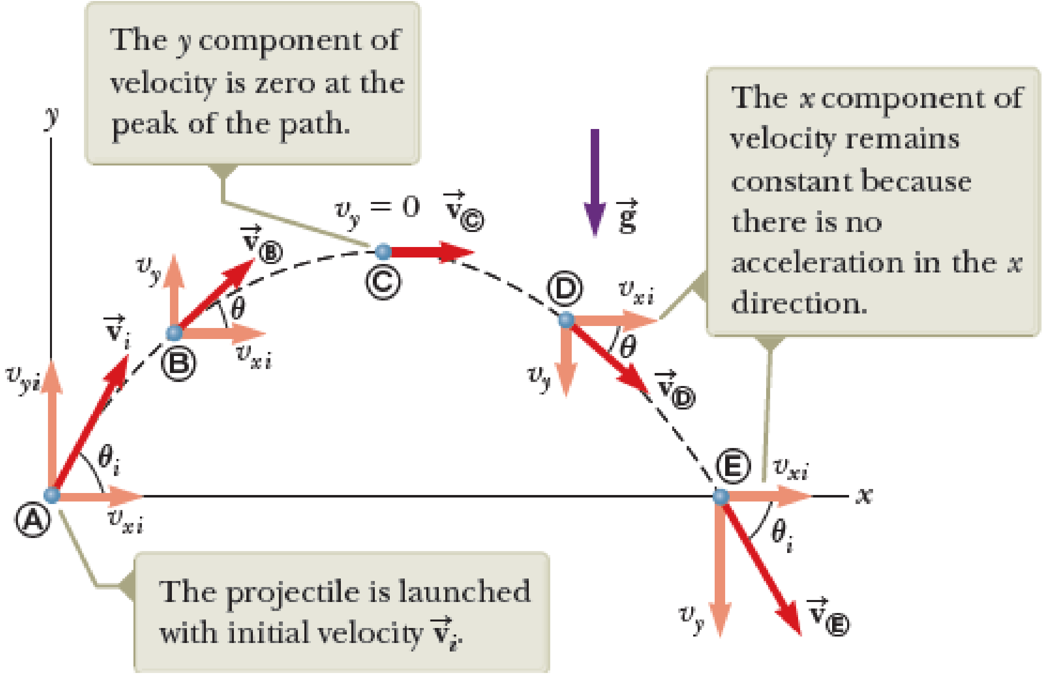
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -|\vec{P}| = m\,a_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m\,a_x \\ -mg = m\,a_y \end{cases}$$

$$\underbrace{|\vec{P}| = mg}_{\text{Apenas a } F_g}$$

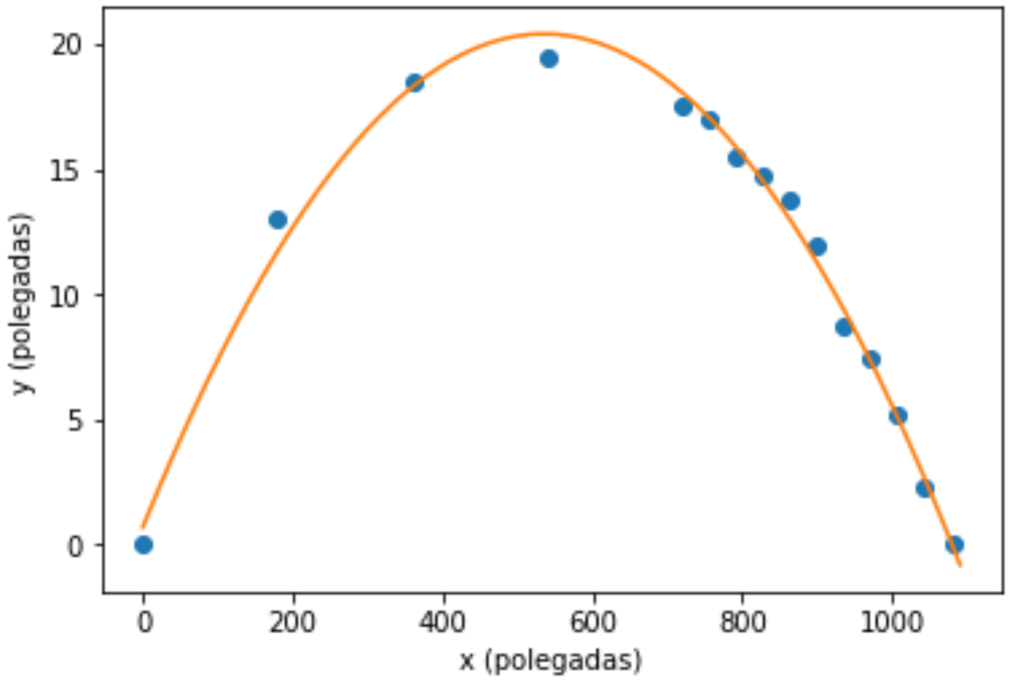
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

# Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

O que esperamos:




**Medições** realizadas para uma pequena bola:




Um ajuste a um polinómio do 2º grau obtêm

$$y = -0.000069\, x^2 + 0.074\, x + 0.710$$

# Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0{,}0)$$
$$\vec{v}_0 = \left(v_{0x}, v_{0y}\right) = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0 \,, |\vec{v}_0| \sin\theta_0)$$
$$t_0 = 0\ s$$

integrar para obter velocidade e posição:

$$\begin{cases} v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt \\ v_y(t) - v_y(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_y(t)\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) - v_{0x} = \int_0^t 0\,dt \\ v_y(t) - v_{0y} = \int_0^t -g\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

sem RA

$$\begin{cases} x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt \\ y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_{0x}\,dt \\ y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} [v_{0y} - gt]dt \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x(t) = x_0 + v_{0x}\,t} \\ \boldsymbol{y(t) = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2} g\,t^2} \end{cases}}$$

No x não existem forças

a = g

relação entre *y* e *x*:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{v_{0x}} \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\dfrac{x - x_0}{v_{0x}} - \dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x - x_0}{v_{0x}}\right)^2 \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x(t) - x_0) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}(x(t) - x_0)^2}$$

equação da parábola

Fórmula em função de x

# Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

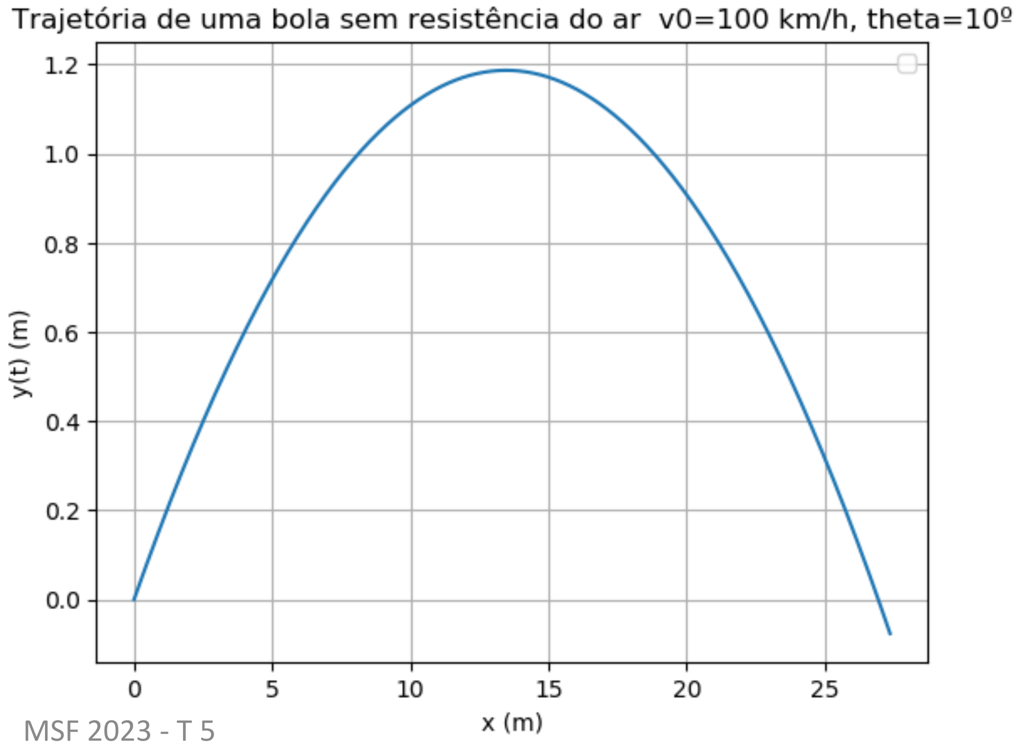
$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0,0)$$
$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0 , |\vec{v}_0| \sin\theta_0)$$
$$t_0 = 0\ s$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\, t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x(t) - x_0) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}(x(t) - x_0)^2$$ Parabola




*Perguntas:*

1. Qual a altura máxima e quando a atinge?

2. Qual o alcance e quando o alcança?

# Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$y(t) = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x(t) - x_0) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{0x}^2}(x(t) - x_0)^2 \quad \text{Parabola}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}\, t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}\, t \ - \frac{1}{2} g\, t^2 \end{cases}$$

Perguntas:

1. Qual a altura máxima ($y_m$) e quando a atinge ($t_m$)?

quando $\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_m = \frac{v_{0y}}{g}$ e $y_m = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}$

ou, $\frac{dy(x)}{dx} = 0$

2. Qual o alcance ($x_{solo}$) e quando o alcança $t_{solo}$?

quando $y$=0 quando $y_0 = 0$ e $x_0 = 0$

temos $t_{solo} = \frac{2\, v_{0y}}{g}$ e $x_{solo} = \frac{2\, v_{0x}\, v_{0y}}{g}$

# Estudo da trajetória de uma bola de futebol sem resistência do ar.

Perguntas:

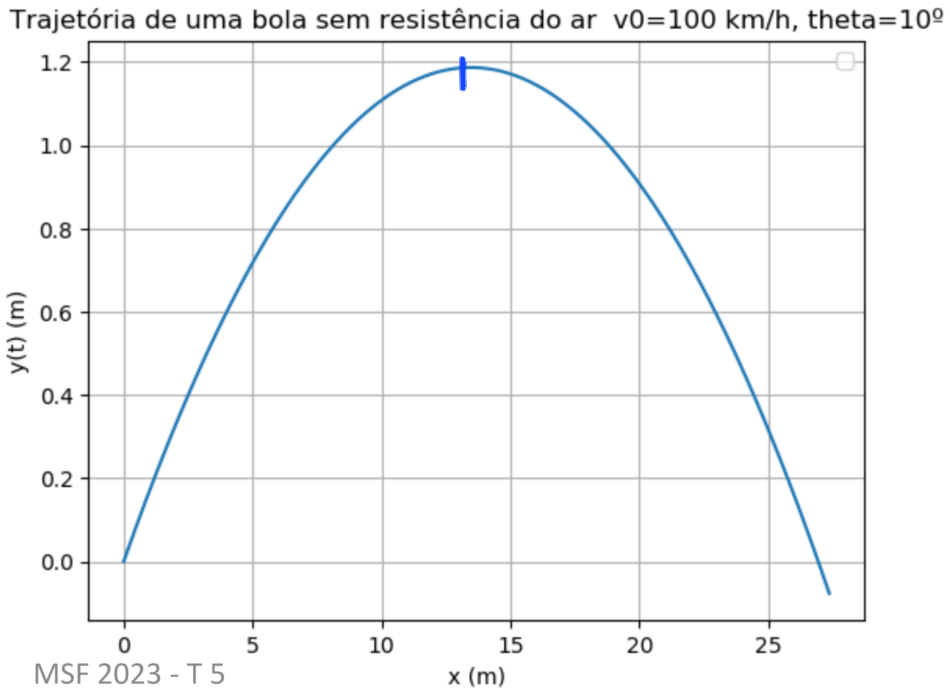
1. Qual a altura máxima ($y_m$) e quando a atinge ($t_m$)?

quando $\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0$ $\Longrightarrow$ $\underbrace{t_m = \frac{v_{0y}}{g}}$ e $y_m = y_0 + \frac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g}$

2. Qual o alcance ($x_{solo}$) e quando o alcança $t_{solo}$?

quando $y$=0 quando $y_0 = 0$ e $x_0 = 0$ ,

temos $t_{solo} = \frac{2\, v_{0y}}{g}$ e $x_{solo} = \frac{2\, v_{0x}\, v_{0y}}{g}$




Ex: $|\vec{v}_0|$ = 100 km/h = 27.78 m/s

$\theta_0 = 10°$

$\vec{r}_0 = (x_0, y_0) = (0{,}0)$

$\vec{v}_0 = (|\vec{v}_0| \cos\theta_0 \,, |\vec{v}_0| \sin\theta_0) = (27.36\,, 4.82)$ m/s

$t_m = 0.49$ s

$y_m = 1.19$ m

$t_{solo} = 0.98$ s

$x_{solo} = 26.9$ m

# Estudo da trajetória de uma bola de futebol <u>COM</u> resistência do ar.


**Modelo:** O movimento ou a trajetória da bola é devido à bola estar sempre sujeita à força da gravidade, e resistência do ar proporcional à velocidade quadrado.

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \quad \text{em que} \quad \vec{F} = \vec{P} - mD|\vec{v}|^2\hat{v}$$

$$F = -mg - m\frac{g}{v_T^2}|\vec{v}|^2\hat{v}$$

Consideremos que a bola é pontapeada no solo,

na posição $\vec{r}_0$

e inicia o seu movimento com

uma velocidade $\vec{v}_0$,

de rapidez (magnitude) $|\vec{v}_0|$

e a fazer um ângulo $\theta_0$com a horizontal (solo)

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar.

$$\vec{F} = \vec{P} - m\,D|\vec{v}|^2\hat{v} \qquad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \qquad \boxed{D = g/v_T^2}\ \text{!}$$

Esta força não altera o plano do movimento. Temos um problema a 2D.

Componentes horizontal e vertical:

$$\begin{cases} F_x^{(res)} = -m\,D|\vec{v}|v_x \\ F_y^{(res)} = -m\,D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

$$F_y = -mg - m\,D|\vec{v}|\,v_y \Leftrightarrow \cancel{m}a = -\cancel{m}g - \cancel{m}\,D|\vec{v}|\,v_y$$
$$\Leftrightarrow a = -g - D|\vec{v}|\,v_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = P_x - m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = P_y - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases} \qquad P_x = 0,\ \ P_y = -mg$$

Como sabemos a força, e a aceleração, a velocidade e a posição são obtidos por integração.

Como o movimento é no plano, temos quatro equações diferenciais para integrar:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt},$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$$

Neste caso não é possível integrar analiticamente.
**Mas podemos integrar numericamente usando o método de Euler!**

Podemos implementar o seu cálculo num programa python, acrescentando duas linhas (e as que lhe fornecem informação) no ciclo dum programa que implemente o método de Euler.

```
for i in range(n):              # Método de Euler (n+1 elementos)
    t[i+1]=t[i]+dt
    ax= …
    vx[i]= vx[i]+ax*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    ay= …                       # adicionar linhas para a 2ª dimensão
    vy[i]= vy[i]+ay*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.

$$\begin{cases} F_x = P_x - m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = P_y - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases} \qquad \begin{cases} F_x = -m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = -mg - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_x = -\,D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

**1º Cálculo da velocidade** por integração com o método de Euler das duas relações diferenciais:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$$

a 2D:

$$v_x(t+\delta t) \approx v_x(t) + a_x(t)\times\delta t$$
$$v_y(t+\delta t) \approx v_y(t) + a_y(t)\times\delta t$$

Implementação:

```
D = g/vt**2
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2) #norma de v
    ax[i]=-D*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-D*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
```

**Estudo da trajetória de uma bola de futebol COM resistência do ar no plano de lançamento.**

$$\begin{cases} F_x = P_x - m\,D|\vec{v}|v_x = ma_x \\ F_y = P_y - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases} \qquad \begin{cases} F_x = -m\,D|\vec{v}|v_x \qquad = ma_x \\ F_y = -mg - m\,D|\vec{v}|v_y = ma_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = -\,D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

**2º Cálculo da posição** por integração com o método de Euler das duas relações diferenciais:

$$v_x\,(t) = \frac{dx}{dt} \qquad v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

a 2D:

$$x(t+\delta t) \approx x(t) + v_x\,(t)\times\delta t$$
$$y(t+\delta t) \approx y(t) + v_y\,(t)\times\delta t$$

Implementação:

```
D = g/vt**2
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2) #norma de v
    ax[i]=-D*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-D*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```

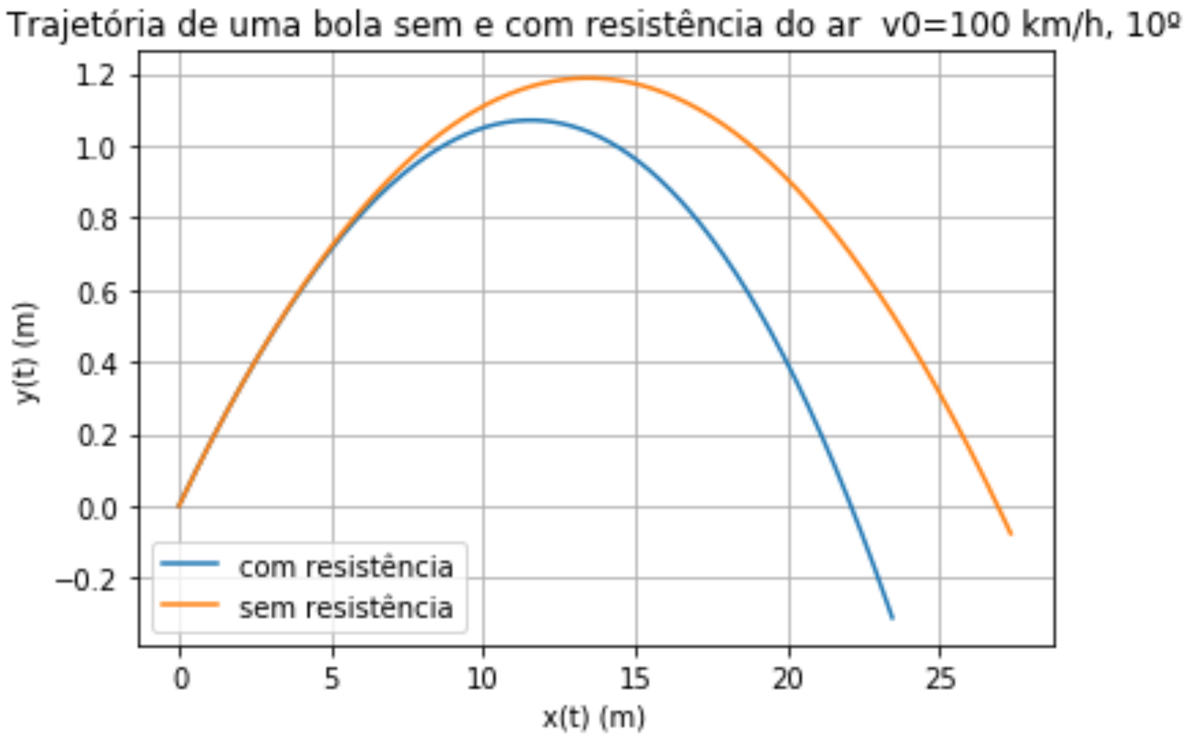
**Estudo da trajetória de uma bola de futebol <u>COM</u> resistência do ar no plano de lançamento.**

$$\begin{cases} a_x = -\,D|\vec{v}|v_x \\ a_y = -g - D|\vec{v}|v_y \end{cases}$$

1º Cálculo da velocidade por integração com o método de Euler

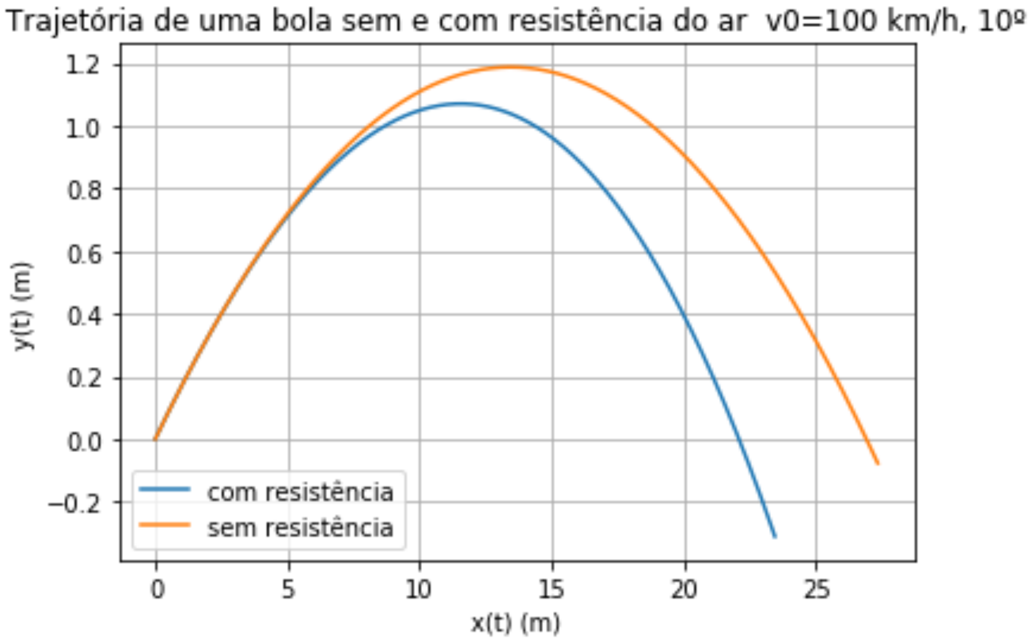
2º Cálculo da posição velocidade por integração com o método de Euler

```
D = g/vt**2
for i in range(n):
    t[i+1]=t[i]+dt
    vv=np.sqrt(vx[i]**2 +vy[i]**2)
    ax[i]=-D*vv*vx[i]
    ay[i]=-g-D*vv*vy[i]
    vx[i+1]=vx[i]+ax[i]*dt
    vy[i+1]=vy[i]+ay[i]*dt
    x[i+1]=x[i]+vx[i]*dt
    y[i+1]=y[i]+vy[i]*dt
```




$v_T = 100$ km/h.

**Estudo da trajetória de uma bola de futebol <u>COM</u> resistência do ar no plano de lançamento.**




**Perguntas:**

1. Qual a altura máxima ($y_m$) e quando a atinge ($t_m$)?

quando $$\frac{dy(t)}{dt} = v_y = 0$$

ou, $$\frac{dy(x)}{dx} = 0$$

2. Qual o alcance máximo ($x_{solo}$) e quando o alcança $t_{solo}$?

quando $y$=0