Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

8ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 5 Lei da Conservação da energia: Trabalho realizado por forças não conservativas. Integração numérica.
Cap. 6 lei de conservação do momento: Momento e colisões

Bibliografia:
Cap. 6: Serway, cap. 9; Sørenssen, cap. 11 e 12;

- Teorema Trabalho – Energia

$$W_{0,1} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 = E_{c1} - E_{c0}$$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = **Trabalho** = $W_{0,1}$

$\frac{1}{2} m\, |\vec{v}|^2$ = **Energia Cinética** = E_c

Para forças conservativas:

$W_{0,1} = E_{p0} - E_{p1}$ **Energia potencial**

- Lei da conservação da Energia Mecânica $E = E_c + E_p$

- Sobreposição do trabalho

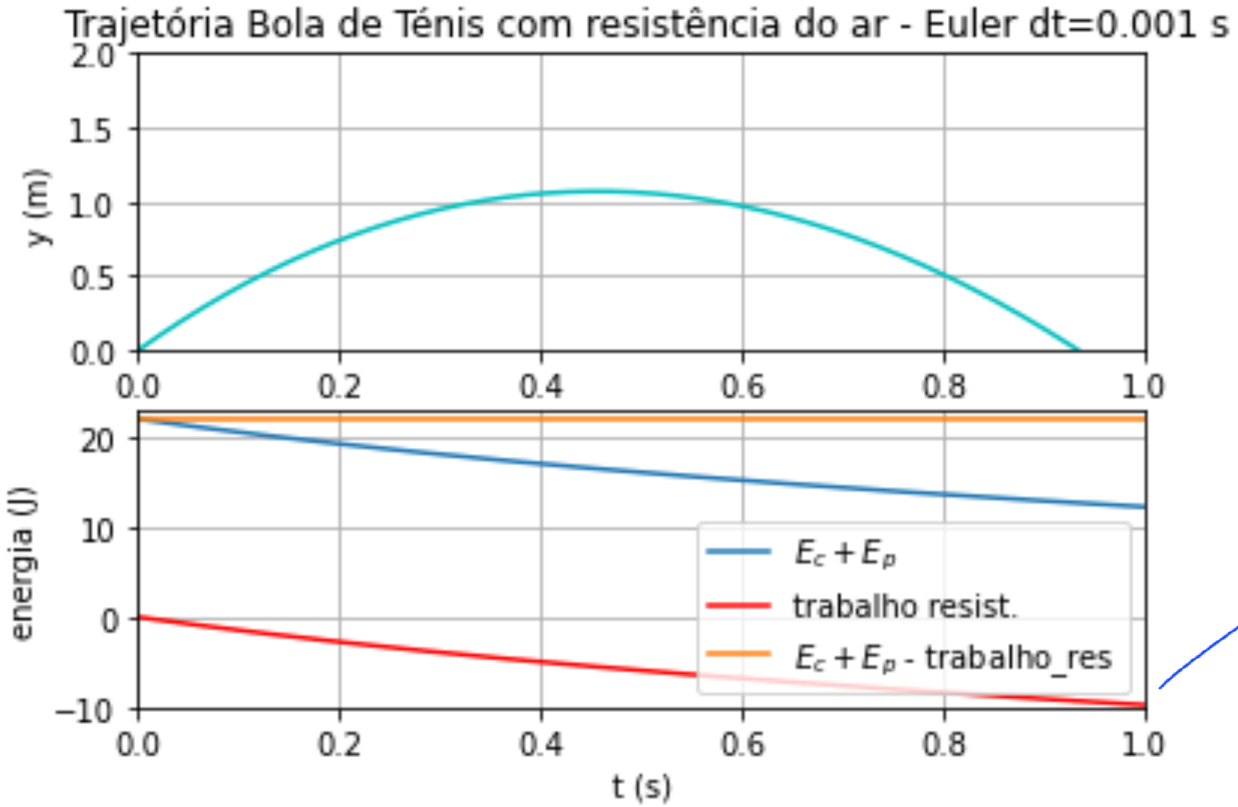
$$W_{0,1} = W_{0,1}^{(conservativo)} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$
$$= E_{p0} - E_{p1} + W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

$$\Rightarrow \quad E(0) = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2} m\, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

Trabalho de forças não conservativas

$$E(0) = \frac{1}{2} m \, |\vec{v}_0|^2 + E_{p0} = \frac{1}{2} m \, |\vec{v}_1|^2 + E_{p1} - W_{0,1}^{(não\ conservativo)}$$

Ex: Movimento da bola de ténis com resistência do ar



Diminui ao longo do tempo, devido à resistência do ar

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa:

$$W^{n.c.} = \int \vec{F}^{n.c.} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt$$

$\boldsymbol{W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}$ e $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_{res,x}\, v_x\, dt + F_{res,yx}\, v_y\, dt + F_{res,z} v_z\, dt\right)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,z} v_z\, dt$$

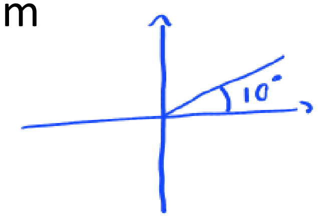
Ex: Movimento da bola de ténis com **resistência do ar** (a 2 dimensões)

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$

Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

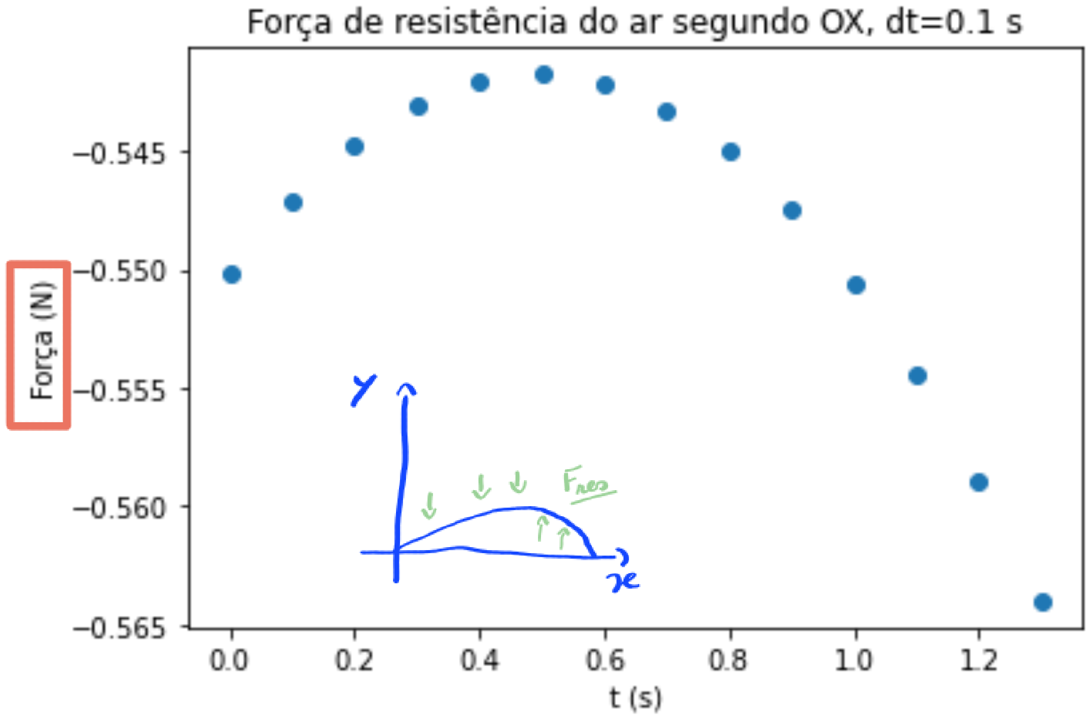
Problemas cap 5 Bola de Ténis

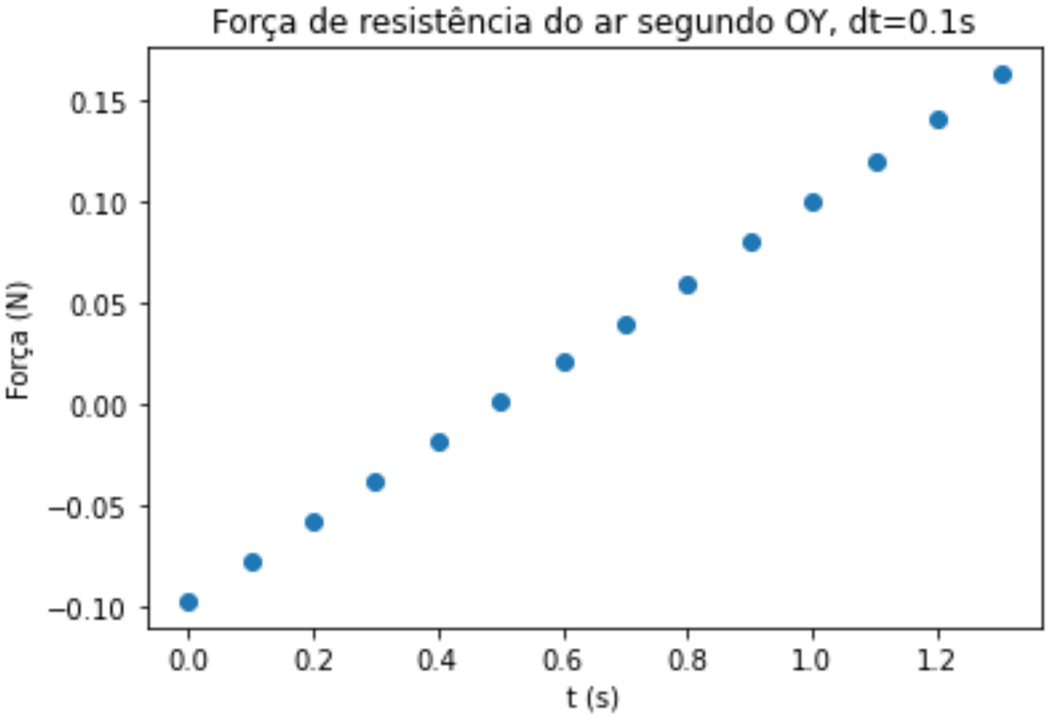
3. Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical.



A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$





Integração numérica a 1 dimensão:

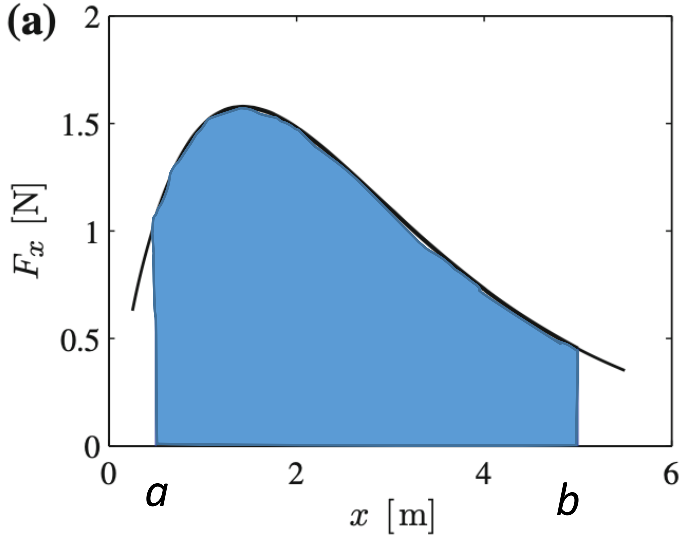
Quando temos uma função $f(x)$ expressa só em pontos x_i, de **índices** $\boldsymbol{i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n}$, igualmente espaçados por δx, num total de $\boldsymbol{n+1}$ **elementos.**

O integral desta função de pontos discretos, entre dois pontos a e b

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

e onde $n = (b-a)/\delta x$ e $x_i = a + i\,\delta x$, **obtêm-se facilmente por integração numérica.**

A interpretação geométrica do integral é a área limitada pela função entre os dois pontos extremos a e b.



Integração numérica

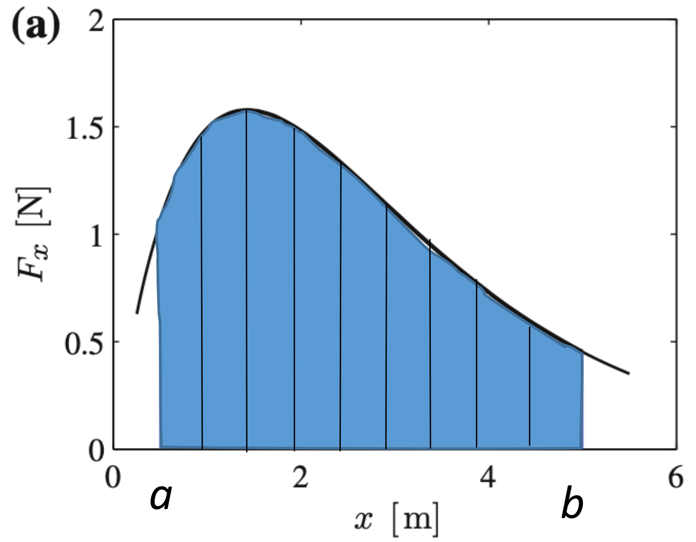
Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de $\boldsymbol{n}$ fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

Se dividirmos a área em n fatias de espessura

$$\delta x = (b - a)/n$$

e

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$



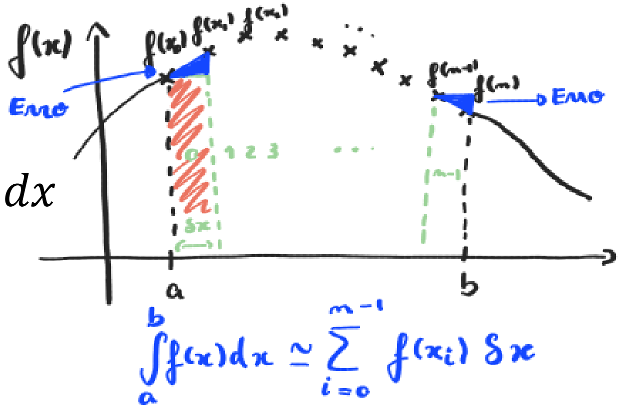
$$x_i = a + (i-1)\delta x$$

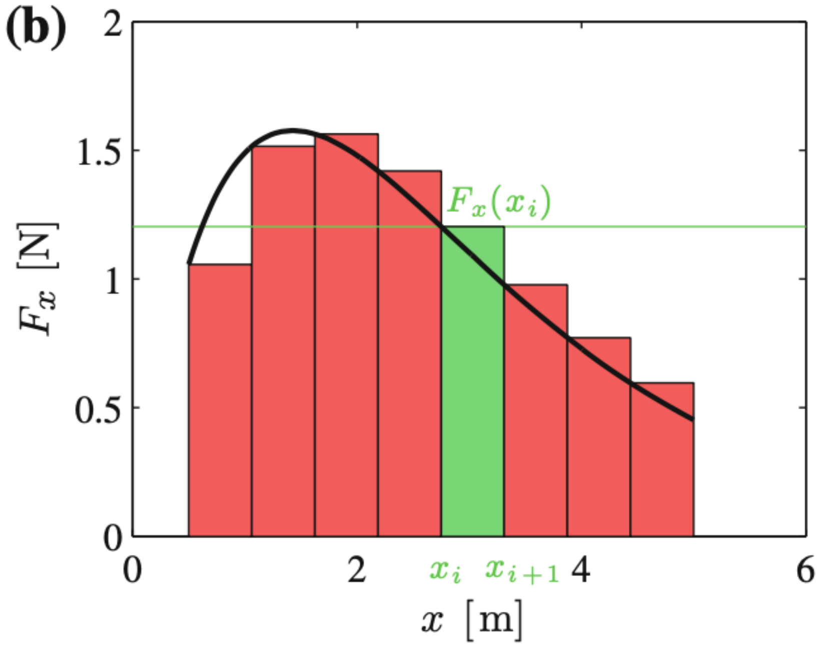
Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de n fatias de espessura** $\boldsymbol{x_{i+1} - x_i = \delta x}$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

$\delta x = (b - a)/n$

e $\quad I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$





Aproximação retangular: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx f(x_i)\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\delta x = \delta x \times \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

$$= \delta x \times [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})]$$

Python:

I = δx × np.sum(f[0:n])

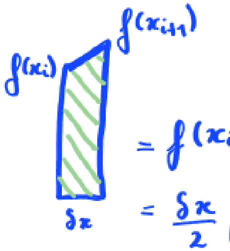
f(x_n) não é incluido

Integração numérica

Essa **área** pode ser considerada como uma **soma de n fatias de espessura** $x_{i+1} - x_i = \delta x$, em que estamos a considerar todas as espessuras iguais.

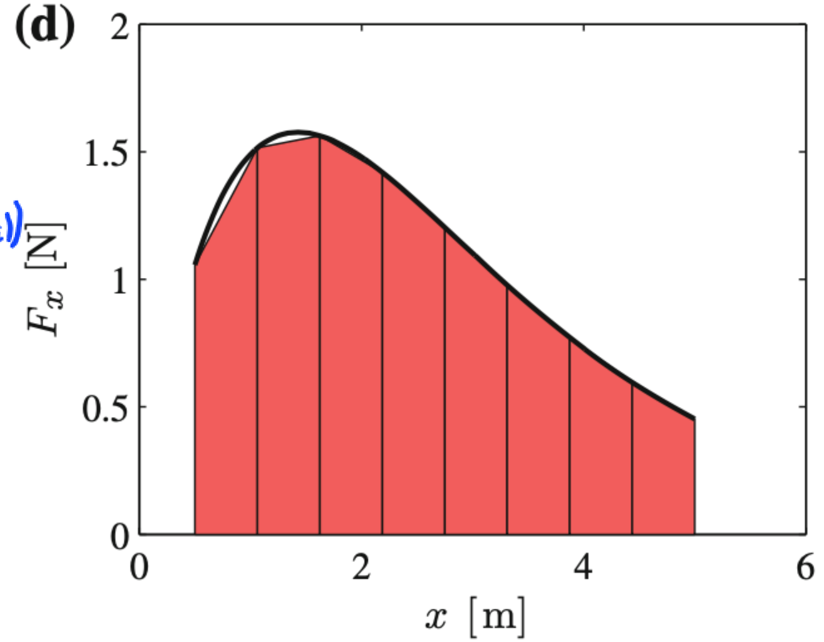
$$\delta x = (b-a)/n$$

e $$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$



$$= f(x_i)\,dx + \frac{1}{2}\,dx\,\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)$$

$$= \frac{\delta x}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$



Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x$

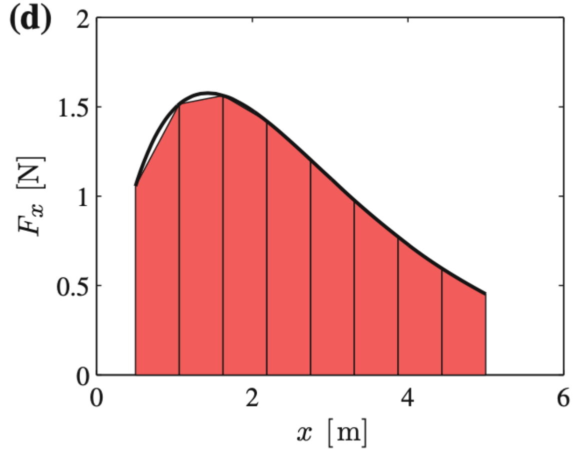
$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\,\delta x$$

$$= \delta x \times \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

$$\frac{f(x_0) + \boxed{f(x_1)}}{2} + \frac{\boxed{f(x_1)} + f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}$$

vão cortar com 2

Integração numérica



Aproximação trapezoidal: $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\,\delta x$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\ \delta x =$$

$$= \delta x \times \left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

Em python podemos obter o integral da função $f(x)$ pela aproximação trapezoidal:

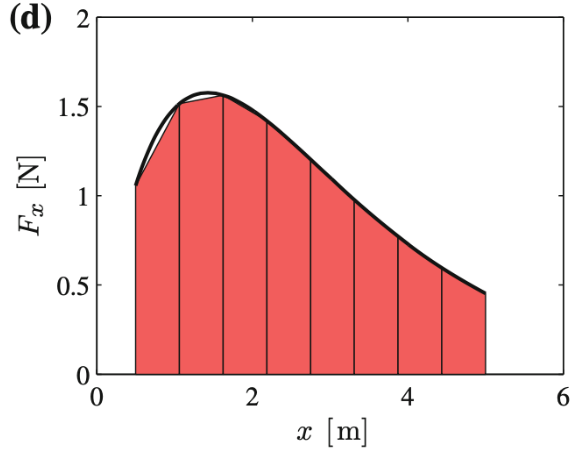
```
Integral = dx * ((f[0]+f[n])*0.5+np.sum(f[1:n]))
```

Note que temos $n+1$ elementos da função. (Em f[1:n] não entra o elemento f[n])

Em termos da dimensão do vetor a integrar, ou seja de $n+1 = n_{dim}$, a integração trapezoidal é calculada por

Integral = dx * ((f[0]+f[n_{dim}-1])*0.5+np.sum(f[1: $n_{dim} - 1$]))

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:



$$erro = \left| \overbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx}^{\text{exato}} - \overbrace{\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\, \delta x}^{\text{ap. trapezoidal}} \right|$$

Série de Taylor à volta de x_i

$$\boxed{f(x) = f(x_i) + (x - x_i) \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + (x - x_i)^2 \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \sigma((x - x_i)^3)}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\underbrace{f(x_i)}_{\text{constante}} + (x - x_i) \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + (x - x_i)^2 \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \sigma((x - x_i)^3) \right] dx$$

$$= f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{3} \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \sigma((x_{i+1} - x_i)^4)$$

$$= f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{6} + \sigma(\delta x^4)$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} x\, dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} x_i dx \right)$$

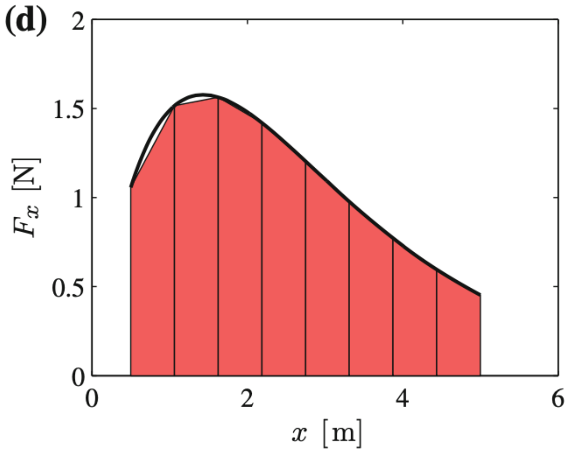
$$= \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_i}^{x_{i+1}} - x_i (x_{i+1} - x_i) \right)$$

$$= \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \left(\frac{x_{i+1}^2 - x_i^2 + 2x_i^2 - 2x_i x_{i+1}}{2} \right) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{(x_{i+1} + x_i)^2}{2}$$

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal: $erro = \left| \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \right)_{exato} - \left(\frac{f(x_{i+1})+f(x_i)}{2}\ \delta x \right)_{ap.trap} \right|$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{6} + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

exato



Agora,

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} + (x_{i+1} - x_i)^2 \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} + \mathcal{O}((x_{i+1} - x_i)^3)$$

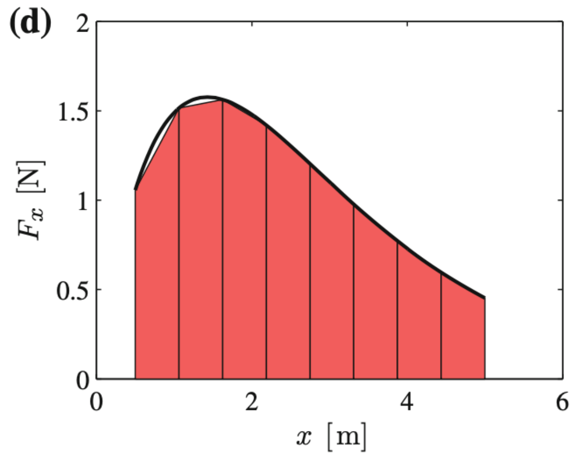
$$= f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2} = f(x_i) + \frac{1}{2}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x + \frac{1}{4}\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \delta x^2 + \mathcal{O}(\delta x^3)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\delta x = f(x_i)\delta x + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{4} + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

aproximação trapezoidal

Erro de truncatura (local) da aproximação trapezoidal:



Substituir no erro que se pretende calcular

$$erro = \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\,\delta x \right|$$

$$= \left| \left(\cancel{f(x_i)\delta x} + \cancel{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2}} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{\boxed{6}} + \mathcal{O}(\delta x^4) \right) - \left(\cancel{f(x_i)\delta x} + \cancel{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2}} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_i} \frac{\delta x^3}{\boxed{4}} + \mathcal{O}(\delta x^4) \right) \right| = \boxed{\mathcal{O}(\delta x^3)}$$

Ordem 3

O erro local de truncatura de um integral de uma fatia é da $\mathcal{O}(\delta x^3)$**.**

O erro global do integral completo, que é um somatório de n fatias, é o acumular dos erros locais, sendo

$$n\,\mathcal{O}(\delta x^3) = \frac{b-a}{\delta x}\,\mathcal{O}(\delta x^3) = \mathcal{O}(\delta x^2)$$

Ex:

$\delta x = 0.1$ → $\delta x = \frac{0.1}{10} = 0.01$

Erro → $\frac{\text{Erro}}{10^2} = \frac{\text{Erro}}{100}$

Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

Problemas cap 5 Bola de Ténis

3. Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes: $t_a = 0$, $t_b = 0.4$ s e $t_c = 0.8$ s.

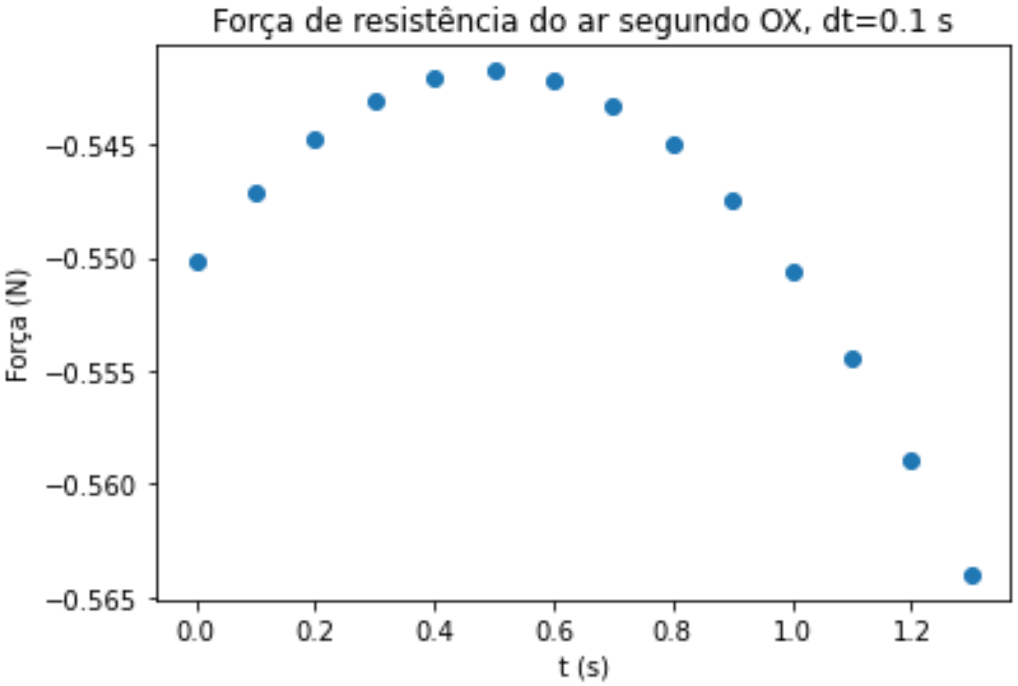
$$W_{0,1}^{(\text{não conservativas})} = \int_{x_0}^{x_1} F^{(\text{não conservativas})}\, dx = \int_{t_0}^{t_1} F^{(\text{não conservativa})} \cdot v\, dt$$

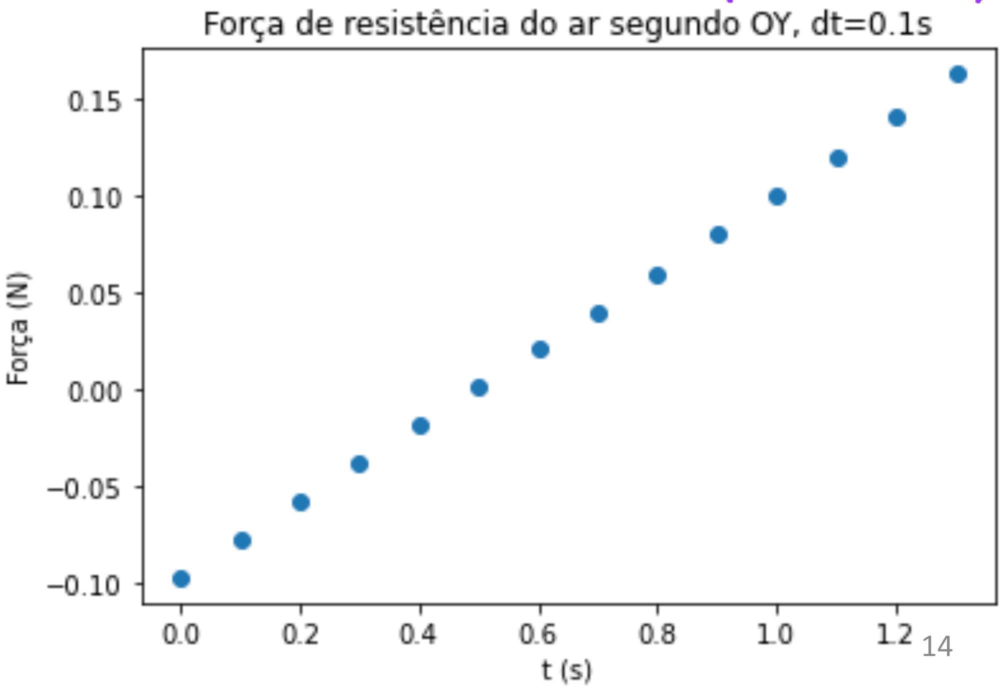
$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v \cdot dt$$

$$\boxed{W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt} = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$

$$F_{res\,x} = -D\, m\, |v|\, v_x$$

$$F_{res\,y} = -D\, m\, |v|\, v_y$$





Cálculo do trabalho realizado pela força não conservativa: Força de resistência do ar

Problemas cap 5 Bola de Ténis

3. Uma bola de ténis é batida junto ao solo (posição inicial $y = 0$) com a velocidade 100 km/h, a fazer um ângulo de 10º com a horizontal e no sentido positivo dum eixo horizontal OX, sendo OY eixo vertical. A velocidade terminal da bola de ténis é 100 km/h. A massa da bola é 57 g.

c) Considerando a resistência do ar, calcule o trabalho realizado pela força de resistência do ar até às posições nos três instantes: $t_a = 0$, $t_b = 0.4$ s e $t_c = 0.8$ s.

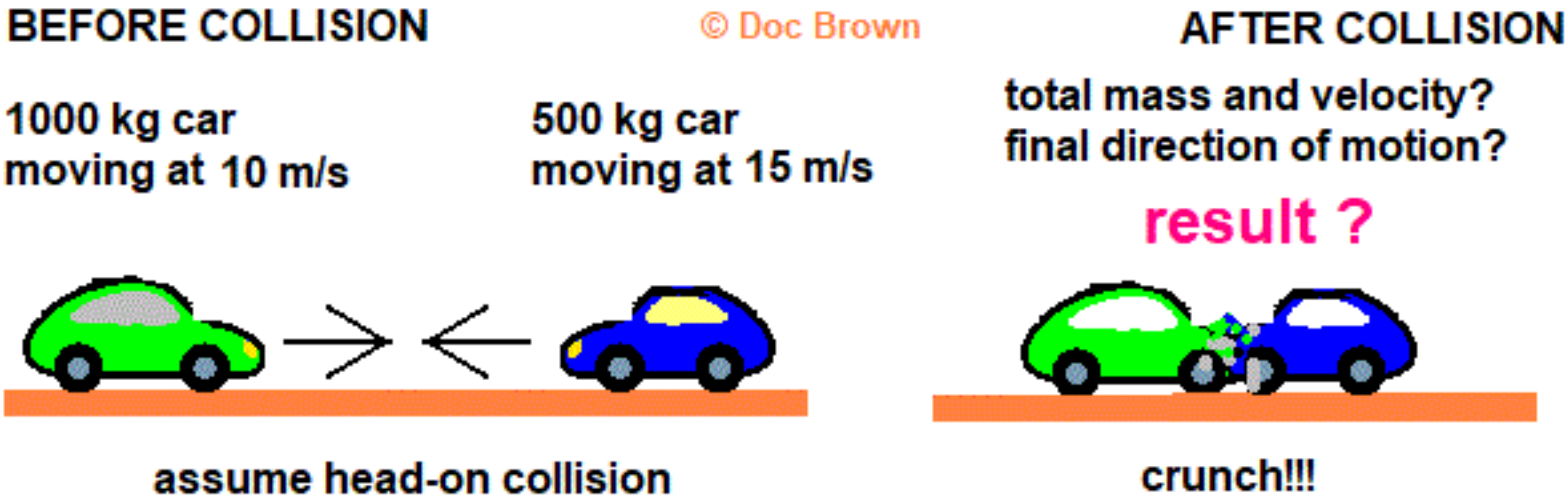
$$W^{(res)} = \int_C \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} F_{res,x}\, v_x\, dt + \int_{t_0}^{t_1} F_{res,y}\, v_y\, dt$$

1. Calcular velocidade pelo método de Euler ⇒ forças em cada passo
2. Integral numérico

Resultado:

c) 0 J; -4.98 J; - 8.38 J

Cap. 6 Momento e colisões



Cap. 5 Momento e colisões

Equação fundamental da dinâmica:

$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \vec{r}(t)$

obtemos a velocidade e a posição em função do tempo

Teorema Trabalho-Energia:

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \; = \frac{1}{2} m\,|\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m\,|\vec{v}_0|^2$ obtemos a velocidade em função da posição

e a lei de Conservação da Energia Mecânica (para sistemas só com forças conservativas)

Impulso de uma força: $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt$

$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$ vamos obter a lei da Conservação do Momento (para sistemas isolados)

Cap. 6 Momento e colisões

Teorema Impulso-momento e Conservação do momento

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m\frac{d\vec{v}}{dt}\,dt = m\,\vec{v}(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

em que $\boxed{\boldsymbol{m\vec{v}(t)} = \boldsymbol{\vec{p}(t)} \text{ é o } \textbf{momento} \text{ do corpo no instante } t.}$

- **A lei fundamental da dinâmica é reescrita em termos do momento:**

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\,m\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{m\,d\vec{v}\,t}{dt} = m\vec{a}(t)$$

- Quando a massa do corpo é constante obtemos a forma conhecida

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

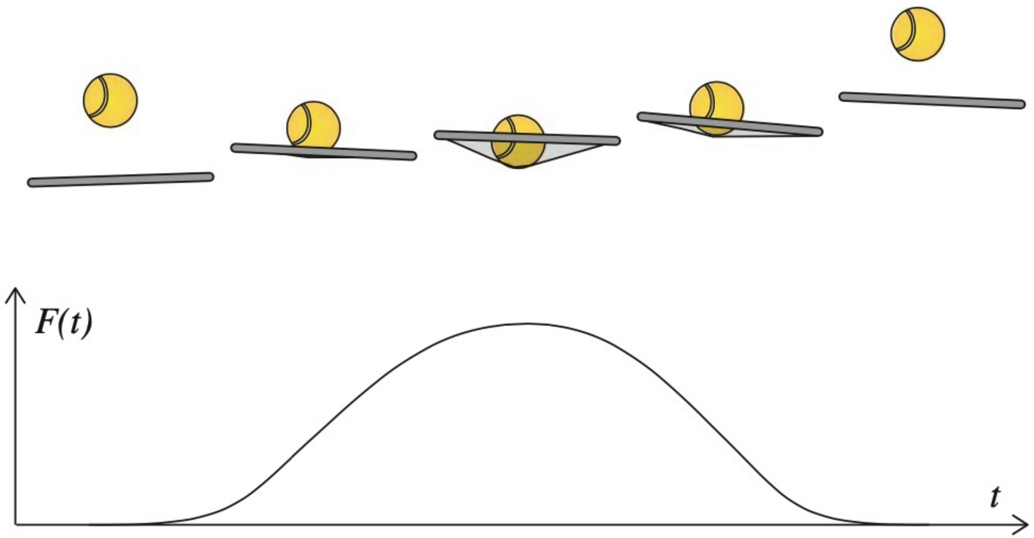
- Quando $\vec{F} = 0$,

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 \quad \text{ou conservação do momento}$$

Impulso e mudança do momento

Estimativa da força de colisão:

Fig. 12.2 Illustration a ball being hit by a tennis racket, showing an illustration of the collision as a function of time, and a plot of the force $F(t)$ from the racket on the ball as a function of time

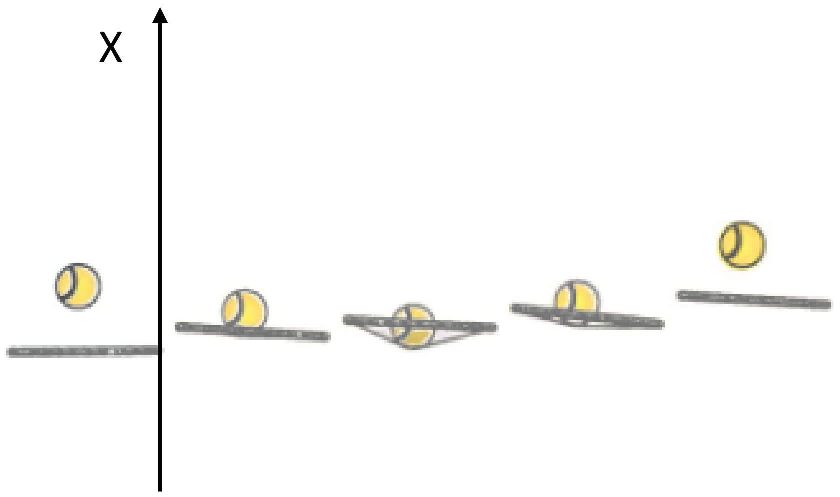


Sorrensen p. 357

Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

Estimativa da força de colisão:



Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

A 1D

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = p_{1x} - p_{0x}$$

Se soubermos p_{1x} e p_{0x}, calculamos $\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt$

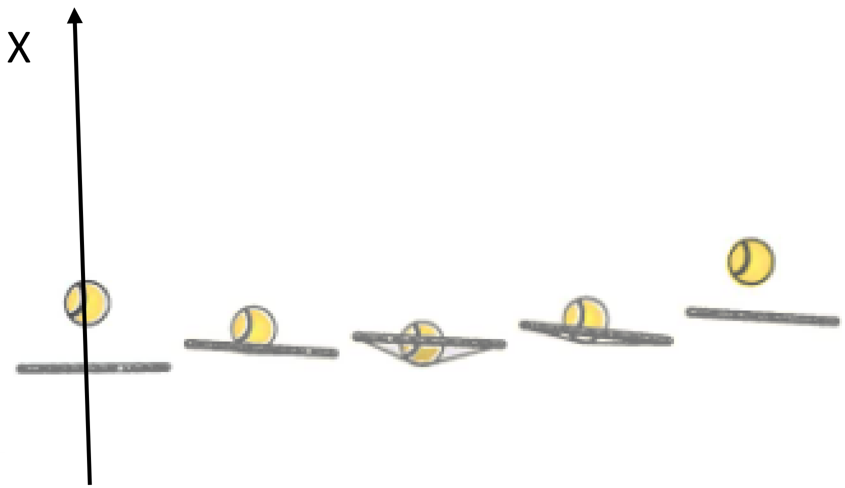
Estimativa da força F_x

média

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = \bar{F}_x\,(t_1 - t_0)$$

$\bar{F}_x =$ **força média** durante a colisão

$$\Rightarrow \boxed{\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}}$$



Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

Estimativa da força F_x

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = \bar{F}_x\,(t_1 - t_0)$$

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)}$$

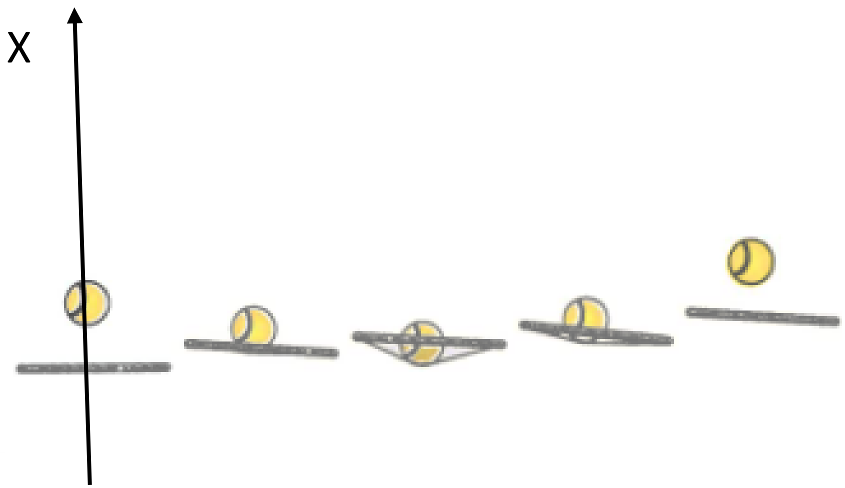
Problema:

Se $m = 0.057$ kg
$\vec{v}_0 = -30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$
$\vec{v}_1 = 30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$

Qual a força média do impacto que durou 0.06 s?

Impulso de uma força:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t)\, dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$



Estimativa da força F_x

$$\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt = \bar{F}_x\,(t_1 - t_0)$$

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\, dt}{(t_1-t_0)} = \frac{p_{1x}-p_{0x}}{(t_1-t_0)}$$

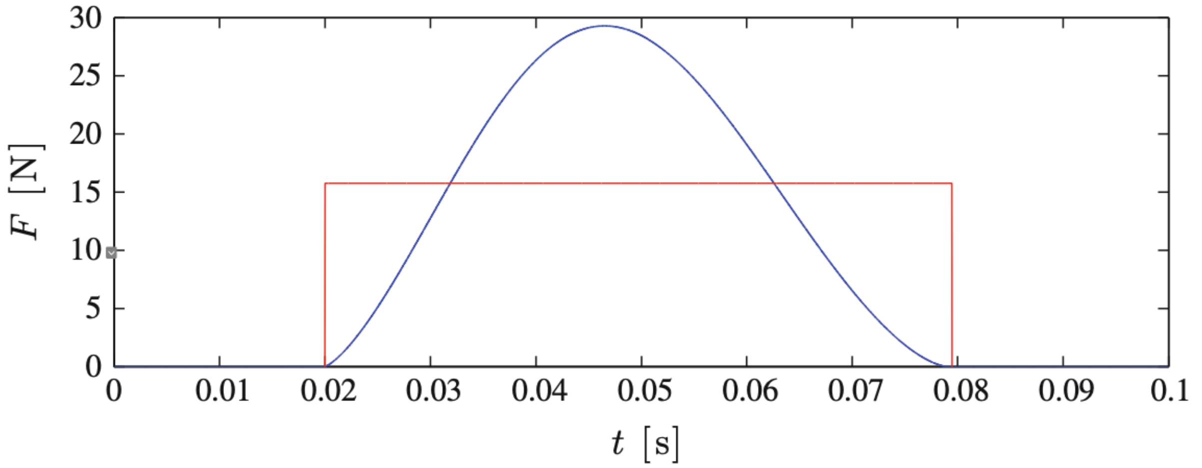
Problema:

Se $m = 0.057$
$\vec{v}_0 = -30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$
$\vec{v}_1 = 30\,\hat{\imath}\,\mathrm{km/h}$

Qual a força média do impacto que durou 0.06 s?

R: $$\bar{F}_x = \frac{p_{1x}-p_{0x}}{(t_1-t_0)} = \frac{0.057\ \times 30/3.6 - 0.057\times(-30/3.6)}{0.06}$$

$$= 15.8\ \mathrm{N}$$



O gráfico da força, F_x, em função do tempo que durou a colisão, e a força média, $\bar{F}_x$.

Problema 6.4:

Um carro segue a 60 km/h. Sofre um acidente e o carro para em 0.2 s.
O condutor não tem o cinto colocado e embate no volante do carro.
a) Se o condutor tiver a massa de 75 kg, qual a força média que sofre (no torax) durante o acidente?
b) Qual a função do ‘airbag’? O que muda no acidente?

$V_0 = 60\,Km/h = \frac{600\cancel{00}}{36\cancel{00}} = 16,667\ m/s$

$$\bar{F} = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\,dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_1 - p_0}{t_1 - t_0} = \frac{0 - 75\times 16,667}{0,2 - 0} = -\frac{75\times 16,667}{0,2} = \underbrace{-6250\,N}_{\text{Depende da direção (positivo ou negativo)}}$$

Problema 6.4:

Um carro segue a 60 km/h. Sofre um acidente e o carro para em 0.2 s.
O condutor não tem o cinto colocado e embate no volante do carro.
a) Se o condutor tiver a massa de 75 kg, qual a força média que sofre (no torax) durante o acidente?
b) Qual a função do 'airbag'? O que muda no acidente?

R:

$$\bar{F}_x = \frac{\int_{t_0}^{t_1} F_x(t)\,dt}{(t_1 - t_0)} = \frac{p_{1x} - p_{0x}}{(t_1 - t_0)} = \frac{75 \times \frac{60}{3.6} - 75\times(0)}{0.2} = 6250 \text{ N}$$

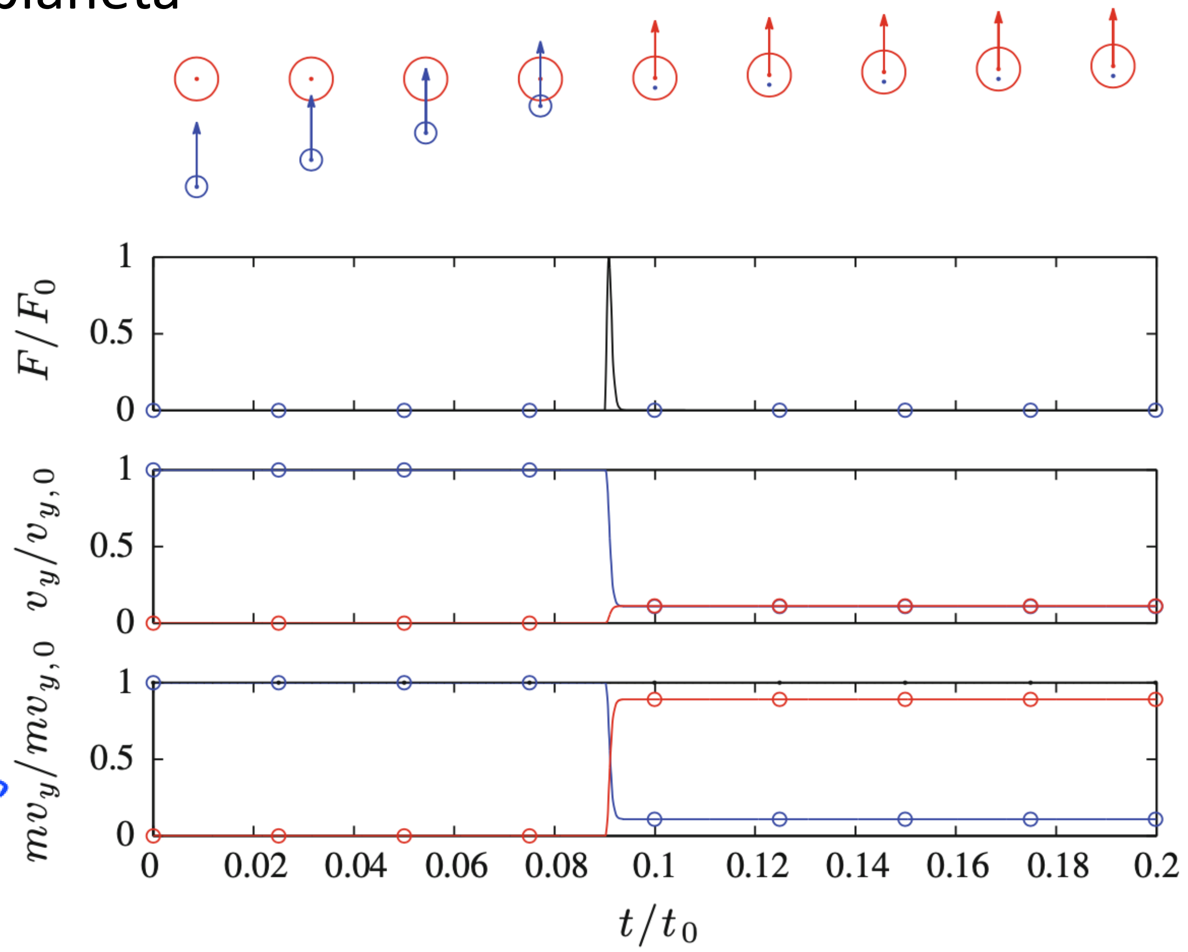
Sistema de 2 corpos

EX: Colisão meteoro-planeta

início t_0

termina t_1

Momento →



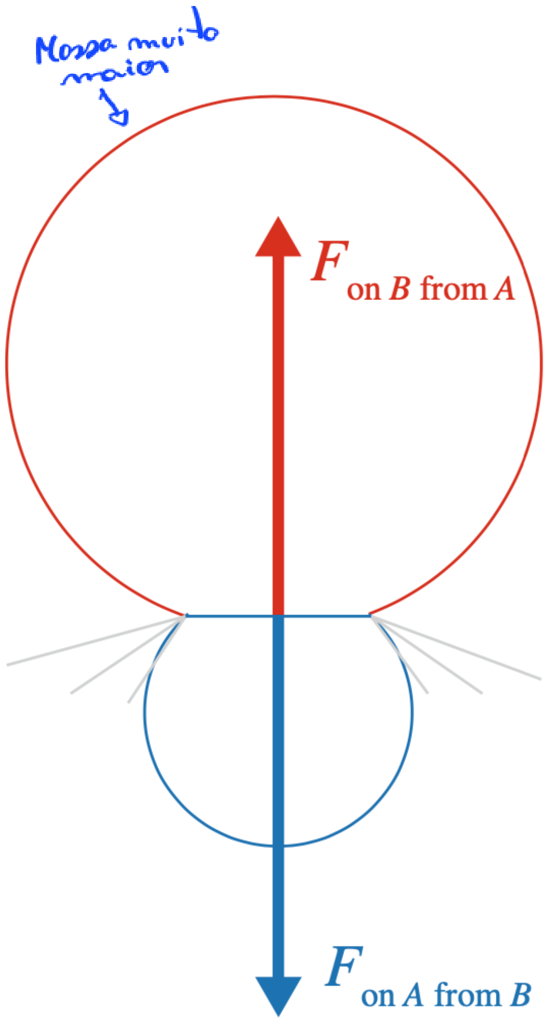


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

Sorenssen p. 353

Sistema de 2 corpos: Colisão meteoro-planeta

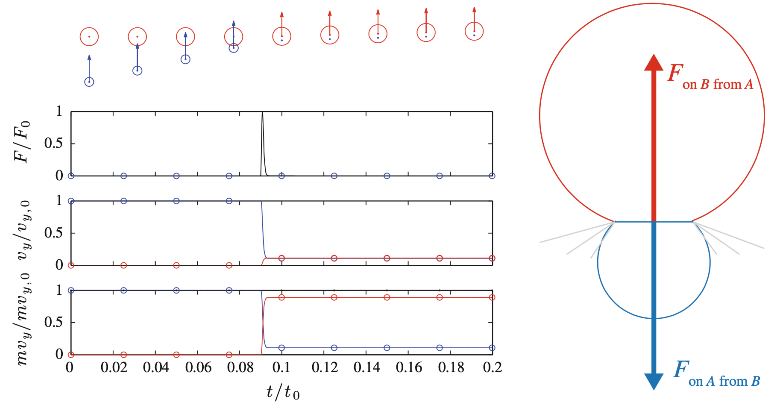


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

início t_0

meteoro (A) $\quad m_A\ ,\ \vec{v}_{A,0}$

planeta (B) $\quad m_B\ ,\ \vec{v}_{B,0}$

termina t_1

quais são os valores após a colisão?

Segunda lei de Newton

Força de B em A: $\quad \vec{F}_A = m_A\,\vec{a}_A$

Força de A em B: $\quad \vec{F}_B = m_B\,\vec{a}_B$

Terceira lei de Newton

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A$$

!

não conhecemos as forças...

$$m_A\,\vec{a}_A = -m_B\,\vec{a}_B$$

ou

$$\boxed{m_A\,\vec{a}_A + m_B\,\vec{a}_B = 0 \text{ em todos os tempos.}}$$

Colisão meteoro-planeta

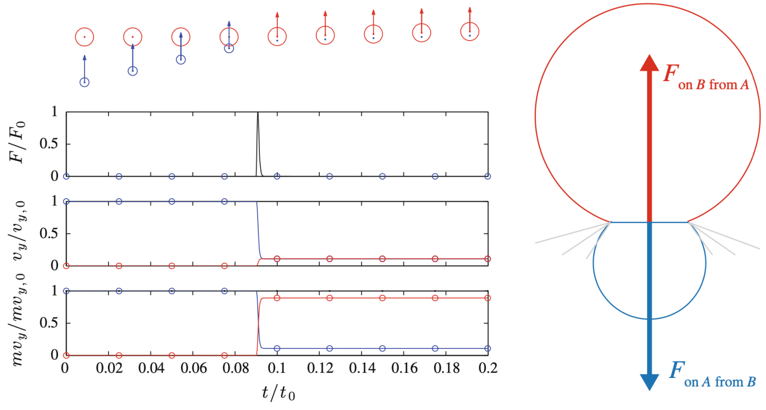


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

$$\vec{F}_A = m_A\,\vec{a}_A$$

$$\vec{F}_B = m_B\,\vec{a}_B = -\,\vec{F}_A$$

$m_A\,\vec{a}_A + m_B\,\vec{a}_B = 0$ em todos os tempos.

$$\int_{t_0}^{t_1} m_A\,\vec{a}_A + m_B\,\vec{a}_B\ dt = 0$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F_A(t)\,dt = \frac{p_{A1} - p_{A2}}{t_1 - t_0}$$

$$\overbrace{\int_{t_0}^{t_1} m_A\,\vec{a}_A\ dt} + \int_{t_0}^{t_1} m_B\,\vec{a}_B\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m_A\,\frac{d\vec{v}_A}{dt}\,dt + \int_{t_0}^{t_1} m_B\,\frac{d\vec{v}_B}{dt}\,dt$$

$$= m_A\vec{v}_A(t_1) - m_A\vec{v}_A(t_0)\ +\ m_B\vec{v}_B(t_1) - \ m_B\vec{v}_B(t_0) = 0$$

$$\Rightarrow\ m_A\vec{v}_A(t_1) + m_B\vec{v}_B(t_1) = \ m_A\vec{v}_A(t_0) + \ m_B\vec{v}_B(t_0)$$

Colisão meteoro-planeta

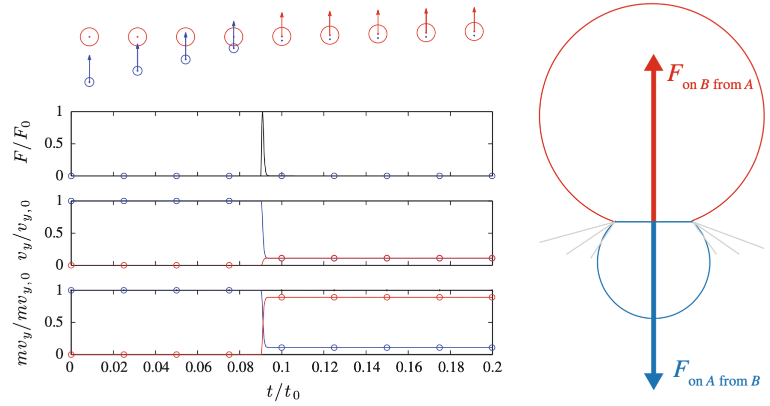


Fig. 12.1 Illustration a collision between a meteor and a planet

$$\vec{F}_A = m_A\, \vec{a}_A$$

$$\vec{F}_B = m_B\, \vec{a}_B = -\, \vec{F}_A$$

$$m_A \vec{v}_A(t_1) + m_B \vec{v}_B(t_1) = m_A \vec{v}_A(t_0) + m_B \vec{v}_B(t_0)$$

Para t_0 e t_1 quaisquer

Momento total

$$\boxed{\vec{P} = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = constante}$$

Lei da conservação de momento

Sorenssen p. 353

Colisão meteoro-planeta

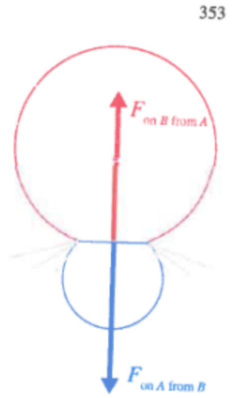
Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$
Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$
Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

Depois da colisão os 2 corpos seguem juntos $\vec{v}_1$

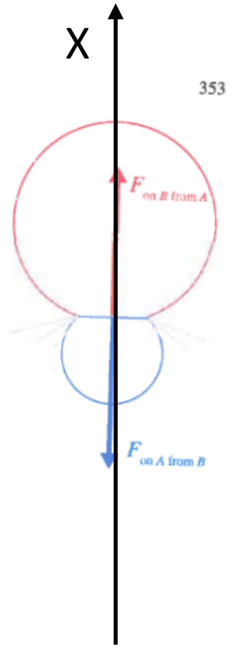


Sabemos que o momento total é constante $\vec{P} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$

Permite determinar a velocidade dos corpos depois da colisão

Nota: eles colidem e ficam um dentro do outro $m_T = m_A + m_B$

Colisão meteoro-planeta



Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$
Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

$$P_x = m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}$$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$
Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

Depois da colisão os 2 corpos seguem juntos $\vec{v}_1$

$$P_x = m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

O momento total conserva-se:

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A\ v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A\ v_{1x} + m_B v_{1x} = (m_A + \ m_B) v_{1x}$$

$$\Rightarrow \quad v_{1x} = \frac{m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}}{m_A + \ m_B}$$

→ momento inicial

→ massa total

Sistema de 2 corpos

- Existem fenómenos com forças complicadas.
- O Impulso é difícil ou impossível de ser calculado.

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_A$
Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_B$

Que forças existem entre os 2 corpos?

Dividimos em 2 tipos

Forças internas: forças entre os corpos do sistema (sistema Terra-Sol: força gravítica de atração)

entre os corpos

$\vec{F}_A^{(B)}$ $\vec{F}_B^{(A)}$

Forças externas: forças entre os corpos do sistema e o meio ambiente

entre o corpo e o ambiente

$\vec{F}_A^{ext}$ $\vec{F}_B^{ext}$

$F_{resultante} = F_{internas} + F_{externas}$

2ª Lei de Newton:

Corpo A $$\sum \vec{F}_A^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$$

Corpo B $$\sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

3ª Lei de Newton:

$$\vec{F}_B^{(A)} = -\vec{F}_A^{(B)}$$

Somarmos: $$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt}$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} + \vec{F}_A^{(B)} + \vec{F}_B^{(A)} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_A + \vec{p}_B)$$

$$\sum \vec{F}_A^{ext} + \sum \vec{F}_B^{ext} = \sum \vec{F}^{ext}$$

Generalização da 2ª Lei de Newton para o sistema de 2 corpos

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{p}_A + \vec{p}_B = \vec{P}$$

= momento total do sistema de 2 corpos

↳ O momento total apenas é alterado pelas forças externas

Sistema de 2 corpos

Se todas as forças externas forem nulas → momento total = 0 $\sum \vec{F}^{ext} = 0$

temos um sistema de 2 corpos isolado

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{implica} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

Num sistema de 2 corpos isolado o momento total conserva-se

Generalização para sistema de muitos corpos (N)

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Se o sistema for isolado ($\sum \vec{F}^{ext} = 0$) temos a conservação do momento total $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$

Colisões

Processo que envolve forças muito grandes entre os corpos, durante um intervalo de tempo muito curto

Num sistema de 2 corpos isolado, em que **o momento total conserva-se**:

Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

Colisões: Num sistema de 2 corpos isolado, em que o momento total conserva-se.

Antes da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,0}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,0}$

Depois da colisão

Corpo A com massa m_A e velocidade $\vec{v}_{A,1}$

Corpo B com massa m_B e velocidade $\vec{v}_{B,1}$

A 1 dimensão, o momento total é:

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x}$$

$$m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

Pela conservação do momento total

$$m_A v_{A,0x} + m_B v_{B,0x} = m_A v_{A,1x} + m_B v_{B,1x}$$

também é em qualquer instante da colisão

Se soubermos as quantidades antes da colisão (massa e velocidades)
temos 1 equação com 2 incógnitas

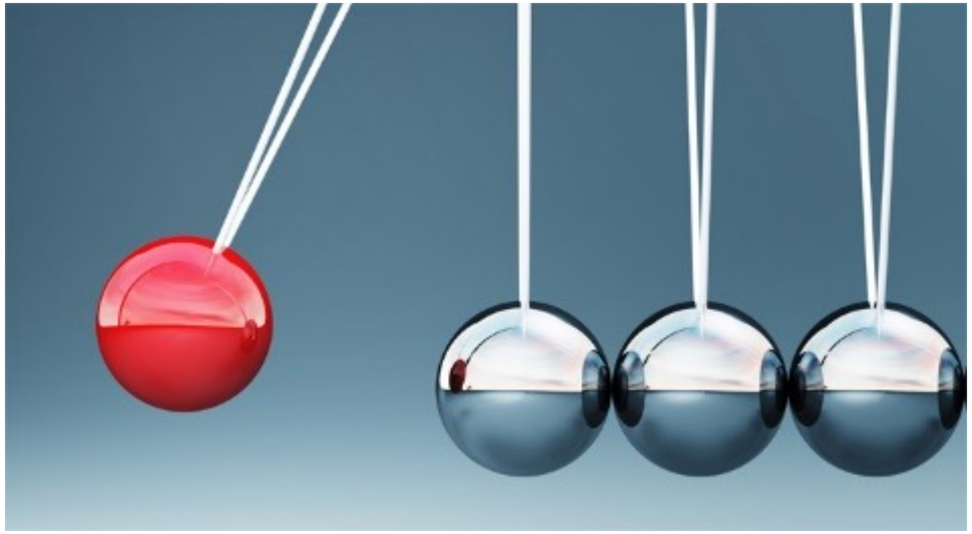
$v_{A,1x}$ e $v_{B,1x}$ (será preciso mais uma equação para serem calculadas)

Colisões: Num sistema de 2 corpos isolado, em que o momento total conserva-se.

Se soubermos as quantidades antes da colisão (massa e velocidades),
temos 1 equação com 2 incógnitas

$v_{A,1x}$ e $v_{B,1x}$ (será preciso mais uma equação para serem calculadas)

- **Se só atuarem forças conservativas,**
  a energia mecânica total também se conserva (mais uma equação)
- Quando acontece chama-se **Colisão Elástica**
- Quando não há conservação da energia mecânica, chama-se **Colisão Inelástica**



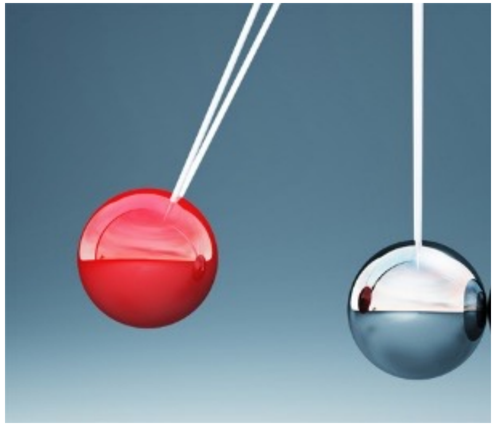
Ex. **Colisão Elástica: Pêndulo de Newton**

Lei de conservação do momento:

Antes: o momento proveniente da bola que vai colidir

Depois da colisão: há várias possibilidades de combinações entre as várias massas e velocidades.

Mas **só uma bola emerge** de todo o conjunto? Tem-se também a conservação da energia.



• Conservação do momento
• Conservação da energia

Considere primeiro o sistema com 2 bolas

Antes: o momento proveniente da bola que vai colidir

Bola A com massa m e velocidade $v_{A,x0}$

Bola B com massa m e velocidade 0

momento $P_x = mv_{A,x0}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_{A,x0}{}^2$

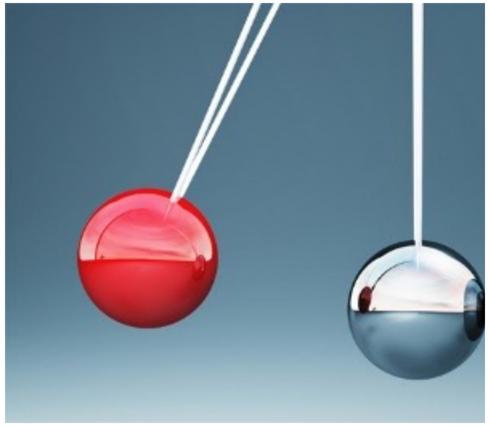
Depois da colisão:

Bola A com massa m e velocidade $v_{A,x1}$

Bola B com massa m e velocidade $v_{B,x1}$

momento $P_x = mv_{A,x1} + mv_{B,x1}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_{A,1x}{}^2 + \frac{1}{2}mv_{B,1x}{}^2$



Considere primeiro o sistema com 2 bolas

Antes da colisão:

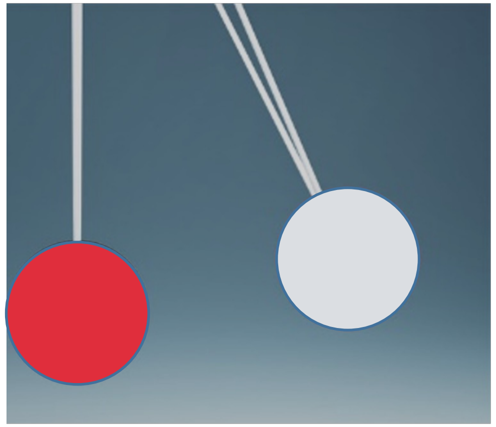
momento $P_x = mv_{A,x0}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_{A,x0}{}^2$

Depois da colisão:

momento $P_x = mv_{A,x1} + mv_{B,x1}$

energia cinética $\mathrm{E} = \frac{1}{2}mv_{A,x1}{}^2 + \frac{1}{2}mv_{B,x1}{}^2$



Conservação de momento e energia

$$\begin{cases} \cancel{m}v_{A,x0} = \cancel{m}v_{A,x1} + \cancel{m}v_{B,x1} \\ \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v_{A,x0}{}^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v_{A,x1}{}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m}v_{B,x1}{}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{A,x0} = v_{A,x1} + v_{B,x1} \\ v_{A,x0}{}^2 = v_{A,x1}{}^2 + v_{B,x1}{}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{A,x0} - v_{A,x1} = v_{B,x1} \\ \underbrace{v_{A,x0}{}^2 - v_{A,x1}{}^2}_{=(v_{A,x0}+v_{A,x1})(v_{A,x0}-v_{A,x1})} = v_{B,x1}{}^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{A,x0} - v_{A,x1} = v_{B,x1} \\ (v_{A,x0} + v_{A,x1})\cancel{(v_{A,x0} - v_{A,x1})} = v_{B,x1}{}^2 \end{cases}$$

$\cancel{v_{B,x1}} \times v_{B,x1}$

$$\begin{cases} v_{A,x0} - v_{A,x1} = v_{B,x1} \\ v_{A,x0} + v_{A,x1} = v_{B,x1} \end{cases} \qquad = 0$$

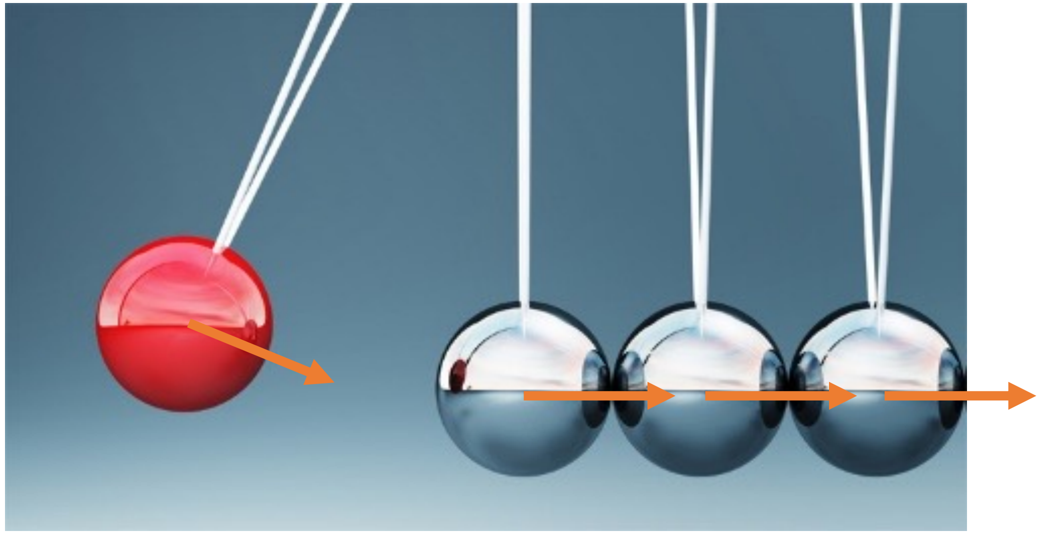
$$\boxed{\begin{cases} v_{A,x1} = 0 \\ v_{B,x1} = v_{A,x0} \end{cases}}$$

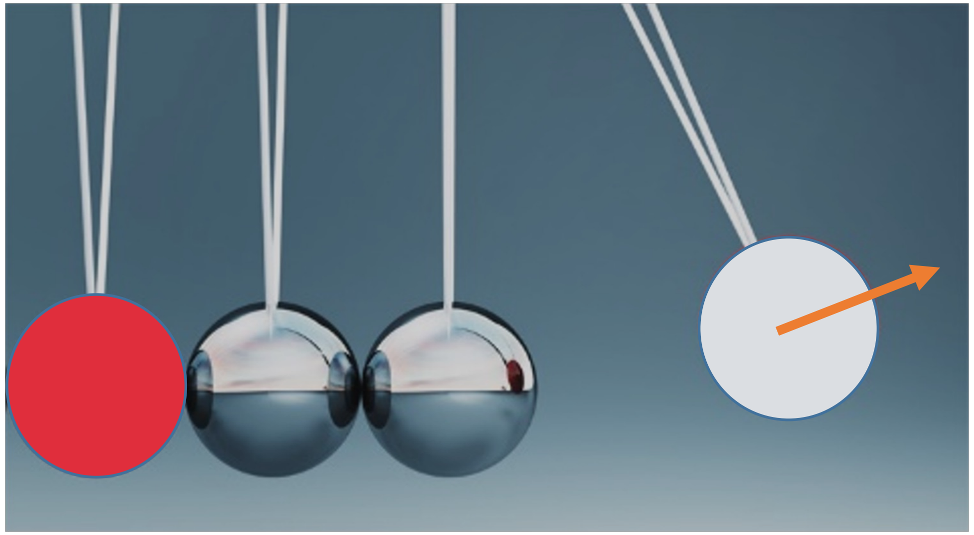
todo o momento transferido à segunda bola

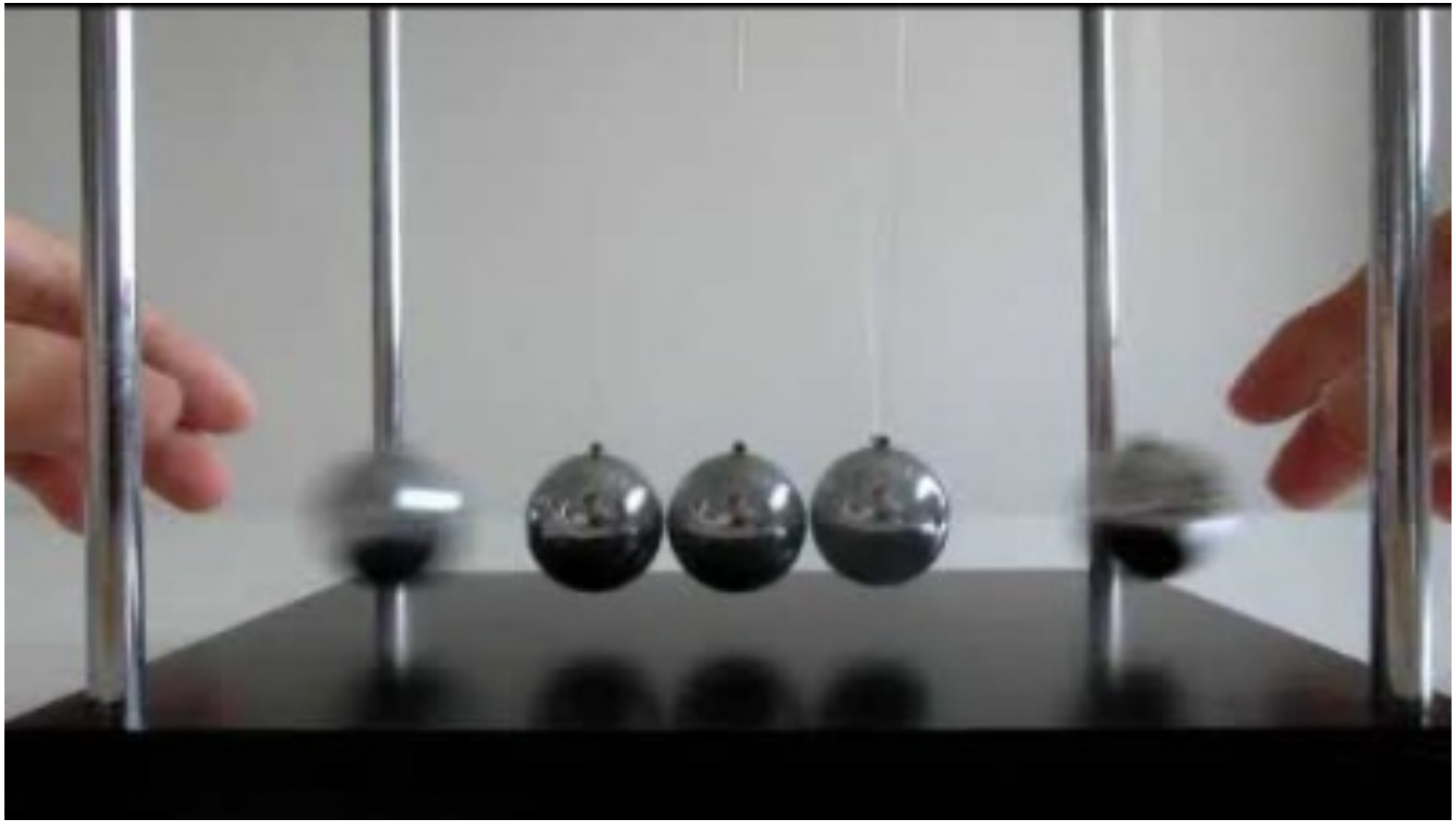
Ex. **Colisão Elástica**

O Sistema com 4 bolas

Conservação de momento e energia cinética
momento transferida a cada bola em sucessão





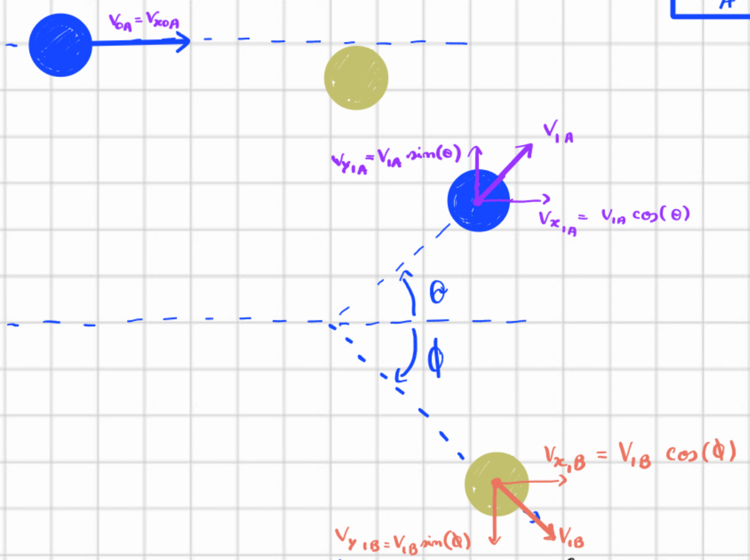


Prática 10:

7

$$\boxed{m_A = m_B}$$

a)



$$\begin{cases} P_0 A_x + P_0 B_x = P_1 A_x + P_1 B_x \\ P_0 A_y + P_0 B_y = P_1 A_y + P_2 B_y \\ \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} v_{0A}^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} v_{1A}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{m} v_{1B}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{m} V_{x_{0A}} + \cancel{m} \cancel{V_{x_{0B}}}^{\,0} = \cancel{m} V_{x_{1A}} + \cancel{m} V_{x_{1B}} \\ \cancel{m} \cancel{V_{y_{0A}}}^{\,0} + \cancel{m} \cancel{V_{y_{0B}}}^{\,0} = \cancel{m} V_{y_{1A}} + \cancel{m} V_{y_{1B}} \\ V_{0A}^2 = V_{1A}^2 + V_{1B}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} V_{x_0 A} = V_{x_1 A} + V_{x_1 B} \\ V_{y_0 A} = V_{y_1 A} + V_{y_1 B} \end{cases}$$

Como $V_{x_0A} = 1$ e $V_{y_0A} = 0$:

$$\begin{cases} 1 = V_{1A}\cos(\theta) + V_{1B}\cos(\phi) \\ 0 = V_{1A}\sin(\theta) + V_{1B}\sin(\phi) \\ 1 = V_{1A}^2 + V_{1B}^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{elevar tudo ao quadrado}} \begin{cases} 1 = (V_{1A}\cos(\theta))^2 + 2V_{1A}V_{1B}\cos(\theta)\cos(\phi) + (V_{1B}\cos(\phi))^2 \\ 0 = (V_{1A}\sin(\theta))^2 + 2V_{1A}V_{1B}\sin(\theta)\sin(\phi) + (V_{1B}\sin(\phi))^2 \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações:

$$\begin{cases} 1 = V_{1A}^2 \underbrace{(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}_{=1} + 2V_{1A}V_{1B}\underbrace{(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)}_{=\cos(\theta+\phi)} + V_{1B}^2\underbrace{(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))}_{=1} \\ 1 = V_{1A}^2 + V_{1B}^2 \end{cases}$$

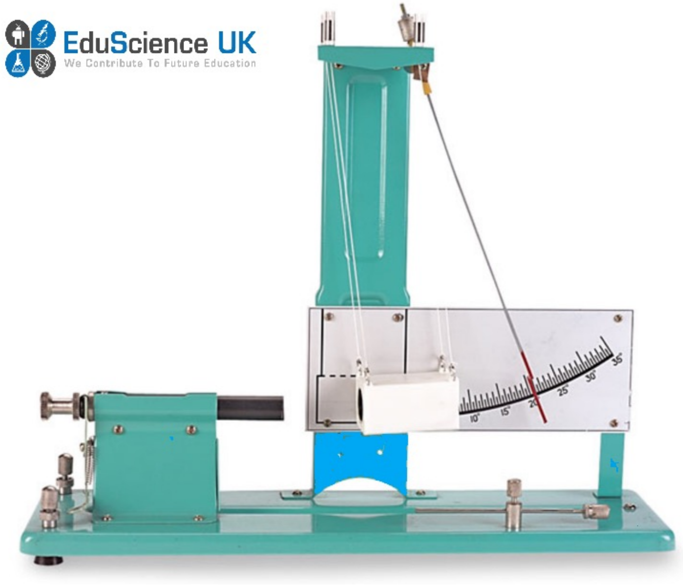
$$\begin{cases} 1 = V_{1A}^2 + 2V_{1A}V_{1B}\cos(\theta+\phi) + V_{1B}^2 \\ 1 = V_{1A}^2 + V_{1B}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 = \overbrace{\boxed{V_{1A}^2 + V_{1B}^2}}^{=1} + 2V_{1A}V_{1B}\cos(\theta+\phi) \\ 1 = V_{1A}^2 + V_{1B}^2 \end{cases}$$

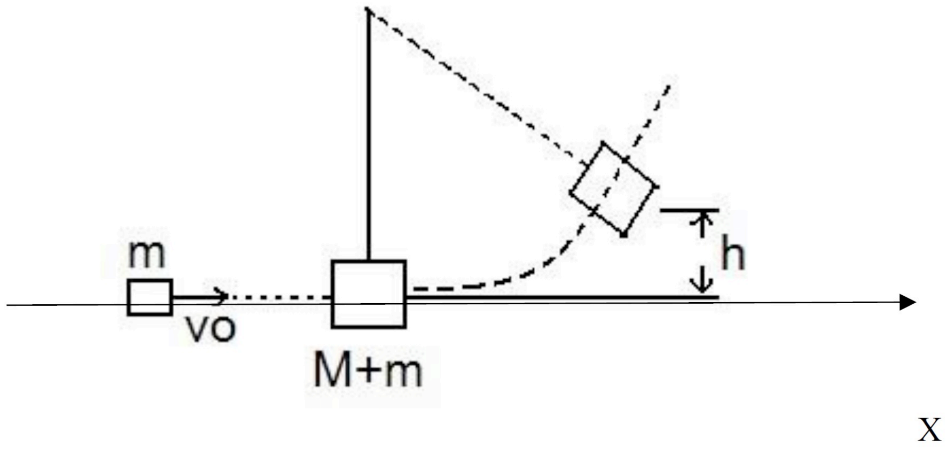
$$\Rightarrow \cancel{1} = \cancel{1} + 2V_{1A}V_{1B}\cos(\theta+\phi) \Leftrightarrow 2V_{1A}V_{1B}\cos(\theta+\phi) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\theta+\phi) = 0$$

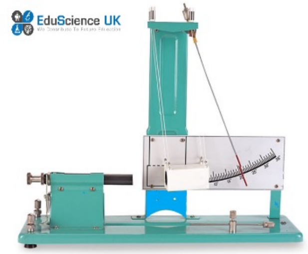
Sabendo que $\phi = 35°$: $\cos(35+\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(35+\theta) = \cos(90) \Leftrightarrow \theta = 55°$

Ex: **Pêndulo balístico**: medição da velocidade de uma bala





1. Colisão bala – bloco
2. Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura *h*

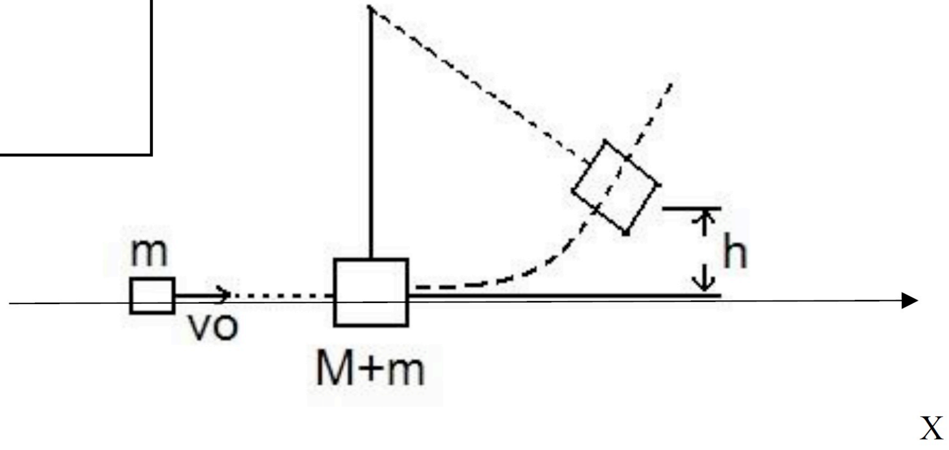


Pêndulo balístico: medição da velocidade de uma bala

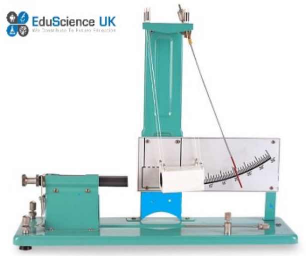
1. Colisão bala – bloco

Antes da colisão	Depois da colisão
Momento da bala $m_{bala}v_{bala,x}$ Momento do bloco 0	Bala-bloco $(m_{bala} + M_{bloco})V$
Conservação do momento $m_{bala}v_{bala,x} = (m_{bala} + M_{bloco})V$	

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}}V$$



Note: porque os dois corpos vão juntos depois da colisão, só temos 1 incógnita
Não é preciso analisar a energia



Pêndulo balístico: medição da velocidade de uma bala

1. Colisão bala – bloco

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala} + M_{bloco})}{m_{bala}} V$$

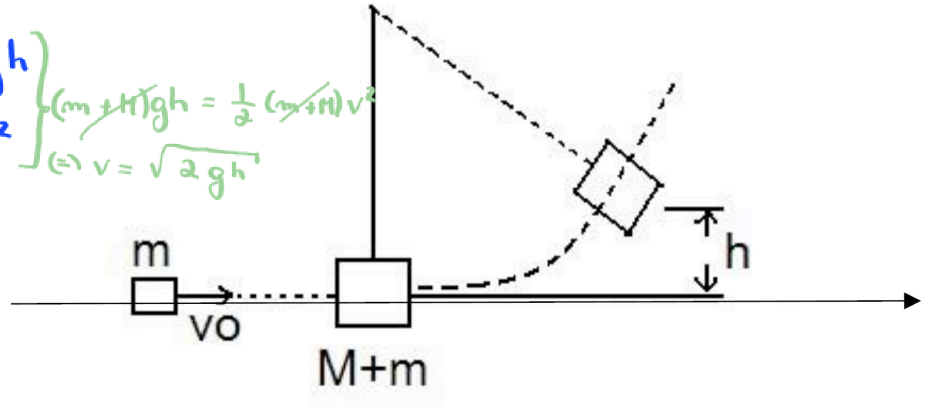
2. **Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura** ***h***

$E_p = (m+M)gh$

$E_c = \frac{1}{2}(m+M)v^2$

$\cancel{(m+M)}gh = \frac{1}{2}\cancel{(m+M)}v^2$

$\Leftrightarrow v = \sqrt{2gh}$



X

Os dois corpos juntos sobem como um pêndulo até à altura h, transformando energia cinética em energia potencial

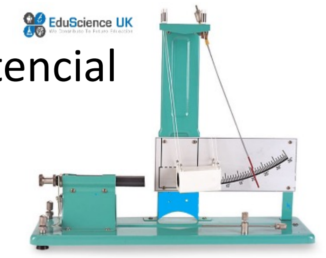
Energia mecânica:

- No ponto mais baixo do pêndulo $\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 + 0$
- No ponto a altura *h* $0 + (m_{bala} + M_{bloco})\, g\, h.$

Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 = (m_{bala} + M_{bloco})\, g\, h$$

2. **Elevação pelo pêndulo do bloco-bala a altura** *h*



Os dois corpos juntos sobem como um pêndulo até à altura h, transformando energia cinética em energia potencial

Energia mecânica

No ponto mais baixo do pêndulo $\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 + 0$

No ponto a altura h $0 + (m_{bala} + M_{bloco})\ g\ h.$

Pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}(m_{bala} + M_{bloco})V^2 = (m_{bala} + M_{bloco})\ g\ h$$

$$\Rightarrow\ V^2 = 2\ \ g\ h$$

e de passo 1.

$$v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}} V$$

$$\Rightarrow\ v_{bala,x} = \frac{(m_{bala}+M_{bloco})}{m_{bala}} \sqrt{2\ \ g\ h}$$

Mostre que a colisão é inelástica.