

MODELAÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS

3º TESTE – Parte Cálculo Analítico

23 de Junho 2023, 9h

Duração: 30 min

Cotação: I – 4 valores; II – 4 valores; III – 2 valores.

- I - Um corpo de massa 0.2kg move-se num oscilador harmónico forçado. O oscilador harmónico tem a energia potencial $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, e exerce no corpo a força $F_x = -kx$.

O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$.

Considere $k = 5\text{N/m}$, $b = 0.5\text{kg/s}$, e $F_0 = 1\text{N}$.

- (a) Aproximadamente, qual a frequência angular ω_f da força externa para se alcançar a ressonância? Qual a amplitude com este valor de ω_f ?
- (b) A massa do corpo é mudada para 0.8kg . Se ω_f não muda, qual é a amplitude estacionário agora?

- II - Considere 2 corpos A (à esquerda) e B (à direita) ligados por uma mola de constante elástica k' , e cada um dos corpos ligado a uma mola, de constante elástica k , de extremidade oposta fixa.

- (a) Identifique as forças que atuam em cada massa e, então, escreva as equações dinâmicas de Newton do sistema.
- (b) Descreve o movimento dos dois corpos no caso que os corpos são inicialmente deslocados a mesma distância dos respetivos pontos de equilíbrio, em direções apostas, com velocidades inicialmente 0.

Espectro Simétrica, mola da meio não interfere

- III - (a) Num sistema de 5 osciladores harmónicos acoplados, quantos modos normais devemos encontrar?

5

- (b) Uma onda sinusoidal se propaga numa corda muito comprida. Cada ponto da corda oscila com frequência $f = 10\text{Hz}$, e existevuma distância de 0.2m entre um ponto numa extremidade de oscilação e o ponto mais perto na outra extremidade (um máximo e um mínimo). Qual é a velocidade de propagação da onda?

$$v = \lambda f$$

$$f = 10\text{Hz}$$

$$0.2 = \frac{\lambda}{2}$$

Formulário

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$f(x + \delta x) = f(x) + \left. \frac{df}{dx} \right|_x \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_x \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_x \delta x^3 + \mathcal{O}(\delta x^4)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-at} = -a e^{-at}$$

$$1 \text{ rad} = 57.29578 \text{ graus}$$

$$g = 9,80 \text{ m/s}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \quad F_x = - \frac{dE_p}{dx}$$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_2|^2$$

$$\frac{dW}{dt} = P_o, \quad W = \int_{t_0}^{t_1} P_o dt$$

$$\int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + \left(\frac{b\omega_f}{m}\right)^2}}$$

$$f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$v = f\lambda$$

MODELAÇÃO DE SISTEMAS FÍSICOS

3º TESTE – Parte Cálculo Computacional-Numérico

22 de Março 2023, 9h

Duração: 1 hora

Cotação: I – 5 valores; II – 5 valores.

NOTE:

- i. Responda às perguntas com comentários no código, justificando-as.
- ii. No final do teste, coloque os ficheiros de código elaborado, e, se for o caso, figuras e ficheiros de output, num só arquivo .zip (ou equivalente), com o nome e número mecanográfico do aluno. Entregue o arquivo .zip de acordo com as instruções do docente presente.
- iii. Tem de usar o seu computador portátil. Pode (e deve) usar os seus programas, assim como outros programas que tenha obtido.
- iv. É um teste de consulta, mas não pode aceder à internet, incluindo para consultar documentos do python.

-
- I - Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador cúbico. O oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \alpha x^3$$

e exerce no corpo a força

$$F_x = -kx - 3\alpha x^2.$$

Considere $k = 1\text{N/m}$ e $\alpha = 0.05\text{N/m}^2$.

- (a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial, para x entre -8m e 4m . Qual o movimento quando a energia total for menor do que 7J ? O que acontecerá se a energia total for maior do que 8J ?
- (b) Calcule a lei do movimento numericamente, quando a posição inicial for 2.2m e a velocidade inicial nula. Quanto é a energia mecânica?
- (c) Faça a análise de Fourier da solução encontrada.

II - Um corpo de massa 1 kg move-se num oscilador quártico forçado. O oscilador tem a energia potencial $E_p = \alpha x^4$ e exerce no corpo a força $F_x = -4\alpha x^3$. O oscilador é amortecido pela força $-bv_x$ e sujeito à força externa $F_0 \cos(\omega_f t)$. Considere $k = 1 \text{ N/m}$, $b = 0.02 \text{ kg/s}$, $\alpha = 0.15 \text{ N/m}^2$, $F_0 = 7.5 \text{ N}$ e $\omega_f = 1.0 \text{ rad/s}$.

- (a) Calcule a lei de movimento do oscilador usando o método de Runge-Kutte de 4ª ordem, com a posição inicial $x = 2 \text{ m}$ e a velocidade inicial $v_x = 0 \text{ m/s}$.
- (b) Calcule até que instante pode calcular univocamente a lei do movimento, sabendo que a posição inicial é $2.000 \pm 0.001 \text{ m}$ e a velocidade inicial é nula. Considere todas as quantidades, exceto a posição inicial, medidas com uma precisão elevada.

Testa para 2.001 e 1.999

2.000