Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

2ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 1 Regressão Linear

Cap. 2 Movimento a uma dimensão.

- Observação de movimento linear
- Definição de velocidade e aceleração instantânea.
- Movimentos uniforme e uniformemente acelerado.
- Queda de uma bola de ténis.
- Queda de um volante de badmington.

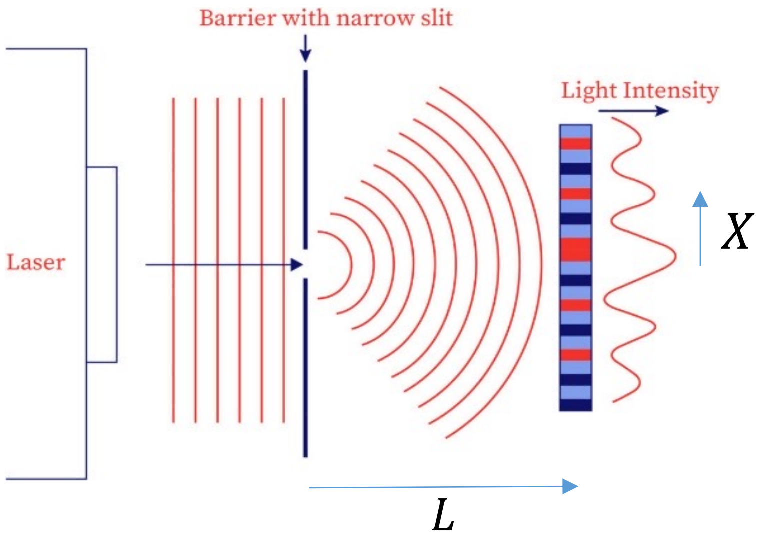
Bibliografia:

Serway, cap. 2
Sørenssen, cap. 4
Villate, cap. 1

Análise de Dados experimentais (resultado de medições)

Apresentam-se numa tabela, ou em registo papel, ou ficheiro digital (que são tabelas)

Ex: Numa experiência de difração por uma fenda única de um feixe de luz, em que L é a distância da dupla fenda ao alvo e X a distância entre máximos luminosos consecutivos da figura de difração, registaram-se estas valores:



L (cm)	X (cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0

Que relação existe entre L e X?

Difícil de vislumbrar, se só olharmos para a tabela!

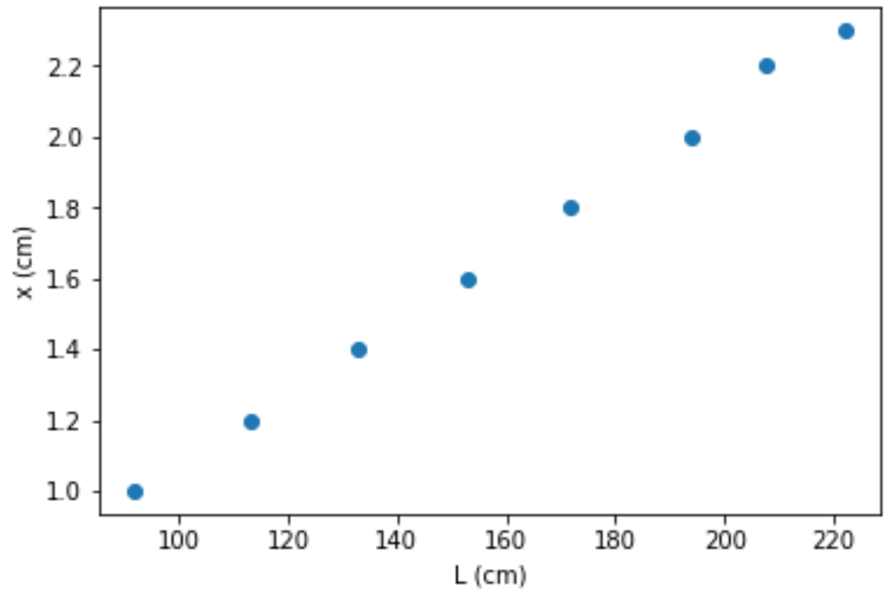
Análise de Dados experimentais (resultado de medições)

Ex: Numa experiência de difração por uma fenda única de um feixe de luz, em que L é a distância da fenda ao alvo e X a distância entre máximos luminosos consecutivos da figura de difração, registaram-se estas valores:

Que relação existe entre L e X?

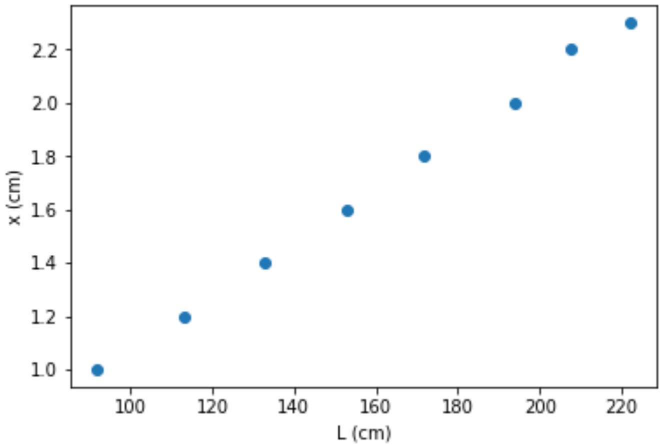
L (cm)	X(cm)
222.0	2.3
207.5	2.2
194.0	2.0
171.5	1.8
153.0	1.6
133.0	1.4
113.0	1.2
92.0	1.0

E se os dados forem apresentados num gráfico:



Parece haver uma relação linear.

Matematicamente como se extrai as caraterísticas de uma reta deste gráfico?



Regressão linear pelo método dos mínimos quadráticos

Dados experimentais: (x_i, y_i)

Pontos da reta: (x_i, p_i) dados pela reta $p_i = mx_i + b$

não se conhece m e b

Mínimo de $S(m, b) = \sum_{i=1}^{N} (y_i - p_i)^2$

soma das diferenças (ao quadrado, para ser sempre positivas) entre o valor expeimental e o valor da reta do modelo teórico)

Condições:

$$\frac{\partial S(m,b)}{\partial m} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial S(m,b)}{\partial b} = 0$$

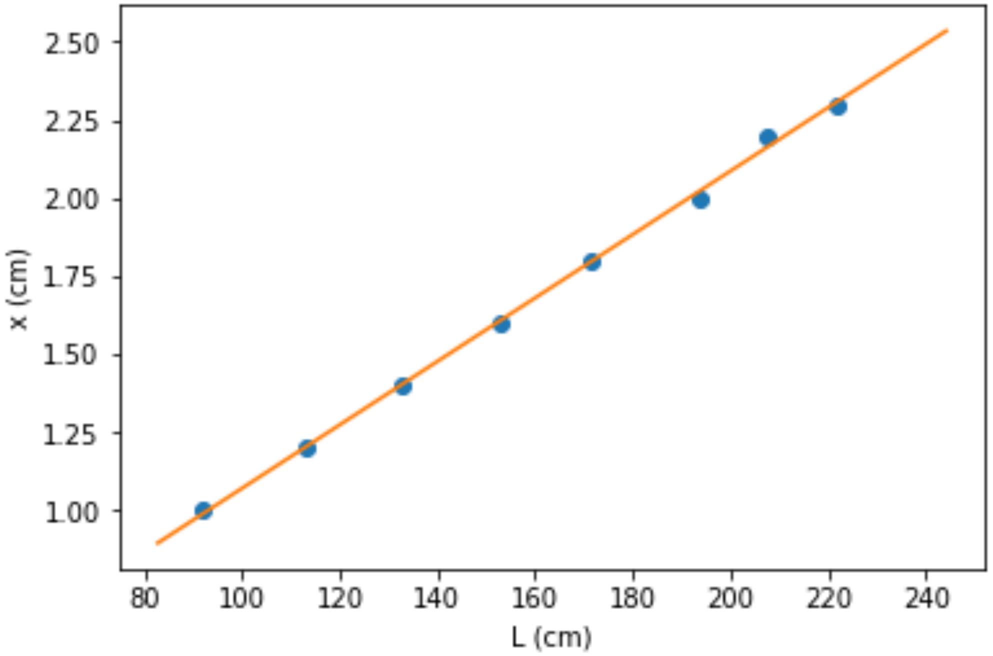
$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(m,b)}{\partial m} = 0 \\ \dfrac{\partial S(m,b)}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} m = \dfrac{N\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \\ b = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2\ \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \end{cases}$$

O coeficiente de determinação r^2 é tal que quando ~1 indica um ótimo ajuste, enquanto que ~ 0 indica que não o modelo não é linear

$$r^2 = \frac{\left(N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i\ \sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2}{\left[N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]\ \left[N \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}$$

Os erros associados são:

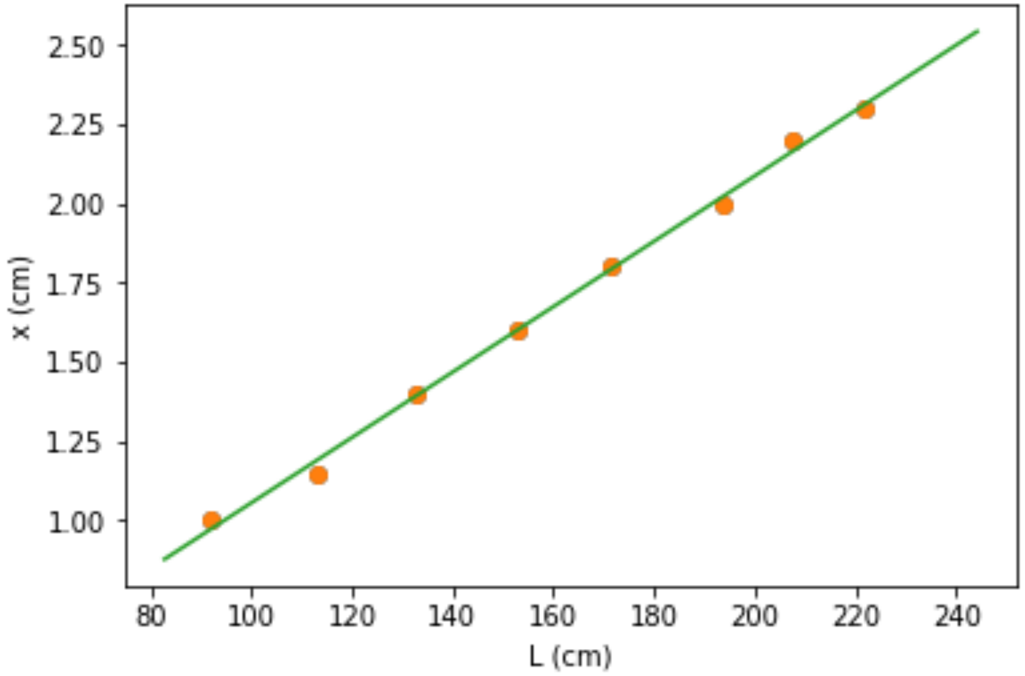
$$\begin{cases} \Delta m = |m| \sqrt{\dfrac{\frac{1}{r^2} - 1}{N-2}} \\ \Delta b = \Delta m \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}} \end{cases}$$

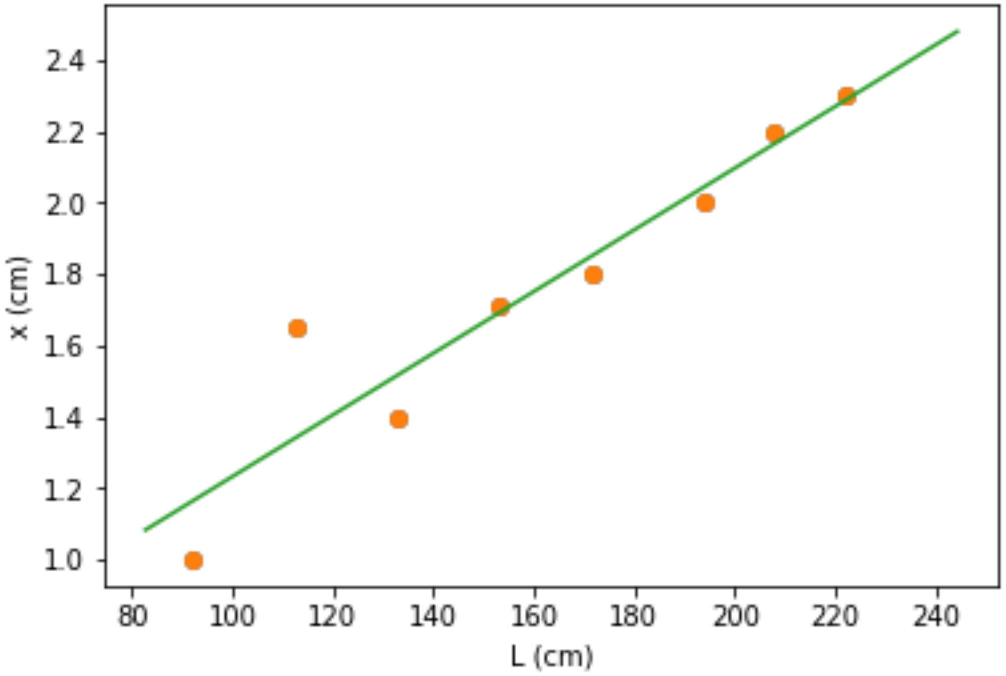


m=0.010155051683894637+-0.00016296903598678832
b=0.05507544181393875 +- 0.02713076554383449
r^2=0.9984571397353084

$$m = 0.0102 \pm 0.0002 \frac{\text{cm}}{\text{cm}} = 0.0102 \pm 0.0002$$

$$b = 0.06 \pm 0.03 \text{ cm}$$





$r^2 = 0.993$

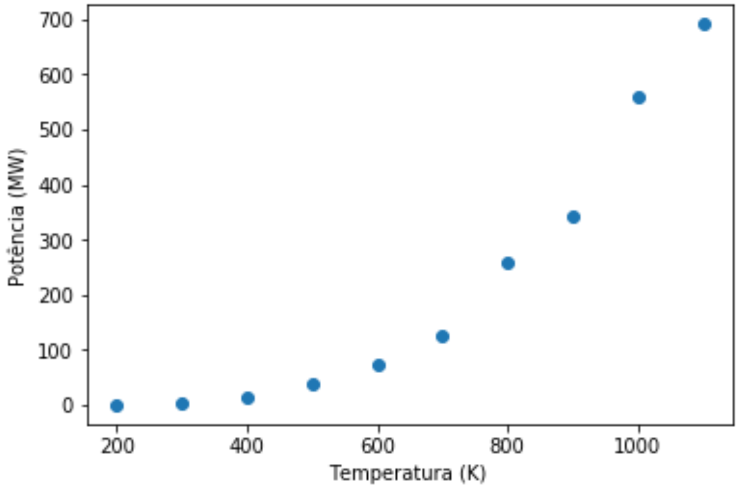
$$\begin{cases} m = 0.0102 \pm 0.0002 \\ b = 0.06 \pm 0.03 \text{ cm} \end{cases}$$

$r^2 = 0.889$ Pior ajuste

$$\begin{cases} m = 0.0101 \pm 0.0004 \\ b = 0.08 \pm 0.06 \text{ cm} \end{cases}$$

Os erros são maiores

Leis de potência $y = cx^n$

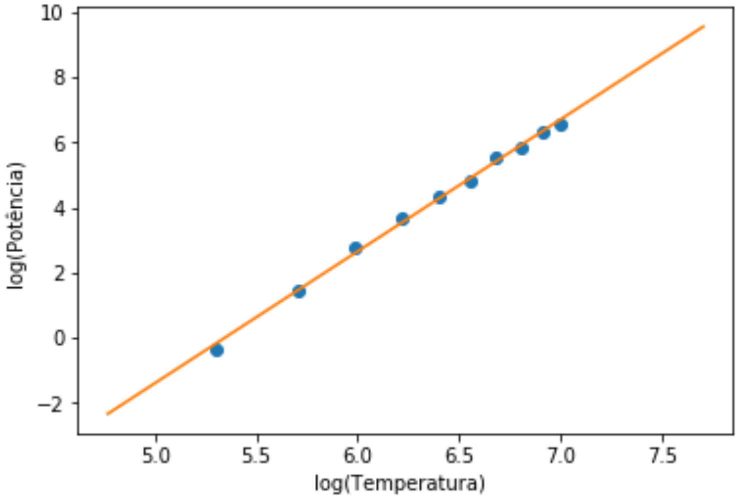


logaritmo base b:

$$\log_b y = \log_b c + \underbrace{n}_{\text{declive}} \cdot \log_b x$$

Reta!

declive = potência



Propriedades dos logaritmos:

$\log_b b^x = x$

$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$

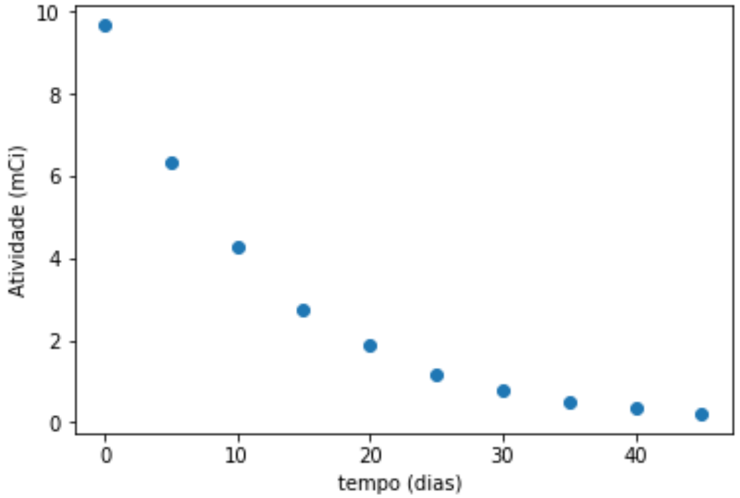
$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$

Lei exponencial $y = y_0 e^{\lambda t}$

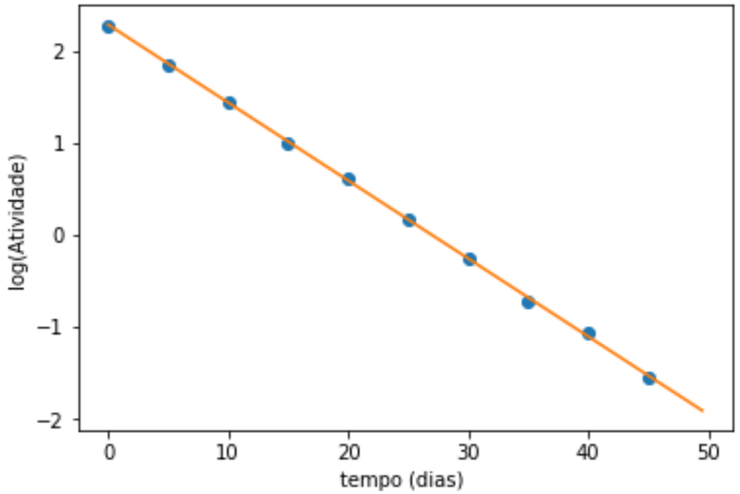
λ pode ser positivo ou negativo



logaritmo base b:

$$\log_b y = \log_b y_0 + \lambda t$$

declive



y e y_0 expressos nas mesmas unidades

Propriedades dos logaritmos:

$$\log_b b^x = x$$

$$\log_b x^y = y \cdot \log_b x$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b}$$

Com um conjunto de medições é aconselhável fazer os 3 tipos de gráficos

(x, y)

(log x, log y)

(x, log y)

Para identificar potencias relações lineares, de potência ou exponenciais

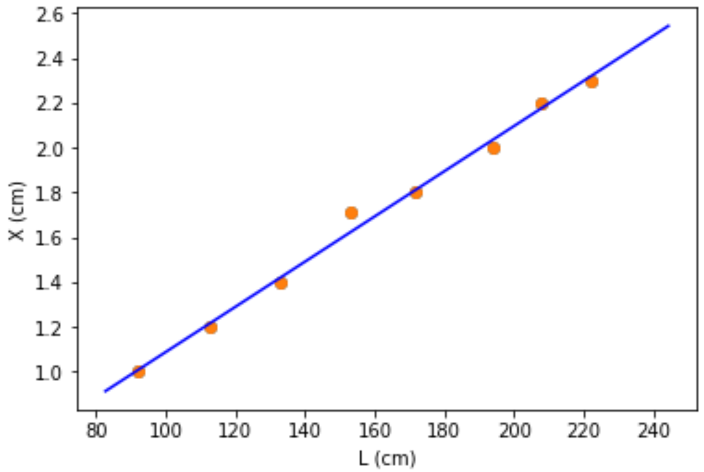
Com python e por exemplo matplotlib, é muito fácil e rápido obter sem demora os três gráficos

Linearização de uma expressão: $y^m = cx^n + b$

Se se fizer: $\begin{cases} y^m = Y \\ x^n = X \end{cases}$ → substituição $\longrightarrow$ $\boxed{Y = c\,X + b}$ $\longrightarrow$ RETA

m e n podem ser negativos

Valores experimentais



Modelo Linear

O modelo linear entre as quantidades L e X permite realizar previsões:

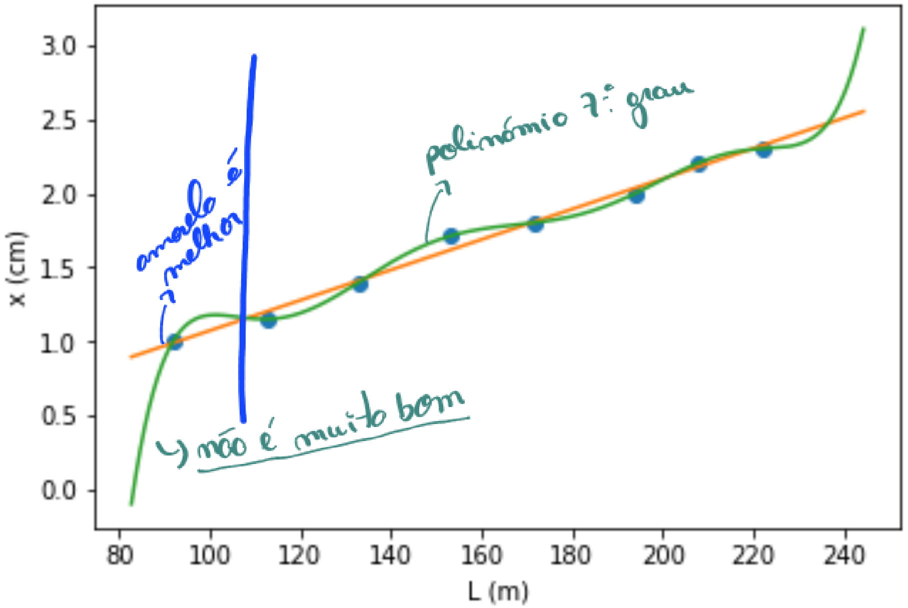
- **Interpolação:** para $L_{mínimo} < L < L_{máximo}$,

por exemplo para $L = 165.0$ cm, obtêm-se o valor $X_{previsto} = 1.7$ cm.

- **Extrapolação:** para $L < L_{mínimo}$ ou $L > L_{máximo}$

por exemplo $L = 25.0$ cm, obtêm-se o valor de $X_{previsto} = 0.3$ cm.

O valor interpolado deverá estar correto. O modelo linear é fiável para os valores entre os extremos das quantidades.
Contudo não temos confiança no resultado extrapolado, pois não temos medições perto do valor considerado. Na realidade o modelo linear não está validado para valores de L pequenos.



Funções mais complexas

Não é um bom modelo, temos de escolher o modelo mais simples

A amarelo: $y = m\,x + b$ r^2 =0.990

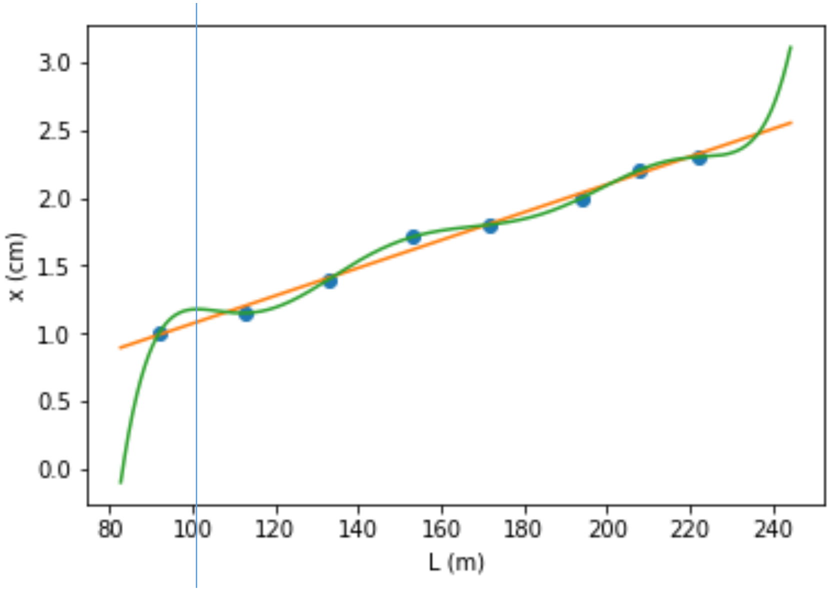
E se fizermos com um polinómio do 7º grau?

A verde: $y = c_7x^7 + c_6x^6 + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2\,x^2 + \,m\,x + b$

A função polyfit(x,y,n) do pacote numpy de python faz a regressão linear como também o ajuste a um polinómio de grau n.

Qual a curva que reproduz melhor os dados experimentais?

Qual se aceita como modelo? A reta ou o polinómio de 7º grau?



Qual se aceita como modelo? A reta ou o polinómio de 7º grau?

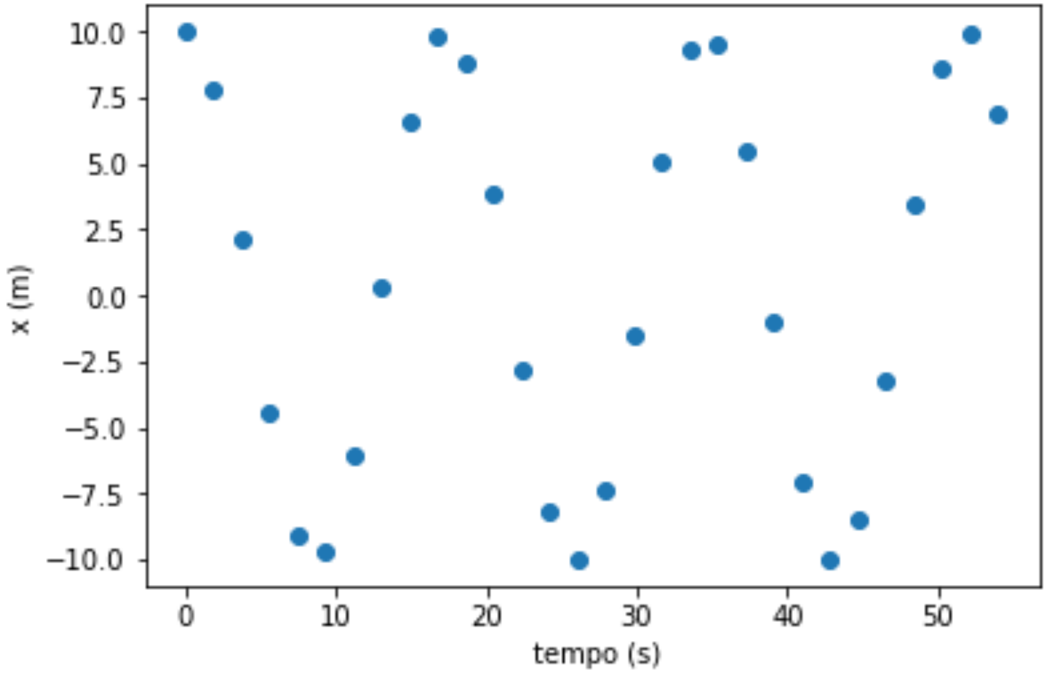
Um polinómio de grau n ajusta-se perfeitamente ao mesmos número n de dados experimentais.

É por isso que é um bom modelo?

- Se a relação for mesmo linear, o afastamento dos dados experimentais da reta é devido a erros associados à medição.
- Interpolação 'parece' pior do que se usar o modelo linear. No gráfico pode ver a diferença de valores que para L=100 cm os dois modelos preveem.
- Extrapolação: os resultados são muito diferentes do modelo linear e dos pontos experimentais mais próximos.

Existem casos de dados experimentais que não se podem modelar por uma reta, lei de potência ou exponencial

Ex: **dados a modelar por funções periódicas**
(a fazer mais tarde)



Dados a modelar por funções 'estranhas'
Ex: Radiação do corpo negro

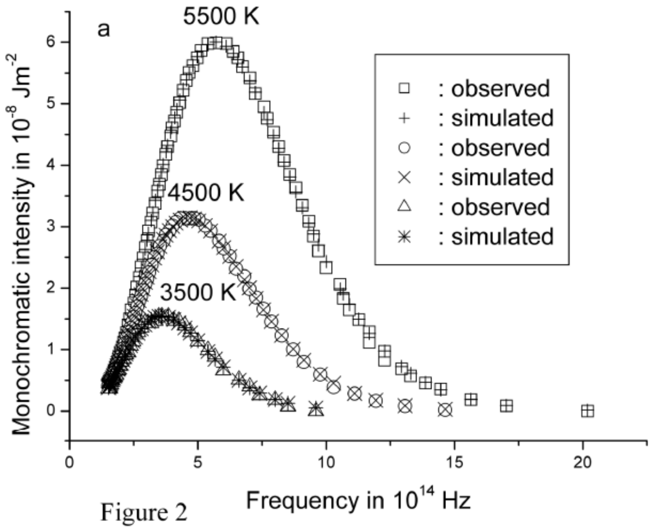


Figure 2

Expressão de Planck

$$\rho(f) = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

$$h = 6.62607015 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

Estudo de movimento em 1 dimensão

Vídeo de record mundial de Usain Bolt, Berlim 2009
https://youtu.be/3nbjhpcZ9_g

Estudo de movimento em 1 dimensão

O estudo começa por construir um esquema:

- Escolha do eixo onde se desenvolve o movimento.
- Escolha do sentido positivo do eixo (costuma ser o do movimento)
- Escolha da origem desse eixo (costuma ser a posição inicial)
- Nesse eixo, colocar a aceleração e o seu sentido.
- Nesse eixo colocar a velocidade e a posição inicial.
- Escolha do instante zero, origem dos tempos (costuma ser o instante inicial).

A posição de Usain Bolt evolui no tempo. Em cada instante a posição do atleta é diferente. **A posição é uma quantidade instantânea.**

Indica-se a posição por x e é referenciada no eixo OX. E sendo instantânea, indica-se por $x(t)$.

Neste caso é conveniente colocar a origem do eixo no ponto da partida dos atletas.

Pelas mesmas razões **a velocidade também é uma quantidade instantânea.**

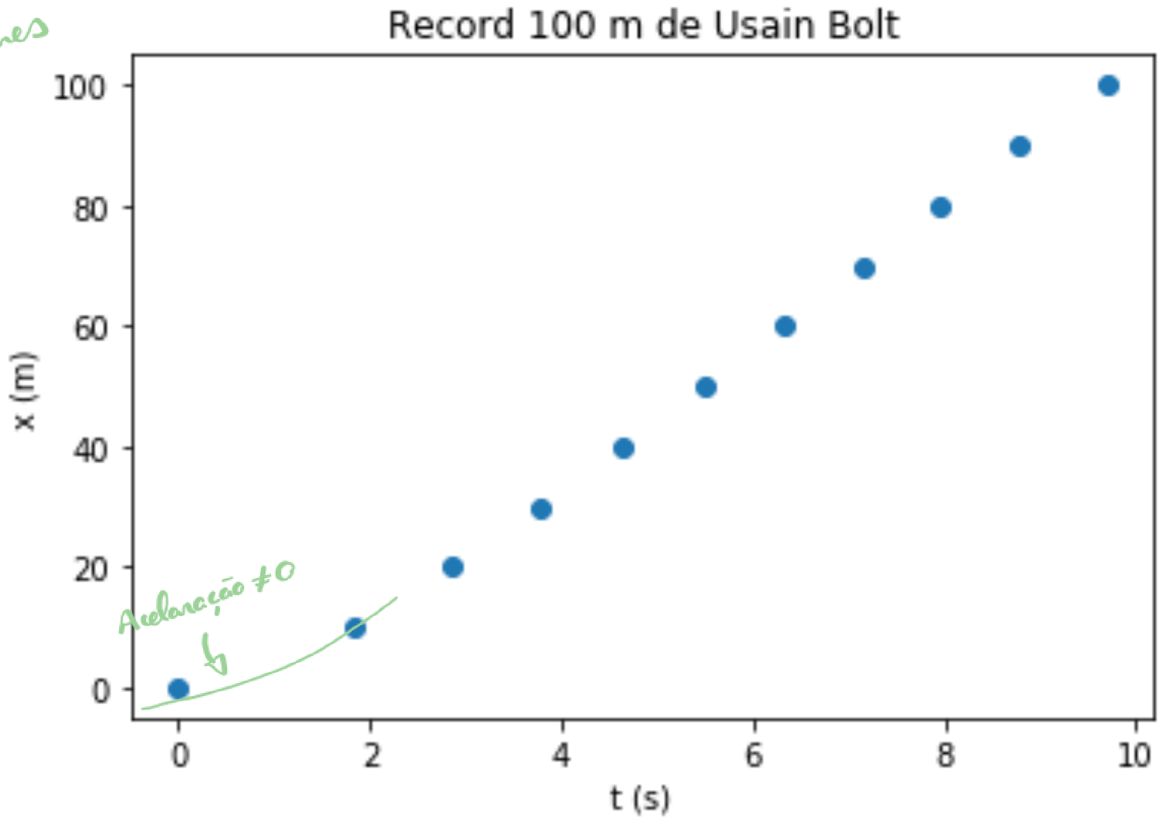
Indica-se por $v_x(t)$. O índice x é para indicar que é referenciado no eixo OX.

A posição $x(t)$ e a velocidade $v_x(t)$ podem ser positivos e negativos!

O desempenho de Bolt nos 100m foram medidos.


```
# Tempos de Usain Bolt a correr os 100 m
# ficheiro dataUsainBolt.txt
# 1° conjunto: final olimpica em Pequim, 2008
# 2° conjunto: record mundial, Berlim 2009
# Medalha de ouro e record mundial
# x (m)   t1 (s)   t2 (s)
0         0        0
10        1.83     1.89
20        2.87     2.88
30        3.78     3.78
40        4.65     4.64
50        5.50     5.47
60        6.32     6.29
70        7.14     7.10
80        7.96     7.92
90        8.79     8.75
100       9.69     9.58
```

→ Já temos os tempos, poderíamos ver por frames

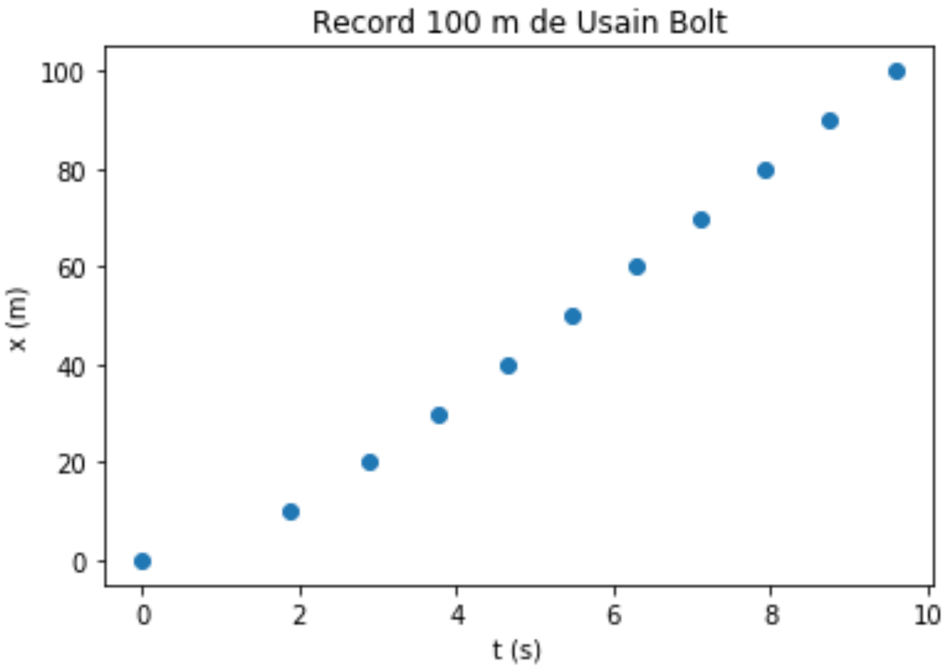


Pode-se analisar como foi o seu movimento.
A lei do movimento $x = x(t)$

A **velocidade** de Usain Bolt evolui no tempo.

Começou com velocidade nula, mas rapidamente aumentou a sua velocidade.

Em cada instante está com uma velocidade diferente.



Que mais se pode afirmar sobre a velocidade de Usain Bolt?

Velocidade média: $\overline{v_x} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} = \frac{100\ \text{m}}{9.58\ \text{s}} = \boxed{10.4\ \text{m/s}}$ = 37.6 Km/h

Qual a velocidade média nos primeiros e nos segundos 50 m?

9.14 m/s e 12.2 m/s, resp.

E em cada percurso de 10 m? $\overline{v_x} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}$

x_i	x_{i+1}	$\overline{v_x}$
0.0	10.0	5.3
10.0	20.0	10.1
20.0	30.0	11.1
30.0	40.0	11.6
40.0	50.0	12.0
50.0	60.0	12.2
60.0	70.0	12.3
70.0	80.0	12.2
80.0	90.0	12.0
90.0	100.0	12.0

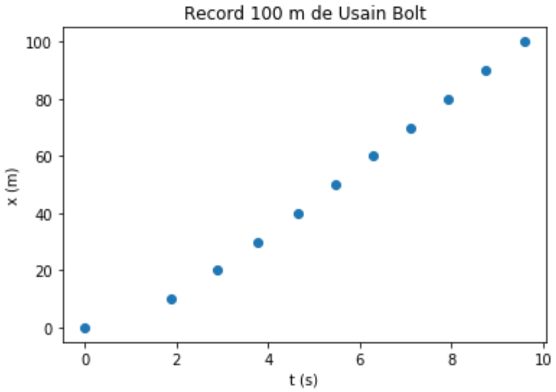
Unidades SI

Cap. 2 Movimento a 1 dimensão

Velocidade média dos 100m: $\overline{v_x} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} = \frac{100\text{ m}}{9.58\text{ s}} =$ 10.4 m/s = 37.6 Km/h

Velocidade média nos primeiros e nos segundos 50 m? 9.14 m/s e 12.2 m/s, resp.

Velocidade média em cada percurso de 10 m? $\overline{v_x} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i}$ → Porque no inicio ele acelerou



x_i	x_{i+1}	$\overline{v_x}$
0.0	10.0	5.3
10.0	20.0	10.1
20.0	30.0	11.1
30.0	40.0	11.6
40.0	50.0	12.0
50.0	60.0	12.2
60.0	70.0	12.3
70.0	80.0	12.2
80.0	90.0	12.0
90.0	100.0	12.0

Unidades SI

Para obtermos a velocidade instantânea a partir da velocidade média, diminuímos o percurso em comprimentos muito pequenos (separados por um intervalo de tempo muito pequeno δt)

$$\overline{v_x} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} = \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{(t+\delta t) - t}$$

E no limite quando $\delta t \to 0$ $\quad \lim_{\delta t \to 0} \overline{v_x} = v_x(t)$

$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{(t+\delta t) - t} = v_x(t) \quad \text{ou} \quad \frac{dx(t)}{dt} = v_x(t)$$

t_i	x_i	x_{i+1}	$\overline{v_x}$
0.0	0.0	10.0	5.3
1.89	10.0	20.0	10.1
2.88	20.0	30.0	11.1
3.78	30.0	40.0	11.6
4.64	40.0	50.0	12.0
5.47	50.0	60.0	12.2
6.29	60.0	70.0	12.3
7.10	70.0	80.0	12.2
7.92	80.0	90.0	12.0
8.75	90.0	100.0	12.0
9.58	100.0		

Aceleração também varia com os percursos:
Nos instantes iniciais a velocidade altera-se muito (de zero até ~11 m/s).
Nos instantes médios até ao final a velocidade é ~12 m/s.

Aceleração média nos primeiros 50m

$$\overline{a_x} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{tempo}} = \frac{12.0 - 0.0}{5.47 - 0.0} = 2.19\ m/s^2$$

Nos segundos 50m: $\overline{a_x} = 0.0$

Para calcularmos a aceleração instantânea a partir da aceleração média, diminuímos o percurso em comprimentos muito pequenos (separados por um intervalo de tempo muito pequeno δt)

$$\overline{a_x} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{tempo}} = \frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{(t+\delta t) - t}$$

E no limite quando $\delta t \to 0$ $\lim_{\delta t \to 0} \overline{a_x} = a_x(t)$ $\lim_{\delta t \to 0} \frac{v_x(t+\delta t) - v_x(t)}{(t+\delta t) - t} = a_x(t)$ ou $\frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t)$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Se souber como a posição varia no tempo, $x(t)$, saberei a velocidade e a aceleração.

Exemplo: Se $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

$$\Rightarrow v_x\,(t) = gt \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = gt \\ a_x(t) = g \end{cases}$$

E se souber a aceleração instantânea?

Relação entre as quantidade de interesse do movimento

Posição (instantânea): $x(t)$

Velocidade instantânea: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$

Aceleração instantânea: $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

E se souber a aceleração instantânea $a_x(t)$?

Cálculo integral:

$$a_x(t)$$

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\, dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt$$

Já aprenderam? Em Cálculo I? Já!

E se souber a aceleração instantânea?

Exemplo: $a_x(t) = 0$ (e conhece-se $v_x(t_0)$ e $x(t_0)$) e usando por cálculo integral:

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} 0 \, dt = 0$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t) \, dt = \int_{t_0}^{t} v_x(t_0) \, dt = v_x(t_0) \, t|_{t_0}^{t} = v_x(t_0)(t - t_0)$$

Se $t_0 = 0$

$$v_x(t) - v_x(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_x(t) = v_x(0)$$

$$x(t) - x(0) = v_x(0) \, t \Leftrightarrow \quad x(t) = x(0) + v_x(0) \, t$$ Movimento uniforme

E se souber a aceleração instantânea?

Exemplo: $a_x(t) = g$ aceleração constante (e conhece-se $v_x(t_0)$ e $x(t_0)$) e usando por cálculo integral:

$$v_x(t) - v_x(t_0) = \int_{t_0}^{t} g\, dt = g\, t|_{t_0}^{t} = g\,(t - t_0)$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v_x(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} [v_x(t_0) + g(t - t_0)]\, dt = v_x(t_0)\, t|_{t_0}^{t} + \frac{1}{2} g t^2|_{t_0}^{t} - g t_0 t|_{t_0}^{t}$$

$$= v_x(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} g(t^2 - t_0^2) - g t_0 (t - t_0)$$

Se $t_0 = 0$

$$v_x(t) - v_x(0) = g\, t \qquad \Longrightarrow v_x(t) = v_x(0) + g\, t$$

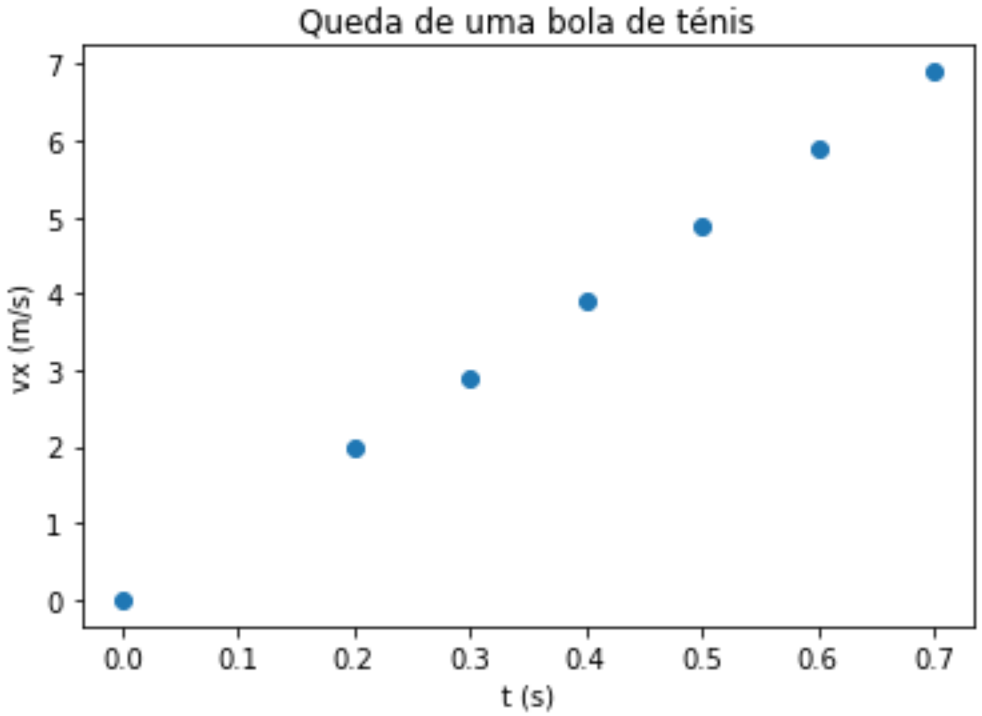
$$x(t) - x(0) = v_x(0)\, t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad \Longrightarrow \; x(t) = x(0) + v_x(0)\, t + \frac{1}{2} g t^2$$

Movimento uniformemente acelerado

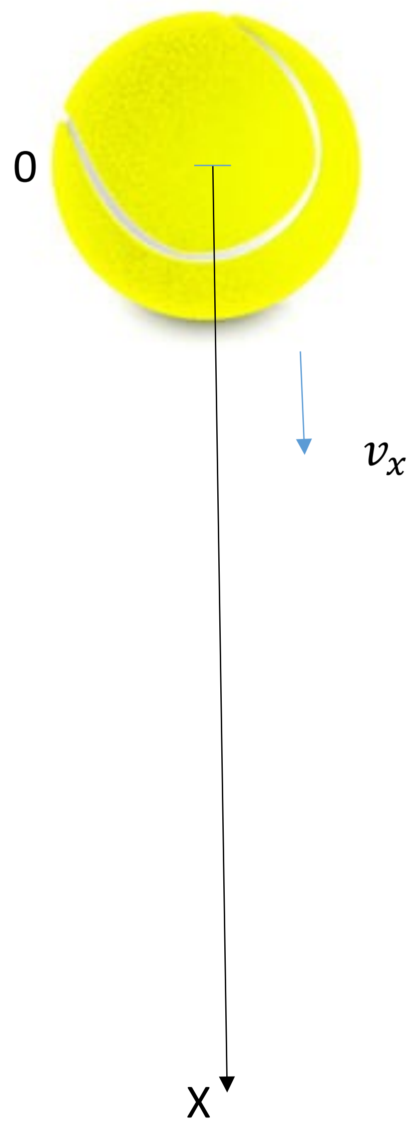
Queda de uma bola de ténis, quando é largada, $v_x(t_0) = 0.$

Efeito da resistência do ar é muito pequeno e estamos a considerar velocidade pequenas.

Os valores registados de uma experiência estão no gráfico:



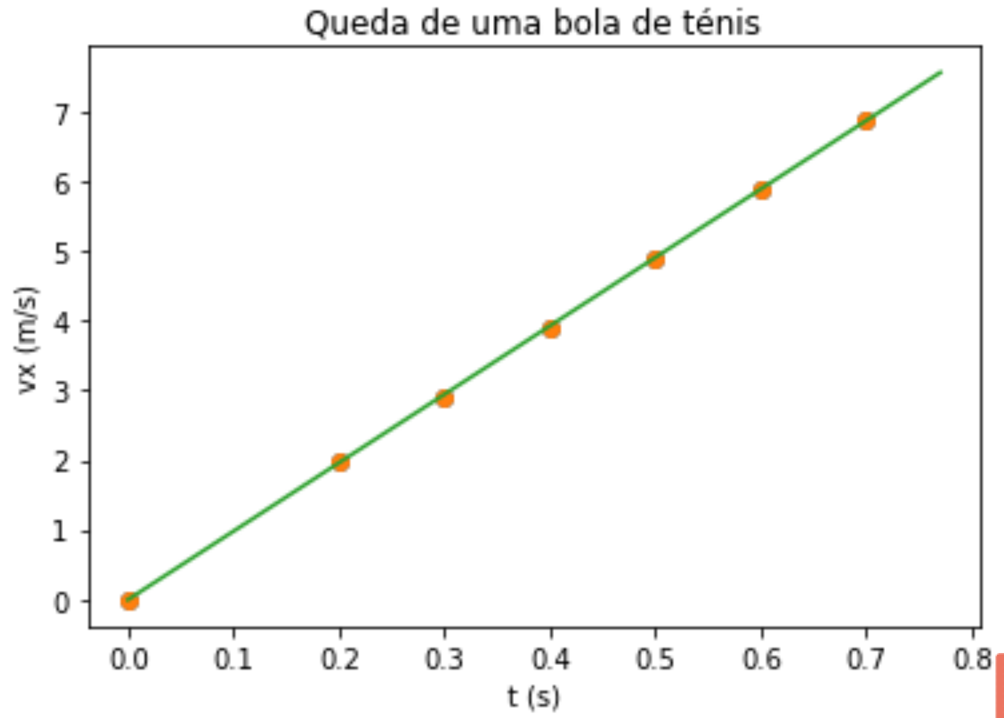
Também se faz $t_0 = 0$



A dependência da velocidade no tempo parece linear.

Queda de uma bola de ténis quando é largada, $v_x(t_0) = 0.$

Efeito da resistência do ar é muito pequeno e estamos a considerar velocidade pequenas.



Regressão linear:

$m = 9.84 \pm 0.06$ m/s²

$b = -0.01 \pm 0.03$ m/s $\boldsymbol{v_x(t) = b + m\,t}$

$r^2 = 0.9999$

Se compararmos com as leis do movimento uniformemente acelerado

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(0) + g\,t \\ x(t) = x(0) + v_x(0)\,t + \frac{1}{2} g t^{\,2} \end{cases}$$

tem-se

$g = m = 9.84 \pm 0.06$ m/s²

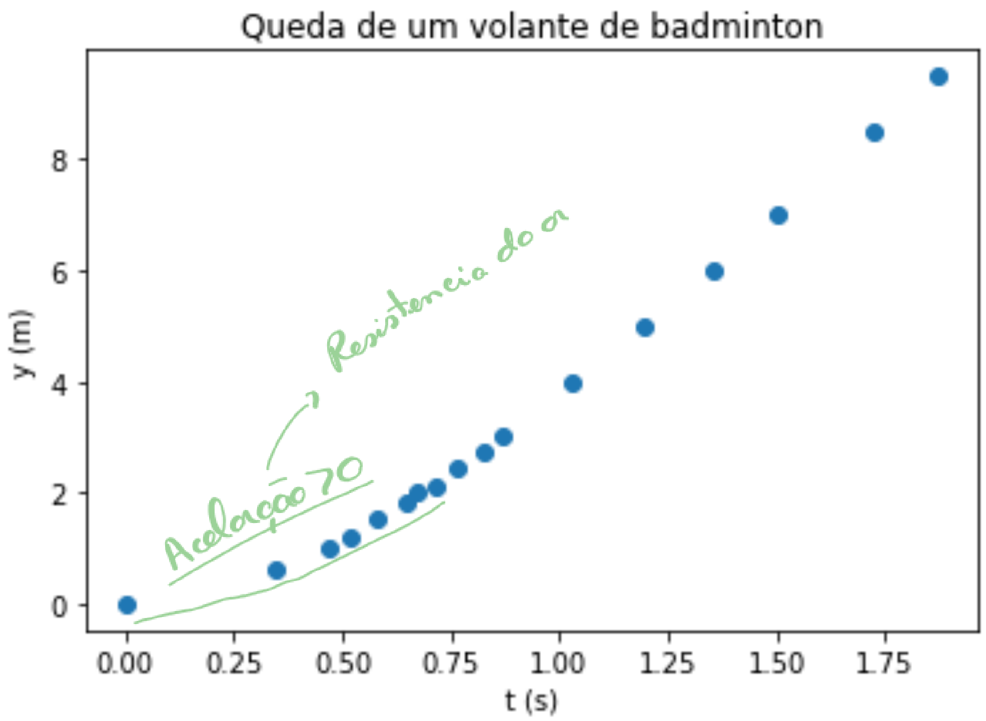
$v_x(0) = b = -0.01 \pm 0.03$ m/s

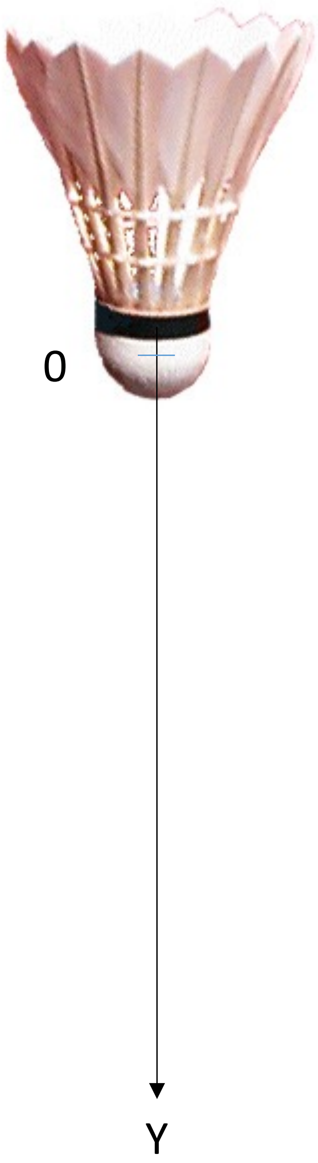
O que é correto!

BOM MODELO !

Caso oposto:

Queda de um volante de badmington, em que a ***resistência do ar é muito elevada***
e o movimento pode apresentar velocidade elevadas. Caso em que o volante é largado.



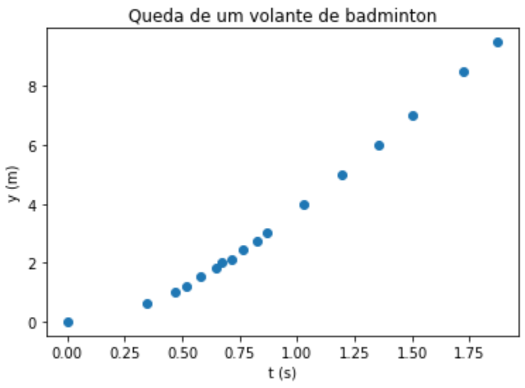


Por análise visual do gráfico da posição em função do tempo:

Para instantes t> 1.25 s o movimento parece ser uniforme.

Para instantes 0<t<1.00 s o movimento não parece uniforme.

Estamos na presença de um movimento com pelo menos 2 tipos de movimento.



De algum modo, temos de modelar a resistência do ar

- Para velocidades pequenas, a variação da velocidade com o tempo deve ser muito pequena.
- Para velocidades maiores, deve depender da velocidade e retardar o movimento.

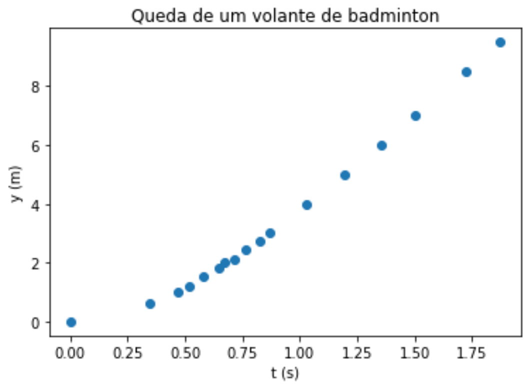
Ou seja deve originar uma aceleração negativa.

Vamos **supor que é proporcional ao quadrado da velocidade**

Nesta forma $a_y^{(res)} = -D\, v_y|v_y|$ é sempre oposta ao sentido do movimento, e

$$a_y(t) = g - D\, v_y\underbrace{|v_y|}_{\text{Positiva}}$$

em que o parâmetro D é positivo e a determinar numa experiência.



$a_y(t) = g - D\ v_y|v_y|$ em que o parâmetro D é positivo e a determinar numa experiência.

Otermo da aceleração da resistência do ar se opõe ao movimento, e, **a partir de algum instante esse termo anula a parte gravítica**.

Se a aceleração for nula, temos movimento uniforme e a velocidade é constante $|v_y| = v_T$ e chamada de velocidade terminal (também chamada de velocidade limite)

$$0 = g - Dv_T|v_T|$$

$$\Longrightarrow \quad D = \frac{g}{v_T|v_T|} = \frac{g}{v_T^2}$$

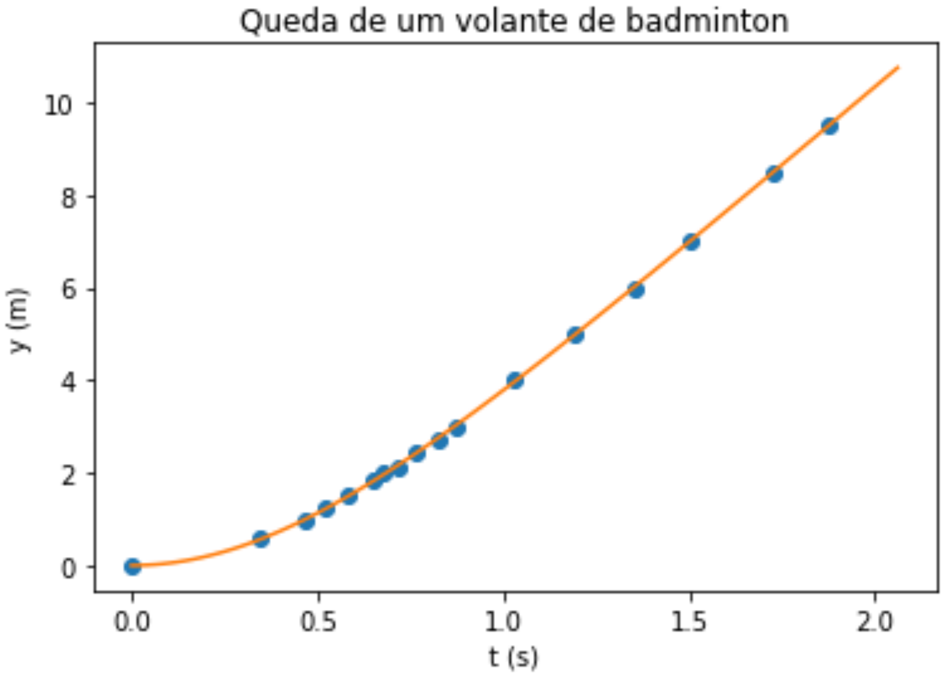
Nestes casos a velocidade limite é medida.
O volante de badmington (usada na experiência) possui $v_T = 6{,}80$ m/s

$v_y(0) = 0$

$a_y(t) = g - \frac{g}{v_T^2} v_y |v_y|$

Por integração analítica: (Python também tem um pacote para cálculo simbólico).

$$\Rightarrow y(t) = \frac{v_T^2}{g} \ln\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_T}\right)\right]$$



Acordo muito bom entre a lei do movimento com a aceleração $a_y(t) = g - D v_y |v_y|$

BOM MODELO !

(se fizer a aceleração devida à resistência do ar **proporcional à velocidade não se obtêm acordo)**

Trabalho: Sobreponha no mesmo gráfico a posição do volante pelos medições efetuadas e pela expressão teórica $y(t) = \frac{v_T^2}{g} \ln\left[\cosh\left(\frac{gt}{v_T}\right)\right]$, em que $v_T = 6.80$ m/s.

```
# Tempos de queda livre de um volante de badmington no ar.
# altura inicial 9.50 m
# Peastrel et al, American Journal of Physics, 48, 511-513 (1980)
# y(m)   t (s)
0        0
0.61     0.347
1.00     0.470
1.22     0.519
1.52     0.582
1.83     0.650
2.00     0.674
2.13     0.717
2.44     0.766
2.74     0.823
3.00     0.870
4.00     1.031
5.00     1.193
6.00     1.354
7.00     1.501
8.50     1.726
9.50     1.873
```

$$v_T = \frac{9.50-8.50}{1.873-1.726} = 6.8\,m/s$$

estes dados estão no e-learning, ficheiro: `data_cap2_queda_volante.txt`