

Modelação de Sistemas Físicos

4ª Aula Teórica

Sumário:

Cap. 3 Forças e vetores

Bibliografia:

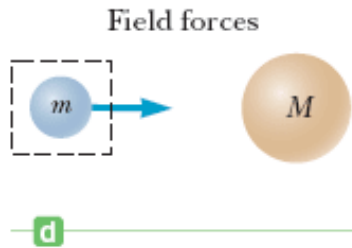
Cap. 3: Serway, cap. 3 e 5; Sørenssen, cap. 5 e 6; Villate, cap. 4



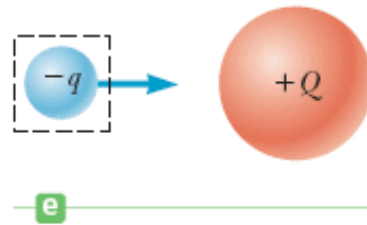
$$\text{Força} = \text{massa} \times \text{aceleração}$$

Forças alteram o movimento

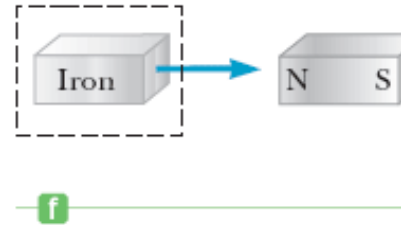
Força gravitacional



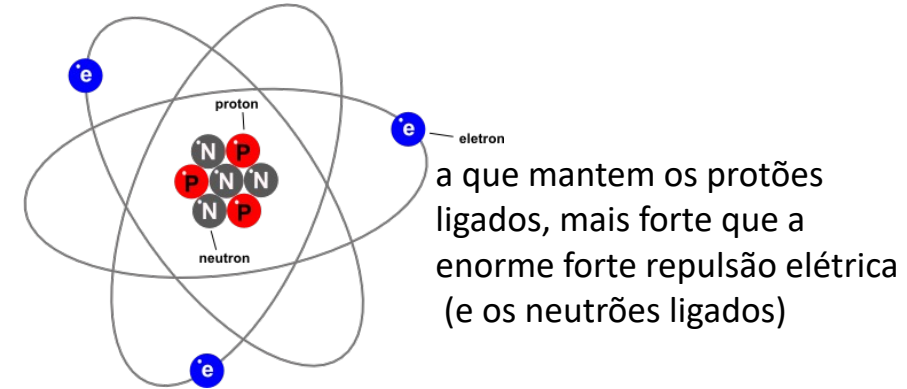
Força elétrica



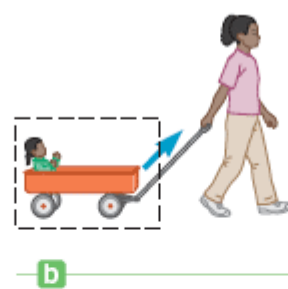
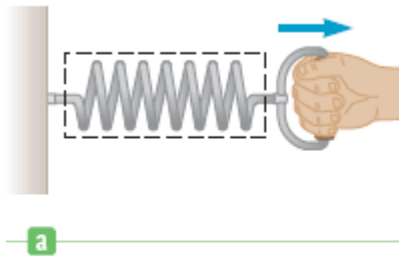
Força magnética



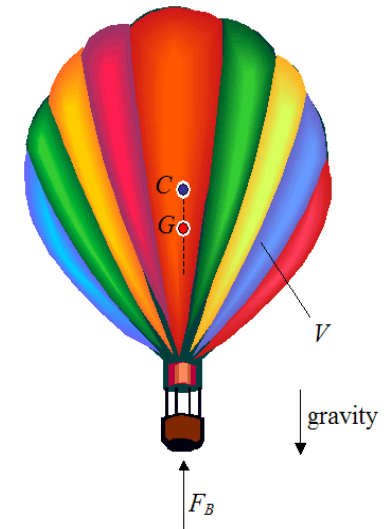
Força nuclear

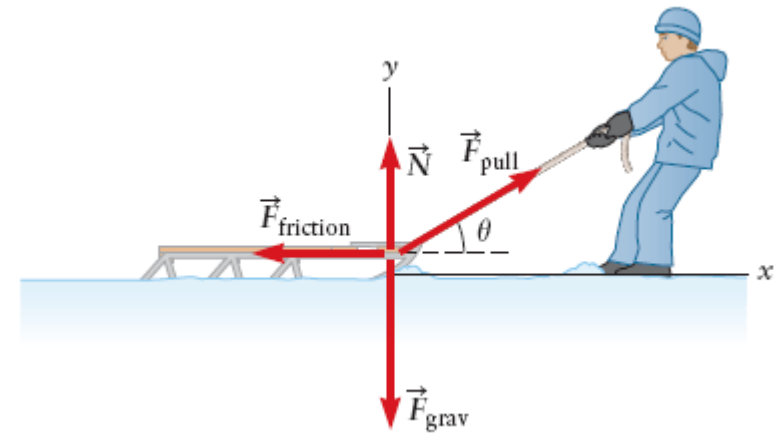
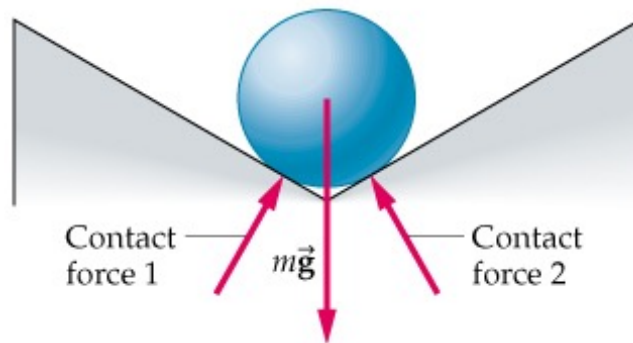


Contact forces

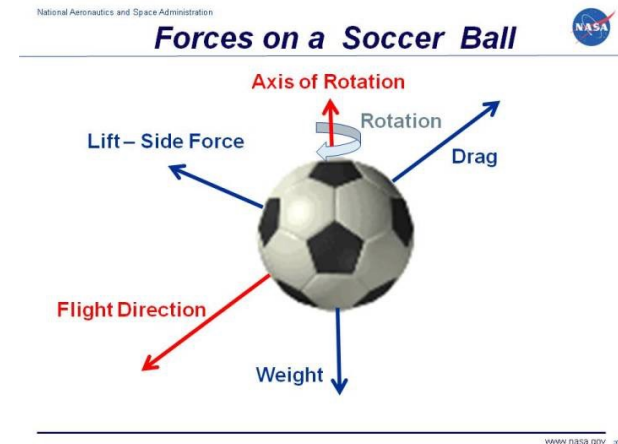
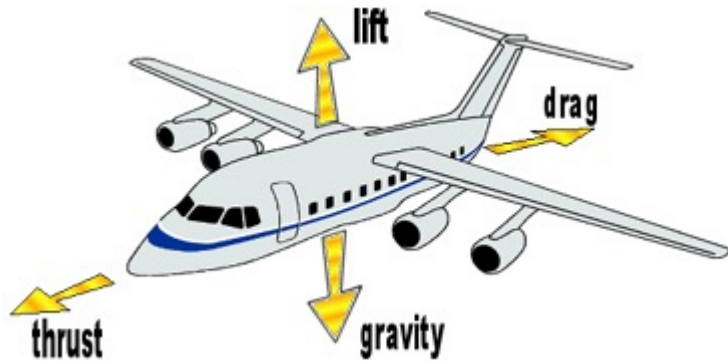


Impulsão





FORÇA é um VETOR
indica-se \vec{F}
a sua intensidade por $|\vec{F}|$



Os princípios da Mecânica:

1ª lei de Newton: Quando $\vec{F} = 0$, $\vec{a} = 0$
o corpo ou está parado ou move-se a uma velocidade constante.

2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m \vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.

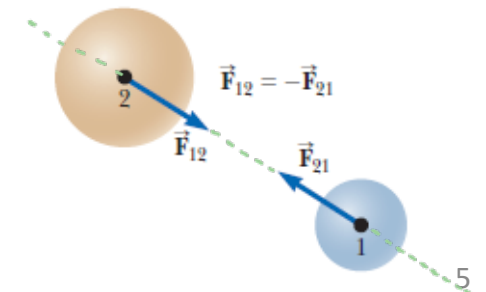
A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo.

É a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

3ª lei de Newton: Quando 2 corpos interatuam,
 \vec{F}_{12} a força no corpo 1 devido à interação com o corpo 2, e
 \vec{F}_{21} a força no corpo 2 devido à interação com corpo 1,

ângulo de linha entre eles

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Isaac Newton 1642 - 1726

2ª Lei de Newton: $\vec{F} = m \vec{a}$ $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

A variação da velocidade de um corpo (aceleração) é proporcional à resultante das forças (soma das forças) aplicadas ao corpo.

A constante de proporcionalidade é a massa m do corpo.

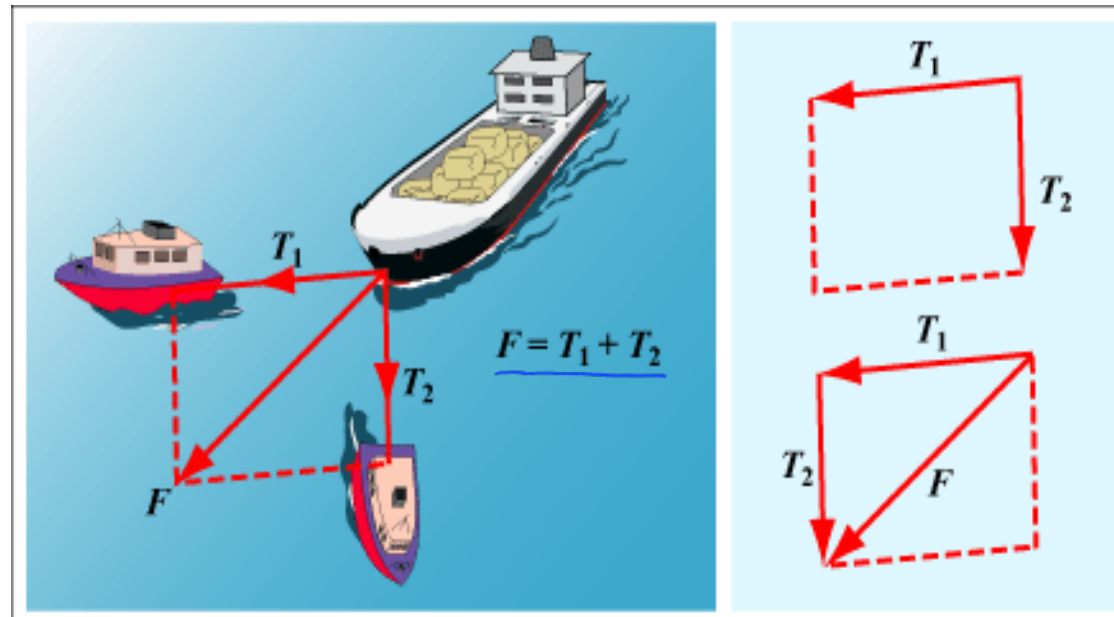
A massa é a propriedade de cada corpo que especifica a resistência à variação da velocidade.

Se as forças aplicadas ao um objeto forem conhecidas,
pode-se determinar o movimento do objeto – a sua posição e velocidade.

Forças determinam-se por experiências

Ou por modelos teóricos, que aplicados aos dados experimentais, concordam com eles.

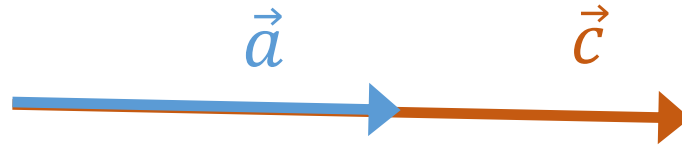
Cap. 3 Forças e vetores



Vetor \vec{a}



$|\vec{a}|$ = módulo ou norma = intensidade, magnitude ou comprimento de \vec{a}

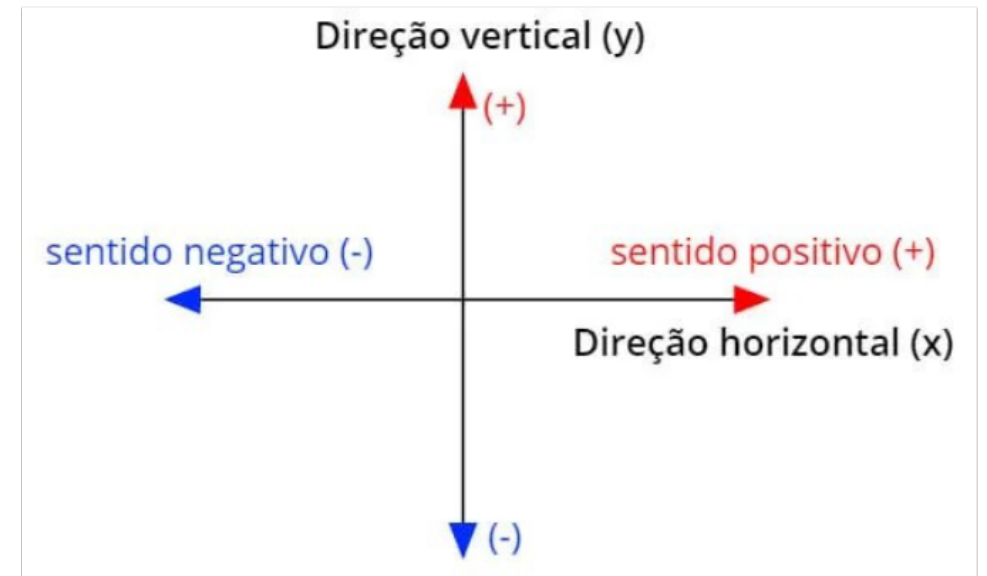


$\vec{c} = \lambda \vec{a}$ outro vetor, mesma direção, magnitude diferente

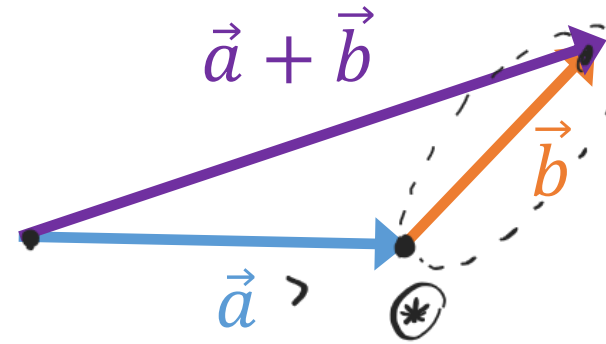
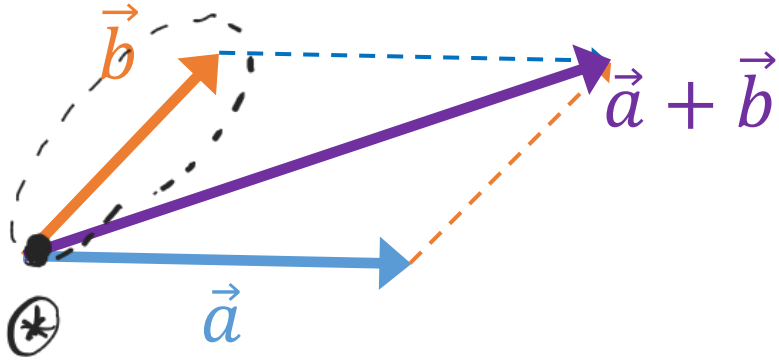
$$|\vec{c}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

Vetor unitário: \hat{i} tem $|\hat{i}| = 1$
usado para indicar direção e sentido

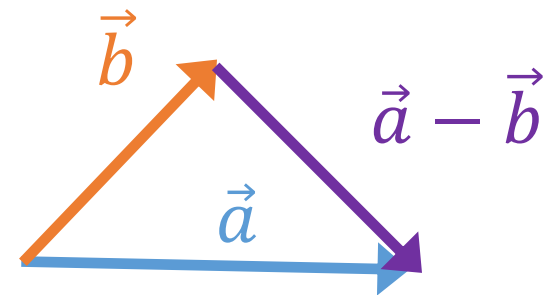
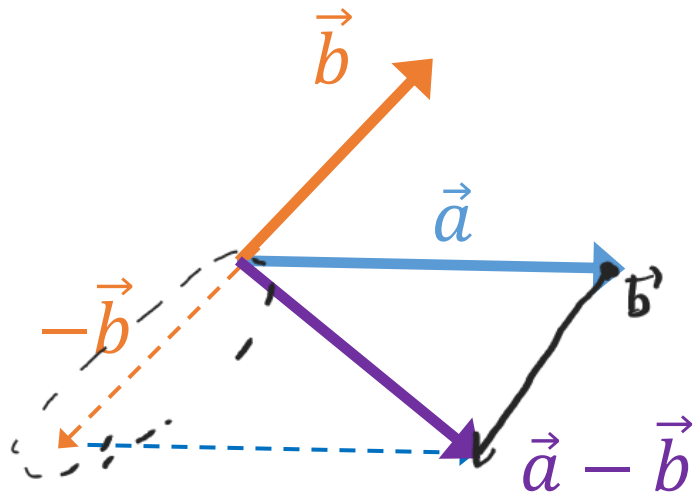
$$\text{ex. } \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Leftrightarrow \vec{a} = |\vec{a}| \hat{a}$$



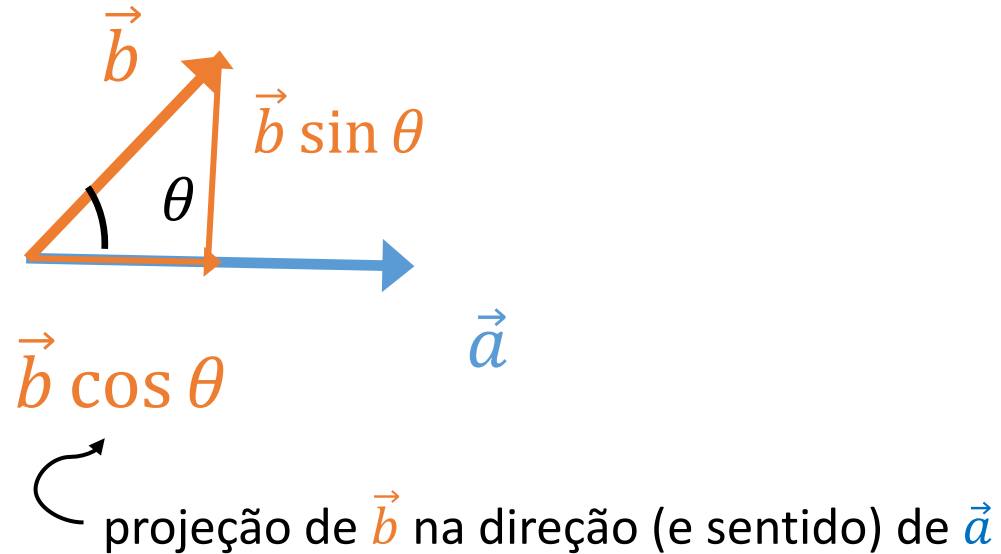
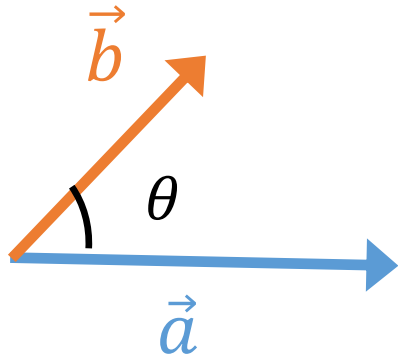
Soma de 2 vetores



Diferença de 2 vetores



Produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

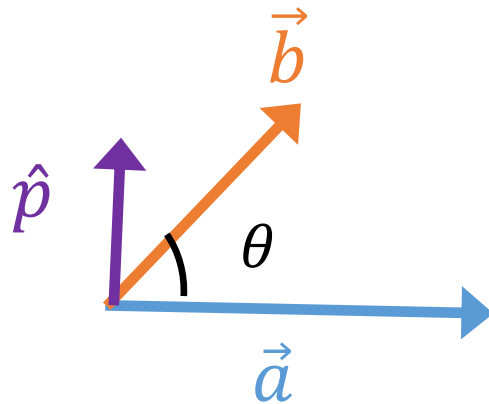


também chamado produto interno

- Maior quando os vetores são mais alinhados
- Zero quando são perpendiculares

Produto vetorial

é um vetor perpendicular a ambos os vetores



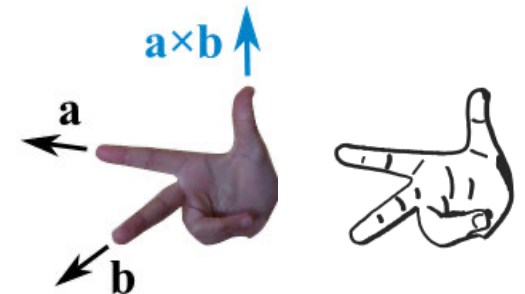
também chamado produto externo

- Máximo quando os vetores são perpendiculares
- Zero quando são paralelos

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{p}$$

vetor unitário perpendicular ao plano de \vec{a} e \vec{b}

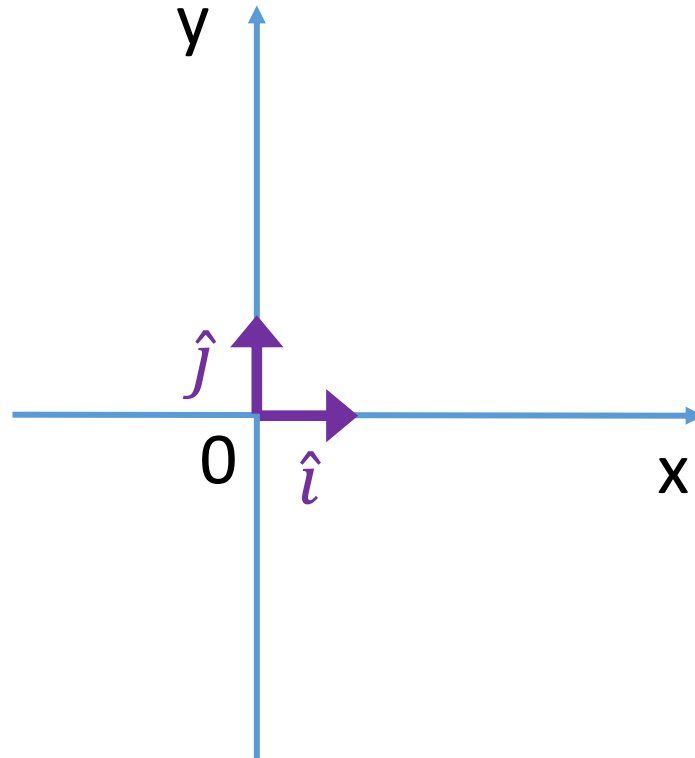
Sentido de \hat{p}



$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

Vetores em referenciais cartesianos

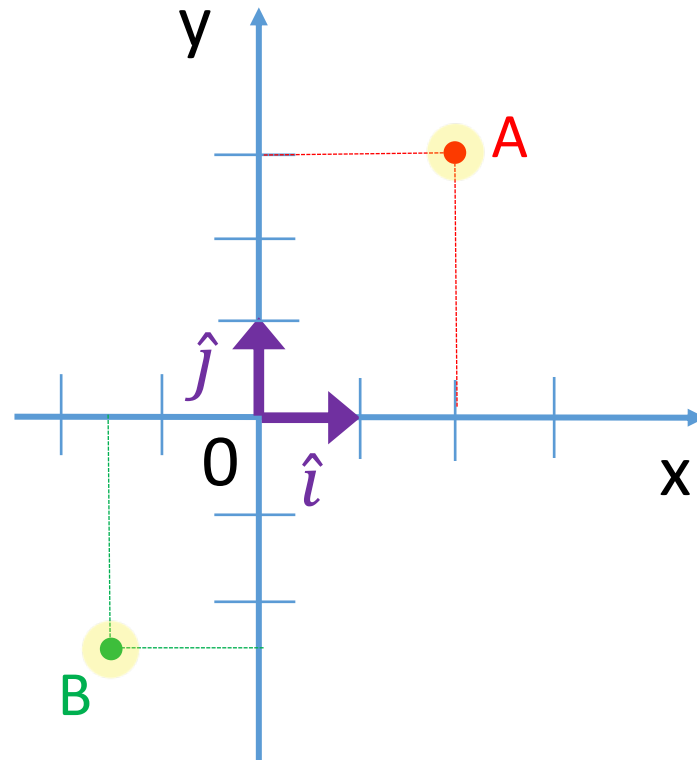
2 dimensões



$$\begin{aligned} |\hat{i}| &= 1 \\ |\hat{j}| &= 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{j} \cdot \hat{i} = 0 \end{aligned}$$

Vetores em referenciais cartesianos

2 dimensões



Posições dos pontos

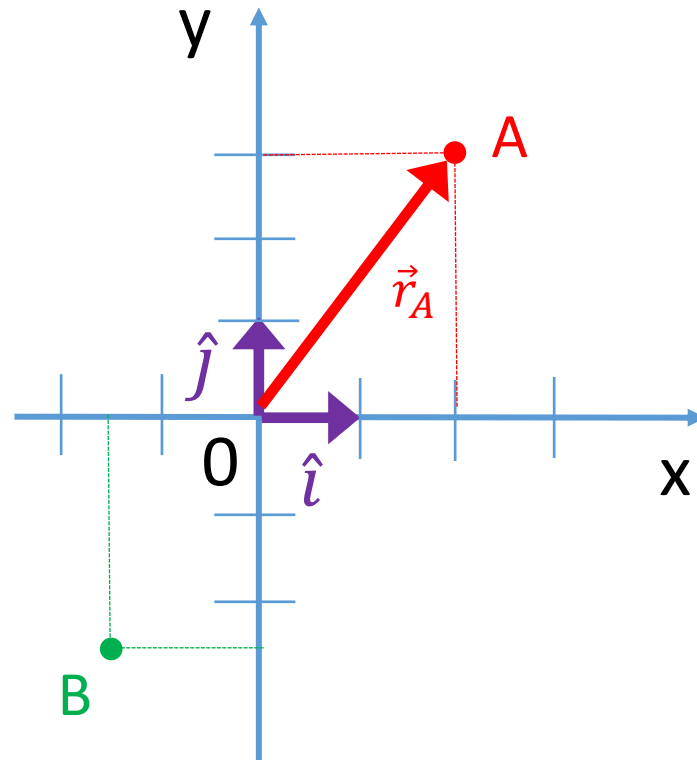
Origem (0,0)

A em (2,3)

B em (-1.5,-2.5)

Vetores em referenciais cartesianos

2 dimensões



Posição A também indicada por um vetor \vec{r}_A , do origem ao ponto A.

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{Ax} + \vec{r}_{Ay}$$

$\vec{r}_{Ax} = A_x \hat{i}$ componente paralelo ao eixo X

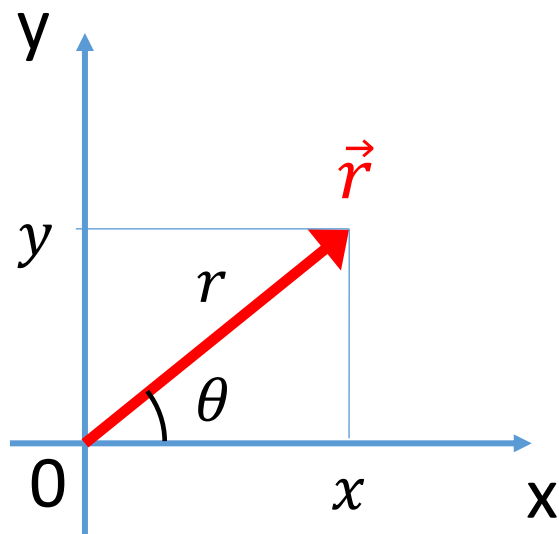
$\vec{r}_{Ay} = A_y \hat{j}$ componente paralelo ao eixo Y

$$A_x = \vec{r}_A \cdot \hat{i}$$

$$A_y = \vec{r}_A \cdot \hat{j}$$

$$\vec{r}_A = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

Espaço a 2D – coordenadas polares



Vetor \vec{r} definido por dois valores

(x, y) coordenadas cartesianas

$$x = \vec{r} \cdot \hat{i} = |\vec{r}| \cos \theta$$

$$y = \vec{r} \cdot \hat{j} = |\vec{r}| \sin \theta$$

ou

(r, θ) coordenadas polares

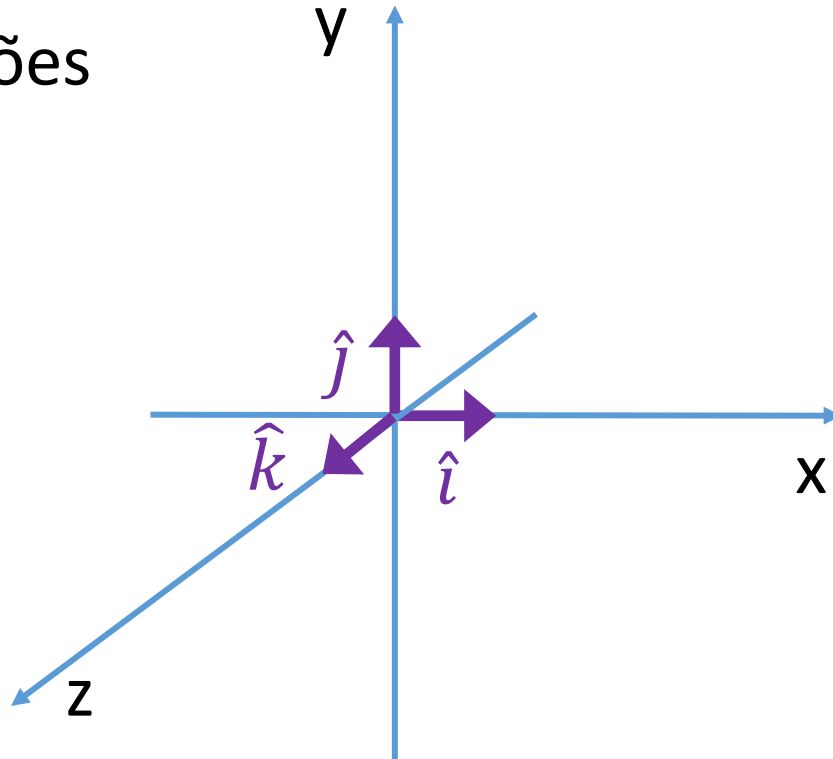
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} x / \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{\text{"hipotenusa"}}$$

$$= \sin^{-1} y / \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vetores em referenciais cartesianos

3 dimensões



$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

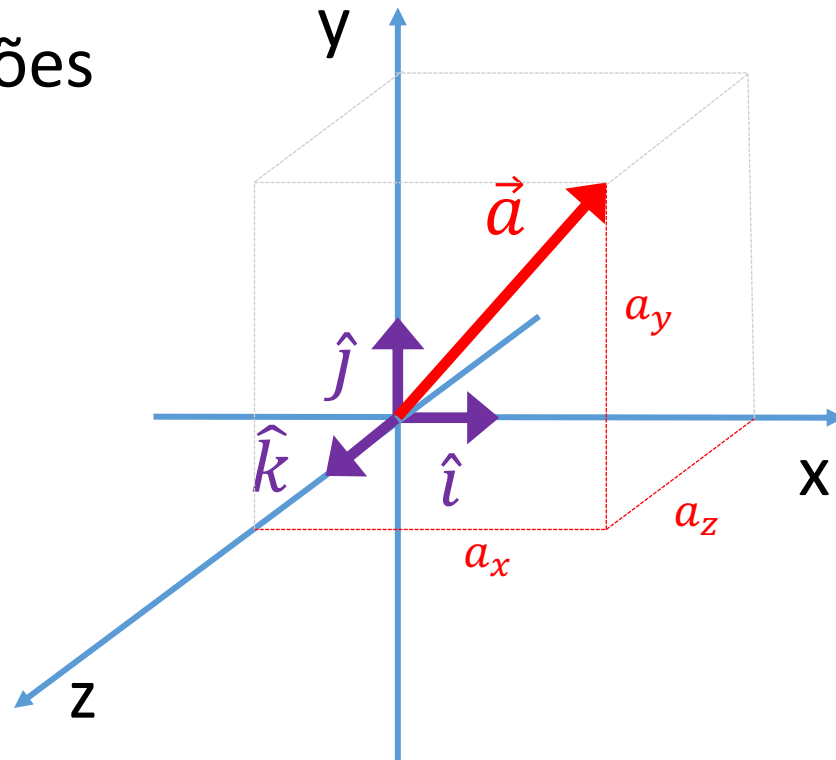
$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

Vetores em referenciais cartesianos

3 dimensões



$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}\end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

Produto escalar

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$= a_x b_x \underbrace{\hat{i} \cdot \hat{i}}_1 + a_y b_y \underbrace{\hat{j} \cdot \hat{j}}_1 + a_z b_z \underbrace{\hat{k} \cdot \hat{k}}_1$$

desde que

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad \text{escalar}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1 \text{ etc.}$$

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

Produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

calculor o determinante

$$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i} \times \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{j} \times \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{k} \times \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$
$$= \hat{i} (a_y b_z - a_z b_y) - \hat{j} (b_z a_x - a_z b_x) + \hat{k} (a_x b_y - a_y b_x)$$

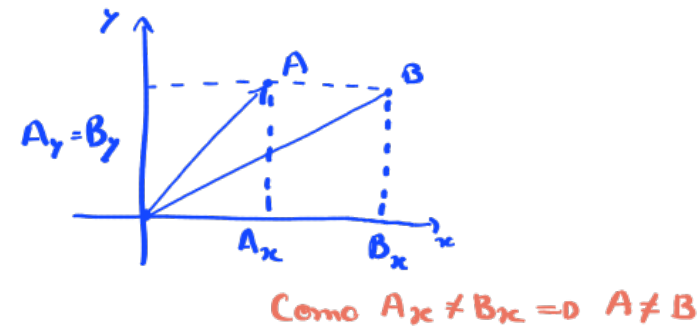
$$= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}$$

Ex.

$$\hat{i} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (0 - 0) \hat{i} + (0 - 0) \hat{j} + (1 - 0) \hat{k}$$
$$= \hat{k}$$

Igualdade entre vetores

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}$$



$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$$

$$\vec{c} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j} + c_z \hat{k}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \\ c_z = a_z - b_z \end{cases}$$

Vetores em referenciais cartesianos: 3 dimensões

Problemas

A. Considere

$$\vec{a}=(1,2,0) \text{ e } \vec{b}=(3,-2,2).$$

Calcule

a) A sua soma $\vec{a} + \vec{b} = (4, 0, 2)$

b) A sua diferença $\vec{a} - \vec{b} = (-2, 4, -2)$

c) O seu produto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 3 + 2 \times (-2) + 0 \times 2 = -1$

d) O seu produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-0) - \hat{j}(2-0) + \hat{k}(-2-6) \\ = (4, -2, -8)$$

B. Considere

$$\vec{a}=(2,1,0) \text{ e } \vec{b}=(1,2,0). \quad (\text{Vetores a duas dimensões, pois ambos tem } z=0) \rightarrow$$

Calcule

a) O módulo de cada vetor e o ângulo que formam. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + 1 \times 2 = 4$

b) O seu produto vetorial

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 3)$$
$$4 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta, \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{5} \\ \hookrightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{4}{5} \right)$$

