DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Modelação de Sistemas Físicos
Ano Académico 2021/2022 - 2º Semestre

3º TESTE
Parte Cálculo Computacional-Numérico

Data: 6 julho 2022
Hora: 15H15

Duração: 1 hora 15 minutos
Disciplina: 41769
Salas: 23.3.14, 23.2.12, 23.2.13, 23.2.14

Cotação: 1) 1 + 1.5 + 2 + 1.5 = 6 valores
2) 2 + 1 + 1 = 4 valores

NOTE:
a) Responda às perguntas **na vossa folha de prova**, justificando-as,
b) Na vossa folha de prova indique os métodos, os algoritmos, passos, … usados.
c) Indique claramente o sistema de eixos usado.
d) **Esboce os gráficos**, indicando univocamente os pontos importantes. Se gravar as figuras, salve-as em formato png.
e) **Os ficheiros** devem ser copiados para a caneta de memória do docente presente na sala com **o nome e número do aluno** (para poderem ser consultados quando o docente tiver dúvidas durante a correção).
f) **Os ficheiros poderão ser um por alínea e com a impressão dos resultados**.
g) Tem de usar o seu computador portátil. Pode (e deve) usar os seus programas, assim como outros programas que tenha obtido.
h**) É um teste de consulta, mas não pode aceder à internet, incluindo para consultar documentos do python**.

As respostas não podem ser escritas a lápis

Justifique todas as respostas

1. Um corpo de massa 0.5 kg move-se num oscilador quártico. Se a posição de equilíbrio for a origem do eixo $x_{eq} = 0$ m, o oscilador tem a energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ x^2 + \alpha\ x^3 - \ \beta\, x^4$$

exerce no corpo a força

$$F_x = -k\,x - \ 3\,\alpha\ x^2 + 4\,\beta\,x^3$$

Considere $k = 2$ N/m , $\alpha = -\,0.1$ N/m^2 e $\beta = 0.02$ N/m^3.

a) Faça o diagrama de energia desta energia potencial (energia potencial em função da posição). Qual o movimento quando a energia total for menor que 4 J?

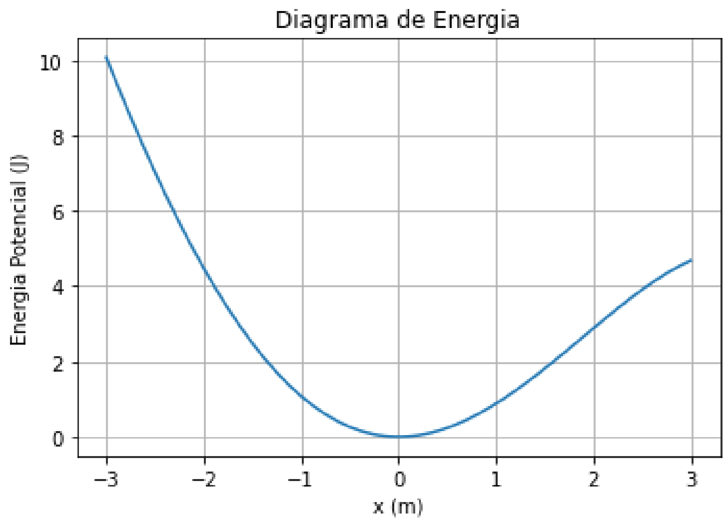
b) Calcule a lei do movimento, quando a posição inicial for 1.5 m e a velocidade inicial 0.5 m/s? Quanto é a energia mecânica?

c) Entre que limites se efetua o movimento e a frequência e o período do movimento? Apresente os resultados com a precisão de 4 algarismos.

d) Faça a análise de Fourier da solução encontrada. Apresente o resultado como $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, sendo a_n e b_n os coeficientes de Fourier.

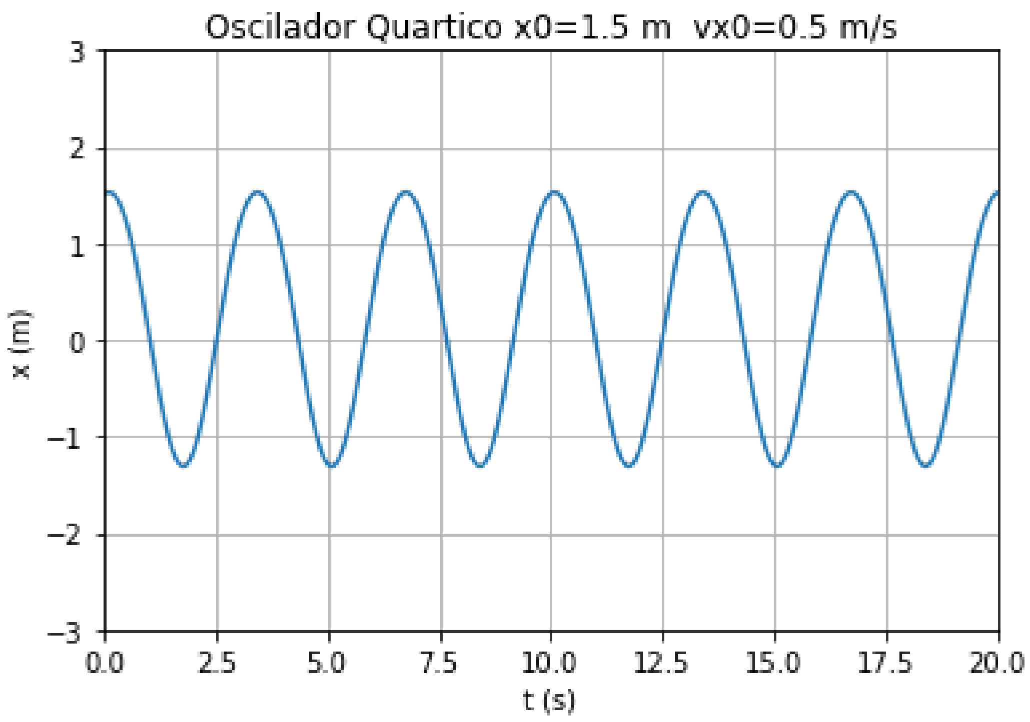
Resolução resumida

a)



$E_p \leq 4$ J. O corpo oscila entre as posições em que a $E_p = 4$ J. Como a energia potencial não é simétrica à volta da posição de equilíbrio, o movimento oscilatório tem uma posição média (por período) > 0.

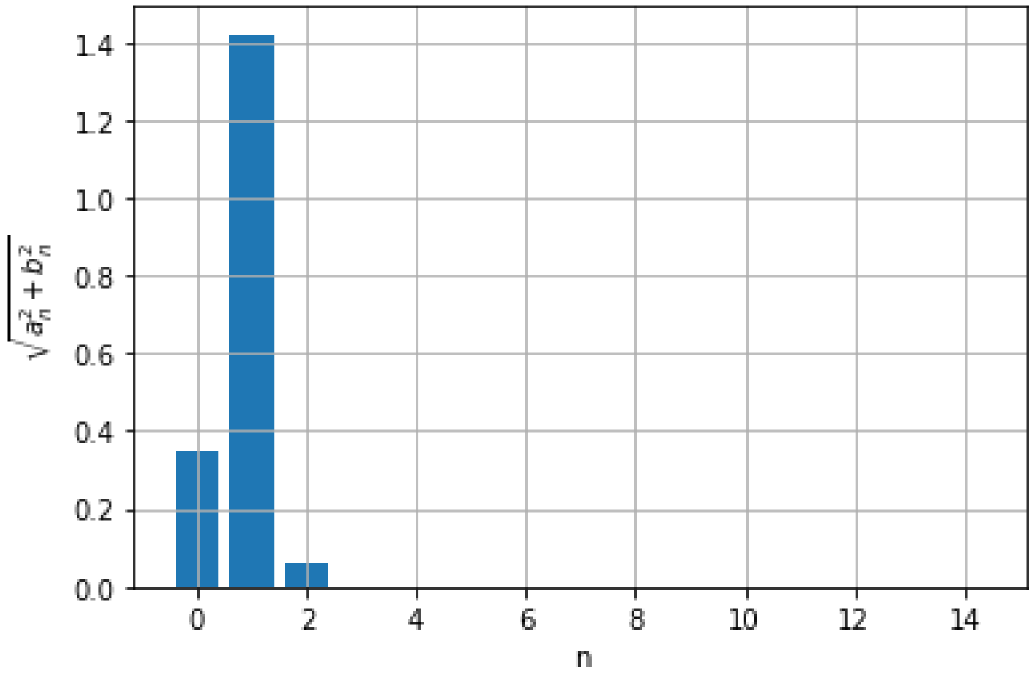
b)



c). Limites superior e inferior do movimento calculados usando a interpolação de Lωagrange

Método	δt (s)	Limite superior (m)	Limite inferior (m)	T (s)	ω (rad/s)
EC	0.1	1.5105563	-1.2945257	3.1999999	1.96349540
EC	0.01	1.52786	-1.30550	3.3099999	1.898243
EC	0.001	1.530044	-1.30702	3.32100000	1.89195582
EC	0.0001	1.53026	-1.30718	3.32209	1.89132937
EC	0.00001	1.5302891	-1.30720013	3.322199999	1.89127244
Converge		**1.530**	**-1.307**	**3.322**	**1.891**

d)



Coeficientes de Fourier, por integração numérica usando a aproximação trapezoidal.

n	$\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
0	0.347401
1	1.420658
2	0.062439
3	0.001897
4 e superior	0.000000

2. Um corpo de massa 1.0 kg move-se num oscilador forçado, em que a posição de equilíbrio é a origem do eixo OX, $x_{eq} = 0$. O corpo é largado na posição -3 m e é aplicada a força externa $F_x = 7.5\cos(1.4\,t)$ N, em que o tempo está expresso em segundos.

a) Considere que o oscilador é harmónico de energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ x^2$$

e força aplicada é

$$F_x = -k\ x$$

em que $k = 1.0$ N/m. O meio exerce uma força de resistência $F_x = -b\ v_x$, em que $b = 0.05$ kg/s. Calcule a amplitude da oscilação no regime estacionário.

b) Considere que o oscilador é quártico, de energia potencial

$$E_p = \frac{1}{2}k\ x^2\ (1 +\ \beta\, x^2)$$

e força aplicada é

$$F_x = -k\ x\ \ (1 +\ 2\,\beta\, x^2)$$

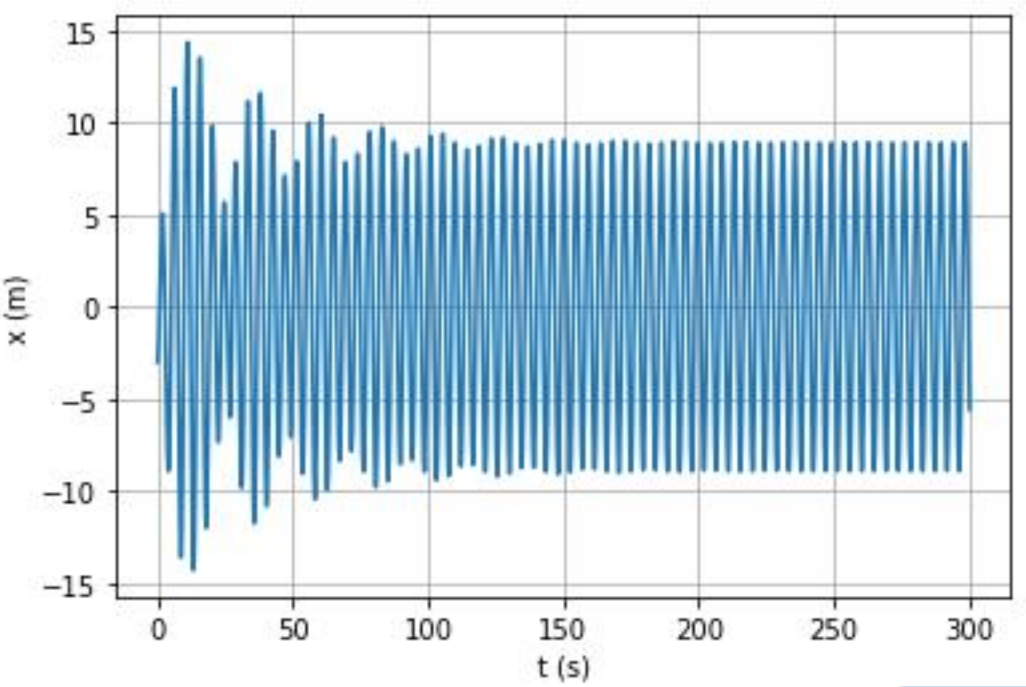
Considere $k = 1.0$ N/m, $b = 0.05\ \mathrm{kg/s}$ e $\beta = 0.001$ N/m^2. O meio exerce uma força de resistência $F_x = -b\ v_x$, em que $b = 0.05$ kg/s. Calcule a amplitude da oscilação no regime estacionário.

c) Nas condições da alínea b), no instante 400 s, a frequência da força externa é mudada de 1.4 rad/s para 1.37 rad/s. Calcule a nova amplitude da oscilação no regime estacionário.

Resolução resumida

a) Método de Euler-Cromer (EC) ou o de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4)

```
ax=-k/m*x[i]-b/m*vx[i]+f0/m*np.cos(omef*tempo[i])
```



Regime estacionário

Amplitude calculada quando t>790 s

Método	δt (s)	Amplitude (m) regime estacionário (interpolação Lagrange)
EC	0.01	7.7960
EC	0.001	7.7922
EC	0.0001	7.7918
RK4	0.001	7.7918

Amplitude regime estacionário 7.792 m

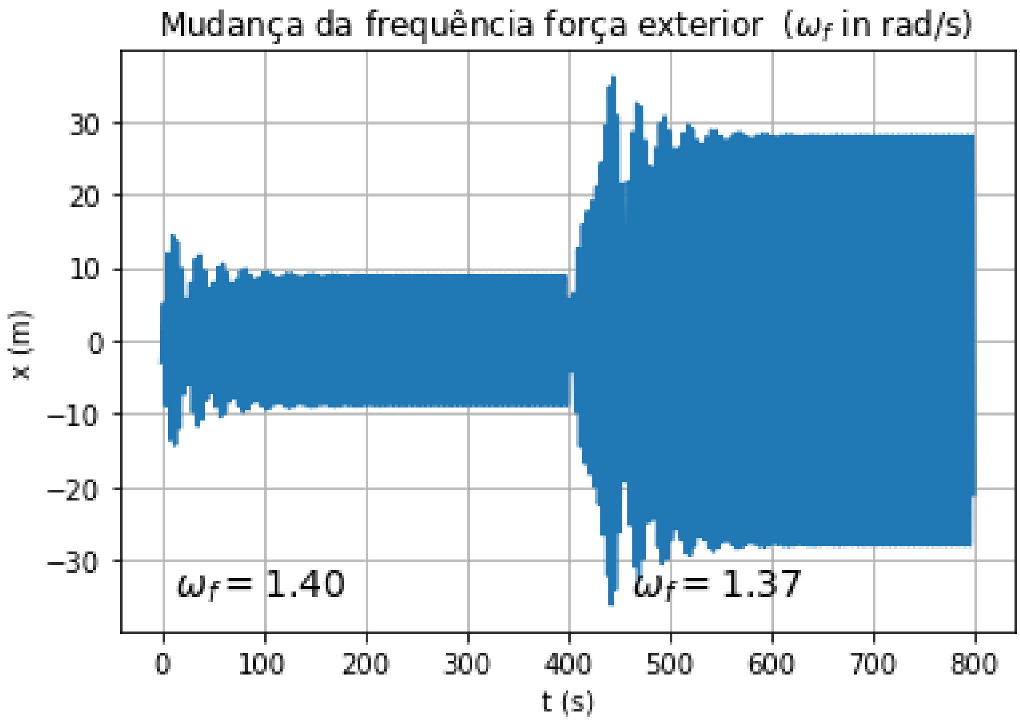
b) x=-k/m*x*(1+2*beta*x**2)-b/m*vx+f0/m*np.cos(omef*t)

Método	δt (s)	Amplitude (m) regime estacionário (interpolação Lagrange)
EC	0.01	8.913
EC	0.001	8.9058
EC	0.0001	8.9052
RK4	0.001	8.90515

Amplitude regime estacionário 8.905 m

c)

```
omef=1.4
    if t >400:
        omef=1.37
    ax=-k/m*x*(1+2*beta*x**2)-b/m*vx+f0/m*np.cos(omef*t)
```



Método	δt (s)	Amplitude (m) regime estacionário (interpolação Lagrange)
EC	0.01	27.98
EC	0.0001	27.98
RK4	0.001	27.98

Amplitude regime estacionário 27.98 m