Erro local de truncatura no método de Euler-Cromer

Sabemos que: $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ e $a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

E pelo método de Euler-Cromer integrando e fazendo aproximações:

$$x(t+\delta t)_{EC} = x(t) + v_x(t+\delta t)\,\delta t$$

$$v_x(t+\delta t)_{EC} = v_x(t) + a_x(t)\,\delta t$$

Mas sabemos também que: (comparando com as séries de Taylor)

$$x(t+\delta t)_{EXATO} = x(t) + \left.\frac{dx}{dt}\right|_t \delta t + o(\delta t^2)$$

$$v_x(t+\delta t)_{EXATO} = v_x(t) + \left.\frac{dv}{dt}\right|_t \delta t + o(\delta t^2)$$

Logo, como o erro local da posição é:

$$|x(t+\delta t)_{EXATO} - x(t+\delta t)_{EC}| = \cancel{x(t)} + \left.\frac{dx}{dt}\right|_t \delta t + o(\delta t^2) - \cancel{x(t)} - \underbrace{v_x(t+\delta t)}_{v_x(t+\delta t)_{EXATO}}\delta t$$

$$= v(t)\,\delta t + o(\delta t^2) - \left[v(t) + \left.\frac{dv}{dt}\right|_t \delta t + o(\delta t^2)\right]\delta t$$

$$= \cancel{v(t)\,\delta t} + \underbrace{o(\delta t^2)}_{\swarrow} - \cancel{v(t)\,\delta t} - \left.\frac{dv}{dt}\right|_t \delta t^2 - o(\delta t^3)$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_t \delta t^2 + \cancel{o(\delta t^3)} - \underbrace{\left.\frac{dv}{dt}\right|_t}_{= \left.\frac{d^2x}{dt}\right|_t} \delta t^2 - \cancel{o(\delta t^3)}$$

$$= \frac{1}{2}\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_t \delta t^2$$

$$= \underline{o(\delta t^2)}$$

↳ erro local que afeta a posição é $o(\delta t^2)$

Assim como, o erro local para a velocidade:

$$|v_x(t+\delta t)_{EXATO} - v_x(t+\delta t)_{EC}| = \cancel{v_x(t)} + \cancel{\left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t \delta t} + o(\delta t^2) - \cancel{v_x(t)} - \cancel{\underbrace{a_x(t)}_{= \left.\frac{dv_x}{dt}\right|_t}\delta t}$$

$$= \underline{o(\delta t^2)}$$

↳ erro local que afeta a velocidade é $o(\delta t^2)$

• Logo, quer na posição quer na velocidade o erro de truncatura local é $o(\delta t^2)$

Erro global de truncatura no método de Euler-Cromer

• Como, quer na posição quer na velocidade, o erro de truncatura local é $o(\delta t^2)$, no instante final, $t_f = \underbrace{n}_{\text{n.º de passos}}\,\underbrace{\delta t}_{\text{Passo temporal}}$, o erro acumulado de n passos é:

Considerando $t_0 = 0\,s$

$$n \times o(\delta t^2) \overset{(*)}{=} \frac{t_f}{\cancel{\delta t}}\, o(\delta t^{\cancel{2}}) = t_f\, o(\delta t)$$

(*)
$\hookrightarrow t_f = n\,\delta t$
$\Leftrightarrow n = \dfrac{t_f}{\delta t}$

Para $t_0 \neq 0 \Rightarrow (t_f - t_0)\, o(\delta t)$ é o erro global ao fim de n passos.

• O erro de truncatura é proporcional ao inverso do número de passos n, e proporcional ao passo δt