Departamento de Física
Universidade de Aveiro

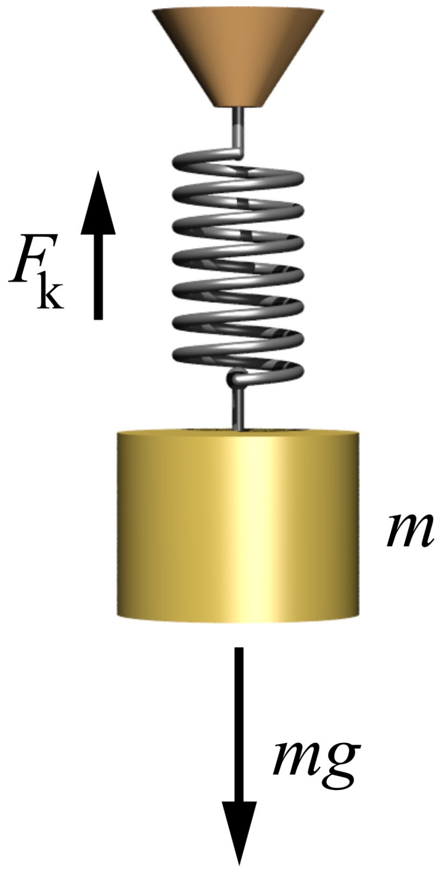
Modelação de Sistemas Físicos

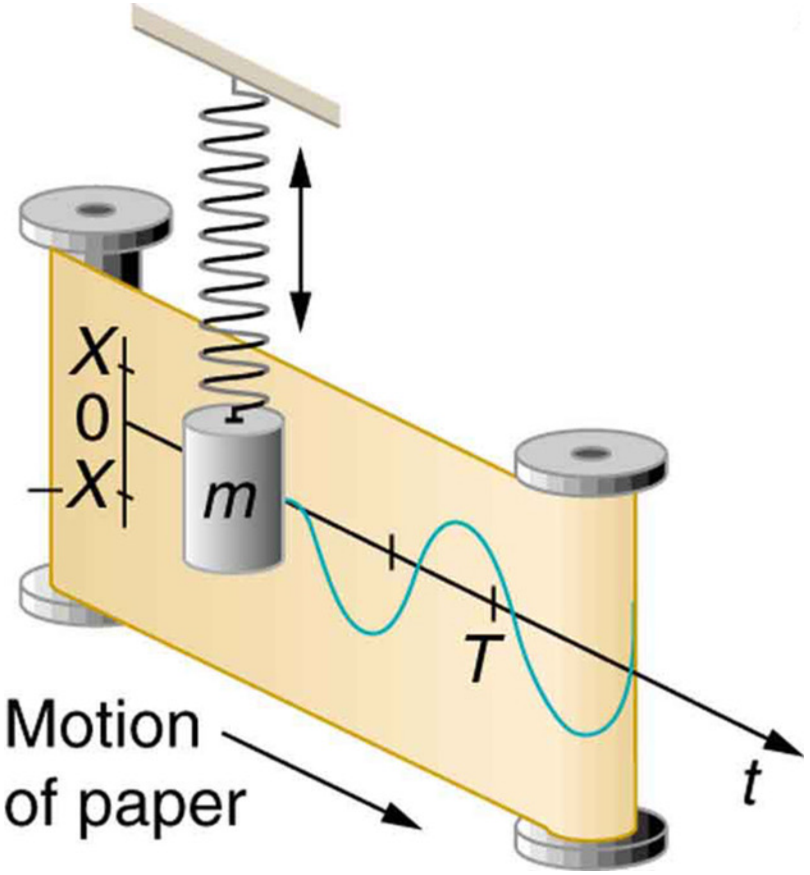
9ª Aula Teórica

Sumário:
Cap. 7 Oscilações
Oscilador Harmónico Simples

Bibliografia:
Cap. 7: Serway, cap. 15;

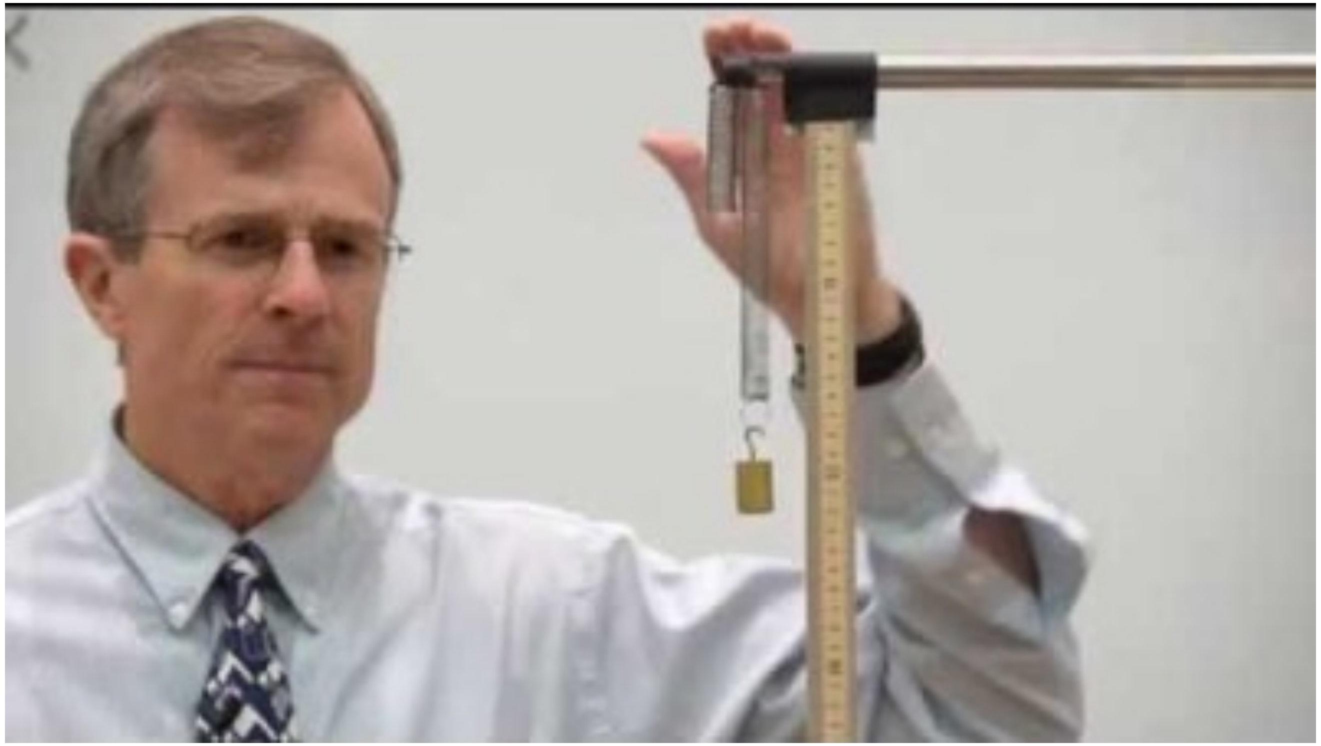
Sistema mola-massa



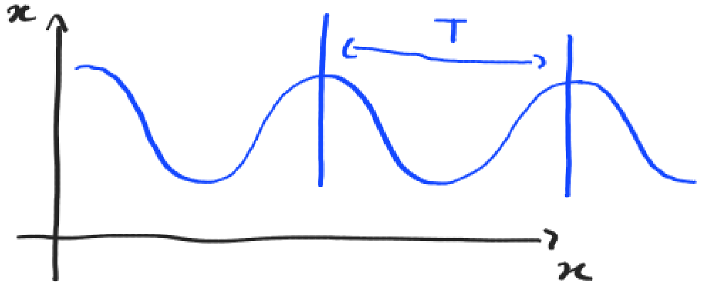


Cap. 7 Oscilações

https://youtu.be/FJBPNJR2QJU?t=210 (3’ 30’’)



Medições: O período T é proporcional à raiz quadrada da massa M $T = C\sqrt{M}$

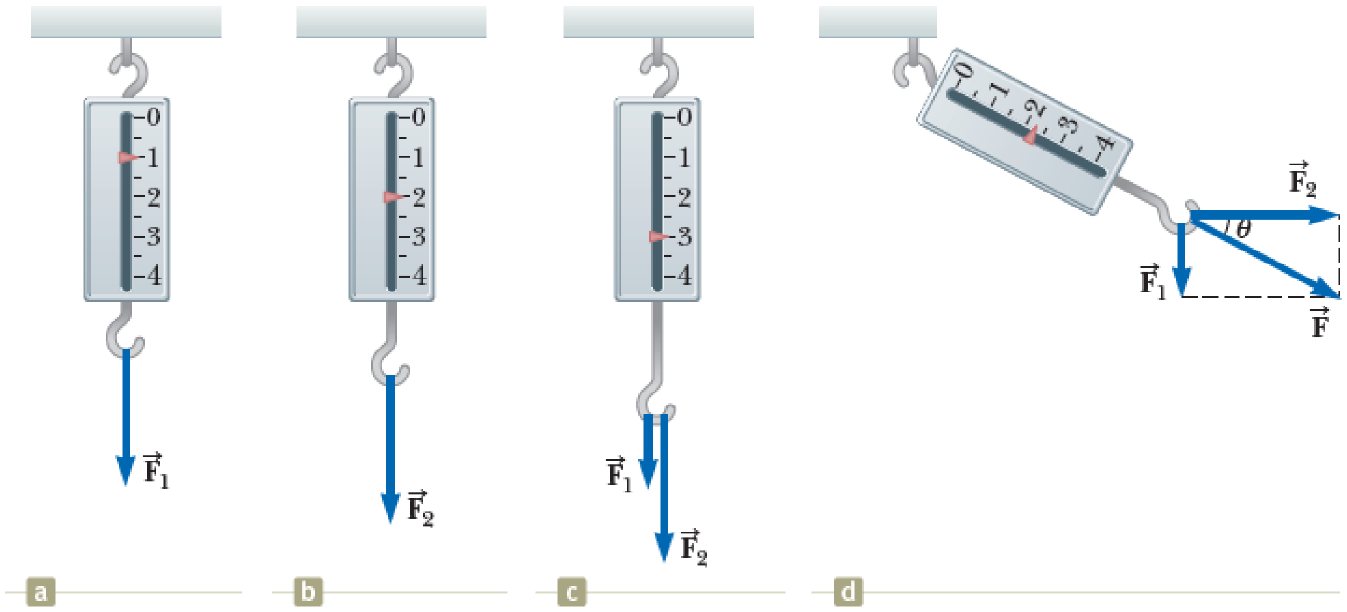


Período: intervalo de tempo para o movimento se repetir

Período do movimento da Terra à volta do Sol: 1 ano

T é proporcional a $\sqrt{M}$

As forças são obtidas por realização de experiências e medições.



Robert Hooke 1635-1703

$$\begin{cases} F_x = -k\ x \\ F_y = -k\ y \\ F_z = -k\ z \end{cases} \Leftrightarrow \vec{F} = -k\vec{r}$$

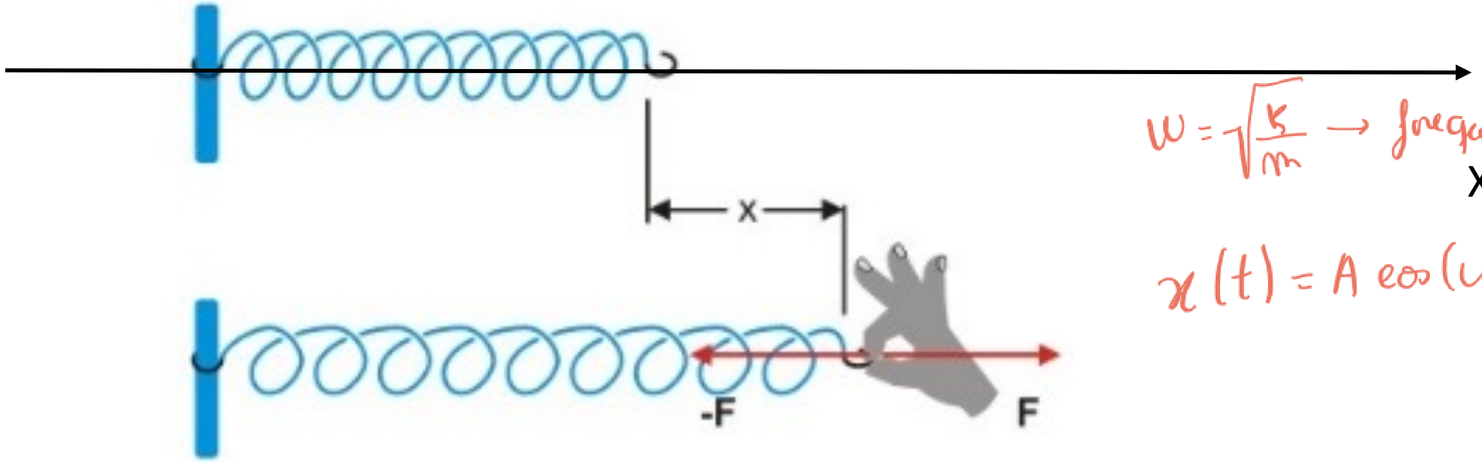
Lei de Hooke:

A extensão de uma mola (a partir do ponto de equilíbrio) é proporcional à força aplicada

$\Leftrightarrow$ A força gerada pela mola é proporcional ao deslocamento do ponto de equilíbrio

Aplica-se à deformação elástica de vários corpos $\Rightarrow$ **força elástica**

A 1D (segundo OX)



$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow$ frequência angular

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

Por medições:

$T = C\sqrt{m}$

$F_x = -k\,x \Rightarrow m a_x = m \frac{d^2x}{dt} = -kx \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt} = -\frac{k}{m}x}$

a_x

$\vec{F}(t) = m\,\vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \quad \vec{a}(t) \quad \Longrightarrow \vec{v}(t) \quad \Longrightarrow \vec{r}(t)$

Diferença de $\frac{\pi}{2}$

Com $F_x = -k\,x \quad \Longrightarrow \quad a_x = -\frac{k}{m}x \quad \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \end{cases}$ ou $\begin{cases} x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) \end{cases}$

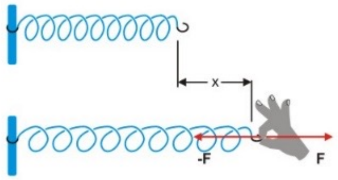
1.ª derivada

alternativamente

Pois coseno e seno são iguais se somarmos $\frac{\pi}{2}$

Cap. 7 Oscilações

A 1D (segundo OX)



$$a_x = -\frac{k}{m}x \quad \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right) \end{cases}$$

<u>SOLUÇÕES IGUAIS</u> (só a expressão matemática é diferente $\boxed{\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \operatorname{sen}(x)}$

Outras expressões matemáticas que representam a mesma solução:

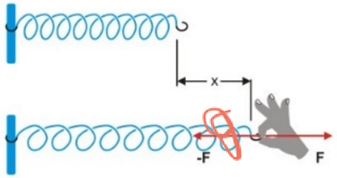
$$\begin{cases} x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \end{cases}$$

Qualquer destas 3 expressões matemáticas concordam com a equação fundamental da dinâmica, na forma:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Cap. 7 Oscilações

A 1D (segundo OX)



$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi\right) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\,\text{sen}(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + D\sqrt{\frac{k}{m}}\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \end{cases}$$

As constantes A, ϕ, φ, C e D dependem das condições iniciais: $x(t=0)$ e $v_x(t=0)$

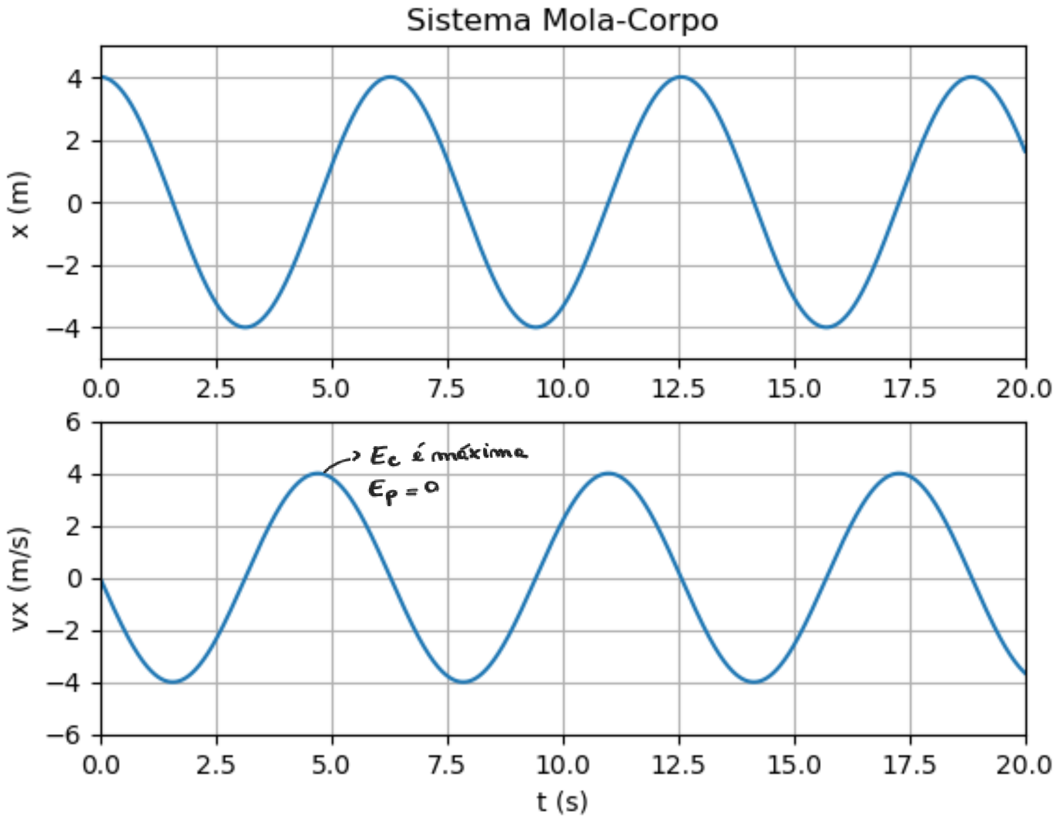
Qualquer das três expressões matemáticas:

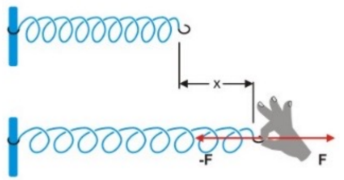
Com:

$x(t=0) = 4$ m

$v_x(t=0) = 0$

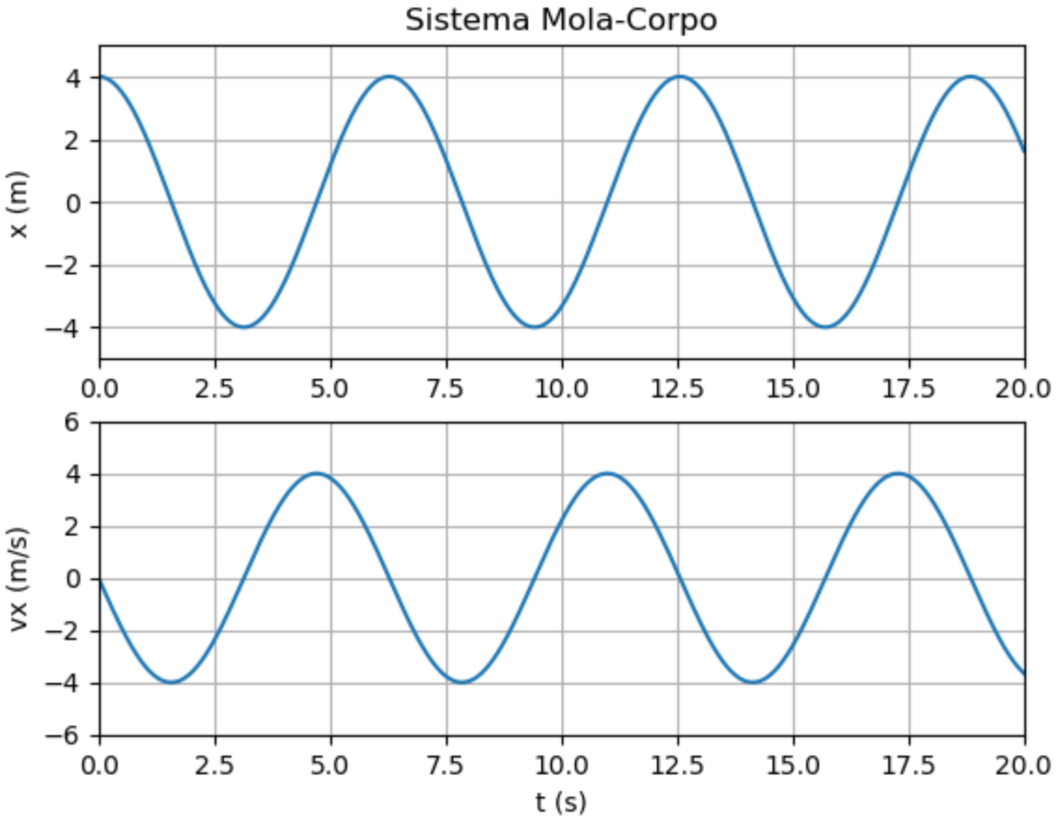
$\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s





A 1D (segundo OX)

$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right) \end{cases}$$



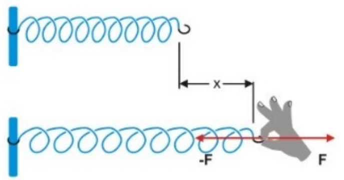
Com:

$x(t=0) = 4$ m

$v_x(t=0) = 0$

$\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

Determine A e ϕ



A 1D (segundo OX)

$$\begin{cases} x(t) = A\,\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right), \\ v_x(t) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\,\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right) \end{cases}$$

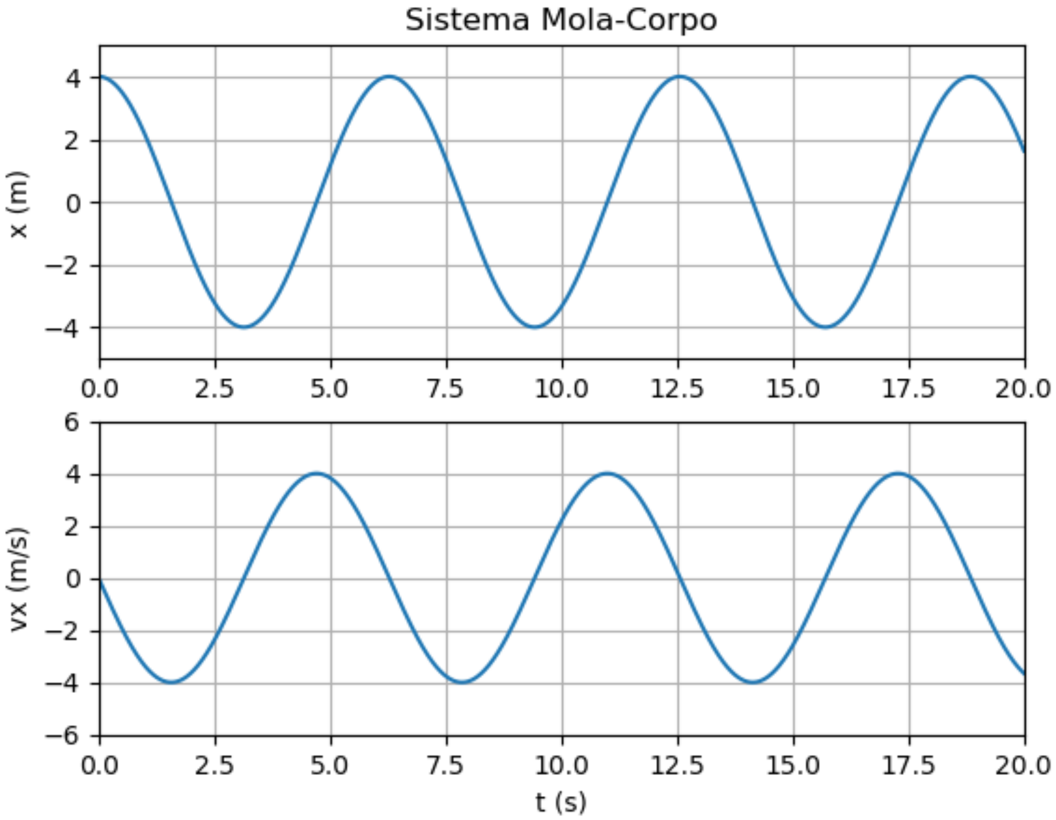
Com:

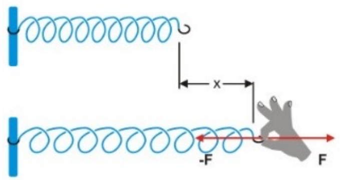
$x(t=0) = 4$ m

$v_x(t=0) = 0$

$\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

Determine A e φ





A 1D (segundo OX)

$$\begin{cases} x(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \\ v_x(t) = -C\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + D\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \end{cases}$$

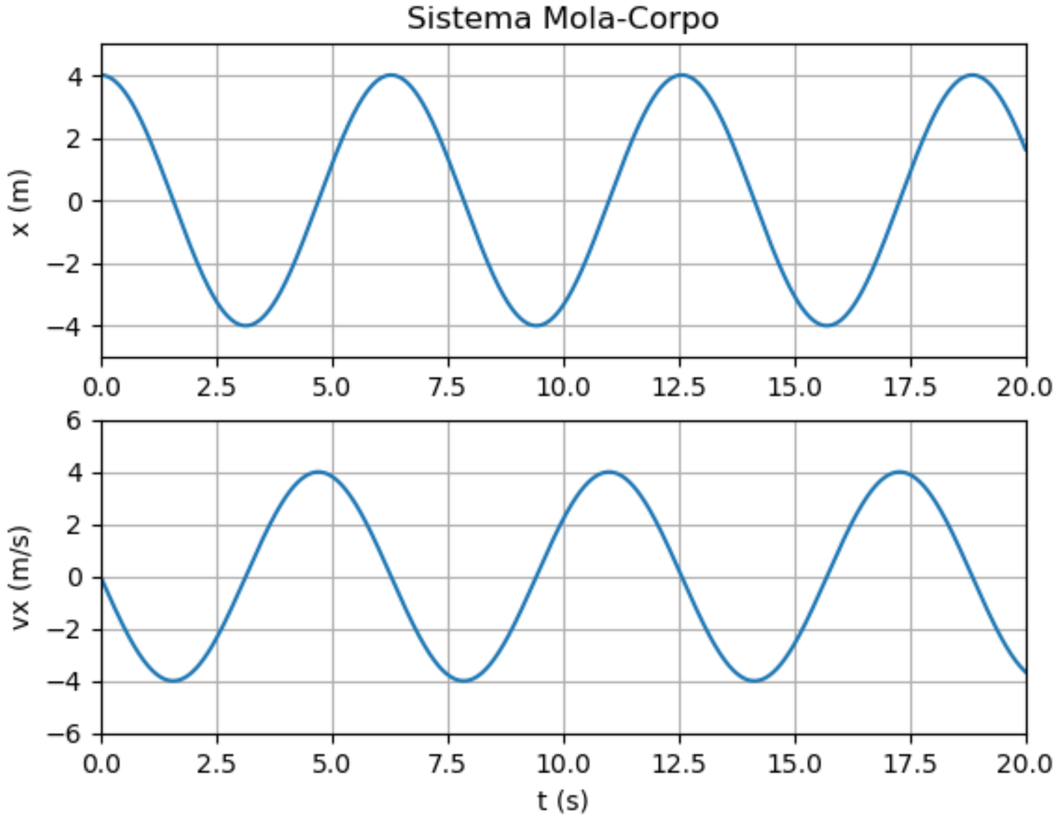
Com:

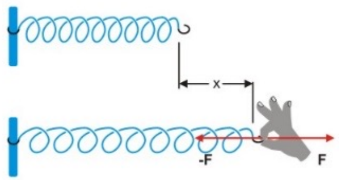
$x(t=0) = 4$ m

$v_x(t=0) = 0$

$\sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

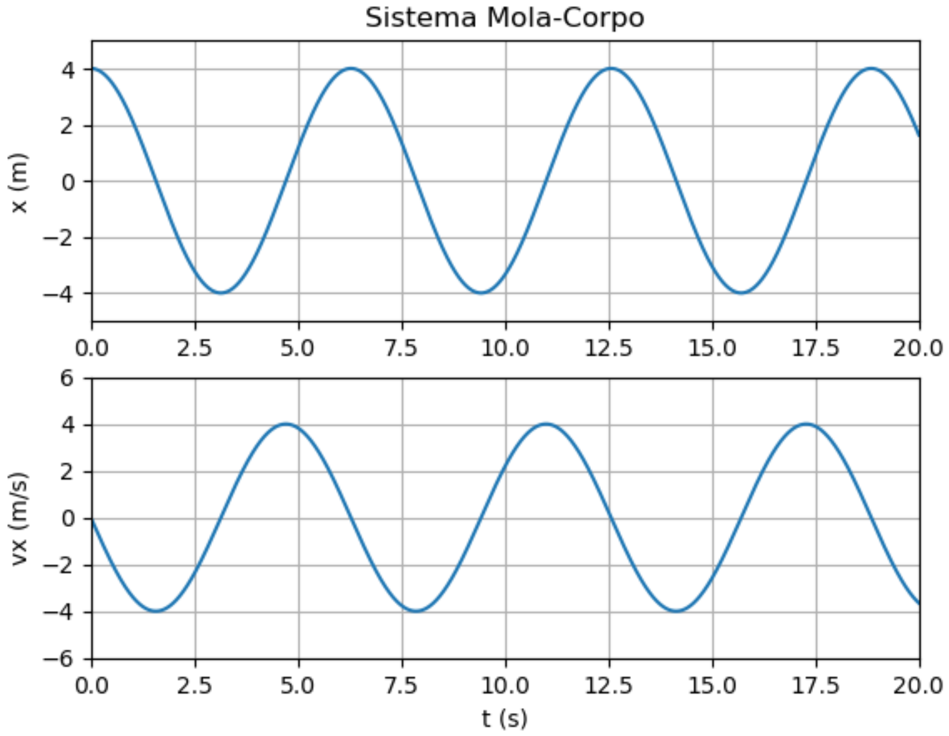
Determine C e D





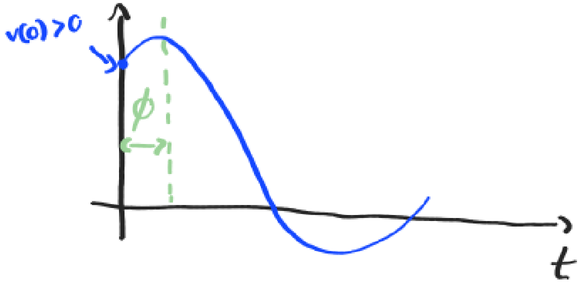
$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right) \end{cases}$$

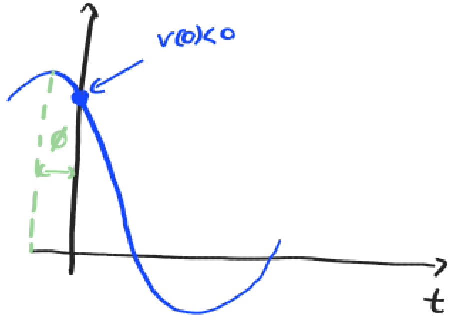
Determine A e ϕ



A : Amplitude

ϕ : Fase inicial



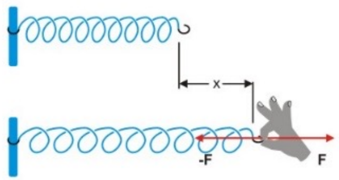


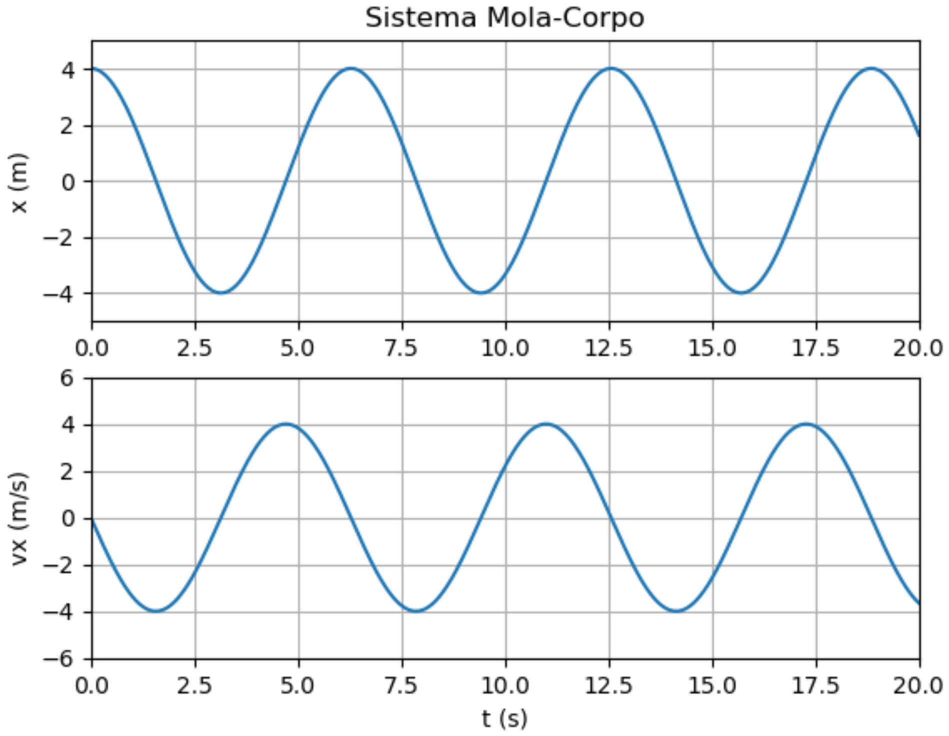
Cap. 7 Oscilações

$$
\begin{cases}
x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right) \\
v_x(t) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,\sin\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right)
\end{cases}
$$

A : Amplitude

ϕ: fase inicial





Período T

$$x(t+T) = x(t)$$

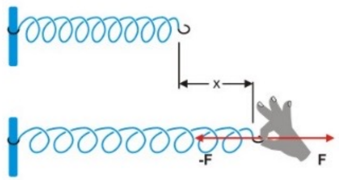
$$A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T) + \phi\right) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right)$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T) + \phi = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right) + 2\pi$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,T = 2\pi$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

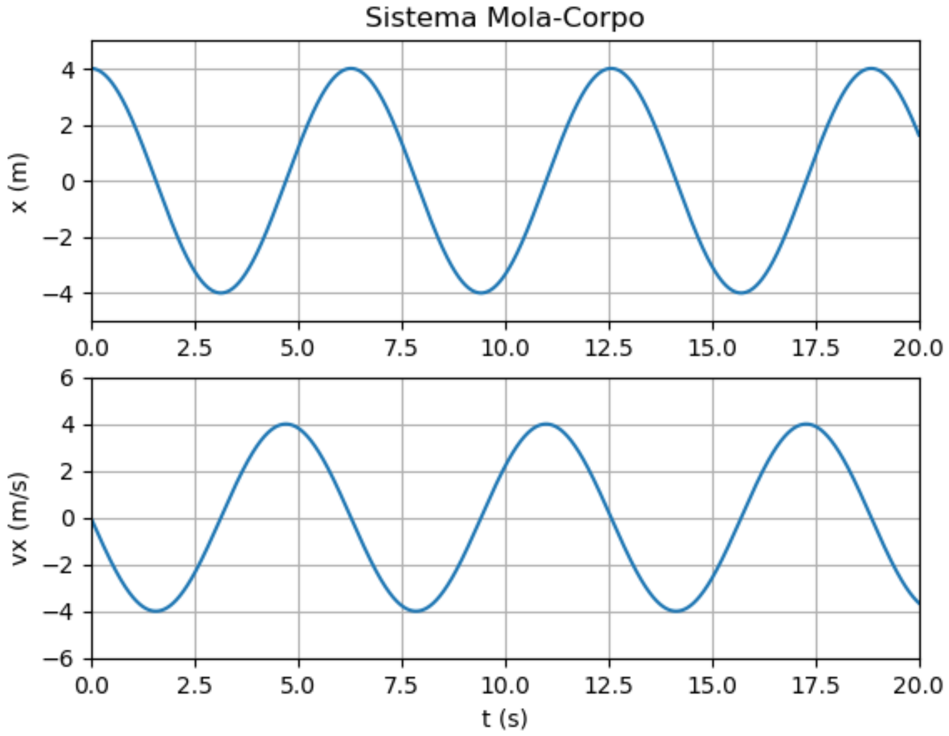
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\sqrt{m} \quad \text{de acordo com as medições}}$$



$$\begin{cases} x(t) = A\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi\right) \\ v_x(t) = -A\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,\sin(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t + \phi) \end{cases}$$

A : Amplitude

ϕ: fase inicial



Frequência: número de repetições por unidade de tempo

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

→ a frequência é o inverso do período

1 repetição - leva 1 T

f repetições – leva 1 s $\quad \Rightarrow \quad fT = 1$

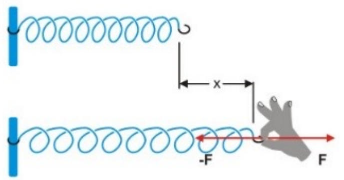
unidade: 1/s = Hz

Como $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ou $\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 2\pi f$: **frequência angular ω**

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

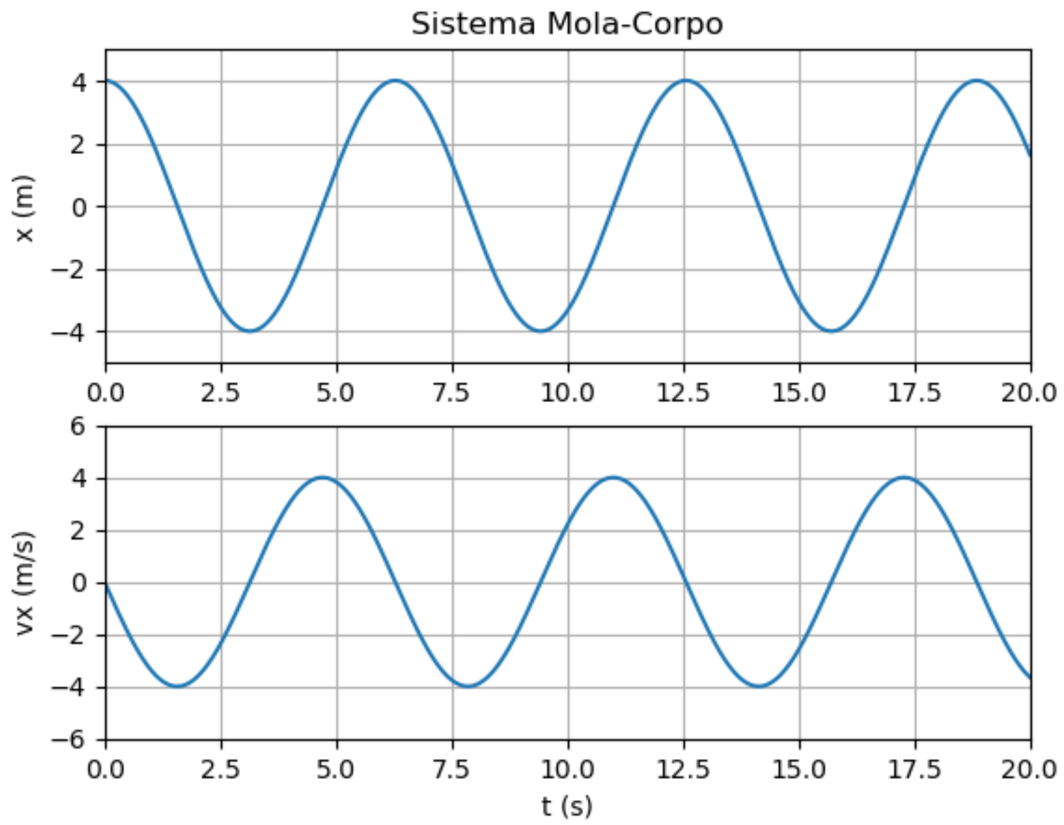


Movimento Harmónico Simples

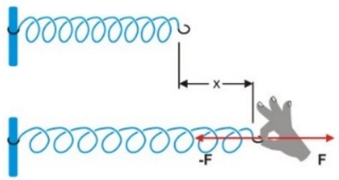
$$F_x = -k\,x$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega\,t + \phi) \end{cases}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Movimento Harmónico Simples – Energia Mecânica



$$F_x = -k\,x$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$\Longrightarrow \quad E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\,x^2$$

$$k = m\omega^2$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\,v_x^2 + \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\,t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega\,t + \phi) \end{cases}$$

$$E = E_c + E_p$$

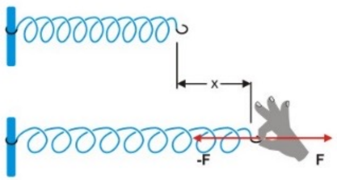
$$= \frac{1}{2}m\,[A\,\omega\,\sin(\omega\,t + \phi)]^2 + \frac{1}{2}m\omega^2[A\cos(\omega\,t + \phi\,)]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,A^2\omega^2\sin^2(\omega\,t + \phi) + \frac{1}{2}m\,\omega^2\;A^2\cos^2(\omega\,t + \phi\,)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\;A^2\overbrace{[\sin^2(\omega\,t + \phi) + \cos^2(\omega\,t + \phi\,)]}^{=1}$$

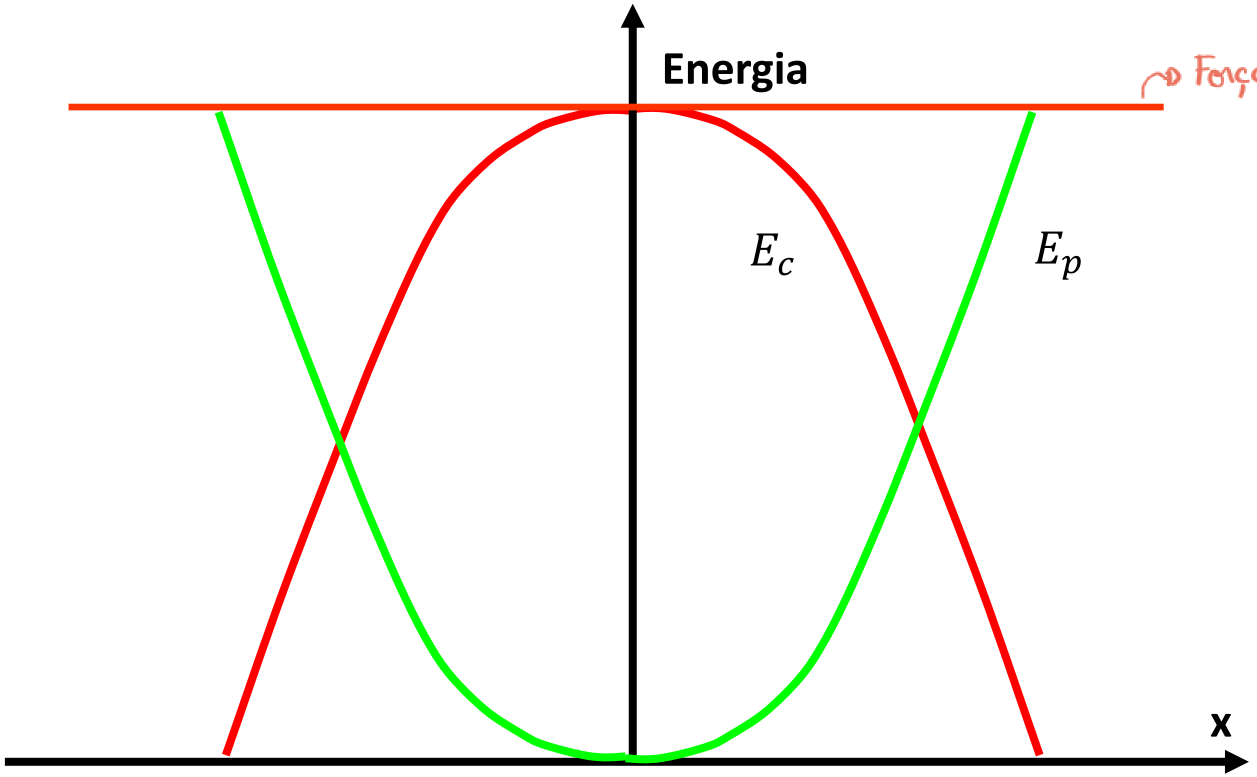
$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\;A^2 \times 1$$

Movimento Harmónico Simples – Energia Mecânica

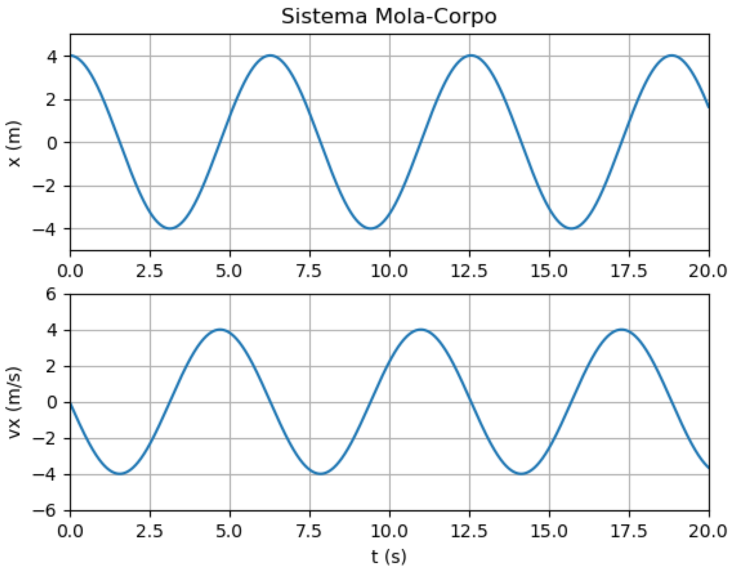


$$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \, x^2 \quad \text{e} \quad E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 \, A^2$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega\, t + \phi\,) \\ v_x(t) = -A\,\omega\,\sin(\omega\, t + \phi) \end{cases}$$



→ Forças conservativas ?



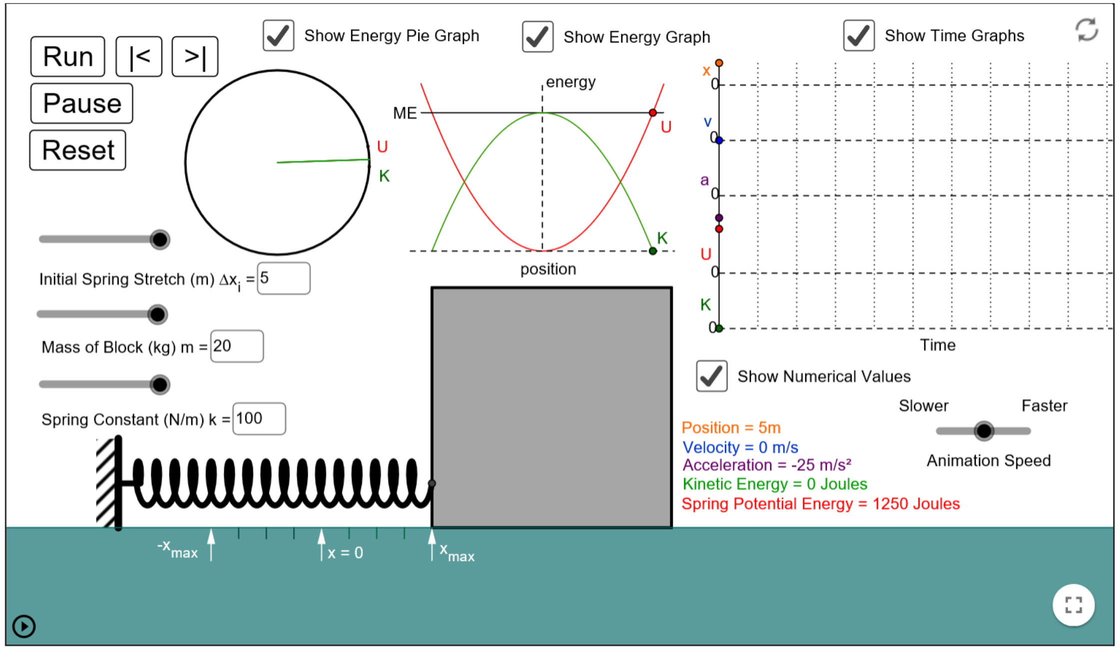
https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm

Oscilador Harmónico Simples

Simple Harmonic Motion: Mass on a Spring

Autor: Alan Pacey, Tom Walsh

This simulation shows the oscillation of a box attached to a spring. Adjust the initial position of the box, the mass of the box, and the spring const
Run, Pause, Reset, and Step buttons to examine the animation. Check or uncheck boxes to view/hide various information.



https://www.geogebra.org/m/EGg2Pvhm

Oscilador Harmónico Simples

Cap. 7 Problema 5:

Um objeto de 500g, preso a uma mola com k=8N/m, oscila num movimento com amplitude A=10cm.

Calcule:

a) a velocidade e aceleração máximas.

b) a velocidade e aceleração quando o objeto dista 6 cm da posição de equilíbrio.

c) o tempo necessário para o objeto partir de x=0 e chegar a x=8 cm.

Formulário:

$$y(t) = A\ \cos(\omega t + \phi) \qquad \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

$m = 500g = 0,5\ kg$ $\quad A = 0,1\ m$

$K = 8\ N/m$

a)

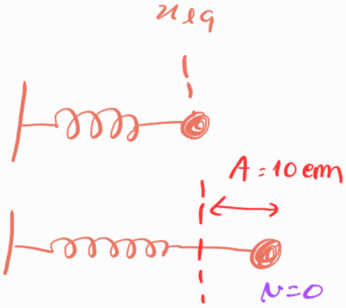
$y(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

$v_y(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$

$a_y(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$

velocidade angular

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{8}{0,5}} = \sqrt{16} = 4\ rad\ s^{-1}$



$E_{total} = E_p$

$\underline{V_{max}}$: quando $\sin(\omega t + \phi) = 1$

$V_y(t) = -\omega A = -4 \times 0,1 = -0,4\ m/s$

$\underline{a_{max}}$: quando $\cos(\omega t + \phi) = -1$

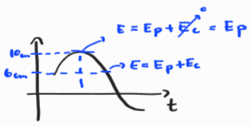
$a_y(t) = \omega^2 A = 4^2 \times 0,1 = 1,6\ m/s^2$

b)

$y = 0,06\ m \qquad a = ? \quad v = ?$

$|a| = \omega^2 \times 0,06 = 16 \times 0,06 = 0,96$

consideramos o módulo



total $\quad$ equilibrio

$E = E_p\ (10cm) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$

$= \frac{1}{2}\ 0,5 \times 16 \times 0,1 = 0,04\ J$

$\rightarrow$ v? $x = 6cm$ $E_{cinética} = ?$

$E_p(6cm) = \frac{1}{2} k x^2$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times (0,06)^2$

$= 0,0144\ J$

$\rightarrow$ $E_{mecânica}$ é cte

$\rightarrow$ $E_{meca} = E_p =$

$\rightarrow$ $E_c = E_m - E_p$

$E_c = E - E_p = 0,4J - 0,0144 = 0,3856\ J$

$\underline{Logo}$: $E_c = 0,3856\ J$

$0,3856 = \frac{1}{2} \times 0,5 \times v^2$

$\Leftrightarrow v = \sqrt{4 \times 0,3856}$