Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Modelação de Sistemas Físicos

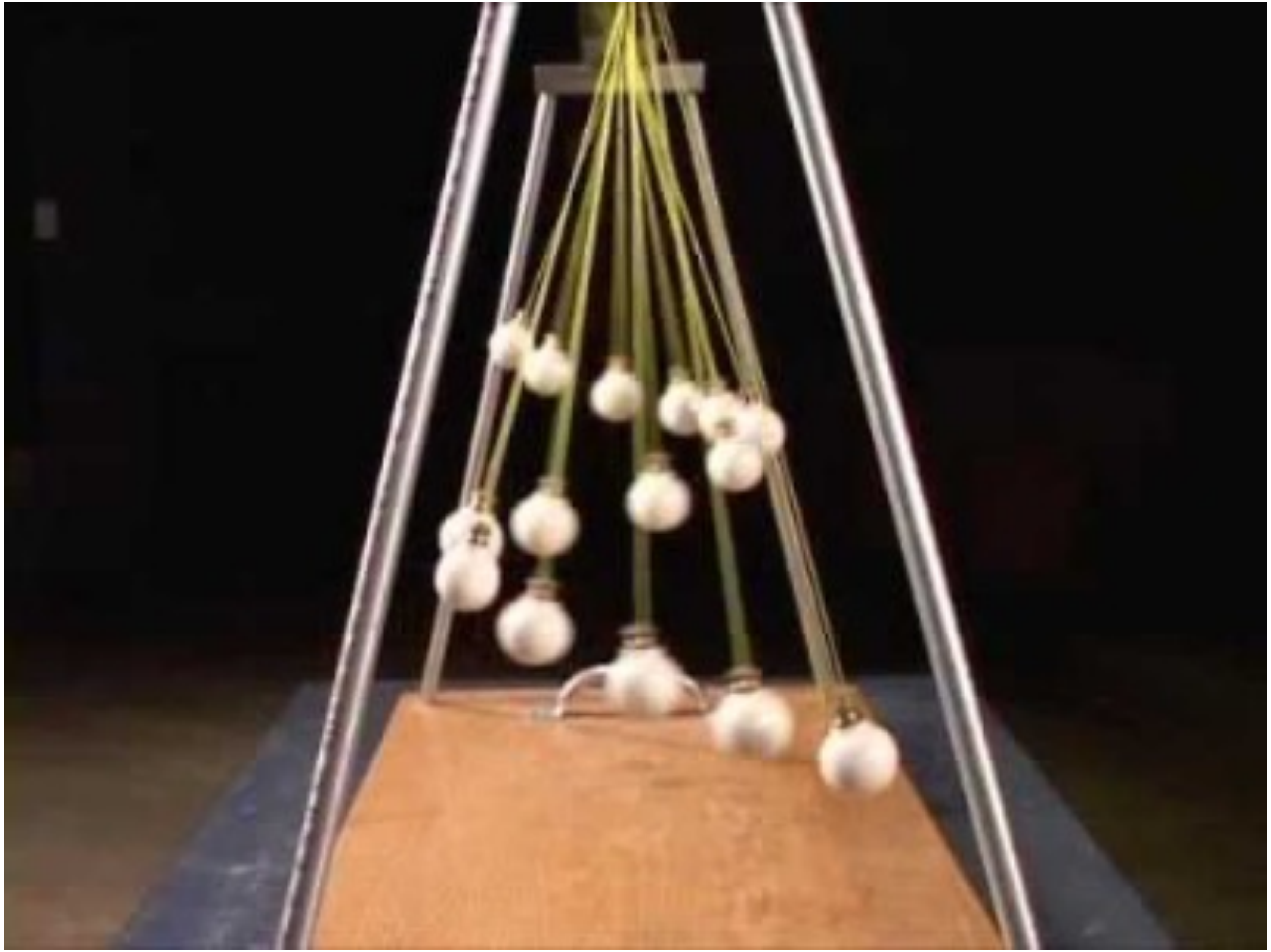
14ª Aula Teórica

Sumário:

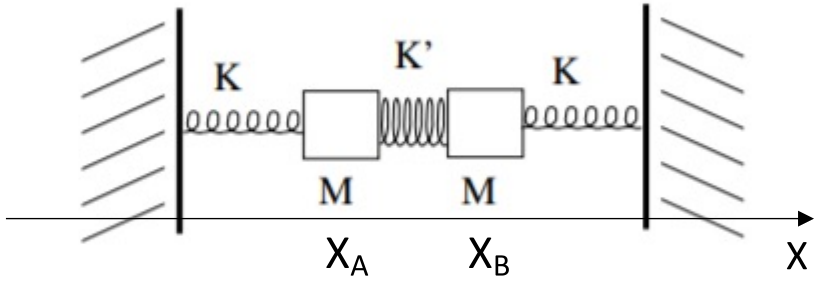
Cap. 9
N Osciladores acoplados, modos normais e ondas

Resolução de problemas.

Bibliografia:



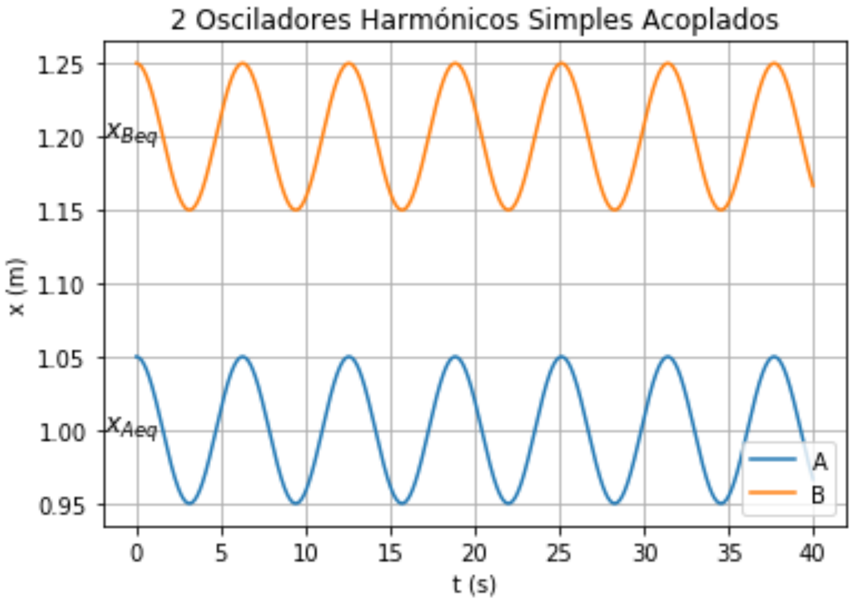
Modos Normais



Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) \; - k'\,[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\,]$

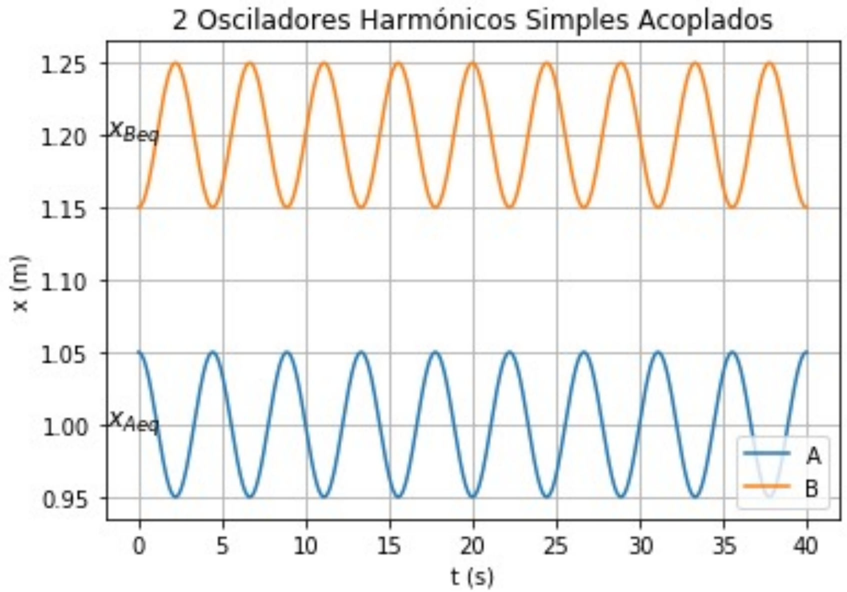
Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k\,(x_B - x_{Beq}) + k'\,[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Modo normal 1 $\quad \omega_1 \;= 1$ rad/s



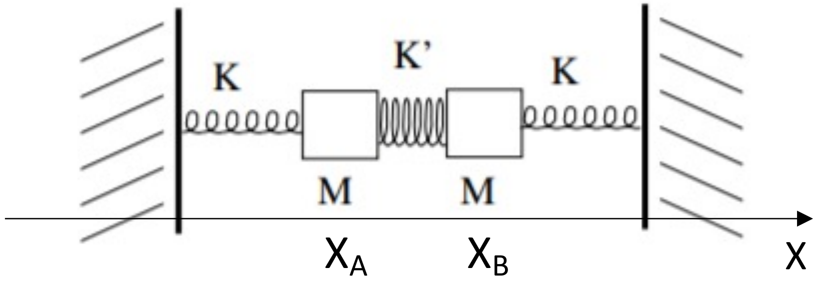
$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_B = x_{eqB} + A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{cases}$$

Modo normal 2 $\quad \omega_2 \;= 1.414$ rad/s



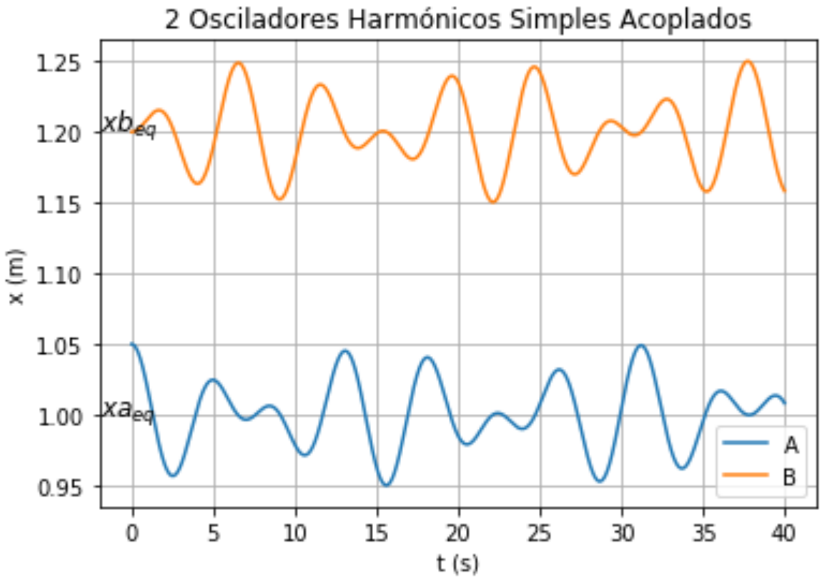
$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Modos Normais



$x_{Aeq} = 1.0$ m $x_{Aeq} = 1.2$ m

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m
$x_{B0} = x_{Beq}$
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = 0$



Movimento não periódico

$$\begin{cases} x_A = x_{eqA} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_B = x_{eqB} + A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Com $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k\prime}{m}}$

Qualquer movimento de 2 corpos acoplados por interação elástica é uma sobreposição dos MODOS NORMAIS

Série de Fourier:

Joseph Fourier 1768-1830

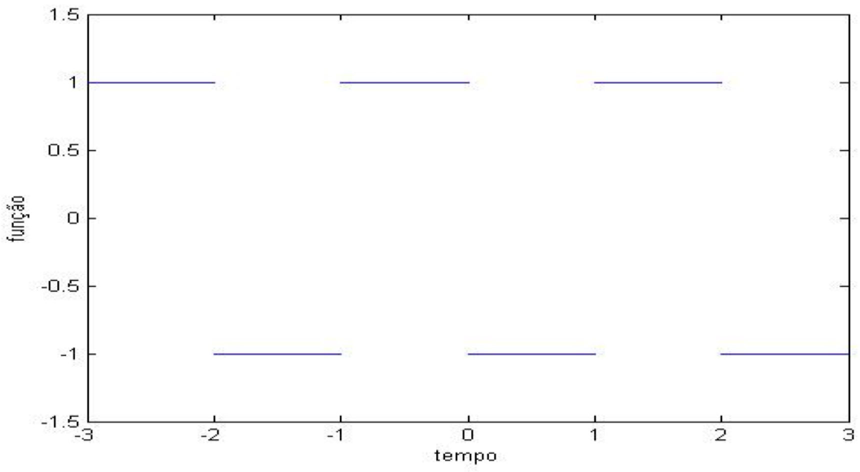
A série de Fourier decompõe uma função periódica *f(t),* de período T ou frequência angular $\omega = 2\pi/T$, numa soma de funções sinusoidais de frequência angular múltipla de ω ($\omega_n = n\omega$)

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t\}}$$

Os coeficientes de Fourier são expressos por

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\,dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Série de Fourier: Ex.: Onda quadrada



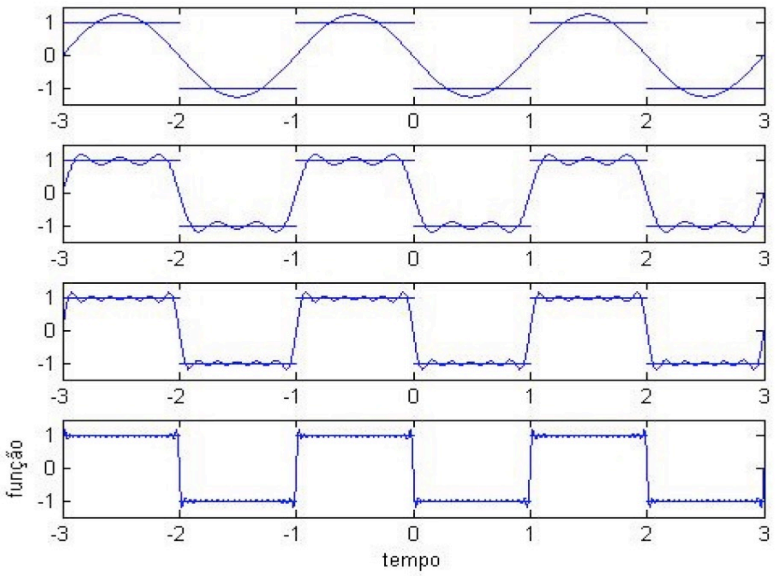


Figura 3.

A função quadrado reconstruída usando a série de Fourier com um número crescente de termos. De cima para baixo está a função reconstruída com 1, 5, 11 e 41 termos.

Vamos calcular os coeficientes a e b, usando

$$\begin{cases} a_n = 0, & n = 0,1,2,3 \\ b_n = 2\left((-1)^n - 1\right)/\left(n\pi\right), & n = 1,2,3 \end{cases}$$

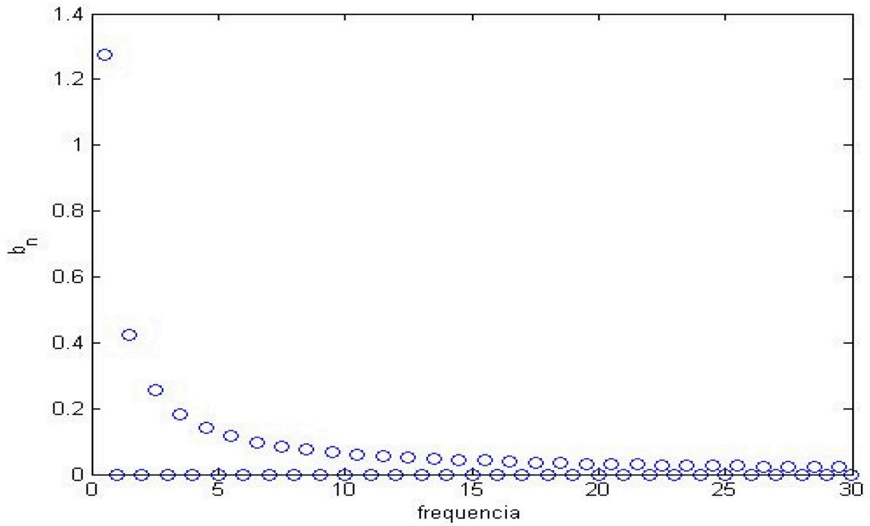
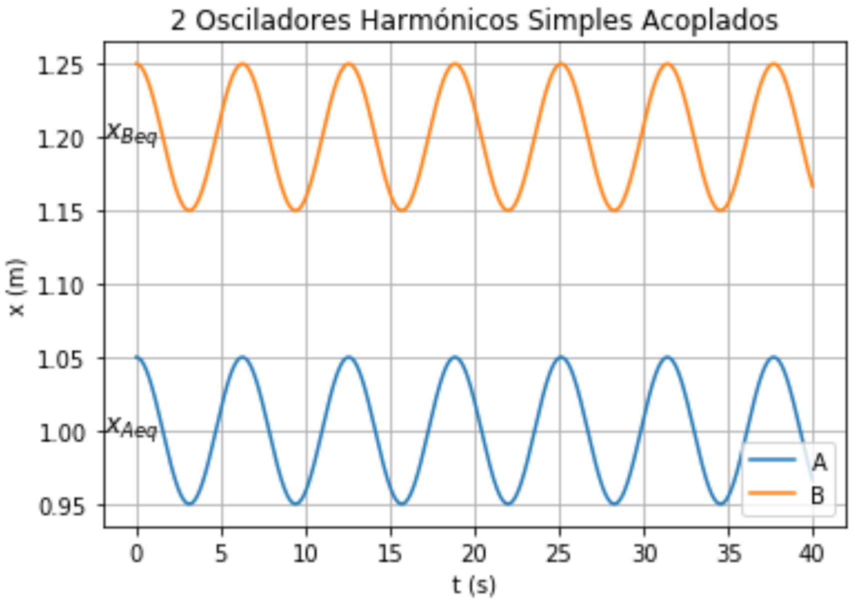


Figura 2.
Os coeficientes de Fourier b_n

Série de Fourier: Ex.: 2 Osciladores Acoplados

Modo normal 1 $\omega_1 = 1$ rad/s



Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\,dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Mas a função está expressa por pontos!

$\Rightarrow$ **Integração numérica usando a aproximação trapezoidal**

Cálculo numérico dos coeficientes de Fourier

<u>Calcula os integrais</u>

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\,dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

pela aproximação trapezoidal.

<u>Input:</u>

dados numéricos `tp` e `xp`
(valores de x em momentos t)

`it0` e `it1`
indices de tempo do inicio e do fim do período de analizar:

T = tp[it1]-tp[it0]

`nf`
número do coeficiente a calcular

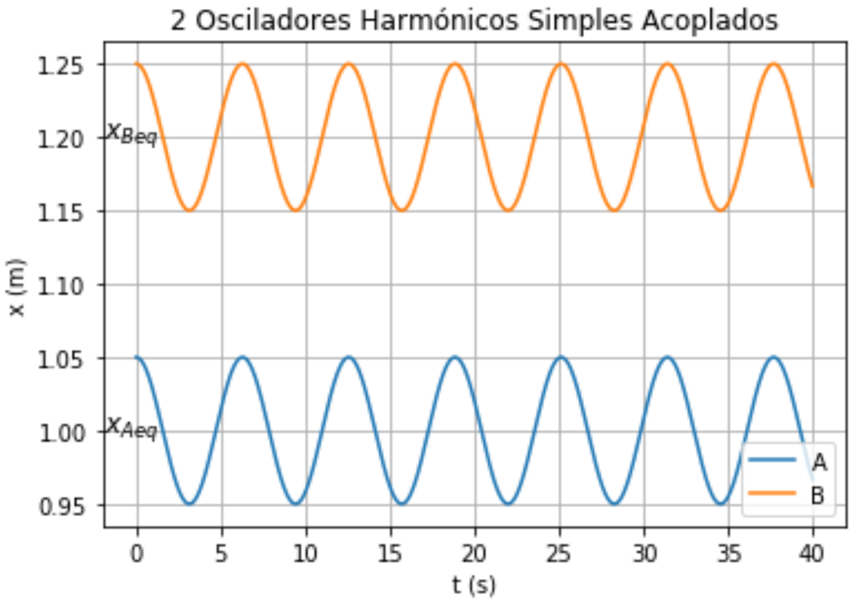
$$\omega_n = n\omega$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

```python
def abfourier(tp,xp,it0,it1,nf):
# cálculo dos coeficientes de Fourier a_nf e b_nf
#       a_nf = 2/T integral ( xp cos( nf w) ) dt   entre tp(it0) e tp(it1)
#       b_nf = 2/T integral ( xp sin( nf w) ) dt   entre tp(it0) e tp(it1)
# integracao numerica pela aproximação trapezoidal
# input: matrizes tempo tp   (abcissas)
#                  posição xp (ordenadas)
#       indices inicial it0
#               final   it1  (ao fim de um período)
#       nf índice de Fourier
# output: af_bf e bf_nf
    dt=tp[1]-tp[0]
    per=tp[it1]-tp[it0]
    ome=2*np.pi/per

    s1=xp[it0]*np.cos(nf*ome*tp[it0])
    s2=xp[it1]*np.cos(nf*ome*tp[it1])
    st=xp[it0+1:it1]*np.cos(nf*ome*tp[it0+1:it1])
    soma=np.sum(st)

    q1=xp[it0]*np.sin(nf*ome*tp[it0])
    q2=xp[it1]*np.sin(nf*ome*tp[it1])
    qt=xp[it0+1:it1]*np.sin(nf*ome*tp[it0+1:it1])
    somq=np.sum(qt)

    integа=((s1+s2)/2+soma)*dt
    af=2/per*intega
    integq=((q1+q2)/2+somq)*dt
    bf=2/per*integq
    return af,bf
```

Série de Fourier: Ex.: 2 Osciladores Acoplados

Modo normal 1 $\omega_1 = 1$ rad/s

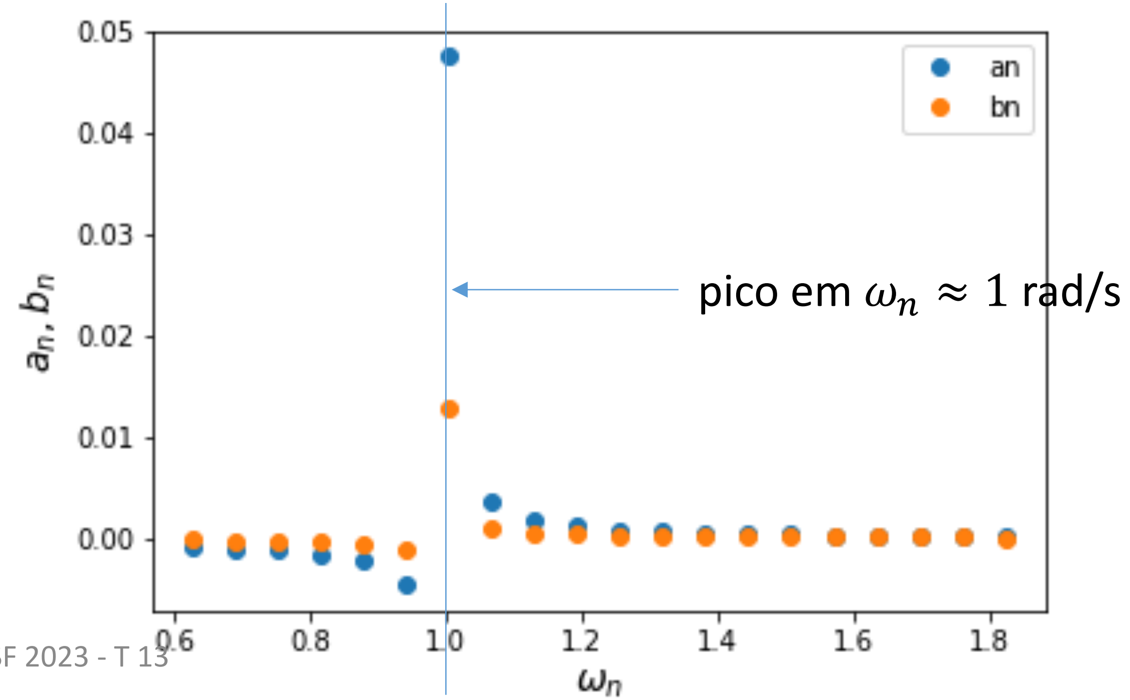


Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\, dt \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

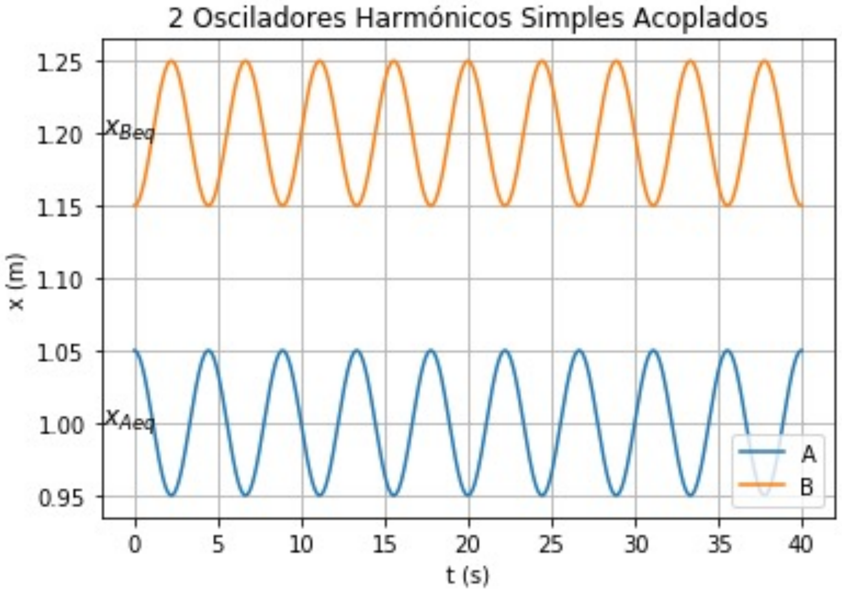
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\, dt \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



Série de Fourier: Ex.:   2 Osciladores Acoplados

Modo normal 2 $\omega_2 = 1.414$ rad/s

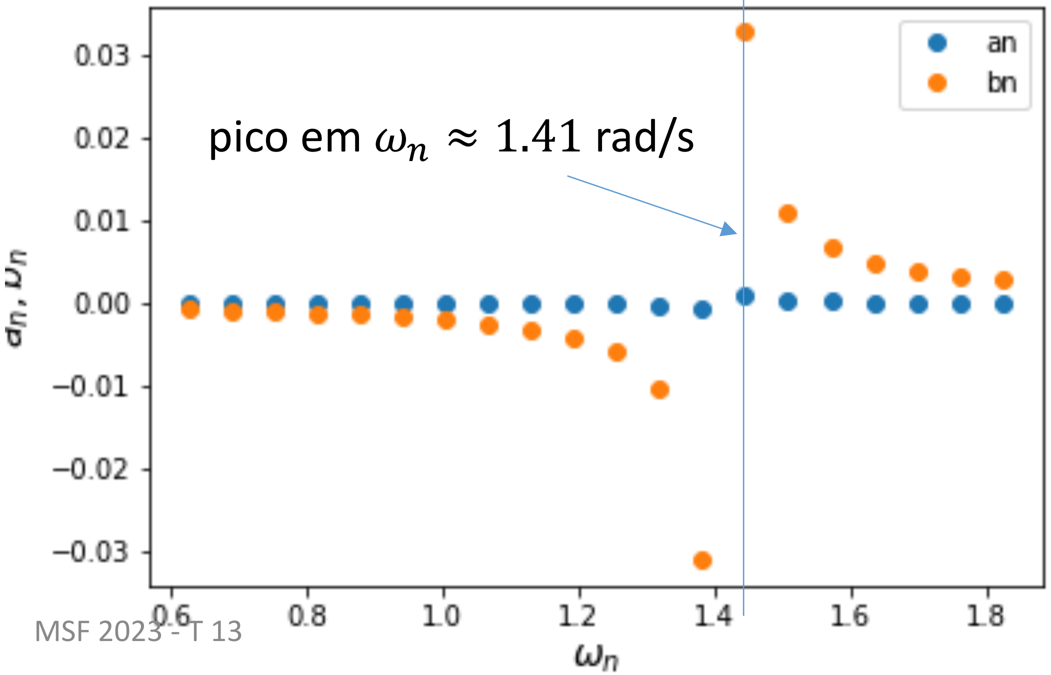


Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\,dt \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

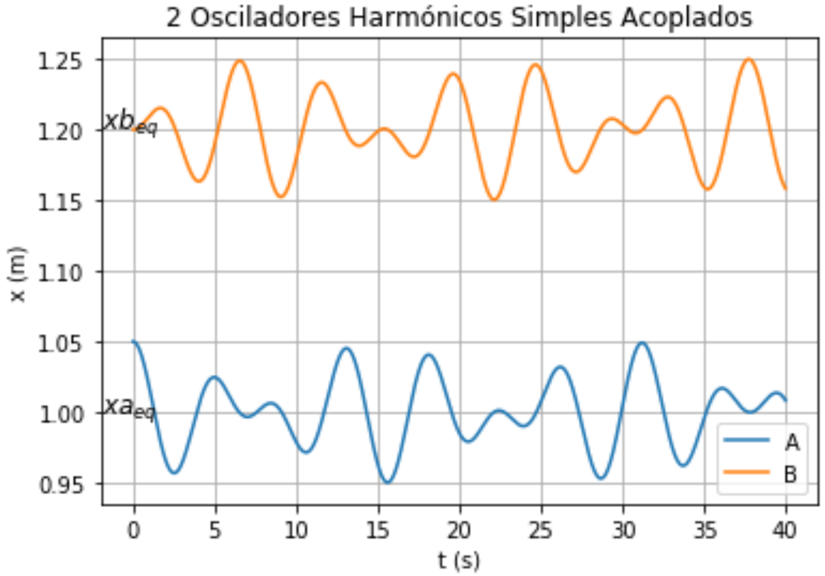
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\,dt \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



Série de Fourier: Ex.:   2 Osciladores Acoplados

Condições iniciais gerais:



$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq}$$

$\omega_1 = 1$ rad/s
$\omega_2 = 1.41$ rad/s

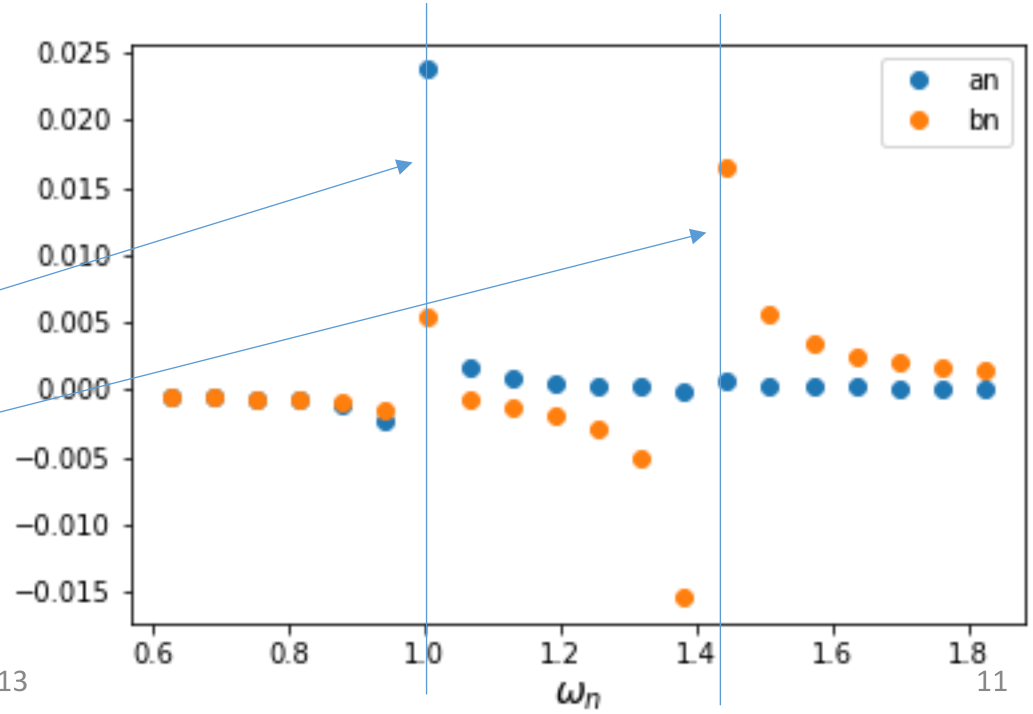
picos em $\omega_n \approx 1$ rad/s
e $\omega_n \approx 1.41$ rad/s

Confirma que é uma sobreposição dos 2 modos normais

Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\, dt \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



Série de Fourier: Ex.: Oscilador Quártico Não Harmónico Forçado

$E_p = \alpha x^4$

$x(t=0) = 3.0000$ m

$v_x(t=0) = 0$

$k = 1$ N/m;

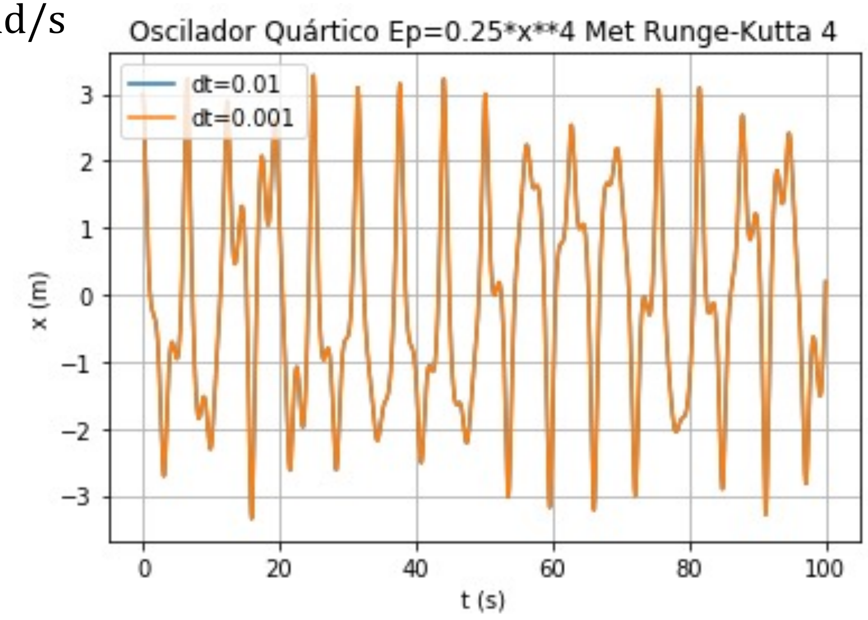
$m = 1$ kg; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ rad/s

$b = 0.05$ kg/s

$\alpha = 0.25$ m^{-2}

$F_0 = 7.5\ N$

$\omega_f = 1$ rad/s

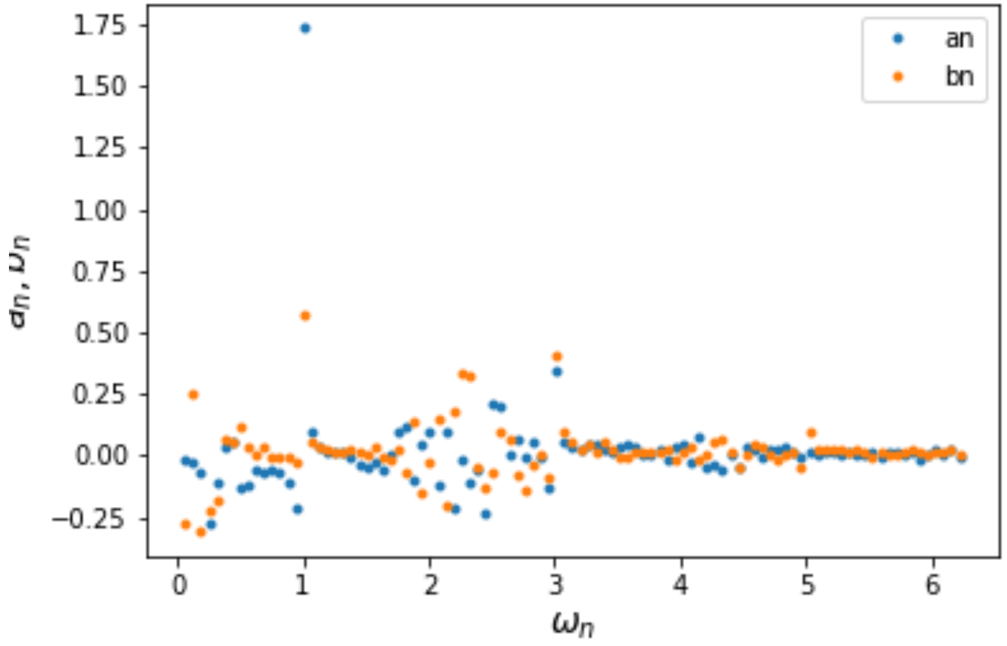


Vamos calcular os coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_n t\, dt \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

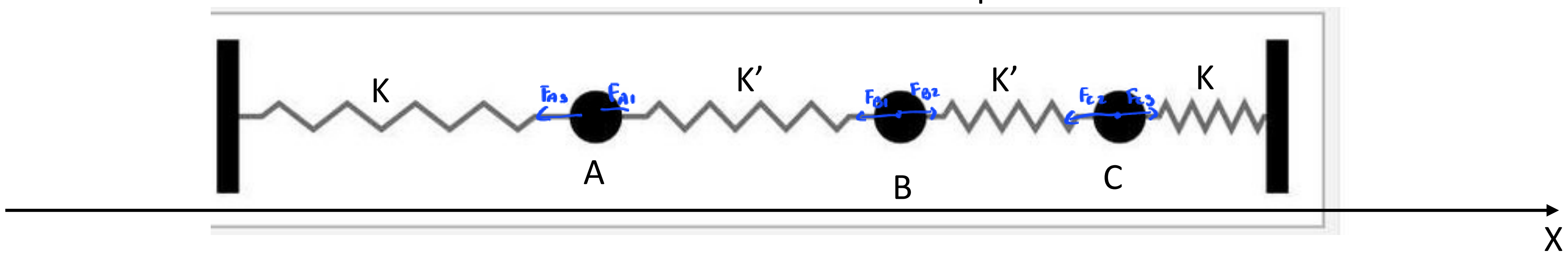
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_n t\, dt \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Cálculo numérico dos coeficientes:



Não tem frequência carateristica

3 Osciladors Harmónicos Acoplados

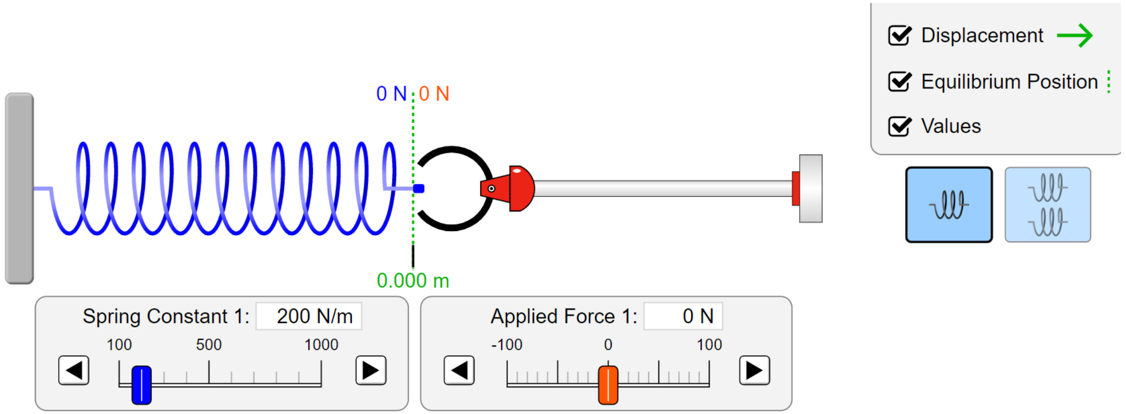


Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

Que forças estão aplicadas a cada corpo?

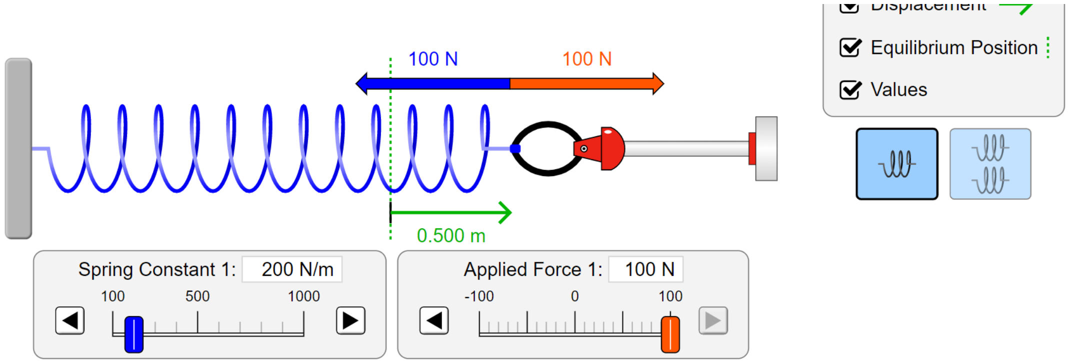
Mola: Posição de equilíbrio e comprimento da mola

Equilíbrio:
Posição x_{eq} e comprimento da mola l_{eq}



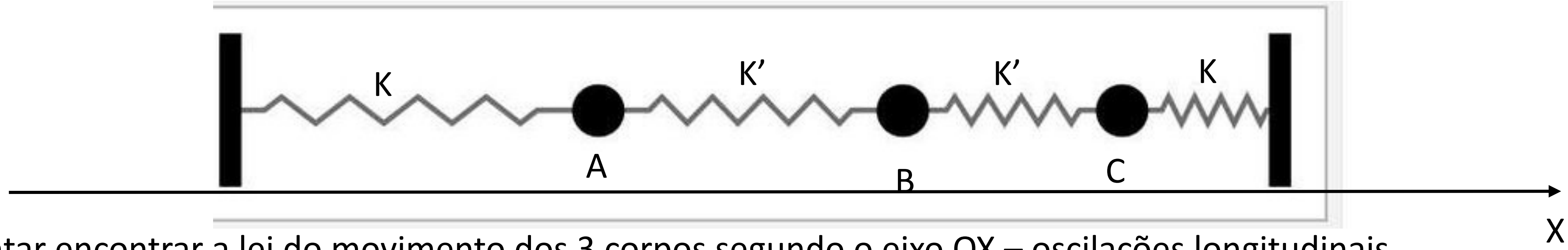
Mola distendida:
O afastamento $x - x_{eq}$ à posição de equilíbrio é quanto o comprimento da mola l aumentou

$$x - x_{eq} = l - l_{eq}$$



https://phet.colorado.edu/sims/html/hookes-law/latest/hookes-law_en.html

3 Osciladors Harmónicos Acoplados

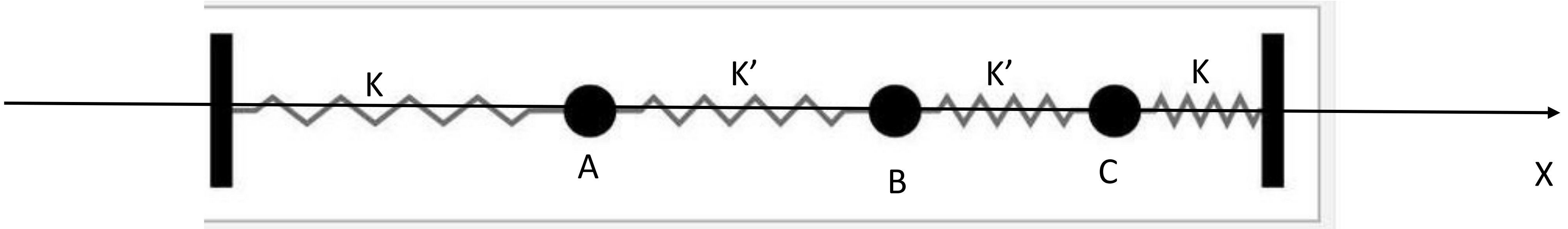


Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

<u>Força aplicada ao corpo B:</u>

$$F_{Bx} = -k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right] - k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_C - x_{Ceq}\right)\right]$$

3 Osciladors Harmónicos Acoplados



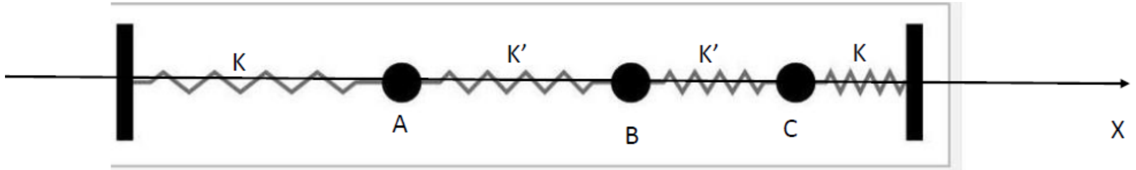
Vamos tentar encontrar a lei do movimento dos 3 corpos segundo o eixo OX – oscilações longitudinais

<u>Equação dinâmica de Newton para cada corpo</u>

Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\left(x_A - x_{Aeq}\right) - k'\left[\left(x_A - x_{Aeq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_A - x_{Aeq}\right)\right] - k'\left[\left(x_B - x_{Beq}\right) - \left(x_C - x_{Ceq}\right)\right]$

Corpo C $\quad m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\left(x_C - x_{Ceq}\right) - k'\left[\left(x_C - x_{Ceq}\right) - \left(x_B - x_{Beq}\right)\right]$



Corpo A $\quad m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Corpo B $\quad m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]$

Corpo C $\quad m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

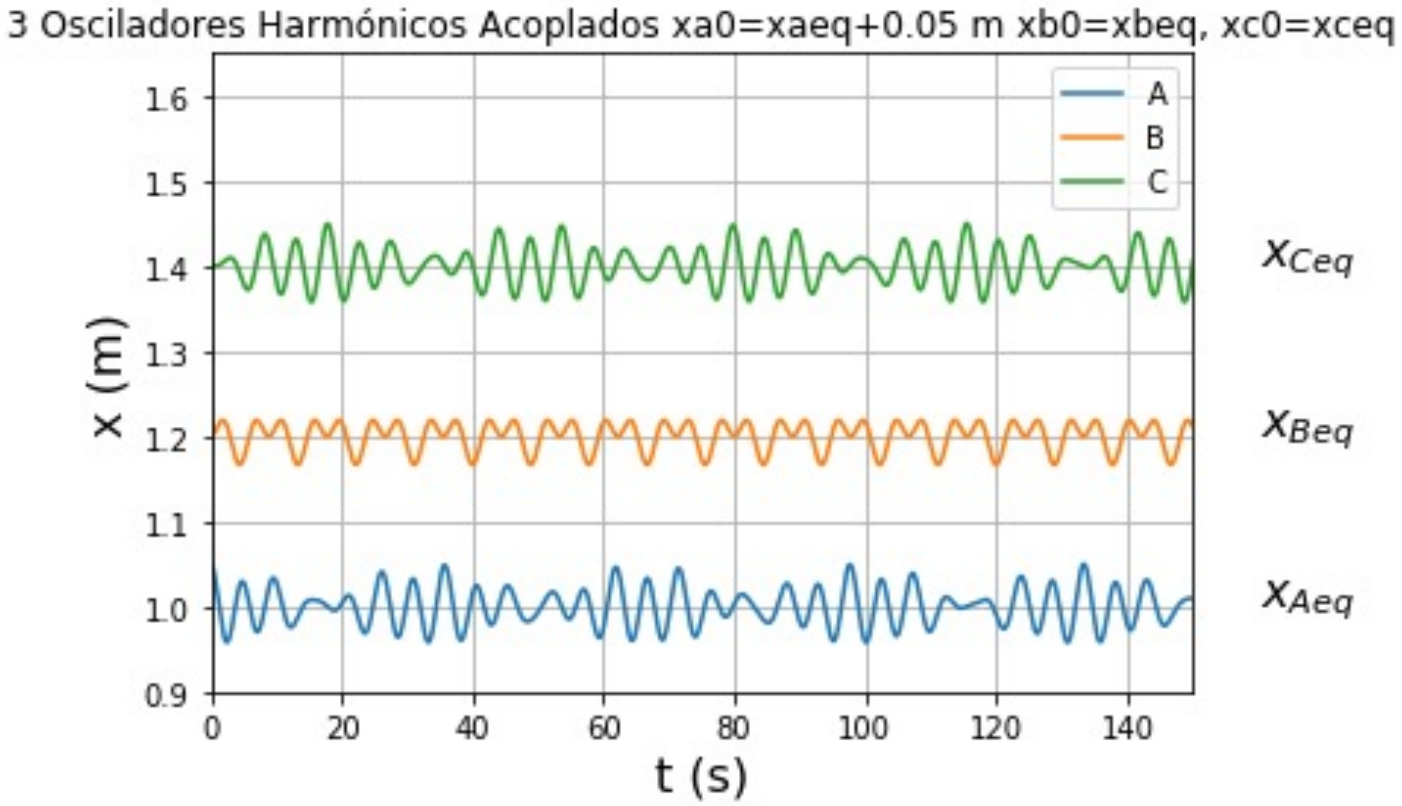
$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\ x_{Beq} = 1.2$ m $\quad x_{Ceq} = 1.4$ m

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m
$x_{B0} = x_{Beq} \quad x_{C0} = x_{Ceq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$

Movimento de cada corpo parece periódico



MODOS NORMAIS: Cálculo

Corpo A $m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})\,]$

Corpo B $m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})]$

Corpo C $m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})]$

Estas equações admitem soluções sinusoidais para cada corpo?

Transformação das variáveis x para o desvio u à posição de equilíbrio x_{eq}

$$\begin{aligned} x_A - x_{Aeq} &= u_A \\ x_B - x_{Beq} &= u_B \\ x_C - x_{Ceq} &= u_C \end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} m\,\dfrac{d^2u_A}{dt^2} = -k\,u_A - k'(u_A - u_B) \\ m\,\dfrac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C) \\ m\,\dfrac{d^2u_{CA}}{dt^2} = -k\,u_C - k'(u_C - u_B) \end{cases}$$

MODOS NORMAIS

$$\begin{cases} m\,\dfrac{d^2u_A}{dt^2} = -k\,u_A\; - k'(u_A - u_B) \\ m\,\dfrac{d^2u_B}{dt^2} = -k'(u_B - u_A) - k'(u_B - u_C) \\ m\,\dfrac{d^2u_{CA}}{dt^2} = \;-k\,u_C - k'(u_C - u_B) \end{cases}$$

Suponha-se que $\quad u_i = A_i\cos(\omega t + \alpha)$

Substituir nas equações:

$$\begin{cases} -\omega^2\,u_A = -\dfrac{k}{m}\,u_A\; - \dfrac{k'}{m}(u_A - u_B) \\ -\omega^2\,u_B = \dfrac{-k'}{m}(u_B - u_A) - \dfrac{k'}{m}(u_B - u_C) \\ -\omega^2\,u_C = \;-\dfrac{k}{m}\,u_C - \dfrac{k'}{m}(u_C - u_B) \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right)u_A \; - \; \dfrac{k'}{m}u_B = 0 \\ -\dfrac{k'}{m}u_A \; + \; \left(\dfrac{2k'}{m} - \omega^2\right)u_B \; - \dfrac{k'}{m}u_C = 0 \\ -\dfrac{k'}{m}u_B + \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right)u_C = 0 \end{cases}$$

Sistema homogéneo de 3 equações a 3 incógnitas

MODOS NORMAIS

Suponha-se que $\quad u_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$

Sistema homogéneo de 3 equações a 3 incógnitas

$$\begin{cases} \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_A - \frac{k'}{m} u_B = 0 \\ -\frac{k'}{m} u_A + \left(\frac{2k'}{m} - \omega^2\right) u_B - \frac{k'}{m} u_C = 0 \\ -\frac{k'}{m} u_B + \left(\frac{k+k'}{m} - \omega^2\right) u_C = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{k+k'}{m} u_A - \frac{k'}{m} u_B = \omega^2 u_A \\ -\frac{k'}{m} u_A + \frac{2k'}{m} u_B - \frac{k'}{m} u_C = \omega^2 u_B \\ -\frac{k'}{m} u_B + \frac{k+k'}{m} u_C = \omega^2 u_C \end{cases}$$

Pode ser escrito com matrizes:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

Problema de valores (ω^2) e vetores próprios

MODOS NORMAIS

Suponha-se que $u_i = A_i \cos(\omega t + \alpha)$

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{k+k'}{m}\right) & -\dfrac{k'}{m} & 0 \\ -\dfrac{k'}{m} & \left(\dfrac{2k'}{m}\right) & -\dfrac{k'}{m} \\ 0 & -\dfrac{k'}{m} & \left(\dfrac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix}$$

Problema de valores (ω^2)e vetores próprios

(determinante)

<u>Tem solução não nula</u>, o que requer:

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right) & -\dfrac{k'}{m} & 0 \\ -\dfrac{k'}{m} & \left(\dfrac{2k'}{m} - \omega^2\right) & -\dfrac{k'}{m} \\ 0 & -\dfrac{k'}{m} & \left(\dfrac{k+k'}{m} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

MODOS NORMAIS

Problema:

a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

em que $k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)

c) Verifique que os vetores próprios são ortogonais (produto escalar nulo).

<u>Python:</u>

```
from numpy import linalg as LA
w, v = LA.eig(matdyn)  # eig: function para calcular valores e vetores próprios
                       #    de uma matriz simétrica
                       # w: valores próprios
                       # v: vetores próprios
```

MODOS NORMAIS

Problema:

a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

em que $k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)

Solução:

```
w, v = LA.eig(matdyn)   # eig: function para calcular valores e vetores próprios
print(np.sqrt(w),v)

(array([0.70710678,        1.22474487,       1.41421356]),   # Frequencias

array([[ 4.08248290e-01, -7.07106781e-01,  5.77350269e-01], # Vetores próprios
           [ 8.16496581e-01,  4.02240178e-16, -5.77350269e-01],
           [ 4.08248290e-01,  7.07106781e-01,  5.77350269e-01]]))
```

Modo Normal Simétrico

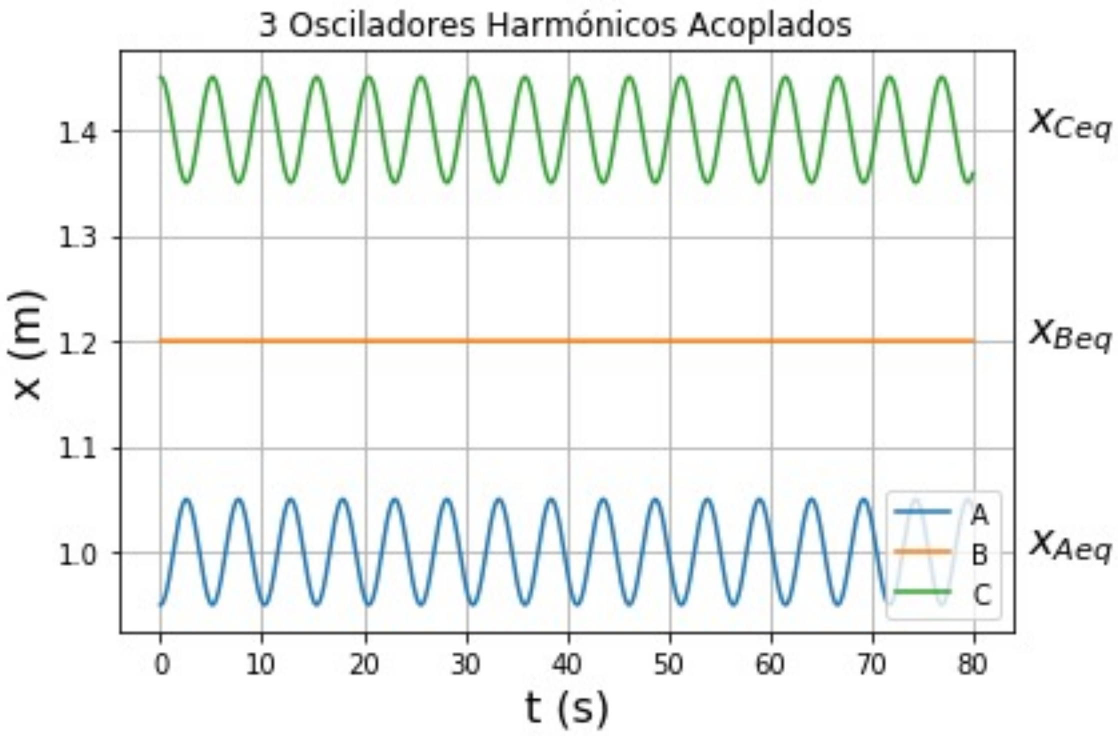
```
frequência: 1.22474487

vetor próprio:
        [-7.07106781e-01,            -u
          4.02240178e-16,             0
          7.07106781e-01 ]            u
```

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1\ \mathrm{kg}$

$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\quad x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$

$$x_{A0} = x_{Aeq} - 0.05\ \mathrm{m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq}$$
$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.05\ \mathrm{m}$$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$



T=5.130 s e ω= 1.225 rad/s

(c) Longitudinal normal modes

Modo Normal Asimétrico

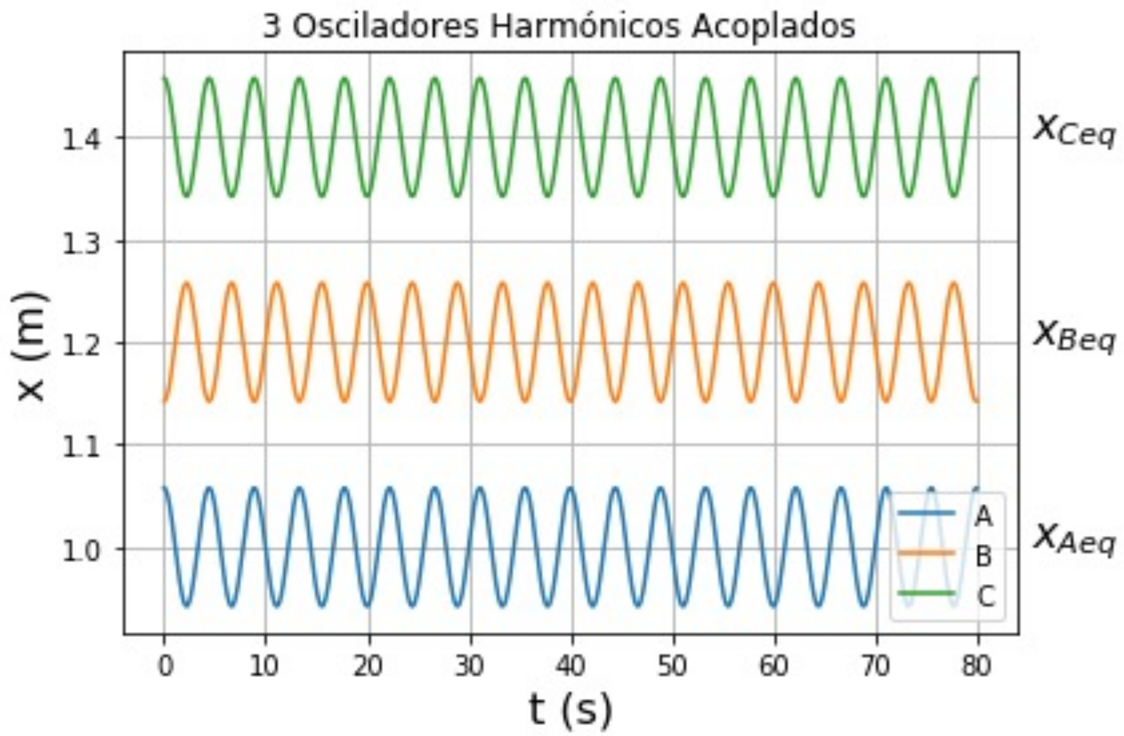
```
frequência: 1.41421356

vetor próprio:
       [ 5.77350269e-01,          u
        -5.77350269e-01,         -u
         5.77350269e-01 ]         u
```

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\; m = 1\ \mathrm{kg}$

$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\quad x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05\ \mathrm{m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq} - 0.05\mathrm{m}$$
$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.05\mathrm{m}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$



T= 4.443 s e ω= 1.414 rad/s

Modo Normal 3

```
frequência: 0.70710678

vetor próprio:
        [ 4.08248290e-01,
          8.16496581e-01,
          4.08248290e-01 ]
```

u

$2u$

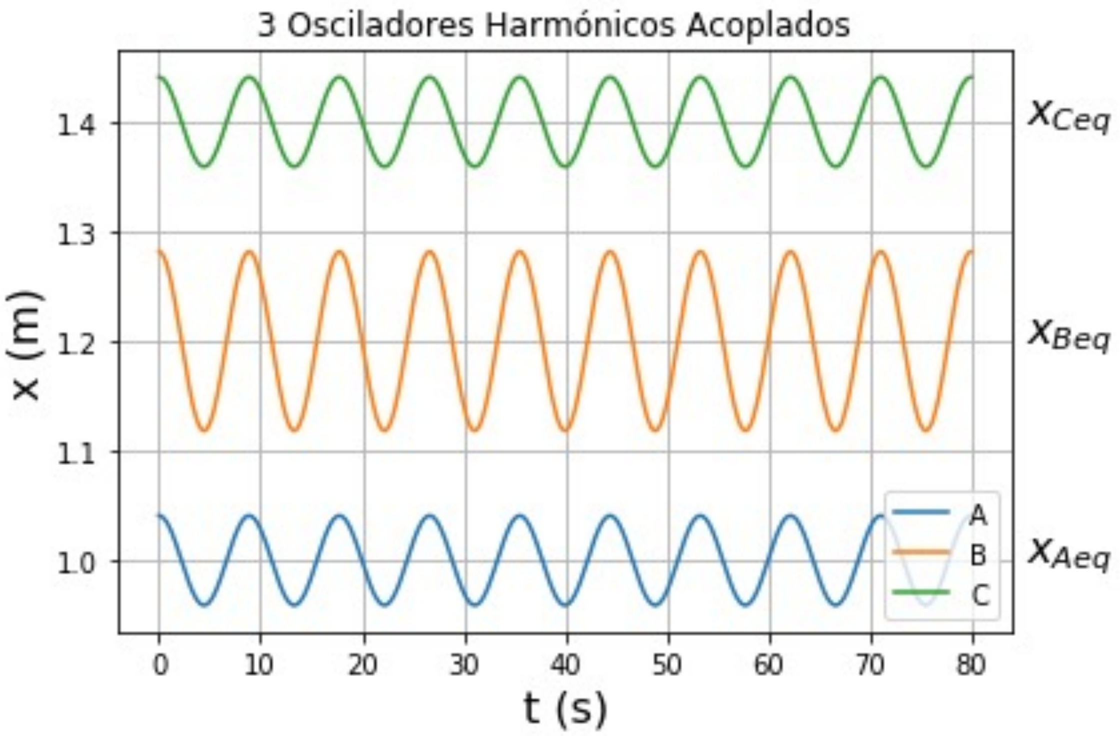
u

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\, k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1\ \mathrm{kg}$

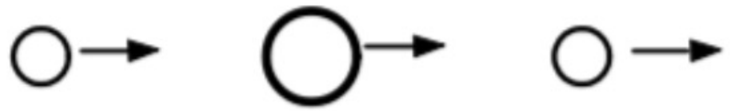
$x_{Aeq} = 1.0\ \mathrm{m}\quad x_{Beq} = 1.2\ \mathrm{m}\quad x_{Ceq} = 1.4\ \mathrm{m}$

$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.04\ \mathrm{m}$$
$$x_{B0} = x_{Beq} + 0.08\ \mathrm{m}$$
$$x_{C0} = x_{Ceq} + 0.04\ \mathrm{m}$$

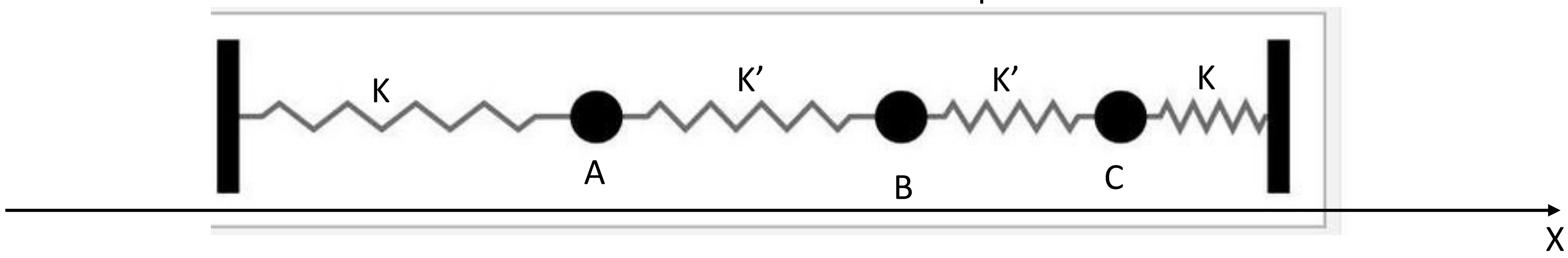
$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$



T= 8.886 s e ω= 0.707 rad/s

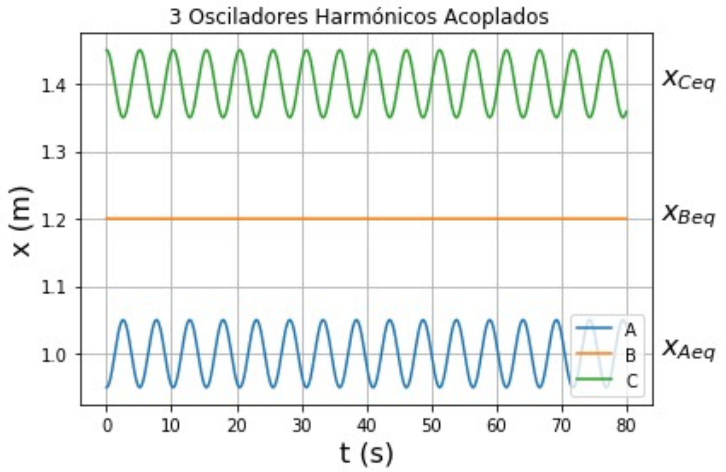


3 Osciladores Harmónicos Acoplados

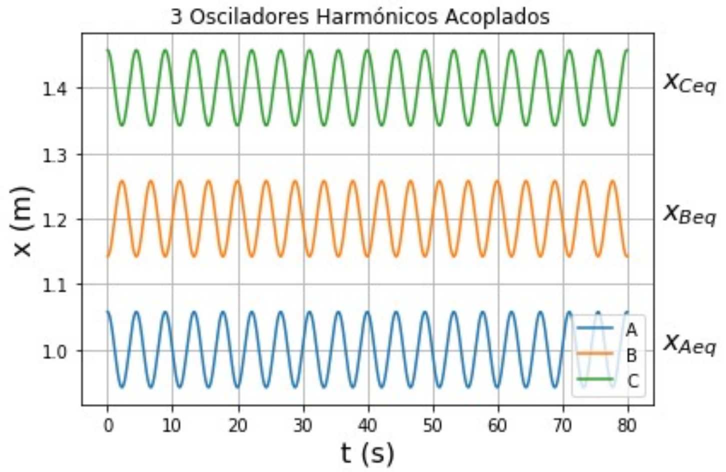


3 modos normais:

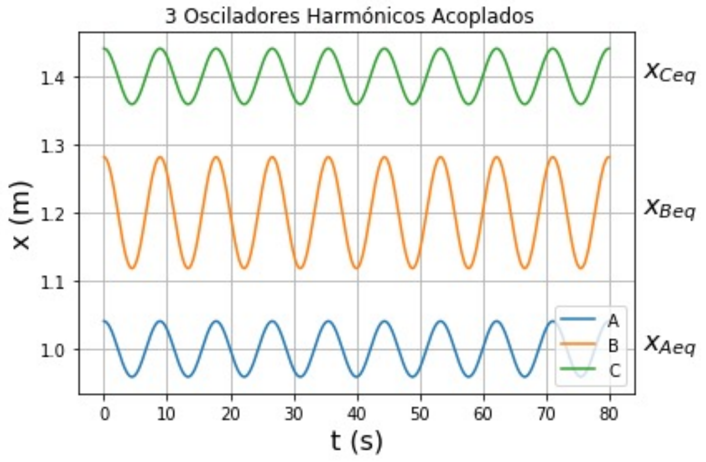
+ 0 +



+ - +



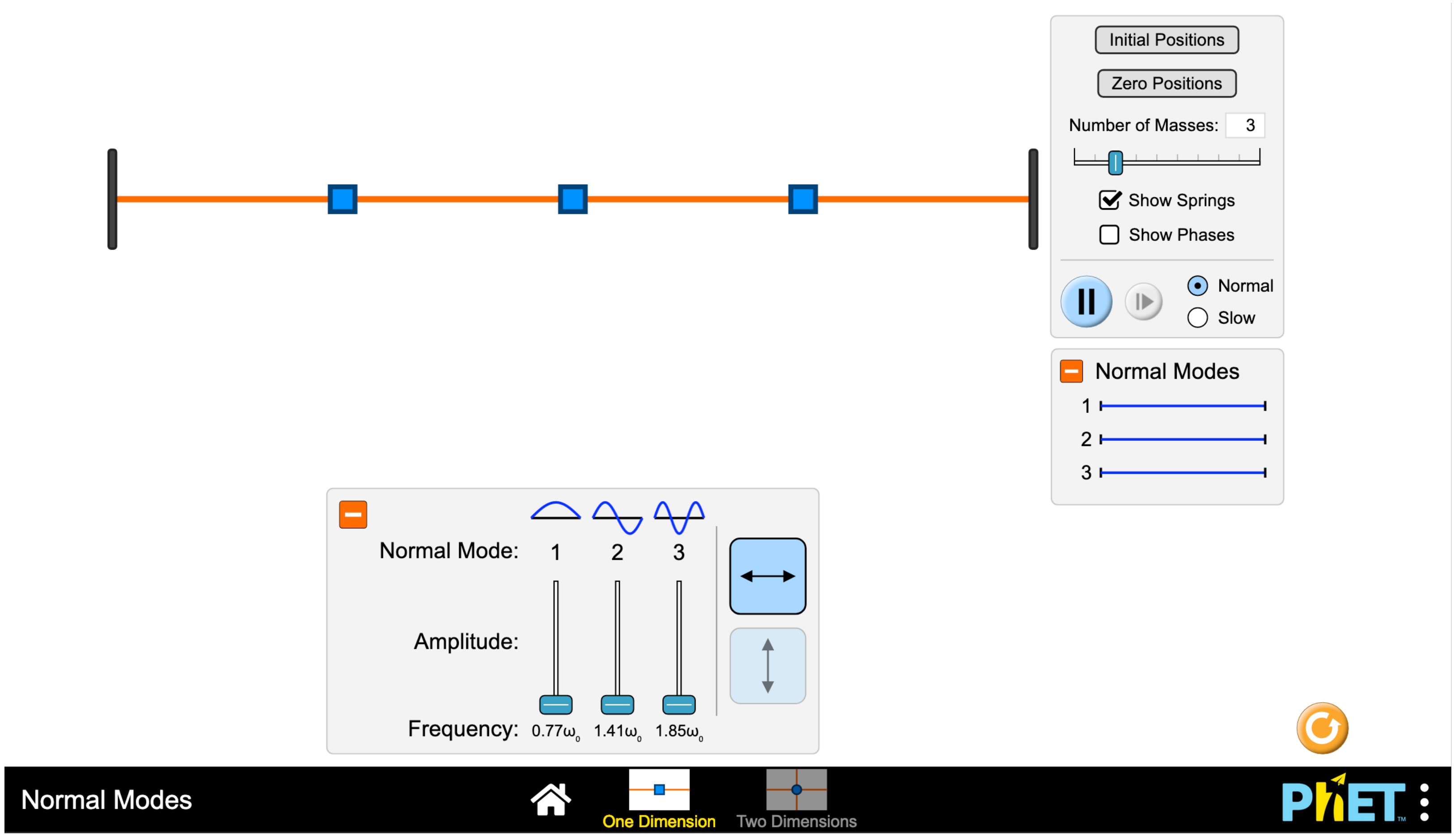
+ ++ +



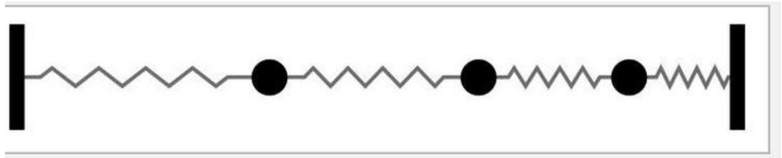
Qualquer movimento de 3 corpos acoplados por interação elástica é uma sobreposição dos 3 MODOS NORMAIS

3 Osciladors Harmónicos Acoplados

https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes_en.html



Amortecido



Corpo A $m\,\frac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})] - b\,v_{Ax}$

Corpo B $m\,\frac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})] - b\,v_{Bx}$

Corpo C $m\,\frac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})] \quad - b\,v_{Cx}$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

$k = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\ x_{Beq} = 1.2$ m $\quad x_{Ceq} = 1.4$ m

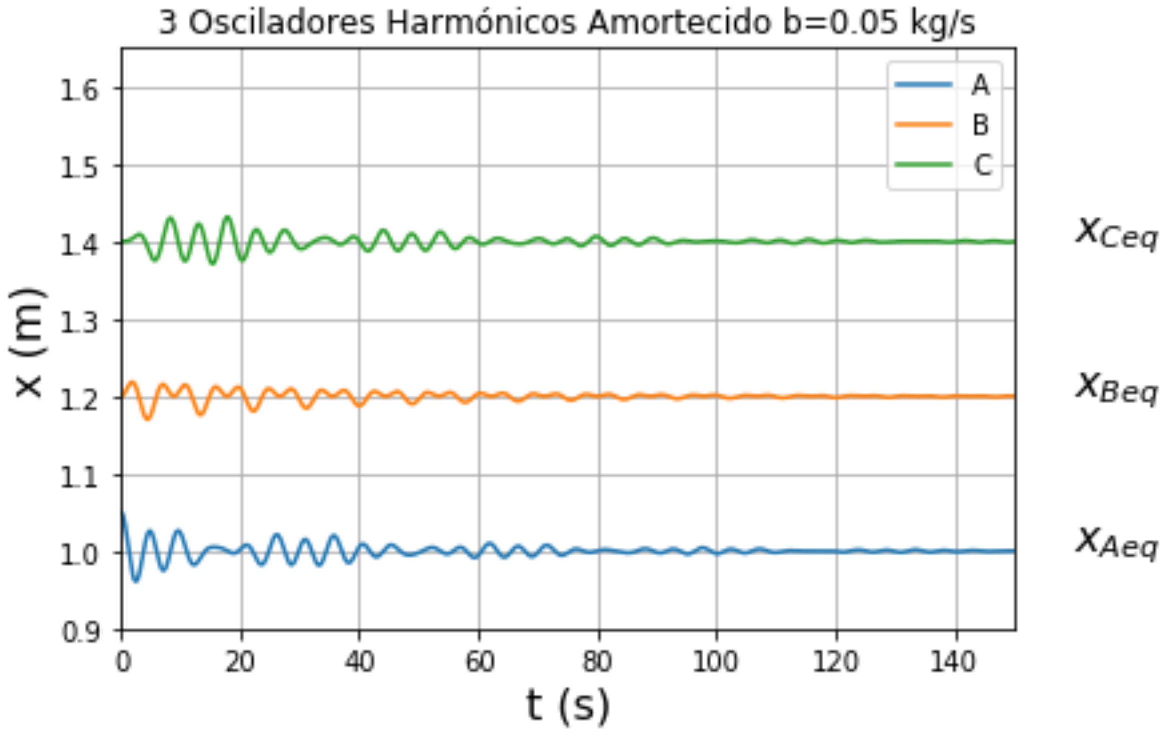
$$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05 \text{ m}$$

$$x_{B0} = x_{Beq}$$

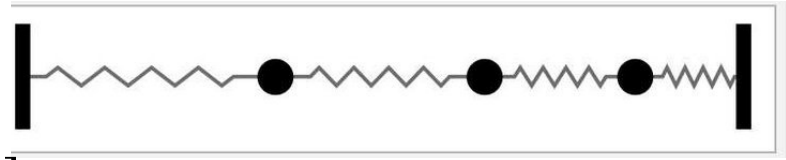
$$x_{C0} = x_{Ceq}$$

$$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$$

Cada corpo tende para a posição de equilíbrio, à medida que o tempo aumenta.



Oscilador Harmónico Forçado



Corpo A $\quad m\dfrac{d^2x_A}{dt^2} = F_{Ax} = -k\,(x_A - x_{Aeq}) - k'[(x_A - x_{Aeq}) - (x_B - x_{Beq})] - b\,v_{Ax} + F_0\cos(\omega_f t)$

Corpo B $\quad m\dfrac{d^2x_B}{dt^2} = F_{Bx} = -k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_A - x_{Aeq})] - k'[(x_B - x_{Beq}) - (x_C - x_{Ceq})] - b\,v_{Bx}$

Corpo C $\quad m\dfrac{d^2x_C}{dt^2} = F_{Cx} = -k\,(x_C - x_{Ceq}) - k'[(x_C - x_{Ceq}) - (x_B - x_{Beq})] \quad - b\,v_{Cx}$

Resolvidas pelo Método de Euler-Cromer:

$k = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}}; k' = 0.5\,\frac{\text{N}}{\text{m}};\ m = 1$ kg, $b = 0.05$ kg/s

$x_{Aeq} = 1.0$ m $\ x_{Beq} = 1.2$ m $\quad x_{Ceq} = 1.4$ m

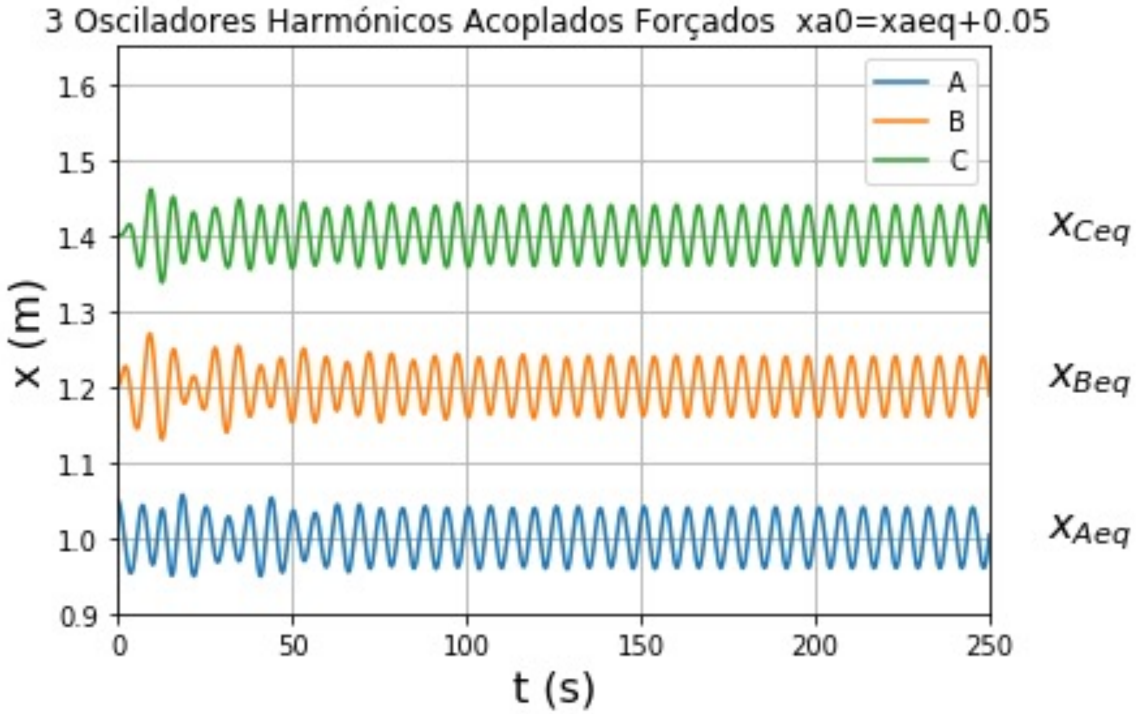
$F_0 = 0.04\ N\ ;\ \omega_f = 1$ rad/s

$x_{A0} = x_{Aeq} + 0.05$ m

$x_{B0} = x_{Beq}$

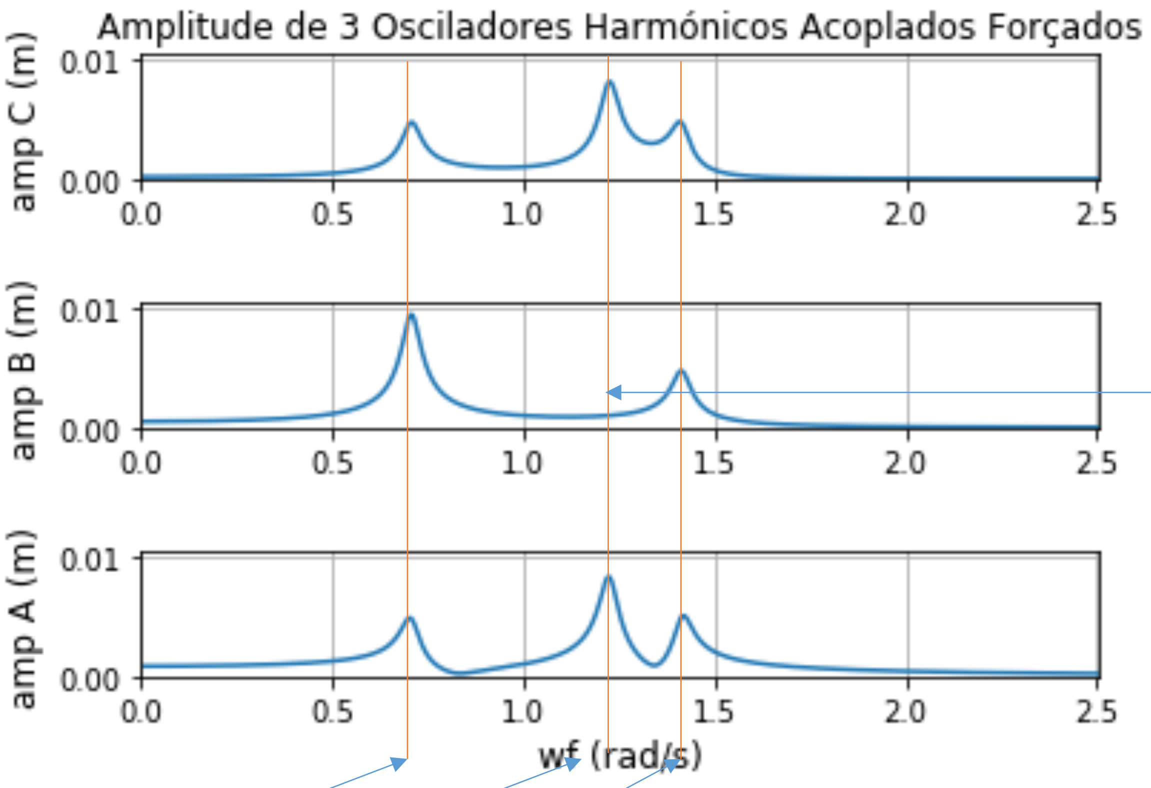
$x_{C0} = x_{Ceq}$

$v_{Ax0} = v_{Bx0} = v_{Cx0} = 0$



Cada corpo tende para um regime estacionário de um movimento harmónico simples, de frequência igual à da força exterior: $\qquad \omega_A = \omega_B = \omega_C = 1.000$ rad/s

Oscilador Harmónico Forçado: Amplitude no regime estacionário



Corpo B não participa no modo simétrico (ω =1.225rad/s)

Ressonâncias nas frequências $\omega_f = 0.703$, 1.225 e 1.409 rad/s.

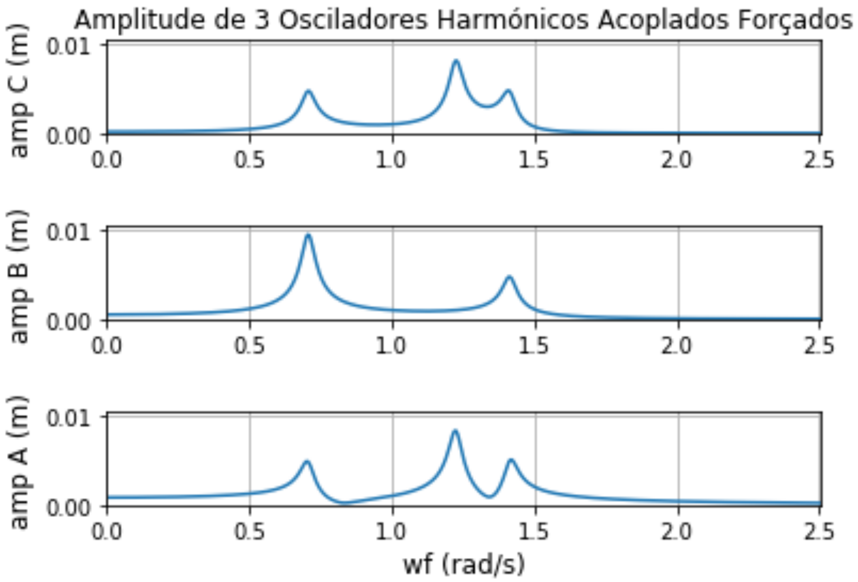
São as frequências dos modos normais?
Se no caso não forçado e amortecido, cada corpo tiver movimento harmónico simples (amplitude e período constantes) com estas frequências. SIM!

Modos Normais e Osciladores Forçados

Ressonância:

Quando são forçados por uma força exterior, apresentam Ressonância quando a frequência da força externa for igual à frequência dos modos normais.

⇒ Por medição pode-se determinar as frequências dos modos normais.



Modos Normais e Osciladores Forçados

Modos normais são:

- Medidos
- Calculados, ou por modelos ou por equações fundamentais da Física.

São usados no estudo da estrutura da matéria: Moléculas, Cristais, Sólidos, …

<u>Ex: Materiais:</u>

Experiência:

A matéria em estudo é excitada por luz laser, onda eletromagnética (campo elétrico)

Força elétrica= Carga * Campo Elétrico

Excita os núcleos atómicos, porque possuem carga elétrica positiva.

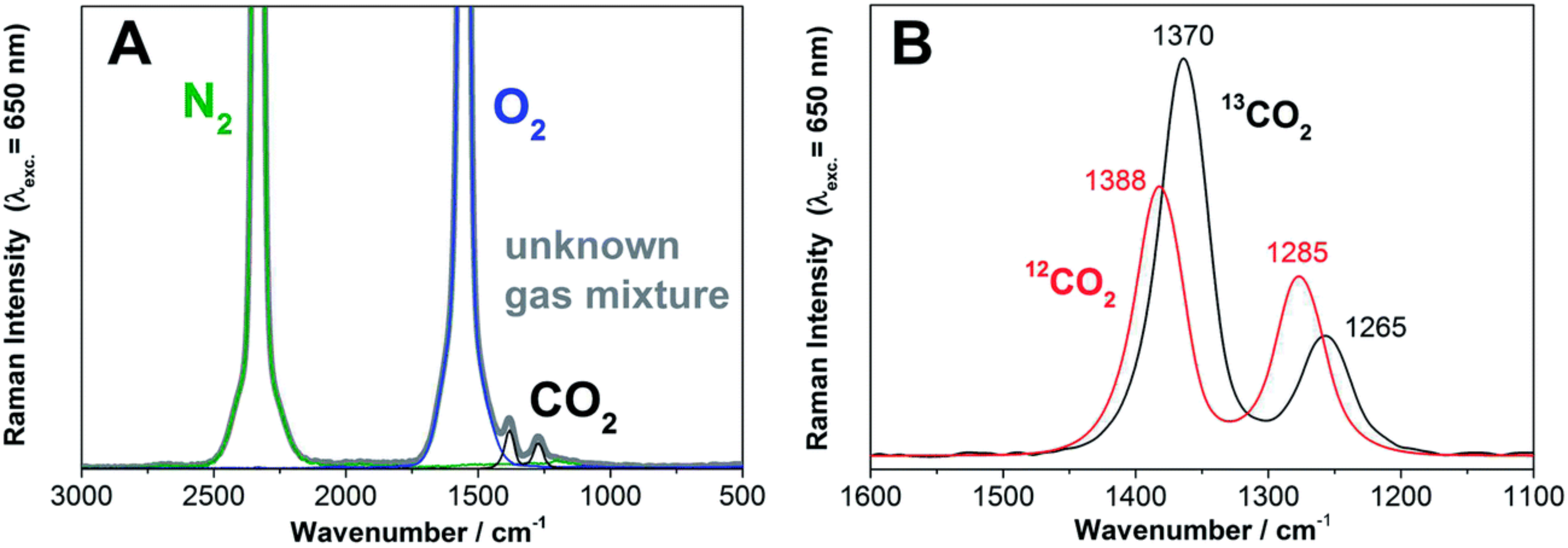
Quando a frequência do laser produz ressonância, obtêm-se os modos normais.

Teoria:

Modelos fenomenológicos – parâmetros ajustados aos valores experimentais dos modos normais

Primeiros Princípios: Todas as quantidades medidas calculadas pela equação fundamental da Mecânica Quântica.

Modos Normais: Ressonância



Excitação por lazer, que mede as frequências de ressonância
e as dos modos normais serve para determinar a constituição química dos gases.

MODOS NORMAIS

Problema:

a) Encontre os valores e os vetores próprios da matriz

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{k+k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} & 0 \\ -\frac{k'}{m} & \left(\frac{2k'}{m}\right) & -\frac{k'}{m} \\ 0 & -\frac{k'}{m} & \left(\frac{k+k'}{m}\right) \end{bmatrix}$$

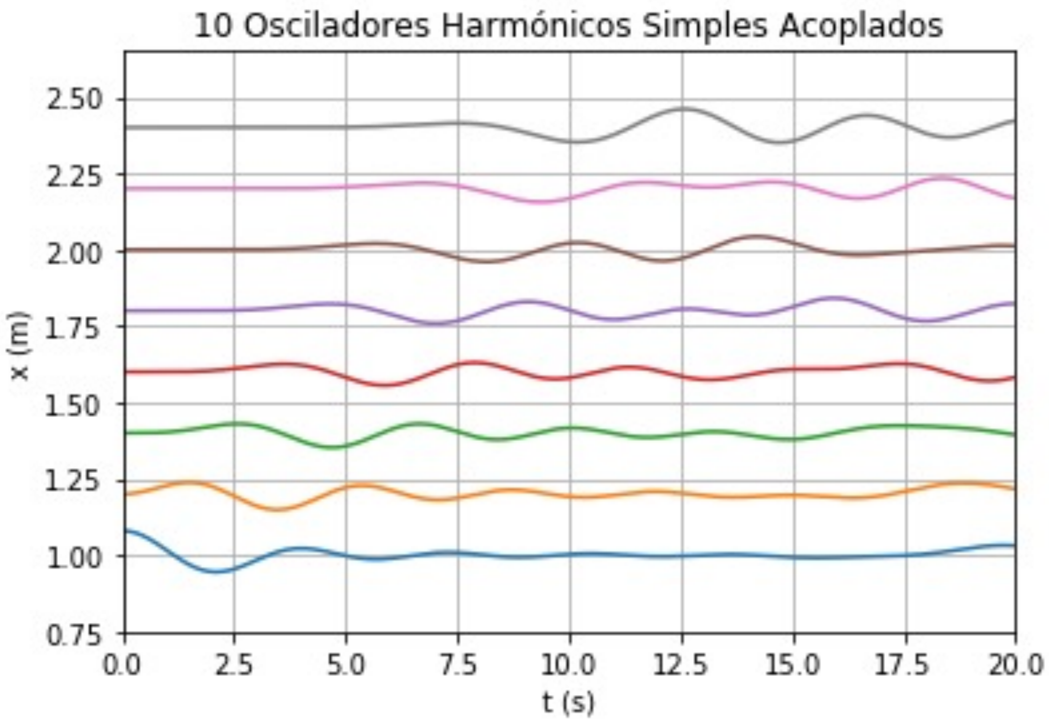
em que $k = 0\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}; k' = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}};\ m = 1$ kg

b) Calcule as frequências de vibração (= raiz quadrada do valor próprio)

c) Para o caso em que $m = 2$ kg, calcule as frequências dos modos normais.

N osciladores acoplados

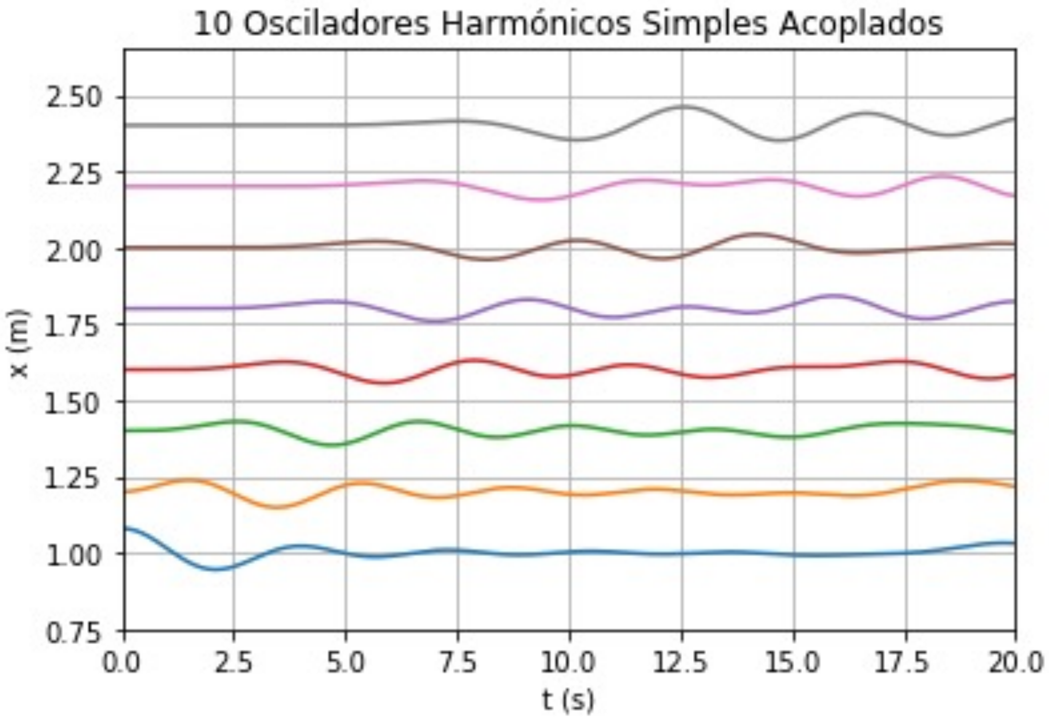
Propagação de um sinal em N osciladores acoplados



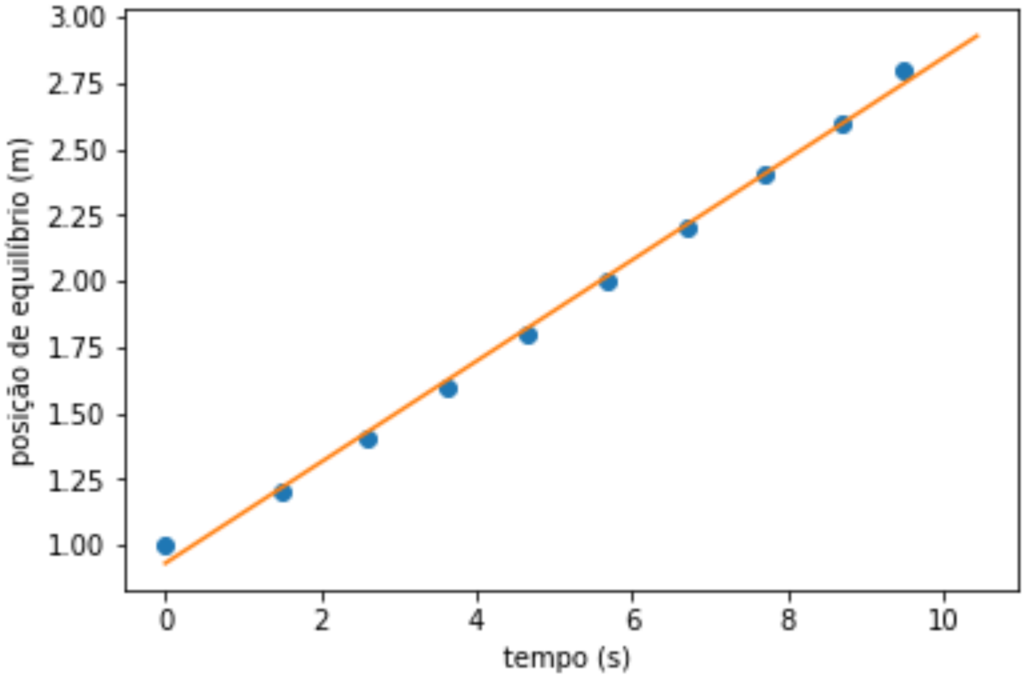
Acoplamentos de osciladores: Transmissão de energia, não instantânea

N osciladores acoplados

Propagação de um sinal em N osciladores acoplados



Tempo do primeiro máximo

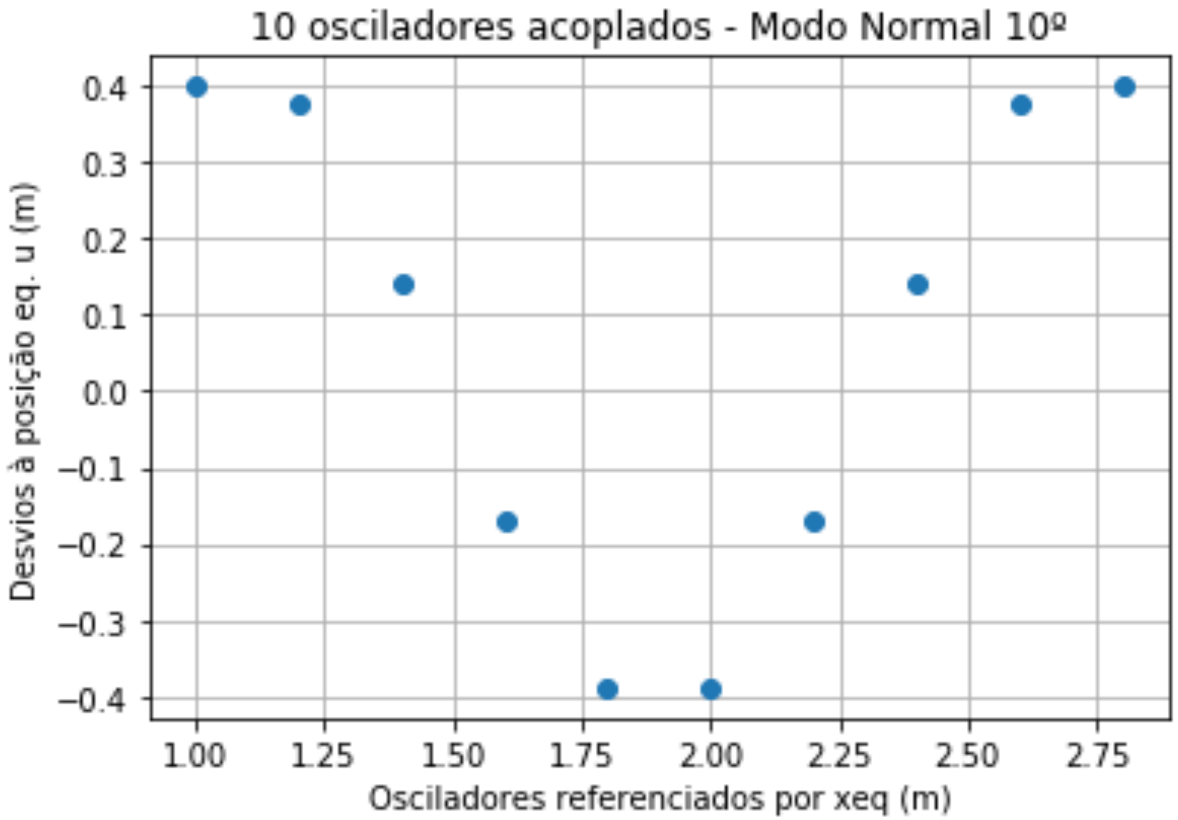


Velocidade de propagação da perturbação 0.192 ± 0.004 m/s

Acoplamentos de osciladores: **Transmissão não instantânea de informação e de energia**

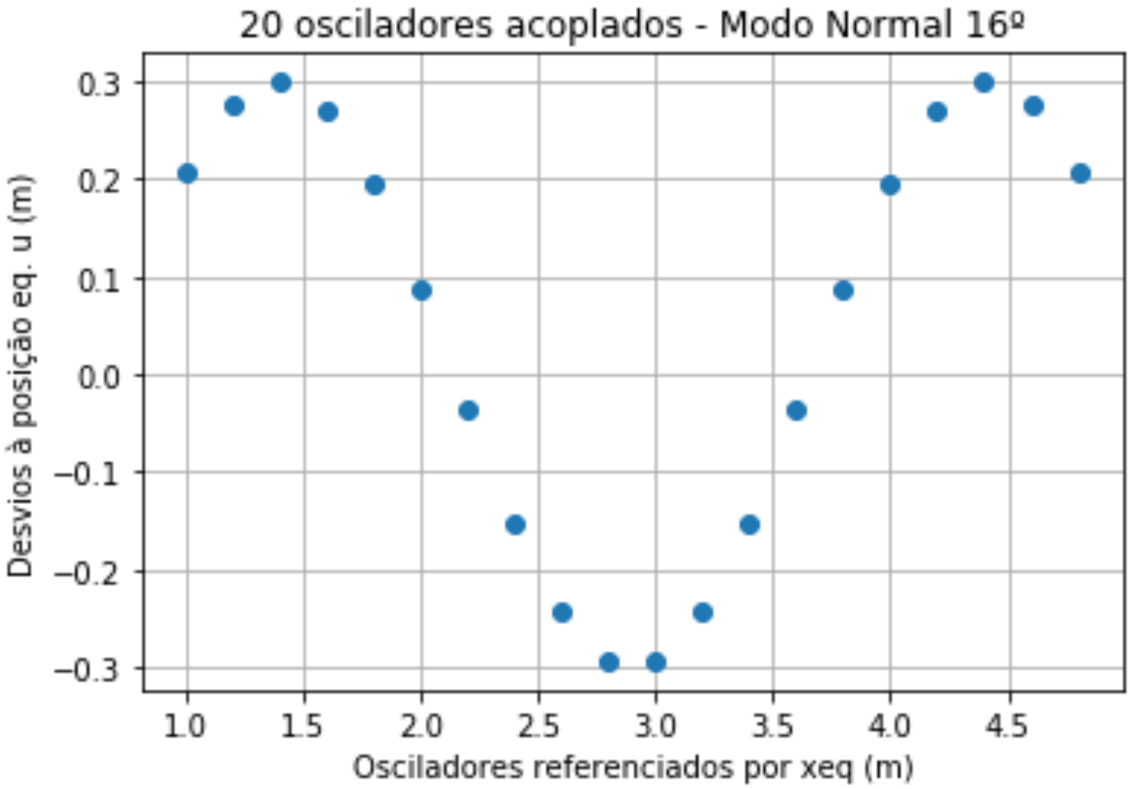
MODOS NORMAIS

10 osciladores acoplados: modo normal 10º



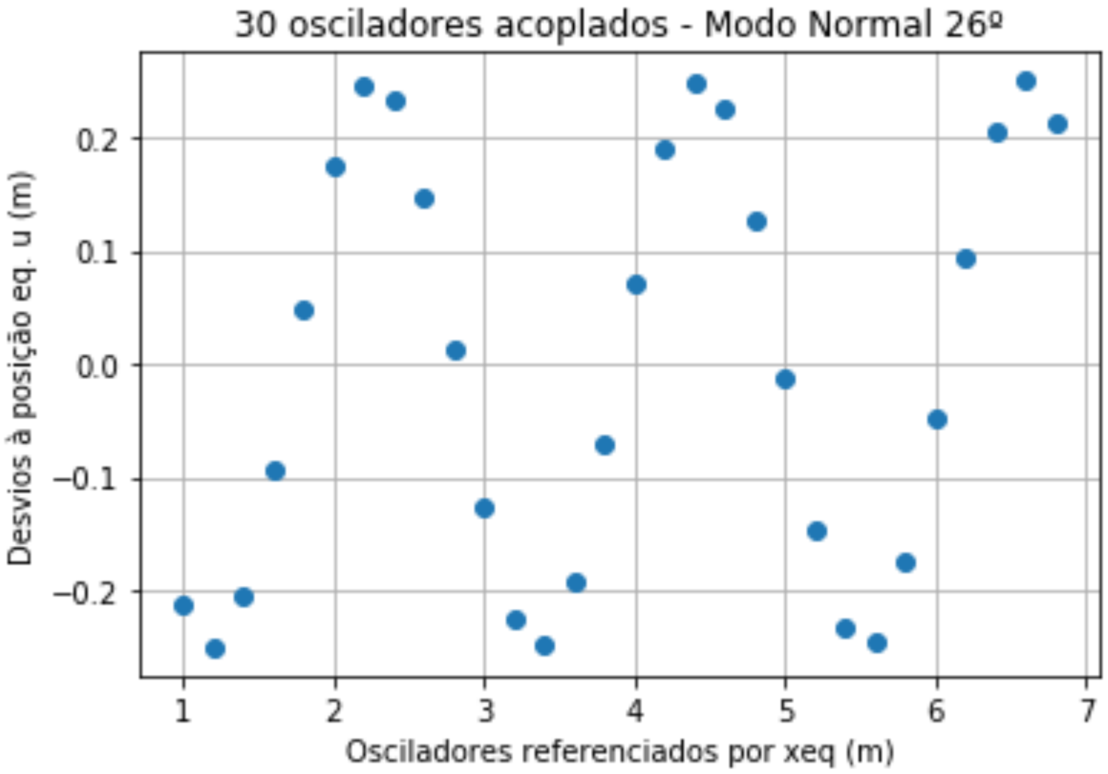
MODOS NORMAIS

20 osciladores acoplados: modo normal 16º



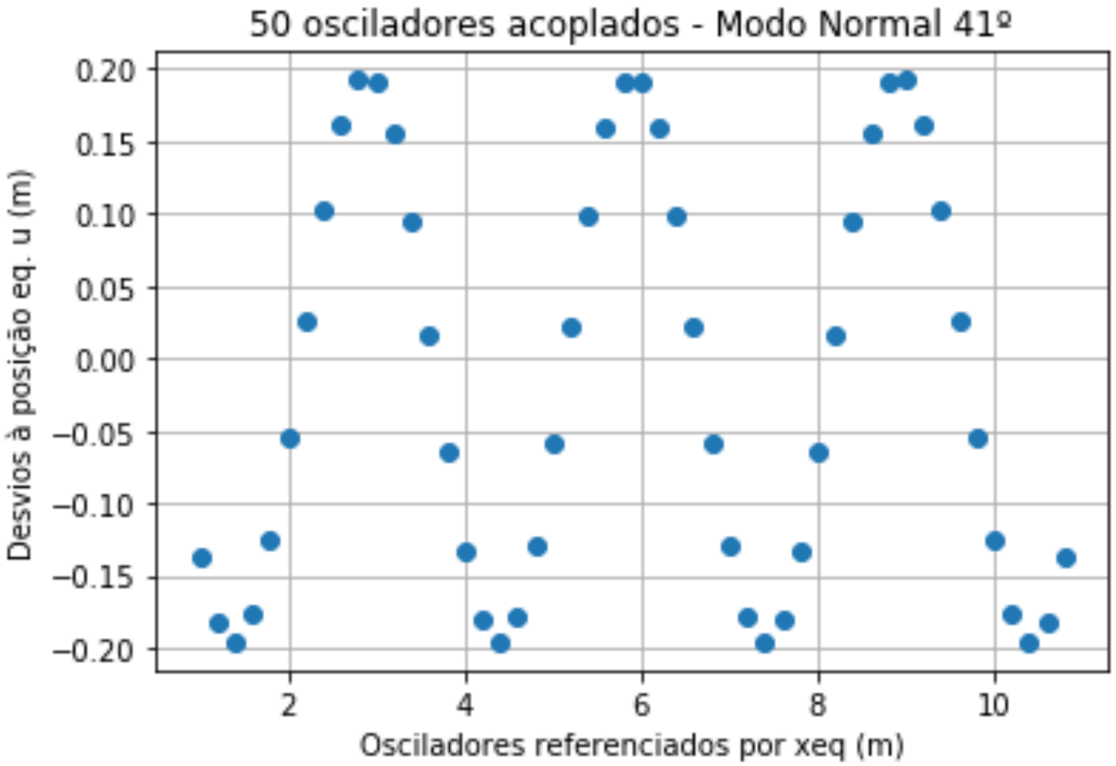
MODOS NORMAIS

30 osciladores acoplados: modo normal 26º



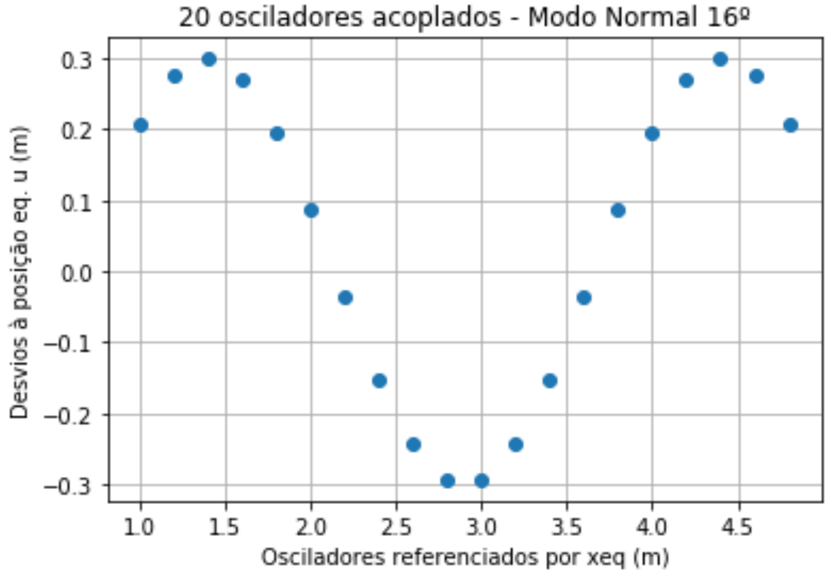
MODOS NORMAIS

50 osciladores acoplados: modo normal 41º



N osciladores acoplados

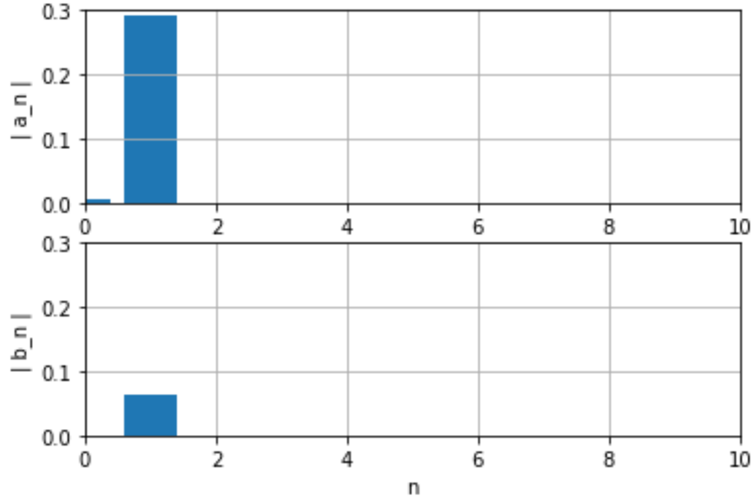
Considere 20 osciladores acoplados de igual massa. O modo normal longitudinal 16º apresenta os seguintes desvios às posições de equilíbrio:



Parece uma função sinusoidal!

Os coeficientes de Fourier da parte que representa uma repetição (de máximo a máximo).
O comprimento dessa repetição é $\lambda = 4.4 - 1.4$ m.

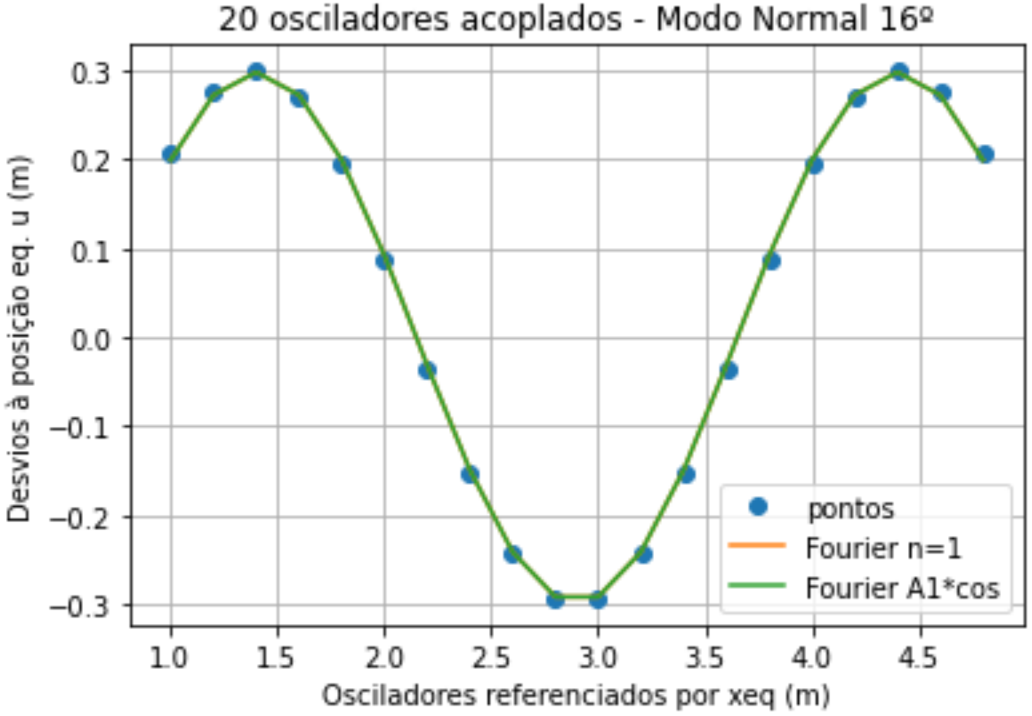
Coeficientes de Fourier



N osciladores acoplados

Considere 20 osciladores acoplados de igual massa. O modo normal longitudinal 16º apresenta os seguintes desvios às posições de equilíbrio:

O modo normal 16 usando só o termo de Fourier n=1:



$$u_{16}(x_{eq}) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3} x_{eq}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3} x_{eq}\right) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} x_{eq} - \frac{2\pi}{3} 1.4\right)$$

N osciladores acoplados

6 osciladores acoplados: modos normais

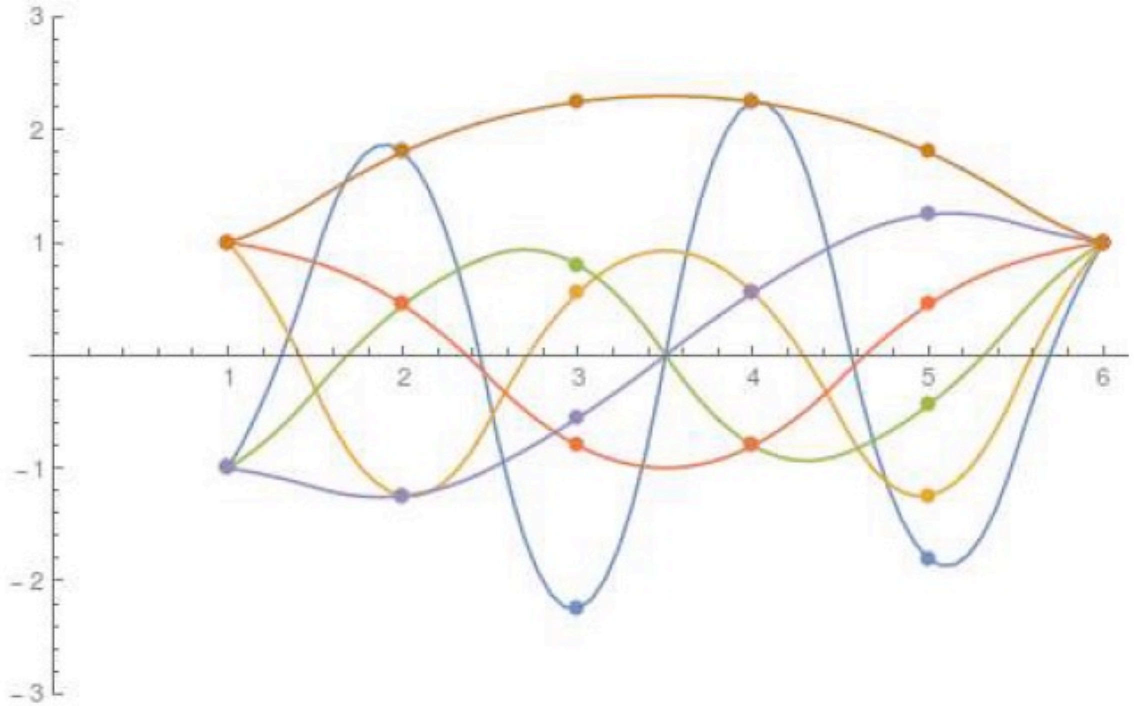
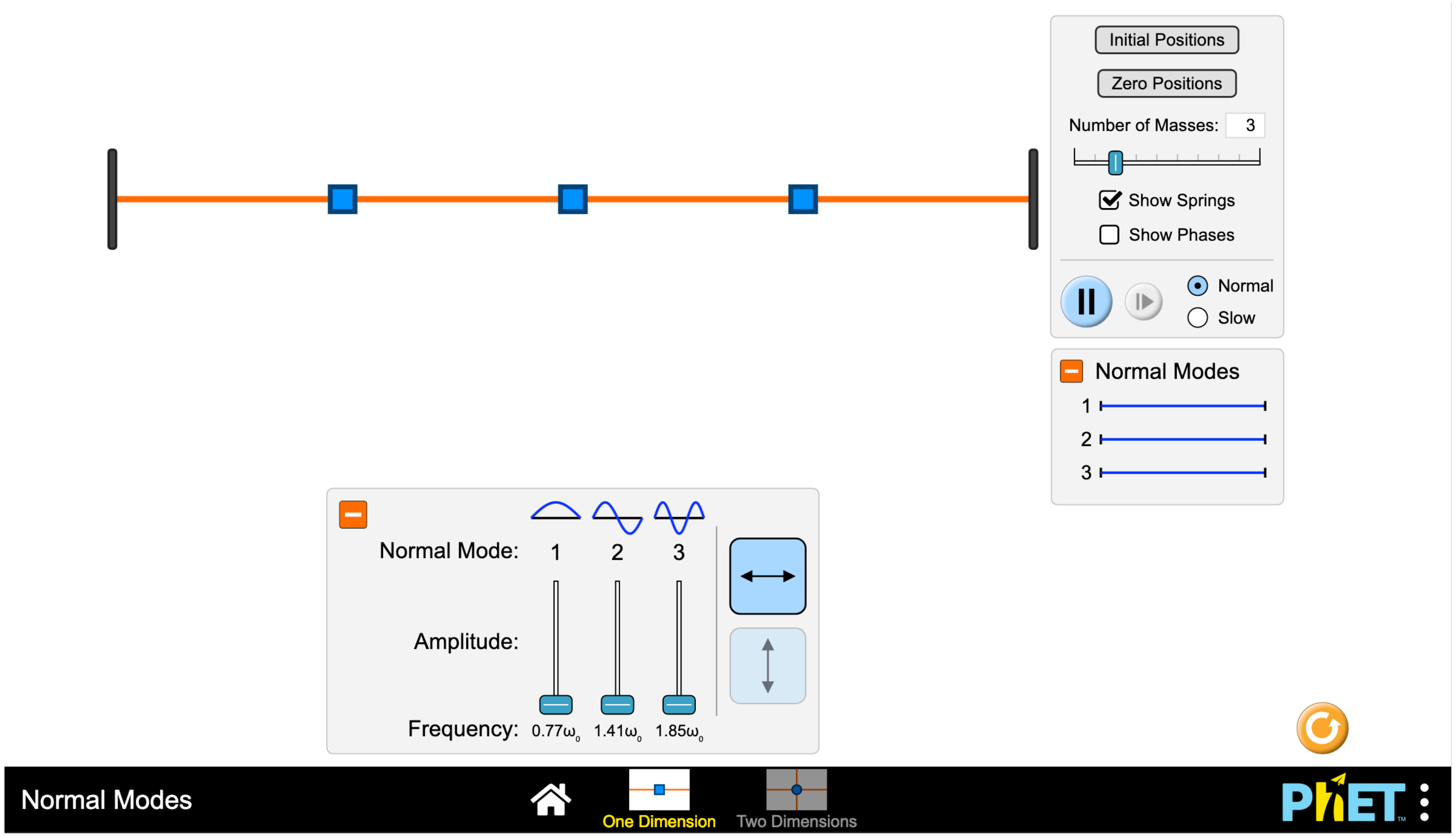


Figure 4. Normal modes displacements for the 6 mass system. These curves look like sine curves.

Os modos normais são um coseno ou seno em cada corpo!

MODOS NORMAIS Longitudinais e Transversais

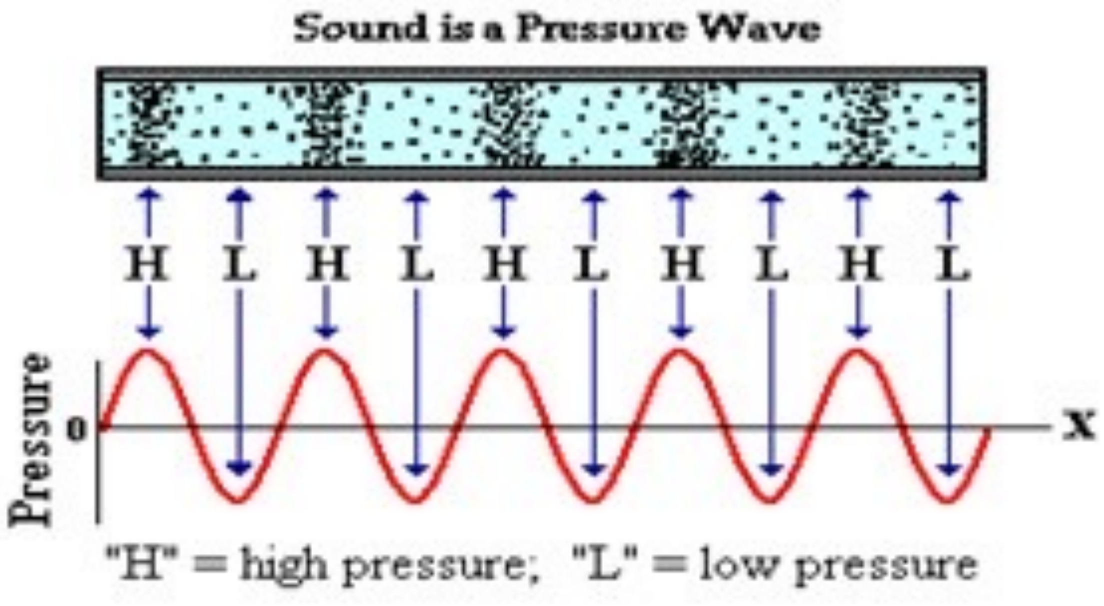
https://phet.colorado.edu/sims/html/normal-modes/latest/normal-modes_en.html



Ondas

Ondas longitudinais

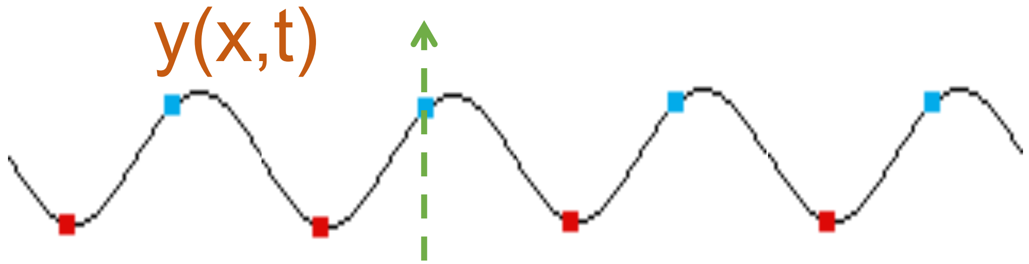
perturbação do meio tem a mesma direção da propagação da onda

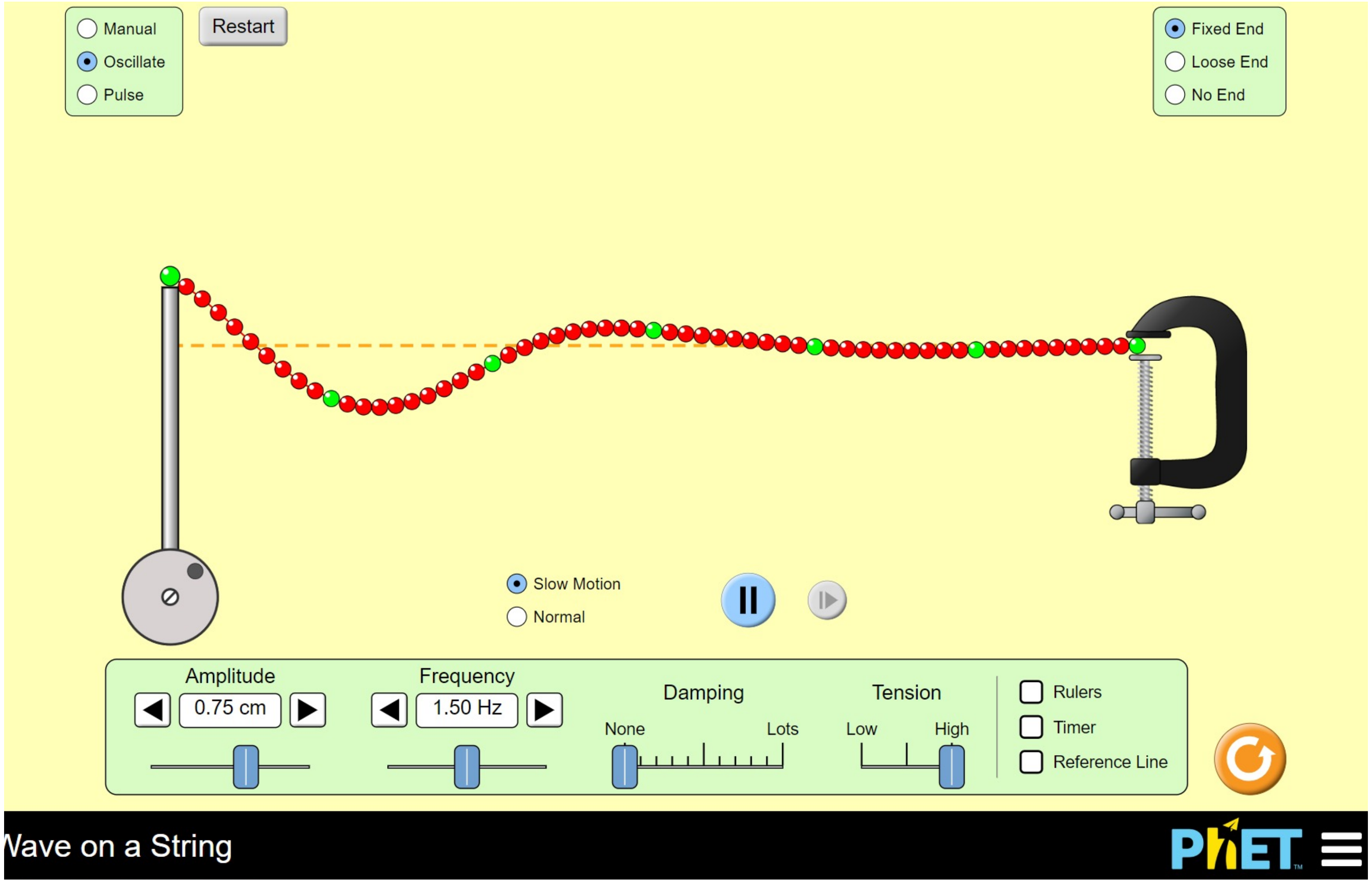


Ondas

Ondas transversais

a perturbação do meio é perpendicular à direção de propagação da onda

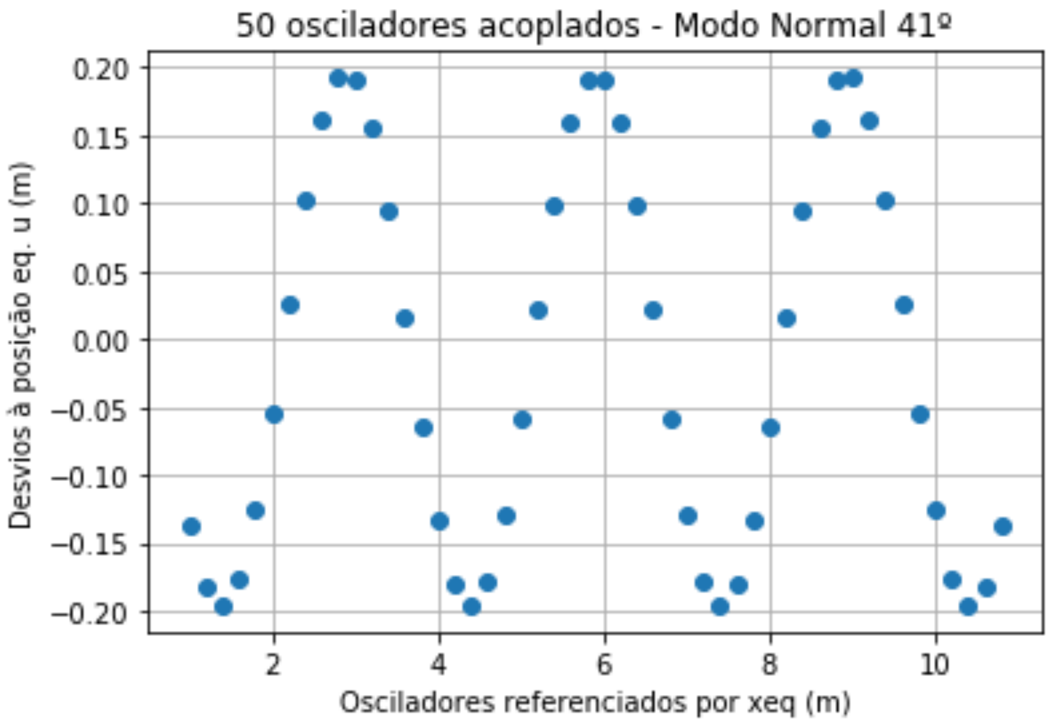




https://phet.colorado.edu/pt/simulations/wave-on-a-string

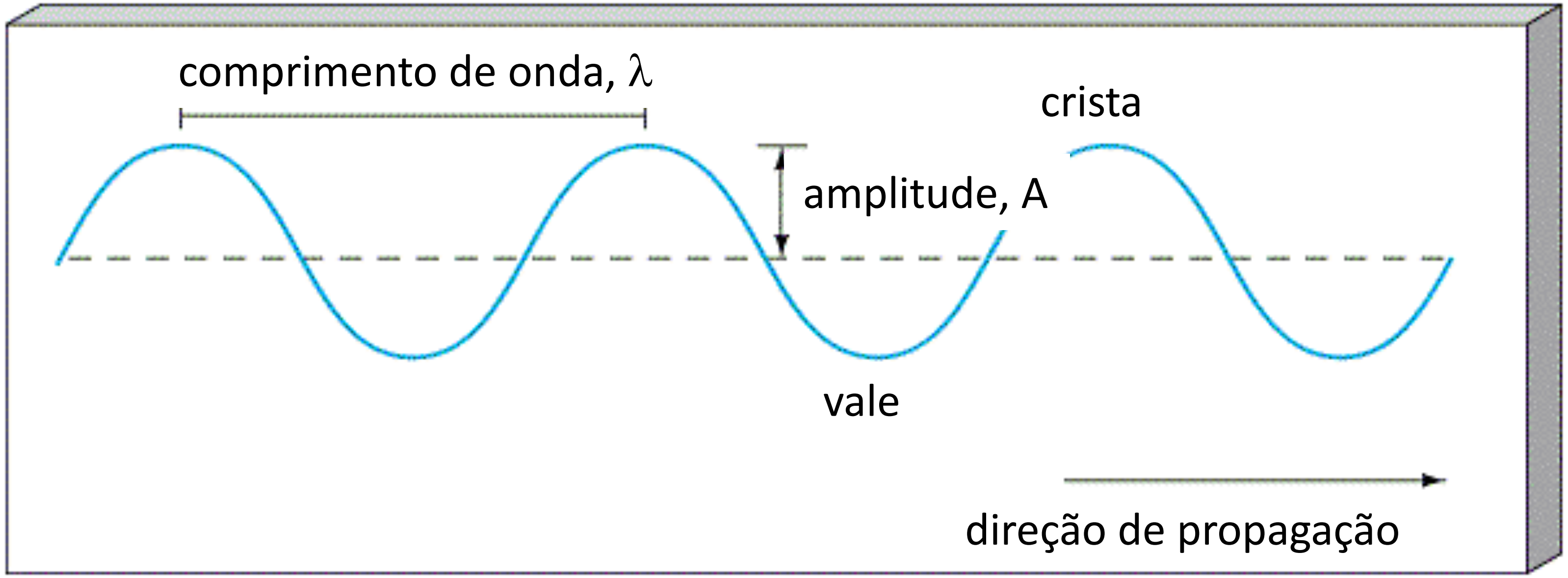
MODOS NORMAIS

50 osciladores acoplados: modo normal 41º



Como varia a oscilação em cada oscilador? Ou como varia no espaço?
Seno ou coseno!

Onda



Repetição no tempo

$$T$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Repetição no espaço

$$\lambda$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ = número de onda

Velocidade de propagação

$$\mathrm{v} = \lambda f$$