



DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE DE AVEIRO

## Modelação de Sistemas Físicos

Ano Académico 2021/2022 - 2º Semestre

# Exame - Resolução

## Parte Cálculo Analítico

**Data:** 6 julho 2022

**Hora:** 14H30

**Duração:** 1 hora e 15 minutos

**Disciplina:** 41769

**Salas:** 23.3.15

**Cotação:** 1)  $0.5 + 1 + 1 = 2.5$  valores

2)  $0.5 + 1 + 1 = 2.5$  valores

3)  $1 = 1$  valores

4)  $1 = 1$  valores

5)  $0.5 + 0.5 + 1 + 1 = 3$  valores

*Só é permitido o uso de máquina de calcular científica*

*As respostas não podem ser escritas a lápis*

*Justifique todas as respostas*

1. Foram medidos três comprimentos:

$$T = 25.3 \pm 0.2 \text{ cm}$$

$$R = 10.0 \pm 0.1 \text{ cm}$$

$$S = 5.0 \pm 0.2 \text{ cm}$$

a) Calcule a soma das duas quantidades  $A = T + R$

b) Calcule a diferença das duas quantidades  $D = T - S$

c) Calcule a razão  $r = T/R$ .

**Resolução resumida**

a)  $A = 35.3 \pm 0.3 \text{ cm}$

b)  $D = 20.3 \pm 0.4 \text{ cm}$

c)  $r = 2.53$  sem o erro

$$\left| \frac{\Delta r}{r} \right| = \left| \frac{\Delta T}{T} \right| + \left| \frac{\Delta R}{R} \right| \quad \Delta r = 0.0453$$

e  $r = 2.53 \pm 0.05$  com o erro arredondado por excesso.

2. Considere um espaço a 3 dimensões. Neste espaço o vetor  $\vec{a}$  está no plano OXY, tem comprimento 3 m e faz um ângulo  $30^\circ$  com o eixo dos XX.

a) Determine as componentes do vetor  $\vec{a}$ .

b) Encontre o ângulo que o vetor  $\vec{a}$  faz com o vetor  $\vec{b} = (1, 0, -1)$ .

c) Encontre um vetor que seja perpendicular aos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

**Resolução resumida**

a)

$$\begin{cases} a_x = |\vec{a}| \cos 30^\circ \\ a_y = |\vec{a}| \sin 30^\circ \\ a_z = 0. \end{cases}$$

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \sqrt{2} \cos \theta = 2.598$$

$$\cos \theta = \frac{2.598}{3 \sqrt{2}} \quad \text{e,}$$

$$\theta = \arccos \frac{2.598}{3 \sqrt{2}} = 60^\circ$$

c)  $\vec{v}$  vetor perp. a  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2.598 & 1.5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.5 \hat{i} + 2.598 \hat{j} - 1.5 \hat{k} \text{ m}^2$$

3. O integral definido de uma função definida desde a até b

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Pode ser calculado aproximadamente pela aproximação retangular, onde se faz:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = f(x_{i+1}) \delta x$$

onde  $\delta x = (b - a)/n$  e  $n$  um número inteiro.

Determine como varia o erro local do integral  $I$  em função do passo  $\delta x$ ?

**Resolução resumida**

**Erro de truncatura (local) da aproximação retangular:**

$$erro = \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right)_{\text{exato}} - (f(x_{i+1}) \delta x)_{\text{ap. retangular}} \right|$$

A função  $f(x)$  pela série de Taylor à volta de  $x_{i+1}$

$$f(x) = f(x_{i+1}) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 + \sigma((x - x_{i+1})^3)$$

Subst. no integral temos

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ f(x_{i+1}) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=x_{i+1}} (x - x_{i+1})^2 + \sigma((x - x_{i+1})^3) \right] dx \\ &= f(x_{i+1}) (x_{i+1} - x_i) - \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} + \sigma((x_{i+1} - x_i)^3) \end{aligned}$$

$$= f(x_{i+1}) \delta x - \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3) \text{Subst. no erro que se pretende calcular}$$

$$\begin{aligned} erro &= \left| \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \right)_{\text{exato}} - (f(x_{i+1}) \delta x)_{\text{ap. retangular}} \right| \\ &= \left| f(x_{i+1}) \delta x - \frac{df}{dx} \Big|_{x=x_i} \frac{\delta x^2}{2} + \sigma(\delta x^3) - (f(x_{i+1}) \delta x) \right| = \sigma(\delta x^2) \end{aligned}$$

O erro de truncatura de um integral de uma fatia é da  $\sigma(\delta x^2)$ .

O erro global do integral completo, que é um somatório de  $n$  fatias, é o acumular dos erros locais

$$n \sigma(\delta x^2) = \frac{b-a}{\delta x} \sigma(\delta x^2) = \sigma(\delta x).$$

É da ordem de grandeza de  $\delta x$ .

4. Considere um corpo de massa 2 kg com a energia potencial  $E_p = \frac{1}{2}k(x^2 - x_{eq}^2)^2$ , em que  $x_{eq}$  é a posição de equilíbrio e  $k$  uma constante. Determine a força aplicada ao corpo em função de  $x$ ,  $k$  e  $x_{eq}$ .

**Resolução resumida:**

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

$$F_x = -\frac{1}{2}k \cdot 2(x^2 - x_{eq}^2)x$$

$$F_x = -kx(x^2 - x_{eq}^2)$$

5. Uma mola exerce uma força  $F_x = -kx(t)$ , em que  $k$  é a constante elástica da mola, num corpo de massa  $m$ . Considere  $k = 1 \text{ N/m}$  e  $m = 1 \text{ kg}$ .

a) Mostre que a lei do movimento  $x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$  é solução da equação dinâmica de

Newton do sistema mola-corpo, em que  $A$  e  $B$  são constantes.

b) Qual a lei de velocidade do corpo ligado à mola?

c) Calcule  $A$  e  $B$ , no caso em que a velocidade inicial é  $-2 \text{ m/s}$  e a posição inicial a posição de equilíbrio do sistema.

d) Calcule a energia mecânica do sistema mola-corpo. Mantém-se constante ao longo do tempo?

**Resolução resumida**

a) Eq. de Newton  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ , uma vez que  $F_x = -kx$ ,

a ser satisfeita se  $x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$

for solução

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \left[ A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \right] = -\frac{k}{m} x(t)$$

Ou  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t)$

E como queríamos demonstrar  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k x(t)$

**b)**  $v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \left[ -A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \right]$

**c)**  $\begin{cases} t = 0 \\ v_x(t=0) = -2 \text{ m/s} \\ x(t=0) = x_{eq} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = \sqrt{\frac{k}{m}} [-A \sin(0) + B \cos(0)] \\ 0 = A \cos(0) + B \sin(0) \end{cases}$

$$\begin{cases} -2 = \sqrt{\frac{k}{m}} B \\ 0 = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = -2 \sqrt{\frac{m}{k}} = -2 \text{ m} \\ A = 0 \end{cases}$$

e,

$$\begin{cases} x(t) = -2 \sin t \\ v_x(t) = -2 \cos t \end{cases}$$

**d)** Energia mecânica

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} 4 \cos^2 t + \frac{1}{2} 4 \sin^2 t = 2 \text{ J} \quad : \text{ constante}$$

## Formulário:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x(t + \delta t) = v_x(t) + \left. \frac{dv_x}{dt} \right|_t \delta t + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2v_x}{dt^2} \right|_t \delta t^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3v_x}{dt^3} \right|_t \delta t^3 + \sigma(\delta t^4)$$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 \quad \int_C \vec{F}^{(conservativa)} \cdot d\vec{r} = E_{p0} - E_{p1}$$

$$\vec{F}_{res} = -m D |\vec{v}| \vec{v} \quad \vec{F}_{res} = -\frac{C_{res}}{2} A \rho_{ar} |\vec{v}| \vec{v} \quad |\vec{F}_{rol}| = \mu |\vec{N}|$$

$$\vec{F}_{Magnus} = \frac{1}{2} A \rho_{ar} r \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \vec{F}_{grav} = -G \frac{m M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{F}_{elástica} = -k \vec{r}$$

$$\vec{F}_{elet} = -k_e \frac{q Q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \vec{F}_{elet} = q \vec{E}_{elet}$$

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} \quad E_p = m g y \quad E_p = \frac{1}{2} k x^2 \quad E_p = -G \frac{m M}{|\vec{r}|}$$

$$P_o = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$$

$$\Sigma \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$E_p(x) = E_p(x_{min}) + \left. \frac{dE_p}{dx} \right|_{x_{min}} \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2E_p}{dx^2} \right|_{x_{min}} \delta x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3E_p}{dx^3} \right|_{x_{min}} \delta x^3 + \sigma(\delta x^4)$$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + \dots$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_t^{t+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega t - \phi_1) + A_2 \cos(2\omega t - \phi_2) + A_3 \cos(3\omega t - \phi_3) + \dots$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \phi_n = \sin \frac{b_n}{A_n} = \cos \frac{a_n}{A_n} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$x(t) = A e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$A(\omega_f) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b \omega_f}{m}\right)^2}}$$

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

## Grandezas físicas e conversões:

$$1 \text{ polegada} = 1 \text{ in} = 0,39370 \text{ m}$$

$$1 \text{ pé} = 1 \text{ ft} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ milha} = 1,609344 \text{ km}$$

$$1 \text{ rad} = 57.29578 \text{ graus}$$

$$1 \text{ cv (cavalo - vapor métrico)} = 735,4975 \text{ W}$$

$$1 \text{ hp (cavalo - vapor inglês)} = 745,715 \text{ W}$$

$$M_{Sol} = M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$1 \text{ AU} = 1.489 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$1 \text{ ano} = 365,24 \text{ dias}$$

$$G = 6.67 \times 10^{11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2) = 4\pi^2 \text{ AU}^3/(\text{M} \cdot \text{ano}^2)$$

$$g = 9,80 \text{ m/s}^2$$

$$\rho_{ar} = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$v_{som} = 340 \text{ m/s}$$

$$c = 299792,458 \text{ km/s} = 2,99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$k_B = 1.380649 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.61733 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$$

$$\varepsilon_0 = 8,854187817 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$k_e = 1/4\pi\varepsilon_0 = 8,98755188 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

$$m_e = 9,10938356 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p = 1,67262 \times 10^{-27} \text{ kg} = 1836.151 m_e$$

$$m_n = 1,67493 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$e = 1,602176208 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$e/c = 5,34428 \times 10^{-28} \text{ C} \cdot \text{m/s}$$

## Grandezas matemáticas e Transformações Trigonométricas:

$$e = 2,71828183$$

$$\pi = 3,14159265$$

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x) \quad \text{sen}(\pi - x) = \text{sen}(x) \quad \text{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(x)$$

$$\cos(-x) = +\cos(x) \quad \cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \text{sen}(x)$$

$$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen } x \cos y \pm \cos x \text{ sen } y \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \text{sen } x \text{ sen } y$$

$$\text{sen } x \cos y = \frac{1}{2} [\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)]$$

$$\cos x \text{ sen } y = \frac{1}{2} [\text{sen}(x+y) - \text{sen}(x-y)]$$

$$\text{sen } x \text{ sen } y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\text{sen } x \pm \text{sen } y = 2 \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \cos x - \cos y = 2 \text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$