Teoria das Probabilidades

João Antunes 2021/2022

1. Introdução

Foi a partir dos “jogos de azar” que no séc. XVII surge um ramo da Matemática que mais tarde se viria a chamar a ***Teoria das Probabilidades***.

Pierre Fermat (1601-1665)

Segundo historiadores, o Cavaleiro De Méré, conhecido por ser um jogador inveterado, colocou algumas dúvidas sobre jogos a dois matemáticos franceses, Blaise Pascal e Pierre Fermat. Estes, na tentativa de dar uma resposta ao jogador, debruçaram-se sobre o assunto, sendo, desta forma, dado o primeiro passo para o nascimento desta teoria.

Blaise Pascal (1623-1662)

As probabilidades surgem, assim, como forma de quantificar o grau de incerteza de um determinado acontecimento.

Problema do Cavaleiro de Mére

Em 1654, o cavaleiro de Méré (1610-1685), rendido aos jogos de azar, mas pouco dotado matematicamente colocou ao seu amigo Blaise Pascal (1623-1662) um problema que passo a enunciar:

"Dois jogadores A e B apostam um contra o outro a mesma quantidade de dinheiro, 32 moedas, num jogo em que o vencedor é aquele que vencer três partidas. Num dado momento em que o jogador A tem duas vitórias e o B apenas uma há a necessidade de parar o jogo. Como deve ser repartido o dinheiro?

Nos mais variados aspetos da nossa vida, está presente a incerteza:

- a probabilidade de chover num dia enublado;
- a probabilidade de um partido ganhar as próximas eleições;
- a probabilidade de um aluno obter positiva num teste de perguntas com resposta múltipla, para o qual não estudou e responde sistematicamente ao acaso;
- a probabilidade de um medicamento novo ter maior probabilidade de cura que o medicamento habitual, para tratar determinada doença;
- a probabilidade de aceitação de um produto que pretende lançar no mercado

FENÓMENOS ALEATÓRIOS

são fenómenos cujos resultados individuais são incertos, mas para os quais se admite uma regularidade a longo termo, possibilitando a obtenção de um padrão genérico de comportamento.

O objetivo da Teoria da Probabilidade é o estudo dos fenómenos aleatórios, através de *modelos matemáticos*, a que se atribui a designação de modelos probabilísticos.

2. Experiência aleatória.
Espaço de resultados. Acontecimentos

EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA

- é o processo de observar um resultado de um fenómeno aleatório.
- não se tem conhecimento suficiente de qual o resultado que sai em cada realização da EA
- admite-se ainda que a EA se pode repetir e que as repetições são realizadas nas mesmas circunstâncias e são independentes..

EXPERIÊNCIA ALEATÓRIA

Quando à partida não se sabe o resultado

Lançamento de uma moeda; Totoloto;
Medir tempo de deslocação

$\neq$

EXPERIÊNCIA DETERMINISTA

Quando à partida já se sabe o resultado

Furar um pneu; Atirar pedra para piscina

ESPAÇO DE RESULTADOS

Espaço de resultados ou espaço amostral é o conjunto de todos os resultados possiveis de uma experiência aleatória.
Representa-se por S, E ou Ω

EXEMPLO

Lançamento de um dado	S = {1,2,3,4,5,6}
Lançamento de moeda ao ar	S = {cara, coroa}
Tempo para chegar ao emprego	$S = [0, +\infty]$

EXERCÍCIO

Indique o espaço de resultados da extração de duas bolas, uma após outra, de um saco no qual se encontram quatro bolas numeradas de 1 a 4 (sem reposição).

ACONTECIMENTO

É um subconjunto do espaço amostral e um acontecimento identifica-se como o conjunto dos seus casos favoráveis

EXEMPLO

Na experiência aleatória lançamento de dum dado podem ser definidos, os seguintes acontecimentos:

- Acontecimento **A: Saída de um número par**

O acontecimento A é representado pelo seguinte subconjunto: A = { 2, 4, 6 }

- Acontecimento **B: Saída de um número maior que 2**

O acontecimento B é representado pelo seguinte subconjunto: B = { 3, 4, 5, 6 }

- Acontecimento **C**: **Saída de um número primo**

O acontecimento C é representado pelo subconjunto: C = { 2, 3, 5 }

EXERCÍCIOS

1) Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento de dois dados. Identifique o espaço de resultados e os acontecimentos A: “ número de pintas é igual nos dois dados” e B: “soma das pintas é 7”.

2) Considere a experiência aleatória que consiste em extrair 2 berlindes, de um saco com 3 berlindes vermelhos e 2 azuis. Defina os espaços de resultados com e sem reposição.

3) No século XVII, os jogadores italianos costumavam fazer apostas sobre o número total de pintas obtidas no lançamento de 3 dados. Assumiam que a possibilidade de obter um total de 9 era igual à possibilidade de obter um total de 10. É verdade?

EXERCÍCIOS

-se, ao acaso, uma das letras da palavra

Pneumoultramicroscopicossilicovulcanoconiotico

sendo igualmente provável que saia qualquer uma delas.

a) Qual é a probabilidade de sair uma letra **c**?

b) Qual a letra do alfabeto que tem maior probabilidade de sair? Qual é essa probabilidade?

c) Qual a probabilidade de sair uma vogal?

EXERCÍCIOS

Exercício 1.

Numa caixa há quinze peças, dez das quais são pintadas. Um operário extrai simultaneamente três peças. Calcular a probabilidade de:

(a) *haver uma peça pintada;*

(b) *não haver peças pintadas;*

(c) *haver pelo menos duas peças pintadas.*

TIPOS DE ACONTECIMENTOS

Designação	Experiência aleatória - lançamento de dado
ELEMENTARES formados por um único resultado	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} *A: "sair número 3"* -> A = { 3 }
COMPOSTOS formados por mais de que um resultado	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} *B: "sair número ímpar"* -> B = { 1, 3, 5 }
EQUIPROVÁVEIS probabilidades idênticas de acontecerem	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} *C: "sair número par" e D: "sair número ímpar"* C e D são equiprováveis
CERTOS verificam-se sempre	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} *E: "sair inteiro positivo inferior a 7"* E = S
IMPOSSÍVEIS nunca se verificam	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} *F: "sair inteiro positivo superior a 6"* F = { }

OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

Acontecimento COMPLEMENTAR ou CONTRÁRIO

O acontecimento constituído por todos os resultados de S, que não estão em A. Representa-se por **A**’ ou **A**^{c}, sendo que **A’ = S - A**.

EXEMPLO

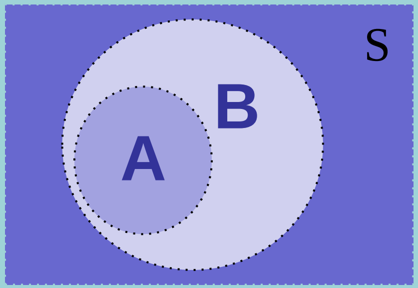
No lançamento de um dado, considere-se o acontecimento **A**: saída de um número par **A** = { 2, 4, 6 }. Represente o acontecimento complementar.

O acontecimento A’ é o acontecimento que se realiza quando *não se realiza* A.
Neste exemplo, ao acontecimento A’ corresponde o conjunto **A’** = { 1, 3, 5 }

OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

Acontecimento que implica a realização de outro

O acontecimento A implica a realização do acontecimento B, quando todo o resultado de A é um resultado de B; indica-se este facto escrevendo **A⊂B**



EXEMPLO

No lançamento de um dado, consideremos os acontecimentos **A**: saída de um número par e menor que 5 e **B**: saída de um número menor que 5. Represente os acontecimentos

A estes acontecimentos correspondem os seguintes conjuntos:

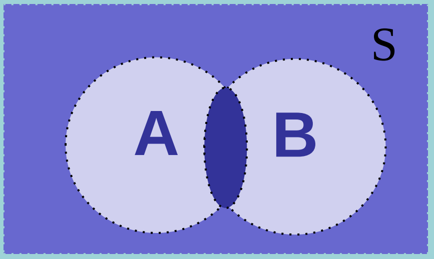
A = { 2, 4 }   e   **B** = {1, 2, 3, 4 }

Todos os elementos de A são também elementos de B, pelo que A ⊂ B.

OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

Acontecimento INTERSEÇÃO

Interseção dos acontecimentos A e B, **A∩B** ou (A **e** B) é o acontecimento que se realiza sse A e B se realizam simultaneamente.



EXEMPLO

Considere-se o lançamento de um dado e os seguintes acontecimentos:
A: saída de um número ímpar e **B**: saída de um número maior que 3.
Represente os acontecimentos.

A estes acontecimentos correspondem os seguintes conjuntos:

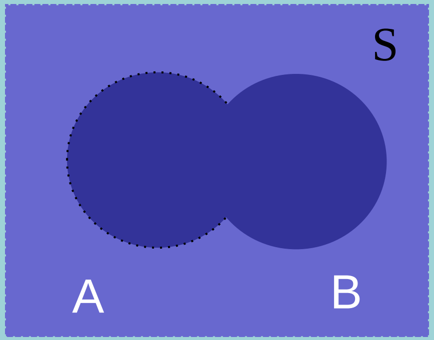
A = { 1, 3, 5 } e **B** = { 4, 5, 6 }

O acontecimento união A∩B é o acontecimento que se realiza quando se realiza A e também se realiza B, ou seja, **A∩B** = { 5 }

OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

Acontecimento UNIÃO

União dos acontecimentos A e B, **A∪B** , ou (A **ou** B) é o acontecimento que se realiza sse A ou B se realizam.



EXEMPLO

Consideremos o lançamento de um dado e os seguintes acontecimentos:
A: saída de um número par e **B**: saída de um número menor que 4.
Represente a união de A e B

A estes acontecimentos correspondem os seguintes conjuntos:

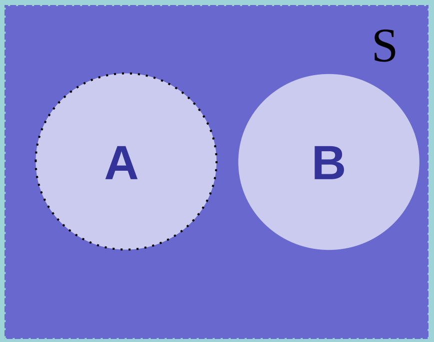
A = { 2, 4, 6 } e **B** = { 1, 2, 3 }

O acontecimento união A∪B é o acontecimento que se realiza quando se realiza A ou B (ou ambos), ou seja, **A**∪**B** = { 1, 2, 3, 4, 6 }

OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

Acontecimentos DISJUNTOS

Acontecimentos **disjuntos** ou acontecimentos **mutuamente exclusivos**, são acontecimentos em que a realização de um deles implica a não realização do outro



EXEMPLO

No lançamento de um dado, consideremos os acontecimentos:
A: saída de número menor que 4 e **B**: saída de número maior ou igual a 4.
Represente os acontecimentos

A estes acontecimentos correspondem os seguintes conjuntos:

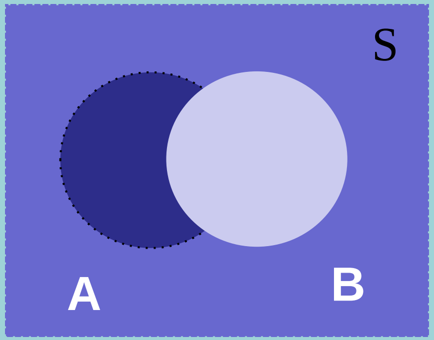
A = { 1, 2, 3 } e **B** = {4, 5, 6 }

Como facilmente se verifica, os conjuntos A e B não possuem quaisquer elementos comuns.

OPERAÇÕES COM ACONTECIMENTOS

Acontecimento DIFERENÇA

É o acontecimento que se realiza sse A se realiza, sem que B se realize



EXEMPLO

No lançamento de um dado, consideremos os acontecimentos:
A: saída de número par e **B**: saída de número maior que 2
Represente os acontecimentos

A estes acontecimentos correspondem os seguintes conjuntos:

A = { 2, 4, 6 } e **B** = { 3, 4, 5, 6 }

O Acontecimento A-B é igual a {2}.

EXERCÍCIOS

1) Relativamente à experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado, represente com a notação que achar conveniente:

- a) O espaço de resultados
- b) O acontecimento A, que consiste em sair uma face par (número de pintas par)
- c) O acontecimento B que consiste em sair face ímpar
- d) O acontecimento C que consiste em sair uma face menor que 3
- e) O acontecimento intersecção de A com B. O que conclui acerca dos acontecimentos A e B?
- f) O acontecimento união de A com B. O que conclui acerca dessa união?
- g) O acontecimento intersecção de B e C.

2) Uma empresa que faz a prospeção de petróleo, quando faz um furo pode encontrar petróleo ou gás, ou não encontrar nada. A empresa fez dois furos.

- a) Descreva o espaço de resultados associado à experiência aleatória anterior.
- b) Represente o acontecimento A: a empresa obteve petróleo ou gás.

3) Numa propriedade agrícola, sabe-se que 60%, 75% e 50% das árvores são de folha caduca, de fruto e de fruto com folha caduca, respetivamente. Calcule a probabilidade de uma árvore da propriedade, escolhida ao acaso:

- a) não ser árvore de fruto
- b) ser árvore de fruto ou de folha caduca

3. Probabilidade de um acontecimento

Regra 1 Uma probabilidade deve ser um número entre 0 e 1

Regra 2 O conjunto de todos os resultados possíveis tem probabilidade igual a 1

Probabilidade

Interpretação **Frequencista**

Interpretação **Laplaciana**

Interpretação **Bayesiana**

Definição AXIOMÁTICA

PROBABILIDADE FREQUENCISTA

DEFINIÇÃO

Lei dos GRANDES NÚMEROS
Probabilidade EMPÍRICA
Probabilidade à *posteriori*

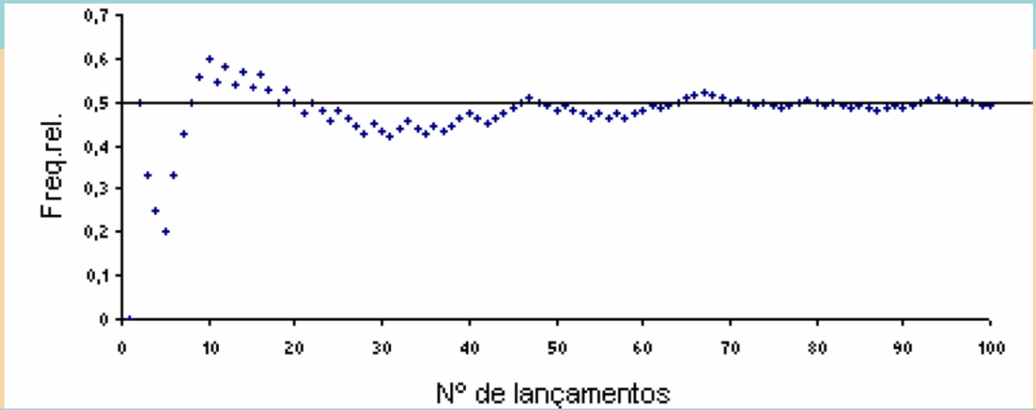
Define-se *probabilidade* de um acontecimento A e representa-se por P(A) como sendo o valor para que tende a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória

P(A) = limite da frequência relativa $\frac{n}{nA}$ com que se realiza o acontecimento A

(nA representa o nº de realizações de A em n repetições da experiência)

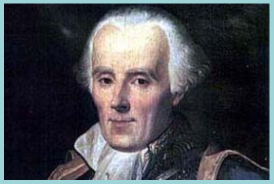
EXEMPLO

Lançamento de uma moeda e observação do número de caras obtidas



Nem sempre se pode repetir a experiência as vezes necessárias, de modo a obter a convergência pretendida.

PROBABILIDADE LAPLACIANA



Pierre Simon Laplace
(1749-1827)

ISTEC INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

DEFINIÇÃO

Define-se probabilidade do acontecimento A como sendo a razão entre o número de resultados **favoráveis** a A (resultados que compõem A) - nA e o número de resultados **possíveis** (resultados que constituem S, admitindo-se o princípio da simetria) - n. Também conhecida por definição CLÁSSICA.

$$P(A) = \frac{nA}{n}$$

EXEMPLO

Se o dado for equilibrado e o lançamento for feito ao acaso, pode admitir-se que no *lançamento de um dado* todos os resultados têm a mesma possibilidade de ocorrer.

PROBABILIDADE LAPLACIANA

Limitações

- Só aplicável quando os resultados que compõem o espaço amostral são igualmente possíveis (têm a mesma probabilidade de realizar-se)

- Implica espaço amostral limitado, todos os elementos conhecidos;

- Problemas na determinação do n.º de casos favoráveis e possíveis:
  - sistemas de eixos cartesianos;
  - diagrama de árvore;
  - análise combinatória

EXERCÍCIO

Considere a experiência que consiste em selecionar duas oliveiras aleatoriamente da lista seguinte, às quais será administrado um certo medicamento.

Determine a probabilidade dos seguintes acontecimentos:

A : As árvores serem da mesma variedade
B : As árvores são da mesma idade.

Árvore	Variedade	Idade
1	Galega	6
2	Galega	8
3	Cobrançosa	6
4	Cobrançosa	6

EXERCÍCIO

O **problema de Monty Hall**, também conhecido por **paradoxo de Monty Hall** é um problema matemático e paradoxo que surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos chamado *Let's Make a Deal*, exibido na década de 70.

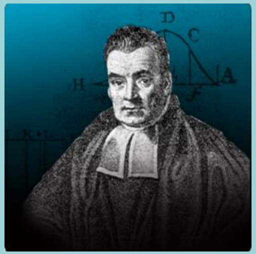
O jogo consiste no seguinte: Monty Hall (o apresentador) apresenta 3 portas aos concorrentes, sabendo que atrás de uma delas está um carro (melhor prémio) e que as outras têm prémios insignificantes (bodes).

1. Na 1ª etapa, o concorrente escolhe uma porta (que ainda não é aberta);
2. De seguida Monty abre uma das outras duas portas que o concorrente não escolheu, sabendo à partida que o carro não se encontra aí;

Agora com duas portas apenas para escolher, o concorrente tem que se decidir se permanece com a porta que escolheu no início do jogo e abre-a ou se muda para a outra porta fechada.

Qual é a estratégia mais lógica? Deve trocar de porta na 2ª etapa ou não? Será que é indiferente em termos de probabilidades haver troca ou não?

PROBABILIDADE BAYESIANA



Thomas Bayes
(1701-1761)

DEFINIÇÃO

atribui-se a um acontecimento uma probabilidade com base em experiência e informação anteriores.

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)\,P(A)}{P(B)}$$

- P(A) e P(B) são as probabilidades à priori de A e B
- P(B/A) e P(A/B) são as probabilidades à posteriori de B condicional a A e de A condicional a B respetivamente.

EXEMPLO

Qual a probabilidade de um aluno obter uma nota superior a 14 val. em Teoria das Probabilidades, onde se encontra matriculado no 1º semestre?

Nem é desejável que a experiência se repita, nem se deve atribuir igual possibilidade aos acontecimentos nota > 10 e nota <= 10.

No entanto, a análise do currículo do aluno poderá atribuir uma probabilidade elevada (ou baixa) ao acontecimento em causa.


TED Ed
CAN YOU SOLVE
THE FROG RIDDLE?

DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE PROBABILIDADE

Andrei Kolmogorov (1903-1987)

DEFINIÇÕES

AXIOMA - são proposições ou afirmações gerais que se impõem como evidentes e que por isso se aceitam como verdadeiras, sem necessidade de demonstração.

TEOREMA - são proposições que, por raciocínio lógico, se podem derivar dos axiomas.

AXIOMAS

Axioma 1: A **probabilidade** de qualquer acontecimento A definido num conjunto de resultados S é um **número não negativo**:

$$P(A) \geq 0 \qquad A \subset S$$

Axioma 2: A **probabilidade da união** de dois acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos é **igual à soma das probabilidades dos dois acontecimentos**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{se} \;\; A \cap B = \emptyset$$

Axioma 3: A probabilidade do acontecimento **certo** S é igual a **1**

$$P(S) = 1$$

TEOREMAS

Teorema 1: A probabilidade do acontecimento **impossível** é zero: $P(\emptyset) = 0$

Temos $S \cup \emptyset = S$ e $S \cap \emptyset = \emptyset$

$P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset)$ Axioma 2

$P(S) = P(S) + P(\emptyset)$ ou seja $1 = 1 + P(\emptyset)$ ou seja $P(\emptyset) = 0$

Teorema 2: A probabilidade de qualquer acontecimento A é um **número maior ou igual a zero e menor ou igual a 1**: $0 \leq P(A) \leq 1$

Teorema 3: A probabilidade do acontecimento complementar do acontecimento A é igual à diferença entre 1 e a probabilidade de A: $P(A') = 1 - P(A)$

Teorema 4: A probabilidade da **união de dois acontecimentos** quaisquer A e B é igual a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

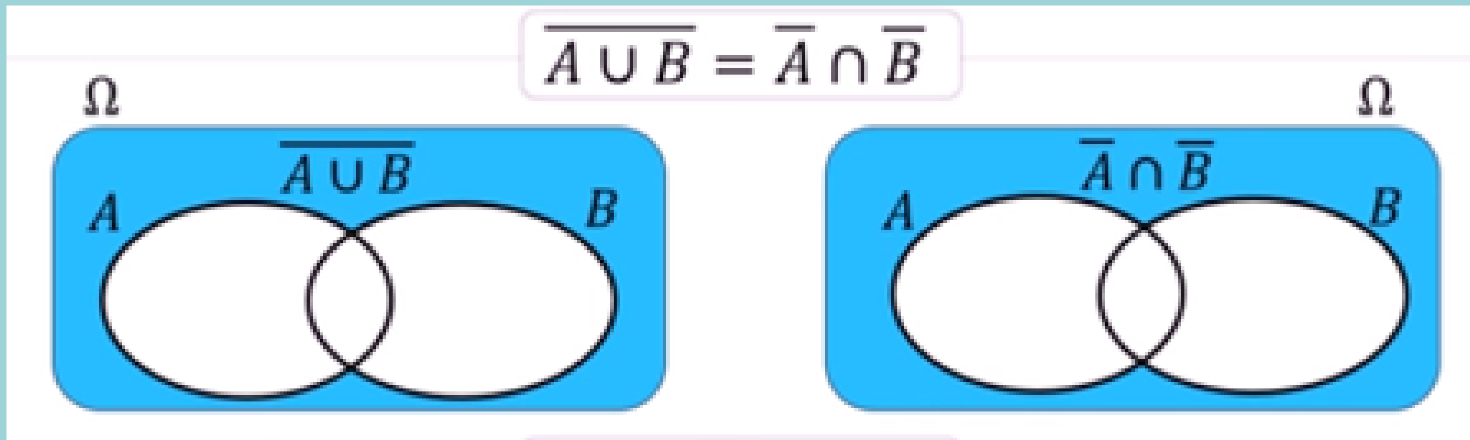
Teorema 5: Se o subconjunto A **está contido** no subconjunto B, então $P(A) <= P(B)$

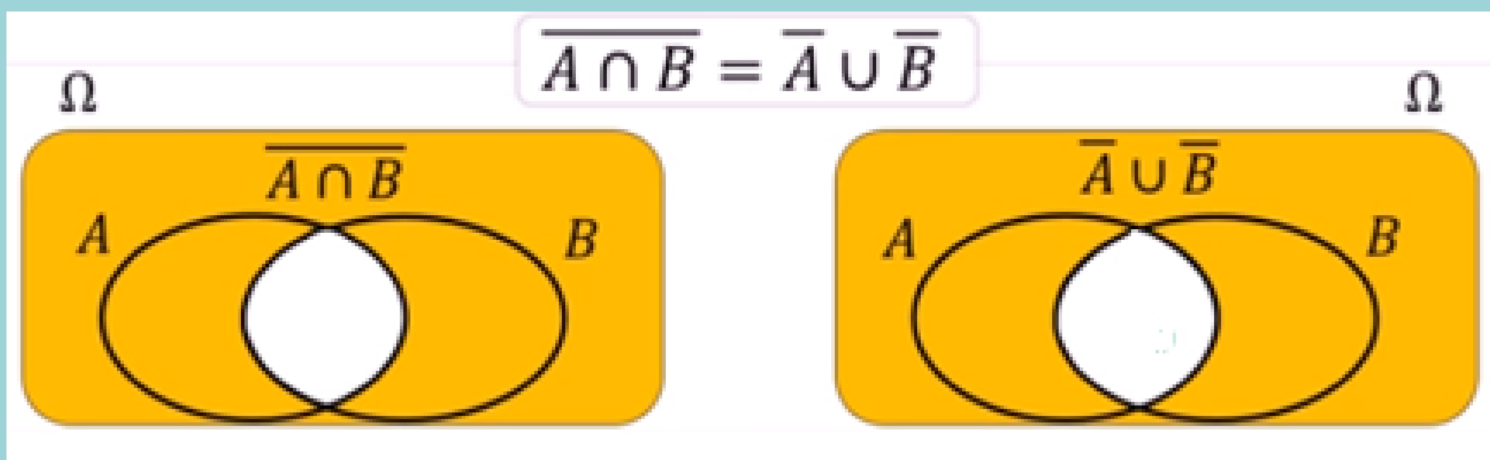
LEIS BÁSICAS DE PROBABILIDADE

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Se $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A) \leq 1$
5. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
6. Se $B \subset A \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(B)$
7. Se $A \cap B = 0 \Rightarrow P(A - B) = P(A)$
8. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
9. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
10. Se $A_1, \ldots, A_N$, acontecimentos mutuamente exclusivos,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} P(A_i)$$

LEIS de DE MORGAN





LEIS de DE MORGAN

Augustus De Morgan (1806-1871)

EXERCÍCIO

Considera dois acontecimentos distintos A e B, possíveis e não certos, contidos no mesmo universo de resultados Ω.

Qual das opções abaixo é uma representação alternativa de

$$\overline{\overline{\overline{A} \cup B} \cap A} \ ?$$

(A) $\overline{A} \cap B$ **(B)** $\overline{A} \cup B$ **(C)** $A \cap \overline{B}$ **(D)** $A \cup \overline{B}$

EXERCÍCIOS

1) Num estudo sobre o comportamento da gaivota, considere os seguintes acontecimentos: “a gaivota andava a voar” e “a gaivota estava na água”. Admita que os acontecimentos anteriores têm, respetivamente, as probabilidades 0.37 e 0.25. Admitindo ainda que estes acontecimentos representam o comportamento de uma determinada gaivota, num determinado instante:

a) Represente a situação anterior utilizando diagramas de Venn. Será que os acontecimentos são disjuntos?

b) Qual a probabilidade de que a gaivota esteja a voar ou na água?

c) Qual a probabilidade de que a gaivota esteja a voar e na água?

2) Num restaurante registaram-se, durante bastante tempo, os pedidos dos clientes, tendo-se chegado à conclusão que, para terminar a refeição, 20% dos clientes pedem só sobremesa, 40% pedem só café e 30% pedem sobremesa e café.

a) Construa um diagrama de Venn para ilustrar a situação anterior.

b) Determine a probabilidade do acontecimento “pedir café”.

c) Determine a probabilidade do acontecimento “não pedir sobremesa”.

d) Determine a probabilidade do acontecimento “nem pede café nem sobremesa”.

e) Determine a probabilidade do acontecimento “pedir café ou sobremesa”.

f) Os acontecimentos “pedir café” e “pedir sobremesa” são disjuntos?

.

EXERCÍCIOS

3) Admita que são lançadas três moedas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de as três moedas caírem com a mesma face voltada para cima?

4) Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiencia aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que:

P (A) = 0, 3

P ($\bar{A} \cap$ B) = 0, 55

A e B são acontecimentos incompatíveis.

Qual é o valor de P ($\bar{A} \cap \bar{B}$) ?

5) Suponha que A, B e C são acontecimentos tais que P(A) = P(B) = P(C) = 1/4. Sabendo que P(A ∩ B) = P(B ∩ C) = 0 e que P(A ∩ C) =1/8, calcule a probabilidade de pelo menos um dos acontecimentos ter lugar.

6) As probabilidades de três corredores de velocidade percorrerem 100 metros em menos de 10 segundos são respetivamente: 1/3, 1/5 e 1/10. Considerando que os tempos dos três atletas são independentes, calcule a probabilidade de, uma corrida em que participam apenas os 3 atletas, ser ganha em menos de 10 segundos.

Exercício 1.10 Considere os acontecimentos A, B e C de probabilidade não nula. Sabe-se que:

- C é incompatível com A e com B.
- Dois dos acontecimentos são independentes entre si.
- $P(A) = 0.2$, $P(C) = 0.15$ e $P(A \cap B) = 0.06$.

Calcule $P(A \cup B \cup C)$.

Exercício 1.13 Considere dois acontecimentos A e B independentes, em que A tem probabilidade dupla em relação a B. Determine a probabilidade de cada um deles, sabendo que é de 0.5 a probabilidade de ocorrência de pelo menos um deles.

EXPERIÊNCIA COMPOSTA

DEFINIÇÃO

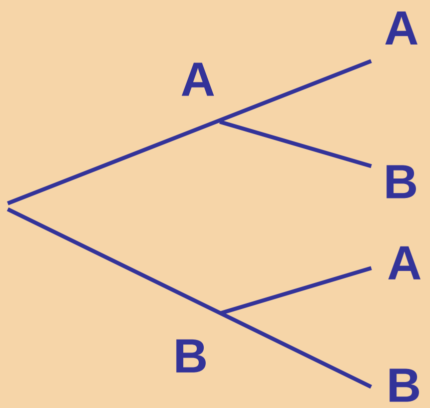
É uma experiência em que se pode distinguir duas ou mais etapas. Pode usar-se um **diagrama de árvore** para representar experiências compostas

EXEMPLO

A experiência aleatória *lançamento de duas moedas sucessivamente* pode ser decomposta em duas etapas: o 1º lançamento e o 2º lançamento. O conjunto de resultados da experiência é o seguinte:

S = { AA, AB, BA, BB }

A experiência pode ser representada através do seguinte diagrama de árvore:
.



ÁRVORE DE PROBABILIDADES

DEFINIÇÃO

É uma representação esquemática, especialmente pensada para apresentar todos os casos possíveis e respetivas probabilidades, em situações que envolvam uma sequência de experiências aleatórias cujos espaços de resultados sejam de dimensão reduzida.

EXERCÍCIO

Duas equipas de voleibol, muito equilibradas, disputam um torneio de 4 jogos. Regista-se o resultado de cada jogo.

a) Descreva o espaço de resultados.
b) Seja A o acontecimento: A equipa 1 ganha exatamente 3 jogos. Quais os acontecimentos elementares que compõem A?
c) Determine a probabilidade do acontecimento A.

4. Probabilidade condicional e independência

PROBABILIDADE CONDICIONAL

DEFINIÇÃO

A probabilidade de se realizar o acontecimento A na hipótese de se ter realizado o acontecimento B chama-se **probabilidade condicionada de A dado B** e representa-se assim:

$$P\ (A/B)$$

A probabilidade condicionada de A dado B pode ser calculada como o quociente entre a probabilidade de $A \cap B$ e a probabilidade de B:

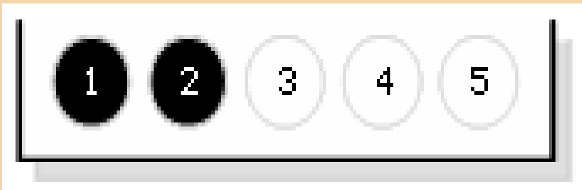
$$\mathbf{P(A/B) = P\ (A \cap B)/P(B)}$$

Nota: Para que a probabilidade possa ser calculada é necessário que $P(B) > 0$.

Ver exemplo seguinte

EXEMPLO

Uma caixa contém 5 bolas. Duas bolas negras, numeradas de 1 a 2 e três bolas brancas, numeradas de 3 a 5, como se mostra no desenho seguinte.



Vamos considerar os seguintes acontecimentos: **A**: **saída de um número ímpar** e **B: saída de uma bola preta**

Pode-se facilmente calcular as probabilidades destes dois acontecimentos, considerados separadamente: P(A) = 3/5 e P(B) = 2/5

Admitindo a hipótese de que o acontecimento B se realizou. qual a probabilidade de se realizar o acontecimento A?

Trata-se de calcular a probabilidade condicionada de A dado que se realizou o acontecimento B:

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B) = P(1) / P(B) = 1/5 / 2/5 = 1/2$$

Antes de se saber que B se realizou, a probabilidade de A era 3/5 = 0,6. Depois de se saber que B se realizou, a probabilidade de A condicionada pela realização de B passa a ser ½ = 0,5.

INDEPENDÊNCIA

Acontecimentos independentes

São aqueles em que a informação acerca de um não ajuda a determinar a probabilidade de ocorrência do outro

P (A/B) = P(A) **P (B/A) = P(B)**

Outra definição de independência de acontecimentos A e B pode ser dada por

P (A∩B) = P(A) x P(B)

EXERCÍCIOS

1) Considere uma família com dois filhos e suponha que existe igual probabilidade de cada filho ser rapaz ou rapariga. Qual a probabilidade de que ambos os filhos sejam rapazes dado que:

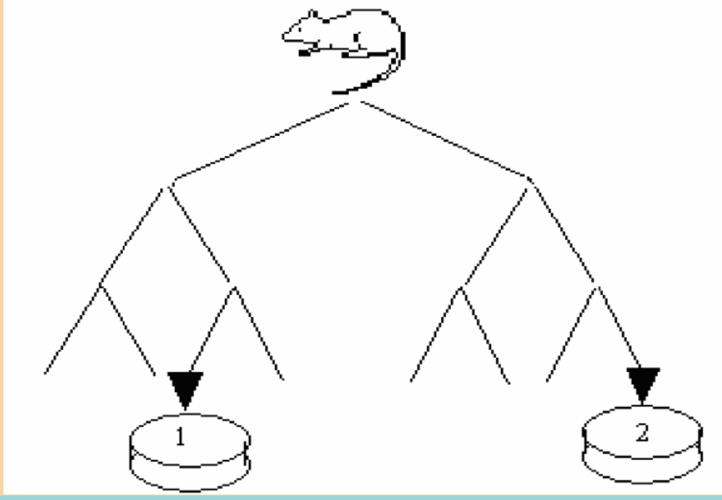
(i) o filho mais velho é um rapaz, (ii) pelo menos um dos filhos é rapaz.

1) Numa caixa estão 5 toalhas de mesa de face dupla, duas delas brancas (B) em ambos os lados, duas estampadas (E) em ambos os lados, e uma com estampa (E) num dos lados e branca (B) no outro. Escolhe-se uma toalha de mesa ao acaso, observando-se que o lado que fica virado para cima é branco (B). Qual a probabilidade do outro lado ser estampado (E)?

1) Um rato apresenta-se na entrada de um caminho com várias bifurcações, como se indica a seguir: Sempre que se apresenta uma bifurcação o rato tem de optar por virar à esquerda ou à direita, nunca podendo voltar para trás. Em duas das saídas encontram-se dois belos queijos. Qual a probabilidade de o rato chegar a qualquer um dos queijos:

a) Se a probabilidade de virar à esquerda for igual à de virar à direita para todos os cruzamentos.

b) Se a probabilidade de virar à esquerda for 0,3 e a de virar à direita for 0,7.



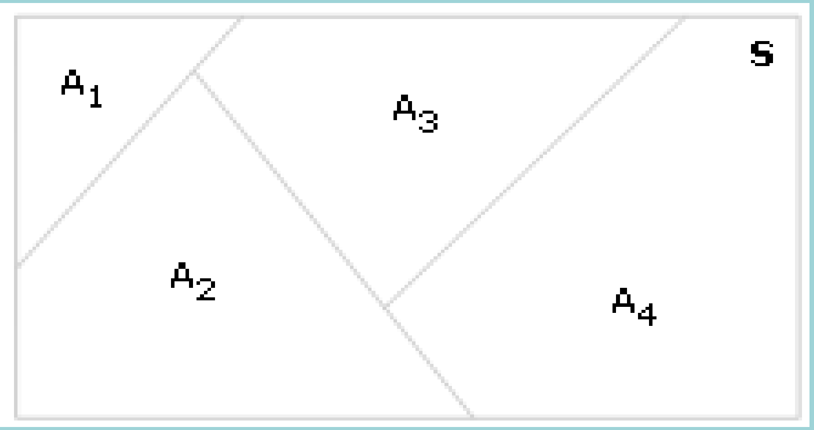
5. Teorema de BAYES

PARTIÇÃO DE UM ESPAÇO DE RESULTADOS

Os acontecimentos A1, A2, …, An constituem uma partição do espaço de resultados S se as duas condições seguintes se verificarem:

1.Os acontecimentos A1, A2, …, An são dois a dois mutuamente exclusivos, isto é $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$

1.A união dos acontecimentos é igual a S
$\cup_i A_i = S$ com i=1,2,3 e 4



EXEMPLO

Numa fábrica, a produção de determinado tipo de peças é assegurada por três máquinas: A, B e C. Sabe-se que a máquina A produz 50% das peças, a máquina B produz 30% e a máquina C os restantes 20%, mas as peças depois de produzidas são enviadas para um contentor comum. Escolhe-se uma peça ao acaso desse contentor. Vamos considerar os seguintes acontecimentos:

A: *A peça escolhida foi produzida pela máquina A*

B: *A peça escolhida foi produzida pela máquina B*

C: *A peça escolhida foi produzida pela máquina C*

Estes três acontecimentos constituem uma partição do espaço de resultados?

Sim, porque:

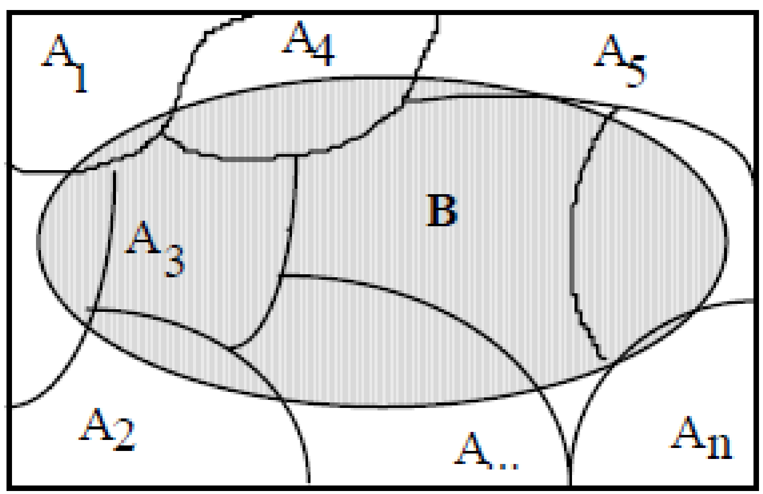
- Os acontecimentos são mutuamente exclusivos: uma peça só pode ter sido produzida por uma das máquinas;

- A união dos três acontecimentos é igual a S porque toda a produção é assegurada por essas três máquinas.

5. Teorema de BAYES

DEFINIÇÃO

Se {A1, A2, … , An} constituem uma partição do espaço de resultados, isto é, Ai e Aj são disjuntos dois a dois e a união dos acontecimentos Ai, é igual ao espaço, com P(Ai)>0, i=1,2,… ,n, então dado qualquer acontecimento B, com P(B)>0, tem-se



$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\, P(B / A_i)}{\sum P(A_i)\, P(B / A_i)}$$

5. Teorema de BAYES

O teorema de Bayes permite-nos rever as probabilidades, mediante informação entretanto disponível. Assim, enquanto que às probabilidades P(Ai) chamamos probabilidades **à priori**, às probabilidades P(Ai/B), calculadas após a realização do acontecimento B, chamamos probabilidades **à posteriori**. Estas probabilidades são a base da **teoria subjetivista das Probabilidades**, já referida anteriormente.

No denominador da expressão que dá a probabilidade condicional, aparece uma expressão que só por si merece relevo especial, dada a sua importância, e que é a base da demostração do teorema de Bayes:

Teorema da Probabilidade Total

Se $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ constituem uma partição do espaço de resultados, isto é, A_i e A_j são disjuntos dois a dois e a união dos acontecimentos A_i, é igual ao espaço, com $P(A_i)>0$, $i=1,2,\dots,n$, então dado qualquer acontecimento B, com $P(B)>0$, tem-se

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)$$

INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

EXERCÍCIO

1. Num escritório existem três impressoras P1, P2 e P3, que imprimem a velocidades diferentes. Os ficheiros são enviados para a primeira impressora que estiver disponível.

As probabilidades de um ficheiro ser enviado para as impressoras P1, P2 ou P3 são respetivamente 0.6, 0.3 e 0.1.

Ocasionalmente a impressora avaria e destrói a impressão.
As impressoras P1, P2 e P3 avariam com probabilidades 0.01, 0.05 e 0.04.

A impressão do seu ficheiro foi destruída! Qual a probabilidade de ter sido enviada para a impressora P1?

EXERCÍCIO

2 . Sejam A, B e C três acontecimentos associados a um espaço de resultados S. Exprima com notação conveniente:

a) Pelo menos um dos acontecimentos ocorre

b) Quando muito um dos acontecimentos ocorre

c) Um e um só dos acontecimentos ocorre

d) Pelo menos dois acontecimentos ocorrem

e) Exatamente dois acontecimentos ocorrem

3. Para confecionar um prato de bacalhau com natas, pode optar-se por bacalhau médio ou bacalhau grande, cujo preço é respetivamente 6 euros e 7 euros. As batatas podem custar 0,75 euros ou 0,9 euros e por outro lado as natas variam entre 0,625 euros, 0,7 euros ou 0,825 euros.
Existe igual probabilidade de escolher qualquer um destes ingredientes. Considerando desprezável o preço dos outros produtos que entram na confeção do prato, qual a probabilidade do preço da ementa ser superior a 8,5 euros

EXERCÍCIO

4. Numa determinada Universidade, verificou-se que de entre os alunos do 1º ano:

51 % estão inscritos em Análise
62 % estão inscritos em Estatística
40 % estão inscritos em Probabilidades
28 % estão inscritos simultaneamente em Análise e Estatística
21 % estão inscritos simultaneamente em Análise e Probabilidades
24 % estão inscritos simultaneamente em Estatística e Probabilidades
10 % estão inscritos simultaneamente em Análise, Estatística e Probabilidades

a) Represente num diagrama de Venn, os acontecimentos anteriores.
b) Calcule a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso:

1) Estar inscrito em Análise ou Estatística
2) Estar inscrito só em Análise e Estatística
3) Estar inscrito em pelo menos uma das cadeiras
4) Estar inscrito só em Probabilidades
5) Não estar inscrito em nenhuma das cadeiras consideradas

5. De um lote de 20 rifas, em que 8 têm prémio e 12 não têm, retiraram-se 7. Qual a probabilidade de haver 3 premiadas e 4 não premiadas nas rifas retiradas?

ISTEC INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

EXERCÍCIO

6. As famílias da cidade A escolhem uma das três alternativas para fazer férias: praia, campo ou permanecer em casa.
Durante a última década, verificou-se que escolhiam aquelas alternativas, respetivamente, 50%, 30% e 20% das famílias da referida cidade.
A probabilidade de descansar durante as férias está ligada à alternativa escolhida: 0,4, 0,6 e 0,5 conforme se tenha ido para a praia, para o campo ou ficado em casa.

a) Qual a probabilidade de uma família da cidade A descansar durante as férias?
b) Sabendo que determinada família descansou durante as férias, qual a alternativa mais provável de ter sido escolhida por esta família

7. Uma companhia aérea afirma que 95% dos seus voos chegam à hora marcada. Se forem escolhidos três voos e admitindo que o atraso de um voo em nada afeta a hora de chegada dos restantes, qual a probabilidade dos três voos chegarem a horas

5. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

DEFINIÇÃO

Uma **variável aleatória** (v.a.) **X** é uma função que associa a cada ponto do espaço de resultados S, um número.

EXEMPLOS 1/3

- A experiência aleatória consiste no lançamento sucessivo de dois dados. Os resultados dessa experiência são os pares ordenados de valores (1,1), (1,2) … (6,6).

Vamos admitir no entanto que não estamos interessados em saber qual foi a sequência de valores observada mas sim na soma dos pontos obtidos. A soma dos pontos obtidos no lançamento de dois dados é uma variável aleatória que resulta de fazer corresponder a cada resultado da experiência o número que é a soma dos pontos obtidos

X – 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

- Considere a experiência aleatória que consiste em lançar um dado ao ar e observar a face que fica voltada para cima. Associada a esta experiência podemos definir a variável aleatória. X, que a cada face associa o número de pintas; então os valores que X pode assumir são

X - 1, 2, …, 6

- Considere a experiência aleatória que consiste em lançar ao ar uma moeda 50 vezes. Associada a esta experiência, podemos definir a variável aleatória Y, que representa o número de vezes que saiu cara, nos 50 lançamentos; então os valores que Y pode assumir são

Y - 0, 1, … , 50

- Considere a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda ao ar até sair cara. Associada a esta experiência, podemos definir a variável aleatória Z, que representa o número de lançamentos necessários para sair cara; então os valores que a variável aleatória Z pode assumir são

Z - 1, 2, 3, …

EXEMPLOS 3/3

- Considere a experiência aleatória que consiste em observar a chuva que cai, num dia ao acaso. Associada a esta experiência, podemos definir a variável aleatória U, que representa a quantidade de chuva (em mm); então

U pode assumir qualquer valor real, não negativo.

- Considere a variável aleatória que consiste em observar o resultado de um desafio de futebol. Aos 3 resultados possíveis – perde a equipa visitante, empatam ou ganha a equipa visitante, associamos os valores –1, 0 e 1 através da variável aleatória V da seguinte forma:

V(perde a equipa visitante) = -1

V(empate) = 0

V(ganha a equipa visitante) = 1

a variável aleatória V assume os valores –1, 0 ou 1.

VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

DEFINIÇÃO

Uma variável aleatória é discreta (v.a.d.) quando pode assumir apenas um número finito ou uma infinidade numerável de valores (com probabilidade diferente de zero).

Terá sentido falar na probabilidade de uma variável aleatória assumir um determinado valor?

SIM, já que aos acontecimentos atribuímos probabilidades, é natural definir probabilidade de uma variável aleatória assumir um determinado valor, como sendo a probabilidade do acontecimento, que fez com que a variável aleatória tivesse esse valor

EXEMPLO

Considere-se a EA do lançamento da moeda, os acontecimentos elementares (resultados) são "cara" e "coroa".

Se a esta experiência associarmos a variável aleatória X, tal que **X(cara)= 0** e **X(coroa)= 1** então dizemos que

P(X = 0) = 1/2 porque P("cara") = 1/2 e **P(X = 1) = 1/2** porque P("coroa") = 1/2

EXERCÍCIO

Considere a experiência aleatória que consiste em verificar o número de caras que saem no lançamento de 3 moedas.

Associada a esta experiência consideremos a variável aleatória X que assume os valores 0, 1, 2 ou 3, conforme for 0, 1, 2 ou 3 o número de caras obtidas no lançamento das 3 moedas.

Qual a probabilidade de a variável aleatória assumir aqueles valores?

VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA

FUNÇÃO MASSA DE PROBABILIDADE (f.p)

DEFINIÇÃO

A função de probabilidade de uma **variável aleatória discreta (v.a.d.)** é a função que associa a cada valor da variável a respetiva probabilidade.

$$\begin{array}{lllll} x: & x_1 & x_2 & x_3 & x_n \\ f(x): & p1 & p2 & p3 & pn \end{array}$$

A probabilidade de a variável aleatória X assumir o valor x1 é representada da seguinte forma:

$$\mathbf{f(x1) = P(X = x1) = p1}$$

Deve satisfazer as seguintes condições

$$\mathbf{a)\ pi \geq 0 \quad e \quad b)\ \Sigma\ \ pi = 1}$$

EXERCÍCIO

Considere a experiência aleatória que consiste em controlar a qualidade de carne de vaca embalada, até 3 dias após a data de validade. São retiradas doze embalagens aleatoriamente que passam ao laboratório.

Designando por B as que estão em bom estado e por D as deterioradas, defina a função de probabilidade e represente-a graficamente

VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

DEFINIÇÃO

As variáveis aleatórias que possam assumir todos os valores de um intervalo, sendo nula a probabilidade de assumirem valores isolados, dizem-se variáveis aleatórias **contínuas**. (v.a.c)

Enquanto que uma variável aleatória discreta se refere a qualquer tipo de contagem, uma v.a.c. refere-se a uma medida, como por exemplo o peso, a altura, o tempo, etc.

EXEMPLO

- tempo que um cliente espera numa fila de supermercado
- peso de um bebé de 6 meses
- tempo entre chegadas telefónicas consecutivas

VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

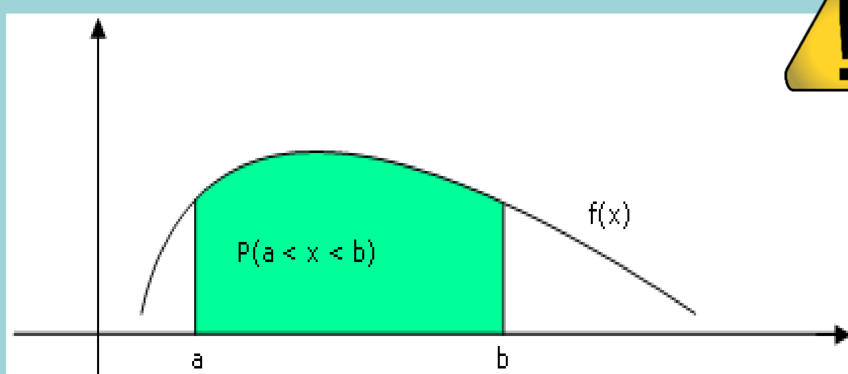
FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE (f.d.p)

DEFINIÇÃO

A função de densidade de probabilidade é uma função não negativa que traduz o modo como a probabilidade se distribui no domínio da variável. A probabilidade de a variável assumir um valor no intervalo]a, b[é igual à área sob a curva da função f(x), ou seja:

$$P(a < X < b) = \int_{a,b,} f(x)\, dx$$

Graficamente,



Não é possível definir função massa de probabilidade de uma v.a. contínua, porque de acordo com a definição de v.a contínua, esta não assume valores em pontos isolados, com probabilidade diferente de zero, ao contrário do que se passa com as variáveis aleatórias discretas

VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA

FUNÇÃO DE DENSIDADE DE PROBABILIDADE (f.d.p)

Propriedades da função de densidade

A função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória tem as seguintes propriedades:

1. **<u>É uma função não negativa</u>**

$f(x) \geq 0 \quad -\infty < x < +\infty$

2. **<u>O integral da função em todo o seu domínio é igual à unidade</u>**.

$\int f(x)\,dx = 1$

Isto significa que a totalidade da área entre a função e o eixo dos xx é igual à probabilidade total que é 1.

3. **<u>A probabilidade num ponto é igual a 0</u>**

$\int_{a,a} f(x)\,dx = 0$

EXERCÍCIO

Consideremos a v.a. X, que representa o tempo que uma pessoa leva para ir de carro de Lisboa a Albufeira. Admitamos que esse tempo se distribui uniformemente no intervalo [2h , 2h 20m].

a) Qual a probabilidade de que a viagem dure entre 2h e 2h10m?

b) Qual a probabilidade de que a viagem dure entre 2h5m e 2h10m?

ISTEC INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

EXERCÍCIO

A procura diária (em centena de horas) dos serviços prestados por uma empresa de limpeza é uma variável aleatória contínua com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f(x)=\begin{cases} 2x - 1/2\,a & \text{para } 0{,}5 <= x <= 1{,}5 \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

a) Determine "*a*" *.*

b) Calcule a probabilidade da procura diária exceder 100 horas.

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

DEFINIÇÃO

Função distribuição de uma variável aleatória X (discreta ou contínua), é a função **F(x)** tal que

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x)$$

F(x) -> função que para cada valor **x** ∈ **R**, acumula as probabilidades de todos os valores menores ou iguais a x

EXERCÍCIO

Construa a função distribuição da v.a. definida pela seguinte função massa de probabilidade

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
pi	0,04	0,50	0,24	0,12	0,10

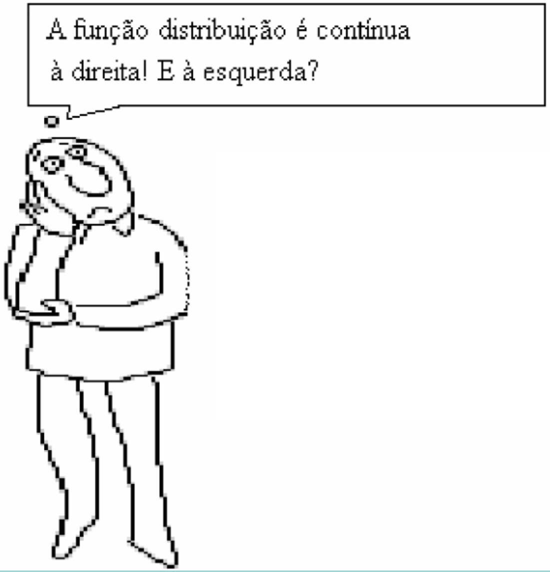
FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Propriedades da função distribuição de uma variável aleatória X (discreta ou contínua)

1. $F(-\infty) = 0$ (limite de $F(x)$ quando $x \to -\infty$) porque $P(X \leq -\infty) = 0$
   $F(+\infty) = 1$ (limite de $F(x)$ quando $x \to +\infty$) porque $P(X \leq +\infty) = 1$

2. $F(x)$ é uma função monótona não decrescente

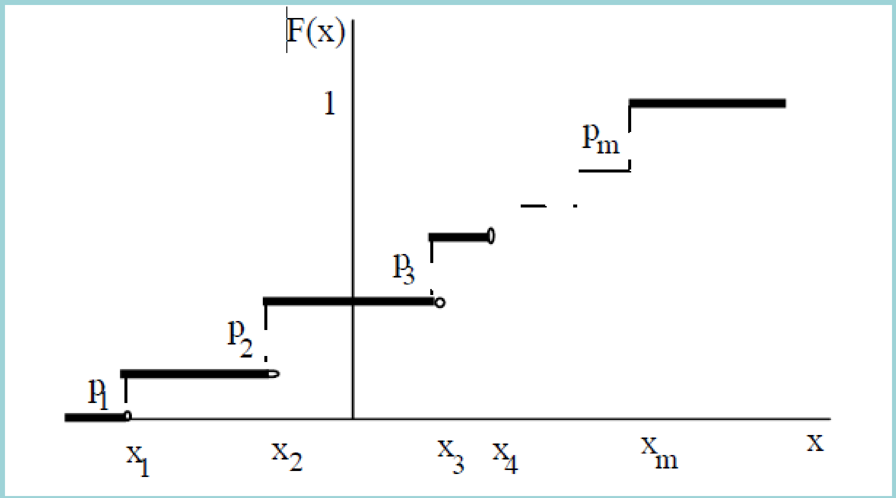
3. $F(x)$ é contínua à direita (decorre da forma como foi definida)



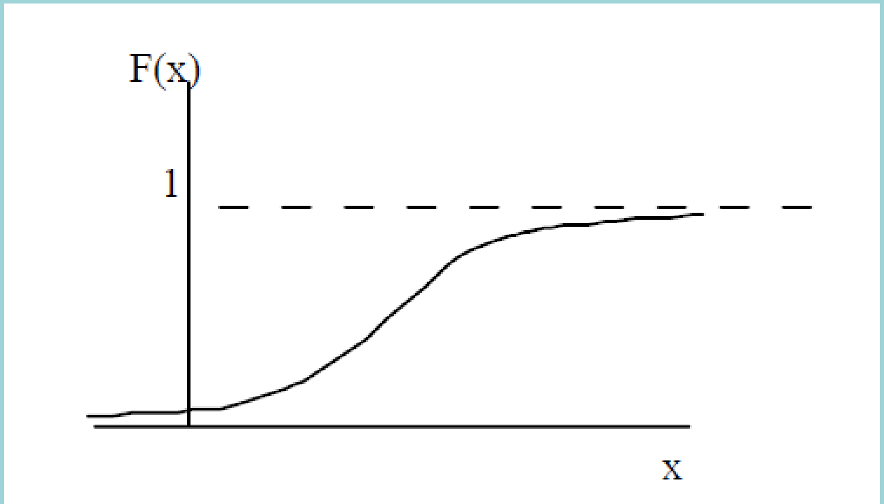
• Se a v.a. **X** é **discreta**, a função distribuição é **descontínua** (só é contínua à direita) - é uma função em escada, com saltos nos pontos onde a v.a. assume valores com probabilidade diferente de zero.

• Se a v.a. **X** é **contínua**, a função distribuição é **contínua**, porque, qualquer que seja o ponto **a**, tem-se $P(X=a)=0$, pelo que a função também é contínua à esquerda.

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO



Variável aleatória discreta

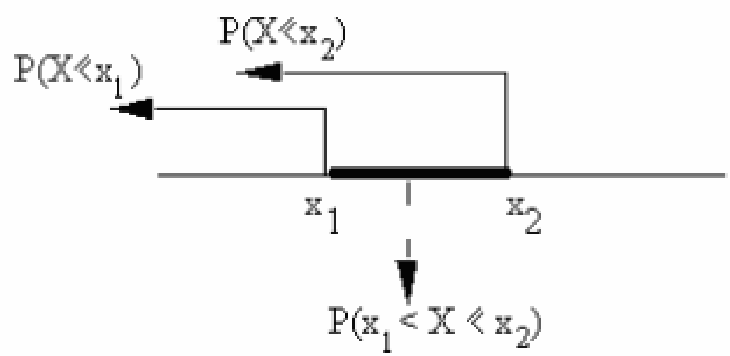


Variável aleatória contínua

Qual a utilidade da função distribuição?

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$



Variável aleatória X

Discreta

$$P(x_1<X<x_2) = F(x_2) - F(x_1) - P(X=x_2)$$

$$P(x_1\leq X<x_2) = F(x_2) - F(x_1) - P(X=x_2) + P(X=x_1)$$

$$P(x_1\leq X\leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) + P(X=x_1)$$

Contínua

$$P(x_1<X<x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(x_1\leq X<x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(x_1\leq X\leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

EXERCÍCIOS

1) Uma moeda defeituosa apresenta cara três vezes mais frequentemente que coroa.

Seja a v.a. X – número de “caras” em três lançamentos da referida moeda.

Deduza a função de probabilidade f(x) e a função de distribuição F(x)

2) O número de navios que diariamente atracam em determinado porto é uma v.a. cuja função de probabilidade é dada por:

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	a	2a	b	b	2c	c

a) Sabendo que em 30% dos dias atracam no porto menos de 2 navios e que em 36% dos dias atracam mais de 3 navios, determine a função de probabilidade f(x) e a função de distribuição F(x).
b) Qual a probabilidade de, em 2 dias, chegarem, em cada um deles, mais de 4 navios ao porto.

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

DEFINIÇÃO

Uma *variável bidimensional* é a que resulta da observação de dois valores relativamente ao resultado de uma experiência aleatória.

Escolhe-se uma pessoa ao acaso e observam-se as duas características seguintes: a altura e o peso. Se representarmos por X a altura e por Y o peso, temos duas v.a. associadas a essa experiência.
Se o comportamento probabilístico dessas duas variáveis for analisado conjuntamente, temos um variável bidimensional que se representa por

(X,Y).

X - Altura

Y - Peso

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE CONJUNTA DE V.A.D.

A função de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias discretas X e Y é a função f(x,y) que representa a probabilidade de um par de valores ser observado, ou seja:

$$f(x,y) = P[(X=x)\cap (Y=y)] = P\,(X=x,\ Y = y)$$

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_k	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1k}	
x_2	p_{21}	p_{22}	...	P_{2j}	...	py	
...			...		...		
x_i	p_{i1}	P_{i2}	...	p_{ij}	...	p_{ik}	
...			...		...		
x_m	p_{m1}	P_{m2}	...	p_{mj}	...	p_{mk}	
			...		...		1

E se pretendermos calcular P(X=x1), o que devemos fazer?

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE MARGINAL DE V.A.D.

A função de probabilidade marginal obtém-se fazendo o colapso da variável X (ou em alternativa da variável Y), isto é, não impondo restrições sobre a outra variável

$$\mathbf{p_{i.}} = \sum_{j} \mathbf{p_{ij}}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\mathbf{p_{.j}} = \sum_{i} \mathbf{p_{ij}}, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

X \ Y	y_1	y_2	...	y_j	...	y_k	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1k}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	P_{2j}	...	py	$p_{2.}$
...			...		...		
x_i	p_{i1}	P_{i2}	...	p_{ij}	...	p_{ik}	$p_{i.}$
...			...		...		
x_m	p_{m1}	P_{m2}	...	p_{mj}	...	p_{mk}	$p_{m.}$
	$p_{.1}$	$p_{.2}$	...	$p_{.j}$	...	$p_{.k}$	1

EXEMPLO

Considere-se a experiência aleatória que consiste no lançamento de dois dados. Em relação a esta experiência definem-se as duas variáveis aleatórias seguintes:

X: *assume o valor 0 quando sai par no primeiro dado e o valor 1 quando sai ímpar*
Y: *assume o valor 0 quando sai par no segundo dado e o valor 1 quando sai ímpar*

Os pares de valores e as correspondentes probabilidades são:

$f(0,0) = P(X=0, Y=0)= ¼$
$f(1,0) =P(X=1, Y=0) = ¼$
$f(0,1) =P(X=0, Y=1) = ¼$
$f(1,1) =P(X=1, Y=1) = ¼$

A função de probabilidade conjunta pode ser apresentada no seguinte quadro:

y/x	**0**	**1**
0	1/4	1/4
1	1/4	1/4

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

VARIÁVEIS INDEPENDENTES

Duas variáveis aleatórias consideram-se independentes se, quaisquer que sejam os intervalos A e B, os acontecimentos $X \in A$ e $Y \in B$.

Ou seja, os valores da sua distribuição conjunta são iguais ao produto das distribuições marginais.

EXEMPLO

Considere-se a distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y apresentada no quadro seguinte:
Podemos verificar que as variáveis são independentes porque em todos os casos, a função de probabilidade conjunta é igual ao produto das funções de probabilidade marginais:

f(0,0) = f1(0) x f2(0) = 0,8 x 0,3 = 0,24
f(0,1) = f1(0) x f2(1) = 0,8 x 0,7 = 0,56
f(1,0) = f1(1) x f2(0) = 0,2 x 0,3 = 0,06
f(1,1) = f1(1) x f2(1) = 0,2 x 0,7 = 0,14

y\x	**0**	**1**	**Soma**
0	0,24	0,06	**0,3**
1	0,56	0,14	**0,7**
Soma	**0,8**	**0,2**	**1**

6. CARACTERÍSTICAS POPULACIONAIS

População → **Amostra**

Características populacionais (Parâmetros) ← Características amostrais (Estatísticas)

EXEMPLO

Considere-se a população, ou v.a. que representa o nº de pintas que se obtém no lançamento de um dado. Para estudar esta população, que pode assumir os valores 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, recolheu-se uma amostra de dimensão 20, constituída pelo nº de pintas em 20 lançamentos. Suponha que os resultados obtidos foram os seguintes:

1, 4, 2, 1, 5, 2, 3, 6, 2, 1, 5, 6, 4, 5, 5, 3, 4, 2, 3 e 3

ISTEC INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

EXEMPLO

Para calcular a média, pode começar-se por agrupar os dados, pelo que se obtém

$\bar{x}$ = 1×3/20 + 2 ×4/20 + 3 ×4/20 + 4 ×3/20 + 5 ×4/20 + 6 ×2/20
= 1 × .15 + 2 × .20 + 3 × .20 + 4 × .15 + 5 × .20 + 6× .10 = 3.35

Para o cálculo da média utilizou-se a fórmula $\bar{x} = \sum_i x_i f_i$

Mas se o nº de provas fosse suficientemente grande, as frequências relativas utilizadas anteriormente para calcular a média, poderiam ser interpretadas como as probabilidades de uma v.a. assumir os valores de 1 a 6 (teoria frequencista da probabilidade).:

1×1/6 + 2×1/6 + 3×1/6 + 4×1/6 + 5×1/6 + 6×1/6 = 3.5

Neste momento deixámos de ter uma característica amostral (MÉDIA), para termos uma *característica populacional*, equivalente à *característica amostral* média

VALOR ESPERADO

VALOR ESPERADO

DEFINIÇÃO

Considere-se uma população representada pala v.a. **X**, **discreta**, que assume os valores x1, x2, x3, … , com probabilidades p1, p2, p3, …. Então define-se **valor esperado** e representa-se por **E(X)** ou **µX**, como sendo a característica que se obtém a partir da seguinte expressão

$$E(X) = \sum_{i} XiPi$$

Ao contrário do valor esperado que é um número fixo, a média é uma variável aleatória

A média é uma **estatística**, pois é uma variável aleatória que só depende dos valores da amostra e não depende de parâmetros desconhecidos

VALOR ESPERADO

$\bar{X}$ é um estimador do

$\bar{x}$ é uma estimativa do

VALOR ESPERADO

Será um bom estimador? Isto é, as estimativas serão boas?
Darão valores aproximados do parâmetro que pretende estimar?

S
I
M

Lei dos grandes números

Se uma experiência aleatória se repetir muitas e muitas vezes, a média dos resultados obtidos aproxima-se do valor médio da variável aleatória associada.

VALOR ESPERADO

Propriedades do valor esperado

Dadas duas v.a. **X** e **Y**, com valores médios respetivamente E(X) e E(Y), então

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

2. Dada a v.a. **X** e as constantes **a** e **b**, tem-se

$$E(aX + b) = a\,E(X) + b$$

3. Se as v.a. X e Y são independentes, então

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

O valor médio do produto só é igual ao produto dos valores médios, se as v.a. forem independentes.

A definição de valor esperado para populações **contínuas**, é uma generalização da definição de valor esperado para populações discretas, em que se utiliza o integral em vez do somatório:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

VALOR ESPERADO

Valor esperado de uma função de uma variável aleatória

Se X é uma v.a. e g(x) é uma função do contradomínio IR, então

no caso de X for uma v.a DISCRETA com função de probabilidade f(x)

$$E[g(X)] = \sum g(x).f(x)$$

no caso de X for uma v.a CONTÍNUA com função de probabilidade f(x)

$$E[g(X)] = \int g(x).f(x).dx$$

EXERCÍCIO

Suponha uma rent-a-car de veículos desportivos de luxo que tem uma procura diária aleatória. Se considerarmos a v.a X como o número de veículos desportivos alugados diariamente com as seguintes probabilidades

X	X=0	X=1	X=2	X=3
f(x)	0,15	0,35	0,30	0,20

determine o valor que em média se aguarda alugar por dia.

Assumindo que o quadro abaixo indica o custo de manutenção desses veículos, calcule o respetivo custo médio diário de manutenção

X	X=0	X=1	X=2	X=3
C(x)	40	80	150	210

EXERCÍCIO

Uma companhia de seguros instituiu um seguro de vida com a duração de 5 anos, para indivíduos de 21 anos, do sexo masculino, segundo a seguinte modalidade: a companhia paga uma indemnização de 20 mil euros se o segurado morrer nos próximos 5 anos, sendo o prémio anual de 50 euros.

Pretende-se saber qual o lucro esperado para a companhia de seguros, tendo em conta as seguintes probabilidades:

Idade morte	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**>=26**
Probabilidade	,0018	,0019	,0019	,0019	,0019	,9906

EXERCÍCIO

Na produção de determinado tipo de vidro é necessário que o forno atinja uma temperatura C rondando os 550˚ centígrados. No entanto verificam-se algumas flutuações em torno desta temperatura de acordo com a seguinte distribuição de probabilidades

Temp C	**540º**	**545º**	**550º**	**555º**	**560º**
Probabilidade	0,10	0,15	0,50	0,20	0,05

1) Calcule o valor médio de C
2) Calcule o valor médio das flutuações verificadas
3) Calcule o valor médio da temperatura medida em graus Fahrenheit

VARIÂNCIA (populacional)

DEFINIÇÃO

Define-se variância de X como sendo o valor médio do quadrado da diferença entre X e o seu valor médio. Representa-se por Var(X) ou σ^2_X

$$Var(X) = E\{ [X - E(X)]^2\}$$

Limitando-nos ao caso de populações **discretas,** e utilizando a notação introduzida na definição do valor médio, define-se variância da v.a. X como sendo:

$$Var(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$$

VARIÂNCIA (populacional)

Outra expressão para o cálculo da variância

$$var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Propriedades da variância

Dada a v.a. **X** e as constantes **a** e **b**, tem-se

$$\mathbf{Var(aX+b)= a^2Var(X)}\text{ , porque } Var(b)=0$$

$$\mathbf{Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2\, Cov(X,Y)}$$

Dadas as v.a. **X** e **Y independentes**, tem-se

$$\mathbf{Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)}$$

DESVIO PADRÃO (populacional)

DEFINIÇÃO

Define-se o **desvio padrão populacional** ou unicamente **desvio padrão**, que se representa por σ_X, como sendo a raiz quadrada da variância.

$$\sigma_X = \sqrt{E\{[X - E(X)]^2\}}$$

O desvio padrão populacional é uma medida da variabilidade da população, relativamente à medida de localização - **valor médio**. Assim, quanto maior for o desvio padrão, maior será a dispersão apresentada pela variável aleatória.

S é um estimador de → **desvio padrão populacional**

s é uma estimativa de → **desvio padrão populacional**

ISTEC INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

EXERCÍCIOS

1. Determine o valor esperado, a variância e o desvio padrão da variável aleatória discreta X com a seguinte função de probabilidade

x:	0	1	2
f(x):	0,2	0,7	0,1

2. Num condomínio fechado, o número de horas pagas pelo aluguer de um campo de padel por cada condómino, tem a seguinte função de probabilidade:

$$f(x) = 1/6 \cdot (4 - x) \quad \text{para } x=1, 2, 3$$

a) Considere o custo (y) de aluguer por condómino, sabendo que a 1ª hora custa 5 euros, a 2ª hora 4 euros e 3ª hora 3 euros. Calcule a média e a variância de Y

b) Que alterações ocorrerão na média e na variância de Y se a administração decidir aumentar os preços em 5%

COVARIÂNCIA

DEFINIÇÃO

Medida adequada para medir a maior ou menor intensidade, com que duas v. a. se associam (linearmente) ou se acompanham. Representa-se por Cov(X,Y):

$$\mathbf{Cov(X,Y) = E[\,(X - \mu_x)\,(Y - \mu_y)]}$$

ou

$$\mathbf{Cov(X,Y) = E[\,(X - E[X])\,(Y - E[Y])]}$$

Esta expressão pode igualmente escrever-se na seguinte forma :

$$\mathbf{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\,.\,E(Y)}$$

TEOREMA

Se X e Y forem independentes,

Então Cov(X,Y) = 0

Ver exemplo seguinte

EXEMPLO

Considere-se a variável aleatória bidimensional com a função de probabilidade conjunta dada pelo quadro seguinte:

y\x	**0**	**1**	**Soma**
0	0,18	0,42	**0,6**
1	0,12	0,28	**0,4**
Soma	**0,3**	**0,7**	**1**

As variáveis são independentes e têm as seguintes funções de probabilidade marginais:

X	**0**	**1**
f(x)	**0,3**	**0,7**

Y	**0**	**1**
f(y)	**0,6**	**0,4**

Podemos calcular o valor esperado de cada uma das variáveis aleatórias:

E(X) = 0 x 0,3 + 1 x 0,7 = **0,7** E(Y) = 0 x 0,6 + 1x 0,4 = **0,4**

Em seguida, calcula-se o valor esperado do produto das duas variáveis aleatórias:

E(XY) = 0x0x0,18 + 0x1x0,12 + 1x0x0,42 + 1x1x0,28 = **0,28**

E finalmente é fácil confirmar que o produto dos valores esperados é também igual a 0,28: E(X) E(Y) = 0,7 x 0,4 = **0,28**

EXERCÍCIO

Relativamente ao exercício da rent-a-car de veículos desportivos, suponha que a mesma empresa tem também veículos de todo-o-terreno, cuja procura tem comportamento descrito através da v.a. Y (que é independente da procura dos veículos desportivos)

Y	**Y=0**	**Y=1**	**Y=2**
f(y)	0,3	0,45	0,25

a) Determine o valor que em média se aguarda alugar por dia de veículos todo-o-terreno

b) Escreva a função de probabilidade *z* correspondente à procura diária de todo o tipo de veículos

c) Calcule a covariância entre a procura de veículos desportivos (v.a. X) e procura de veículos de todo-o-terreno (v.a. Y)

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR

DEFINIÇÃO

O coeficiente de correlação entre as variáveis aleatórias X e Y é o quociente da covariância pelo produto dos desvios padrões:

$$\rho\ x,y = Cov(X,Y) / (\sigma_x\ \sigma_y)$$

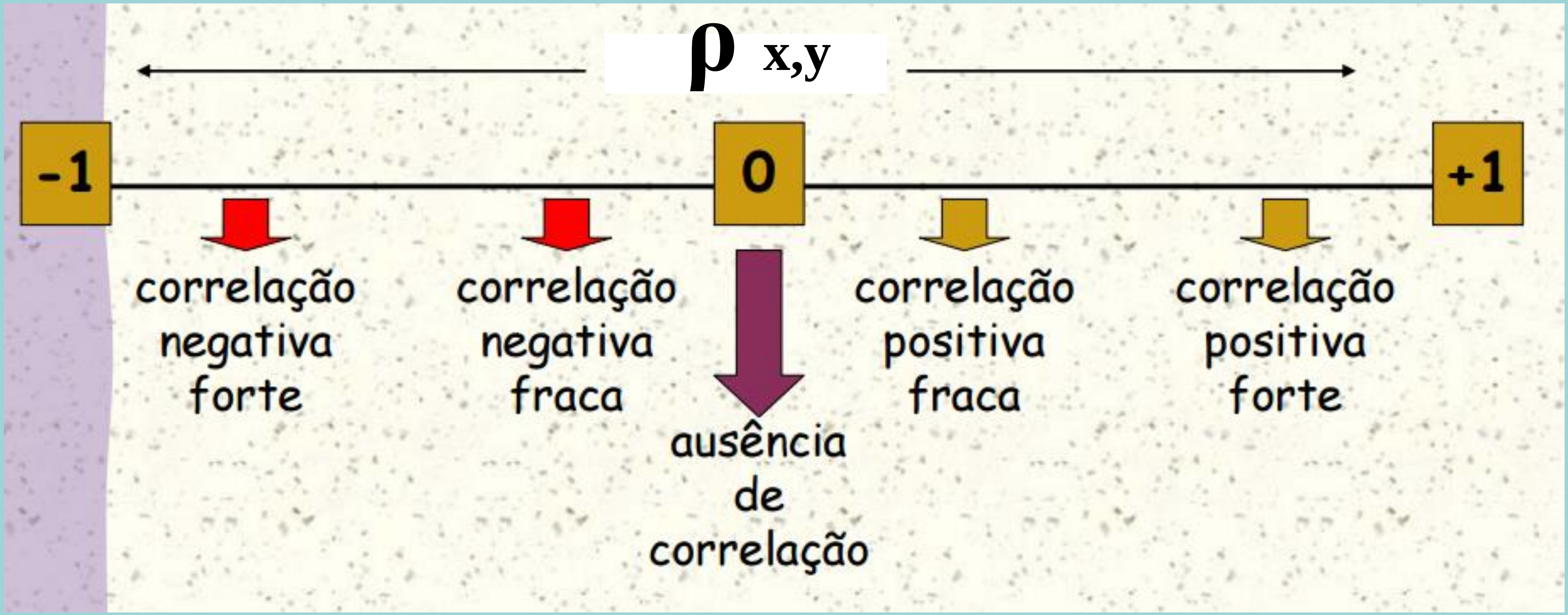
Sendo que $\sigma_x = \sqrt{Var(X)}$ e $\sigma_y = \sqrt{Var(Y)}$.

O coeficiente de correlação tem a vantagem de permitir medir a **intensidade** e a **direção** da ligação entre as variáveis e não depender da unidade de medida em que essas variáveis se exprimem

O valor de **ρ x,y é >= -1 e <= 1**

- ρ x,y = -1 há correlação linear negativa perfeita entre X e Y
- ρ x,y = 1 há correlação linear positiva perfeita entre X e Y
- ρ x,y = 0 não há correlação linear entre X e Y

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR



- O valor de ρ x,y não varia se todos os valores de qualquer uma das variáveis são convertidos para uma escala diferente.
- O valor de ρ x,y não é afetado pela escolha de x ou y. Permutando x e y, ρ x,y permanece inalterado.
- ρ x,y só mede a intensidade ou grau de relacionamentos lineares. Não serve para medir intensidade de relacionamentos não lineares.

EXEMPLO

da aplicação do COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR

Indústria:
Número de peças produzidas e número de peças defeituosas

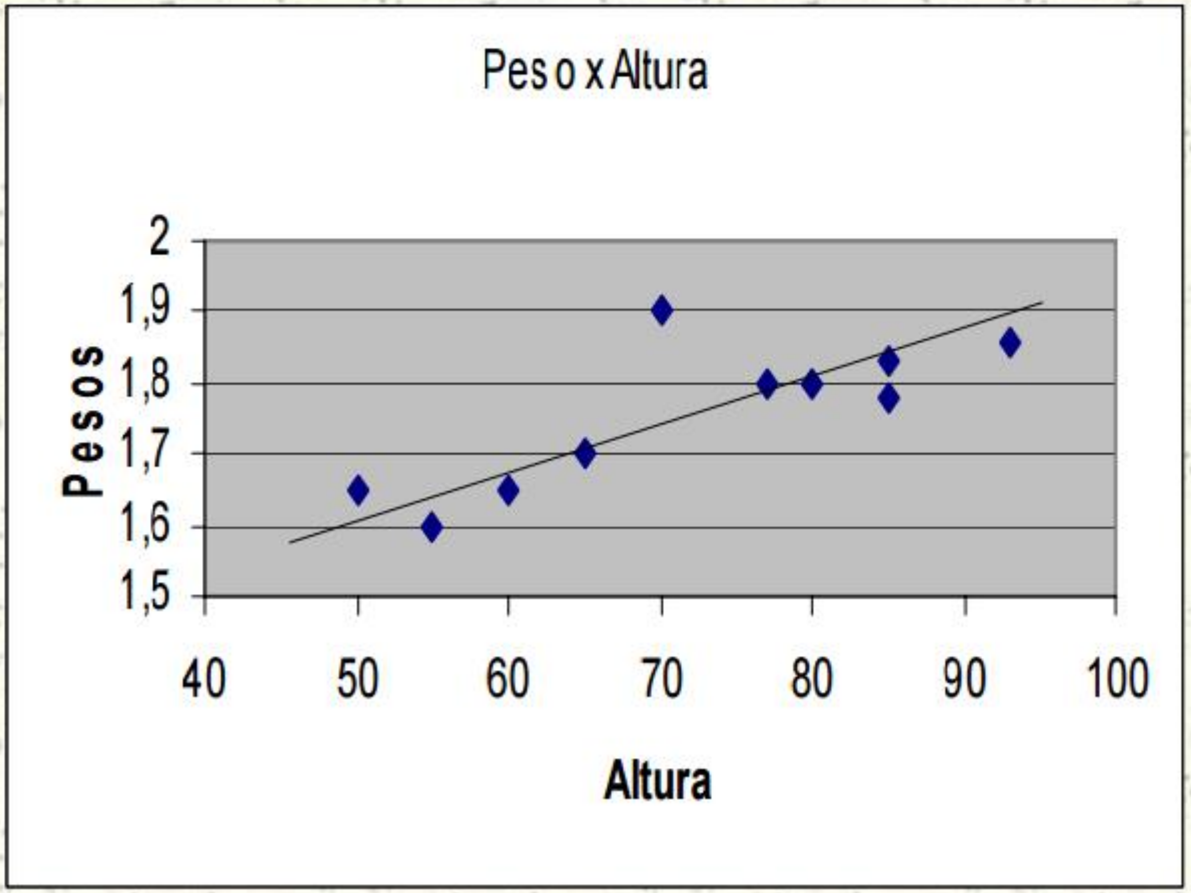
Construção:
Número de falhas em uma obra e o nº de reclamações recebidas
Dias de atraso de entrega e o número de dias chuvosos

Financeiro
Média de tempo de atraso de pagamento e número de erros de fatura

Vendas
% de imóveis vendidos na data de entrega da obra x satisfação média dos clientes nos últimos 10 empreendimentos.

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO LINEAR

Peso (kg)	Altura (m)
80	1,80
85	1,83
50	1,65
70	1,90
55	1,60
77	1,80
85	1,78
93	1,86
65	1,70
60	1,65



REGRESSÃO

DEFINIÇÃO

Um modelo de *regressão* é um modelo matemático – equação, que descreve a relação entre duas ou mais variáveis. Se o estudo só incluir duas variáveis – a variável **explanatória** x e a variável **resposta** y, temos uma regressão simples. Se o modelo matemático utilizado for a equação de uma reta, então diz-se regressão linear simples

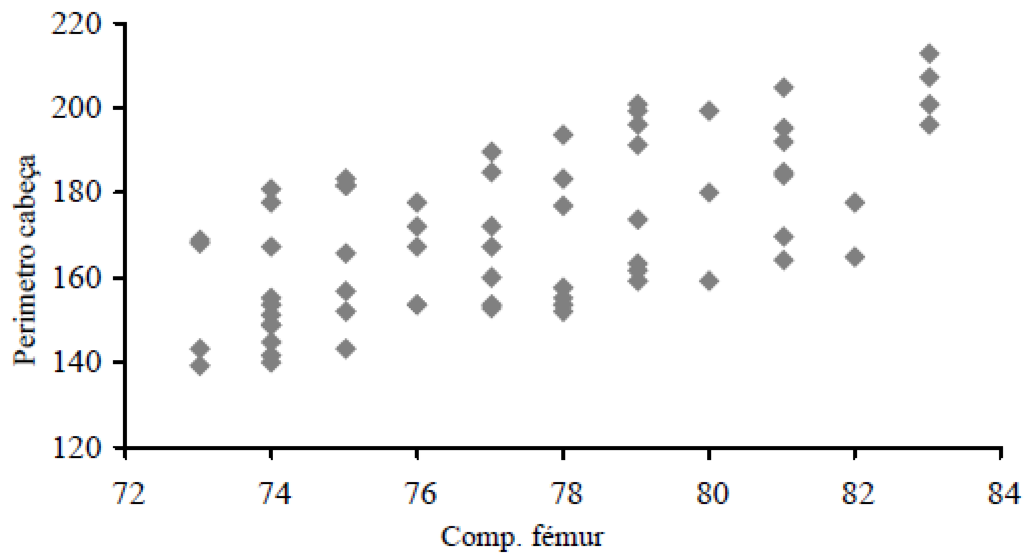
EXEMPLO

Os dados seguintes representam o comprimento do fémur, avaliado através de ecografia, de fetos humanos na 30ª semana de gestação (colunas encimadas com X) e o correspondente perímetro da cabeça à nascença (colunas encimadas com Y).

X	Y	X	Y	X	Y
73	168	76	172	79	163
73	169	76	154	79	159
73	143	76	167	79	174
73	139	76	154	79	191
74	140	76	178	79	196
74	178	77	160	80	180
74	149	77	185	80	199
74	167	77	172	80	159
74	155	77	167	81	170
74	149	77	153	81	184
74	154	77	154	81	192
74	145	77	190	81	185
74	151	78	152	81	164
74	181	78	158	81	195
74	142	78	154	81	205
75	166	78	194	82	165
75	182	78	183	82	178
75	143	78	155	83	201
75	183	78	177	83	207
75	157	79	201	83	196
75	152	79	162	83	213
75	182	79	199		

EXEMPLO

Diagrama de dispersão



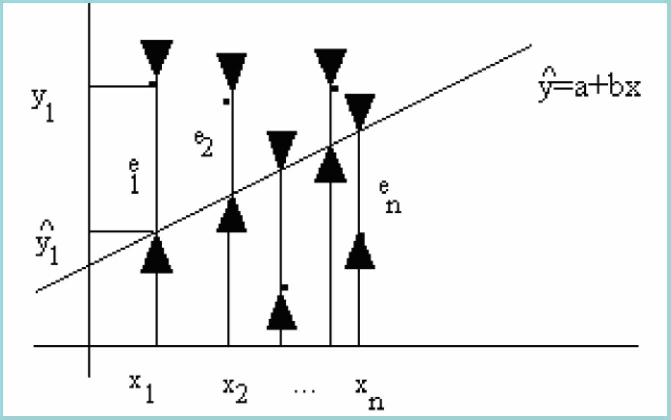
RETA DOS MÍNIMOS QUADRADOS

consiste em determinar a reta que minimiza a soma dos quadrados dos desvios (ou erros) entre os verdadeiros valores das ordenadas e os obtidos a partir da reta, que se pretende ajustar.

$$y = a + b.x$$

REGRESSÃO

MÍNIMOS QUADRADOS



$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

ESTIMADORES DA RETA

$$b = \frac{\sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum (x_i-\bar{x})^2} \qquad a = \bar{y} - b\,\bar{x}$$

Forma simplificada

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Outliers
observação que apresenta um grande afastamento das demais da série

EXERCÍCIO

Os dados da tabela seguinte representam a idade e a altura das crianças de uma escola privada.

a) Construa o diagrama de dispersão.

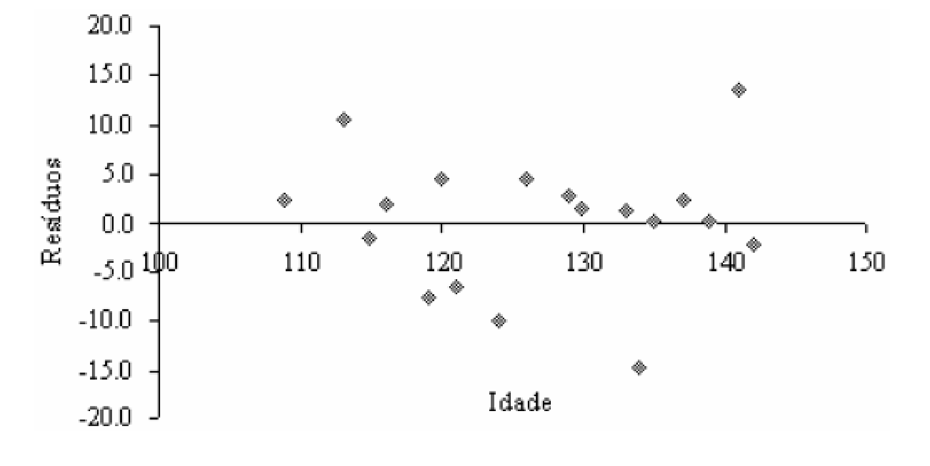
b) Construa a reta de regressão da altura na idade.

Criança	Idade(meses)	Altura(cm)
1	109	137.6
2	113	147.8
3	115	136.8
4	116	140.7
5	119	132.7
6	120	145.4
7	121	135.0
8	124	133.0
9	126	148.5
10	129	148.3
11	130	147.5
12	133	148.8
13	134	133.2
14	135	148.7
15	137	152.0
16	139	150.6
17	141	165.3
18	142	149.9

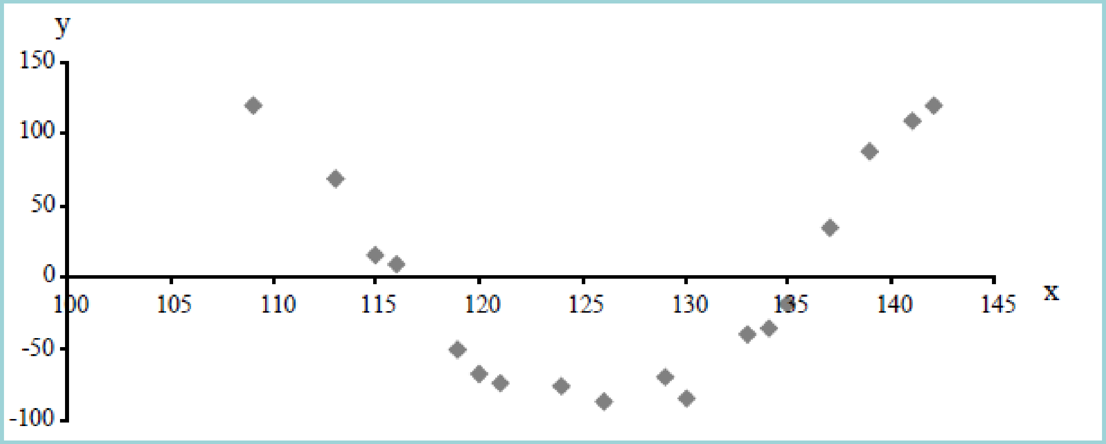
REGRESSÃO

RESÍDUOS

Diferença entre os valores observados y e os valores ajustados $\hat{y}$



MODELO LINEAR DESAJUSTADO



MODELO LINEAR AJUSTADO

OBSERVAÇÃO INFLUENTE

Resíduo com grande influência na reta dos mínimos quadrados

EXEMPLO

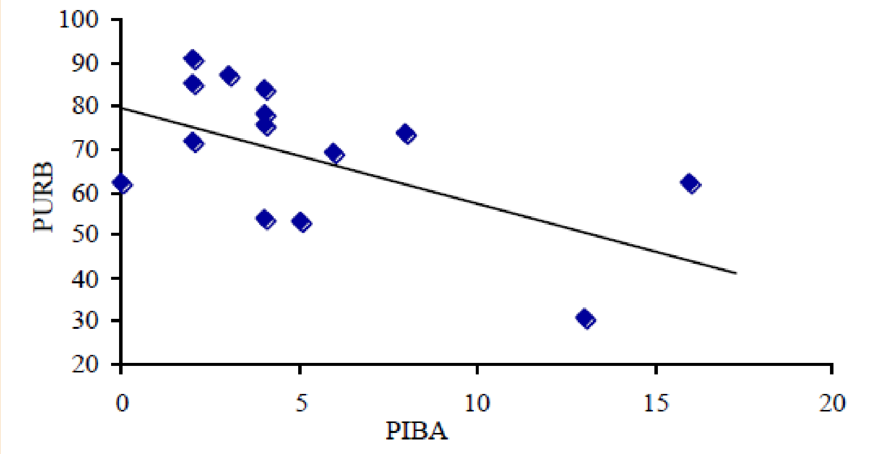
Para alguns países da Europa, considere-se alguns indicadores económicos, nomeadamente o PIBA (produto interno bruto, originado pela agricultura) e o PURB (percentagem de população urbana):

País	PIBA	PURB	País	PIBA	PURB
Alemanha	2	85	Grécia	16	62
Áustria	4	54	Holanda	4	76
Bélgica	2	72	Itália	6	69
Dinamarca	4	84	Noruega	5	53
Espanha	8	74	Portugal	13	31
Finlândia	0	62	Reino Unido	2	91
França	4	78	Suécia	3	87

EXEMPLO

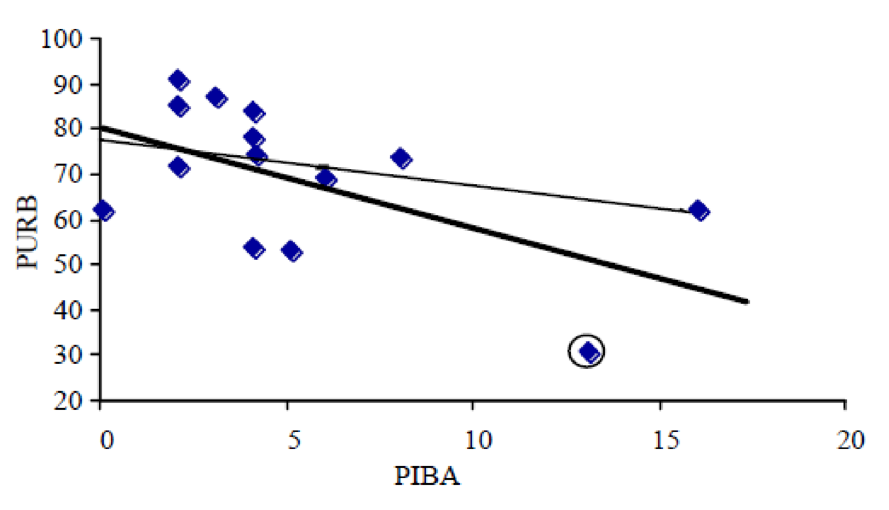
A reta dos mínimos quadrados entre as variáveis consideradas é

$\hat{y} = 80.283 - 1.999\,x$



Não considerando o ponto correspondente a Portugal, que juntamente com a Grécia sobressaem de entre os restantes no que diz respeito ao PIBA, obtém-se a seguinte equação para a reta

$\hat{y} = 77.308 - 0.967\,x$



REGRESSÃO POPULACIONAL

ISTEC INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

VALOR MÉDIO CONDICIONAL

Dado o par de variáveis aleatórias (X, Y), define-se **valor médio condicional de Y dado X=x** e representa-se por $E_{Y|X}(Y)$ como sendo o valor médio de todos os valores de Y que correspondem ao mesmo valor de x.

REGRESSÃO DE Y EM X

Uma vez que para cada valor da variável aleatória X se pode definir o valor médio condicional $E_{Y|X}(Y)$, considere-se a função definida pelos pontos (x, $E_{Y|X}(Y)$). A esta função chamamos **regressão** (populacional) de Y em X. Quando esta função é linear dizemos que temos a **regressão linear** e o modelo utilizado é

$$E_{Y|X}(Y) = \alpha + \beta x$$

REGRESSÃO POPULACIONAL

INTERPRETAÇÃO DO α e β

- Para se prever um valor para Y utilizando a reta de regressão, não se deve considerar para X um valor que saia fora do intervalo que se considerou para construir a reta de regressão

- o acréscimo de uma unidade no valor de X, provoca em Y um acréscimo igual ao valor estimado para β.

COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO

Indica a proporção da variabilidade existente em Y que é explicada pela reta de regressão. Designa-se por $\mathbf{r^2}$ e é corresponde ao quadrado do coeficiente de correlação

EXERCÍCIO

Uma das preocupações das companhias de seguros é estudar a desvalorização dos carros, com a idade. Assim, com o objetivo de estudar esse fenómeno recolheu-se, para um determinado modelo do FIAT Punto, uma amostra de 10 carros, tendo obtido a seguinte informação sobre a idade (em anos) e o preço de venda usado (em euros)

Idade	6	4	3	4	5	3	8	4	9	3
Preço	650	800	890	750	700	850	500	790	300	930

a) Represente graficamente os dados num diagrama de dispersão

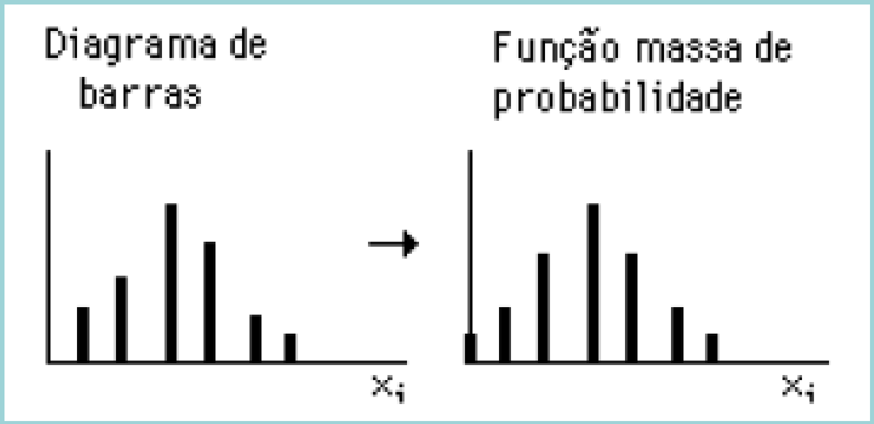
b) Obtenha a reta de regressão, considerando a variável preço como variável dependente

c) Interprete os valores obtidos para os coeficientes da reta de regressão

d) Qual o preço previsto para um carro de 7 anos?

e) Estime o preço de um carro de 15 anos. Interprete o valor obtido.

7. MODELOS DE PROBABILIDADE

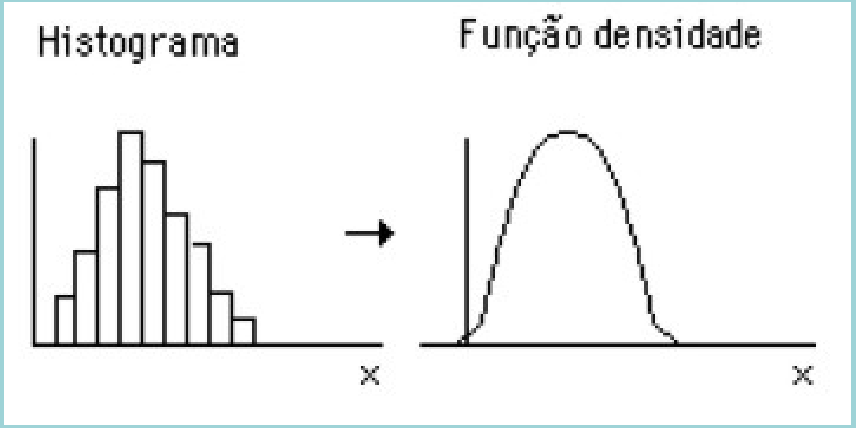


MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

UNIFORME
BINOMIAL
POISSON

MODELOS DE DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

NORMAL



DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

DEFINIÇÃO

Diz-se que a variável aleatória X tem uma distribuição **uniforme** em n pontos, se assumir os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, com probabilidade $P(X=x_i) = \frac{1}{n}$

$$f(x) = f(x; n) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1,2,3\ldots.n \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Caso X seja v.a. discreta com distribuição uniforme, então tem-se que

$$E[X] = \mu_x = \frac{n+1}{2} \qquad Var[X] = \sigma^2_x = \frac{n^2-1}{12}$$

DISTRIBUIÇÃO UNIFORME

EXERCÍCIO

Determinada rede internacional de sapatarias pretende abrir uma nova loja na cidade de Lisboa. Segundo o estudo de mercado realizado nessa cidade, estima-se que as vendas de sapatos possam ser de 500, 600, 700 ou 800 pares por mês ao preço médio de 50 euros por par.

a) Determine a distribuição de probabilidade da venda mensal de sapatos.

b) Represente-a graficamente.

PROVAS DE BERNOULLI

EXEMPLO

Um gerente de um centro comercial, mandou fazer publicidade do seu centro, na televisão, durante uma semana. Passados 15 dias, sobre a apresentação do anúncio, os clientes eram abordados para responderem se a sua visita se devia, ou não, ao anúncio.

Admitindo que o número de clientes a quem foi feita a pergunta é **n**, que as respostas que cada um dá são **independentes** umas das outras, e que cada cliente tem **igual probabilidade** de responder afirmativamente, a experiência anterior tem as características de uma **prova de Bernoulli** porque:

Prova de Bernoulli

1) a experiência é constituída por **n** provas, entendendo-se por **prova** uma repetição em condições idênticas
2) as provas são **independentes**
3) em cada uma das provas pode-se verificar **um de dois** resultados a que chamamos **sucesso** e **insucesso**, sendo constante a probabilidade de sucesso em cada prova; esta probabilidade representa-se por **p**.

PROVAS DE BERNOULLI

SUCESSÃO DE PROVAS DE BERNOULLI

1) Em cada prova só há dois resultados possíveis mutuamente exclusivos (sucesso ou insucesso)

1) A probabilidade de sucesso (designada por *p),* mantém-se constante de prova para prova, tal como a probabilidade de insucesso, que se designa por *q* (*q=1-p*)

1) As provas são independentes, isto é, os resultados obtidos numa prova não afetam os resultados das restantes

EXERCÍCIO

Suponha que a mesma rede de sapatarias pretende vender meias, mas que esse negócio só terá interesse se mais de metade dos seus clientes comprar esse produto. Nesse sentido, decide inquirir 100 clientes atuais.

Em que condições se estará na presença de uma sucessão de provas de Bernoulli?

EXEMPLO (continuação)

Suponhamos, para simplificar, que foram 4 os clientes a quem foi feita a pergunta, isto é, n=4. Suponhamos ainda que o anúncio influenciou 25% dos potenciais clientes do Centro Comercial.

Então a probabilidade de um cliente dizer que foi influenciado é de .25 (probabilidade do sucesso), enquanto que a probabilidade do cliente responder que não foi influenciado é de .75 (probabilidade do insucesso).

Se representarmos por X, a v.a. que dá, de entre os 4 clientes, o número de clientes que responderam afirmativamente, temos que os valores possíveis para X são: X - 0 1 2 3 4

<u>Qual é a função massa de probabilidade de X?</u>

Representando por S - influenciado e por N - não influenciado, temos

$P(X=0)=P(NNNN)=.75^4$

$P(X=1)=P[(SNNN) \cup (NSNN) \cup (NNSN) \cup (NNNS)] = 4 \times .25 \times .75^3$

$P(X=2)=P[(SSNN) \cup (SNSN) \cup (SNNS) \cup (NSSN) \cup (NSNS) \cup (NNSS)] =6\times .25^2\times .75^2$

$P(X=3)=P[(SSSN) \cup (SSNS) \cup (SNSS) \cup (NSSS)] = 4 \times .25^3 \times .75$

$P(X=4)=P(SSSS) = .25^4$

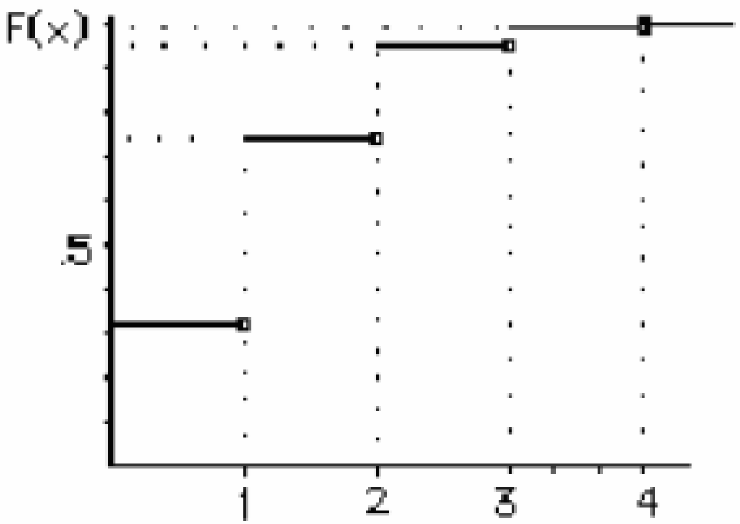
EXEMPLO (continuação)

A f.m.p. encontra-se na tabela seguinte:

$X=x_i$	0	1	2	3	4
p_i	.316	.422	.211	.047	.004

Apresenta-se a seguir a função de distribuição da v.a. X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x<0 \\ .316 & \text{se} \quad 0\le x<1 \\ .738 & \text{se} \quad 1\le x<2 \\ .949 & \text{se} \quad 2\le x<3 \\ .996 & \text{se} \quad 3\le x<4 \\ 1 & \text{se} \quad 4\le x \end{cases}$$



É possível generalizar este processo para qualquer valor de n?

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

DEFINIÇÃO

Diz-se que a v.a discreta X (número de sucessos em n provas de Bernoulli) – tem **distribuição binomial** e representa-se por

$$X \cap b\,(n;\,p)$$

se a sua **função de probabilidade** for dada por:

$$P[X = x] = f(x) = f(x, n, p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^{x} (1 - p)^{n-x} & x=0, 1, 2 \ldots n \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

Em que n e p são parâmetros caracterizadores desta distribuição

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

FUNÇÃO de DISTRIBUIÇÃO

$$P[X <= x] = F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{x_i=0}^{n} \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{n-x_i} & 0 <= x <= n \\ 1 & x > n \end{cases}$$

O modelo Binomial aplica-se sempre que estejamos perante uma situação de n provas repetidas e independentes, em que em cada prova se possa verificar um de dois resultados, geralmente chamados de *sucesso* e *insucesso*, e em que se mantenha constante a probabilidade de *sucesso*.

A *variável aleatória* de interesse é o *número de sucessos nas n provas*.

Situações destas surgem frequentemente em problemas de:
- prospeção de mercado
- controlo de qualidade

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

$E[X] = n \cdot p$ $\qquad$ $Var[X] = n \cdot p \cdot q$

Tabelas com as probabilidades da Binomial

No caso do exemplo considerado anteriormente, o valor de n=4, é suficientemente pequeno, para que o cálculo das probabilidades não seja muito trabalhoso, o que não aconteceria para valores grandes de n.

Assim, existem tabelas que, para alguns valores de **n** e de **p**, nos dão imediatamente os valores das probabilidades, assim como as probabilidades acumuladas, para a construção da função distribuição.

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

EXERCÍCIOS

1. Suponhamos que se lançou ao ar 18 vezes, uma moeda "equilibrada". Pretende-se estudar a v.a. **X**. que representa o número de caras saídas nos 18 lançamentos.

2. Um estudante que não teve tempo para se preparar para um exame, em que cada questão tinha 5 respostas possíveis havendo apenas uma correta, decide responder ao acaso, com ajuda de um dado de 5 faces equilibrado. Se o exame for constituído por 18 questões:

a) Qual a probabilidade de responder certo a uma questão?

b) Qual o número de respostas certas que se espera obter?

c) Qual a probabilidade de responder certo, a pelo menos11 das questões?

d) Qual a probabilidade de responder certo a um número de questões entre 2 e 5

n	x	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0014	0,0056	0,0167	0,0392	0,0755	0,1222
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0049	0,0142	0,0337	0,0667
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0040	0,0115	0,0278
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0008	0,0029	0,0085
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0018
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	0	0,4181	0,1668	0,0631	0,0225	0,0075	0,0023	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
	1	0,3741	0,3150	0,1893	0,0957	0,0426	0,0169	0,0060	0,0019	0,0005	0,0001
	2	0,1575	0,2800	0,2673	0,1914	0,1136	0,0581	0,0260	0,0102	0,0035	0,0010
	3	0,0415	0,1556	0,2359	0,2393	0,1893	0,1245	0,0701	0,0341	0,0144	0,0052
	4	0,0076	0,0605	0,1457	0,2093	0,2209	0,1868	0,1320	0,0796	0,0411	0,0182
	5	0,0010	0,0175	0,0668	0,1361	0,1914	0,2081	0,1849	0,1379	0,0875	0,0472
	6	0,0001	0,0039	0,0236	0,0680	0,1276	0,1784	0,1991	0,1839	0,1432	0,0944
	7	0,0000	0,0007	0,0065	0,0267	0,0668	0,1201	0,1685	0,1927	0,1841	0,1484
	8	0,0000	0,0001	0,0014	0,0084	0,0279	0,0644	0,1134	0,1606	0,1883	0,1855
	9	0,0000	0,0000	0,0003	0,0021	0,0093	0,0276	0,0611	0,1070	0,1540	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0025	0,0095	0,0263	0,0571	0,1008	0,1484
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0026	0,0090	0,0242	0,0525	0,0944
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0024	0,0081	0,0215	0,0472
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0021	0,0068	0,0182
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0016	0,0052
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18	0	0,3972	0,1501	0,0536	0,0180	0,0056	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,3763	0,3002	0,1704	0,0811	0,0338	0,0126	0,0042	0,0012	0,0003	0,0001
	2	0,1683	0,2835	0,2556	0,1723	0,0958	0,0458	0,0190	0,0069	0,0022	0,0006
	3	0,0473	0,1680	0,2406	0,2297	0,1704	0,1046	0,0547	0,0246	0,0095	0,0031
	4	0,0093	0,0700	0,1592	0,2153	0,2130	0,1681	0,1104	0,0614	0,0291	0,0117
	5	0,0014	0,0218	0,0787	0,1507	0,1988	0,2017	0,1664	0,1146	0,0666	0,0327
	6	0,0002	0,0052	0,0301	0,0816	0,1436	0,1873	0,1941	0,1655	0,1181	0,0708
	7	0,0000	0,0010	0,0091	0,0350	0,0820	0,1376	0,1792	0,1892	0,1657	0,1214
	8	0,0000	0,0002	0,0022	0,0120	0,0376	0,0811	0,1327	0,1734	0,1864	0,1669
	9	0,0000	0,0000	0,0004	0,0033	0,0139	0,0386	0,0794	0,1284	0,1694	0,1855
	10	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0042	0,0149	0,0385	0,0771	0,1248	0,1669
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0046	0,0151	0,0374	0,0742	0,1214
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0047	0,0145	0,0354	0,0708
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0045	0,0134	0,0327
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0039	0,0117
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0031
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
19	0	0,3774	0,1351	0,0456	0,0144	0,0042	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

E se o parâmetro p da Binomial for desconhecido?

É possível **estimá-lo** o valor de p, isto é tentar obter um valor aproximado para p

.

$$\hat{p} = X / n$$

onde X representa o nº de sucessos em n provas. Estamos assim a estimar p pela frequência relativa de sucesso. Quando n for suficientemente grande, temos uma boa aproximação da probabilidade (dada a teoria frequencista da probabilidade)

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

EXEMPLO

O gerente de uma casa que vende material informático fez uma encomenda de 20 impressoras usadas de determinada marca, que será aceite mediante a inspeção de 3 das impressoras, para ver se funcionam ou estão avariados. Quando a encomenda chega o gerente analisa as 3 primeiras impressoras a serem descarregadas. Embora o gerente não saiba, 2 das impressoras têm avarias. Será que estamos perante uma experiência binomial?

RESOLUÇÃO:

Estamos perante uma experiência constituída por 3 provas, em que em cada prova se pode verificar o sucesso (impressora avariada) ou insucesso (impressora boa). A probabilidade de selecionar uma impressora defeituosa é 2/20, admitindo que qualquer uma das impressoras poderia ter sido colocada no meio de transporte, em melhores condições de ser a primeira a ser descarregada. No entanto as provas não são independentes, já que a probabilidade de obter uma impressora defeituosa na 2ª prova ou na 3ª prova depende do que aconteceu nas provas anteriores, pelo que a probabilidade de sucesso não se mantém constante ao longo das provas. Assim, não estamos perante uma experiência binomial.

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Amostragem com reposição

No processo de amostragem que consiste em retirar aleatoriamente uma amostra de uma população, *com reposição*, em que para cada indivíduo recolhido se verifica se sim ou não tem determinada propriedade, repondo o elemento recolhido antes de proceder a nova extração, estamos em condições de aplicar o modelo binomial, quando se pretende estudar a variável aleatória que representa o número de indivíduos da amostra, com a dita propriedade.

Amostragem sem reposição em populações "infinitas"

Se na experiência anterior a dimensão **N** da população, de onde foi recolhida a amostra, fosse suficientemente grande, relativamente à dimensão **n** da amostra recolhida, então a probabilidade de sucesso não sofreria alterações significativas de prova para prova. Nestas condições poderíamos ainda utilizar o modelo Binomial. Como indicação, para as aplicações, **o modelo Binomial não deve ser aplicado se $n/N \geq .05$ (Mendenhall, 1994)** (Há autores que consideram que ainda se pode aplicar o modelo Binomial se a dimensão da amostra for inferior a 10% da dimensão da população).

DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

EXERCÍCIOS

3. Uma florista verifica a qualidade das flores que compra, inspecionando 10 flores em cada ramo, classificando-as em defeituosas ou em conformidade.

A florista tem por regra o seguinte: rejeita o ramo e devolve-o ao distribuidor se encontra mais do que duas flores defeituosas na amostra que retira de cada ramo que contem 250 flores.

a) Suponha que 5% das flores de um ramo têm defeito. Qual a probabilidade da florista aceitar aquele lote?

a) Se num ramo 25% das flores tiverem defeitos, qual a probabilidade da florista aceitar o ramo

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Simon Poisson
(1781-1840)

DEFINIÇÃO

Diz-se que a v.a discreta X tem **distribuição de Poisson (ou distribuição geométrica)** e representa-se por

$$X \cap p(\lambda)$$

se a sua **função de probabilidade** for dada por:

$$P[X = x] = f(x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} . \lambda^{x}}{x!} & \lambda > 0 \text{ e } X = 0, 1, 2 \ldots \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

λ corresponde ao número médio de ocorrências por intervalo de tempo/espaço

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

PRESSUPOSTOS

- Têm que ser fenómenos passiveis de serem descritos através de uma v.a. discreta representada por valores inteiros não negativos
- Os números de ocorrências em intervalos não sobrepostos correspondem a v.a. independentes
- A probabilidade de uma ocorrência do acontecimento, é a mesma para quaisquer dois intervalos de igual amplitude.
- A ocorrência ou não ocorrência do acontecimento num determinado intervalo, é independente da ocorrência ou não ocorrência do acontecimento num outro qualquer intervalo.

PARÂMETROS DA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

$E[X] = \lambda$ $\qquad$ $Var[X] = \lambda$

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

EXERCÍCIOS

1) O número de pedidos de ambulâncias que chega, por dia, a determinado posto de socorros, é, em média, dois. Calcule a probabilidade de que:

a) Num dia, haja pelo menos um pedido.

b) Num dia haja pelo menos um pedido, sabendo que no dia anterior não se registou nenhum.

c) Num dia haja dois pedidos e no dia seguinte também se verifiquem dois pedidos.

2) Se considerarmos que o número de navios de cruzeiro que chegam semanalmente ao porto de Lisboa segue uma distribuição de Poisson de variância igual a 8 indique:

a) probabilidade de chegarem 4 navios ao porto de Lisboa numa semana e

b) a probabilidade de chegarem pelos menos 6 navios no mesmo espaço de tempo

DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

APROXIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL PELA DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

A distribuição binomial B(n,p) converge para a distribuição de Poisson P(λ), quando $n \to \infty$ (o número de provas aumenta), $p \to 0$ (a probabilidade de sucesso tende para zero) e o produto n.p se mantém aproximadamente constante, $n.p = \lambda > 0$ (o nº médio de sucessos mantém-se aproximadamente constante ao longo das provas)

A aproximação será tanto melhor quanto maior for n e menor for p., podendo ser utilizada a partir de $n>20$ e $p<=0,05$ (ou seja, com $\lambda = 1$)

EXERCÍCIO

Uma marca de barcos de recreio produz por ano cerca de 2.000 unidades, sendo a probabilidade do motor ter defeito de 0,0005.

Qual a probabilidade dessa marca registar 4 defeitos num ano?

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

DEFINIÇÃO

Diz-se que a v.a **contínua** X tem **distribuição Normal** e representa-se por

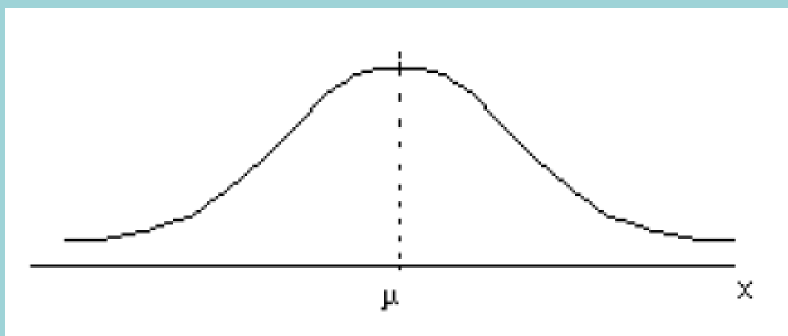
$$X \cap n(\mu;\sigma)$$

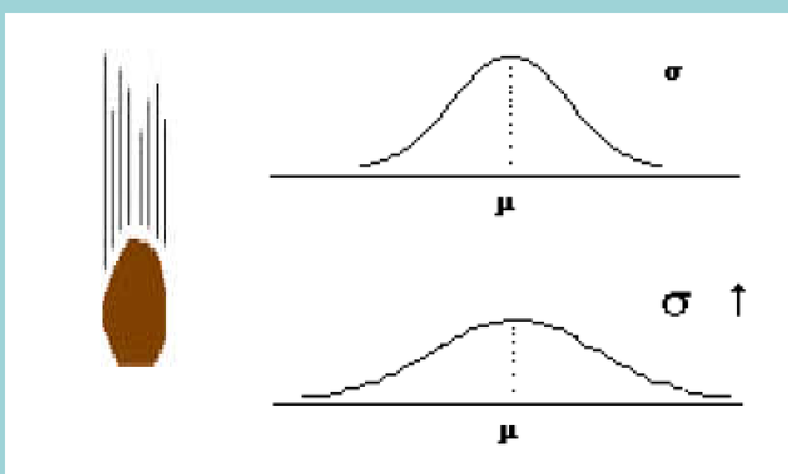
se a sua **função de densidade de probabilidade** for dada por:

$$f(x) = f(x;\mu;\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

com $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < \mu < +\infty$ **e** $\sigma > 0$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL





E(X) = μ e Var(X) = σ2

• é simétrica relativamente ao seu valor médio μ, de modo que duas curvas correspondentes a duas distribuições com o mesmo desvio padrão têm a mesma forma, diferindo unicamente na localização.

• é tanto mais achatada, quanto maior for o valor de σ, de modo que duas curvas correspondentes a duas distribuições com o mesmo valor médio, são simétricas, relativamente ao mesmo ponto, diferindo no grau de achatamento.

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

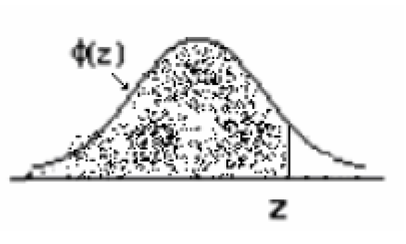
À distribuição normal que tem valor médio 0 e desvio padrão 1 dá-se o nome de distribuição **normal-*padrão***, **normal estandartizada** ou **normal-*reduzida***. Representa-se por

$$X \cap N(\mu,\sigma) \quad \Leftrightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \cap N(0,1)$$

A f.d.p. da normal-padrão Z é dada por

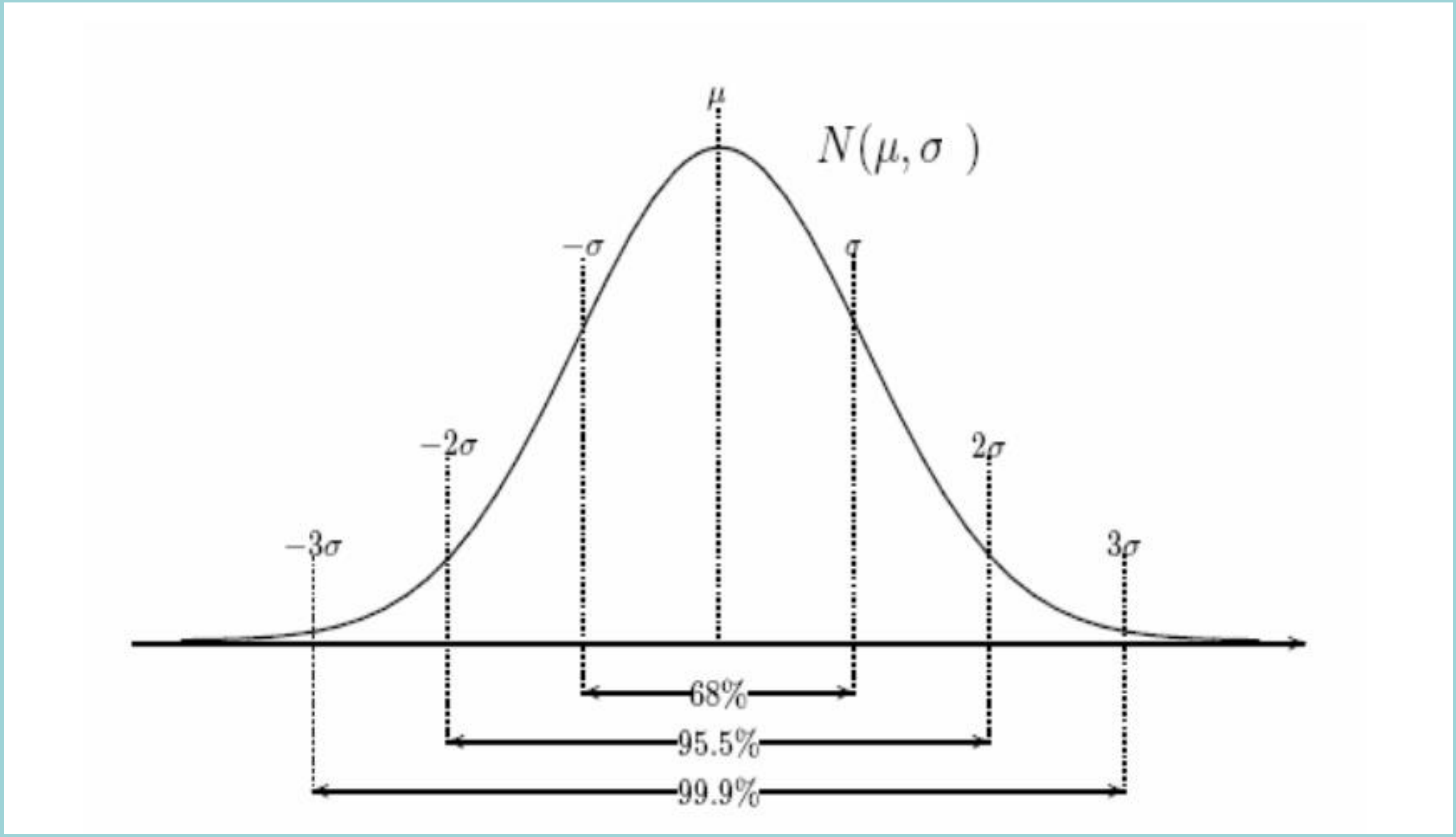
$$\Phi\,(z) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,.\,e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad \text{com} \ -\infty < z < +\infty$$

$\Phi\,(z) = P\,[\,Z <= z\,]$



Ver na tabela da distribuição Normal-Padrão

DISTRIBUIÇÃO NORMAL



INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO

VALORES DA FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

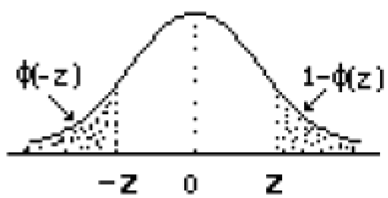
$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

z	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	3,891	4,417
$F(z)$	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,99995	0,999995
$2[1-F(z)]$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001	0,0001	0,00001

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

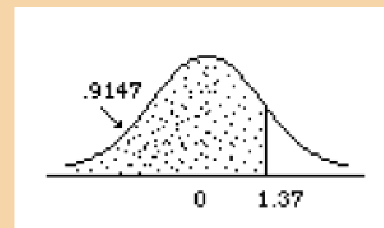
Da simetria da curva normal, deduz-se imediatamente a seguinte propriedade



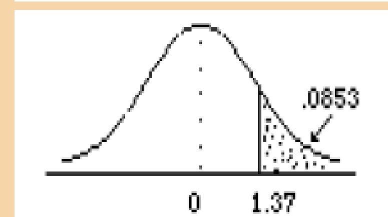
$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

EXEMPLO

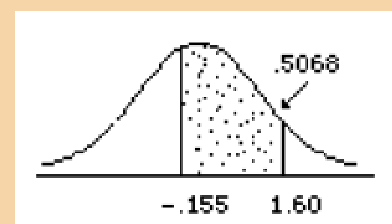
P (Z≤1,37) ?
= Φ(1,37) = 0,9147



P (Z>1,37) ?
= 1 - P(Z≤1,37) = 1 – 0,9147 = 0,0853



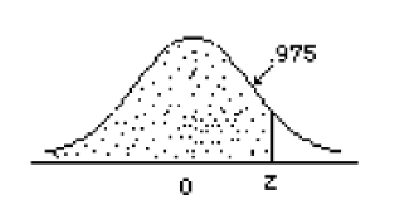
P (-0,155 <Z<1,60)?
= Φ(1,60) - Φ(-0,155) = Φ(1,60)-(1- Φ(0,155))
(a tabela disponível só tinha os valores positivos)
= 0,9452 -1 + 0,5616 = 0,5068



DISTRIBUIÇÃO NORMAL

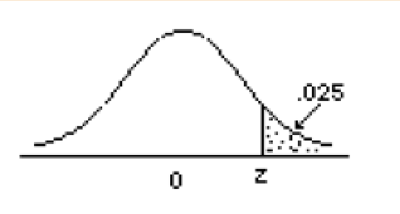
EXEMPLO

Determinar o valor de z, tal que P(Z≤z) = .975



Neste caso, a consulta da tabela terá de ser feita de modo inverso. Temos Φ(z) = .975 ⇒ z= 1.96

Determinar o valor de z tal que P(Z>z) = .025



1 - Φ(z) = .025 ⇒ Φ(z)=.975 ⇒ z = 1.96

Mas se a Normal não tiver valor médio nulo e desvio padrão 1, já não temos tabelas! Como é que vamos calcular as probabilidades?

$$X \cap N(\mu,\sigma) \quad \Leftrightarrow \quad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \cap N(0,1)$$

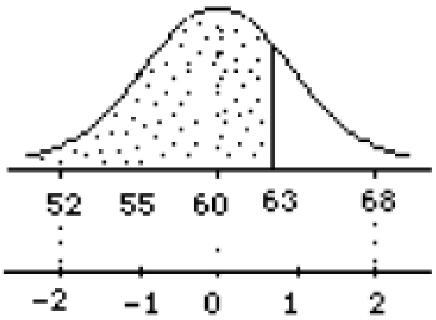
$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \Leftarrow \quad = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

EXEMPLO

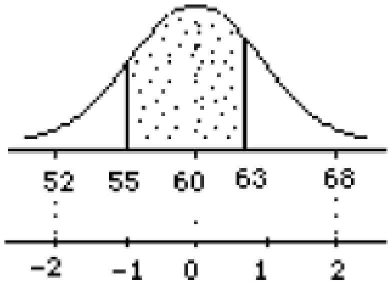
Considere $X \cap N\ (60\ ,4)$. Calcule $P(X \leq 63\ )$

$$P(X \leq 63) = \Phi\left(\frac{63-60}{4}\right)$$
$$= \Phi(.75)$$
$$= .7734$$



Considere $X \cap N\ (\ 60\ ,\ 4\ )$. Calcule $P(\ 55 \leq X \leq 63\ )$

$$P(55 \leq X \leq 63) = P\left(\frac{55-60}{4} \leq \frac{X-60}{4} \leq \frac{63-60}{4}\right)$$
$$= \Phi(.75). - \Phi(-1.25)$$
$$= ..7734 - .1056$$
$$= .6678$$



EXERCÍCIO

Na pastelaria "Gulosa“, a quantidade de farinha F utilizada semanalmente, é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio 600kg e desvio padrão 40kg. Havendo no início de determinada semana, um armazenamento de 634kg e não sendo possível receber mais farinha durante a semana:

a) Determine a probabilidade de ruptura do stock de farinha.

b) Qual deveria ser o stock, de modo que a probabilidade de ruptura fosse de 1%?

DISTRIBUIÇÃO NORMAL

APROXIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL PELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A distribuição binomial B(n,p) converge para a distribuição de Normal N(μ,σ), quando $n \to \infty$ (o número de provas aumenta) e se $0,1 < p < 0,9$. Em termos práticos, sempre que $n > 20$, então

$$X \cap N\,(\mu = n\,p;\ \sigma = \sqrt{n.p.q})$$

APROXIMAÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO POISSON PELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

A distribuição Normal N(μ,σ) é utilizada como distribuição aproximada da distribuição de Poisson sempre que $\lambda > 20$, embora seja tanto melhor a aproximação quanto maior for o valor de λ

$$X \cap N\,(\mu = \lambda\ ;\ \sigma = \sqrt{\lambda}\,)$$

Quando usamos a distribuição Normal (que é uma distribuição contínua) para aproximar a uma distribuição discreta, fazemos uma correção de continuidade ao valor discreto x na distribuição binomial representando o valor x pelo intervalo de x – 0.5 a x + 0.5.

EXERCÍCIOS

1. Determinada impressora imprime cartões de visita com uma quebra de 2% derivada de erros de impressão.

   Analisa-se uma encomenda de um cliente composta por 2.000 cartões. Qual a probabilidade de que pelo menos 15 cartões e não mais de 25 estejam mal impressos?

2. O número de reclamações telefónicas recebidas por dia num determinado centro de saúde é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de média 2.

   Calcule a probabilidade do referido centro receber exatamente 750 reclamações no espaço de um ano civil

EXERCÍCIOS

5. A procura diária de uma determinado bolo é uma variável aleatória X com a seguinte distribuição de probabilidade:

$$f(x) = k\,.\frac{2^x}{x!}\ com\ x = 1,2,3\ e\ 4$$

a) Determine k.

b) Qual a procura média diária?

c) Suponha que cada bolo é vendido por 5 €. A pastelaria produz diariamente 3 bolos. Qualquer bolo que não tenha sido vendido ao fim do dia, deve ser inutilizado provocando um prejuízo de 3 €. Quanto espera ganhar por dia a pastelaria?

ISTEC INSTITUTO SUPERIOR DE TECNOLOGIAS AVANÇADAS

EXERCÍCIOS

6.Seja X a v.a.que indica o nº de jogos vendidos por dia numa loja e Y a v.a. que indica o nº de filmes vendidos por dia nessa mesma loja. A experiência de vendas indica a seguinte função de probabilidade conjunta (X,Y):

X\Y	**0**	**1**	**2**
0	c1	c2	0,1
1	0,1	0	0
2	0,23	0,2	0
3	0,02	0	0,05

a) Determine os valores de c1 e c2, sabendo que E(Y) =0,7

b) Qual o número mais provável de jogos vendidos por dia?

c) Qual a probabilidade de, em certo dia, não ser vendido nenhum jogo, sabendo que nesse dia apenas foi vendido um filme?

d) Determine VAR(Y)

EXERCÍCIOS

7.Um jogo consiste no lançamento de um dado recebendo o jogador o número de euros correspondente ao número de pontos que apresentar a face que sair. Qual deverá ser a entrada para que o jogo seja equitativo?

7.O verdadeiro peso, em mg, por comprimido de certa marca de analgésicos é uma v.a. cuja função de densidade de probabilidade é dada por f(x)=10, com 9,95 < x < 10,05.

a) Qual a probabilidade de um determinado comprimido pesar mais de 9,98 mg?
b) Qual a probabilidade de determinado comprimido pesar exatamente 10,02 mg?
c) Calcule a função de distribuição e represente-a graficamente.

9. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias tais que

E[X] = 2 E[Y] = 100 COV (X,Y) = 10
VAR [X] = 4 VAR [Y] = 100

Seja ainda uma v.a W tal que W = 4 X + Y . Calcule E[W] e VAR[W]

EXERCÍCIOS

10. Num grupo de 40 cães, 20 ladram, 14 não ladram e mordem e 26 mordem.

a) Calcule a probabilidade de ser verdadeira a seguinte frase: **"Cão que ladra não morde"**.

b) Suponha que passa diariamente junto da matilha anterior e seleciona um dos cães aleatoriamente, para fazer festas. Ao fim de uma semana, qual a probabilidade de nunca ser mordido.

c) Num dia em que passam 50 pessoas, em que cada uma seleciona aleatoriamente um dos cães para fazer festas, qual a probabilidade de no máximo serem mordidas 10 pessoas.

11. Numa fábrica há 500 funcionários que podem ser repartidos assim:

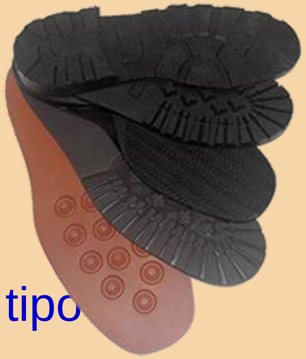
	Homens	Mulheres
Usam lentes de contato	78	54
Não usam lentes de contato	142	226

a) Escolhido um funcionário ao acaso, qual a probabilidade de que seja homem? Que use lentes de contato? Que seja homem com lentes?

b) Escolheu-se um funcionário ao acaso e sabe-se que é mulher.. Qual a probabilidade de usar lentes?

EXERCÍCIOS

12. Numa escola do distrito do Porto, 120 dos 180 alunos que frequentam o 12º ano são candidatos à realização do exame de Português. Dos que se candidataram ao exame, 50 são raparigas e representam metade da população escolar feminina do 12º ano. Escolhendo ao acaso um aluno desta escola, qual a probabilidade de ser candidato ao exame de Português, sabendo que se trata de um rapaz?



13. Numa empresa de solas de sapatos produzem-se dois tipos de solas X e Y, correspondendo a 60% da produção as solas do tipo X. Dada uma sola do tipo X, a probabilidade de ser defeituosa é de 2% e dada uma sola do tipo Y a probabilidade de ser defeituosa é de 4%. Escolhida uma sola ao acaso, verificou-se que não tinha defeito. Qual a probabilidade de ter sido escolhida uma sola do tipo X ?

AUXILIARES

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
alfa	α	Α
beta	β	Β
gama	γ	Γ
delta	δ	Δ
épsilon	ε	Ε
dzeta	ζ	Ζ
eta	η	Η
teta	θ	Θ
iota	ι	Ι
capa	κ	Κ
lâmbda	λ	Λ
mi	μ	Μ

Pronúncia	Minúscula	Maiúscula
ni	ν	Ν
ksi	ξ	Ξ
omicron	ο	Ο
pi	π	Π
rho	ρ	Ρ
sigma	σ	Σ
tau	τ	Τ
upsilon	υ	Υ
phi	φ	Φ
khi	χ	Χ
psi	ψ	Ψ
ômega	ω	Ω

ANÁLISE COMBINATÓRIA

- Combinações (extracção em simultâneo)

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Permutações (casos de extracção em ordem e sem reposição)

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1).\ldots.[n-(k-1)]$$

- Arranjos (casos de extracção em ordem e com reposição)

$$A_n^k = n^k$$

--