CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CEFET-MG

Terceira Avaliação de Álgebra Linear

Prof. Ricardo Saldanha de Morais – T04 (EPC e ET) – 03 de julho de 2019

NOME: CORREÇÃO

INSTRUÇÕES:

1. Prova individual e sem consulta de qualquer natureza. A interpretação das questões faz parte da prova.
2. **Não** é permitido o uso de calculadoras. Celulares devem ser desligados.
3. Questões sem justificativas, ou sem desenvolvimento, **não** serão consideradas.
4. Desenhos são bem-vindos e podem compor as justificativas.
5. Empregue as notações corretas e desenvolva seu raciocínio de forma clara e organizada.

Questão 1 *(09 pontos)*: Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$. 6,0

(a) Encontre os **autovalores**, e os **autovetores** correspondentes, da transformação linear T.

(b) T é diagonalizável? **Justifique sua resposta.** 3,0

Questão 2 *(09 pontos)*: Considere o subespaço $\mathbb{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\vec{v}_1 = (0, 1, 2)$, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 3)$ e $\vec{v}_3 = (-1, 0, 1)$. Sendo $< \cdot, \cdot >$ o produto interno usual,

(a) ache $\mathbb{W}^{\perp}$ 4,0

(b) exiba uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = \mathbb{W}$ e $N(T) = \mathbb{W}^{\perp}$. 4,0

(c) é possível interpretar a transformação linear T geométricamente? 1,0

Questão 3 *(07 pontos)* : Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita e $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ um operador linear. Mostre que o polinômio característico de T **não** depende da representação matricial.

Questão 4 *(09 pontos)*: Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o **polinômio minimal** de T. 6,0

(b) T é diagonalizável? **Justifique sua resposta.** 3,0

ATENÇÃO: A publicação desta prova **não** está autorizada.

QUESTÃO 1:

(a) Consideremos a base ordenada $X = \{1, x, x^2\}$. Então,

$T(1) = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$,

$T(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$ e

$T(x^2) = x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2$. Assim,

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T] - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \text{ e}$$

O polinômio característico do operador T é $p(\lambda) = \det\left([T] - \lambda I_3\right) = (1-\lambda)\left\{(-1)^{3+3} \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right\}$

$= (1-\lambda)\left\{\lambda^2 - 1\right\} = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

Portanto, os autovalores de T são $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

<u>Auto-espaço associado a $\lambda = -1$:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -L_1+L_2 \to L_2 \\ \frac{1}{2}L_3 \to L_3 \end{matrix} \quad \begin{cases} x+y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e o auto-espaço

é $W_{\lambda=-1} = \{-\alpha + \alpha x \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = [\vec{v}_1 = -1 + x]$.

$\{\vec{v}_1\}$ é uma base do auto-espaço.

<u>Auto-espaço associado a $\lambda = 1$:</u>

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -L_1 \to L_1 \\ L_1+L_2 \to L_2 \end{matrix} \quad \begin{cases} x-y = 0 \end{cases}$$

$\therefore X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e o auto-espaço é $W_{\lambda=1} = \{\alpha + \alpha x + \beta x^2 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$= [\vec{v}_2 = 1 + x, \vec{v}_3 = x^2]$. Como $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é LI e gera $W_{\lambda=1}$, $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base.

(b) $\alpha = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base de P_2, ③
formada por autovetores de T. Como
$T(\vec{v}_1) = (-1)\vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$ e $T(\vec{v}_3) = \vec{v}_3$,
vale $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ou seja, T é
diagonalizável.

QUESTÃO 2:

(a)
Temos que $\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, ou seja, $\vec{v}_3$ é uma
combinação linear de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Daí,
$W = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = [\vec{v}_1, \vec{v}_2]$ e, como $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é
LI, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é uma base de W. Portanto,
W é o plano que passa pela origem e é
paralelo aos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Consequente-
mente, $W^\perp$ é a reta que passa pela ori-
gem e é paralela ao vetor $\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$
$= \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (1, -2, 1)$,
isto é, $W^\perp = [\vec{w}]$.

(b) Como os vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{w}$ não são coplanares, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$, $T(\vec{v}_2)$ e $T(\vec{w}) = \vec{0}$.

$$(x, y, z) = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{w} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & x \\ 1 & 1 & -2 & y \\ 2 & 3 & 1 & z \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & y \\ 0 & -1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 5 & z-2y \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ -2L_2 + L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & x+y \\ 0 & 1 & -1 & -x \\ 0 & 0 & 6 & x-2y+z \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 + L_1 \to L_1 \\ -L_2 \to L_2 \\ L_2 + L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7x+4y+z}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{z-2y-5x}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x-2y+z}{6} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \frac{1}{6}L_3 + L_1 \to L_1 \\ \\ \frac{1}{6}L_3 \to L_3 \end{array}$$

$$\therefore (x,y,z) = \left(\frac{7x+4y+z}{6}\right)\vec{v_1} + \left(\frac{z-2y-5x}{6}\right)\vec{v_2}$$

$$+ \left(\frac{x-2y+z}{6}\right)\vec{w} \quad e$$

$$T(x,y,z) = \left(\frac{7x+4y+z}{6}\right)T(\vec{v_1}) + \left(\frac{z-2y-5x}{6}\right)T(\vec{v_2})$$

$$+ \left(\frac{x-2y+z}{6}\right)T(\vec{w}) = \left(\frac{7x+4y+z}{6}\right)\vec{v_1} +$$

$$\left(\frac{z-2y-5x}{6}\right)\vec{v_2} = \left(\frac{5x+2y-z}{6}, \frac{2x+2y+2z}{6},\right.$$

$$\left.\frac{5z+2y-x}{6}\right).$$

Afirmamos que $Im(T) = W$. Com efeito, seja $\vec{u} \in Im(T)$. Então, existe $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{u} = T(\vec{v})$. Mas, $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \vec{w}$. Daí, $\vec{u} = T(\vec{v}) = \alpha_1 T(\vec{v_1}) + \alpha_2 T(\vec{v_2}) + \alpha_3 T(\vec{w})$ $= \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \alpha_3 \cdot \vec{0} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}$. Ou seja $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ e assim $\vec{u} \in W$. Reciprocamente, se $\vec{u} \in W$, é imedia to que $\vec{u} \in Im(T)$. Portanto, $Im(T) =$

$\mathbb{W}$.

Seja $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{\omega}$ tal que

$T(\vec{v}) = \vec{0}$. Então, $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{0} = \vec{0}$

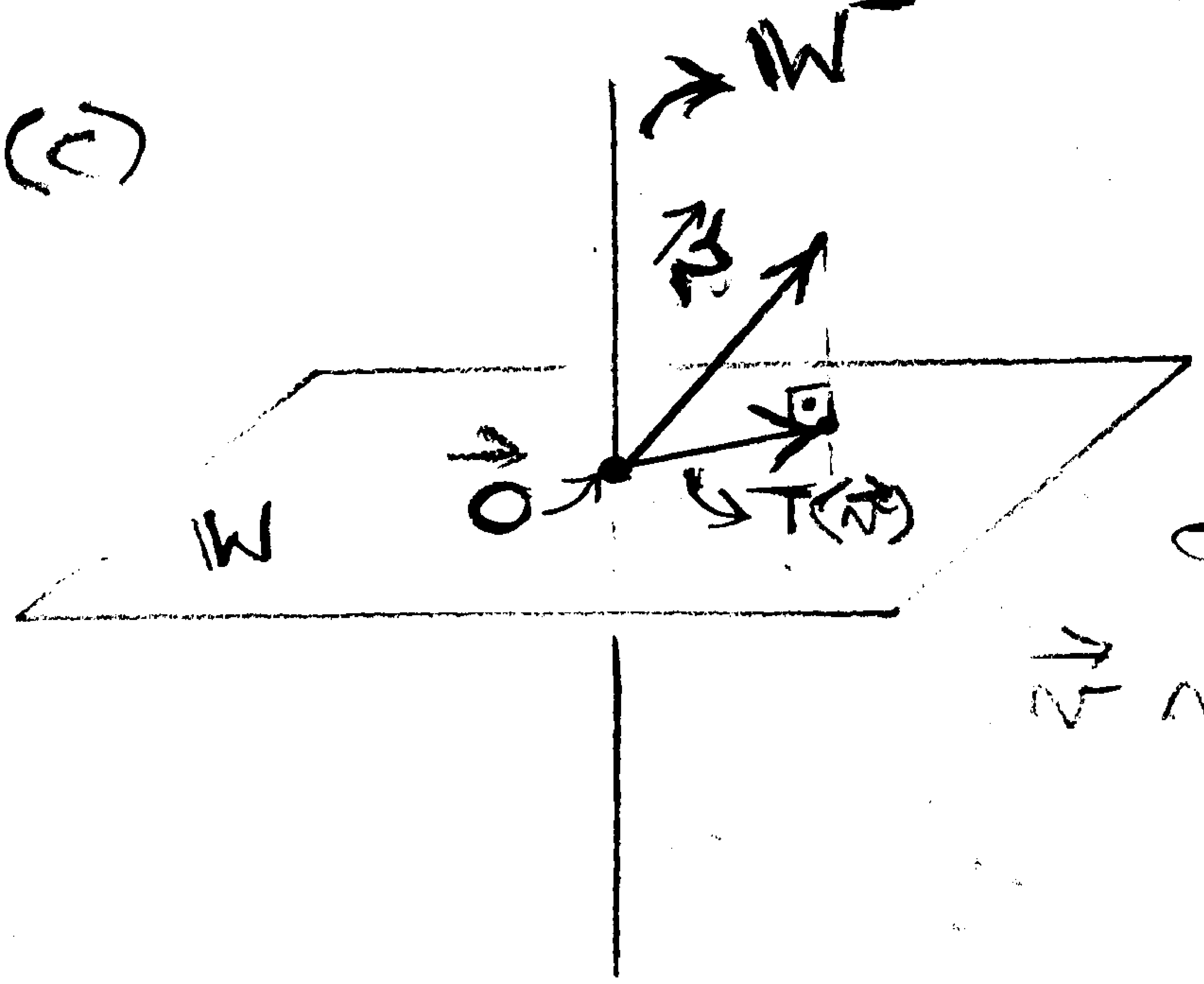
$\iff \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$. Como $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LI,

devemos ter $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, que implica

$\vec{v} = \alpha_3 \vec{\omega}$, isto é, $\vec{v} \in \mathbb{W}^{\perp}$. Portanto,

$N(T) = \mathbb{W}^{\perp}$.

(c)



Geometricamente, a imagem do vetor $\vec{v}$, $T(\vec{v})$, é a projeção ortogonal do vetor $\vec{v}$ no plano $\mathbb{W}$.

QUESTÃO 3:

Sejam α e β bases de V. Sabemos que

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta$$

$$= \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta,$$

uma vez $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha$. O polinômio característico de $[T]_\alpha^\alpha$ é

$p_\alpha(\lambda) = \det\left([T]_\alpha^\alpha - \lambda I\right)$. Por outro lado, o polinômio característico de $[T]_\beta^\beta$ é

$$p_\beta(\lambda) = \det\left([T]_\beta^\beta - \lambda I\right)$$

$$= \det\left(\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta - \lambda I\right)$$

$$= \det\left(\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta - \lambda \left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} [I]_\alpha^\beta\right)$$

$$= \det\left(\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} \left([T]_\alpha^\alpha - \lambda I\right) [I]_\alpha^\beta\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det\left([I]_\alpha^\beta\right)}} \det\left([T]_\alpha^\alpha - \lambda I\right) \cancel{\det\left([I]_\alpha^\beta\right)}$$

$= p_\alpha(\lambda)$. Logo, o polinômio característico não depende da representação matricial

QUESTÃO 4:

(a) $[T]-\lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{ccccc} -\lambda & 0 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \end{array}$$

O polinômio característico de T é

$p(\lambda) = \det\left([T]-\lambda I\right) = (-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda) - 1 + \lambda$

$= -\lambda^2(\lambda-1) + (\lambda-1) = (\lambda-1)(1-\lambda^2)$

$= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

Portanto os CANDIDATOS a polinômio minimal são

$m(x) = (x-1)(x+1)$ e

$p(x) = (x-1)^2(x+1)$.

Temos que $m([T]) = \left([T]-I\right)\left([T]+I\right)$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \overline{0}$,

ou seja, $m(x)$ NÃO é o polinômio minimal de T. O Teorema de Cayley-Hamilton garante que $p([T]) = \overline{0}$. Assim, $p(x)$ é ·

o polinômio minimal do operador T.

(b) T NÃO é diagonalizável, pois seu polinômio minimal é diferente de $m(x) = (x-1)(x+1)$.