# TRABALHO COMPUTACIONAL – 2017/1

Considere o seguinte problema de otimização[1]:

$$\min_{x\in\Re^4} f = \sum_{i=1}^{4}(\mathrm{A}_i\, x_i^4 + (x_i - \mathrm{B}_i)^2 + \mathrm{D}_i x_i) + \mathrm{C}_1 x_1 x_2 + \mathrm{C}_2 x_1 x_3 + \mathrm{C}_3 x_1 x_4 + \mathrm{C}_4 x_2 x_3 + \mathrm{C}_5 x_2 x_4 + \mathrm{C}_6 x_3 x_4$$

O método do Newton é uma técnica clássica para encontrar um candidato a mínimo da função acima, cujo algoritmo clássico é dado por:

Dados: número máximo de iterações, *itmax* e tolerância para parada do algoritmo, $\varepsilon$;

(1) Faça $k \to 0$ e escolha $x^k = (x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k)^{\mathrm{T}}$;

(2) Calcule o vetor gradiente da função $f$ avaliado no ponto $x^k$: $\nabla f(x^k) = [\,\partial f(x^k)/\partial x_i]^{\mathrm{T}}$. Se a norma euclidiana de $\nabla f(x^k) < \varepsilon$ pare, pois $x^k$ é a solução encontrada pelo método; caso contrário, realize o Passo 3;

(3) Calcule a direção de descida $p^k$ obtida por $\nabla^2 f(x^k)p^k = -\nabla f(x^k)$, em que $\nabla^2 f(x^k)$[2] é a matriz hessiana avaliada no ponto $x^k$;

(4) Faça $\alpha^k = 1$. Verifique se $f(x^k + \alpha^k p^k) \leq f(x^k) + 10^{-4}\, \alpha^k \nabla f(x^k)^{\mathrm{T}} p^k$. Se sim, $x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k$; caso contrário, calcule um novo valor de $\alpha^k$ usando:

$$\alpha^k = -\frac{\nabla f(x^k)^T p^k}{2\left[ f(x^k + p^k) - f(x^k) - \nabla f(x^k)^T p^k \right]}.$$

(5) Atualize os valores de $x^k$ fazendo $x^{k+1} = x^k + \alpha^k p^k$;

(6) Faça $k \to k+1$. Se $k > itmax$, pare. Caso contrário, retorne ao Passo (2).

Com base nos aspectos supracitados, faça uma implementação computacional do algoritmo do Newton para obter a solução do problema de otimização acima. As seguintes condições devem ser respeitadas:

(i) Faça $\varepsilon = 1\times10^{-8}$, $itmax = 100$ e solução inicial $x^k = [0\ 0\ 0\ 1]^{\mathrm{T}}$;

(ii) Conforme pode ser visto no algoritmo acima, em cada iteração do método é necessário resolver no passo 4 um sistema linear. Resolva esse sistema por meio de três diferentes métodos: Eliminação gaussiana, fatoração Choleski e o método do gradiente conjugado. Portanto, o problema deve ser resolvido três vezes, sendo que cada caso uma técnica de resolução de sistemas lineares deve ser aplicada até a convergência do algoritmo de Newton.

Elabore um relatório que apresente seguintes requisitos:

(a) Os gráficos com os valores de $f(x^k)$, $\nabla f(x^k)$ e $\alpha^k$ ao longo das iterações;

(b) Tempo total de cada execução;

(c) Valor ótimo de $x^k$ e o número de iterações de fornecido pelo método do Newton;

(d) Execute o algoritmo para outro ponto inicial. Apresente os itens (a)-(c) acima.

**Observações: O trabalho é individual e o relatório deve ser entregue por e-mail até 16/6/2017. O nome do arquivo deve ser TURMA_ALUNO.pdf. Não serão aceitos trabalhos após este prazo. O relatório deve ser limitado em 10 páginas. A implementação computacional vai ser apresentada para o professor para verificação da execução do algoritmo e questionamentos sobre elaboração e interpretação de resultados.**

---

[1] $\mathrm{A} = [0.7 \quad 6 \quad 0.001 \quad 8], \mathrm{B} = [1 \quad 5 \quad -0.25 \quad -3], \mathrm{C} = [1 \quad 0.25 \quad 0.40 \quad 0.05 \quad 0.1 \quad 1]; \mathrm{D} = [-3 \quad 2 \quad 0.5 \quad -1].$

[2] A hessiana de uma função $f$ de $n$ variáveis é uma matriz quadrada de ordem $n$ que contém as derivadas parciais de segunda ordem da função.