Computação Científica II
(EEL7031)

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

(Métodos Diretos)

Objetivos e Tópicos Principais

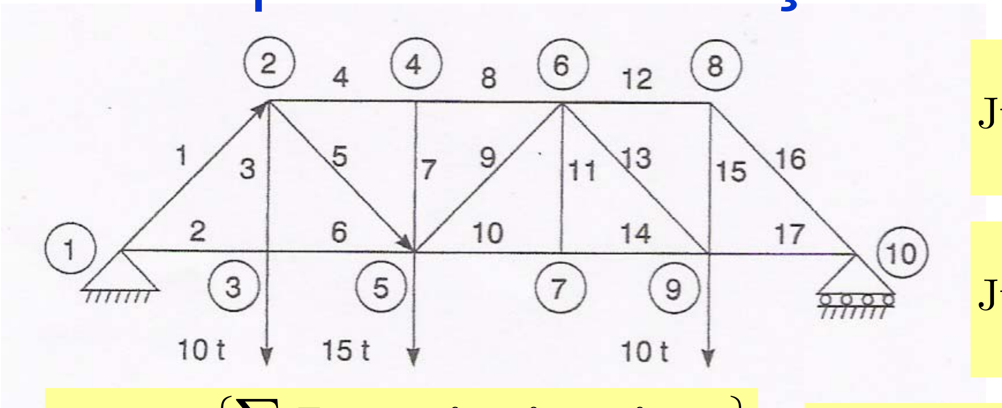
- Objetivos
  - Estudar técnicas de resolução de sistemas de equações lineares algébricas, que surgem em diversas áreas do conhecimento científico
- Tópicos principais
  - Introdução
  - Sistemas triangulares
  - Eliminação gaussiana
  - Pivotamento
  - Decomposição LU
  - Conclusões

Introdução

- Sistemas de equações são usados para representar problemas físicos que envolvem a interação de várias propriedades
- As variáveis representam as propriedades sob estudo e as equações a interação entre elas
- Em geral, é mais fácil de estudar sistemas em que todas as equações são lineares
- Frequentemente, o número de equações é igual ao número de variáveis e, somente nestes casos, existe solução única
- Embora muitos problemas não possam ser representados por sistemas lineares, em diversos casos são obtidos bons resultados quando se utiliza uma representação por sistemas lineares
- Muitas vezes é necessário apenas uma representação aproximada que forneça informações qualitativas a respeito do sistema físico

Exemplo de Aplicação

Componentes de força em treliça



$$\text{Junção}_5 \begin{cases} \sum F_x = -\alpha f_5 - f_6 + \alpha f_9 + f_{10} = 0 \\ \sum F_y = \alpha f_5 + f_7 + \alpha f_9 - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção}_6 \begin{cases} \sum F_x = -f_8 - \alpha f_9 + f_{12} + \alpha f_{13} = 0 \\ \sum F_y = -\alpha f_9 - f_{11} - \alpha f_{13} = 0 \end{cases}$$

$$Junção_2 \begin{cases} \sum F_x = -\alpha f_1 + f_4 + \alpha f_5 = 0 \\ \sum F_y = -\alpha f_1 - f_3 - \alpha f_5 = 0 \end{cases}$$

$\text{onde:}\alpha = \sin(45^0) = \cos(45^0)$

$$\text{Junção}_3 \begin{cases} \sum F_x = -f_2 + f_6 = 0 \\ \sum F_y = f_3 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção}_4 \begin{cases} \sum F_x = -f_4 + f_8 = 0 \\ \sum F_y = -f_7 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção}_7 \begin{cases} \sum F_x = -f_{10} + f_{14} = 0 \\ \sum F_y = f_{11} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção}_8 \begin{cases} \sum F_x = -f_{12} + \alpha f_{16} = 0 \\ \sum F_y = -f_{15} - \alpha f_{16} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção}_9 \begin{cases} \sum F_x = -\alpha f_{13} - f_{14} + f_{17} = 0 \\ \sum F_y = \alpha f_{13} + f_{15} - f_{10} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Junção}_{10} \left\{ \sum F_x = -\alpha f_{16} - f_{17} = 0 \right\}$$

Sistema Linear

- 17 equações
- 17 variáveis

$(f_1, f_2, \ldots, f_{17})$

Introdução

Representação geral

- Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito na forma

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}\right\} \therefore$$

$$\begin{array}{ll} a_{ij} - \text{coeficientes} & 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \\ x_j - \text{variáveis} & j = 1,2,\cdots,n \\ b_i - \text{constantes} & i - 1,2,\cdots,m \end{array}$$

- O sistema pode ser escrito na seguinte notação matricial

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{A} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}^{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}^{b} \quad \therefore$$

$$\begin{array}{l} A - \text{matriz de coeficientes} \\ x - \text{vetor de variáveis} \\ b - \text{vetor de constantes} \end{array}$$

Introdução

Classificação quanto ao número de soluções

- Compatível
  - ✓ **Determinado** – solução única (não-singular) $\det(A) \neq 0$
  - ✓ **Indeterminado** – infinitas soluções (singular)
- Incompatível
  - ✓ **Não apresenta solução**

Exemplo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Solução } x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistema compatível e determinado

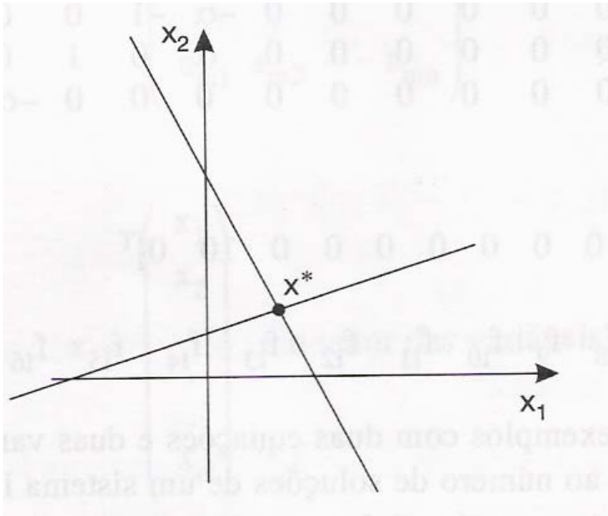
Introdução

Outros exemplos

- Sistema com solução única

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Solução } x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

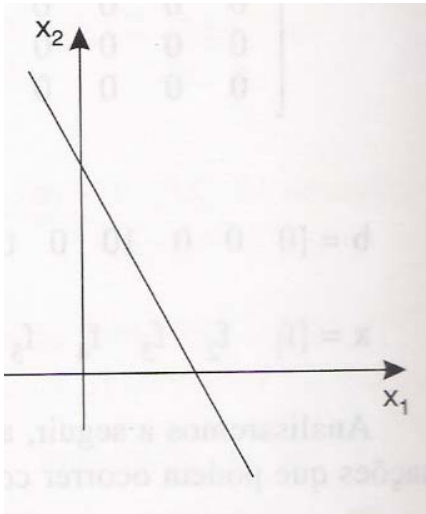
$$\det(A) \neq 0$$



- Sistema com infinitas soluções

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \det(A) = \det\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Solução } x^* = \begin{bmatrix} \alpha \\ 3 - 2\alpha \end{bmatrix}, \forall \alpha \in \Re$$



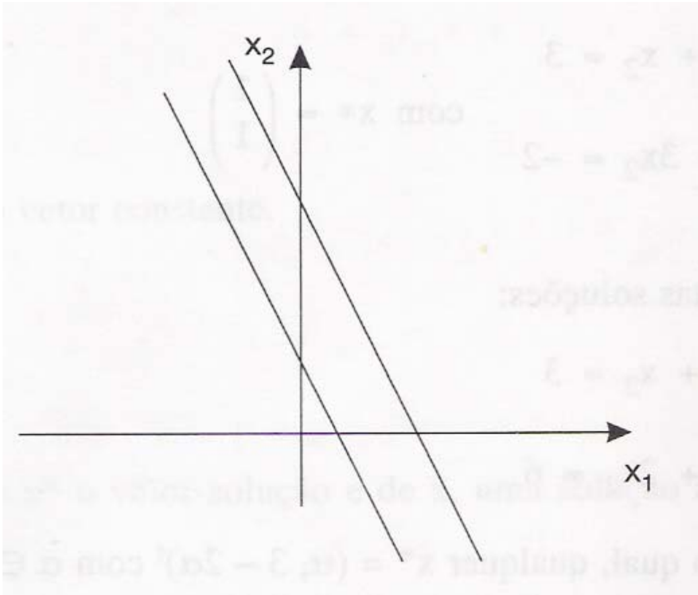
Sistema indeterminado – retas coincidentes

Introdução

Outros exemplos

- Sistema com nenhuma solução

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$



$$\det(A) = \det\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Sistema incompatível – retas paralelas

Sistemas Triangulares

Sistema triangular superior

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots & + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots & + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots & + a_{3,n-1}x_{n-1} + a_{3n}x_n = b_3 \\
& \vdots \qquad\qquad \vdots \\
& a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\
& a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

$a_{ij} = 0, \text{ se } \; j < i$

$\text{para } \; i, j = 1, 2, \cdots, n$

- Algoritmo de solução

$$
\begin{cases}
x_n = b_n \,/\, a_{nn} \\
x_k = \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} \cdot x_j \right) / \, a_{kk}, \quad \text{para} \quad k = n-1, \cdots, 2, 1
\end{cases}
$$

Substituição retroativa ou inversa

Sistemas Triangulares

Sistema triangular inferior

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & & & & & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + a_{n-1,3}x_3 + \ldots & & & + a_{n-1,n-1}x_{n-1} & & = b_{n-1} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & + a_{n3}x_3 & + \ldots & + a_{1,n-1}x_{n-1} & + a_{1n}x_n & = b_n \end{cases}$$

$a_{ij} = 0,\ \text{se}\ \ j > i$

$\text{para}\ \ i, j = 1,2,\cdots,n$

- Algoritmo de solução

$$\begin{cases} x_1 = b_1 / a_{11} \\ x_k = \left(b_k - \sum_{j=1}^{k-1} a_{kj} \cdot x_j \right) / a_{kk},\ \text{para}\ \ k = 2,3\cdots,n \end{cases}$$

Substituição progressiva ou direta

Sistemas Triangulares

- Exemplo 1

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 2/2 \to x_4 = 1 \\ x_3 = \dfrac{3 + 5(1)}{4} \to x_3 = 2 \\ x_2 = -1 - 1(2) + 2(1) \to x_2 = -1 \\ x_1 = \dfrac{-10 - 4(-1) + 5(2) - 1(1)}{3} \to x_1 = 1 \end{cases}$$

- Portanto, a solução é

$$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistema determinado

Sistemas Triangulares

- Exemplo 2

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 2/2 \to x_4 = 1 \\ x_3 = \dfrac{3+5(1)}{4} \to x_3 = 2 \\ 0x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \to 0x_2 = -2 + 2(1) \\ 0x_2 = 0 \to x_2 = \lambda \\ x_1 = \left(-4\lambda + 5(2) - (1) - 10\right) / 3 = \dfrac{-4\lambda - 1}{3} \end{cases}$$

- Portanto

$$x = \begin{bmatrix} -(1+4\lambda)/3 \\ \lambda \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sistema indeterminado

Sistemas Triangulares

- Exemplo 3

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 2/2 \rightarrow x_4 = 1 \\ x_3 = \dfrac{3+5(1)}{4} \rightarrow x_3 = 2 \\ 0x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \rightarrow 0x_2 = -1 - 2 + 2(1) \\ 0x_2 = -1 \end{cases}$$

Sistema incompatível

Sistemas Lineares Equivalentes

Teorema

- Seja $Ax = b$ um sistema linear. Aplicando-se uma sequência de operações, escolhidas entre
  - ✓ intercambiar a posição de duas equações
  - ✓ multiplicar uma equação por uma constante não-nula
  - ✓ Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação

obtém-se um novo sistema $\tilde{A}x = \tilde{b}$ equivalente ao sistema $Ax = b$

Sistemas Lineares Equivalentes

- Dois sistemas lineares, $Ax = b$ e $\tilde{A}x = \tilde{b}$, são equivalentes se qualquer solução de um é também solução do outro

Eliminação Gaussiana

Aspectos gerais

- Consiste em transformar o sistema linear original, por meio de operações elementares, num sistema triangular superior equivalente, o qual se resolve por substituição retroativa

Procedimento geral

- Considere o sistema linear constituído por n equações

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathrm{E}_{1:} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \mathrm{E}_{2:} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \mathrm{E}_{n:} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{A} \bullet \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}^{b}$$

Eliminação Gaussiana

Procedimento geral (Cont.)

- Forme a matriz aumentada

$$\left[A^{(0)}, b^{(0)}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

- Estágio 1: Eliminar os elementos abaixo de $a_{11}^{(0)} \neq 0$

$$\begin{gathered} E_1^{(1)} = E_1^{(0)} \\ E_2^{(1)} = E_2^{(0)} - m_{21} E_1^{(0)} \\ \vdots \\ E_n^{(1)} = E_n^{(0)} - m_{n1} E_1^{(0)} \end{gathered} \Rightarrow \left[A^{(1)}, b^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$\therefore m_{k1} = a_{k1}^{(0)} / a_{11}^{(0)}, \quad k = 2,3,\cdots,n$$

O elemento $a_{11}^{(0)}$ é dito pivô do estágio 1

Eliminação Gaussiana

Procedimento geral (Cont.)

- **Estágio 2: Eliminar os elementos abaixo de** $a_{22}^{(1)} \neq 0$

$$
\begin{gathered}
E_1^{(2)} = E_1^{(1)} = E_1^{(0)} \\
E_2^{(2)} = E_2^{(1)} \\
\vdots \\
E_n^{(2)} = E_n^{(1)} - m_{n2} E_2^{(1)}
\end{gathered}
\quad \Rightarrow \quad
\left[A^{(2)}, b^{(2)}\right] = \begin{bmatrix}
a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)}
\end{bmatrix}
$$

$$\therefore \quad m_{k2} = a_{k2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}, \quad k = 3, \cdots, n$$

O elemento $a_{22}^{(1)}$ é dito pivô do estágio 2

- **Estágios subsequentes**
  - ✓ O procedimento descrito é aplicado subsequentemente para as colunas $i = 3, \ldots, n-1$ usando-se $m_{ki} = a_{ki}^{(i-1)} / a_{ii}^{(i-1)}$ e

$$E_k^{(i)} = E_k^{(i-1)} - m_{ki} E_i^{(i-1)}; \; k > i$$

Eliminação Gaussiana

Exemplo

- **Resolver o sistema linear abaixo por eliminação Gaussiana**

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \left[A^{(0)}, b^{(0)}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Estágio 1**: pivô: $a_{11}^{(0)} = 3$; multiplicadores: $m_{21} = a_{21}^{(0)} / a_{11}^{(0)} = 1/3$

$$m_{31} = a_{31}^{(0)} / a_{11}^{(0)} = 4/3$$

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= E_1^{(0)} \\ E_2^{(1)} &= E_2^{(0)} - m_{21} E_1^{(0)} \\ E_3^{(1)} &= E_3^{(0)} - m_{31} E_1^{(0)} \end{aligned} \Rightarrow \left[A^{(1)}, b^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

Exemplo (Cont.)

- **Estágio 2**: pivô: $a_{22}^{(1)} = 1/3$ multiplicador: $m_{32} = a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = \dfrac{1/3}{1/3}$

$$E_1^{(2)} = E_1^{(1)} = E_1^{(0)}$$
$$E_2^{(2)} = E_2^{(1)}$$
$$E_3^{(2)} = E_3^{(1)} - m_{32} E_2^{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad \left[A^{(2)}, b^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Substituição retroativa**

$$\begin{Bmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 0x_1 + (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = 5/3 \\ 0x_1 + 0x_2 - 8x_3 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_3 = 0 \\ (1/3)x_2 = 5/3 \Rightarrow x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2(5) = 1 \Rightarrow x_1 = -3 \end{Bmatrix}$$

$$x^* = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eliminação Gaussiana

- Algoritmo
  - **Seja o sistema linear**

    $Ax = b,\ A: n \times n,$
    $x: n \times 1 \text{ e } b: n \times 1$

  - **Supor que**

    $a_{kk} \neq 0,\ k = 1,2,\cdots,n-1$

$$
\begin{aligned}
&\text{Para} \quad k = 1, 2, \cdots, n-1 \\
&\qquad \text{Para} \quad i = k+1, \cdots, n \\
&\qquad\qquad m = a_{ik} \,/\, a_{kk} \\
&\qquad\qquad a_{ik} = 0 \\
&\qquad\qquad \text{Para} \quad j = k+1, \cdots, n \\
&\qquad\qquad\qquad a_{ij} = a_{ij} - m \cdot a_{kj} \\
&\qquad\qquad b_i = b_i - m \cdot b_k \\
&\qquad x_n = b_n \,/\, a_{nn} \\
&\text{Para} \quad l = n-1, \cdots, 2, 1 \\
&x_l = \left(b_l - \sum_{j=l+1}^{n} a_{lj} \cdot x_j \right) / \, a_{ll}
\end{aligned}
$$

Eliminação Gaussiana

Quantidade de operações aritméticas

- O número de operações aritméticas depende do tamanho n do sistema

$$\text{Multiplicações/divisões}: \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \qquad \text{Adições/subtrações}: \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6}$$

- Para n grande, o número total de cada classe de operações acima é aproximadamente $n^3/3$, ou seja, $O(n^3)$.
- Portanto, o número de operações e o tempo computacional aumentam em proporção aproximada a $n^3/3$

n	Multiplications/Divisions	Additions/Subtractions
3	17	11
10	430	375
50	44, 150	42, 875
100	343, 300	338, 250

Eliminação Gaussiana

- **Estratégias de Pivotamento**
  - Evitar pivôs nulos pois inviabilizam a resolução do sistema
  - Evitar pivôs de valor próximo de zero
    - ✓ geram multiplicadores de valor elevado
    - ✓ amplificam os erros de arredondamento
- **Exemplo**

$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \left[A^{(0)}, b^{(0)}\right] = \begin{bmatrix} 0.2\cdot10^{-3} & 0.2\cdot10^{1} & 0.5\cdot10^{1} \\ 0.2\cdot10^{1} & 0.2\cdot10^{1} & 0.6\cdot10^{1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Pivô}: a_{11}^{(0)} = 0.2\cdot10^{-3},\ \text{multiplicador}: m_{21} = a_{21}^{(0)} / a_{11}^{(0)} = 0.1\cdot10^{5}$$

$$\left[A^{(1)}, b^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 0.2\cdot10^{-3} & 0.2\cdot10^{1} & 0.5\cdot10^{1} \\ 0 & -0.2\cdot10^{5} & -0.5\cdot10^{5} \end{bmatrix} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

Não satisfaz a equação 2

Eliminação Gaussiana

- Estratégias de Pivotamento Parcial
  - Escolher para pivô, no início do estágio k, o elemento de maior módulo entre os coeficientes $a_{ik}^{k-1}, \ i = k, k+1, \dots, n$
  - Trocar as linhas k e i, caso necessário
- Exemplo

$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \left[A^{(0)}, b^{(0)}\right] = \begin{bmatrix} 0.2\cdot 10^{-3} & 0.2\cdot 10^{1} & 0.5\cdot 10^{1} \\ 0.2\cdot 10^{1} & 0.2\cdot 10^{1} & 0.6\cdot 10^{1} \end{bmatrix}$$

Maior módulo da coluna 1

  - Matriz aumentada a partir da troca das linhas 1 e 2

$$\left[A^{(0)}, b^{(0)}\right] = \begin{bmatrix} 0.2\cdot 10^{1} & 0.2\cdot 10^{1} & 0.6\cdot 10^{1} \\ 0.2\cdot 10^{-3} & 0.2\cdot 10^{1} & 0.5\cdot 10^{1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Pivô}: a_{11}^{(0)} = 0.2\cdot 10^{1},$$
$$\text{multiplicador}: m_{21} = a_{21}^{(0)} / a_{11}^{(0)} = 0.1\cdot 10^{-3}$$

Eliminação Gaussiana

- Exemplo (Cont.)

$$\text{SL. original}:\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$

- **Estágio 1**

$$\left[A^{(1)}, b^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 0.2\cdot 10^1 & 0.2\cdot 10^1 & 0.6\cdot 10^1 \\ 0 & 0.19998\cdot 10^1 & 0.49995\cdot 10^1 \end{bmatrix}$$

$$\text{SL. triangular equivalente}:\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 6 \\ 0x_1 + 1.9998x_2 = 4.9995 \end{cases}$$

Solução correta

$$x^* = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

O uso do pivoteamento parcial faz com que os multiplicadores, em módulo, estejam no intervalo [0,1], evitando a ampliação dos erros de arredondamento

Eliminação Gaussiana

Estratégias de Pivotamento Completo

- Pivô, no início do estágio k, é o elemento de maior módulo entre todos os coeficientes que ainda atuam no processo de eliminação

$$\text{Pivô} = \max_{\forall i,j \geq k} \left| a_{ij}^{(k-1)} \right|$$

- Realizar as trocas de linhas e colunas necessárias

Exemplo

- Determinar, para a matriz aumentada apresentada abaixo, o pivô do estágio $k = 2$ e realizar as trocas de linhas e colunas necessárias

$$\left[A^{(1)}, b^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[A^{(1)}, b^{(1)}\right]_{pivot.} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

$piv\hat{o} = a_{34} = 7$

permutar linhas 3 e 2

permutar colunas 4 e 2

Realizar a eliminação p/ o estágio 2 e repetir o processo p/ o estágio 3.

Exercícios Sugeridos

Use Gaussian elimination and two-digit rounding arithmetic to solve the following linear systems. Do not reorder the equations. (The exact solution to each system is $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$.)

(a)
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 8, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9. \end{aligned}$$

Use Gaussian elimination to solve the following linear systems, if possible, and determine whether row interchanges are necessary:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 &= 3. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 &= 1, \\ -x_1 + 2x_3 &= 3, \\ 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Fatoração LU

Aspectos gerais

- Consiste em decompor um SL em dois sistemas lineares triangulares cujas soluções podem ser obtidas, respectivamente, por processos de substituições progressiva (forward) e retroativa (backward)

Procedimento geral

- Seja o sistema linear $Ax = b$
  - ✓ Decompor $A = LU$ onde

    L: matriz triangular inferior com diagonal unitária

    U: matriz triangular superior
  - ✓ Resolver $Ax = LUx = b$ em duas etapas

    Etapa 1: supondo $Ux = y$, resolver $Ly = b$

    Etapa 2: resolver $Ux = y$

A fatoração LU é largamente aplicada em resoluções repetitivas, ou seja, para sistemas lineares com a mesma matriz ***A*** e diferentes vetores ***b***

Fatoração LU

- Cálculo dos fatores LU por eliminação gaussiana
  - Considere o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{bmatrix}$$

  - **Estágio 1:** pivô= $a_{11}^{(0)} \neq 0$, multiplicadores: $m_{21} = a_{21}^{(0)} / a_{11}^{(0)}; \;\; m_{31} = a_{31}^{(0)} / a_{11}^{(0)}$
    - ✓ Novos coeficientes

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}, \text{ p/ } \; j = 1,2,3 \qquad a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1} \cdot a_{ij}^{(0)}, \text{ p/ } \; i = 2,3 \text{ e } \; j = 1,2,3$$

    - ✓ Operações equivalentes a representação matricial abaixo

$$A^{(1)} = M^{(0)} \cdot A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

Cálculo dos fatores LU (cont.)

- **Estágio 2:** pivô= $a_{22}^{(1)} \neq 0$, multiplicadores: $m_{32} = a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & \boxed{a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)}} \end{bmatrix}$$

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, \text{ p/ } j = 1,2,3$$

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)}, \text{ p/ } j = 2,3$$

$$a_{3j}^{2} = a_{3j}^{(1)} - m_{32} \cdot a_{2j}^{1}, \text{ p/ } j = 2,3$$

✓ Operações equivalentes a representação matricial abaixo

$$A^{(2)} = M^{(1)} \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

✓ Portanto

$$A^{(2)} = M^{(1)} \cdot A^{(1)} = M^{(1)} \cdot M^{(0)} \cdot A^{(0)} \quad \therefore \quad A^{(2)} \text{ é triangular superior}$$

Fatoração LU

- Análise do resultado $A^{(2)} = M^{(1)} \cdot A^{(1)} = M^{(1)} \cdot M^{(0)} \cdot A^{(0)}$

  - Lembrando que $A^{(0)} = A$, pode-se escrever

$$A^{(2)} = M^{(1)} \cdot M^{(0)} \cdot A \quad \Rightarrow \quad A = \left(M^{(1)} \cdot M^{(0)}\right)^{-1} \cdot A^{(2)}$$

  - Portanto

$$A = \left(M^{(0)}\right)^{-1} \cdot \left(M^{(1)}\right)^{-1} \cdot A^{(2)}$$

  - Considerando que

$$\left(M^{(0)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(M^{(1)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left(M^{(0)}\right)^{(-1)} \cdot \left(M^{(1)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

- Portanto

$$A = \left(M^{(0)}\right)^{-1} \cdot \left(M^{(1)}\right)^{-1} \cdot A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = LU$$

  - **onde**

$$L = \left(M^{(0)}\right)^{(-1)} \cdot \left(M^{(1)}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

- **Exemplo**
  - Resolva o sistema linear abaixo usando a fatoração LU

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_{1+} \quad x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

  - **Estágio 1** $\text{pivô}: a_{11}^{(0)} = 3$

$$\text{multiplicadores}: m_{21} = a_{21}^{(0)} / a_{11}^{(0)} = 1/3$$

$$m_{31} = a_{31}^{(0)} / a_{11}^{(0)} = 4/3$$

  - **Portanto**

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}, \text{ p/ } j = 1,2,3 \qquad a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1} \cdot a_{1j}^{(0)}, \text{ p/ } i = 2,3 \text{ e } j = 1,2,3$$

$$A^{(1)} = M^{(0)} \cdot A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ -4/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

- Exemplo (cont.)
  - **Estágio 2:**

$$\text{pivô}: a_{22}^{(1)} = 1/3$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & \boxed{1/3} & \boxed{-10/3} \end{bmatrix}$$

$$\text{multiplicador}: m_{32} = a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

  - **Portanto:**

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, \text{ p/ } j = 1,2,3$$

$$a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)}, \text{ p/ } j = 2,3$$

$$a_{3j}^{2} = a_{3j}^{(1)} - m_{32} \cdot a_{2j}^{1}, \text{ p/ } j = 2,3$$

$$A^{(2)} = M^{(1)} \cdot A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -10/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

Exemplo (cont.)

- **Fatores LU:**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 4/3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- **Solução:**

$$L \cdot y = b \Rightarrow \begin{Bmatrix} y_1 & & & = 1 \\ (1/3)\, y_{1+} & y_2 & & = 2 \\ (4/3) y_1 + y_2 + y_3 & & & = 3 \end{Bmatrix} \qquad U \cdot x = y \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ (1/3) x_2 + (2/3) x_3 = 5/3 \\ -4x_3 = 0 \end{Bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fatoração LU

Fórmulas gerais (fase de fatoração)

- Gerar a primeira coluna de L e a primeira linha de U usando

$$l_{11}u_{11} = a_{11}$$

e

$$l_{j1} = \frac{a_{j1}}{u_{11}} \text{ e } u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}; \quad j = 2,3,\ldots,n$$

- Para cada $i = 2,3,\ldots,n-1$ selecione os elementos diagonais u_{ii} e l_{ii} e gere os demais elementos da i-ésima coluna de L e i-ésima linha de U usando as equações

$$l_{ii}u_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki}$$

e

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}}\left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}\right] \text{ e } u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right]; \quad j = i+1,\ldots,n$$

- Finalmente, determinar

$$l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}$$

Fatoração LU

- Fórmulas gerais (fases de substituição em $LUx = b$)
  - Solução de $Ly = b$

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \quad \text{e} \quad y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j\right];\ i = 2,3,\ldots,n$$

  - Solução para $Ux = y$

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad \text{e} \quad x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j\right];\ i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Pivoteamento Parcial Aplicado à Fatoração LU

Matriz de permutação

- É uma matriz quadrada de ordem n obtida da matriz identidade de ordem n, permutando-se suas linhas e/ou colunas
- Seja a matriz identidade

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz de permutação das linhas $1 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 1$ é representada por

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivoteamento Parcial Aplicado à Fatoração LU

- Permutação de linhas de uma matriz A
  - Pré-multiplicando A por uma matriz de permutação P, obtém-se a matriz A com as linhas permutadas, sendo esta permutação de linhas igual a permutação de linhas efetuadas na matriz identidade
- Exemplo
  - Seja

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Pivoteamento Parcial Aplicado à Fatoração LU

Aplicação à fatoração LU

- Seja o sistema $Ax = b$ e seja L e U obtidos por eliminação gaussiana com pivoteamento parcial
- L e U serão fatores de A' se e somente se $A' = P \cdot A$
- Da mesma forma, devem ser realizadas as permutações sobre o vetor de constantes do sistema linear, ou seja, $b' = P \cdot b$
- Portanto, $A'x = b' \Leftrightarrow Ax = b$
- Tomando-se $A' = LU$, tem-se

$$A'x = b' \Rightarrow P \cdot A \cdot x = P \cdot b \Rightarrow L \cdot U \cdot x = P \cdot b$$

- Finalmente, resolvem-se os sistemas triangulares

$$L \cdot y = P \cdot b \quad \text{e} \quad Ux = y$$

Pivoteamento Parcial Aplicado à Fatoração LU

- Exemplo:
  - Resolva o SL abaixo por fatoração LU usando pivoteamento parcial

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + \quad x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 \qquad\quad - 3x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow A^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{matrix}} \end{bmatrix} \text{ e } P^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - **Estágio 1:**

$$\text{pivô}: a_{31}^{(0)} = 4$$

$$\text{permutar linhas 1 e 3}$$

$$\Rightarrow P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } A'^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

  - **Portanto:** $\text{pivô}: a_{11}'^{(0)} = 4$

$$\text{multiplicadores}: m_{21} = a_{21}'^{(0)} / a_{11}'^{(0)} = 1/4$$

$$m_{31} = a_{31}'^{(0)} / a_{11}'^{(0)} = 3/4$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 11/4 \\ 0 & -4 & 13/4 \end{bmatrix}$$

Pivoteamento Parcial Aplicado à Fatoração LU

- Exemplo (cont.)
  - **Estágio 2**

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 11/4 \\ 0 & -4 & 13/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{pivô}: a_{32}^{(1)} = -4 \Rightarrow \text{permutar linhas 2 e 3}$$

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A'^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 2 & 11/4 \end{bmatrix}$$

  - **Portanto**

$$\text{pivô}: a'^{(1)}_{22} = -4$$

$$\text{multiplicador}: \quad m_{32} = a'^{(1)}_{32} / a'^{(1)}_{22} = 2/(-4) = -1/2$$

$$\Rightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

Pivoteamento Parcial Aplicado à Fatoração LU

- Exemplo (cont.)
  - **Fatores LU**

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix}$$

  - **Resolução dos sistemas triangulares**

$$L \cdot y = P \cdot b$$

$$P \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} -2 \\ 19/2 \\ 37/4 \end{bmatrix}$$

  - **Portanto:**

$$Ux = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 13/4 \\ 0 & 0 & 35/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 19/2 \\ 37/4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 38/35 \\ -23/35 \\ 74/35 \end{bmatrix}$$

Técnicas para Matrizes Especiais

- Matriz de diagonal estritamente dominante

  - A matriz $A, n \times n,$ é dita ser de diagonal estritamente dominante quando

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \text{ para } i = 1,2,\ldots,n$$

  - Exemplo - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$\mathrm{d}_1 : |7| > |2| + |0|$

$\mathrm{d}_2 : |5| > |3| + |-1|$

$\mathrm{d}_3 : |-6| > |0| + |5|$

$\Rightarrow$ A Matriz A é não-simétrica e de diagonal estritamente dominante

e

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$\mathrm{d}_1 : |6| < |4| + |-3|$

$\Rightarrow$ A Matriz B é simétrica, porém não diagonal estritamente dominante

Técnicas para Matrizes Especiais

Matriz de diagonal estritamente dominante

- Uma matriz A de diagonal estritamente dominante tem inversa
- Para uma matriz A de diagonal estritamente dominante, a eliminação gaussiana pode ser realizada em qualquer $Ax=b$ para obter a sua solução única, sem a necessidade do intercâmbio de linhas e colunas
- Neste caso, a computação é estável em relação ao crescimento dos erros de arredondamento

Técnicas para Matrizes Especiais

Matriz positiva definida

- Uma matriz A é **positiva definida** se for simétrica e se $x^t A x > 0$ para qualquer vetor coluna n-dimensional $x \neq 0$

Propriedades de uma matriz positiva definida

- Se $A, n \times n,$ é uma matriz positiva definida, então
  - ✓ A tem inversa
  - ✓ $a_{ii} > 0$ para cada $i = 1,2,\ldots,n$
  - ✓ $\max_{1 \le k, j \le n} |a_{kj}| \le \max_{1 \le i \le n} |a_{ii}|$
  - ✓ $(a_{ij})^2 < a_{ii} a_{jj}$ para cada $i \neq j$

Nota: Alguns autores definem matriz positiva definida sem a exigência de que ela seja simétrica

Técnicas para Matrizes Especiais

- Equivalências para uma matriz positiva definida

I. A é positiva definida

II. A eliminação gaussiana pode ser realizada com todos os elementos pivôs positivos no sistema linear $Ax=b$

III. A condição anterior também assegura que a computação será estável em relação ao crescimento dos erros de arredondamento

IV. A matriz A pode ser fatorada na forma LL^t, onde L é triangular inferior com elementos da diagonal positivos

V. A matriz A pode ser fatorada na forma LDL^t, onde L é triangular inferior com elementos da diagonal iguais a 1 e D é uma matriz diagonal com elementos positivos

VI. Para cada $i = 1,2,\ldots,n$, tem-se:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ii} \end{bmatrix} > 0$$

Técnicas para Matrizes Especiais

Fatoração de Choleski

- A fatoração da matriz A na forma LL^t pode ser realizada pelo método denominado de fatoração de Choleski
- Faça $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$ e gere o restante da primeira coluna de L usando a equação

$$l_{j1} = a_{j1} / l_{11} \text{ para cada } j = 2,3,\ldots,n$$

- Para cada $i = 2,3,\ldots,n-1$ determine a i-ésima coluna de L por

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)^{1/2}$$

e para cada $j = i+1, i+2, \ldots, n$ por:

$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik} \right)$$

- Finalmente, determine:

$$l_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2 \right)^{1/2}$$

Técnicas para Matrizes Especiais

- Fatoração LDL^t

  - Faça $d_1 = a_{11}$ e $l_{j1} = a_{j1} / d_{11}$ para cada $j = 2,3,\ldots,n$
  - Para cada $i = 2,3,\ldots,n-1$ determine a i-ésima coluna de L como segue:

$$d_i = a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2 d_j \quad \text{e} \quad l_{ji} = \frac{1}{d_i}\left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik} d_k \right], \quad j = i+1, i+2, \ldots, n$$

  - Finalmente, determine

$$d_n = a_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj}^2 d_j$$

Técnicas para Matrizes Especiais

- Exemplo:

  - A matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix}$ é positiva definida

  - A fatoração LDL^t de A é

$$A = LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.25 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - A fatoração de Choleski de A é

$$A = LL^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -0.5 & 2 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Técnicas para Matrizes Especiais

- Resolução do sistema linear $Ax=b$ quando A é positiva definida

  - Usando fatoração de Choleski $Ax = b \Rightarrow LL^t x = b$
  - Define-se, então: $\begin{Bmatrix} L^t x = y \\ Ly = b \end{Bmatrix}$
  - Assim, por substituição progressiva: $y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}}$ e

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right];\ i = 2,3,\ldots,n$$

  - Por substituição retroativa, obtém-se:

$$x_n = \frac{y_n}{l_{nn}} \quad \text{e} \quad x_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j \right];\ i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Técnicas para Matrizes Especiais

- Resolução do sistema linear $Ax=b$ quando A é positiva definida

  - Usando fatoração LDL^t: $Ax = b \Rightarrow LDL^t x = b$

  - Define-se, então: $\begin{Bmatrix} DL^t x = y \\ Ly = b \end{Bmatrix}$ $\Rightarrow$ $\begin{Bmatrix} Ly = b \\ Dz = y \\ L^t x = z \end{Bmatrix}$

  - Assim, por substituição progressiva

$y_1 = b_1$ e $y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j; \; i = 2,3,\ldots,n$ $\Rightarrow$ $z_i = y_i / d_i; \; i = 1,2,3,\ldots,n$

  - Por substituição retroativa, obtém-se

$x_n = z_n$ e $x_i = z_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji} x_j; \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$

Qualquer matriz simétrica para a qual a eliminação gaussiana possa ser usada sem intercambiar linhas e colunas pode ser fatorada na forma LDL^t

Técnicas para Matrizes Especiais

Matrizes de banda

- Uma matriz $A, n \times n$, é denominada matriz de banda se existirem números inteiros p e q, $1 < p, q < n$, tais que $a_{ij} = 0$ sempre que $p \leq j - i$ ou $q \leq i - j$
- O número p descreve o número de diagonais acima, incluindo a diagonal principal e o número q descreve o número de diagonais abaixo, incluindo a diagonal principal
- A largura de banda da matriz $w = p + q - 1$ indica o número de diagonais que podem conter elementos não-nulos
- **Exemplo**

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} p = 3 \\ q = 2 \\ w = 4 \end{matrix}$$

Técnicas para Matrizes Especiais

- Matrizes de banda tridiagonais ($p = q = 2$)
  - **Exemplo:**

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 0 & & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & & 0 \\ & & & & \gamma_{n-1} \\ 0 & & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}$$

  - **Pode-se fatorar a matriz como segue:**

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & & 0 \\ \beta_2 & l_2 & & & 0 \\ 0 & \beta_3 & l_3 & & 0 \\ & & & & 0 \\ 0 & & 0 & \beta_n & l_n \end{bmatrix}$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & u_2 & & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & & & & u_{n-1} \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conhecida como forma de Crout.

Técnicas para Matrizes Especiais

- Resolução de sistemas tridiagonal
  - **Fatoração na forma de Crout**

$$l_1 = \alpha_1 \quad \text{e} \quad u_1 = \frac{\gamma_1}{l_1}$$

$$l_i = \alpha_i - \beta_i u_{n-1} \quad \text{e} \quad u_1 = \frac{\gamma_i}{l_i}; \quad i = 2, 3, \ldots, n-1 \quad \text{e} \quad l_n = \alpha_n - \beta_n u_{n-1}$$

  - **O sistema** $Ax = LUx = b$ **é resolvido como segue**

Para $Ly = b$ $\quad y_1 = \dfrac{b_1}{l_1}$ e $y_i = \dfrac{1}{l_i}\left[b_i - \beta_i y_{i-1}\right]; \quad i = 2,3,\ldots,n$

Para $Ux = y$ $\quad x_n = y_n$ e $x_i = y_i - u_i x_{i+1}$

Técnicas para Matrizes Especiais

- Resolução de sistemas tridiagonal
  - **Exemplo:**

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ -x_3 + 2x_4 & = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em muitas aplicações as matrizes de banda são também positiva definida ou de diagonal estritamente dominante.

Exercícios Sugeridos

Determine which of the following matrices are (i) symmetric, (ii) singular, (iii) strictly diagonally dominant, (iv) positive definite.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. Find a factorizaton of the form $A = LDL^t$ for the following symmetric matrices:

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. Find a factorization of the form $A = LL^t$ for the matrices in Exercise 2.

Conclusões

- A resolução de sistemas algébricos lineares produz solução exata se todos os cálculos forem feitos usando aritmética exata
- O sistema linear $Ax = b$ tem solução única se e somente se existe A^{-1}, o que é equivalente a $\det A \neq 0$
- São empregadas técnicas de pivoteamento para minimizar os erros de arredondamento, os quais podem dominar a solução quando são utilizados métodos diretos
- Recomenda-se, na maioria dos casos, o uso de pivoteamento parcial, visto que decresce o efeito dos erros de arredondamento sem adicionar elevado esforço computacional
- O emprego da fatoração LU é vantajoso computacionalmente quando é necessário resolver sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes e diferentes vetores independentes
- Em matrizes positiva definidas podem ser utilizados esquemas de fatoração mais simples tais como a fatoração de Choleski