Computação Científica II
(EEL7031)

Interpolação e Aproximações Polinomiais

Objetivos e Tópicos Principais

- Objetivos
  - Estudar técnicas de representação de funções ou coleção de dados por funções polinomiais, cujas derivadas e integrais são também polinômios
- Tópicos principais
  - Introdução
  - Interpolação polinomial
  - Polinômios de Lagrange
  - Diferenças divididas
  - Interpolação de Hermite
  - Funções Spline em Interpolação

Introdução

- Aspectos gerais
  - Interpolar refere-se a determinação de uma função que representa exatamente uma coleção de dados
  - Os objetivos da interpolação polinomial podem ser
    - ✓ obter um polinômio para representar uma coleção de dados
    - ✓ determinar valores para pontos intermediários aos disponíveis em uma coleção de dados
    - ✓ representar determinadas variáveis de um problema por funções contínuas e suaves, que possam ser derivadas ou integradas, como é o caso de polinômios
- Teorema da aproximação de Weierstrass
  - Suponha que f seja definida e contínua no intervalo $[a,b]$. Para $\varepsilon > 0$, existe um polinômio $P(x)$, definido em $[a,b]$, com a seguinte propriedade

$$\left|f(x) - P(x)\right| < \varepsilon, \ \text{qualquer} \ \ x \in [a,b].$$

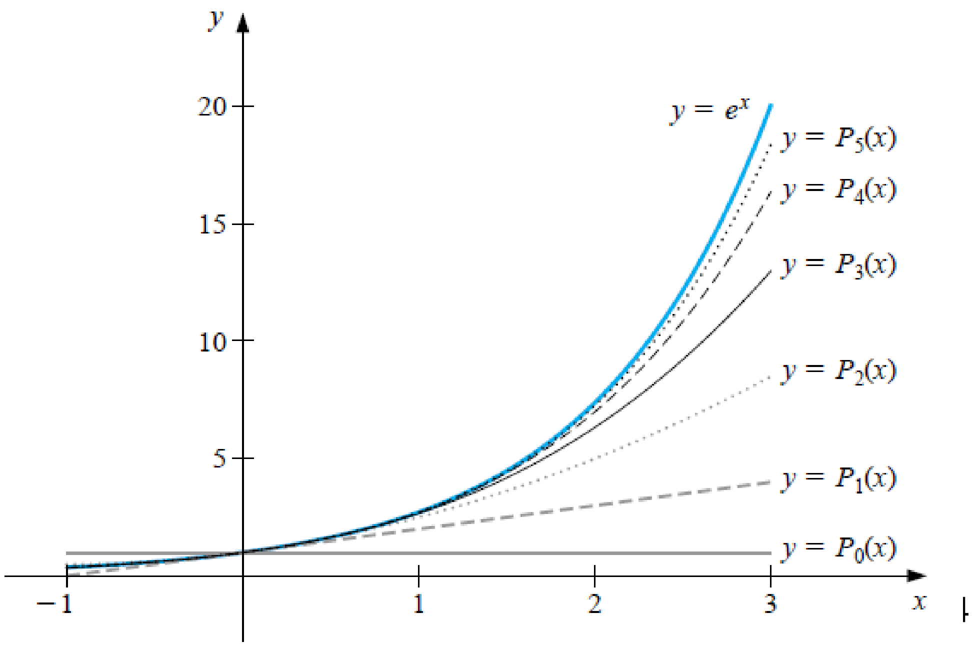
Introdução

- Interpolação x Polinômio de Taylor
  - Pelo teorema de Weierstrass, o polinômio interpolador deve fornecer uma aproximação relativamente precisa sobre todo o intervalo [a,b]
  - A expansão em série de Taylor fornece uma aproximação com boa precisão somente em torno de um ponto específico e, em geral, não é adequado como polinômio interpolador
- Ilustração

$$f(x) = e^x$$

Expansão em torno de $x_0 = 0$

até taylor de ordem 5



Interpolação polinomial

Elementos básicos

- Dados os pontos

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

$\Leftrightarrow$ $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$

- Aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau $\leq n$

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ tal que: $f(x_k) = P_n(x_k),\ k = 0,1,2,\ldots,n$

- Então

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Interpolação polinomial

Elementos básicos (cont.)

- Na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

- Para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos, tem-se $\det A \neq 0$ e o sistema linear tem solução única
- Portanto, existe um único polinômio $P_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que

$P_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0,1,2,\ldots,n$ desde que $x_k \neq x_j,\ \ j \neq k$

Interpolação polinomial

- Exemplo
  - Encontre $P_2(x)$ com grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela abaixo

$$\left\{\begin{matrix} x & -1 & 0 & 2 \\ f(x) & 4 & 1 & -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

  - Polinômios de referência

$$\left\{\begin{matrix} P_2(x_0) = f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 \\ P_2(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ P_2(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 4 = a_0 - a_1 + a_2 \\ 1 = a_0 + 0 + 0 \\ -1 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \end{matrix}\right\}$$

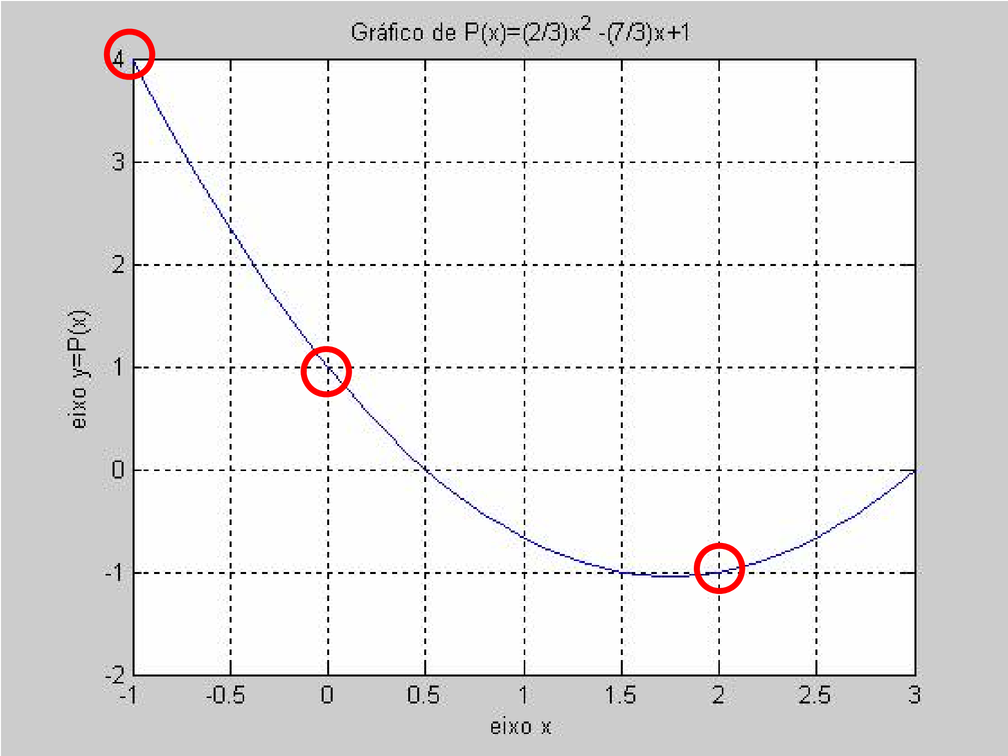
  - Então

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$

Interpolação polinomial

- Exemplo (cont.)
  - Representação gráfica do polinômio interpolador

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & -1 & 0 & 2 \\ f(x) & 4 & 1 & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$$



Polinômios de Lagrange

❑ Formulação matemática

- Considere a tabela

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

- Aproximar $f(x)$ por um polinômio de grau $\leq n$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad \text{tal que} \quad P_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0,1,2,\ldots,n$$

- Sejam os $(n+1)$ polinômios $q_k(x),\ k = 0,1,\ldots,n$ de grau n

$$\begin{Bmatrix} q_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ q_1(x) = (x - x_0)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \\ \vdots \\ q_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow q_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(x - x_j\right),\quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

$$\therefore \quad \begin{matrix} q_k(x_k) \neq 0,\ \forall k \\ q_k(x_j) = 0,\ \forall j \neq k \end{matrix}$$

Os polinômios $q_k(x)$ são conhecidos como polinômios de Lagrange

Polinômios de Lagrange

Formulação matemática (cont.)

- Define-se $P_n(x)$ como uma combinação linear de $q_k(x),\ k=0,1,\ldots,n$
- Portanto

$$P_n(x) = b_0 q_0(x) + b_1 q_1(x) + b_2 q_2(x) + \cdots + b_n q_n(x) \quad \Leftrightarrow \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k q_k(x)$$

- A questão principal é determinar $b_k,\ k=0,1,\ldots,n$

tal que: $P_n(x_k) = f(x_k),\ k=0,1,2,\ldots,n$

- Então

$$\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) = b_0 q_0(x_0) \\ P_n(x_1) = f(x_1) = b_1 q_1(x_1) \\ \vdots \\ P_n(x_n) = f(x_n) = b_n q_n(x_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0 = f(x_0)/q_0(x_0) \\ b_1 = f(x_1)/q_1(x_1) \\ \vdots \\ b_n = f(x_n)/q_n(x_n) \end{cases} \Leftrightarrow \quad b_k = f(x_k)/q_k(x_k),\quad k=0,1,\ldots,n$$

Polinômios de Lagrange

Formulação matemática (cont.)

- Portanto

$$P_n(x) = \frac{f(x_0)}{q_0(x_0)} q_0(x) + \frac{f(x_1)}{q_1(x_1)} q_1(x) + \frac{f(x_2)}{q_2(x_2)} q_2(x) + \cdots + \frac{f(x_n)}{q_n(x_n)} q_n(x)$$

- Definindo-se:

$$L_{n,k}(x) = \frac{q_k(x)}{q_k(x_k)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

- Pode-se escrever:

$$P_n(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + f(x_1)L_{n,1}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x)$$

- Na forma compacta, o polinômio interpolador de Lagrange é dado por

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x) \qquad \text{onde:} \qquad L_{n,k}(x) = \frac{\prod_{j=0,\neq k}^{n} \left(x - x_j\right)}{\prod_{j=0,\neq k}^{n} \left(x_k - x_j\right)}$$

Polinômios de Lagrange

Exemplo

- Encontre $P_2(x)$ com grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela usando o polinômio interpolador de Lagrange

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & -1 & 0 & 2 \\ f(x) & 4 & 1 & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow P_2(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x)$$

- Determinar os coeficientes do polinômio $L_{2,0}(x), L_{2,1}(x)$ e $L_{2,2}(x)$

$$L_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} = \frac{x^2-2x}{3}$$

$$L_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-2)}{(0-(-1))(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}$$

$$L_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = \frac{x^2+x}{6}$$

Polinômios de Lagrange

- Exemplo (cont.)

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x & -1 & 0 & 2 \\ f(x) & 4 & 1 & -1 \end{array} \right\}$$

- Portanto:

$$P_2(x) = f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x)$$

$$\Downarrow$$

$$P_2(x) = 4\frac{x^2 - 2x}{3} + 1\frac{x^2 - x - 2}{-2} - 1\frac{x^2 + x}{6}$$

$$\Downarrow$$

$$P_2(x) = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{-8}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x + \left(\frac{2}{2}\right) \Rightarrow P_2(x) = \left(\frac{2}{3}\right)x^2 - \left(\frac{7}{3}\right)x + 1$$

- Aproximação para $f(1)$:

$$P_2(1) = \left(\frac{2}{3}\right)1^2 - \left(\frac{7}{3}\right)1 + 1 \Rightarrow P_2(1) = -\frac{2}{3}$$

Polinômios de Lagrange

Fórmula do erro

- A fórmula do erro do polinômio de Lagrange é dada por

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

onde $\xi(x)$ situa-se em qualquer ponto do interval que contém $x_0, x_1, \ldots, x_n$

- Esta fórmula de erro é um importante resultado teórico, visto que os polinômios de Lagrange são usados extensivamente para derivar métodos de diferenciação e integração numérica
- Limites de erro para essas técnicas são obtidos da fórmula de erro de Lagrange
- O uso específico desta fórmula de erro, contudo, está restrito àquelas funções cujas derivadas têm limites conhecidos

Exercícios Sugeridos

For the given functions $f(x)$, let $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$, and $x_2 = 0.9$. Construct the Lagrange interpolating polynomials of degree (i) at most 1 and (ii) at most 2 to approximate $f(0.45)$, and find the actual error.

(a) $f(x) = \cos x$

(b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

The following table lists the population of the United States from 1940 to 1990.

Year	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Population (in thousands)	132, 165	151, 326	179, 323	203, 302	226, 542	249, 633

Find the Lagrange polynomial of degree 5 fitting this data, and use this polynomial to estimate the population in the years 1930, 1965, and 2010. The population in 1930 was approximately 123,203,000. How accurate do you think your 1965 and 2010 figures are?

Interpolação por Diferenças Divididas

Diferenças Divididas

- Seja $f(x)$ uma função tabelada em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ pontos distintos
  Define-se o operador diferenças divididas como segue

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

$\Rightarrow$ $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ é a diferença dividida de ordem k de $f(x)$ sobre $x_0, x_1, \ldots, x_k$

Interpolação por Diferenças Divididas

Tabela de Diferenças Divididas

Dada uma função $f(x)$ e conhecidos $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ pode – se construir a tabela ao lado

x	Ord. 0	Ord. 1	Ord. 2	$\cdots$	Ord. n
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$			
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		
		$f[x_2, x_3]$			
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	$\cdots$	$f[x_0, x_1, x_2, \ldots x_n]$
		$f[x_3, x_4]$			
x_4	$f[x_4]$				
		$\vdots$			
$\vdots$			$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Coeficientes de interesse para o polinômio de Interpolação

Interpolação por Diferenças Divididas

Fórmula de interpolação de diferenças divididas de Newton

- Dado o conjunto de pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ o polinômio interpolador de Newton é dado por

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

- Na forma compacta, tem-se

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})$$

Note que os coeficientes da fórmula de interpolação de diferenças divididas de Newton são os elementos da diagonal superior da tabela

Interpolação por Diferenças Divididas

Tabela de Diferenças Divididas

- A tabela abaixo mostra as diferenças divididas de até terceira ordem para $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

x	$f(x)$	First Divided Differences	Second Divided Differences	Third Divided Differences
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	
		$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2}{x_3-x_0}$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
		$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3}{x_4-x_1}$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$	
		$f[x_3,x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_3,x_4,x_5]-f[x_2,x_3,x_4}{x_5-x_2}$
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5] = \frac{f[x_4,x_5]-f[x_3,x_4]}{x_5-x_3}$	
		$f[x_4,x_5] = \frac{f[x_5]-f[x_4]}{x_5-x_4}$		
x_5	$f[x_5]$			

Note que faltam 2 termos de quarta ordem e 1 de quinta ordem

Interpolação por Diferenças Divididas

Exemplo 1

- Determine $P_2(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos dados abaixo, usando a fórmula de Newton

$$\begin{Bmatrix} x & -1 & 0 & 2 \\ f(x) & 4 & 1 & -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} P_2(x) = {} & f[x_0] + f[x_0,x_1]\cdot(x-x_0) + \\ & f[x_0,x_1,x_2]\cdot(x-x_0)(x-x_1) \end{aligned}$$

- Tabela de diferenças divididas

x	$f(x)$	Ord. 1	Ord. 2
$x_0 = -1$	$f[x_0] = 4$		
		$f[x_0,x_1] = \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = -3$	
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$		$f[x_0,x_1,x_2] = \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = \dfrac{2}{3}$
		$f[x_1,x_2] = \dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} = -1$	
$x_2 = 2$	$f[x_2] = -1$		

Interpolação por Diferenças Divididas

- Exemplo 1 (cont.):

Tabela de pontos $\begin{Bmatrix} x & -1 & 0 & 2 \\ f(x) & 4 & 1 & -1 \end{Bmatrix}$

- Portanto:

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\cdot(x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2]\cdot(x - x_0)(x - x_1)$$

$$\Downarrow$$

$$P_2(x) = 4 + (-3)\cdot(x+1) + (2/3)\cdot(x+1)(x-0)$$

$$\Downarrow$$

$$P_2(x) = 4 - 3x - 3 + (2/3)x^2 + (2/3)x$$

$$\Downarrow$$

$$P_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

Interpolação por Diferenças Divididas

Exemplo 2

- Monte a tabela de diferenças divididas para o conjunto de dados abaixo

x	$f(x)$	Ord. 1	Ord. 2	Ord. 3	Ord. 4
$x_0 = -1$	1				
		0			
$x_1 = 0$	1		-1/2		
		-1		1/6	
$x_2 = 1$	0		0		-1/24
		-1		0	
$x_3 = 2$	-1		0		
		-1			
$x_4 = 3$	-2				

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	0	-1	-2

Interpolação por Diferenças Divididas

- Exemplo 2
  - Monte a tabela de diferenças divididas para o conjunto de dados abaixo

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	1	0	-1	-2

$$\begin{aligned} P_4(x) = {} & f[x_0] + f[x_0,x_1]\cdot(x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2]\cdot(x-x_0)(x-x_1) \\ & + f[x_0,x_1,x_2,x_3]\cdot(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ & + f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]\cdot(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$P_4(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+1)(x-0) + \frac{1}{6}(x+1)(x-0)(x-1) - \frac{1}{24}(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)$$

Exercícios Sugeridos

Use Newton's interpolatory divided-difference formula to construct interpolating polynomials of degrees 1, 2, and 3 for the following data. Approximate the specified value using each of the polynomials.

(a) $f(8.4)$ if $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.50515$, $f(8.7) = 18.82091$

(b) $f(0.9)$ if $f(0.6) = -0.17694460$, $f(0.7) = 0.01375227$, $f(0.8) = 0.22363362$, $f(1.0) = 0.65809197$

Year	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Population (in thousands)	132,165	151,326	179,323	203,302	226,542	249,633

Use an appropriate divided difference method to approximate each value.

(a) The population in the year 1930.

(b) The population in the year 2010.

Interpolação de Hermite

Aspectos gerais

- Os polinômios de Lagrange reproduzem os valores da função f para pontos específicos
- Os valores de f são, frequentemente, determinados da observação e, em alguns casos, pode-se determinar também a sua derivada f'
- Na interpolação de Hermite determina-se um polinômio que reproduz os valores da função e de sua derivada em pontos específicos
- Suponha que sejam dados os $(n+1)$ pontos

$$\left(x_0, f(x_0)\right), \left(x_1, f(x_1)\right), \ldots, \left(x_n, f(x_n)\right)$$

- Suponha ainda que f tenha a primeira derivada contínua no intervalo $[a,b]$ que contém $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
- O polinômio interpolador de Lagrange deverá ter grau n ; porém, o polinômio de Hermite deverá ter grau $(2n+1)$ para poder atender a condição adicional dos valores da derivada, f' .

Interpolação de Hermite

Formulação matemática

- Suponha que $f \in C^1[a,b]$ e que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são distintos em $[a,b]$
- O polinômio único de mínimo grau que reproduz os valores de f e f' para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é o polinômio de grau máximo $(2n+1)$ dado por

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x),$$

onde:

$$H_{n,j}(x) = \left[1 - 2(x - x_j) L'_{n,j}(x_j)\right] L^2_{n,j}(x) \quad \text{e} \quad \hat{H}_{n,j}(x) = (x - x_j) L^2_{n,j}(x)$$

- Note que $L_{n,j}(x)$ é o *j*-ésimo coeficiente de Lagrange do polinômio de grau n

Interpolação de Hermite

Formulação matemática (cont.)

- Fórmula do erro do polinômio de Hermite:
- Se $f \in C^{2n+2}[a,b]$, então:

$$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!}(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2 \;, \quad \text{p/ algum} \quad \xi(x) \in [a,b]$$

Comentários

- A determinação do polinômio de Hermite a partir do polinômio de Lagrange e suas derivadas torna esse procedimento muito tedioso
- Existe um procedimento alternativo para a geração das aproximações de Hermite, a partir da correlação entre a *n*-ésima diferença dividida e a *n*-ésima derivada de f

Interpolação de Hermite

- Relação entre diferença dividida e derivada
  - Se $f \in C^n[a,b]$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são distintos em $[a,b]$, então existe algum ξ em (a,b), tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

- Polinômio de Hermite usando diferenças divididas
  - Se $f \in C^1[a,b]$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n$ são distintos em $[a,b]$, então

$$H_{2n+1}(x) = f[z_0] + \sum_{k=1}^{2n+1} f[z_0, z_1, \ldots, z_k](x - z_0), \ldots, (x - z_{k-1})$$

onde:

$$z_{2k} = z_{2k+1} = x_k \quad \text{e} \quad f[z_{2k}, z_{2k+1}] = f'(x_k); \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

Interpolação de Hermite

- Exemplo: tabela de diferenças divididas para Pol. de Hermite

z	$f(z)$	Ord. 1	Ord. 2	$\cdots$
$z_0 = x_0$	$f[z_0] = f(x_0)$			
		$f[z_0, z_1] = f'(x_0)$		
$z_1 = x_0$	$f[z_1] = f(x_0)$		$f[z_0, z_1, z_2] = \dfrac{f[z_1, z_2] - f[z_0, z_1]}{z_2 - z_0}$	$\cdots$
		$f[z_1, z_2] = \dfrac{f[z_2] - f[z_1]}{z_2 - z_1}$		
$z_2 = x_1$	$f[z_2] = f(x_1)$		$f[z_1, z_2, z_3] = \dfrac{f[z_2, z_3] - f[z_1, z_2]}{z_3 - z_1}$	$\cdots$
		$f[z_2, z_3] = f'(x_1)$		
$z_3 = x_1$	$f[z_3] = f(x_1)$		$f[z_2, z_3, z_4] = \dfrac{f[z_3, z_4] - f[z_2, z_3]}{z_4 - z_2}$	$\cdots$
		$f[z_3, z_4] = \dfrac{f[z_4] - f[z_3]}{z_4 - z_3}$		
$z_4 = x_2$	$f[z_4] = f(x_2)$		$f[z_3, z_4, z_5] = \dfrac{f[z_4, z_5] - f[z_3, z_4]}{z_5 - z_3}$	$\cdots$
		$f[z_4, z_5] = f'(x_2)$		
$z_5 = x_2$	$f[z_5] = f(x_2)$			

$H_5(x)$ para x_0, x_1, x_2

Interpolação de Hermite

- Exemplo: tabela de diferenças divididas para Pol. de Hermite

1.3	0.6200860					
		-0.5220232				
1.3	0.6200860		$-.0897427$			
		-0.5489460		0.0663657		
1.6	0.4554022		-0.0698330		0.0026663	
		-0.5698959		0.0679655		-0.0027738
1.6	0.4554022		-0.0290537		0.0010020	
		-0.5786120		0.0685667		
1.9	0.2818186		-0.0084837			
		-0.5811571				
1.9	0.2818186					

$$H_5(x) = 0.6200860 - 0.5220232(x-z_0) - 0.0897427(x-z_0)(x-z_1) +$$
$$0.0663657(x-z_0)(x-z_1)(x-z_2) + 0.0026663(x-z_0)(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)$$
$$-0027738(x-z_0)(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)(x-z_4)$$

$$H_5(1.5) = 0.5118277$$

Exercícios Sugeridos

Use Hermite interpolation to construct an approximating polynomial for the following data.

(a)

x	$f(x)$	$f'(x)$
8.3	17.56492	3.116256
8.6	18.50515	3.151762

(b)

x	$f(x)$	$f'(x)$
0.8	0.22363362	2.1691753
1.0	0.65809197	2.0466965

A car traveling along a straight road is clocked at a number of points. The data from the observations are given in the following table, where the time is in seconds, the distance is in feet, and the speed is in feet per second.

Time	0	3	5	8	13
Distance	0	225	383	623	993
Speed	75	77	80	74	72

(a) Use a Hermite polynomial to predict the position of the car and its speed when $t = 10$ s.

(b) Use the derivative of the Hermite polynomial to determine whether the car ever exceeds a 55-mi/h speed limit on the road. If so, what is the first time the car exceeds this speed?

Interpolação por Funções Spline

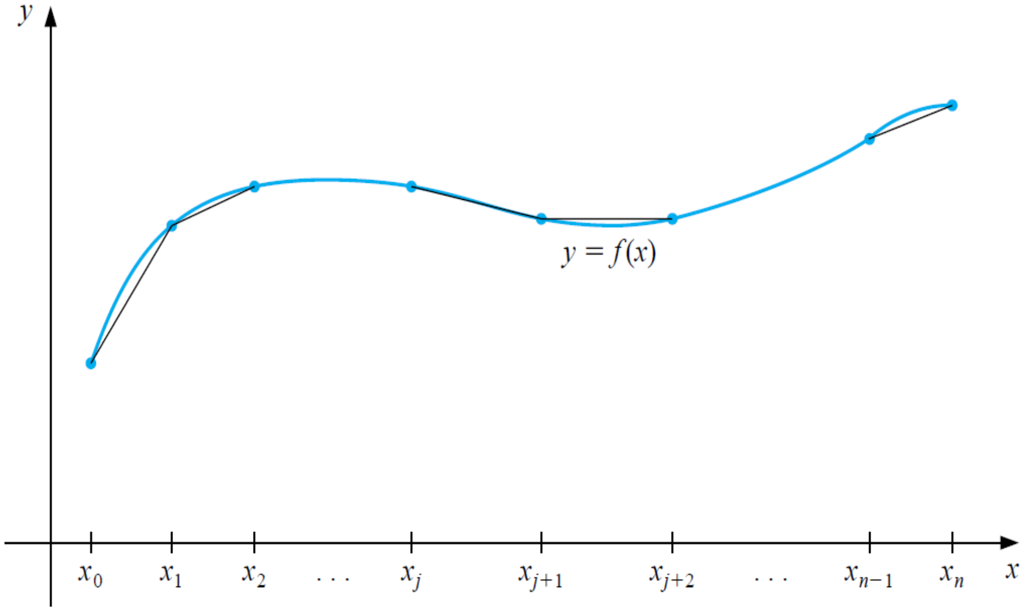
Aspectos Gerais

- A interpolação polinomial pode apresentar resultados indesejáveis quando feita para um número elevado de pontos usando-se polinômios de grau relativamente alto
- Esses resultados geram grandes flutuações sobre o intervalo total de interpolação
- Uma alternativa é interpolar $f(x)$ em grupos de poucos pontos, obtendo-se polinômios de grau menor, e impor condições para que a função de aproximação seja contínua e tenha derivadas contínuas até uma certa ordem
- Esta técnica é conhecida como aproximação polinomial por partes

Interpolação por Funções Spline

❑ Aspectos Gerais (cont.)

- A aproximação linear por partes é a mais simples de todas e consiste em unir um conjunto de pontos, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$, por uma série de retas

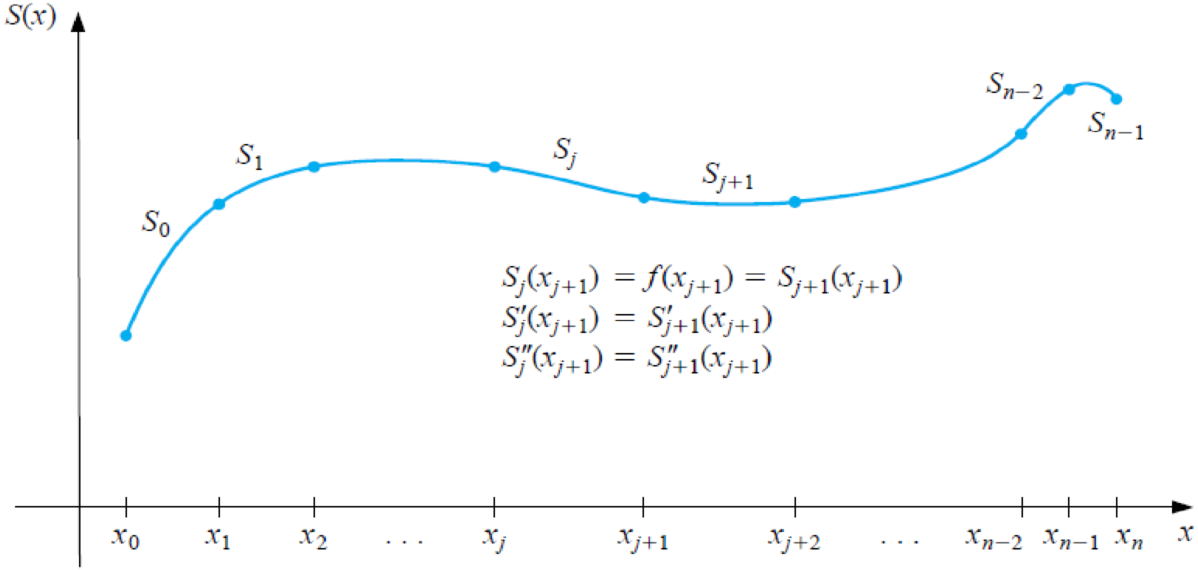


- A desvantagem desta aproximação é o fato de não ser possível a diferenciação nos extremos dos subintervalos, sendo a função de interpolação de comportamento não suave nestes pontos

Interpolação por Funções Spline

Funções Spline Cúbicas

- A funções spline cúbicas utilizam polinômios cúbicos entre pares de pontos, sendo a técnica mais comum de aprox. polinomial por partes
- Um polinômio cúbico padrão envolve 4 constantes, assegurando que a função interpolante tenha duas derivadas contínua no intervalo
- As derivadas das funções spline cúbicas, em geral, não reproduzem as derivadas da função original, mesmo para os pontos tabelados



Interpolação por Funções Spline

Spline Cúbica Interpolante

- Considere uma função $f(x)$ definida em $[a,b]$ e o conjunto de nós

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

- Uma spline cúbica interpolante, S , para $f(x)$, é uma função que satisfaz as seguintes condições:

(a) Para cada $j = 0,1,\ldots,n-1$, $S(x)$ é um polinômio cúbico $S_j(x) \in [x_j, x_{j+1}]$

(b) $S_j(x_j) = f(x_j), \forall j = 0,1,\ldots,n-1.$

(c) $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}), \forall j = 0,1,\ldots,n-2.$

(d) $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1}), \forall j = 0,1,\ldots,n-2.$

(e) $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1}), \forall j = 0,1,\ldots,n-2.$

(f) Satisfazer uma das seguintes condições de contorno :

(i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (contorno livre ou natural);

(ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (contorno fixado).

Interpolação por Funções Spline

Construção da Spline Cúbica Interpolante

- Aplicam-se as condições definidas no slide anterior, ao polinômio:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3; \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

$$\Downarrow$$

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j); \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

- Aplicando-se este resultado à condição $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$, obtém-se:

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}); \quad j = 0,1,\ldots,n-2$$

$$\Downarrow$$

$$a_{j+1} = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3; \quad j = 0,1,\ldots,n-2$$

- Definindo-se $h_j = (x_{j+1} - x_j);\ j = 1,2,\ldots,n-1$ e $a_n = f(x_n)$, resulta:

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3; \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

Interpolação por Funções Spline

Construção da Spline Cúbica Interpolante (cont.)

- De modo similar, define-se $b_n = S'(x_n)$ e observe que:

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2; \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

$$\Downarrow$$

$$S_j'(x_j) = b_j; \;\; j = 0,1,\ldots,n-1$$

- Aplicando-se este resultado à condição $S_{j+1}'(x_{j+1}) = S_j'(x_{j+1})$, obtém-se:

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2; \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

- Também de modo similar, definindo-se $c_n = S''(x_n)/2$ e aplicando-se a condição $S_{j+1}''(x_{j+1}) = S_j''(x_{j+1})$, obtém-se:

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j; \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

Interpolação por Funções Spline

Construção da Spline Cúbica Interpolante (cont.)

- Síntese das equações de coeficientes:

$$\text{(i)}\quad a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3; \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

$$\text{(ii)}\quad b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2; \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

$$\text{(iii)}\quad c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j; \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

- Substituindo-se d_j da equação (iii), nas equações (i) e (ii) resulta:

$$\text{(1)}\quad a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}\left(2c_j + c_{j+1}\right); \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

$$\text{(2)}\quad b_{j+1} = b_j + h_j\left(c_j + c_{j+1}\right); \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$

- Da equação (1), obtém-se, para $j = 0,1,\ldots,n-1$:

$$b_j = \frac{1}{h_j}\left(a_{j+1} - a_j\right) - \frac{h_j}{3}\left(2c_j + c_{j+1}\right)$$

e

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}\left(a_j - a_{j-1}\right) - \frac{h_{j-1}}{3}\left(2c_{j-1} + c_j\right)$$

Interpolação por Funções Spline

Construção da Spline Cúbica Interpolante (cont.)

- Substituindo-se os últimos resultados na equação (2) e reduzindo-se o índice em 1 unidade, resulta:

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1});\ j = 1,2,\ldots,n-1$$

- Note que este sistema envolve (n+1) incógnitas, $\{c_j\}_{j=0}^{n}$, sendo que os valores constantes $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ e $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ são obtidos pelo espaçamento dos nós $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ e dos valores $\{f(x_j)\}_{j=0}^{n}$.
- Calculados os valores de $\{c_j\}_{j=0}^{n}$, podem ser obtidos os valores de $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ e $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ usando-se as seguintes equações:

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

e

$$d_j = (c_{j+1} - c_j)/3h_j$$

$$\text{onde}: j = 1,2,\ldots,n-1$$

Interpolação por Funções Spline

Construção da Spline Cúbica Interpolante (cont.)

- Para o caso de spline com contorno natural ou livre devem ser atendidas ainda as condições:

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = S''(x_0)/2 = 0 \ \text{ e } \ \mathrm{c_n} = S''(x_n)/2 = 0$$

- Para o caso de spline com contorno fixado devem ser atendidas ainda as condições:

$$S'(x_0) = f'(x_0) \ \text{ e } \ S'(x_n) = f'(x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}\left(a_1 - a_0\right) - 3f'(x_0)$$

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(x_n) - \frac{3}{h_{n-1}}\left(a_n - a_{n-1}\right)$$

Interpolação por Funções Spline

- Exemplo 1:
  - Considere a construção da spline cúbica para os pontos:

$$\left(x_0, f(x_0)\right), \left(x_1, f(x_1)\right), \left(x_2, f(x_2)\right) \text{e} \left(x_3, f(x_3)\right)$$

  - Polinômios de grau 3:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$
$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3$$

  - Nós: x_0, x_1, x_2, x_3
  - Determinar Intervalos: $h_0 = (x_1 - x_0); h_1 = (x_2 - x_1); h_2 = (x_3 - x_2)$
  - Determinar Coeficientes $a_j; j = 0,1,2,3$:

$$a_0 = f(x_0); a_1 = f(x_1); a_2 = f(x_2); a_3 = f(x_3)$$

Interpolação por Funções Spline

- Exemplo 1 (cont.):
  - Determinar coeficientes $c_j ; j = 0,1,2,3$:
    - ✓ Das condições de contorno natural, $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, tem-se:

$$c_0 = S''(x_0)/2 = 0 \quad \text{e} \quad c_3 = S''(x_3)/2 = 0$$

    - ✓ Da equação geral abaixo resulta o sistema de equações SE para o cálculo de c_1 e c_2 :

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)c_j + h_j c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}); \; j = 1,2$$

$$\text{SE}: \begin{cases} h_0 c_0 + 2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = \dfrac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \dfrac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\[2ex] h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2 c_3 = \dfrac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \dfrac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \end{cases}$$

Interpolação por Funções Spline

- Exemplo 1 (cont.):

  - Determinar coeficientes $b_j;\ j=0,1,2$:

$$b_j = \frac{1}{h_j}\left(a_{j+1} - a_j\right) - \frac{h_j}{3}\left(2c_j + c_{j+1}\right)$$

  - Determinar coeficientes $d_j;\ j=0,1,2$:

$$d_j = \frac{1}{3h_j}\left(c_{j+1} - c_j\right)$$

  - Montar os polinômios com os coeficientes calculados:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$
$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3$$

Interpolação por Funções Spline

- Exemplo 2:

  - Determine a spline cúbica livre para $f(x) = x\sin 4x$ usando os nós:

$$x_0 = 0;\; x_1 = 0.25;\; x_2 = 0.4;\; x_3 = 0.6$$

  - Polinômios de grau 3:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$
$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3$$

  - Determinar Intervalos:

$$h_0 = (x_1 - x_0) = 0.25 \qquad h_1 = (x_2 - x_1) = 0.15 \qquad h_2 = (x_3 - x_2) = 0.20$$

  - Determinar Coeficientes $a_j;\; j = 0,1,2,3$:

$$a_0 = f(x_0) = 0 \qquad a_1 = f(x_1) = 0.2104$$
$$a_2 = f(x_2) = 0.3998 \qquad a_3 = f(x_3) = 0.4043$$

Interpolação por Funções Spline

- Exemplo 2 (cont.):
  - Determinar coeficientes $c_j;\ j = 0,1,2,3$:
    - ✓ Das condições de contorno natural: $c_0 = S''(x_0)/2 = 0 \;\text{ e }\; c_3 = S''(x_3)/2 = 0$
    - ✓ Equações para o cálculo de c_1 e c_2 :

$$\text{SE}:\begin{cases} h_0c_0 + 2(h_0+h_1)c_1 + h_1c_2 = \dfrac{3}{h_1}(a_2-a_1) - \dfrac{3}{h_0}(a_1-a_0) \\ h_1c_1 + 2(h_1+h_2)c_2 + h_2c_3 = \dfrac{3}{h_2}(a_3-a_2) - \dfrac{3}{h_1}(a_2-a_1) \end{cases}$$

$$\text{SE}:\begin{cases} 0.25c_0 + 2(0.25+0.15)c_1 + 0.15c_2 = \dfrac{3}{0.15}(0.3998-0.2104) - \dfrac{3}{0.25}(0.2104-0) \\ 0.15c_1 + 2(0.15+0.20)c_2 + 0.20c_3 = \dfrac{3}{0.20}(0.4043-0.3998) - \dfrac{3}{0.15}(0.3998-0.2104) \end{cases}$$

$$\text{SE}:\begin{cases} 0.8c_1 + 0.15c_2 = 1.2632 \\ 0.15c_1 + 0.70c_2 = -3.7873 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c_0 = 0 & c_1 = 2.7020 \\ c_2 = -5.9894 & c_3 = 0 \end{matrix}$$

Interpolação por Funções Spline

- Exemplo 2 (cont.):

  - Determinar coeficientes $b_j;\ j = 0,1,2$: $b_j = \frac{1}{h_j}\left(a_{j+1} - a_j\right) - \frac{h_j}{3}\left(2c_j + c_{j+1}\right)$

$b_0 = \left(a_1 - a_0\right)/h_0 - (h_0/3)\left(2c_0 + c_1\right)$ $\quad b_0 = \left(0.2104 - 0\right)/0.25 - (0.25/3)\left(2(0) + 2.7020\right)$

$b_1 = \left(a_2 - a_1\right)/h_1 - (h_1/3)\left(2c_1 + c_2\right)$ $\quad b_1 = \left(0.3998 - 0.2104\right)/0.15 - (0.15/3)\left(2(2.7020) - 5.9894\right)$

$b_2 = \left(a_3 - a_2\right)/h_2 - (h_2/3)\left(2c_2 + c_3\right)$ $\quad b_2 = \left(0.4043 - 0.3998\right)/0.20 - (0.20/3)\left(2(-5.9894) + 0\right)$

$$\Rightarrow \quad b_0 = 0.6164 \quad b_1 = 1.2919 \quad b_2 = 0.8211$$

  - Determinar coeficientes $d_j;\ j = 0,1,2$: $d_j = \left(c_{j+1} - c_j\right)/3h_j$

$d_0 = \left(c_1 - c_0\right)/3h_0$ $\quad d_0 = \left(2.7020 - 0\right)/(3*0.25)$

$d_1 = \left(c_2 - c_1\right)/3h_1$ $\quad d_1 = \left(-5.9894 - 2.7020\right)/(3*0.15)$

$d_2 = \left(c_3 - c_2\right)/3h_2$ $\quad d_2 = \left(0 - (-5.9894)\right)/(3*0.20)$

$$\Rightarrow \quad d_0 = 3.6027 \quad d_1 = -19.3142 \quad d_2 = 9.9823$$

Interpolação por Funções Spline

Exemplo 2 (cont.):

- Quadro resumos dos coeficientes e nós:

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 0.2104$$
$$a_2 = 0.3998 \qquad a_3 = 0.4043$$

$$x_0 = 0; \; x_1 = 0.25; \; x_2 = 0.4; \; x_3 = 0.6$$

$$b_0 = 0.6164 \quad b_1 = 1.2919 \quad b_2 = 0.8211$$

$$c_0 = 0 \qquad c_1 = 2.7020$$
$$c_2 = -5.9894 \qquad c_3 = 0$$

$$d_0 = 3.6027 \quad d_1 = -19.3142 \quad d_2 = 9.9823$$

- Polinômios:

$$S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3$$
$$S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3$$
$$S_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3$$

Interpolação por Funções Spline

- Exemplo 2 (cont.):

  - Polinômios:

$$S_0(x) = 0 + 0.6164(x-0) + 0(x-0)^2 + 3.6027(x-0)^3$$
$$S_1(x) = 0.2104 + 1.2919(x-0.25) + 2.7020(x-0.25)^2 - 19.3142(x-0.25)^3$$
$$S_2(x) = 0.3998 + 0.8211(x-0.4) - 5.9894(x-0.4)^2 + 9.9823(x-0.4)^3$$

$$\Downarrow$$

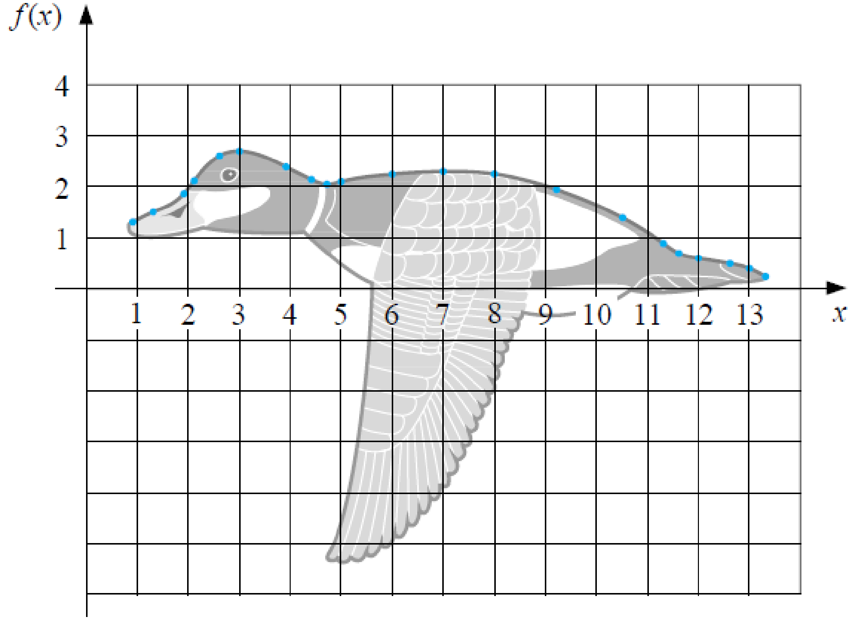
$$S_0(x) = 0.6164x + 3.6027x^3$$
$$S_1(x) = 0.3581 - 3.6805x + 17.1876x^2 - 19.3142x^3$$
$$S_2(x) = -1.5258 + 10.4041x - 17.9861x^2 + 9.9823x^3$$

Recomenda-se refazer o processo para uma spline cúbica interpolante de contorno fixado, expressar graficamente e comparar os resultados.

Interpolação por Funções Spline

- **Exemplo 3:**
  - Considere o pato em voo mostrado na figura abaixo. Aproxime os pontos ao longo do topo do perfil do pato apresentados na tabela

x	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3.0	3.9	4.4	4.7	5.0	6.0	7.0	8.0	9.2	10.5	11.3	11.6	12.0	12.6	13.0	13.3
$f(x)$	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4	2.15	2.05	2.1	2.25	2.3	2.25	1.95	1.4	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.25



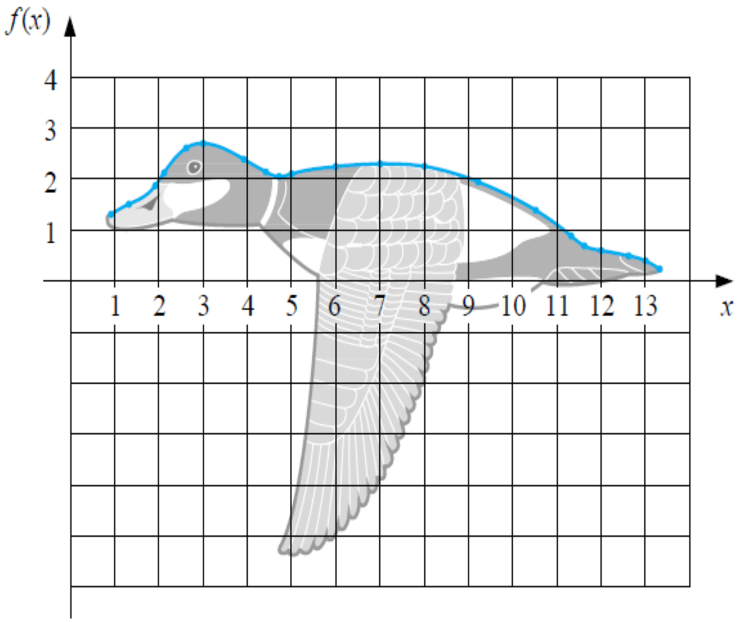
  - Note que nos intervalos em que a curva varia rapidamente são utilizados mais pontos que em outros intervalos.

Interpolação por Funções Spline

Exemplo 3 (cont.):

- A partir destes dados e usando-se a metodologia apresentada são gerados os seguintes coeficientes da spline cúbica

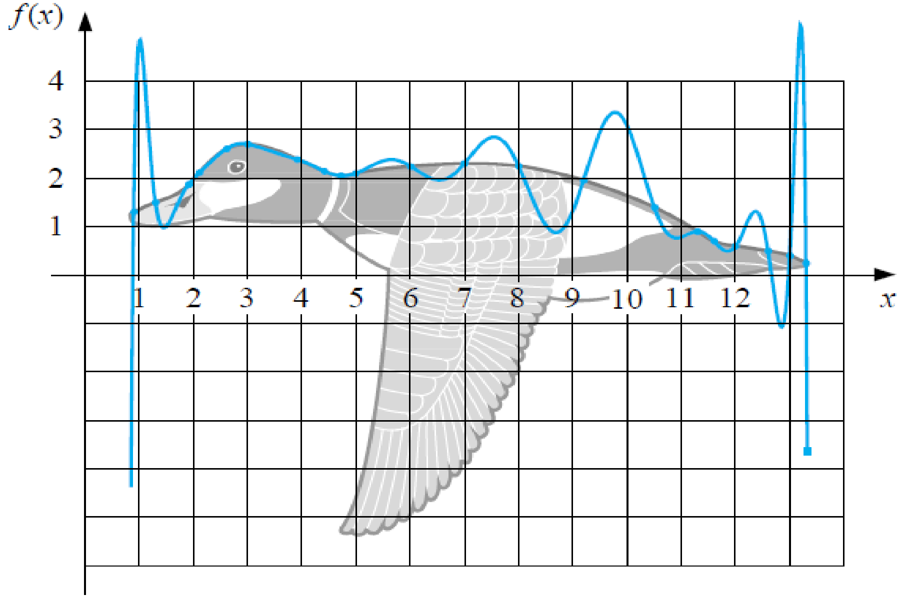
j	x_j	a_j	b_j	c_j	d_j
0	0.9	1.3	5.40	0.00	−0.25
1	1.3	1.5	0.42	−0.30	0.95
2	1.9	1.85	1.09	1.41	−2.96
3	2.1	2.1	1.29	−0.37	−0.45
4	2.6	2.6	0.59	−1.04	0.45
5	3.0	2.7	−0.02	−0.50	0.17
6	3.9	2.4	−0.50	−0.03	0.08
7	4.4	2.15	−0.48	0.08	1.31
8	4.7	2.05	−0.07	1.27	−1.58
9	5.0	2.1	0.26	−0.16	0.04
10	6.0	2.25	0.08	−0.03	0.00
11	7.0	2.3	0.01	−0.04	−0.02
12	8.0	2.25	−0.14	−0.11	0.02
13	9.2	1.95	−0.34	−0.05	−0.01
14	10.5	1.4	−0.53	−0.10	−0.02
15	11.3	0.9	−0.73	−0.15	1.21
16	11.6	0.7	−0.49	0.94	−0.84
17	12.0	0.6	−0.14	−0.06	0.03
18	12.6	0.5	−0.18	0.00	−0.43
19	13.0	0.4	−0.39	−0.52	0.49
20	13.3	0.25			



Interpolação por Funções Spline

❑ Exemplo 2 (comparação)

- A figura abaixo ilustra os resultados obtidos usando-se o polinômio de Lagrange para interpolar esses mesmos pontos



- Note que pelo fato de haver 21 pontos, o polinômio de Lagrange é de grau 20 e apresenta um comportamento oscilatório ao longo de todo o intervalo

Exercícios Sugeridos

Construct the free cubic spline for the following data.

(a)

x	$f(x)$
8.3	17.56492
8.6	18.50515

(b)

x	$f(x)$
0.8	0.22363362
1.0	0.65809197

The data in the following table give the population of the United States for the years 1940 to 1990 and were considered in Exercise 16 of Section 3.2.

Year	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Population (in thousands)	132, 165	151, 326	179, 323	203, 302	226, 542	249, 633

Find a free cubic spline agreeing with these data, and use the spline to predict the population in the years 1930, 1965, and 2010. Compare your approximations with those previously obtained. If you had to make a choice, which interpolation procedure would you choose?