

Computação Científica II

(EEL7031)

Resolução de Sistemas de Equações Lineares

(Métodos Iterativos)

Objetivos e Tópicos Principais

□ Objetivos

- Estudar técnicas iterativas de resolução de sistemas de equações lineares algébricas, que surgem em diversas áreas do conhecimento

□ Tópicos principais

- Introdução
- Normas de vetores e matrizes
- Autovalores e autovetores
- Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel
- O método SOR
- O método gradiente conjugado
- Comentários Finais

Introdução

❑ Características dos métodos iterativos

- Necessitam de uma aproximação inicial
- Não fornecem solução exata, mesmo com aritmética exata, mas uma solução aproximada dentro de uma tolerância especificada
- Em muitos casos, os métodos iterativos são mais efetivos que os diretos, visto que podem requerer menor esforço computacional e, nestes casos, o erro de arredondamento é reduzido
- A sentença anterior é particularmente verdadeira quando a matriz de coeficientes é esparsa, ou seja, quando possui elevado percentual de elementos nulos

Normas de vetores e matrizes

□ Aspectos gerais

- A distância entre números reais x e y é $|x - y|$
- Esta medida é empregada para estimar a precisão da aproximação da solução no cálculo de raízes e para determinar quando uma aproximação é suficientemente precisa
- Nos métodos iterativos de resolução de sistemas de equações algébricas lineares emprega-se esta mesma lógica, porém aplicada a vetores
- **Convenção:** A equação $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ descreve todos os vetores coluna com dimensão n e coeficientes reais representados por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Normas de vetores e matrizes

□ Norma de vetor no \mathfrak{R}^n

➤ A norma de um vetor no \mathfrak{R}^n é uma função, $\|\cdot\|$, de $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ com as seguintes propriedades

✓ $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathfrak{R}^n$

✓ $\|x\| = 0$ se e somente se $x = (0, 0, \dots, 0)^t \equiv 0$

✓ $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \cdot \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathfrak{R}$ e $x \in \mathfrak{R}^n$

✓ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathfrak{R}^n$

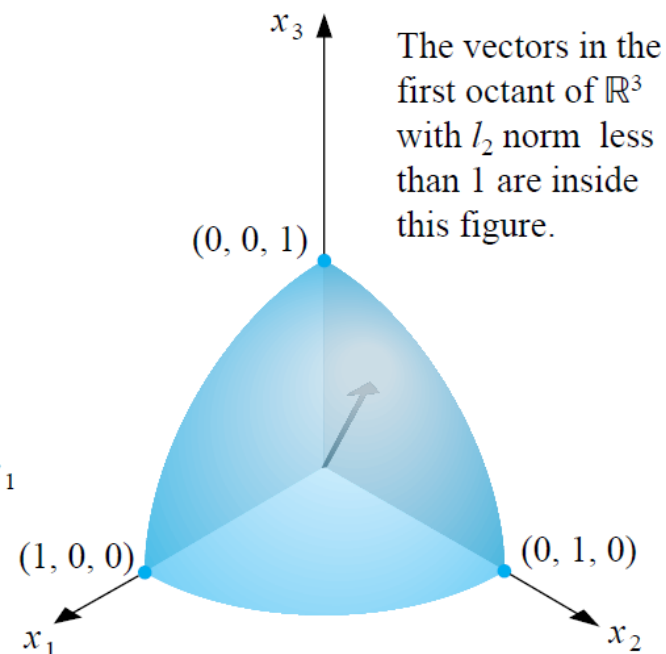
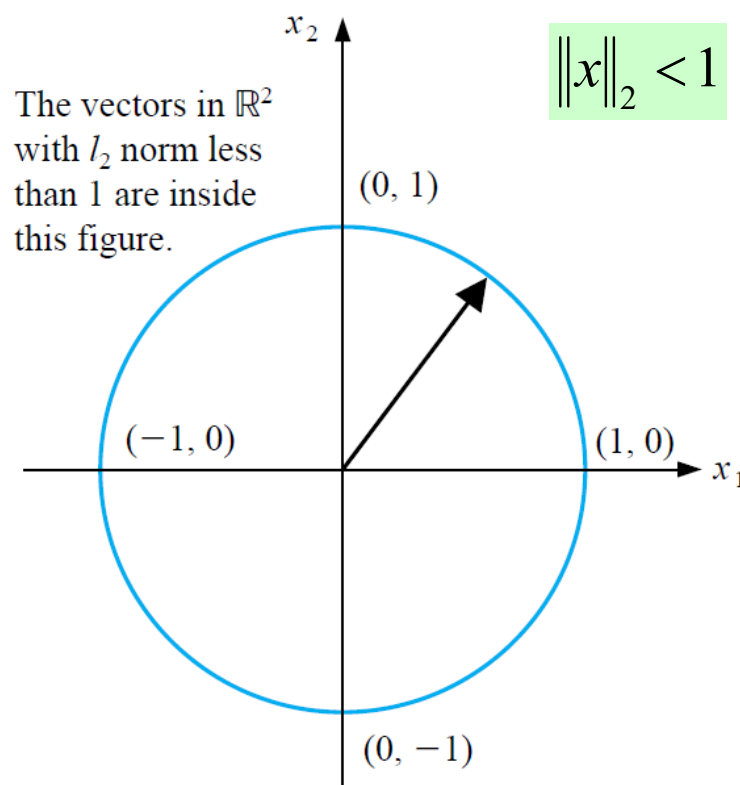
➤ As normas Euclidiana $l_2 = \|x\|_2$ e infinita $l_\infty = \|x\|_\infty$, para $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ são definidas como:

$$\|x\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

Normas de vetores e matrizes

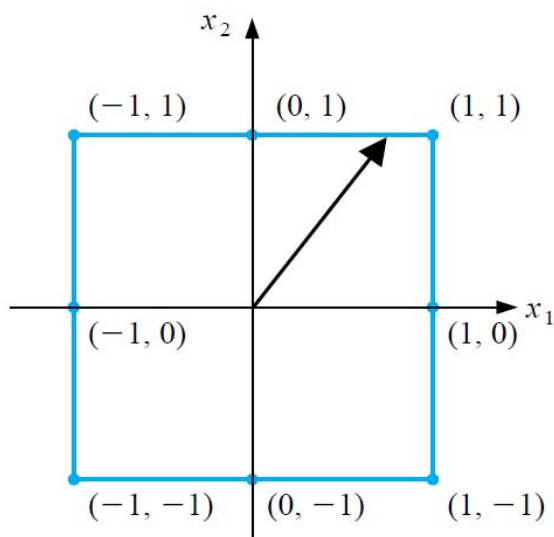
❑ Interpretação geométrica da norma euclidiana



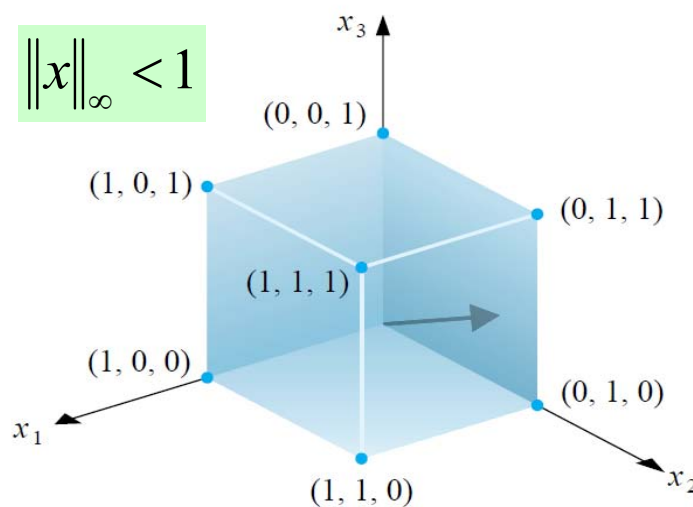
A norma $\|x\|_2$, p/ $x = (x_1, x_2, x_3)^t$, fornece a distância em linha reta entre os pontos $(0,0,0)$ e (x_1, x_2, x_3) .

Normas de vetores e matrizes

Interpretação geométrica da norma infinita



The vectors in \mathbb{R}^2 with l norm less than 1 are inside this figure.



The vectors in the first octant of \mathbb{R}^3 with l norm less than 1 are inside this figure.

Exemplo

➤ Para $x = (-1, 1, -2)^t$, tem-se:

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|-1|, |1|, |-2|\} = 2$$

Normas de vetores e matrizes

□ Distância entre vetores

- Se $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$ são vetores no \mathfrak{R}^n , as distâncias l_2 e l_∞ entre x e y são definidas por

$$\|x - y\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} \quad \text{e} \quad \|x - y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

□ Exemplo

- Para $x = (1, 1, 1)^t$ e $y = (2, 2, 2)^t$, tem-se

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\|x - y\|_\infty = \max\{|2-1|, |2-1|, |2-1|\} = 1$$

Normas de vetores e matrizes

□ Distância entre vetores (cont.)

- O conceito de distância no \Re^n é usado para definir o limite de uma sequência de vetores
- A sequência de vetores $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ no \Re^n é dita convergir para x com respeito a norma $\|\cdot\|$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $N(\varepsilon)$ tal que

$$\|x^k - x\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } k \geq N(\varepsilon)$$

Normas de vetores e matrizes

□ Distância entre vetores (exemplo)

- Considere a sequência de vetores $x^{(k)} \in \mathbb{R}^4$ ser definida por

$$x^{(k)} = \left(x_1^k, x_2^k, x_3^k, x_4^k \right)^t = \left(1, 2 + \frac{1}{k}, \frac{3}{k^2}, e^{-k} \sin k \right)^t$$

- Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2 + 1/k = 2$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3/k^2 = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k} \sin k = 0$$

- Portanto, para qualquer dado ε , pode ser encontrado um $N(\varepsilon)$ tal que o maior valor de $\|x_1^{(k)} - 1\|, \|x_2^{(k)} - 2\|, \|x_3^{(k)} - 0\|$ e $\|x_4^{(k)} - 0\|$, é menor que ε
- Este resultado implica que a sequência $x^{(k)}$ converge para $(1, 2, 0, 0)^t$ com respeito a $\|\cdot\|_\infty$
- Um resultado importante neste tema é que todas as normas no \mathbb{R}^n são equivalentes com respeito a convergência

Normas de vetores e matrizes

□ Norma de matriz

➤ Uma norma de matriz no conjunto de todas as matrizes $n \times n$ é uma função, $\|\cdot\|$, definida neste conjunto, satisfazendo para todas as matrizes A e B , $n \times n$, e todos os números reais α

✓ $\|A\| \geq 0$

✓ $\|A\| = 0$, se e somente se A é 0, matriz como todos os elem. nulos

✓ $\|\alpha A\| = \|\alpha\| \cdot \|A\|$

✓ $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

✓ $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

□ Distância entre matrizes

➤ Uma distância entre matrizes A e B , $n \times n$, com respeito a esta norma de matriz é $\|A - B\|$

Normas de vetores e matrizes

□ Norma natural de matriz

- Se $\|\cdot\|$ é uma norma de vetor no \mathfrak{R}^n , a norma natural de matriz no conjunto de matrizes $(n \times n)$, dada por $\|\cdot\|$, é definida como segue

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

- Aplicações para norma euclidiana l_2 e norma infinita l_∞

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

e

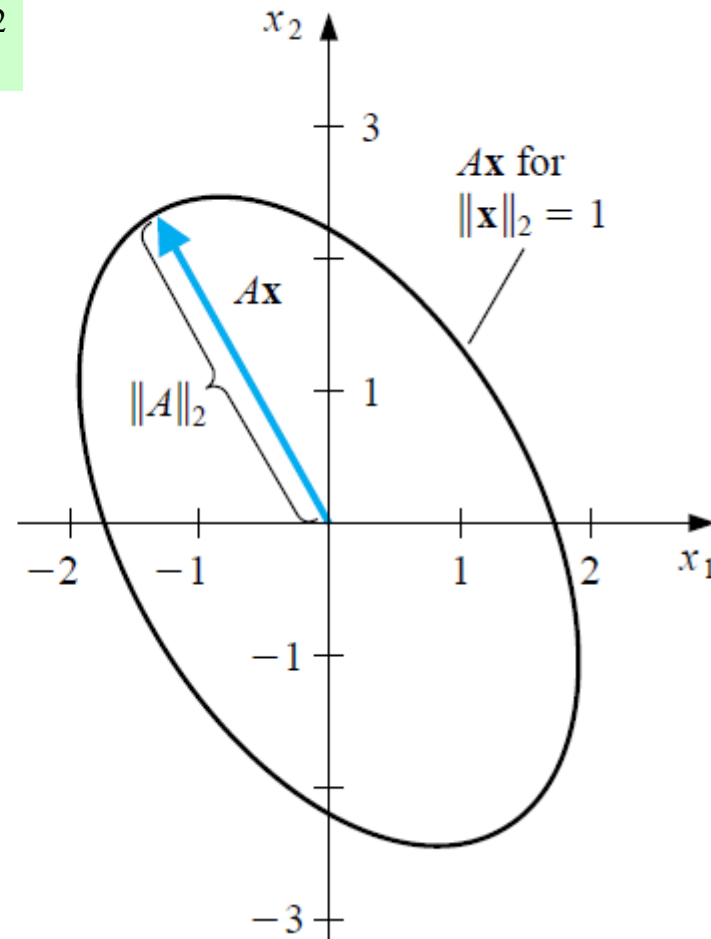
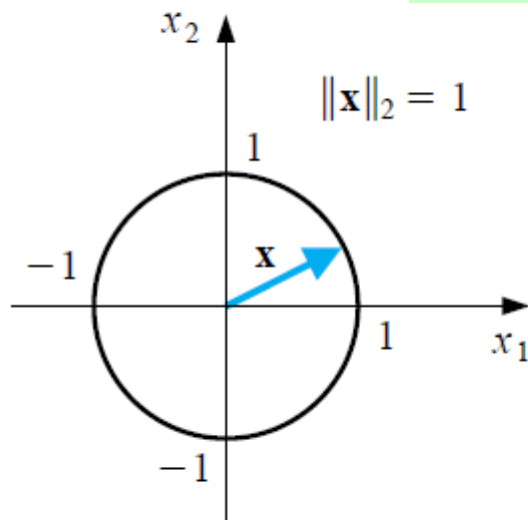
$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$$

Normas de vetores e matrizes

- Interpretação geométrica da norma natural euclidiana de matriz

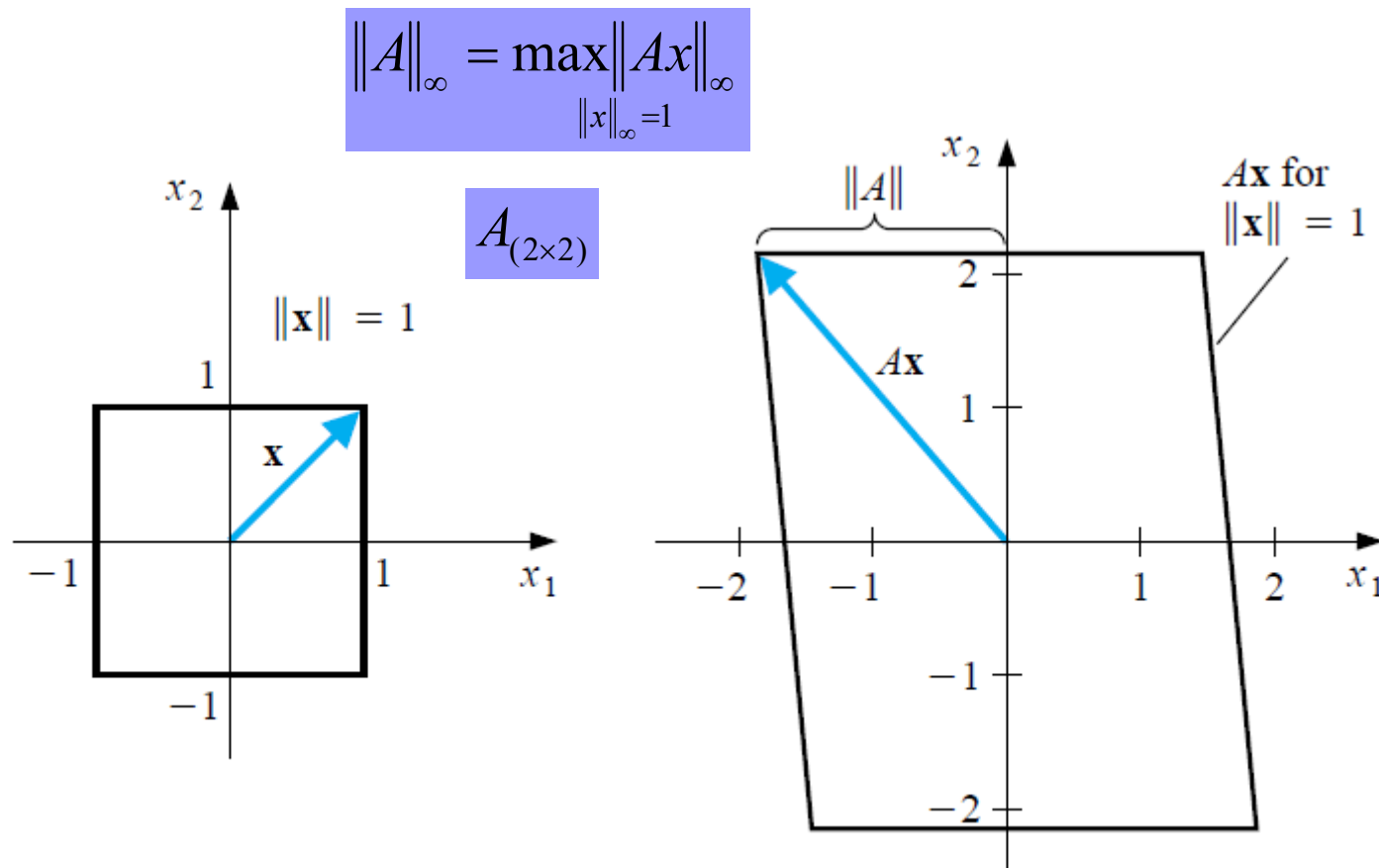
$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

$A_{(2 \times 2)}$



Normas de vetores e matrizes

❑ Interpretação geométrica da norma natural infinita de matriz



Normas de vetores e matrizes

❑ Cálculo da norma natural infinita de matriz

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

❑ Exemplo:

➤ Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\sum_{j=1}^3 a_{1j} = |1| + |2| + |-1| = 4$$

$$\sum_{j=1}^3 a_{2j} = |0| + |3| + |-1| = 4$$

$$\sum_{j=1}^3 a_{3j} = |5| + |-1| + |1| = 7$$

➤ Portanto: $\|A\|_{\infty} = \max\{4, 4, 7\} = 7$

Autovalores e Autovetores

□ Aspectos gerais

- Um escalar λ é autovalor de um operador linear $A : V \rightarrow V$ se existir um vetor $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. O vetor x é chamado autovetor
- Os autovalores de uma dada matriz quadrada A de dimensão $n \times n$ são os n números que resumem as propriedades essenciais daquela matriz
- O autovalor de A é um número λ tal que, se for subtraído de cada entrada na diagonal de A , converte A numa matriz singular
- Subtrair um escalar λ de cada entrada na diagonal de A é o mesmo que subtrair λ vezes a matriz identidade I de A
- Portanto, λ é um autovalor se e somente se a matriz $(A - \lambda I)$ for singular
- Há forte correlação λ_s e a possibilidade de um método iterativo convergir

Autovalores e Autovetores

Definições

- Para uma matriz quadrada $A_{(n \times n)}$ o polinômio característico de A é definido por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

- O polinômio $p(\lambda)$ tem grau n e, conseqüentemente, têm no máximo n zeros distintos (alguns podem ser complexos)
- Os zeros de $p(\lambda)$ são denominados de **autovalores** da matriz A
- Se λ é um autovalor de A , então:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \longrightarrow \quad A - \lambda I \text{ é singular}$$

- Conseqüentemente, se $(A - \lambda I)x = 0$ e $x \neq 0$, então x é denominado um **autovetor** de A associado ao autovalor λ

Autovalores e Autovetores

Exemplo

➤ Determine os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

➤ Polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda(3 - \lambda) + 2$$

➤ **Portanto:**

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$\Rightarrow \text{Autovalores: } \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 2$$

➤ **Autovetores:**

$$\lambda_1 = 1$$



$$(A - 1 \cdot I)x = 0$$



$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$x_2 = -x_1$$

$$AV_1 = (1, -1)^t$$

$$\lambda_2 = 2$$



$$(A - 2 \cdot I)x = 0$$



$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$x_2 = -2x_1$$

$$AV_2 = (1, -2)^t$$

Qualquer múltiplo não-nulo de um autovetor é também um autovetor

Autovalores e Autovetores

Exemplo 2 – Aplicação do Matlab

➤ Determine os autovalores e autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores

Autovetores

```
>> A=[1 0 2; 0 1 -1; -1 1 1]
```

```
>> [Av,lambda]=eig(A)
```

A =

```
1 0 2
0 1 -1
-1 1 1
```

Av =

```
0.7071 0.7071 0.7071
-0.3536 + 0.0000i -0.3536 - 0.0000i 0.7071
0.0000 + 0.6124i 0.0000 - 0.6124i 0.0000
```

```
>> lambda=eig(A)
```

lambda =

```
1.0000 + 1.7321i
1.0000 - 1.7321i
1.0000
```

lambda =

```
1.0000 + 1.7321i 0 0
0 1.0000 - 1.7321i 0
0 0 1.0000
```

Autovalores e Autovetores

❑ Raio espectral de uma matriz

- O **raio espectral** $\rho(A)$ de uma matriz A é definido por

$$\rho(A) = \max |\lambda| \quad , \text{ onde } \lambda \text{ é um autovalor de } A .$$

- Para o exemplo do slide anterior, tem-se

$$\rho(A) = \max \{1, |1 + \sqrt{3}i|, |1 - \sqrt{3}i|\} \quad \Rightarrow \quad \rho(A) = \max \{1, 2, 2\} = 2$$

❑ Caracterização da norma Euclidiana de matriz

- Se A é uma matriz $(n \times n)$, então

$$\checkmark \quad \|A\|_2 = \left[\rho(A^t A) \right]^{1/2}$$

$$\checkmark \quad \rho(A) \leq \|A\| \quad \text{para qualquer norma}$$

Autovalores e Autovetores

❑ Exemplo – Norma Euclidiana de matriz

➤ Determine $\|A\|_2 = [\rho(A^t A)]^{1/2}$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$0 = \det(A^t A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 & -1 \\ 2 & 6 - \lambda & 4 \\ -1 & 4 & 5 - \lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad 0 = -\lambda(\lambda^2 - 14\lambda + 42)$$

\downarrow

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 7 + \sqrt{7}, \quad \lambda = 7 - \sqrt{7}$$

➤ Então:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^t A)} \quad \Rightarrow \quad \|A\|_2 = \sqrt{\max\{0, 7 - \sqrt{7}, 7 + \sqrt{7}\}} = \sqrt{7 + \sqrt{7}} \approx 3.106$$

Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

❑ Aspectos gerais

- São métodos iterativos especializados para sistemas com matrizes esparsas e de grande dimensão
- Sistemas com essas características são encontrados em estudos de circuitos integrados em grande escala e na solução numérica de problemas de valores de contorno e equações diferenciais parciais

❑ Elementos básicos do método de Jacobi

- A resolução de $Ax = b$, $A_{(n \times n)}$, por métodos iterativos, parte de uma aproximação inicial e gera uma sequência de vetores que converge para x
- Este processo envolve a conversão de $Ax = b \iff x = Tx + c$
- A sequência de aproximações é gerada, a partir de $x^{(0)}$, calculando-se

$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c; \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots$$

O Método de Jacobi

Convergência e raio espectral

- A sequência $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ converge para a solução única de $x = Tx + c$, para qualquer $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, se e somente se $\rho(T) < 1$

Exemplo

- Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}, \text{ onde}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- A conversão para a forma $x = Tx + c$ é feita isolando-se x_i na i -ésima linha, para $i = 1, 2, 3$

$$\begin{cases} x_1 = & -(2/10)x_2 & -(1/10)x_3 & + (7/10) \\ x_2 = -(1/5)x_1 & & -(1/5)x_3 & - (8/5) \\ x_3 = -(2/10)x_1 & -(3/10)x_2 & & + (6/10) \end{cases}$$

O Método de Jacobi

Exemplo (cont.)

➤ Assim, $Ax = b$ tem a forma $x = Tx + c$ abaixo

$$\begin{cases} x_1 = & -(2/10)x_2 - (1/10)x_3 + (7/10) \\ x_2 = -(1/5)x_1 & -(1/5)x_3 - (8/5) \\ x_3 = -(2/10)x_1 - (3/10)x_2 & + (6/10) \end{cases}$$

➤ onde

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{10} & -\frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$c = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ -\frac{8}{5} \\ \frac{6}{10} \end{bmatrix}$$

➤ Autovalores de T

$$\lambda_1 = -0.3943, \quad \lambda_2 = 0.1391, \quad \lambda_3 = 0.2552$$



$$\rho(T) = 0.3943 < 1$$

O Método de Jacobi

Exemplo (cont.)

- O processo iterativo $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ é executado como segue

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k)} = - (2/10)x_2^{(k-1)} - (1/10)x_3^{(k-1)} + (7/10) \\ x_2^{(k)} = - (1/5)x_1^{(k-1)} - (1/5)x_3^{(k-1)} - (8/5) \\ x_3^{(k)} = - (2/10)x_1^{(k-1)} - (3/10)x_2^{(k-1)} + (6/10) \end{array} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

- Os resultados de cada iteração, para $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$ são

k	0	1	2	3	4	5	...	9	10
$x_1^{(k)}$	1.0	0.40	1.09	0.928	1.0192	0.9901	...	0.9998	1.0001
$x_2^{(k)}$	1.0	-2.00	-1.70	-2.042	-1.9640	-2.0092	...	-2.0003	-1.9999
$x_3^{(k)}$	1.0	0.10	1.12	0.892	1.0270	0.9854	...	0.9997	1.0001

- Critério de parada

$$\|x^{(10)} - x^{(9)}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 1.0001 \\ -1.9999 \\ 1.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9998 \\ -2.0003 \\ 0.9997 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = 1.0 \times 10^{-3} \left\| \begin{bmatrix} 0.3059 \\ 0.3710 \\ 0.4456 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \Rightarrow \|x^{(10)} - x^{(9)}\|_{\infty} < 10^{-3}$$

O Método de Jacobi

Equação geral e formulação matricial

- O método iterativo de Jacobi para $Ax = b$; com $a_{ii} \neq 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ consiste em obter

$$x_i^{(k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(-\frac{a_{ij}x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad p/ i = 1, 2, \dots, n$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- A matriz A pode ser dividida em $A = D - L - U$, como segue:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{[D]} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{[L]} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{[U]}$$

O Método de Jacobi

□ Equação geral e formulação matricial (cont.)

➤ A equação $Ax = b$ ou $(D - L - U)x = b$ é então transformada em

$$Dx = (L + U)x + b$$

➤ Se $a_{ii} \neq 0$; $i = 1, 2, \dots, n$ existe D^{-1} e, então, pode-se escrever

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$



$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$

onde

$$T = D^{-1}(L + U) \text{ e}$$

$$c = D^{-1}b$$

O Método de Gauss-Seidel

❑ Elementos básicos

- Representa a busca de melhor eficiência e desempenho, em relação ao método de Jacobi
- Utiliza, no momento do cálculo de cada componente $x_i^{(k)}$, todas as componentes $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$, já determinadas, as quais, na maioria das vezes, representam melhores aproximações do que $x_1^{(k-1)}, \dots, x_{i-1}^{(k-1)}$
- A técnica é denominada de método iterativo de Gauss-Seidel e descrita genericamente pela equação abaixo

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} x_j^{(k-1)}) + b_i}{a_{ii}}, \quad \text{p/ } i = 1, 2, \dots, n$$

O Método de Gauss-Seidel

Exemplo

➤ Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases},$$

cuja solução é:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

➤ Aplicando-se a equação geral do método de Gauss-Seidel, obtém-se

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = - (2/10)x_2^{(k-1)} - (1/10)x_3^{(k-1)} + (7/10) \\ x_2^{(k)} = - (1/5)x_1^{(k)} - (1/5)x_3^{(k-1)} - (8/5) \\ x_3^{(k)} = - (2/10)x_1^{(k)} - (3/10)x_2^{(k)} + (6/10) \end{cases}$$

O Método de Gauss-Seidel

Exemplo (cont.)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k)} = - (2/10)x_2^{(k-1)} - (1/10)x_3^{(k-1)} + (7/10) \\ x_2^{(k)} = - (1/5)x_1^{(k)} - (1/5)x_3^{(k-1)} - (8/5) \\ x_3^{(k)} = - (2/10)x_1^{(k)} - (3/10)x_2^{(k)} + (6/10) \end{array} \right\}$$

➤ Realizando o processo iterativo para $x^{(0)} = (1,1,1)^t$, obtém-se:

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	1.0	0.400	0.9676	1.0011	1.0004	1.0000
$x_2^{(k)}$	1.0	-1.88	-2.0021	-2.0021	-2.0002	-2.0000
$x_3^{(k)}$	1.0	1.084	1.0096	1.004	1.0000	1.0000

➤ O critério de parada utilizado é dado por:

$$\|x^{(5)} - x^{(4)}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 1.0000 \\ -2.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0004 \\ -2.0002 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = 1.0 \times 10^{-3} \left\| \begin{bmatrix} 0.3503 \\ 0.1597 \\ 0.0221 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \Rightarrow \|x^{(5)} - x^{(4)}\|_{\infty} < 10^{-3}$$

O Método de Gauss-Seidel

❑ Formulação matricial

➤ Na forma matricial, a equação geral do método de G-S é descrita por:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$[D]$
 $[L]$
 $[x]^{(k)}$
 $[U]$
 $[x]^{(k-1)}$
 $[b]$

➤ Portanto, na forma compacta, tem-se:

$$(D - L)x^{(k)} = Ux^{(k-1)} + b$$

➤ Se existe $(D - L)^{-1}$, então:

$$x^{(k)} = (D - L)^{-1} U x^{(k-1)} + (D - L)^{-1} b$$



$$x^{(k)} = T x^{(k-1)} + c$$

onde: $T = (D - L)^{-1} U$ e

$$c = (D - L)^{-1} b$$

Note que:

$$\det(D - L) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

O Método de Gauss-Seidel

Formulação matricial (Exemplo)

➤ Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

➤ Aplicando-se a equação geral $x = Tx + c$, obtém-se:

$$T = (D - L)^{-1}U = \left(\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.2 & -0.10 \\ 0 & 0.04 & -0.18 \\ 0 & 0.028 & 0.074 \end{bmatrix}$$

➤ Autovalores de T

$$\lambda_1 = 0.0, \quad \lambda_2 = 0.057 + 0.0689i, \quad \lambda_3 = 0.057 - 0.0689i$$



$$\rho(T) = 0.0894 < 1.$$

Note a redução do raio espectral em relação ao método de Jacobi

Método de Jacobi e Gauss-Seidel

□ Comentários

- Se a matriz de coeficientes do sistema $Ax = b$ for de diagonal estritamente dominante, então, para qualquer vetor de coeficientes b e para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$, ambos os métodos, Jacobi e Gauss-Seidel, convergem para a solução única de $Ax = b$
- Em geral, o método de Gauss-Seidel apresenta desempenho superior ao método de Jacobi; porém, há sistemas lineares em que o método de Jacobi converge e o método de Gauss-Seidel não converge
- A formulação matricial $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$ é comum aos dois métodos, porém a matriz T e o vetor c são distintos para cada método

Exercícios Sugeridos

1. Find the first two iterations of the Jacobi method for the following linear systems, using $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

$$\begin{array}{lcl} \text{(a)} & 3x_1 & -x_2 + x_3 = 1, \\ & 3x_1 & + 6x_2 + 2x_3 = 0, \\ & 3x_1 & + 3x_2 + 7x_3 = 4. \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \text{(b)} & 10x_1 & -x_2 = 9, \\ & -x_1 & + 10x_2 - 2x_3 = 7, \\ & & -2x_2 + 10x_3 = 6. \end{array}$$

2. Repeat Exercise 1 using the Gauss-Seidel method.
3. Use the Jacobi method to solve the linear systems in Exercise 1, with $TOL = 10^{-3}$ in the l_∞ norm.
4. Repeat Exercise 3 using the Gauss-Seidel method.

O método SOR

□ Aspectos gerais

- O método SOR é uma técnica mais recente que os métodos Jacobi e Gauss-Seidel
- Utiliza o conceito de relaxação no método de Gauss-Seidel, através do uso de um fator de escala ω em cada iteração, para alterar a velocidade de convergência do processo de resolução

O método SOR

❑ Formulação matemática

- O método SOR é uma técnica iterativa para o cálculo de aproximações $x^{(k)}$; $k = 1, 2, \dots$, em um processo descrito por $x^{(k)} = g(x^{(k-1)})$, obtido a partir de um sistema do tipo $Ax = b$
- A equação geral do método SOR é dado por

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \omega \cdot \left[g(x^{(k-1)}) - x^{(k-1)} \right]$$

$\omega = 1 \rightarrow$ método de Gauss – Seidel

$0 < \omega < 1$: método de sub-relaxação

$1 < \omega$: método de sobre-relaxação

- Usando-se os coeficientes do sistema $Ax = b$, resulta

$$x_i^{(k)} = (1 - \omega) x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} x_j^{(k-1)}) \right],$$

p/ $i = 1, 2, \dots, n$

O método SOR

□ Formulação matricial

- A equação geral anterior pode ser reescrita na seguinte forma

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij}x_j^{(k)}) = (1 - \omega) a_{ii}x_i^{(k-1)} - \omega \sum_{j=i+1}^n (a_{ij}x_j^{(k-1)}) + \omega b_i$$

p/ $i = 1, 2, \dots, n$

- Assim, na forma matricial compacta, tem-se

$$(D - \omega L)x^{(k)} = [(1 - \omega)D + \omega U]x^{(k-1)} + \omega b$$

- Se existe $(D - \omega L)^{-1}$, então

$$x^{(k)} = (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega)D + \omega U]x^{(k-1)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b$$



$$x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$$

O método SOR

□ Condições de convergência

- Se a matriz A for positiva-definida e $0 < \omega < 2$, então o método SOR converge para qualquer escolha de condição inicial $x^{(0)}$.

□ Exemplo

- Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

cuja solução é:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

- Resolva para $x^{(0)} = (1,1,1)^t$ usando GS e SOR com $\omega = 1.25$.

GS:

$$x^{(k)} = (D - L)^{-1} U x^{(k-1)} + (D - L)^{-1} b$$

SOR:

$$x^{(k)} = (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega) D + \omega U] x^{(k-1)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b$$

O método SOR

Matrizes do sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto

GS:

$$T_g = (D - L)^{-1}U$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ 0 & 0.5625 & 0.25 \\ 0 & 0.1406 & 0.0625 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T_g) = 0.625$$

SOR:

$$T_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$$

$$T = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.9375 & 0 \\ 0.2344 & 0.6289 & 0.3125 \\ 0.0732 & 0.1965 & -0.1523 \end{bmatrix}$$

$$\rho(T_\omega) = 0.25$$

O método SOR

□ Resultados:

➤ Usando Gauss-Seidel

$$x^{(k)} = (D - L)^{-1} U x^{(k-1)} + (D - L)^{-1} b$$

k	0	1	2	3	...	7
$x_1^{(k)}$	1.0	5.2500	3.1406	3.0879	...	3.0134
$x_2^{(k)}$	1.0	3.8125	3.8828	3.9267	...	3.9888
$x_3^{(k)}$	1.0	-5.0487	-5.0293	-5.0183	...	-5.0028

Ordem de precisão:
 10^{-6} p/34 iterações

➤ Usando SOR

$$x^{(k)} = (D - \omega L)^{-1} [(1 - \omega) D + \omega U] x^{(k-1)} + \omega (D - \omega L)^{-1} b$$

k	0	1	2	3	...	7
$x_1^{(k)}$	1.0	6.3125	2.6223	3.1333	...	3.00005
$x_2^{(k)}$	1.0	3.5195	3.9585	4.0103	...	4.00026
$x_3^{(k)}$	1.0	-6.6501	-4.6004	-5.0967	...	-5.0003

Ordem de precisão:
 10^{-6} p/14 iterações

O método SOR

❑ Aplicação para matrizes tri-diagonais

- Se A for uma matriz tri-diagonal, então $\rho(T_g) = [\rho(T_j)]^2 < 1$, e a escolha ótima de ω para o método SOR é:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - [\rho(T_j)]^2}} \quad \Rightarrow \quad \rho(T_\omega) = \omega - 1$$

❑ Comentários

- Métodos de sub-relaxação $0 < \omega < 1$
 - ➡ Usados para se obter convergência em alguns sistemas que não são convergentes pelo método de Gauss-Seidel.
- Métodos de sobre-relaxação $1 < \omega$
 - ➡ Usados para acelerar a convergência em sistemas que são convergentes pelo método de Gauss-Seidel.

Exercícios Sugeridos

1. Find the first two iterations of the SOR method with $\omega = 1.1$ for the following linear systems, using $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

$$\begin{array}{lcl} \text{(a)} & 3x_1 & -x_2 + x_3 = 1, \\ & 3x_1 & + 6x_2 + 2x_3 = 0, \\ & 3x_1 & + 3x_2 + 7x_3 = 4. \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \text{(b)} & 10x_1 & -x_2 = 9, \\ & -x_1 & + 10x_2 - 2x_3 = 7, \\ & & -2x_2 + 10x_3 = 6. \end{array}$$

2. Use the SOR method with $\omega = 1.2$ to solve the linear systems in Exercise 1 with a tolerance $TOL = 10^{-3}$ in the l_∞ norm.

O método do Gradiente Conjugado

❑ Aspectos gerais

- O método gradiente conjugado (GC) foi originalmente desenvolvido em 1952, por Hestenes e Stiefel, como um método direto, mas apresentou desempenho inferior ao método da eliminação gaussiana
- Posteriormente, verificou-se que o GC é muito útil para sistemas de grande porte e esparsos, que surgem na resolução de problemas de valores de contorno descritos por equações diferenciais ordinárias e na resolução de equações diferenciais parciais
- O método é aplicável para sistemas com matriz de coeficientes simétrica e positiva definida

O método do Gradiente Conjugado

□ Representação de produto interno

- Utiliza-se a seguinte representação para produto interno de vetores

$$\langle x, y \rangle = x^t y$$

□ Propriedades do produto interno

- Para quaisquer vetores x, y e z e qualquer número real α , tem-se

- (i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- (iii) $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$
- (iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$
- (v) $\langle x, x \rangle = 0$ se e somente se $x = 0$

O método do Gradiente Conjugado

□ Outras propriedades envolvendo o produto interno

➤ Para A positiva definida, tem-se

$$\langle x, Ax \rangle = x^t Ax > 0, \text{ se } x \neq 0$$

➤ Para A positiva definida e simétrica, tem-se

$$x^t Ay = x^t A^t y = (Ax)^t y \quad \Rightarrow \quad \langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$$

O método do Gradiente Conjugado

□ Formulação básica

➤ Para $A_{(n \times n)}$ simétrica e positiva definida, tem-se

$$Ax = b \Leftrightarrow \min g(x) = \langle x, Ax \rangle - 2\langle x, b \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \min g(x) = x^t Ax - 2x^t b$$

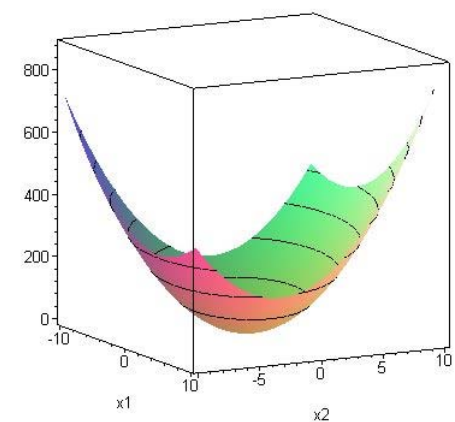
□ Ilustração para $A_{(2 \times 2)}$

➤ Função $g(x) = g(x_1, x_2)$

$$g(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$



$$g(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 - 2x_1b_1 - 2x_2b_2$$



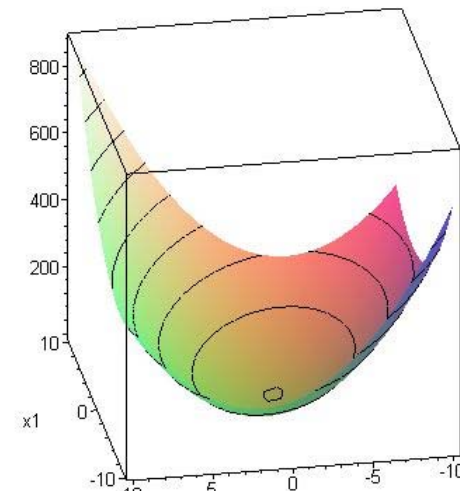
O método do Gradiente Conjugado

❑ Ilustração para $A_{(2 \times 2)}$ (cont.)

➤ Cálculo do gradiente de $g(x)$, $\nabla g(x)$

$$g(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 - 2x_1b_1 - 2x_2b_2$$

$$\nabla g(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_{11}x_1 + (a_{12} + a_{21})x_2 - 2b_1 \\ (a_{12} + a_{21})x_1 + 2a_{22}x_2 - 2b_2 \end{bmatrix}$$



$$\min g(x) \Leftrightarrow \nabla g(x) = 0$$

➤ Portanto, para A simétrica, $a_{12} = a_{21}$, tem-se

$$\nabla g(x) = 2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \nabla g(x) = 2(Ax - b) = -2r$$

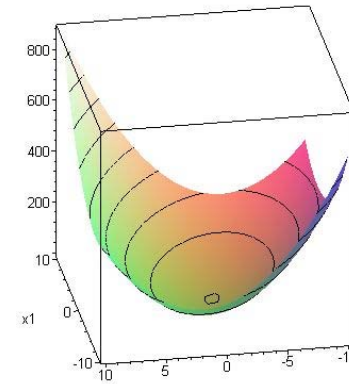
onde: $r = b - Ax$
é o vetor resíduo

Note que $(x_1^*, x_2^*)^t \in \nabla g(x) = 0$ é a solução do sistema $Ax = b$, sendo o resultado válido também para $A(n \times n)$.

O método do Gradiente Conjugado

❑ Princípio geral

- Escolher uma aproximação inicial $x^{(0)}$
- Escolher uma direção em que $g(x)$ diminui
- Escolher um passo t tal que $g'(x) < g(x^{(0)})$



❑ Equação geral: $x^{(k)} = x^{(k-1)} + t_k v^{(k)}; \quad k = 1, 2, \dots$

- Note que t_k é um escalar que define a distância do deslocamento na direção $v^{(k)}$
- A direção $-\nabla g(x)$ é a direção de maior decréscimo de $g(x)$, neste caso equivalente a direção do vetor de resíduos r
- No método GC toma-se como primeira direção de busca a direção do vetor de resíduos, calculado a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$

$$v^{(1)} = r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$

- Todas as direções subsequentes do processo iterativo devem ser ortogonais em relação a matriz A .



$$\langle v^{(i)}, Av^{(j)} \rangle = 0, \quad \text{se } i \neq j$$

O método do Gradiente Conjugado

□ Condição de minimização

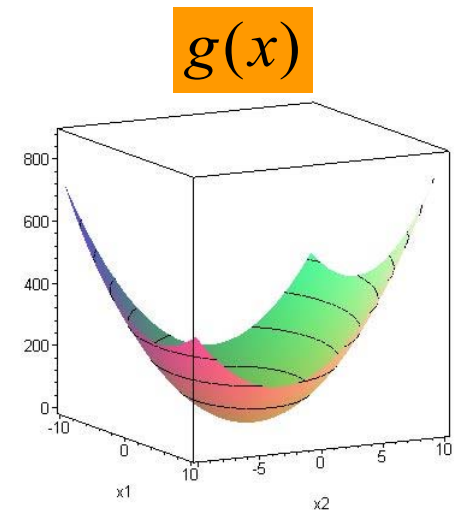
- O vetor x^* é uma solução para o sistema linear $Ax = b$, A positiva definida, se e somente se x^* minimiza

$$g(x) = \langle x, Ax \rangle - 2\langle x, b \rangle$$

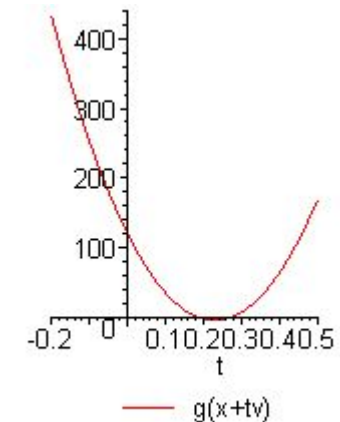
- Para $x^{(k-1)}$ e $v^{(k)} \neq 0$; $k = 1, 2, \dots$ a função $g(x^{(k-1)} + t v^{(k)})$ tem seu mínimo quando

$$t_k = \langle v^{(k)}, b - Ax^{(k-1)} \rangle / \langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle$$

- Note que t_k define um mínimo na direção $v^{(k)}$, sendo o mínimo de $g(x)$ obtido com a repetição do processo em novas direções, ortogonais em relação a matriz A



$g(x^{(k-1)} + t v^{(k)})$



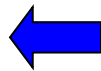
O método Gradiente Conjugado

□ Sumário de Fórmulas

➤ Resíduo e direção inicial: $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ e $v^{(1)} = r^{(0)}$

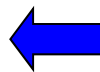
➤ Fórmulas do processo iterativo (para $k = 1, 2, \dots, n$)

$$t_k = \frac{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle}$$



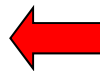
mínimo na direção $v^{(k)}$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + t_k v^{(k)}$$



nova aproximação para x^*

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - t_k Av^{(k)}$$



resíduo atualizado. Se $\|r^{(k)}\| < \varepsilon$, pare.
Faça $x^{(*)} = x^{(k)}$

$$s_k = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k-1)}, r^{(k-1)} \rangle}$$

$$v^{(k+1)} = r^{(k)} + s_k v^{(k)}$$



direção conjugada $\langle v^{(k+1)}, Av^{(k)} \rangle = 0$

O método do GC pré-condicionado

□ Aspectos gerais

- Se a matriz A for mal-condicionada, o método gradiente conjugado (GC) torna-se altamente suscetível aos erros de arredondamento
- O método GC é geralmente aplicado como um método iterativo para sistemas bem condicionados e, nestes casos, obtém-se uma aproximação aceitável para a solução em cerca de \sqrt{n} passos
- A aplicação do método GC a um sistema melhor condicionado é feita usando uma matriz C não-singular, de pré-condicionamento, tal que

$$\tilde{A} = C^{-1}A(C^{-1})^t$$

- Assim, aplica-se o método GC ao sistema

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad , \quad \text{onde: } \tilde{x} = C^t x \quad \text{e} \quad \tilde{b} = C^{-1}b$$

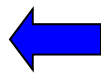
- A solução é obtida por $x = C^{-t}\tilde{x}$

O método do GC pré-condicionado

□ Sumário de Fórmulas nas variáveis originais

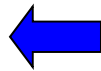
- Resíduo e direção inicial: $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $w^{(0)} = C^{-1}r^{(0)}$, $v^{(1)} = C^{-t}w^{(0)}$
- Fórmulas do processo iterativo (para $k = 1, 2, \dots, n$)

$$\tilde{t}_k = \frac{\langle w^{(k-1)}, w^{(k-1)} \rangle}{\langle v^{(k)}, Av^{(k)} \rangle}$$



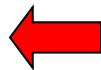
mínimo na direção $v^{(k)}$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + \tilde{t}_k v^{(k)}$$



nova aproximação para x^*

$$r^{(k)} = r^{(k-1)} - \tilde{t}_k Av^{(k)}$$

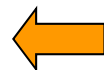


resíduo atualizado. Se $\|r^{(k)}\| < \varepsilon$, pare.
Faça $x^{(*)} = x^{(k)}$

$$w^{(k)} = C^{-1}r^{(k)}$$

$$\tilde{s}_k = \frac{\langle w^{(k)}, w^{(k)} \rangle}{\langle w^{(k-1)}, w^{(k-1)} \rangle}$$

$$v^{(k+1)} = C^{-t}w^{(k)} + \tilde{s}_k v^{(k)}$$



direção conjugada : $\langle v^{(k+1)}, Av^{(k)} \rangle = 0$

O método do GC pré-condicionado

❑ Exemplo

➤ Considere o sistema:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

cuja solução é

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

➤ Considere ainda $C = C^{-1} = I$ e $x^{(0)} = (0,0,0)^t$.

➤ Então, obteve-se o seguinte resultado

k	0	1	2	3
$x_1^{(k)}$	0	3.5258	2.8580	2.9999
$x_2^{(k)}$	0	4.4072	4.1490	4.0000
$x_3^{(k)}$	0	-3.5258	-4.9542	-4.9999

k	0	1	2	3
$r_1^{(k)}$	24	-3.3247	0.1210	0.36×10^{-8}
$r_2^{(k)}$	30	-1.7320	-0.1241	0.39×10^{-8}
$r_3^{(k)}$	-24	-5.4897	-0.0341	-0.14×10^{-8}

Lembre-se que foram necessárias 34 e 14 iterações para resolver o mesmo sistema por G-S e SOR, respectivamente.

O método do GC pré-condicionado

❑ Comentários

- O método GC pré-condicionado é frequentemente usado na resolução de sistemas lineares de grande porte e matrizes esparsas
- Esses sistemas são comuns em problemas de valores de contorno descritos por equações diferenciais ordinárias
- Quanto maior a dimensão do sistema maiores são os benefícios, em geral, da opção pelo método GC, visto ser significativamente reduzido o número de interações necessárias, comparando-se a outros métodos
- É comum o uso da matriz de pré-condicionamento C aproximadamente igual a matriz L da fatoração de Choleski $LL^t = A$
- Geralmente, os elementos numericamente pequenos de A são ignorados no cálculo da matriz de pré-condicionamento $C = L$ e, assim, denominada de fatoração incompleta de Choleski.

$$LL^t \approx A \quad \Rightarrow \quad C^{-t}C^{-1} \approx A^{-1}$$

O método do GC pré-condicionado

□ Exemplo de aplicação

➤ Considere o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 60 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 700 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix}$$

cuja solução é :

$$x^* = \begin{bmatrix} 7.85971307100 \\ 0.42292640820 \\ -0.07359223906 \\ -0.54064301640 \\ 0.01062616286 \end{bmatrix}$$

➤ Características da matriz A

✓ **simétrica**

✓ **positiva definida**

✓ **mal-condicionada** ($\kappa_{\infty}(A) = 1396.71$)

O método GC pré-condicionado

Exemplo de aplicação (cont.)

➤ Comparação do desempenho de métodos

Method	Number of Iterations	$\mathbf{x}^{(k)}$	$\ \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\ _\infty$
Jacobi	49	$(7.86277141, 0.42320802, -0.07348669, -0.53975964, 0.01062847)^t$	0.00305834
Gauss-Seidel	15	$(7.83525748, 0.42257868, -0.07319124, -0.53753055, 0.01060903)^t$	0.02445559
SOR($\omega = 1.25$)	7	$(7.85152706, 0.42277371, -0.07348303, -0.53978369, 0.01062286)^t$	0.00818607
Conjugate Gradient	5	$(7.85341523, 0.42298677, -0.07347963, -0.53987920, 0.008628916)^t$	0.00629785
Conjugate Gradient (Preconditioned)	4	$(7.85968827, 0.42288329, -0.07359878, -0.54063200, 0.01064344)^t$	0.00009312


$$C = D^{1/2}$$

Maior precisão e menor
número de iterações

Exercícios Sugeridos

The linear system

$$\begin{aligned}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= \frac{5}{21}, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= \frac{11}{84}\end{aligned}$$

has solution $(x_1, x_2)^t = (1/6, 1/7)^t$.

- (a) Solve the linear system using Gaussian elimination with two-digit rounding arithmetic.
- (b) Solve the linear system using the conjugate gradient method ($C = C^{-1} = I$) with two-digit rounding arithmetic.
- (c) Which method gives the better answer?
- (d) Choose $C^{-1} = D^{-1/2}$. Does this choice improve the conjugate gradient method?

Resolução de SL por métodos iterativos

□ Comentários Finais

- Os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel exigem a especificação de uma aproximação inicial $x^{(0)}$ e geram uma sequência de vetores $x^{(k)}$ usando a equação da forma $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$
- A condição suficiente para a convergência desses métodos é que o raio espectral da matriz de iteração $\rho(T) < 1$, e quanto menor for o raio espectral mais rápida será a convergência.
- O método SOR é uma alternativa para acelerar a convergência do método de Gauss-Seidel usando-se um fator de escala $1 < \omega < 2$.
- O método gradiente conjugado é aplicável a sistemas com matrizes simétricas, positivas definidas, esparsas e de grande porte, que surgem normalmente em problemas de valores de contorno e equações diferenciais parciais.
- Na maioria das aplicações do método GC deve ser utilizada uma matriz de pré-condicionamento