Nombre: Pedro Ramos Suárez.

1. **Sea Y un vector aleatorio definido por**

$$\mathbf{Y} = \alpha + \mathbf{DX} + \mathbf{Z}$$

con α un vector $\mathbf{p \times 1}$, D una matriz $\mathbf{p \times r}$, X un vector aleatorio con distribución $\mathbf{N_r(0, \Sigma_X)}$ ($\mathbf{\Sigma_X}$ no singular) y Z un vector aleatorio con distribución $\mathbf{N_p(0, \sigma^2 I_p)}$, siendo X y Z independientes. Entonces:

a) **Obtener la distribución de Y.**

Sea $W = \alpha + DX$. Entonces la distribución de W es:

$$W \sim N_p(\alpha + D0, D\Sigma_X D') \equiv N_p(\alpha, D\Sigma_X D')$$

Aplicando el teorema de Lévy-Cramér obtenemos:

$$Y = W + Z \sim N_p(\alpha + 0, D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p) \equiv N_p(\alpha, D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p)$$

Otra forma es a través de la función característica:

$$\Phi_Y(t) = E[e^{it'(\alpha+DX+Z)}] = E[e^{it'(\alpha+DX)}e^{it'Z}] = E[e^{it'(\alpha+DX)}]E[e^{it'Z}] =$$
$$= e^{it'\alpha}E[e^{it'DX}]E[e^{it'Z}] = e^{it'\alpha}\Phi_X(D't)\Phi_Z(t)$$

donde

$$\Phi_X(D't) = e^{-\frac{1}{2}t'D\Sigma_X D't}$$
$$\Phi_Z(t) = e^{-\frac{1}{2}t'\sigma^2 I_p t}$$

Por lo que:

$$\Phi_Y(t) = e^{it'\alpha}\Phi_X(D't)\Phi_Z(t) = e^{it'\alpha}e^{-\frac{1}{2}t'D\Sigma_X D't}e^{-\frac{1}{2}t'\sigma^2 I_p t} =$$
$$= e^{it'\alpha - \frac{1}{2}t'(D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p)t'}$$

Y por la unicidad de la función característica tenemos:

$$Y \sim N_p(\alpha, D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p)$$

b) **Obtener la distribución del vector conjunto $\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$.**

Tenemos:

$$\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + DX + Z \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W + Z \\ X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde:

$$\begin{pmatrix} V \\ X \end{pmatrix} \sim N_{p+r}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D\Sigma_X D' & D\Sigma_X \\ \Sigma_X D' & \Sigma_X \end{pmatrix}\right)$$
$$\begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix} \sim N_{p+r}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma^2 I_p & 0_{p\times r} \\ 0_{r\times p} & 0_{r\times r} \end{pmatrix}\right)$$

Así que:

$$\begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} \sim N_{p+r}\left(\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p & D\Sigma_X \\ \Sigma_X D' & \Sigma_X \end{pmatrix}\right)$$

c) Probar que $\mathbf{E[X \mid Y] = \Sigma_X D' \Sigma_X^{-1} (Y - \alpha)}$.

Tenemos el siguiente resultado:
Resultado: Sea (como en el Resultado 2)

$$X \sim N_p(\mu, \Sigma) \qquad (\Sigma > 0)$$

con el particionamiento

$$X = \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{(11)} & \Sigma_{(12)} \\ \Sigma_{(21)} & \Sigma_{(22)} \end{pmatrix}$$

Entonces, se tiene que la distribución condicionada de $X_{(2)}$ dado $X_{(1)} = x_{(1)}$ es una DNM, de la forma

$$N_{p-q}(\mu_{(2)} + \Sigma_{(21)}\Sigma_{(11)}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)}), \Sigma_{(22)} - \Sigma_{(21)}\Sigma_{(11)}^{-1}\Sigma_{(12)})$$

Considerando:

$$K = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}$$

$$\mu_K = \begin{pmatrix} \mu_Y \\ \mu_X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_K = \begin{pmatrix} D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p & D\Sigma_X \\ \Sigma_X D' & \Sigma_X \end{pmatrix}$$

Tenemos:

$$K \sim N_r(0 + \Sigma_X D'(D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p)^{-1}(Y - \alpha), \Sigma_X - \Sigma_X D'(D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p) D\Sigma_X) \equiv$$

$$\equiv (\Sigma_X D' \Sigma_Y^{-1}(Y - \alpha), \Sigma_X - \Sigma_X D' \Sigma_Y^{-1} D\Sigma_X)$$

Así que:

$$E[X \mid Y] = \Sigma_X D' \Sigma_Y^{-1}(Y - \alpha)$$

d) Probar que $\mathbf{Y \mid X}$ tiene distribución $\mathbf{N_p(\alpha + DX, \sigma^2 I_p)}$.

Utilizamos el resultado del ejercicio anterior considerando:

$$L = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\mu_L = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_L = \begin{pmatrix} \Sigma_X & \Sigma_X D' \\ D\Sigma_X & D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p \end{pmatrix}$$

y tenemos:

$$L \sim N_p(\alpha + D\Sigma_X \Sigma_X^{-1}(X - 0), D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p - D\Sigma_X \Sigma_X^{-1} \Sigma_X D') \equiv N_p(\alpha + DX, \sigma^2 I_p)$$

2. En relación con el ejercicio anterior, probar que los resultados obtenidos siguen siendo válidos en el caso en que sea $\mathbf{\Sigma_X}$ singular, con la salvedad de que en el apartado *(d)* se tendrá que la distribución de $\mathbf{Y} \mid \mathbf{X}$ es $\mathbf{N_p}(\alpha + \mathbf{D\Sigma_X\Sigma_X^-X}, \sigma^2\mathbf{I_p})$, siendo $\mathbf{\Sigma_X^-}$ una inversa generalizada de la matriz Σ_X (es decir, alguna matriz tal que $\mathbf{\Sigma_X\Sigma_X^-\Sigma_X} = \mathbf{\Sigma_X}$). [Para ello, tener en cuenta que el resultado sobre condicionamiento en la distribución normal multivariante se cumple en el caso de que la matriz Σ pueda ser singular, reemplazando $\mathbf{\Sigma_{(11)}^{-1}}$ por $\mathbf{\Sigma_{(11)}^{-}}$ (análogamente, $\mathbf{\Sigma_{(22)}^{-1}}$ por $\mathbf{\Sigma_{(22)}^{-}}$)].

En los apartados *(a)* y *(b)* no hemos usado la condición de que Σ_X fuera no singular, así que seguimos teniendo los mismos resultados.

En el apartado *(c)* teníamos:

$$K \sim N_r(0 + \Sigma_X D'(D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p)^{-1}(Y - \alpha), \Sigma_X - \Sigma_X D'(D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p)D\Sigma_X) \equiv$$

$$\equiv (\Sigma_X D'\Sigma_Y^-(Y - \alpha), \Sigma_X - \Sigma_X D'\Sigma_Y^- D\Sigma_X)$$

Por lo que:

$$E[X \mid Y] = \Sigma_X D'\Sigma_Y^-(Y - \alpha)$$

Nos queda ver que $\Sigma_Y^- = \Sigma_Y^{-1}$, es decir, que es definida positiva, para lo cual:

$$x'\Sigma_Y x = x'(D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p)x = x'D\Sigma_X D'x + x'\sigma^2 I_p x = x'D\Sigma_X D'x + x' + \sigma^2||x||$$

Como Σ_X es definida no negativa, tenemos que

$$x'D\Sigma_X D'x \geq 0$$

por lo que

$$x'D\Sigma_X D'x + x' + \sigma^2||x|| > 0$$

y, por tanto, Σ_Y es definida positiva, así que tenemos:

$$E[X \mid Y] = \Sigma^X D'\Sigma_Y^{-1}(Y - \alpha)$$

En el apartado *(d)* teníamos:

$$L \sim N_p(\alpha + D\Sigma_X\Sigma_X^-(X - 0), D\Sigma_X D' + \sigma^2 I_p - D\Sigma_X\Sigma_X^-\Sigma_X D') \equiv (\alpha + D\Sigma_X\Sigma_X^- X, \sigma^2 I_p)$$

3. Sea $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_p}(\mu, \mathbf{\Sigma})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbf{p}}$. Probar que:

$$\mathbf{E}[(\alpha'(\mathbf{X}-\mu))^{\mathbf{k}}] = \begin{cases} \frac{\mathbf{(2m)!}}{\mathbf{2^m m!}}(\alpha'\mathbf{\Sigma}\alpha)^{\mathbf{m}}, & \textbf{si k = 2m (par)} \\ \mathbf{0}, & \textbf{si k = 2m − 1 (impar)} \end{cases}$$

[Resultado auxiliar: Sea $\mathbf{X} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^{\mathbf{2}})$. Entonces, los momentos de X vienen dados por:

$$\mathbf{E}[\mathbf{X}^{\mathbf{k}}] = \begin{cases} \sigma^{\mathbf{k}}(\mathbf{k}-\mathbf{1})!!, & \textbf{si k es par} \\ \mathbf{0}, & \textbf{si k es impar} \end{cases}$$

siendo n!! el factorial doble de n, definido por el producto de todos los enteros 1 y n con la misma paridad ('par' o 'impar') que n].

Sea $Y = \alpha'(X-\mu)$. Entonces:

$$E[Y] = E[\alpha'(X-\mu)] = \alpha'(E[X]-\mu) = \alpha'(\mu-\mu) = 0$$

$$Var[Y] = Var[\alpha'(X-\mu)]$$

Usando que $Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - E^2[X]$ tenemos:

$$Var[Y] = Var[\alpha'(X-\mu)] = E[(\alpha'(X-\mu))^2] - E[\alpha'(X-\mu)]^2 =$$

$$= E[(\alpha'(X-\mu))^2] - 0 = E[\alpha'(X-\mu)(X-\mu)'\alpha] = \alpha'\Sigma_X\alpha$$

Finalmente, aplicando la sugerencia:

$$E(\alpha'(X-\mu))^k = \begin{cases} (\alpha'\Sigma\alpha)^{\frac{k}{2}}(k-1)!! & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Llamando $m = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2m$ tenemos:

$$(k-1)!! = (2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!}$$

Así que:

$$E(\alpha'(X-\mu))^k = \begin{cases} \frac{(2m)!}{2^m m!}(\alpha'\Sigma\alpha)^m & \text{si } k = 2m \\ 0 & \text{si } k = 2m-1 \end{cases}$$

Nota:

$$(2m-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2m-1) = \frac{(2m-1)!}{2^{m-1}(m-1)!} = \frac{\frac{2m!}{2m}}{2^{m-1}\frac{m!}{m}} = \frac{2m!}{2^m m!}$$

4. Sea $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_p}(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, con rango$(\mathbf{\Sigma}) = \mathbf{k}$. Sea la descomposición espectral de $\mathbf{\Sigma}$ dada por $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{H\Lambda H'}$, con el particionamiento $\mathbf{H} = (\mathbf{H_1} \mid \mathbf{H_2})$, $\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, siendo $\mathbf{D} = \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, con $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$. Probar que $\mathbf{\Sigma^+} = \mathbf{H_1 D^{-1} H_1'}$ es la matriz inversa de Moore-Penrose de $\mathbf{\Sigma}$, es decir, satisface las condiciones:

Para todos los apartados vamos a usar:

$$\Sigma = H\Lambda H' = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1' \\ H_2' \end{pmatrix} = H_1 D H_1'$$

Y que, como H_1 es ortogonal, $H_1 H_1' = H_1' H_1 = I$.

Con esto podemos ver que:

$$\Sigma^+ \Sigma = (H_1 D^{-1} H_1')(H_1 D H_1') = I_k$$

y

$$\Sigma \Sigma^+ = (H_1 D H_1')(H_1 D^{-1} H_1') = I_k$$

a) $\mathbf{\Sigma\Sigma^+\Sigma} = \mathbf{\Sigma}$.

Tenemos:

$$\Sigma\Sigma^+\Sigma = I_r \Sigma = \Sigma$$

b) $\mathbf{\Sigma^+\Sigma\Sigma^+} = \mathbf{\Sigma^+}$.

Tenemos:

$$\Sigma^+\Sigma\Sigma^+ = I_r \Sigma^+ = \Sigma^+$$

c) $(\mathbf{\Sigma^+\Sigma})' = \mathbf{\Sigma^+\Sigma}$.

Tenemos:

$$(\Sigma + \Sigma)' = (I_r)' = I_r = \Sigma^+\Sigma$$

d) $(\mathbf{\Sigma\Sigma^+})' = \mathbf{\Sigma\Sigma^+}$.

Tenemos:

$$(\Sigma\Sigma^+)' = (I_r)' = I_r = \Sigma\Sigma^+$$

5. Sea $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{\mathbf{ij}})$ una matriz $\mathbf{3 \times 3}$ simétrica tal que:

$$\sigma_{\mathbf{11}} = \sigma_{\mathbf{22}} = \sigma_{\mathbf{33}} = \mathbf{1}, \qquad \sigma_{\mathbf{12}} = \mathbf{0}$$

Probar que, al menos para $(\sigma_{\mathbf{13}} + \sigma_{\mathbf{23}}) > \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ no es una matriz definida positiva.

La matriz es:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que Σ es definida positiva si:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ x & y & 1 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow 1 - x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 - y^2$$

Por otro lado, tenemos que

$$\sigma_{13} + \sigma_{23} > \frac{3}{2} \Rightarrow x + y > \frac{3}{2} \Rightarrow x > \frac{3}{2} - y \Rightarrow x^2 > \frac{9}{4} + y^2 - 3y$$

Por lo que tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x^2 > \frac{9}{4} + y^2 - 3y \\ x^2 < 1 - y^2 \end{cases}$$

Es decir:

$$\frac{9}{4} + y^2 - 3y < x^2 < 1 - y^2$$

Pero:

$$f(y) = 1 - y^2 - (\frac{9}{4} + y^2 - 3y) = -\frac{5}{4} - 2y^2 + 3y \Rightarrow f'(y) = -4y + 3 = 0 \iff y = \frac{3}{4}$$

$$f(\frac{3}{4}) = -\frac{5}{4} - 2(\frac{3}{4})^2 + 3(\frac{3}{4}) = -2(\frac{9}{16}) + 1 = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8}$$

Es decir, $1 - y^2 < \frac{9}{4} + y^2 - 3y, \forall y$ y, por lo tanto, el sistema anterior no tiene soluciones. Así que la matriz no puede ser positiva.

6. Sea $\mathbf{Z \sim N_p(0, I_p)}$. Sean $\mathbf{Y_1 = C_1 Z}$ e $\mathbf{Y_2 = C_2 Z}$, con $\mathbf{C_i}$ una matriz $\mathbf{k_i \times p}$, $\mathbf{k_i \leq p}$ $\mathbf{(i = 1, 2)}$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para la independencia de $\mathbf{Y_1}$ e $\mathbf{Y_2}$.

Expresamos el vector $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$ como:

$$Y = CZ$$

con $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, siendo entonces:

$$Y \sim N(0, \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' & C_2' \end{pmatrix}) \equiv N(0, \begin{pmatrix} C_1 C_1' & C_1 C_2' \\ C_2 C_1' & C_2 C_2' \end{pmatrix})$$

Utilizando el siguiente resultado:
Resultado 1: Sea $X = (X_1, \ldots, X_p)'$ un vector aleatorio con DNM no singular,

$$X \sim N_p(\mu, \Sigma) \qquad (\Sigma > 0)$$

Si la matriz Σ es diagonal,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_p^2 \end{pmatrix} = diag(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_p^2)$$

entonces las variables aleatorios componentes del vector, $X_i, i = 1, \ldots, p$, son independientes y tienen un DN univariante (no degenerada),

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \qquad (\sigma_i^2 > 0), \qquad i = 1, \ldots, p$$

Por lo que tendremos la independencia si:

$$C_1 C_2' = C_2 C_1' = 0$$

7. Sea $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N_3}(\mu, \mathbf{\Sigma})$, donde:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{13} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Como:

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 144 > 0$$

la distribución es no singular.

1) Encontrar la distribución de $\mathbf{Z = 2Y_1 - Y_2 + 3Y_3}$.

Como:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

la distribución de Z es:

$$Z \sim N(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mu, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}) \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}) \equiv N(17, 21)$$

2) Encontrar la distribución conjunta de $\mathbf{Z_1 = Y_1 + Y_2 + Y_3}$ y $\mathbf{Z_2 = Y_1 - Y_2 + 2Y_3}$.

Como:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

la distribución de $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$ es:

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \sim N(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mu, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}) \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 29 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix})$$

3) Encontrar la distribución de $\mathbf{Y_2}$.

Como:

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

la distribución de Y_2 es:

$$Y_2 \sim N(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mu, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv N(1, 13)$$

4) Encontrar la distribución conjunta de $\mathbf{Y_1}$ e $\mathbf{Y_3}$.

Como:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

la distribución de $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{pmatrix}$ es:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{pmatrix} \sim N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mu, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix})$$

5) Encontrar la distribución conjunta de $\mathbf{Y_1}$, $\mathbf{Y_3}$ y $\mathbf{\frac{1}{2}(Y_1 + Y_2)}$.

Como:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

la distribución de $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \end{pmatrix}$ es:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2) \end{pmatrix} \sim N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \mu, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & 1 & \frac{21}{4} \end{pmatrix})$$

6) Encontrar un vector Z tal que $\mathbf{Z} = (\mathbf{T}')^{-1}(\mathbf{Y} - \mu) \sim \mathbf{N_3}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, siendo T la matriz correspondiente a la factorización de Cholesky, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{T}'\mathbf{T}$.

La matriz T es:

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Y como $\Sigma = T'T$, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 13 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2+d^2 & bc+de & df \\ bc+de & c^2+e^2 & ef \\ df & ef & f^2 \end{pmatrix}$$

Por lo que tenemos:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Y el Z es:

$$Z = T^{-1}(Y - \mu) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Y_1 - 3 \\ Y_2 - 1 \\ Y_3 - 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-3+Y_1) & \frac{3-Y_1}{6} + \frac{1}{3}(-1+Y_2) & \frac{5}{12}(-3+Y_1) + \frac{1-Y_2}{3} + \frac{1}{2}(-4+Y_3) \end{pmatrix}$$

7) Encontrar un vector Z tal que $\mathbf{Z} = \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{Y} - \mu) \sim \mathbf{N_3}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, siendo $\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}$ la inversa de la matriz correspondiente a la factorización en raíz cuadrada, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$.

8. Sea $\mathbf{Y} \sim \mathbf{N_3}(\mu, \mathbf{\Sigma})$, donde

$$\mu = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de las variables y vectores aleatorios siguientes son independientes?

a) $\mathbf{Y_1}$ e $\mathbf{Y_2}$.

Calculamos $Z = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$$Z \sim N_2(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \equiv N(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix})$$

No son incorreladas, por lo que no son independientes.

b) $\mathbf{Y_1}$ e $\mathbf{Y_3}$.

Calculamos $Z = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{pmatrix}$:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$$Z \sim N_2(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \equiv N(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix})$$

Como la matriz es diagonal, son independientes.

c) $\mathbf{Y_2}$ e $\mathbf{Y_3}$.

Calculamos $Z = \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$:

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$$Z \sim N_2(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \equiv N(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix})$$

Como la matriz es diagonal, son independientes.

d) $(\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2})$ e $\mathbf{Y_3}$.

Calculamos $Z = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$$Z \sim N_2(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix})$$

Como la matriz es diagonal, son independientes.

e) $(\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_3})$ e $\mathbf{Y_2}$.

Calculamos $Z = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ Y_2 \end{pmatrix}$:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}$$

$$Z \sim N_2(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}) \equiv$$

$$\equiv N(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix})$$

No son incorreladas, por lo que no son independientes.

9. Suponer que Y y X son subvectores de dimensiones respectivas $\mathbf{2 \times 1}$ y $\mathbf{3 \times 1}$, con μ y $\boldsymbol{\Sigma}$ conjuntas correspondientemente particionadas según:

$$\mu = \left(\begin{array}{c} \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \\ \hline \mathbf{4} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{5} \end{array}\right), \boldsymbol{\Sigma} = \left(\begin{array}{cc|ccc} \mathbf{14} & \mathbf{-8} & \mathbf{15} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{18} & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} \\ \hline \mathbf{15} & \mathbf{8} & \mathbf{50} & \mathbf{8} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{8} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right)$$

Suponer que $\begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} \sim \mathbf{N_5}(\mu, \boldsymbol{\Sigma})$.

a) Encontrar $\mathbf{E[Y \mid X]}$.

b) Encontrar $\mathbf{Cov(Y \mid X)}$.

Tenemos el siguiente resultado:
Resultado: Sea (como en el Resultado 2)

$$X \sim N_p(\mu, \Sigma) \qquad (\Sigma > 0)$$

con el particionamiento

$$X = \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{(11)} & \Sigma_{(12)} \\ \Sigma_{(21)} & \Sigma_{(22)} \end{pmatrix}$$

Entonces, se tiene que la distribución condicionada de $X_{(2)}$ dado $X_{(1)} = x_{(1)}$ es una DNM, de la forma

$$N_{p-q}(\mu_{(2)} + \Sigma_{(21)}\Sigma_{(11)}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)}), \Sigma_{(22)} - \Sigma_{(21)}\Sigma_{(11)}^{-1}\Sigma_{(12)})$$

Por lo que:

$$E[Y \mid X] = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{16}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -15 \\ \frac{49}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 3X_3 + 15 \\ -2 + \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 - \frac{16}{3}X_3 - \frac{49}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 + 3X_3 \\ -\frac{51}{2} + \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{6}X_2 - \frac{16}{3}X_3 \end{pmatrix}$$

$$Cov(Y \mid X) = \begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 0 & 3 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 15 & 8 \\ 0 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

10. Suponer que las variables aleatorias X e Y tiene función de distribución conjunta

$$\mathbf{F(x,y) = \Phi(x)\Phi(y)[1 + \alpha(1 - \Phi(x))(1 - \Phi(y))]}$$

siendo $|\alpha| \leq 1$ y denotando $\boldsymbol{\Phi}(\cdot)$ la función de distribución normal estándar. Probar que las distribuciones marginales correspondientes a X e Y son normales estándar.

Como $\Phi(x)$ y $\Phi(y)$ son funciones de distribución, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1 \qquad\qquad \lim_{y\to\infty} \Phi(y) = 1$$

Por lo que, tomando límites en el infinito, tenemos:

$$F(X) = \lim_{y\to\infty} F(x,y) = \Phi(x)$$

$$F(Y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y) = \Phi(y)$$

11. Sean $\mathbf{X_1, X_2, \ldots}$ vectores aleatorios independientes tales que $\mathbf{X_i \sim N_m(\mu, \Sigma), i = 1, 2, \ldots}$ y sea

$$\mathbf{S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i}$$

Para $\mathbf{N_1 < N_2}$:

a) **Encontrar la distribución de $\mathbf{(S'_{N_1}, S'_{N_2})'}$.**

b) **Encontrar la distribución condicionada de $\mathbf{S'_{N_1}}$ dada $\mathbf{S'_{N_2}}$.**

Sea $Z = S_{N_2} - S_{N_1}$ y entonces:

$$S_{N_1} \sim N_m(N_1\mu, N_1\Sigma)$$

$$Z \sim N_m((N_2 - N_1)\mu, (N_2 - N_1)\Sigma)$$

Aplicando el resultado sobre normalidad de transformaciones lineales de vectores con DNM tenemos:

$$\begin{pmatrix} S_{N_1} \\ S_{N_2} \end{pmatrix} \sim N_{2m}(\begin{pmatrix} N_1\mu \\ N_2\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} N_1\Sigma, N_1\Sigma \\ N_1\Sigma, N_2\Sigma \end{pmatrix}$$

y usando el siguiente resultado:

Resultado: Sea (como en el Resultado 2)

$$X \sim N_p(\mu, \Sigma) \qquad (\Sigma > 0)$$

con el particionamiento

$$X = \begin{pmatrix} X_{(1)} \\ X_{(2)} \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{(1)} \\ \mu_{(2)} \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{(11)} & \Sigma_{(12)} \\ \Sigma_{(21)} & \Sigma_{(22)} \end{pmatrix}$$

Entonces, se tiene que la distribución condicionada de $X_{(2)}$ dado $X_{(1)} = x_{(1)}$ es una DNM, de la forma

$$N_{p-q}(\mu_{(2)} + \Sigma_{(21)}\Sigma_{(11)}^{-1}(x_{(1)} - \mu_{(1)}), \Sigma_{(22)} - \Sigma_{(21)}\Sigma_{(11)}^{-1}\Sigma_{(12)})$$

tenemos:

$$S_{N_1} \mid S_{N_2} \sim N_m(N_1\mu + N_1N_2^{-1}(S_{N_2}N_2\mu), (N_1 - N_1N_2^{-1})\Sigma)$$

12. Suponer que $\mathbf{X} \sim \mathbf{N_3}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, siendo:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \rho & \mathbf{0} \\ \rho & \mathbf{1} & \rho \\ \mathbf{0} & \rho & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

¿Existe algún valor de ρ para el cual las variables $\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} + \mathbf{X_3}$ y $\mathbf{X} - \mathbf{1} - \mathbf{X_2} - \mathbf{X_3}$ sean independientes?

Sea:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$Cov(Z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Sigma \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho & 0 \\ \rho & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4\rho + 3 & -2\rho - 1 \\ -2\rho - 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sabemos que son independientes si la covarianza es una matriz diagonal, es decir, si:

$$-2\rho - 1 = 0 \Rightarrow \rho = -\frac{1}{2}$$