Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 27

1. Objetivo: Introdução sobre Problemas de Valores de Contorno (PVC).

Nesta Aula, são apresentados os seguintes conceitos:

- Problema de Valor de Contorno
- Solução exata de um problema de valor de contorno
- Solução aproximada de um problema de valor de contorno

2. Problema de valor de contorno

Um problema de valor de contorno (PVC) é aquele definido por uma equação diferencial que descreve um determinado fenômeno em uma região do espaço (domínio) delimitada por um contorno, e condições que a solução geral da equação diferencial tem que satisfazer no contorno do domínio. Os PVCs comumente são definidos em domínios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Independentemente da dimensão do domínio, todo problema de valor de contorno é escrito da seguinte forma

(1) PVI: $\begin{cases} ED \\ c.c. \end{cases},$

onde ED é uma equação diferencial e $c.c.$ é um conjunto de condições de contorno especificadas.

Exemplo 1: Problema de Valor de Contorno em domínio unidimensional (variável x descreve os pontos do domínio que é um subconjunto de ℝ).

(2) PVC1: $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} - y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Este PVC busca a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno especificadas ($y(0) = 0$ e $y(1) = 0$). Neste exemplo, o domínio é o intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Exemplo 2: Problema de Valor de Contorno em domínio bidimensional (variáveis x e y descrevem os pontos do domínio que é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$).

(3) PVC2: $\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \\ u(x,0) = 0: borda\ inferior \\ u(x,1) = 0: borda\ superior \\ u(0,y) = 0: borda\ esquerda \\ u(1,y) = 0: borda\ direita \end{cases}$

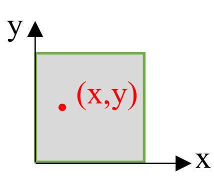

Figura 1. Domínio bidimensional

Este PVC busca a função $u(x,y)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno especificadas nas quatro bordas (contorno) do domínio bidimensional (quadrado de lado 1): $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.

2.1 Solução exata de um problema de valor de contorno

A **solução exata** de um PVC deve satisfazer tanto a Equação Diferencial do problema quanto as condições de contorno. Assim, para o problema (2) – PVC1 –, a solução exata é

(4) $y(x) = \frac{1}{e^{-1}-e}(e^{-x} - e^{x})$.

O gráfico da solução exata é mostrado na Figura 2.

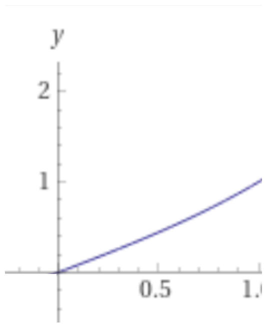

Figura 2. $y(x) = \frac{1}{e^{-1}-e}(e^{-x} - e^{x})$

Normalmente, para se definir um problema de valor de contorno, há uma fase de construção do modelo que consiste no desenvolvimento da equação diferencial que governa algum fenômeno, e, em seguida, definem-se as condições de contorno do problema.

Note que, quanto $x = 0$, a solução (4) fica

(5) $y(0) = \frac{1}{e^{-1}-e}(e^{-0} - e^{0}) = \frac{1}{e^{-1}-e}(1-1) = \frac{1}{e^{-1}-e}(0) = 0$,

e quando $x = 1$, a solução (4) fica

(6) $y(1) = \frac{1}{e^{-1}-e}(e^{-1} - e^{1}) = \frac{1}{e^{-1}-e}(e^{-1} - e) = 1$.

Portanto, a solução apresentada satisfaz as condições de contorno do PVC1. Para verificar se essa solução satisfaz a Equação Diferencial do PVC1, observa-se que

(7)
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{e^{-1}-e}(e^{-x} - e^{x})\right)\right) \\ &= \frac{1}{e^{-1}-e}\frac{d}{dx}(-e^{-x} - e^{x}) \\ &= \frac{1}{e^{-1}-e}(e^{-x} - e^{x}) \\ &= y(x). \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} - y(x) = 0$. Assim, $y(x) = \frac{1}{e^{-1}-e}(e^{-x} - e^{x})$ satisfaz todas as condições de uma solução do PVC1.

2.2 Soluções Aproximadas de um PVC por Diferenças Finitas

Na literatura, há vários métodos para encontrar uma solução aproximada para um dado Problema de Valor de Contorno. Aqui, serão apresentados dois métodos para obtenção dessas soluções aproximadas: o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos.
No primeiro método, a solução aproximada é representada por valores em posições discretas do domínio, enquanto, no segundo método (Aula#28), a solução é vista como uma função de interpolação que passa por valores aproximados da solução em posições discretas do domínio.

O Método das Diferenças Finitas consiste em quatro passos:

1. Dividir o domínio em partes iguais e definir os pontos discretos como os pontos de interseção das fronteiras dessa divisão (esses pontos são chamados de **nós da grade**);
2. Escrever uma **versão discreta** da equação diferencial do PVC;
3. Aplicar a versão discreta da ED em cada nó da grade onde a solução aproximada precisa ser encontrada (isso resulta em um sistema de equações algébricas);
4. Resolver o sistema de equações algébricas para encontrar os valores aproximados nos nós da grade.

2.2.1 Método das Diferenças Finitas aplicado ao PVC1

O PVC1 é definido sobre um domínio unidimensional. Assim, a solução aproximada será obtida em pontos discretos desse domínio, de acordo com os quatro passos mencionados anteriormente. Assim,

Passo 1: Divisão do domínio em N partes iguais.

Nessa apresentação, $N = 4$ (Figura 3).

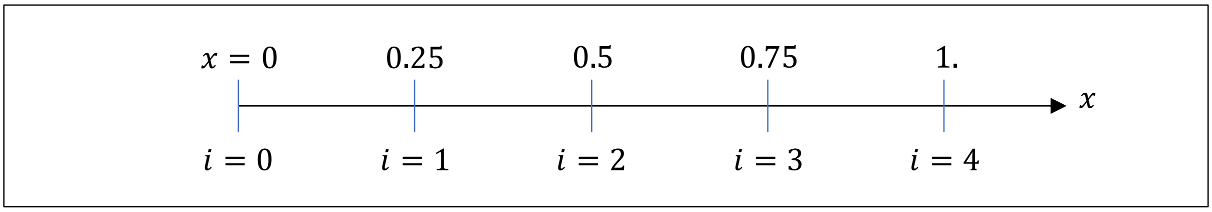

Figura 3. Divisão do domínio [0, 1] em quatro partes iguais com nós nas posições i

Passo 2: Versão discreta da ED do PVC.

Usando a filosofia central, as derivadas que aparecem na ED do PVC aplicada no nó i ficam

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y(x_i)}{\mathrm{d}x^2} - y(x_i) &\approx \frac{1}{(\Delta x)^2}[y(x_{i-1}) - 2y(x_i) + y(x_{i+1})] - y(x_i) \\
&= \frac{1}{(\Delta x)^2} y(x_{i-1}) - \left(\frac{2}{(\Delta x)^2} + 1\right) y(x_i) + \frac{1}{(\Delta x)^2} y(x_{i+1}).
\end{aligned} \tag{8}
$$

Passo 3: Aplicação da versão discreta da ED do PVC nos nós do domínio.

Sabendo-se que os valores da solução nos nós $i = 0$ e $i = 4$ são dados pelas condições de contorno, as incógnitas do problema são apenas os valores $y_1 \approx y(0.25)$, $y_2 \approx y(0.5)$ e $y_3 \approx y(0.75)$. Portanto, a equação diferencial discreta deve ser satisfeita em cada um desses pontos.
Para facilitar a imposição da ED discreta nesses pontos e montar o sistema de equações 3×3, isto é, 3 equações com 3 incógnitas, os coeficientes da incógnita do nó i e das incógnitas vizinhas são indicados numa máscara como mostrada na Figura 4.

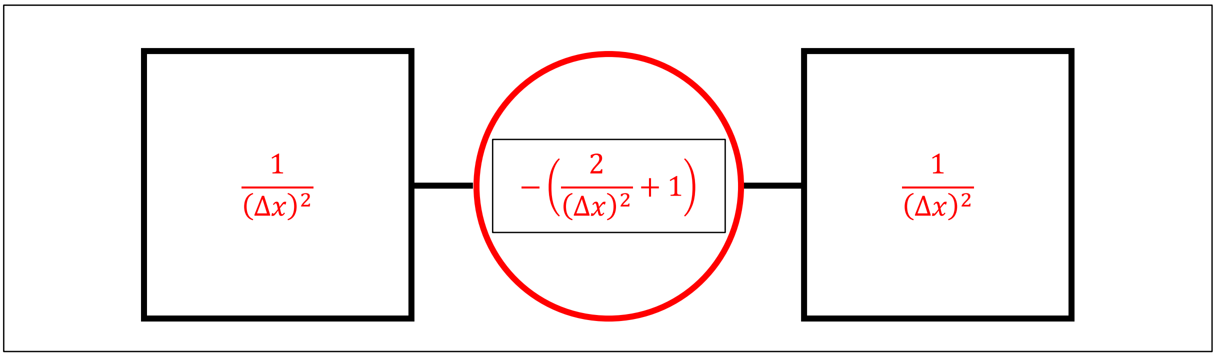

Figura 4. Máscara dos coeficientes da ED discreta. O círculo vermelho deve ser colocado sobre o ponto i para gerar a i-ésima equação do sistema de equações algébricas.

Neste exemplo,

(9) $\Delta x = \frac{1}{4} = 0.25.$

Portanto, os coeficientes das células da máscara terão os seguintes valores:

Célula esquerda: $\frac{1}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16,$

Célula direita: $\frac{1}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16,$

Célula central: $-\left(\frac{2}{(\Delta x)^2} + 1\right) = -33$

A aplicação da máscara sobre os nós das incógnitas gera as seguintes equações:

$$(10)\quad \begin{cases} 16\,y(0.) - 33y_1 + 16y_2 & = & 0 \\ 16\,y_1 - 33y_2 + 16y_3 & = & 0 \\ 16\,y_2 - 33y_3 + 16y(1.) & = & 0. \end{cases}$$

Os valores de $y(0.)$ e $y(1.)$ são especificados nas condições de contorno. Assim, (10) pode ser reescrita como

$$(11)\quad \begin{cases} -33y_1 + 16y_2 & = & 0 \\ 16\,y_1 - 33y_2 + 16y_3 & = & 0 \\ 16\,y_2 - 33y_3 & = & -16. \end{cases}$$

Expressando (11) na forma matricial, tem-se

$$(12)\quad \begin{bmatrix} -33 & 16 & 0 \\ 16 & -33 & 16 \\ 0 & 16 & -33 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Passo 4: Resolução do sistema de equações algébricas.

A resolução do sistema de equações em (12) resulta nos seguintes valores discretos e aproximados da função $y(x)$, isto é,

$$(13)\quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.21511475 \\ 0.44367418 \\ 0.69996324 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(0.25) = \frac{1}{e^{-1}-e}\left(e^{-0.25} - e^{0.25}\right) \\ y(0.5) \;\;= \frac{1}{e^{-1}-e}\left(e^{-0.5} - e^{0.5}\right) \\ y(0.75) = \frac{1}{e^{-1}-e}\left(e^{-0.75} - e^{0.75}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.21495513 \\ 0.44340944 \\ 0.69972421 \end{pmatrix}.$$

O resultado se aproxima mais da solução exata quanto maior for o número de partições N.

2.2.2 Método das Diferenças Finitas aplicado ao PVC2

Neste exemplo, a função $u(x,y)$ solução do problema (14) será aproximada por valores em pontos discretos do domínio quadrado de aresta igual a 1.

$$(14)\ \text{PVC2:} \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \\ u(x,0) = 0: borda\ inferior \\ u(x,1) = 0: borda\ superior \\ u(0,y) = 0: borda\ esquerda \\ u(1,y) = 0: borda\ direita \end{cases}$$

Passo 1: Divisão do domínio.

Nessa apresentação, como o domínio é quadrado, as divisões nas direções x e y serão as mesmas, isto é, $N = 4$ em cada direção (Figura 5).

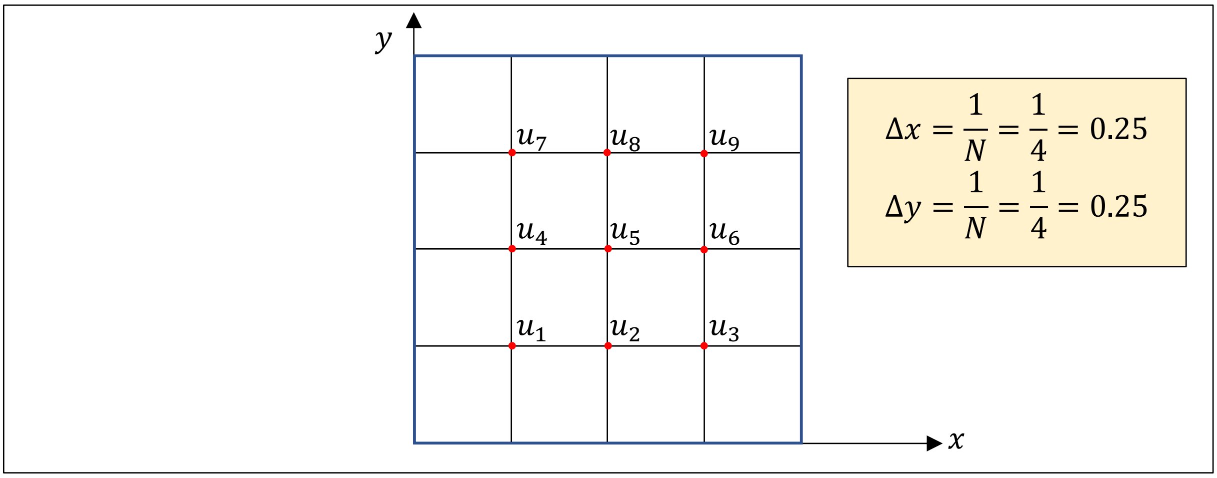

Figura 5. Partição do domínio quadrado em uma grade regular de espaçamento igual a 0.25.

Passo 2: Versão discreta da ED do PVC.

Usando a filosofia central, as derivadas que aparecem na ED do PVC aplicada no nó (x_i, y_j) ficam

$$(15)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} &\approx \frac{1}{(\Delta x)^2}\left[u(x_{i-1},y_j) - 2u(x_i,y_j) + u(x_{i+1},y_j)\right] \\ &= \frac{1}{(\Delta x)^2}u(x_{i-1},y_j) - \frac{2}{(\Delta x)^2}u(x_i,y_j) + \frac{1}{(\Delta x)^2}u(x_{i+1},y_j). \end{aligned}$$

$$(16)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2} &\approx \frac{1}{(\Delta y)^2}\left[u(x_i,y_{j-1}) - 2u(x_i,y_j) + u(x_i,y_{j+1})\right] \\ &= \frac{1}{(\Delta y)^2}u(x_i,y_{j-1}) - \frac{2}{(\Delta y)^2}u(x_i,y_j) + \frac{1}{(\Delta y)^2}u(x_i,y_{j+1}). \end{aligned}$$

$$(17)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i,y_j)}{\partial y^2} \approx\ & \frac{1}{(\Delta x)^2}u(x_{i-1},y_j) - \frac{2}{(\Delta x)^2}u(x_i,y_j) + \frac{1}{(\Delta x)^2}u(x_{i+1},y_j) \\ +\ & \frac{1}{(\Delta y)^2}u(x_i,y_{j-1}) - \frac{2}{(\Delta y)^2}u(x_i,y_j) + \frac{1}{(\Delta y)^2}u(x_i,y_{j+1}) \end{aligned}$$

Passo 3: Aplicação da versão discreta da ED do PVC nos nós do domínio.

Sabendo-se que os valores da solução nos nós das bordas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$ são dados pelas condições de contorno, as incógnitas do problema são apenas os valores marcados na Figura 5 com círculos vermelhos, isto é, $u_1, u_2, \cdots, u_9$. Portanto, a equação diferencial discreta deve ser satisfeita em cada um desses pontos.

Para facilitar a imposição da ED discreta nesses pontos e montar o sistema de equações 9×9, isto é, 9 equações com 9 incógnitas, os coeficientes da incógnita do nó (x_i, y_j) e das incógnitas vizinhas são indicados numa máscara como mostrada na Figura 6.

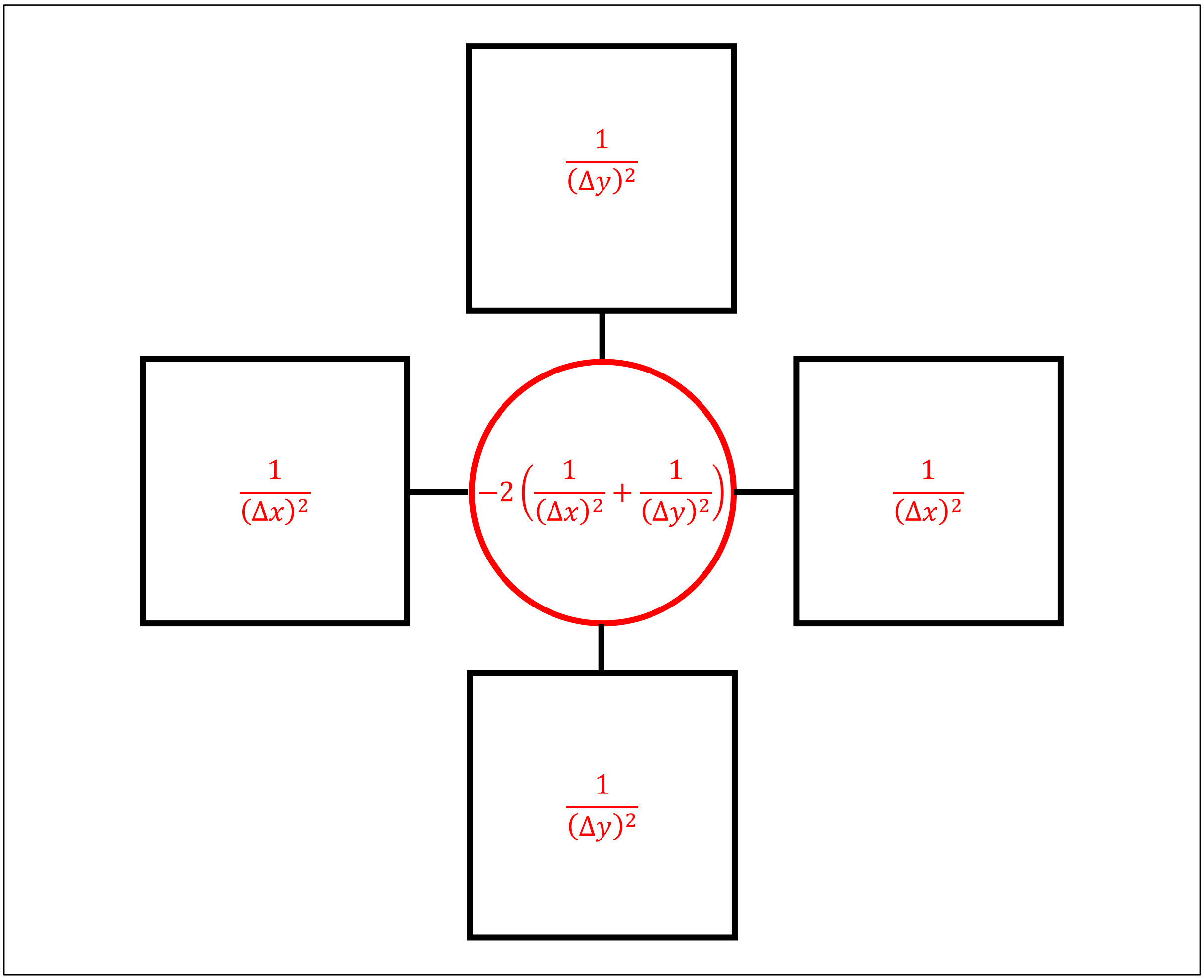

Figura 6. Máscara dos coeficientes da ED discreta. O círculo vermelho deve ser colocado sobre o ponto (x_i, y_j) para gerar a equação correspondente do sistema de equações algébricas.

Neste exemplo, os coeficientes das células da máscara terão os seguintes valores:

Célula esquerda: $\frac{1}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16,$

Célula direita: $\frac{1}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16,$

Célula inferior: $\frac{1}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16,$

Célula superior: $\frac{1}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16,$

Célula central: $-2\left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}\right) = -64$

A aplicação da máscara sobre os nós das incógnitas gera as seguintes equações:

$$(18)\quad \left\{ \begin{bmatrix} -64 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -64 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -64 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & -64 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 16 & -64 & 16 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & -64 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -64 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & -64 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 16 & -64 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right.$$

Os valores de $u(x, y)$ nas bordas são todos especificados nas condições de contorno como nulos, e $f(x, y) = 4$ em qualquer ponto do domínio.

Passo 4: Resolução do sistema de equações algébricas.

A resolução do sistema de equações em (18) resulta nos seguintes valores discretos e aproximados da função $u(x, y)$, isto é,

$$(19)\quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/64 \\ -7/32 \\ -11/64 \\ -7/32 \\ -9/32 \\ -7/32 \\ -11/64 \\ -7/32 \\ -11/64 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} -0.171875 \\ -0.21875 \\ -0.171875 \\ -0.21875 \\ -0.28125 \\ -0.21875 \\ -0.171875 \\ -0.21875 \\ -0.171875 \end{pmatrix}.$$

O resultado se aproxima mais da solução exata quanto maior for o número de partições N.

Tarefa 19. Faça o que se pede.

1. Resolver o PVC1 com $N = 8$. Compare os seus resultados com aqueles apresentados em (13), montando uma tabela com os valores obtidos e os erros relativos à solução exata.
2. Resolver o PVC2 com $N = 8$ nas duas direções e usando $f(x, y) = 4$. Compare seus resultados com aqueles apresentados em (19), montando uma tabela com os valores obtidos e os erros relativos aos valores obtidos com $N = 8$.