**Curso: Métodos Numéricos II**
**Professor: Creto Augusto Vidal**
**Semestre: 2020.1**
**Aula # 25**

## 1. Objetivo: Solução Aproximada de Problemas de Valores Iniciais (PVI).

Nesta Aula, são apresentados os seguintes métodos:

- Métodos de passo simples (continuação): métodos de Runge-Kutta

## 2. Solução aproximada de um problema de valor inicial

A **solução aproximada** de um PVI parte da condição inicial e busca aproximações da solução da equação diferencial, isto é, aproximações de $S(t)$, em uma sequência de valores discretos da variável $t$.

Para resolver um PVI de forma aproximada, a descrição original do problema tem que ser transformada para o seguinte formato (EDO de primeira ordem)

(1) $$\text{PVI:} \begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases},$$

onde $S(t)$ é o estado do problema e $S_0$ é o estado inicial do problema.

Portanto, partindo do ponto inicial, o estado do problema será obtido nos seguintes pontos:

(2) $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, \cdots$

onde $S_i \approx S(t_0 + i\,\Delta t)$.

## 3. Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta são métodos explícitos de passo simples. Há várias maneiras de desenvolver a fórmula

(3) $S_{i+1} = G(S_i, \Delta t, L_p)$,

dos métodos de passo simples particularizadas para os métodos de Runge-Kutta.

Suponha que o problema (1) já tenha sido resolvido para os passos $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots, S_{i-1}, S_i$. A equação diferencial ordinária na equação (1) pode ser reescrita na forma diferencial como

(4) $\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t), t) \Rightarrow \mathrm{d}S = \mathcal{F}(S(t), t)\mathrm{d}t.$

Integrando-se os dois lados no intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, tem-se

(5) $\int_{S_i}^{S_{i+1}} \mathrm{d}S = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{F}(S(t), t)\mathrm{d}t \Rightarrow S_{i+1} - S_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{F}(S(t), t)\mathrm{d}t.$

Logo, a expressão em (5) pode ser reescrita como

(6) $S_{i+1} = S_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{F}(S(t), t)\mathrm{d}t.$

A expressão (6) é uma maneira, ainda abstrata, de representar a expressão (3) dos métodos de passo simples. Para deixá-la menos abstrata, aplicam-se as fórmulas de **integração de Newton-Cotes** (veja Unidade 2 – Integração Numérica) à integral que aparece no lado direito de (6).

### 3.1 Método de Runge-Kutta de segunda ordem

Lembre-se que a Fórmula de Newton-Cotes fechada com polinômio de substituição de grau 1 é conhecida como Regra do Trapézio. Se ela for aplicada à integral na equação (6), tem-se

(7) $S_{i+1} = S_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{F}(S(t), t)\mathrm{d}t \Longrightarrow S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{2}\left(\mathcal{F}(S_i, t_i) + \mathcal{F}(S_{i+1}, t_{i+1})\right).$

Note, que, no formato da equação (7), o método **seria implícito**. No entanto, a fórmula (7) será escrita de uma maneira ligeiramente modificada para que o método **seja considerado explícito**, isto é,

(8) $\boldsymbol{S_{i+1}} = S_i + \frac{\Delta t}{2}\left(\mathcal{F}(S_i, t_i) + \mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{S}}_{i+1}, t_{i+1})\right).$

A expressão (8) exige que seja usada uma estimativa $\overline{\boldsymbol{S}}_{i+1}$.

Suponha que a estimativa $\overline{\boldsymbol{S}}_{i+1}$ seja obtida pelo método de Euler Explícito visto na Aula#24. Assim, a obtenção do estado no tempo $t_{i+1}$ é feita em dois subpassos:

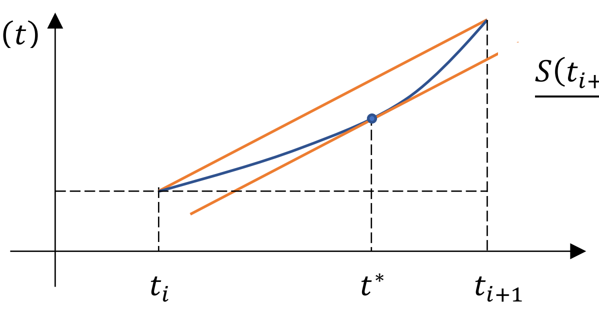
**P 1.1**: Estimativa grosseira do estado $\mathbf{S_{i+1}}$

(9) $\overline{\boldsymbol{S}}_{i+1} = S_i + \Delta t\, \mathcal{F}(S_i, t_i);$

**P 1.2**: Atualização melhorada do estado $\mathbf{S_{i+1}}$

(10) $\boldsymbol{S_{i+1}} = S_i + \Delta t\left(\frac{1}{2}\mathcal{F}(S_i, t_i) + \frac{1}{2}\,\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{S}}_{i+1}, t_{i+1})\right).$

Sabendo-se que $\mathcal{F}(S(t), t) = \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}$ é a inclinação da reta tangente ao gráfico de $S(t)$ no ponto $t$, a expressão (10) pode ser interpretada como uma tentativa de representar o teorema do valor intermediário, isto é,




$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S(t^*)}{\mathrm{d}t}$$

**Teorema do valor intermediário**: Se $S(t)$ for contínua, existe um ponto $t^* \in [t_i, t_{i+1}]$ no qual a reta tangente à curva de $S(t)$ tem a mesma inclinação da corda que liga $S(t_i)$ a $S(t_{i+1})$.

Assim, o termo $\left(\frac{1}{2}\mathcal{F}(S_i, t_i) + \frac{1}{2}\,\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{S}}_{i+1}, t_{i+1})\right)$ representa a média das tangentes à curva de $S(t)$ nos pontos $t_i$ e $t_{i+1}$.

### 3.1.1. Aplicação do Método de Runge-Kutta de segunda ordem na solução do PVI-1

(11) PVI-1: $\begin{cases} \underbrace{\frac{dy(t)}{dt} = \frac{2}{3}y(t) = \mathcal{F}(S_i, t_i) \\ y(0) = 2}_{PVI\ transformado} \end{cases}$

Obtenção da sequência de estados discretos com $\Delta t = 0.5$ onde, neste caso, $S(t) = y(t)$

P 1.1: $\begin{cases} \overline{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{1}} = S_0 + \Delta t\, \mathcal{F}(S_0, t_0) \Longrightarrow \\ \overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{1}} = y_0 + \Delta t\, \overbrace{\left(\frac{2}{3}y_0\right)}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} = 2 + 0.5\left(\frac{2}{3}\,2\right) = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2.66667 \end{cases}$

P 1.2: $\begin{cases} y_1 = y_0 + \Delta t\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}y_0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{1}}\right)\right] = 2 + 0.5\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{3}}\right)\right] = \frac{25}{9} \approx 2.77778 \\ y(0.5) = 2e^{\frac{2}{3}0.5} \approx 2.79122 : \text{Solução exata} \\ \text{Erro relativo: } e_2 = \frac{2.79122 - 2.77778}{2.79122} = 0.00482 \approx 0.482\% \end{cases}$

Esses dois subpassos representam o passo 1 que vai de $t_0 = 0$ a $t_1 = 0.5$.

### 3.1.2. Aplicação do Método de Runge-Kutta de segunda ordem na solução do PVI-2

(12) PVI-2: $\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mathcal{F}(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$, com $\frac{dS(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}(S(t), t) = \begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}v(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ e $S_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix}$.

Obtenção da sequência de estados discretos com $\Delta t = 0.1$

P 1.1: $\begin{cases} \overline{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{1}} = S_0 + \Delta t\, \mathcal{F}(S_0, t_0) \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} \\ \overline{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \Delta t\, \overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}v_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix} + 0.1\begin{pmatrix} -10 - \frac{0.5}{0.5}3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 150.3 \end{pmatrix} \end{cases}$

P 1.2: $\begin{cases} S_1 = S_0 + \Delta t\left[\frac{1}{2}\mathcal{F}(S_0, t_0) + \frac{1}{2}\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{1}}, t_1)\right] \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \Delta t\left[\frac{1}{2}\overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}v_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} + \frac{1}{2}\overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}\overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} \\ \overline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{1}} \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{1}},t_1)}\right] \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix} + 0.1\left[\frac{1}{2}\overbrace{\begin{pmatrix} -10 - \frac{0.5}{0.5}3 \\ 3 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} + \frac{1}{2}\overbrace{\begin{pmatrix} -10 - \frac{0.5}{0.5}\boldsymbol{1.7} \\ \boldsymbol{1.7} \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{1}},t_1)}\right] \end{cases}$

P 1.2 (cont.): $\begin{cases} \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix} + 0.1 \left[ \begin{pmatrix} -12.35 \\ 2.35 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1.765 \\ 150.235 \end{pmatrix} \\ S(0.1) = \begin{pmatrix} -10 + (13)e^{-(0.1)} \\ 150 - 10(0.1) - (13)\left(e^{-(0.1)} - 1\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.763 \\ 150.3 \end{pmatrix} : \text{Solução exata} \\ \text{Erro relativo: } e_1 = \begin{pmatrix} -0.113\% \\ 0.043\% \end{pmatrix} \end{cases}$

## 3.2 Método de Runge-Kutta de terceira ordem

Considere o PVI no formato (1)

(13) PVI: $\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mathcal{F}(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$.

Mais uma vez, escreve-se

(14) $S_{i+1} = S_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{F}(S(t), t) dt$.

Agora, a integral é calculada usando a Fórmula Fechada de Newton-Cotes com polinômio de substituição de grau 2. Essa fórmula é conhecida como fórmula de Simpson-1/3. Assim, a equação (14) pode ser reescrita como

(15) $S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t/2}{3}\left(\mathcal{F}(S_i, t_i) + 4\mathcal{F}\left(S_{i+1/2}, t_{i+1/2}\right) + \mathcal{F}(S_{i+1}, t_{i+1})\right)$.

Novamente, há **dois termos desconhecidos** no lado direito da equação (15), e, portanto, a equação **não é explícita**. Para que se tenha uma equação explícita, resolve-se o passo em dois subpassos:

**P 1.1**: Estimativa dos estados $S_{i+1/2} \approx S\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)$ e $S_{i+1} \approx S(t_i + \Delta t)$

(16) $\bar{S}_{i+1/2} = S_i + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{F}(S_i, t_i)$;

(17) $\bar{S}_{i+1} = S_i + \Delta t \, \mathcal{F}(S_i, t_i)$;

**P 1.2**: Atualização melhorada do estado $\mathbf{S_{i+1}}$

(18) $S_{i+1} = S_i + \Delta t\left(\frac{1}{6}\mathcal{F}(S_i, t_i) + \frac{4}{6}\mathcal{F}\left(\bar{S}_{i+1/2}, t_{i+1/2}\right) + \frac{1}{6}\mathcal{F}\left(\bar{S}_{i+1}, t_{i+1}\right)\right)$.

**Note que**:

- a estimativa de $\bar{S}_{i+1}$ na equação (17) também poderia ter sido obtida da seguinte maneira

(19) $\bar{S}_{i+1} = \bar{S}_{i+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{F}\left(\bar{S}_{i+1/2}, t_{i+1/2}\right)$.

Em breve, será deduzida uma fórmula de Runge-Kutta de terceira ordem por outro processo.

- na equação (18), o termo $\left(\frac{1}{6}\mathcal{F}(S_i, t_i) + \frac{4}{6}\mathcal{F}\left(\bar{S}_{i+1/2}, t_{i+1/2}\right) + \frac{1}{6}\mathcal{F}\left(\bar{S}_{i+1}, t_{i+1}\right)\right)$ é uma **média ponderada das tangentes** ao gráfico de $S(t)$ calculadas em $t_i$, $t_i + \frac{\Delta t}{2}$ e $t_i + \Delta t$. Mais uma vez, é uma tentativa de usar o teorema do valor intermediário (estimativa da inclinação correta da corda que liga $S_i$ e $\mathbf{S_{i+1}}$.

### 3.2.1. Aplicação do Método de Runge-Kutta de terceira ordem na solução do PVI-1

$$(20)\ \text{PVI-1:} \begin{cases} \underbrace{\frac{dy(t)}{dt} = \frac{2}{3}y(t) = \mathcal{F}(S(t),t) \\ y(0) = 2}_{PVI\ transformado} \end{cases}$$

Obtenção da sequência de estados discretos com $\Delta t = 0.5$ onde, neste caso, $S(t) = y(t)$

$$\text{P 1.1:} \begin{cases} \bar{y}_{0+1/2} = y_0 + \frac{\Delta t}{2} \overbrace{\left(\frac{2}{3}y_0\right)}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} = 2 + \frac{0.5}{2}\left(\frac{2}{3}2\right) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2.33333 \\ \bar{y}_{0+1} \stackrel{(17)}{\triangleq} y_0 + \Delta t \overbrace{\left(\frac{2}{3}y_0\right)}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} = 2 + 0.5\left(\frac{2}{3}2\right) = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2.66667 \\ \bar{y}_{0+1} \stackrel{(19)}{\triangleq} \bar{y}_{0+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \overbrace{\left(\frac{2}{3}\bar{y}_{0+1/2}\right)}^{\mathcal{F}(S_{0+1/2},t_{0+1/2})} = \frac{7}{3} + \frac{0.5}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{7}{3}\right) = \frac{49}{18} \approx 2.72222 \end{cases}$$

$$\text{P 1.2:} \begin{cases} y_1 = y_0 + \Delta t\left[\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}y_0\right) + \frac{4}{6}\left(\frac{2}{3}\bar{y}_{0+1/2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\bar{y}_{0+1}\right)\right] \\ y_1 \stackrel{(17)}{\triangleq} 2 + 0.5\left[\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}2\right) + \frac{4}{6}\left(\frac{2}{3}\frac{7}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\frac{8}{3}\right)\right] = 2 + 0.5\left[\frac{14}{9}\right] = \frac{25}{9} \approx 2.77778 \\ y_1 \stackrel{(19)}{\triangleq} 2 + 0.5\left[\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}2\right) + \frac{4}{6}\left(\frac{2}{3}\frac{7}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\frac{49}{18}\right)\right] = 2 + 0.5\left[\frac{253}{162}\right] = \frac{901}{324} \approx 2.78086 \\ y(0.5) = 2e^{\frac{2}{3}0.5} \approx 2.79122 : \text{Solução exata} \\ \text{Erro relativo: } e_2 \stackrel{(17)}{\triangleq} \frac{2.79122 - 2.77778}{2.79122} = 0.00482 \approx 0.482\% \\ \text{Erro relativo: } e_2 \stackrel{(19)}{\triangleq} \frac{2.79122 - 2.78086}{2.79122} = 0.00371 \approx 0.371\% \end{cases}$$

Esses dois subpassos representam o passo 1 que vai de $t_0 = 0$ a $t_1 = 0.5$.

Note que a estimativa de $\bar{y}_{0+1}$ usando a equação (19) produziu um melhor resultado.

Tabela1. Valores aproximados da solução exata $y(10) = 1571.543988$ no tempo $t = 10s$

| $\Delta t$ | $y_{aprox(17)}$ | $erro_{rel(17)}$ | $y_{aprox(19)}$ | $erro_{rel(19)}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 1564.178296 | 0.46869% | 1565.985957 | 0.35367% |
| 0.01 | 1571.466770 | 0.00491% | 1571.486042 | 0.00369% |
| 0.001 | 1571.543213 | 4.94E-05% | 1571.543407 | 3.70E-05% |
| 0.0001 | 1571.543981 | 4.93E-07% | 1571.543983 | 3.70E-07% |

A Tabela 1 mostra que, quando $\Delta t$ diminui, o erro relativo fica cada vez menor. O erro obtido com a utilização da estratégia de atualização (19) é um pouco melhor.

### 3.2.2. Aplicação do Método de Runge-Kutta de terceira ordem na solução do PVI-2

(21) PVI-2: $\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mathcal{F}(S(t),t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$, com $\frac{dS(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}(S(t),t) = \begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m} v(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ e $S_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix}$.

Obtenção da sequência de estados discretos com $\Delta t = 0.1$

$$\text{P 1.1:} \begin{cases} \bar{S}_{0+1/2} = S_0 + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{F}(S_0, t_0) \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \bar{v}_{0+1/2} \\ \bar{y}_{0+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m} v_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \bar{v}_{0+1/2} \\ \bar{y}_{0+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix} + \frac{0.1}{2} \overbrace{\begin{pmatrix} -10 - \frac{0.5}{0.5} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} = \begin{pmatrix} 2.35 \\ 150.15 \end{pmatrix} \\ \bar{S}_{0+1} = S_0 + \Delta t\, \mathcal{F}(S_0, t_0) \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \bar{v}_{0+1} \\ \bar{y}_{0+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \Delta t \overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m} v_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix} + 0.1 \overbrace{\begin{pmatrix} -10 - \frac{0.5}{0.5} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 150.3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{P 1.2:} \begin{cases} S_1 = S_0 + \Delta t \left[ \frac{1}{6}\left(\mathcal{F}(S_0, t_0)\right) + \frac{4}{6}\left(\mathcal{F}(\bar{S}_{1/2}, t_{1/2})\right) + \frac{1}{6}\left(\mathcal{F}(\bar{S}_1, t_1)\right) \right] \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \overset{(17)}{\triangleq} \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix} + 0.1 \left[ \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -13 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{6}\begin{pmatrix} -10 - \mathbf{2.35} \\ \mathbf{2.35} \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -10 - \mathbf{1.7} \\ \mathbf{1.7} \end{pmatrix} \right] \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \overset{(17)}{\triangleq} \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix} + 0.1 \left[ \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -13 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{6}\begin{pmatrix} -12.35 \\ 2.35 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -11.7 \\ 1.7 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1.765 \\ 150.235 \end{pmatrix} \\ S(0.1) = \begin{pmatrix} 1.762886 \\ 150.237114 \end{pmatrix} : \text{Solução exata} \\ \text{Erro relativo: } e_2 \overset{(17)}{\triangleq} \begin{pmatrix} -0.001199 \\ 0.000014 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.1199\% \\ 0.0014\% \end{pmatrix} \end{cases}$$

O método aproximado conseguiu fazer uma boa previsão da velocidade de chegada no mar ($-10$ m/s) e o tempo total até a queda no mar (16.3s).

### 3.2.3. Método de Runge-Kutta de terceira ordem (outra forma de dedução)

A forma geral dos métodos de Runge-Kutta de ordem k é

(22) $\boldsymbol{S_{i+1}} = S_i + \Delta t\big(w_1\mathcal{F}_1(\quad) + \cdots + w_k\,\mathcal{F}_k(\quad)\big)$

Note que a equação (22) está no **formato do teorema do valor intermediário**, onde o termo entre parênteses representa uma tentativa de aproximar a inclinação da corda que liga os estados $S_i$ e $\boldsymbol{S_{i+1}}$. Essa inclinação é calculada como uma média ponderada de estimativas de inclinações calculadas em pontos do intervalo $[t_i, t_{i+1}]$.

Há duas perguntas que são respondidas durante a dedução da equação (22):

1. Quais são os valores dos pesos $w_j, j = 1, \dots, k$?
2. Como calcular os $\mathcal{F}_j, j = 1, \dots, k$?

Para responder a essas perguntas serão necessárias algumas premissas e várias expansões em Série de Taylor. No caso em questão, Runge-Kutta de terceira ordem, $k = 3$.

**Premissas**:

$$(23)\quad \begin{cases} \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(S_i, t_i) \\ \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(S_i + \mathrm{a}_2\Delta t\mathcal{F}_1,\ \ t_i + \mathrm{b}_2\Delta t) \\ \mathcal{F}_3 = \mathcal{F}(S_i + \mathrm{a}_{31}\Delta t\mathcal{F}_1 + \mathrm{a}_{32}\Delta t\mathcal{F}_2,\ \ t_i + \mathrm{b}_3\Delta t) \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}.$$

**Expansões de Taylor:**

$$(24)\quad \begin{aligned} \boldsymbol{S_{i+1}} &= S_i + S_i'\Delta t + \tfrac{1}{2!}S_i''(\Delta t)^2 + \tfrac{1}{3!}S_i'''(\Delta t)^3 + O((\Delta t)^4) \\ \boldsymbol{S_{i+1}} &\approx S_i + \Delta t\left(S_i' + \tfrac{1}{2}S_i''\Delta t + \tfrac{1}{6}S_i'''(\Delta t)^2\right). \end{aligned}$$

Pela definição do PVI, $\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t), t) = S'(t)$. Assim,

(25) $S_i' = \mathcal{F}(S_i, t_i)$.

A derivada da função $\mathcal{F}(S(t), t)$ é dada por

$$(26)\quad S_i'' = \frac{d}{dt}\big(\mathcal{F}(S,t)\big)\Big|_i = \frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S}\frac{\partial S(t_i)}{\partial t} = \frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S}\mathcal{F}(S_i, t_i),$$

e a derivada terceira

$$(27)\quad \begin{aligned} S_i''' &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{F}(S,t)}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{F}(S,t)}{\partial S}\mathcal{F}(S,t)\right)\Bigg|_i \\ &= \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t\partial S}\mathcal{F}(S_i, t_i) \\ &+ \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S\partial t}\mathcal{F}(S_i, t_i) + \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S^2}\mathcal{F}(S_i, t_i)\mathcal{F}(S_i, t_i) \\ &+ \frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S}\left(\frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S}\mathcal{F}(S_i, t_i)\right). \end{aligned}$$

A expansão em série de Taylor de uma função de duas variáveis é escrita até os termos de segunda ordem como

$$(28)\quad f(x+dx,y+dy) \approx f(x,y) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Assim, as expansões em série de Taylor das funções $\mathcal{F}(S_i + \mathrm{a}_2 \Delta t \mathcal{F}_1, t_i + \mathrm{b}_2 \Delta t)$ e $\mathcal{F}(S_i + \mathrm{a}_{31} \Delta t \mathcal{F}_1 + \mathrm{a}_{32} \Delta t \mathcal{F}_2, t_i + \mathrm{b}_3 \Delta t)$ podem ser escritas como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_2 &= \mathcal{F}(S_i + \mathrm{a}_{21} \Delta t \mathcal{F}_1, t_i + \mathrm{b}_2 \Delta t) \\
&= \mathcal{F}(S_i, t_i) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S} & \frac{\partial \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{21} \Delta t \mathcal{F}(S_i, t_i) \\ \mathrm{b}_2 \Delta t \end{pmatrix} \qquad (29) \\
&+ \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{21} \Delta t \mathcal{F}(S_i, t_i) & \mathrm{b}_2 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S \partial t} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t \partial S} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{21} \Delta t \mathcal{F}(S_i, t_i) \\ \mathrm{b}_2 \Delta t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_3 &= \mathcal{F}(S_i + \mathrm{a}_{31} \Delta t \mathcal{F}_1 + \mathrm{a}_{32} \Delta t \mathcal{F}_2, t_i + \mathrm{b}_3 \Delta t) \\
&= \mathcal{F}(S_i, t_i) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S} & \frac{\partial \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{31} \Delta t \mathcal{F}_1 + \mathrm{a}_{32} \Delta t \mathcal{F}_2 \\ \mathrm{b}_3 \Delta t \end{pmatrix} \qquad (30) \\
&+ \begin{bmatrix} (\mathrm{a}_{31} \Delta t \mathcal{F}_1 + \mathrm{a}_{32} \Delta t \mathcal{F}_2) & \mathrm{b}_3 \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S \partial t} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t \partial S} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{31} \Delta t \mathcal{F}_1 + \mathrm{a}_{32} \Delta t \mathcal{F}_2 \\ \mathrm{b}_3 \Delta t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Substituindo-se as equações (25), (26) e (27) na equação (24), obtém-se

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S_{i+1}} &= S_i \\
&+ \Delta t \left\{ \mathcal{F}(S_i, t_i) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S} \mathcal{F}(S_i, t_i) \right) \Delta t \right. \\
&+ \frac{1}{6} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t \partial S} \mathcal{F}(S_i, t_i) \right. \qquad (31) \\
&+ \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S \partial t} \mathcal{F}(S_i, t_i) + \frac{\partial^2 \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S^2} \mathcal{F}(S_i, t_i) \mathcal{F}(S_i, t_i) \\
&+ \left. \left. \frac{\partial \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S} \left( \frac{\partial \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S} \mathcal{F}(S_i, t_i) \right) \right] (\Delta t)^2 \right\}.
\end{aligned}
$$

A expansão de $\boldsymbol{S_{i+1}}$ em série de Taylor apresentada em (31) será comparada com a expressão das fórmulas de Runge-Kutta quando as equações (29) e (30) são substituídas em (23) e (22).

Assim

(32)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S_{i+1}} &= S_i + \Delta t\big(w_1\mathcal{F}_1(\quad) + w_2\mathcal{F}_2(\quad) + w_3\,\mathcal{F}_3(\quad)\big)\\
\boldsymbol{S_{i+1}} &= S_i + \Delta t\Bigg\{w_1\mathcal{F}(S_i,t_i)\\
&+ w_2\left(\mathcal{F}(S_i,t_i) + \begin{bmatrix}\frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S} & \frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_{21}\Delta t\mathcal{F}(S_i,t_i)\\ b_2\Delta t\end{pmatrix}\right.\\
&+ \left.\begin{bmatrix}a_{21}\Delta t\mathcal{F}(S_i,t_i) & b_2\Delta t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S^2} & \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S\partial t}\\ \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t\partial S} & \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t^2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_{21}\Delta t\mathcal{F}(S_i,t_i)\\ b_2\Delta t\end{pmatrix}\right)\\
&+ w_3\left(\mathcal{F}(S_i,t_i) + \begin{bmatrix}\frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S} & \frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_{31}\Delta t\mathcal{F}_1 + a_{32}\Delta t\mathcal{F}_2\\ b_3\Delta t\end{pmatrix}\right.\\
&+ \left.\begin{bmatrix}(a_{31}\Delta t\mathcal{F}_1 + a_{32}\Delta t\mathcal{F}_2) & b_3\Delta t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S^2} & \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S\partial t}\\ \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t\partial S} & \frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t^2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a_{31}\Delta t\mathcal{F}_1 + a_{32}\Delta t\mathcal{F}_2\\ b_3\Delta t\end{pmatrix}\right)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Reorganizando-se a equação (32) e desprezando-se os termos com $(\Delta t)^3$ dentro das chaves $\{\}$, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{S_{i+1}} &= S_i + \Delta t\{(w_1 + w_2 + w_3)\mathcal{F}(S_i,t_i)\\
&+ \begin{bmatrix}\frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S} & \frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}(w_2a_{21} + w_3(a_{31} + a_{32}))\mathcal{F}(S_i,t_i)\\ (w_2b_2 + w_3b_3)\end{pmatrix}\Delta t\\
&+ w_2\left((a_{21})^2\big(\mathcal{F}(S_i,t_i)\big)^2\frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S^2} + 2a_{21}b_2\mathcal{F}(S_i,t_i)\frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S\partial t}\right.\\
&+ \left.(b_2)^2\frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t^2}\right)(\Delta t)^2 \qquad (33)\\
&+ w_3\left(a_{21}a_{32}\mathcal{F}(S_i,t_i)\left(\frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S}\right)^2 + b_2a_{32}\frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S}\frac{\partial\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t}\right.\\
&+ ((a_{31})^2 + (a_{32})^2)\big(\mathcal{F}(S_i,t_i)\big)^2\frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S^2} + 2(a_{31} + a_{32})b_3\mathcal{F}(S_i,t_i)\frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial S\partial t}\\
&+ \left.(b_3)^2\frac{\partial^2\mathcal{F}(S_i,t_i)}{\partial t^2}\right)(\Delta t)^2\Big\}.
\end{aligned}
$$

Comparando os termos semelhantes das equações (31) e (33), tem-se

(34) $w_1 + w_2 + w_3 = 1$

(35) $w_2 a_{21} + w_3(a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{2}$

(36) $w_2 b_2 + w_3 b_3 = \frac{1}{2}$

(37) $w_2 (b_2)^2 + w_3 (b_3)^2 = \frac{1}{6}$

(38) $w_2 a_{21} b_2 + w_3(a_{31} + a_{32}) b_3 = \frac{1}{6}$

(39) $w_2 (a_{21})^2 + w_3((a_{31})^2 + (a_{32})^2) = \frac{1}{6}$

(40) $w_3 a_{32} b_2 = \frac{1}{6}$

(41) $w_3 a_{32} a_{21} = \frac{1}{6}$.

Os pesos são determinados pela fórmula de Simpson 1/3. Assim

(42) $\boldsymbol{w_1 = w_3 = \frac{1}{6}}$ e $\boldsymbol{w_2 = \frac{4}{6}}$.

Usando (42), pode-se calcular $a_2 \frac{eq.40}{w_3} - b_2 \frac{eq.41}{w_3}$, obtendo-se

(43) $\mathbf{a_{21} = b_2}$.

Substituindo-se (42) em (40), obtém-se

(44) $\mathbf{a_{32} = 1/a_{21}}$.

Usando (42) e (44) em (35), obtém-se

(45) $\mathbf{a_{31} = 3 - 4a_{21} - a_{32}}$.

Igualando os lados esquerdos das equações (35) e (36) tem-se

(46) $\mathbf{b_3 = a_{31} + \boldsymbol{a_{32}} = 3 - 4a_{21}}$

Com essas relações, vários métodos de Runge-Kutta de terceira ordem podem ser propostos. O mais trivial é aquele em que $\mathbf{a_{21} = b_2 = \frac{1}{2}}$, e, via relações (44) a (46), $\mathbf{a_{32} = 2}$, $a_{31} = \mathbf{-1}$ e $\mathbf{b_3 = 1}$. Assim,

**P 1.1**: Estimativa dos estados $S_{i+1/2} \approx S\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)$ e $S_{i+1} \approx S(t_i + \Delta t)$

(47) $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(S_i, t_i)$

(48) $\boldsymbol{\bar{S}_{i+1/2}} = S_i + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{F}(S_i, t_i) = S_i + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{F}_1$;

(49) $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}\left(\boldsymbol{\bar{S}_{i+1/2}}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)$;

(50) $\boldsymbol{\bar{S}_{i+1}} = S_i + \Delta t \left(-\mathcal{F}(S_i, t_i) + 2\mathcal{F}\left(\boldsymbol{\bar{S}_{i+1/2}}, t_i + \frac{\Delta t}{2}\right)\right)$;

(51) $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}(\boldsymbol{\bar{S}_{i+1}}, t_i + \Delta t)$

**P 1.2**: Atualização melhorada do estado $\mathbf{S_{i+1}}$

(52) $\boldsymbol{S_{i+1}} = S_i + \Delta t \left(\frac{1}{6}\mathcal{F}_1 + \frac{4}{6}\mathcal{F}_2 + \frac{1}{6}\mathcal{F}_3\right)$.

**Tarefa 17: Runge-Kutta de terceira ordem**

Note que a solução exata do PVI-2 com os valores mostrados na Figura 4 indicam uma queda livre parecida com a de um paraquedista.

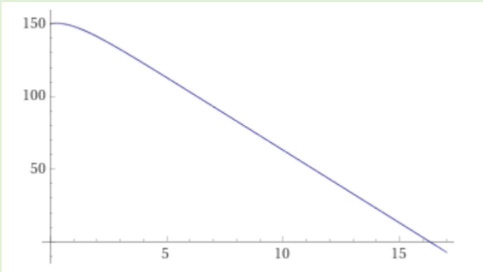



Figura 4. Solução exata y(t) do PVI-2 com: $v_0 = 3$m/s, $y_0 = 150$m, $k = 0.5$kg/s, $m = 0.5$kg.

1) Modifique o PVI-2 para os seguintes valores:

$t_0 = 0$s, $v_0 = 5$m/s, $y_0 = 200$m, $k = 0.25$kg/s, $m = 2$kg.

2) Obtenha a solução aproximada com os valores de $\Delta t$ mostrados na Tabela 1, usando o Método de Runge-Kutta das equações (47) a (52).

3) Observando as soluções associadas a cada $\Delta t$ mostrados na Tabela 1, obtenha as seguintes informações:

a) a altura máxima da trajetória, $y_{max}$;

b) o tempo decorrido do início do lançamento até atingir a altura máxima, $t_{max}$;

c) o tempo total até a queda no mar, $t_{total}$; e

d) a velocidade no momento do impacto com o mar.