Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 20

1. Objetivo: Métodos que usam transformações de similaridade.

Nesta Aula, vamos apresentar um método que usa o conceito de transformação de similaridade: o Método de **Householder**. Dois outros métodos de transformação de similaridade, o de **Jacobi** e o Método **QR**, serão apresentados nas aulas #21 e #22.

2. Transformações de Similaridade

2.1 Definição.

Dadas uma matriz $\mathbf{A}$ e uma matriz $\mathbf{P}$ que tenha uma inversa $\mathbf{P}^{-1}$, podemos construir uma nova matriz a partir do **produto** dessas três matrizes e chamá-la de $\bar{\mathbf{A}}$, isto é,

(1) $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Agora suponha que **conseguimos achar um par (autovalor, autovetor correspondente) da matriz $\bar{\mathbf{A}}$,** de maneira que a seguinte equação seja satisfeita

(2) $\bar{\mathbf{A}}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$.

Vamos substituir $\bar{\mathbf{A}}$, como definido na equação (1), na equação (2). Assim temos

(3) $(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$.

Vamos multiplicar os dois lados da equação (3) pela matriz $\mathbf{P}$ e usar as propriedades associativas da multiplicação de matrizes, isto é,

(4) $\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{P}\mathbf{v}_i \Longrightarrow (\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{A}(\mathbf{P}\mathbf{v}_i) = \lambda_i(\mathbf{P}\mathbf{v}_i)$.

Note que, na equação (4), há dois produtos nas associações marcadas:

(5) $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$, e

(6) $\mathbf{P}\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i$,

onde o primeiro resulta na matriz identidade (veja equação (5)) e o segundo resulta em um vetor pois é um produto Matriz-Vetor. Assim, a equação (4) pode ser reescrita como

(7) $\mathbf{I}\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i \Longrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$.

Note as relações entre as equações (2) e (7):

1) Em (2) nós **resolvemos o problema de autovalores e autovetores da matriz $\bar{\mathbf{A}}$** que foi construída a partir das matrizes **A** e **P** dadas.

2) Porém, em (7), vemos que **o autovalor encontrado em (2) também é autovalor de A**.

3) Além disso, **o autovetor $\mathbf{x}_i$ da matriz A associado ao autovalor λ_i é obtido** simplesmente multiplicando o autovetor $\mathbf{v}_i$ de $\bar{\mathbf{A}}$ encontrado em (2) pela matriz **P** dada, isto é, $\mathbf{P}\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i$ (veja equação (6)).

Nossas conclusões finais para esta subseção são:

Em uma transformação de similaridade

$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

1) Para qualquer valor $i = 1, 2, \cdots, n,\quad \lambda_i$ é autovalor tanto de $\bar{\mathrm{A}}$ quanto de A, portanto, **os espectros das duas matrizes são os mesmos**, isto é, $\lambda(\mathbf{A}) \equiv \lambda(\bar{\mathbf{A}})$;
2) Os **autovetores** $\mathbf{x}_i$ de **A** são obtidos **a partir dos autovetores** $\mathbf{v}_i$ de $\bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{P}\mathbf{v}_i$**.**

2.2 Escolha da matriz P.

O único inconveniente na transformação de similaridade $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ é que temos de fornecer uma matriz **P** que tenha inversa e, pior ainda, temos que calcular sua inversa $\mathbf{P}^{-1}$.

A boa notícia é que, **se P for uma matriz ortogonal, então $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$**.

Relembrando: Uma matriz **P é ortogonal** se:

1) todas as suas **colunas são vetores unitários**, isto é, têm comprimentos iguais a 1, e,
2) todas as suas **colunas são vetores ortogonais entre si**, i. e., $\mathrm{col}_j(\mathbf{P}) \cdot \mathrm{col}_k(\mathbf{P}) = 0, j \neq k$

A escolha de uma matriz P ortogonal facilita a transformação de similaridade $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}$, mas não garante que o problema de autovalores da matriz transformada $\bar{\mathbf{A}}$ seja mais fácil de resolver do que o da matriz original A.

3. Métodos de Transformações de Similaridade

Nesta seção, vamos apresentar dois métodos principais e um método auxiliar que usam transformações de similaridade. O primeiro é o método de **Householder**, o segundo o de **Jacobi** e o terceiro o **QR**.

Todos os métodos têm por objetivo definir matrizes **P** de maneira que os autovalores e autovetores da matriz transformada $\bar{\mathbf{A}}$ daquele método sejam mais fáceis de obter do que o da matriz original.

3.1 O Método de Householder.

O objetivo deste método é fazer uma sequência de transformações de similaridade até que a matriz transformada final tenha uma estrutura simples chamada matriz tridiagonal (isso acontece porque estamos lidando com matrizes **A simétricas**). Antes de discutirmos as propriedades da matriz de Householder, $\mathbf{P} \equiv \mathbf{H}$, vamos entender como essas matrizes vão ser aplicadas para chegar na matriz $\bar{\mathbf{A}}$ final.

(8) $$\bar{\mathbf{A}} = \underbrace{\mathbf{H}_{n-2}^{\mathrm{T}} \underbrace{\left(\mathbf{H}_{n-3}^{\mathrm{T}} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{H}_2^{\mathrm{T}} \underbrace{\left(\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{H}_1\right)}_{\textbf{Passo 1}} \mathbf{H}_2 \right)}_{\textbf{Passo 2}} \cdots \mathbf{H}_{n-3} \right)}_{\textbf{Passo (n-3)}} \mathbf{H}_{n-2}}_{\textbf{Passo (n-2)}}.$$

A equação (8) dá uma visão macroscópica de como o algoritmo de Householder funciona. Vamos escrever este algoritmo em alto nível e depois apresentaremos os detalhes que faltam.

3.1.1 **Método de Householder** em forma algorítmica

O algoritmo abaixo não se preocupa com otimização, mas sim com a clareza.

(MatrizSimétrica, MatrizSimétrica) metodoDeHouseholder (MatrizSimétrica **A**, int n)

MatrizSimétrica $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_\mathrm{i}$, $\mathbf{A}_\mathrm{i}$, $\overline{\mathbf{A}}$;

// Inicializar matrizes

$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{I}$; // Esta matriz vai ser passada para o método de Jacobi ou QR

// para recuperar os autovetores da matriz original.

$\mathbf{A}_{\mathrm{i}-1} \leftarrow \mathbf{A}$;

Para i = 1 ... (n-2) **faça**

// Construção da matriz de Householder do passo i

$\mathbf{H}_\mathrm{i} \leftarrow \mathrm{matrizHouseholderBaseadaNaCol\_iDaMatrizDoPassoAnterior}(\mathbf{A}_{\mathrm{i}-1}, \mathrm{i})$;

// Transformação de similaridade do passo i

$\mathbf{A}_\mathrm{i} \leftarrow \mathbf{H}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\mathbf{A}_{\mathrm{i}-1}\mathbf{H}_\mathrm{i}$;

// Salvar para o próximo passo.

$\mathbf{A}_{\mathrm{i}-1} \leftarrow \mathbf{A}_\mathrm{i}$;

// Acumular o produto das matrizes de Householder como $\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{I}\ \mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 \cdots \mathbf{H}_{\mathrm{n}-3}\mathbf{H}_{\mathrm{n}-2}$

$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{H}\mathbf{H}_\mathrm{i}$;

End Para

// No final do loop, a matriz $\mathrm{A_i}$ já está no formato de uma matriz tridiagonal e já poderia ser retornada sem a cópia abaixo.

$\overline{\mathbf{A}} \leftarrow \mathbf{A}_\mathrm{i}$;

return ($\overline{\mathbf{A}}$, **H**);

Neste momento, você consegue ver que o algoritmo é a reprodução exata da equação (8). Porém, alguns pontos precisam ser esclarecidos:

1) Por que o loop vai de 1 até n-2?
2) Como é o método matrizHouseholderBaseadaNaCol_iDaMatrizDoPassoAnterior(...)?
3) Para que serve a matriz acumulada **H**?

Na subseção 3.1.2, vamos esclarecer o ponto 1). Na subseção 3.1.3, vamos esclarecer o ponto 2). Finalmente, na seção 3.1.4, vamos esclarecer o ponto 3).

3.1.2 Estrutura da matriz tridiagonal $\bar{\mathrm{A}}$

O método de Householder aplica uma sequência de transformações de similaridade para que a matriz original seja transformada em uma matriz de estrutura mais simples. A matriz tridiagonal tem a seguinte forma:

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}\right] \tag{9}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}\right]$$

A **diagonal principal** tem ***n*** elementos e está representada pela cor **verde**. As **duas subdiagonais paralelas** têm ***n-1*** elemento e estão representadas pela cor **vermelha**.

Note que, em todas as colunas, exceto a última, há apenas 1 elemento b abaixo do elemento da diagonal principal e, **abaixo do elemento b**, todos os elementos são 0. Portanto, para transformar a matriz original para este formato, precisamos zerar os elementos abaixo dos bs em cada coluna. Porém, abaixo dos bs **só há elementos as serem zerados nas primeiras n-2** colunas. Como a matriz é simétrica, o que fizermos para as colunas acontecerá igualmente nas linhas.

Cada passo do loop tem o objetivo de deixar apenas um elemento diferente de zero abaixo do elemento da diagonal. Por isso, o loop vai da coluna 1 até a coluna n-2.

3.1.3 Constução da matriz de Householder $\mathbf{H}_\mathrm{i}$

Vamos repetir a equação (8) aqui e observar que a matriz $\mathbf{H}_\mathrm{i}$ atua na matriz resultante dos parênteses mais internos, ou seja, na matriz resultante dos (i-1) passos anteriores.

$$\bar{\mathbf{A}} = \underbrace{\mathbf{H}_{n-2}^{\mathrm{T}} \underbrace{\left(\mathbf{H}_{n-3}^{\mathrm{T}} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{H}_2^{\mathrm{T}} \underbrace{\left(\mathbf{H}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{H}_1 \right)}_{\text{Passo 1}} \mathbf{H}_2 \right)}_{\text{Passo 2}} \cdots \mathbf{H}_{n-3} \right)}_{\text{Passo (n−3)}} \mathbf{H}_{n-2}}_{\text{Passo (n−2)}} \tag{8}$$

Assim, quando aplicarmos a operação do passo i do algoritmo, isto é,

$$\mathbf{A}_\mathrm{i} \leftarrow \mathbf{H}_\mathrm{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_{\mathrm{i}-1} \mathbf{H}_\mathrm{i}, \tag{10}$$

a estrutura tridiagonal, já conseguida nas primeiras (i-1) colunas e (i-1) linhas, deve ser preservada. Para que isso aconteça, a estrutura da matriz $\mathbf{H}_{\mathrm{i}}$ é composta de quatro blocos como

(11) $\mathbf{H}_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_{\mathrm{II,II}} \end{bmatrix}.$

Essa estrutura é levada em conta no método
MatrizSimétrica matrizHouseholderBaseadaNaCol_iDaMatrizDoPassoAnterior(...).

3.1.3.1 Matiz de reflexão de Householder

A matriz de Householder é uma matriz de reflexão. Isso significa que, dadas as informações de um plano (espelho) que passa pela origem do sistema de coordenadas, a matriz de Householder aplicada ao vetor posição de um ponto D produz o vetor posição do ponto D' que é a imagem do ponto D em relação ao espelho. Assim, dado o vetor unitário $\mathbf{n}$ perpendicular ao plano do espelho, a matriz de Householder é escrita como

(12) $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{2nn}^{\mathrm{T}}.$

No nosso caso, $\mathbf{n}$ não é dado, mas calculado. Vamos ver os dois problemas possíveis que levam à construção da matriz $\mathbf{H}$:

Problema 1. Usado em computação gráfica.

> Dados o ponto D e o vetor $\mathbf{n}$ normal (perpendicular) ao espelho, construir $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{2nn}^{\mathrm{T}}$ para obter a imagem D' de D em relação ao espelho.

Problema 2. Nosso problema aqui.
Dado um vetor $\mathbf{w}$ (considerado como vetor posição de algum ponto D), definimos o vetor $\mathbf{w}'$ (considerado como vetor posição da imagem D' do ponto D com relação a um espelho) e achamos o vetor $\mathbf{n}$ do espelho que produziria a imagem $\mathbf{w}'$ especificada.

Vamos fazer algumas observações que nos ajudarão a resolver o problema 2.

Observação 1. O vetor paralelo ao segmento de reta que liga D' a D é perpendicular ao espelho mas não tem comprimento unitário. Esse vetor pode ser escrito como

(13) $\mathbf{N} = \mathbf{w} - \mathbf{w}' \Rightarrow \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{||\mathbf{N}||}$

onde

(14) $||\mathbf{N}|| = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}}.$

Observação 2. Como o espelho passa pela origem, a distância da origem ao ponto D e a distância da origem ao ponto D' são iguais. Isso significa que

(15) $||\mathbf{w}'|| = ||\mathbf{w}||.$

Observação 3. Se pusermos a imagem D' sobre o eixo de coordenadas cujo vetor unitário é $\mathbf{e}_{\mathrm{j}}$, já que a equação (19) dá o comprimento do vetor $\mathbf{w}'$, podemos escrever o vetor $\mathbf{w}'$ como

(16) $\mathbf{w}' = ||\mathbf{w}||\mathbf{e}_{\mathrm{j}}.$

Solução do Problema 2.

1. Calcular o comprimento de $\mathbf{w}$ substituindo $\mathbf{N}$ por $\mathbf{w}$ na equação (14);
2. Calcular $\mathbf{w}'$ usando a equação (16);
3. Calcular $\mathbf{N}$ e $\mathbf{n}$ usando as equações (13) e (14);
4. Construir a matriz $\mathbf{H}$ usando a equação (12).

Exemplo do efeito de H sobre a estrutura de uma matriz

Suponha que os dois primeiros passos do algoritmo já foram executados e a matriz obtida seja

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é construir a matriz $\mathbf{H}_3$ a partir das informações da coluna 3 da matriz $\boldsymbol{A}_2$. A matriz $\mathbf{H}_3$ deve preservar as duas primeiras linhas e colunas e transformar a coluna 3 e a linha 3 de forma que o vetor abaixo da diagonal da coluna 3 faça o papel de **w.** Assim

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i) Calcular o comprimento de **w** substituindo **N** por **w** na equação (14)

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

ii) Calcular $\mathbf{w}'$ usando a equação (16)

$$\mathbf{w} = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

iii) Calcular **N** e **n** usando as equações (13) e (14)

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{N}\| = \sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2 + 1}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2 + 1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}} \\ \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

Construir a matriz $\mathbf{H}_3$ usando a equação (12).

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}} \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}} \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}}} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Vamos aplicar essa matriz para obter a matriz

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{H}_3\mathbf{A}_2\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2.23607 & 0 \\ 0 & 0 & 2.23607 & 8.8 & -2.6 \\ 0 & 0 & 0 & -2.6 & 5.2 \end{bmatrix}.$$

Numa matriz 5 x 5, $\mathbf{A}_3 = \overline{\mathbf{A}}$

3.1.3.2 Mostrar que a matriz de Householder é simétrica

Se $\mathbf{H}$ for simétrica, ela tem de ser igual à sua transposta. Assim,

(17) $\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{I})^{\mathrm{T}} - 2(\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} - 2(\mathbf{n}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{n})^{\mathrm{T}} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}$

3.1.3.3 Mostrar que a matriz de Householder é otogonal

Se a matriz for ortogonal sua transposta é igual à sua inversa. Porém, com $\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}$, basta mostrar que

$\mathbf{H}.\mathbf{H} = \mathbf{I}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}.\mathbf{H} &= (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}})(\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}}) \\ &= \mathbf{I}.\mathbf{I} - 2\mathbf{I}\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}}\mathbf{I} + 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}}\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} + 4\mathbf{n}(\mathbf{n}^{\mathrm{T}}\mathbf{n})\mathbf{n}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} + 4\mathbf{n}(\mathbf{I})\mathbf{n}^{\mathrm{T}} \\ &= \mathbf{I} - 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} + 4\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{H}.\mathbf{H} &= \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Logo, a matriz $\mathbf{H}$ é sua própria transposta e sua própria inversa. Portanto, $\mathbf{H}$ é ortogonal.

Vamos descrever o algoritmo de construção da matriz $\mathbf{H}_{\mathrm{i}}$.

3.1.3.4 Algoritmo de construção da matriz de Householder

MatrizSimétrica metodoDeHouseholder (MatrizSimétrica **A**, int i)

MatrizSimétrica **I**;

Vetor $\mathbf{w}, \mathbf{w}', \mathbf{N}, \mathbf{n}, \mathbf{e}$;

// Inicializar vetores

$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{0}$; // Vetor nulo com n elementos

$\mathbf{w}' \leftarrow \mathbf{0}$; // Vetor nulo com n elementos

$\mathbf{e} \leftarrow \mathbf{0}$; // Vetor nulo com n elementos

// Copiar os elementos abaixo da diagonal da coluna i da matriz **A**

// para as respectivas posições no vetor **w**, isto é, da posição i+1 até o final.

$\mathbf{w}(\mathrm{i}+1:\mathrm{n}) \leftarrow \mathbf{A}((\mathrm{i}+1:\mathrm{n}), \mathrm{i})$;

// Calcular o comprimento do vetor **w**

$\boldsymbol{L_w} \leftarrow \|\mathbf{w}\|$;

// Copiar $\boldsymbol{L_w}$ na posição i+1 do vetor $\mathbf{w}'$

$\mathbf{w}'(\mathrm{i}+1) \leftarrow L_w$;

// Calcular o vetor **N**

$\mathbf{N} \leftarrow \mathbf{w} - \mathbf{w}'$;

// Normalizar o vetor **N**

$\mathbf{n} \leftarrow \frac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}$;

// Montar a matriz de Householder

$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathrm{T}}$;

return (**H**);

Observação: Cuidado com os índices na implementação.

<u>Tarefa #13:</u>

Com a matriz **A** abaixo, faça o que se pede:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 40 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 30 & 12 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 20 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 25 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

1) Implemente o método de Householder e aplique-o sobre **A** para encontrar
   i. a matriz tridiagonal $\overline{\mathbf{A}}$
   ii. a matriz acumulada $\mathbf{H} = \mathbf{H_1 H_2 H_3}$
3) Use os métodos da potência para encontrar os autovalores e autovetores da matriz $\overline{\mathbf{A}}$.
4) Usando a matriz **H** e os autovetores da matriz $\overline{\mathbf{A}}$ encontre os autovetores da matriz **A**.
5) Encontre os autovalores da matriz **A**.