Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 23

1. Objetivo: Introdução sobre Problemas de Valores Iniciais (PVI).

Nesta Aula, são apresentados os seguintes conceitos:

- Equação diferencial
- Problema de Valor Inicial
- Solução exata de um problema de valor inicial
- Solução aproximada de um problema de valor inicial

2. Conceitos introdutórios sobre problemas de valores iniciais

Para entender o que é um problema de valor inicial e como resolvê-lo, é necessário entender o que é uma equação diferencial. Portanto, esse é o primeiro conceito a ser apresentado.

2.1 Definição de equações diferenciais

Uma equação diferencial, como toda equação em matemática, tem a forma

(1) $E(\dots) = 0.$

No entanto, a forma de composição da expressão matemática $E(\dots)$, e o que se deseja obter ao resolver esta equação fazem com que (1) seja chamada de equação diferencial.

Imagine que exista uma função $y(t)$, e que essa função tenha derivadas com relação à variável t, isto é, $y(t)$ tem derivadas: $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ (derivada de ordem 1), $\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}$ (derivada de ordem 2), $\frac{\mathrm{d}^3y(t)}{\mathrm{d}t^3}$ (derivada de ordem 3) ... $\frac{\mathrm{d}^ny(t)}{\mathrm{d}t^n}$ (derivada de ordem n).

Se a equação (1) **envolver** a função $y(t)$ e suas derivadas até uma ordem n específica (n =1, 2, 3, ...), ela é chamada de **equação diferencial**.

Se a derivada de maior ordem que aparece na equação (1) for de ordem n, a equação diferencial será dita de ordem n.

Exemplos de equações diferenciais:

(2) $E\left(y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right) = 3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - 2y(t) = 0;$

(3) $E\left(y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right) = 3\left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2y(t) = 0;$

(4) $E\left(y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) = t^2\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - 5y(t) = 0;$ e

(5) $E\left(y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) = t^2\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}y(t) + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^3 - 5\ln\big(y(t)\big) = 0.$

As equações (2) e (3) são equações diferenciais de ordem 1 (ou equações diferenciais de primeira ordem) porque a derivada de mais alta ordem é $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$. Por sua vez, as equações (4) e (5) são equações diferenciais de segunda ordem porque a derivada de mais alta ordem nessas equações é $\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}$.

Uma equação diferencial é dita **linear** quando $E(\dots)$ é uma combinação linear de $y(t)$ e suas derivadas para cada valor de t. Assim, as **equações diferenciais em (2) e (4) são lineares** pois, para um dado valor de t, podem ser escritas como

(6) $E\left(y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}, \dots \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i}$,

onde c_i são os coeficientes de combinação linear para um dado valor de t e $\frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i}$ são as derivadas de ordem i da função $y(t)$. Nessa notação, para $i = 0$, $\frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} = \frac{\mathrm{d}^0 y(t)}{\mathrm{d}t^0} = y(t)$.

As equações (3) e (5) são **não-lineares** pois **não podem ser escritas na forma da equação (6)**.

Se a função y for uma função de uma variável apenas, como nos exemplos dados, isto é, y é uma função da variável t apenas, todas as derivadas são ditas **derivadas ordinárias**. Nesse caso, as equações diferenciais são chamadas de **equações diferenciais ordinárias (EDO)**.

Se a função y for uma função de mais de uma variável, todas as derivadas com relação às diversas variáveis são ditas **derivadas parciais**. Nesse caso, as equações diferenciais são chamadas de **equações diferenciais parciais (EDP)**.

Exemplos de equações diferenciais parciais:

(7) $E\left(y(r,s), \frac{\partial y(r,s)}{\partial r}, \frac{\partial y(r,s)}{\partial s}\right) = 3\frac{\partial y(r,s)}{\partial r} + 2\frac{\partial y(r,s)}{\partial s} - y(r,s) = 0$; (EDP de primeira ordem)

(8) $E\left(y(r,s), \frac{\mathrm{d}y(r,s)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) = \frac{\partial^2 y(r,s)}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2 y(r,s)}{\partial r\, \partial s} + \frac{\partial^2 y(r,s)}{\partial s^2} + g(r,s) = 0$ (EDP, ordem 2)

2.2 Soluções de equações diferenciais

Em uma equação diferencial, deseja-se **encontrar a função y que satisfaz a expressão da equação diferencial**.

Suponha, por exemplo, que se deseje solucionar a equação (2)

(2) $E\left(y(t), \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right) = 3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - 2y(t) = 0.$

Imagine que alguém disse que a solução dessa equação é a função

(9) $y(t) = e^{\frac{2}{3}t}$.

Para saber se isso é verdade, testa-se a solução apresentada e verifica-se se ela satisfaz a equação diferencial dada. Assim, no caso apresentado, tem-se que

(10) $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}t}$.

Substituindo-se (9) e (10) em (2), obtém-se

$$3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - 2y(t) = 3\left(\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}t}\right) - 2\left(e^{\frac{2}{3}t}\right) = 2\left(e^{\frac{2}{3}t}\right) - 2\left(e^{\frac{2}{3}t}\right) = 0.$$

Portanto, a solução apresentada está correta. Neste caso, há outras soluções para a equação diferencial. Veja por exemplo a função

(11) $y(t) = Ce^{\frac{2}{3}t}$,

onde C é uma constante qualquer. Assim, substituindo-se (11) e sua derivada na equação diferencial (2), tem-se

$$3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - 2y(t) = 3\left(\frac{2}{3}Ce^{\frac{2}{3}t}\right) - 2\left(Ce^{\frac{2}{3}t}\right) = 2\left(Ce^{\frac{2}{3}t}\right) - 2\left(Ce^{\frac{2}{3}t}\right) = 0.$$

A constante C é arbitrária e, nesse caso, diz-se que (11) é uma **solução geral** da equação diferencial (2). Se por exemplo, além da equação diferencial, existir alguma informação sobre o valor de $y(t)$ em algum valor de t específico t_0, isto é, se $y(t_0) = y_0$, a constante C poderá ser determinada, usando essa informação em conjunto com a solução geral. No caso da solução geral (11) da equação diferencial (2), tem-se que

$$(12) \quad \begin{aligned} y(t_0) &= Ce^{\frac{2}{3}t_0} = y_0 \\ &\Longrightarrow Ce^{\frac{2}{3}t_0}e^{-\frac{2}{3}t_0} = y_0e^{-\frac{2}{3}t_0} \\ &\Longrightarrow Ce^{\frac{2}{3}t_0-\frac{2}{3}t_0} = y_0e^{-\frac{2}{3}t_0} \\ &\Longrightarrow Ce^{0} = y_0e^{-\frac{2}{3}t_0} \\ &\Longrightarrow C = y_0e^{-\frac{2}{3}t_0} \end{aligned}$$

Logo, substituindo-se a constante calculada em (12) na solução geral, obtém-se a solução específica para o caso dado, isto é

$$(13) \quad y(t) = Ce^{\frac{2}{3}t} = y_0e^{-\frac{2}{3}t_0}e^{\frac{2}{3}t} = y_0e^{\frac{2}{3}(t-t_0)}.$$

2.3 Problema de valor inicial

Um problema de valor inicial (PVI) é aquele definido por uma equação diferencial e por uma condição inicial que a solução geral da equação diferencial tem que satisfazer (em um único valor da variável do problema). Assim, todo problema de valor inicial é escrito da seguinte forma

$$(14) \quad \text{PVI: } \begin{cases} ED \\ c.i. \end{cases},$$

onde ED é uma equação diferencial e $c.i.$ é a condição inicial especificada.

O exemplo dado na Seção 2.2 é um problema de valor inicial que pode ser escrito como

$$(15) \quad \text{PVI: } \begin{cases} 3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - 2y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

2.4 Solução exata de um problema de valor inicial

A **solução exata** de um PVI deve satisfazer tanto a Equação Diferencial do problema quanto a condição inicial. Assim, para o problema (15) a solução exata é

$$(16) \quad y(t) = y_0e^{\frac{2}{3}(t-t_0)}.$$

O gráfico da solução exata para $t_0 = 0$ e $y_0 = 2$ é mostrado na Figura 1.

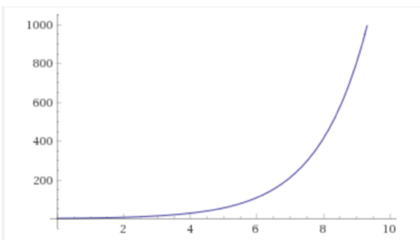

Figura 1. $y(t) = y_0e^{\frac{2}{3}(t-t_0)} = 2e^{\frac{2}{3}t}$

Normalmente, para se definir um problema de valor inicial, há uma fase de construção do modelo que consiste no desenvolvimento da equação diferencial que governa algum fenômeno e, em seguida, definem-se as condições iniciais do problema. Os dois exemplos a seguir ilustram a modelagem e a solução de dois problemas de valor inicial.

2.4.1 Problema de uma partícula em queda livre no vácuo.

Para modelar este problema de valor inicial, imagina-se uma fotografia da partícula em queda livre num instante de tempo t e analisa-se a força resultante que atua sobre a partícula (Figura 2).

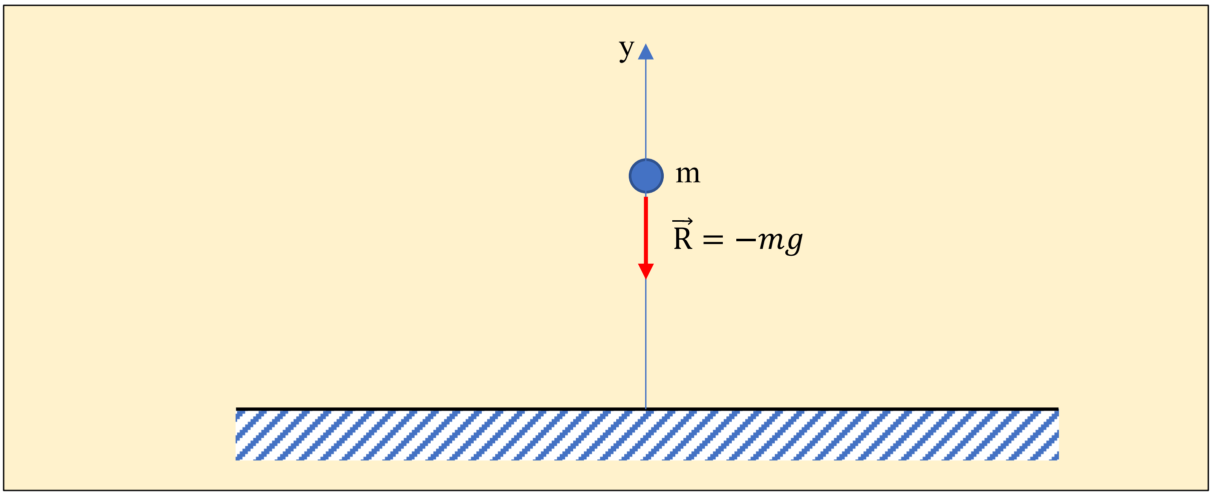

Figura 2. Partícula em queda livre no vácuo em um dado instante de tempo t.

No vácuo, a única força atuando sobre a partícula é a força de atração gravitacional. Assim, a resultante das forças sobre a partícula de massa m é $\vec{\mathrm{R}} = -mg$. O sinal negativo indica que, na fase de modelagem, o sentido positivo do eixo y que define a posição da partícula é de baixo para cima com $y = 0$ no nível do chão. A segunda lei de Newton diz que a força resultante sobre a partícula é proporcional à aceleração da partícula, isto é,

(17) $\vec{\mathrm{R}} = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \Longrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -mg \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + g = 0.$

Assim, a equação diferencial que governa o problema da partícula em queda livre no vácuo é

(18) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + g = 0,$

uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Para achar a solução geral desse problema, basta reescrever a equação (18) como

(19) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = -g,$

integrar (19) uma vez com relação a t, isto é,

(20) $\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = -\int g\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt + C_1,$

e, novamente, integrar (20) com relação a t, isto é,

(21) $\int \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = -g\int t\,\mathrm{d}t + \int C_1\,\mathrm{d}t \Longrightarrow \mathrm{y(t)} = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2.$

Portanto, a solução geral da equação (18) é

(22) $\mathrm{y(t)} = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2.$

Considere o problema de valor inicial da partícula em queda livre no vácuo com as seguintes condições iniciais (são necessárias duas condições iniciais para se determinar as duas constantes da solução geral)

$$(23)\quad \text{PVI:} \begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + g = 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = v_0, \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

onde as condições iniciais indicam a velocidade da partícula, v_0, e a posição da partícula, y_0, no instante de tempo t_0. Assim, pela equação (20), tem-se

$$(24)\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = -gt_0 + C_1 = v_0 \Longrightarrow C_1 = v_0 + gt_0.$$

Pela equação (22), tem-se que

$$(25)\quad \begin{array}{rclcl} y(t_0) & = & -\frac{1}{2}g{t_0}^2 + C_1 t_0 + C_2 & = & y_0 \\ & \Longrightarrow & C_2 & = & y_0 - C_1 t_0 + \frac{1}{2}g{t_0}^2 \\ & \Longrightarrow & C_2 & = & y_0 - (v_0 + gt_0)t_0 + \frac{1}{2}g{t_0}^2. \\ & \Longrightarrow & C_2 & = & y_0 - v_0 t_0 - g{t_0}^2 + \frac{1}{2}g{t_0}^2 \\ & \Longrightarrow & C_2 & = & y_0 - v_0 t_0 - \frac{1}{2}g{t_0}^2 \end{array}$$

Assim, substituindo-se as constantes obtidas em (24) e (25) na solução geral (22), tem-se

$$(26)\quad \begin{array}{rcl} \mathrm{y(t)} & = & -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2 \\ & = & -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 + gt_0)t + \left(y_0 - v_0 t_0 - \frac{1}{2}g{t_0}^2\right) \\ & = & y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t^2 - 2tt_0 + {t_0}^2) \\ & = & y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{array}.$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial (23) é

$$(27)\quad \mathrm{y(t)} = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Durante o desenvolvimento desta solução a expressão da velocidade da partícula $v(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$ também foi encontrada como

$$(28)\quad v(t) \overset{(20)}{=} -gt + C_1 \overset{(24)}{\Longrightarrow} v(t) = -gt + (v_0 + gt_0) \Longrightarrow v(t) = v_0 - g(t - t_0).$$

Com as equações (27) e (28), pode-se determinar o **estado** da partícula em qualquer instante de tempo t se forem especificados t_0, v_0 e y_0.

Considere por exemplo, o problema de achar, em qualquer instante t, o estado da partícula que foi lançada ao mar de um penhasco de 150m de altura em relação ao nível do mar (i.e., $y_0 = 150$) com uma velocidade inicial positiva (isto é lançada para o alto) de 3m/s (i.e., $v_0 = 3$) no instante $t_0 = 0$ segundos. Assim, o estado da partícula no instante t é

$$(29)\quad \begin{aligned} S(t) &= \begin{pmatrix} v(t) \\ \mathrm{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 - g(t-t_0) \\ y_0 + v_0(t-t_0) - \frac{1}{2}g(t-t_0)^2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} v(t) \\ \mathrm{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - g(t) \\ 150 + 3(t) - \frac{1}{2}g(t)^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando a aceleração da gravidade $g \approx 10\mathrm{m/s}^2$, quanto tempo a partícula leva até cair no mar? Qual a velocidade da partícula neste instante?

No nível do mar, $\mathrm{y(t)} = 0 = 150 + 3(t) - \frac{1}{2}10(t)^2 \xRightarrow{\substack{resolvendo\ a\ equação \\ do\ segundo\ grau}} t_{mar} \approx 5.78\mathrm{s}$. Logo, a velocidade da partícula no momento do impacto é $v(5.78) = 3 - 10(5.78) = -54.8\mathrm{m/s}$. O sinal negativo da velocidade indica que o vetor velocidade tem o sentido de cima para baixo.

2.4.2 Problema de uma partícula em queda livre com resistência do ar.

Para modelar este problema de valor inicial, imagina-se uma fotografia da partícula em queda livre num instante de tempo t e analisa-se a força resultante que atua sobre a partícula (Figura 3).

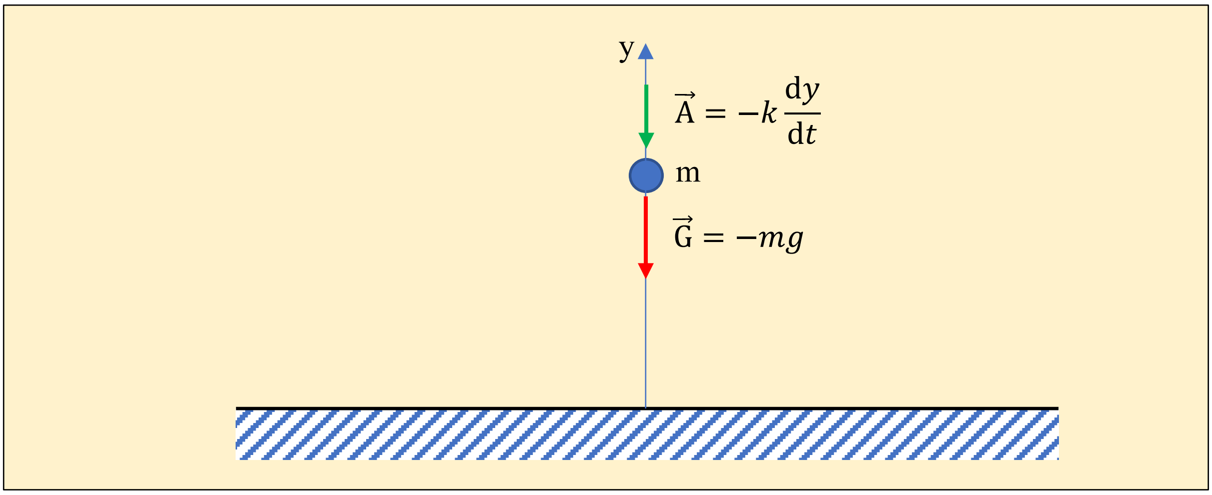

Figura 3. Partícula em queda livre com resistência do ar em um dado instante de tempo t.

Na modelagem, imagina-se que a partícula está sendo lançada de baixo para cima. Assim, a velocidade $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ é positiva e a força de atrito do ar $\vec{\mathrm{A}}$ é contrária ao sentido da velocidade. A constante de proporcionalidade k depende da forma aerodinâmica da partícula (o valor de k é maior para partículas com forma aerodinâmica ruim). A resultante das forças que atuam sobre a partícula é a soma das forças de atração gravitacional e de atrito do ar, isto é, $\vec{\mathrm{R}} = -mg - k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. O sinal negativo indica que, na fase de modelagem, o sentido positivo do eixo y que define a posição da partícula é de baixo para cima com $y = 0$ no nível do chão. A segunda lei de Newton diz que a força resultante sobre a partícula é proporcional à aceleração da partícula, isto é,

$$(30)\quad \vec{\mathrm{R}} = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \Longrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -mg - k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + g = 0.$$

Assim, a equação diferencial que governa o problema da partícula em queda livre com resistência do ar é

$$(31)\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + g = 0,$$

uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Para achar a solução geral desse problema, é preciso aplicar uma técnica especial para conseguir integrar a equação, mas, antes, reescreve-se (31) como

(32) $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -g.$

Considere a seguinte expressão

(33) $h(t) = e^{\frac{k}{m}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$

Derivando (33) com relação a t tem-se

(34)
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(h(t)\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{k}{m}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(h(t)\big) &= \frac{k}{m}e^{\frac{k}{m}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + e^{\frac{k}{m}t}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(h(t)\big) &= e^{\frac{k}{m}t}\left(\overbrace{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}^{(32)}\right)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(h(t)\big) &= e^{\frac{k}{m}t}(-g) = -ge^{\frac{k}{m}t}.
\end{aligned}$$

A integral da equação (34) com relação a t é

(35) $\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(h(t)\big)\,\mathrm{d}t = -\int ge^{\frac{k}{m}t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow h(t) = -g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C_1.$

Substituindo (35) em (33), obtém-se

(36) $e^{\frac{k}{m}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C_1.$

Multiplicando-se os dois lados de (36) por $e^{-\frac{k}{m}t}$, chega-se a

(37) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -g\frac{m}{k} + C_1 e^{-\frac{k}{m}t}.$

Integrando-se (37) com relação a t, obtém-se

(38) $\int\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = -g\frac{m}{k}\int \mathrm{d}t + \int C_1 e^{-\frac{k}{m}t}\,\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{y(t)} = -g\frac{m}{k}t - C_1\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + C_2.$

Portanto, a solução geral da equação (31) é

(39) $\mathrm{y(t)} = -g\frac{m}{k}t - C_1\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + C_2.$

Considere o problema de valor inicial da partícula em queda livre com resistência do ar com as seguintes condições iniciais (são necessárias duas condições iniciais para se determinar as duas constantes da solução geral)

(40) PVI: $\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + g = 0\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = v_0\\ y(t_0) = y_0\end{cases}$,

onde as condições iniciais indicam a velocidade da partícula, v_0, e a posição da partícula, y_0, no instante de tempo t_0. Assim, pela equação (37), tem-se

(41) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = -g\frac{m}{k} + C_1 e^{-\frac{k}{m}t_0} = v_0 \Longrightarrow C_1 = v_0 e^{\frac{k}{m}t_0} + g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t_0}.$

Pela equação (39), tem-se que

$$
(42)\quad
\begin{aligned}
y(t_0) = \quad & -g\frac{m}{k}t_0 - C_1\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t_0} + C_2 &&= y_0 \\
\Longrightarrow \quad & C_2 &&= y_0 + g\frac{m}{k}t_0 + C_1\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t_0} \\
\Longrightarrow \quad & C_2 &&= y_0 + g\frac{m}{k}t_0 + \left(v_0 e^{\frac{k}{m}t_0} + g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t_0}\right)\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t_0} \\
\Longrightarrow \quad & C_2 &&= y_0 + g\frac{m}{k}t_0 + \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)\frac{m}{k}
\end{aligned}
.
$$

Logo, substituindo-se as constantes obtidas em (41) e (42) na solução geral (39), tem-se

$$
(43)\quad
\begin{aligned}
\mathrm{y(t)} &= -g\frac{m}{k}t - C_1\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + C_2 \\
&= -g\frac{m}{k}t - \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)e^{\frac{k}{m}t_0}\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} + \left(y_0 + g\frac{m}{k}t_0 + \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)\frac{m}{k}\right) \\
&= -g\frac{m}{k}t - \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} + \left(y_0 + g\frac{m}{k}t_0 + \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)\frac{m}{k}\right) \\
&= y_0 - g\frac{m}{k}(t-t_0) - \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)\frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - 1\right)
\end{aligned}
.
$$

Portanto, a solução do problema de valor inicial (40) é

(44) $\mathrm{y(t)} = y_0 - g\frac{m}{k}(t-t_0) - \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)\frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - 1\right)$

Durante o desenvolvimento desta solução a expressão da velocidade da partícula $v(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$ também foi encontrada como

(45) $v(t) \overset{(37)}{=} -g\frac{m}{k} + C_1 e^{-\frac{k}{m}t} \overset{(41)}{\Longrightarrow} v(t) = -g\frac{m}{k} + \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)}.$

Com as equações (44) e (45), pode-se determinar o **estado** da partícula em qualquer instante de tempo t se forem especificados t_0, v_0 e y_0.

Considere por exemplo, o problema de achar, em qualquer instante t, o estado da partícula que foi lançada ao mar de um penhasco de 150m de altura em relação ao nível do mar (i.e., $y_0 = 150$) com uma velocidade inicial positiva (isto é lançada para o alto) de 3m/s (i.e., $v_0 = 3$) no instante $t_0 = 0$ segundos. Assim, o estado da partícula no instante t é

$$
(46)\quad
\begin{aligned}
S(t) \;=\; \begin{pmatrix} v(t) \\ \mathrm{y(t)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -g\frac{m}{k} + \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} \\ y_0 - g\frac{m}{k}(t-t_0) - \left(v_0 + g\frac{m}{k}\right)\frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}(t-t_0)} - 1\right) \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} v(t) \\ \mathrm{y(t)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -g\frac{m}{k} + \left(3 + g\frac{m}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}(t)} \\ 150 - g\frac{m}{k}(t) - \left(3 + g\frac{m}{k}\right)\frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}(t)} - 1\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
.
$$

Considerando a aceleração da gravidade $g \approx 10\mathrm{m/s^2}$, $\mathrm{m} = 0.5\mathrm{kg}$, e $k = 0.5\mathrm{kg/s}$, quanto tempo a partícula leva até cair no mar? Qual a velocidade da partícula neste instante?

No nível do mar, $\mathrm{y}(\mathrm{t}) = 0 = 150 - 10(t) - (3+10)\left(e^{-(t)} - 1\right) \Longrightarrow t_{mar} \approx 16.3\mathrm{s}$. Logo, a velocidade da partícula no momento do impacto é $v(16.3) = -10 + (13)e^{-(16.3)} = -10\mathrm{m/s}$. O sinal negativo da velocidade indica que o vetor velocidade tem o sentido de cima para baixo.

2.5 Solução aproximada de um problema de valor inicial

A **solução aproximada** de um PVI parte da condição inicial e busca aproximações da solução da equação diferencial, isto é, aproximações de $S(t)$ em uma sequência de valores discretos da variável t.

Para resolver um PVI de forma aproximada, a descrição original do problema tem que ser transformada para o seguinte formato (EDO de primeira ordem)

(47) PVI: $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$,

onde $S(t)$ é o estado do problema e S_0 é o estado inicial do problema.

Exemplos de transformação da descrição original do PVI para o formato (30):

Exemplo 1. PVI (15).

(48) PVI-1: $\begin{cases} \underbrace{\begin{matrix} 3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - 2y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{matrix}}_{PVI\ original} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underbrace{\begin{matrix} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{matrix}}_{PVI\ transformado} \end{cases}$.

Exemplo 2. PVI (23) – Partícula em queda livre no vácuo.

(49) PVI-2: $\begin{cases} \underbrace{\begin{matrix} \frac{d^2y}{dt^2} + g = 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = v_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{matrix}}_{PVI\ original} \end{cases}$.

Considerando $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = v(t)$ a velocidade da partícula, então a aceleração da partícula $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ pode ser escrita como $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ a derivada da velocidade. Portanto, podemos definir o estado da partícula como as funções que aparecem nas derivadas de primeira ordem, ou seja, $v(t)$ e $y(t)$ (velocidade e posição da partícula). Assim, o estado da partícula é escrito como

(50) $S(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \mathrm{y}(\mathrm{t}) \end{pmatrix}$,

e a derivada de ordem 1 do estado da partícula é escrita como

(51) $\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \\ v(t) \end{pmatrix}$.

Portanto, o PVI transformado é

(52) PVI: $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$, onde $\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}(S(t), t) = \begin{pmatrix} -g \\ v(t) \end{pmatrix}$ e $S_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Exemplo 3. PVI (40) – Partícula em queda livre com resistência do ar.

$$(53)\quad \text{PVI-3:}\begin{cases}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dy}{dt}+g=0\\ \frac{dy}{dt}(t_0)=v_0\\ y(t_0)=y_0\end{cases}.$$

Considerando $\frac{dy(t)}{dt}=v(t)$ a velocidade da partícula, então a aceleração da partícula $\frac{d^2y}{dt^2}$ pode ser escrita como $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dv(t)}{dt}$ a derivada da velocidade. Portanto, podemos definir o estado da partícula como as funções que aparecem nas derivadas de primeira ordem, ou seja, $v(t)$ e $y(t)$ (velocidade e posição da partícula). Assim, o estado da partícula é escrito como

$$(54)\quad S(t)=\begin{pmatrix}v(t)\\ y(t)\end{pmatrix},$$

e a derivada de ordem 1 do estado da partícula é escrita como

$$(55)\quad \frac{dS(t)}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dv(t)}{dt}\\ \frac{dy(t)}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-g-\frac{k}{m}\frac{dy}{dt}\\ v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-g-\frac{k}{m}v(t)\\ v(t)\end{pmatrix}.$$

Portanto, o PVI transformado é

$$(56)\qquad \text{PVI:}\ \begin{cases}\frac{dS(t)}{dt}=\mathcal{F}(S(t),t)\\ S(t_0)=S_0\end{cases},\quad \text{onde}\quad \frac{dS(t)}{dt}=\begin{pmatrix}\frac{dv(t)}{dt}\\ \frac{dy(t)}{dt}\end{pmatrix},\ \mathcal{F}(S(t),t)=\begin{pmatrix}-g-\frac{k}{m}v(t)\\ v(t)\end{pmatrix}$$

e $S_0=\begin{pmatrix}v_0\\ y_0\end{pmatrix}$.

Depois de transformado para o formato (30), a solução aproximada exige que sejam definidos o número de pontos discretos para os quais a solução aproximada será obtida, e o espaçamento entre esses pontos discretos. Alternativamente, pode-se especificar o espaçamento entre os pontos discretos, o ponto inicial e o ponto final. Para ficar mais claro, imagine o PVI (48) cuja solução exata está mostrada novamente na Figura 4.

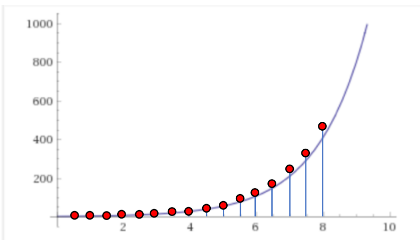

Figura 4. $y(t)=y_0e^{\frac{2}{3}(t-t_0)}=2e^{\frac{2}{3}t}$

Assim, para determinar a solução aproximada, a seguinte escolha poderia ser feita:

- Ponto inicial, $t_0=0$;
- Ponto final, $t_F=8$;
- Espaçamento entre os pontos discretos, $\Delta t=0.5$ segundos.

Portanto, partindo do ponto inicial, o estado do problema seria obtido nos seguintes pontos:

$$(57)\quad S_0,S_1,S_2,S_3,S_4,\cdots,S_i,\cdots,S_{12},S_{13},S_{14},S_{15},S_{16}$$

onde $S_i\approx S(t_0+i\,\Delta t)$.

Na próxima aula, as abordagens numéricas para obter soluções aproximadas de um PVI transformado para o formato (30) serão discutidas.