Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 24

1. Objetivo: Solução Aproximada de Problemas de Valores Iniciais (PVI).

Nesta Aula, são apresentados os seguintes conceitos:

- Classificação dos métodos de solução aproximada de PVIs
- Métodos de passo simples
- Métodos de passos múltiplos

2. Solução aproximada de um problema de valor inicial

A **solução aproximada** de um PVI parte da condição inicial e busca aproximações da solução da equação diferencial, isto é, aproximações de $S(t)$ em uma sequência de valores discretos da variável t.

Para resolver um PVI de forma aproximada, a descrição original do problema tem que ser transformada para o seguinte formato (EDO de primeira ordem)

(1) PVI: $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$,

onde $S(t)$ é o estado do problema e S_0 é o estado inicial do problema.

Exemplo 1. PVI.

(2) PVI-1: $\underbrace{\begin{cases} 3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - 2y(t) = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}_{PVI\ original} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}y(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}}_{PVI\ transformado}$.

Exemplo 2. PVI – Partícula em queda livre com resistência do ar.

(3) PVI-2: $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + g = 0 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = v_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Considerando $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = v(t)$ a velocidade da partícula, então sua aceleração $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$ pode ser escrita como $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$, a derivada da velocidade. O estado da partícula é formado pelas funções que aparecem nas derivadas de primeira ordem, ou seja, $v(t)$ e $y(t)$. Assim, o estado é escrito como

(4) $S(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ \mathrm{y(t)} \end{pmatrix}$,

e a derivada de ordem 1 do estado da partícula é escrita como

(5) $\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}v(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$.

Portanto, o PVI transformado é

(6) PVI: $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t),t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$, com $\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}(S(t),t) = \begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}v(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ e $S_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Depois de transformado para o formato (1), a solução aproximada exige que sejam definidos o número de pontos discretos para os quais a solução aproximada será obtida e o espaçamento entre esses pontos discretos. Alternativamente, podem-se especificar o espaçamento entre os pontos discretos, o ponto inicial e o ponto final. Para ficar mais claro, imagine o PVI-1 (Equação (2)) cuja solução exata está mostrada na Figura 1.

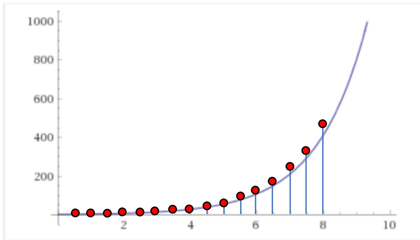

Figura 1. $y(t) = y_0 e^{\frac{2}{3}(t-t_0)} = 2e^{\frac{2}{3}t}$

Assim, para determinar a solução aproximada, a seguinte escolha poderia ser feita:

- Ponto inicial, $t_0 = 0$;
- Ponto final, $t_F = 8$;
- Espaçamento entre os pontos discretos, $\Delta t = 0.5$ segundos.

Portanto, partindo do ponto inicial, o estado do problema seria obtido nos seguintes pontos:

(7) $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, \cdots, S_i, \cdots, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{15}, S_{16}$

onde $S_i \approx S(t_0 + i\,\Delta t)$.

3. Classificação dos métodos de solução aproximada de PVIs

A Figura 2 ilustra um método de solução aproximada de PVI como uma caixa preta que recebe elementos de entrada, processa-os e produz uma saída. Nesse método, a entrada é formada pelo estado em t_i, os demais elementos de definição da função $\mathcal{F}$ e o espaçamento Δt. O objetivo é encontrar o estado no tempo subsequente t_{i+1}.

O método é chamado de **passo simples** porque só envolve o estado anterior, S_i, ao estado que se deseja calcular, S_{i+1}.

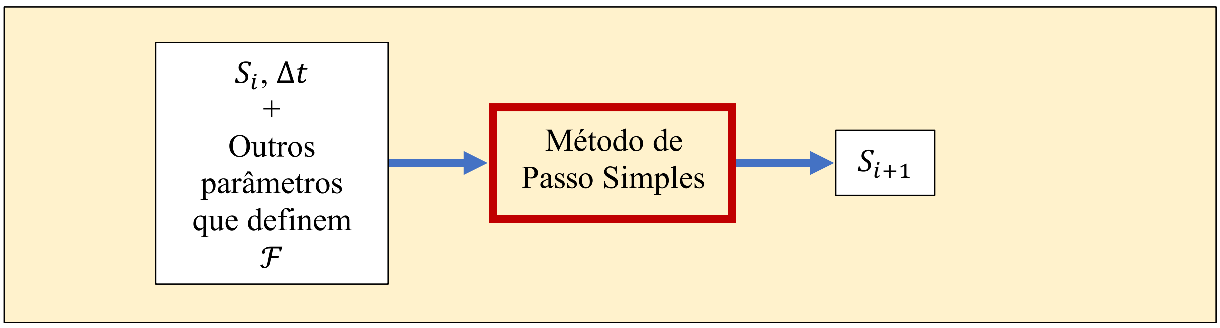

Figura 2. Método de solução aproximada de PVI – Passo simples

A Figura 3 ilustra um método de solução aproximada de PVI em que a entrada é formada por diversos estados anteriores ao estado S_{i+1}, os demais elementos de definição da função $\mathcal{F}$ e o espaçamento Δt. O objetivo é encontrar o estado no tempo t_{i+1}.

O método é chamado de **passos múltiplos** porque envolve múltiplos estados, $S_{i-k}, \cdots, S_{i-1}, S_i$, anteriores ao estado que se deseja calcular, S_{i+1}.

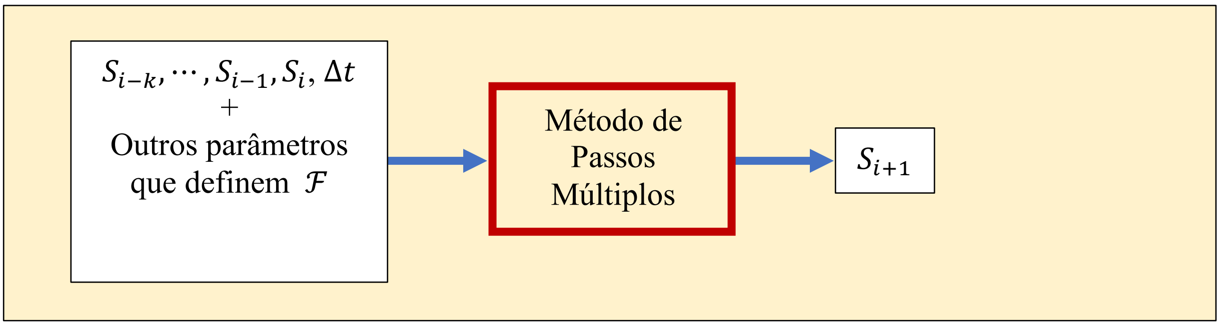

Figura 3. Método de solução aproximada de PVI – Passos múltiplos

Os estados que são passados como entrada para as caixas pretas das figuras 2 e 3 já foram calculados em passos anteriores e, portanto, já são conhecidos. Assim, as caixas pretas processam esses dados explícitos em uma fórmula e produzem o resultado de saída S_{i+1}. Métodos com essa característica são chamados **Métodos Explícitos**. Esses métodos podem ser representados abstratamente pela expressão

(8) $S_{i+1} = G\left(S_{i-k}, \cdots, S_{i-1}, S_i, \Delta t, L_p\right)$,

onde L_p é uma lista de parâmetros adicionais que fazem parte da fórmula, e $S_{i-k}, \cdots, S_{i-1}, S_i$ são os estados anteriores envolvidos. Nos métodos de passo simples, $k = 0$.

Se, no entanto, a expressão do método tiver a seguinte representação abstrata

(9) $S_{i+1} = G\left(S_{i-k}, \cdots, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, \Delta t, L_p\right)$,

o cálculo de S_{i+1} não é mais explícito, pois S_{i+1}é parte dos argumentos da função G. Portanto, a expressão é uma equação em S_{i+1} que precisa ser resolvida. Métodos com essa característica são chamados **Métodos Implícitos**.

Note, no entanto, que, dependendo da simplicidade do problema, a equação (9) pode ser manipulada para deixá-la no formato explícito da equação (8).

4. Métodos de passo simples

Os métodos de passo simples (Figura 2) podem ser explícitos (Fórmula (8) com $k = 0$) ou implícitos (Fórmula (9) com $k = 0$). Os diversos métodos de passo simples diferem pela maneira como suas fórmulas $S_{i+1} = G(\cdots)$ são obtidas.

Nas próximas subseções, são apresentados o método de Euler Explícito (Seção 4.1) e o método de Euler Implícito (Seção 4.2). Na próxima aula (Aula #25), são apresentados os métodos de Runge-Kutta. Na Aula #26, são apresentados os métodos de passos múltiplos.

4.1 Método de Euler Explícito

Considere o PVI no formato (1)

$$(1)\quad \text{PVI:}\begin{cases}\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t),t)\\ S(t_0) = S_0\end{cases}.$$

Suponha que a derivada que aparece na ED seja calculada de forma aproximada pelo método Forward de Euler (Vide Unidade 1: Diferenciação Numérica), isto é,

$$(10)\quad \frac{\mathrm{d}S(t_i)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{S(t_{i+1})-S(t_i)}{\Delta t}.$$

Substituindo-se (10) na ED de (1), obtém-se

$$(11)\quad \frac{\mathrm{d}S(t_i)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t_i),t_i) \Longrightarrow \frac{S(t_{i+1})-S(t_i)}{\Delta t} \approx \mathcal{F}(S(t_i),t_i).$$

Multiplicando-se os dois lados da expressão à direita do sinal "⟹" em (11) por Δt, chega-se à expressão do Método de Euler Explícito

$$(12)\quad S_{i+1} = S_i + \Delta t\, \mathcal{F}(S_i,t_i).$$

4.1.1. Aplicação do Método de Euler Explícito na solução do PVI-1

$$(13)\quad \text{PVI-1:}\begin{cases}\underbrace{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}y(t) = \mathcal{F}(S_i,t_i)\\ y(0) = 2}_{PVI\ transformado}\end{cases}$$

Obtenção da sequência de estados discretos com $\Delta t = 0.5$ onde, neste caso, $S(t) = y(t)$

$$\text{Passo 1:}\begin{cases}S_1 \overset{Eq.(12)}{\triangleq} S_0 + \Delta t\, \mathcal{F}(S_0,t_0) \Longrightarrow\\ y_1 = y_0 + \Delta t\, \overbrace{\left(\frac{2}{3}y_0\right)}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} = 2 + 0.5\left(\frac{2}{3}\,2\right) = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2.66667\\ y(0.5) = 2e^{\frac{2}{3}0.5} \approx 2.79122 : \text{Solução exata}\\ \text{Erro relativo:}\, e_1 = \frac{2.79122-2.66667}{2.79122} = 0.04446 \approx 4.446\%\end{cases}$$

$$\text{Passo 2:}\begin{cases}y_2 = y_1 + \Delta t\left(\frac{2}{3}y_1\right) = \frac{8}{3} + 0.5\left(\frac{2}{3}\,\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{9} \approx 3.55556\\ y(1) = 2e^{\frac{2}{3}1} \approx 3.895468 : \text{Solução exata}\\ \text{Erro relativo:}\, e_2 = \frac{3.895468-3.55556}{3.895468} = 0.08726 \approx 8.726\%\end{cases}$$

Note que, com este valor de $\Delta t = 0.5$, o erro relativo quase dobrou já no segundo passo.

Esse método é simples de implementar, mas, exceto em casos especiais, o erro vai acumular sem limites. Assim, após alguns passos o resultado é lixo. Para tentar melhorar a solução o valor de Δt tem de ser bem pequeno.

4.1.2. Aplicação do Método de Euler Explícito na solução do PVI-2

(14) PVI-2: $\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mathcal{F}(S(t),t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$, com $\frac{dS(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}(S(t),t) = \begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}v(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ e $S_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix}$.

Obtenção da sequência de estados discretos com $\Delta t = 0.1$

$$\text{Passo 1:} \begin{cases} S_1 = S_0 + \Delta t\, \mathcal{F}(S_0,t_0) \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \Delta t\, \overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}v_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -10 - \frac{0.5}{0.5}3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 150.3 \end{pmatrix} \\ S(0.1) = \begin{pmatrix} -10 + (13)e^{-(0.1)} \\ 150 - 10(0.1) - (13)\left(e^{-(0.1)} - 1\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.763 \\ 150.3 \end{pmatrix} : \text{Solução exata} \\ \text{Erro relativo: } e_1 = \begin{pmatrix} 3.57\% \\ -0.04\% \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Passo 2:} \begin{cases} S_2 = S_1 + \Delta t\, \mathcal{F}(S_1,t_1) \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} v_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \Delta t\, \overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_1,t_1)} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 150.3 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -10 - 1.7 \\ 1.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.53 \\ 150.47 \end{pmatrix} \\ S(0.2) = \begin{pmatrix} -10 + (13)e^{-(0.2)} \\ 150 - 10(0.2) - (13)\left(e^{-(0.2)} - 1\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.6435 \\ 150.36 \end{pmatrix} : \text{Solução exata} \\ \text{Erro relativo: } e_1 = \begin{pmatrix} 17.64\% \\ -0.075\% \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Passo 163:} \begin{cases} S_{163} = S_{162} + \Delta t\, \mathcal{F}(S_{162},t_{162}) \Longrightarrow \\ \begin{pmatrix} v_{163} \\ y_{163} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{162} \\ y_{162} \end{pmatrix} + \Delta t\, \overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m}v_{162} \\ v_{162} \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_{162},t_{162})} = \begin{pmatrix} -9.999 \\ -4 \times 10^{-7} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \\ S(16.3) = \begin{pmatrix} -10 + (13)e^{-(16.3)} \\ 150 - 10(16.3) - (13)\left(e^{-(16.3)} - 1\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{Solução exata} \\ \text{Erro relativo: } e_1 = \begin{pmatrix} 0\% \\ 58\% \end{pmatrix} \end{cases}$$

O método aproximado conseguiu fazer uma boa previsão da velocidade de chegada no mar (-10 m/s) e o tempo total até a queda no mar (16.3s).

4.2 Método de Euler Implícito

Considere o PVI no formato (1)

$$(1)\quad \text{PVI:} \begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t), t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}.$$

Suponha que a derivada que aparece na ED seja calculada de forma aproximada pelo método Backward de Euler (Vide Unidade 1: Diferenciação Numérica), isto é,

$$(15)\quad \frac{\mathrm{d}S(t_{i+1})}{\mathrm{d}t} \approx \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{\Delta t}.$$

Note que a derivada está sendo calculada no ponto t_{i+1}. Assim, substituindo-se (15) na ED de (1), obtém-se

$$(16)\quad \frac{\mathrm{d}S(t_{i+1})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t_{i+1}), t_{i+1}) \Longrightarrow \frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{\Delta t} \approx \mathcal{F}(S(t_{i+1}), t_{i+1}).$$

Multiplicando-se os dois lados da expressão à direita do sinal "⟹" em (16) por Δt, chega-se à expressão do Método de **Euler Implícito**

$$(17)\quad S_{i+1} = S_i + \Delta t\, \mathcal{F}(S_{i+1}, t_{i+1}).$$

Note que o estado a ser determinado aparece nos dois lados da equação. Portanto, o lado direito não pode ser calculado explicitamente pois S_{i+1} ainda não é conhecido. O método é Implícito.

4.2.1. Aplicação do Método de Euler Implícito na solução do PVI-1

$$(18)\quad \text{PVI-1:} \begin{cases} \underbrace{\begin{matrix} \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3} y(t) = \mathcal{F}(S_i, t_i) \\ y(0) = 2 \end{matrix}}_{PVI\ transformado} \end{cases}$$

Obtenção da sequência de estados discretos com $\Delta t = 0.5$ onde, neste caso, $S(t) = y(t)$

$$\text{Passo 1:} \begin{cases} S_1 = S_0 + \Delta t\, \mathcal{F}(S_1, t_1) \Longrightarrow y_1 = y_0 + \Delta t\, \overbrace{\left(\frac{2}{3} y_1\right)}^{\mathcal{F}(S_0, t_0)} = 2 + 0.5 \left(\frac{2}{3}\, y_1\right) \\ y_1 = 2 + 0.5 \left(\frac{2}{3}\, y_1\right) \Longrightarrow 3y_1 = 3 \times 2 + 3 \times 0.5 \left(\frac{2}{3}\, y_1\right) \Longrightarrow y_1 = 3 \\ y(0.5) = 2e^{\frac{2}{3}0.5} \approx 2.79122 : \text{Solução exata} \\ \text{Erro relativo: } e_1 = \frac{2.79122 - 3}{2.79122} = -0.0748 \approx -7.48\% \end{cases}$$

$$\text{Passo 2:} \begin{cases} y_2 = y_1 + \Delta t \left(\frac{2}{3} y_2\right) = 3 + 0.5 \left(\frac{2}{3}\, y_2\right) = \frac{9}{2} = 4.5 \\ y(1) = 2e^{\frac{2}{3}1} \approx 3.895468 : \text{Solução exata} \\ \text{Erro relativo: } e_2 = \frac{3.895468 - 4.5}{3.895468} = -0.15519 \approx 15.519\% \end{cases}$$

Tabela1. Valores aproximados da solução exata $y(10) = 1571.544$ no tempo $t = 10\text{s}$

Δt	$y_{aproximado}$	$erro_{reltativo}$
0.1	1983.135	-26.19%
0.01	1607.018	-2.26%
0.001	1575.042	-0.22
0.0001	1571.893	-0.022%

Observe que, nem sempre, a fórmula implícita é tão fácil de resolver como nesse problema. Às vezes é necessário achar a solução de cada passo por um método numérico como o método de Newton-Raphson.

4.2.2. Aplicação do Método de Euler Implícito na solução do PVI-2

(19) PVI-2: $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{F}(S(t),t) \\ S(t_0) = S_0 \end{cases}$, com $\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}(S(t),t) = \begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m} v(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ e $S_0 = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 150 \end{pmatrix}$.

Obtenção da sequência de estados discretos com $\Delta t = 0.1$

$$
\text{Passo 1:} \begin{cases}
S_1 = S_0 + \Delta t\, \mathcal{F}(S_1, t_1) \Longrightarrow \\
\begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \Delta t \overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m} v_1 \\ v_1 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0,t_0)} \Longrightarrow \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 - g\Delta t \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{k\Delta t}{m} & 0 \\ \Delta t & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \\
\overbrace{\begin{bmatrix} 1 + \frac{k\Delta t}{m} & 0 \\ -\Delta t & 1 \end{bmatrix}}^{(*)} \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 - g\Delta t \\ y_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{m}{m+k\Delta t} & 0 \\ \frac{m\Delta t}{m+k\Delta t} & 1 \end{bmatrix}}^{\text{INVERSA}(*)} \begin{pmatrix} v_0 - g\Delta t \\ y_0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m+k\Delta t}(v_0 - g\Delta t) \\ y_0 + \frac{m\Delta t}{m+k\Delta t}(v_0 - g\Delta t) \end{pmatrix} \Longrightarrow \\
\begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.5}{0.5+0.5\Delta t}(3 - 10\Delta t) \\ y_0 + \frac{0.5\Delta t}{0.5+0.5\Delta t}(3 - 10\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.81818 \\ 150.18182 \end{pmatrix} \\
S(0.1) = \begin{pmatrix} -10 + (13)e^{-(0.1)} \\ 150 - 10(0.1) - (13)\left(e^{-(0.1)} - 1\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.763 \\ 150.3 \end{pmatrix} : \text{Solução exata} \\
\text{Erro relativo: } e_1 = \begin{pmatrix} -3.14\% \\ -0.04\% \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$$
\text{Passo 2:}\begin{cases}
S_2 = S_1 + \Delta t\, \mathcal{F}(S_2, t_2) \Longrightarrow \\
\begin{pmatrix} v_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \Delta t \overbrace{\begin{pmatrix} -g - \frac{k}{m} v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}}^{\mathcal{F}(S_0, t_0)} \Longrightarrow \\
\begin{pmatrix} v_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{m+k\Delta t}(v_1 - g\Delta t) \\ y_1 + \frac{m\Delta t}{m+k\Delta t}(v_1 - g\Delta t) \end{pmatrix} \Longrightarrow \\
\begin{pmatrix} v_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.5}{0.5+0.5\Delta t}(1.81818 - 10\Delta t) \\ 150.18182 + \frac{0.5\Delta t}{0.5+0.5\Delta t}(1.81818 - 10\Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.743801 \\ 150.256198 \end{pmatrix} \\
S(0.2) = \begin{pmatrix} -10 + (13)e^{-(0.2)} \\ 150 - 10(0.2) - (13)\left(e^{-(0.2)} - 1\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.643500 \\ 150.356500 \end{pmatrix} : \text{Sol. exata} \\
\text{Erro relativo: } e_1 = \begin{pmatrix} -15.5869\% \\ 0.0667\% \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

$$
\text{Passo 163:}\begin{cases}
S_{163} = S_{162} + \Delta t\, \mathcal{F}(S_{163}, t_{163}) \Longrightarrow \\
\begin{pmatrix} v_{163} \\ y_{163} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \\
S(16.3) = \begin{pmatrix} -10 + (13)e^{-(16.3)} \\ 150 - 10(16.3) - (13)\left(e^{-(16.3)} - 1\right) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} : \text{Solução exata} \\
\text{Erro relativo: } e_1 = \begin{pmatrix} 0\% \\ 114\% \end{pmatrix}
\end{cases}
$$

1

O método aproximado conseguiu fazer uma boa previsão da velocidade de chegada no mar (-10 m/s) e o tempo total até a queda no mar (16.3s).

Observe novamente que, nem sempre, a fórmula implícita é tão fácil de resolver como nesse problema. Às vezes é necessário achar a solução de cada passo por um método numérico como o método de Newton-Raphson.

Tarefa 16: Euler Explícito e Euler Implícito

Note que a solução exata do PVI-2 com os valores mostrados na Figura 4 indicam uma queda livre parecida com a de um paraquedista.

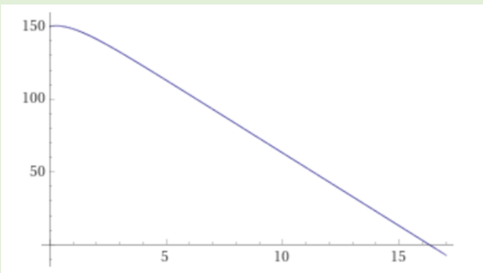

Figura 4. Solução exata y(t) do PVI-2 com: $v_0 = 3$m/s, $y_0 = 150$m, $k = 0.5$kg/s, $m = 0.5$kg.

Modifique o PVI-2 para os seguintes valores: $t_0 = 0$s, $v_0 = 5$m/s, $y_0 = 200$m, $k = 0.25$kg/s, $m = 2$kg. Obtenha a solução aproximada com os valores de Δt mostrados na Tabela 1 e tente identificar: a altura máxima da trajetória, o tempo decorrido até a altura máxima, o tempo total até a queda no mar e a velocidade no momento do impacto com o mar.