Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 28

1. Objetivo: Problemas de Valores de Contorno (PVC) (continuação).

- Fundamentos do método dos elementos finitos (MEF)
- Solução de um problema de valor de contorno pelo MEF.

2. Problema de valor de contorno

Um problema de valor de contorno (PVC) é aquele definido por uma equação diferencial que descreve um determinado fenômeno em uma região do espaço (domínio) delimitada por um contorno, e condições que a solução geral da equação diferencial tem que satisfazer no contorno do domínio. Os PVCs, comumente, são definidos em domínios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. Independentemente da dimensão do domínio, todo problema de valor de contorno é escrito da seguinte forma

(1) PVC: $\begin{cases} ED \\ c.c. \end{cases}$,

onde ED é uma equação diferencial e $c.c.$ é um conjunto de condições de contorno especificadas.

Exemplo 1: Problema de Valor de Contorno em domínio unidimensional (a variável x descreve os pontos do domínio que é um subconjunto de $\mathbb{R}$).

(2) PVC1: $\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} - y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Este PVC busca a função $y(x)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno especificadas ($y(0) = 0$ e $y(1) = 0$). Neste exemplo, o domínio é o intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Exemplo 2: Problema de Valor de Contorno em domínio bidimensional (as variáveis x e y descrevem os pontos do domínio, que é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$).

3) PVC2: $\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \\ u(x,0) = 0 \text{: } borda\ inferior \\ u(x,1) = 0 \text{: } borda\ superior \\ u(0,y) = 0 \text{: } borda\ esquerda \\ u(1,y) = 0 \text{: } borda\ direita \end{cases}$

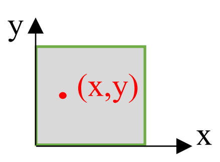

Figura 1. Domínio bidimensional

Este PVC busca a função $u(x,y)$ que satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno especificadas nas quatro bordas (contorno) do domínio bidimensional (quadrado de lado 1): $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$.

3. Fundamentos do Método dos Elementos Finitos

Na literatura, há diferentes formas de abordar o Método dos Elementos Finitos. Nesta seção, o Método dos Elementos Finitos é abordado como um **método de resíduos ponderados**.

3.1 Formulação forte

Dado o PVC,

(4) PVC: $\begin{cases} ED = \mathbb{E}(\,) = 0 \\ c.c. \end{cases}$,

a equação diferencial (ED), que governa o fenômeno modelado, pode ser escrita como

(5) $\mathbb{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}''(\boldsymbol{x}), \dots) = 0$,

onde $\boldsymbol{x}$ define a posição de um ponto no domínio, e $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ é a função que se deseja encontrar de forma a, juntamente com suas derivadas $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}''(\boldsymbol{x}), \dots$, satisfazer a equação diferencial (5). Isso significa que, ao substituir $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}''(\boldsymbol{x})$ etc. na expressão $\mathbb{E}(\,)$, o lado direto de (5) fica igual a zero.
A formulação do PVC apresentada na equação (4) é chamada **formulação forte**. Ela exige que a solução encontrada satisfaça a ED em todos os pontos $\boldsymbol{x}$ do domínio. Uma formulação alternativa e equivalente pode ser escrita como

(6) PVC: $\begin{cases} \text{Encontre } \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \text{ tal que} \\ \int_D \mathbb{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}''(\boldsymbol{x}), \dots)\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\mathrm{dD} = 0, \ \forall \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}), \\ \text{e } \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \text{ satisfaça as c. c.} . \end{cases}$

A formulação em (6) é equivalente à formulação em (4) porque a única maneira de $\int_D \mathbb{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}''(\boldsymbol{x}), \dots)\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\mathrm{dD} = 0$ qualquer que seja a função de ponderação $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ é se $\mathbb{E}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}''(\boldsymbol{x}), \dots) = 0$.

3.2 Formulação fraca

Se a busca pela função $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, no entanto, se restringir a um conjunto (espaço) de funções específico, $\mathcal{U}$, e a função $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ também for escolhida de um conjunto específico, $\mathcal{W}$, de funções, não há garantia de que a solução encontrada seja exata, isto é, se a função aproximada encontrada $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$ e suas derivadas forem substituídas em $\mathbb{E}(\,)$, o lado direito não será mais nulo. Portanto, há um **resíduo**. Assim, o problema em (6) será reescrito como

(7) PVC: $\begin{cases} \text{Encontre } \boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U} \text{ tal que} \\ \int_D \mathbb{E}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}^{h'}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}^{h''}(\boldsymbol{x}), \dots\right)\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\mathrm{dD} = 0, \ \forall \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{W} \\ \text{e } \boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) \text{ satisfaça as c. c.}, \end{cases}$

onde D é o domínio (região) em que o fenômeno está sendo estudado.

A formulação em (7) é chamada de **formulação dos resíduos ponderados**. Ela é uma **formulação fraca** porque a função $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$ geralmente não satisfaz de maneira exata a equação diferencial (5) $\forall \boldsymbol{x} \in D$.

3.3 Condições de contorno

As condições de contorno são restrições impostas à solução em partes da borda do domínio. Quando a restrição é especificada para a própria função $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$ em $\boldsymbol{x} \in \Gamma_u \subset \Omega D$ (onde ΩD é a borda do domínio D), a condição de contorno é chamada de condição de Dirichlet. Se a restrição é especificada para derivadas da função $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$ em $\boldsymbol{x} \in \Gamma_{du} \subset \Omega D$, a condição de contorno é chamada de condição de Neumann. Outras condições de contorno que combinam condições de Dirichlet e de Neumann de forma especial existem com nomes específicos como: condições de Cauchy, condições misturadas, condições de Robin.

4. Método dos Elementos Finitos

Nesta seção, os passos da formulação fraca são usados para encontrar soluções aproximadas dos problemas PVC1 e PVC2, isto é,

1. Dividir o domínio em N partes (**elementos**) não necessariamente de tamanhos iguais. Nos exemplos estudados aqui, **nós** são os vértices da grade de subdivisão do domínio. Nos casos mais gerais, é possível definir nós no interior dos elementos (em elementos 1D, 2D e 3D), nas arestas dos elementos (em elementos 2D e 3D), ou nas faces dos elementos (em elementos 3D).
2. Definir funções de interpolação, $\phi_i(\boldsymbol{x})$ para cada nó *i*;
3. Definir a função

   (8) $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\#nós} \phi_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i$;
4. Definir a função

   (9) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\#nós} \phi_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}_i$;

Nota: Quando um nó *i* estiver no contorno em que uma condição de contorno de Dirichlet for imposta, o valor $\boldsymbol{w}_i$ será igual a zero.

5. Substituir $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ dados em (8) e (9) em (7), para construir um sistema de equações algébricas

   (10) $\mathbf{KU} = \mathbf{B}$,

   onde $\mathbf{K}$ é a matriz dos coeficientes, $\mathbf{U}$ é o vetor das incógnitas $\boldsymbol{u}_i$ (solução aproximada nos nós) e $\mathbf{B}$ é o vetor do lado direito do sistema.
6. Resolver o sistema de equações algébricas em (10) para obter os valores da solução aproximada nos nós, isto é, $\boldsymbol{u}_i$.

4.1 Método dos Elementos Finitos aplicado ao PVC1

(11) $$\text{PVC1:} \begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 y(x)}{\mathrm{d}x^2} - y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

O PVC1 é definido sobre um domínio unidimensional. A equação diferencial que governa o fenômeno estudado é uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Segunda ordem. As condições de contorno são condições de Dirichlet. A solução aproximada será obtida em pontos discretos desse domínio, de acordo com os seis passos mencionados anteriormente. Assim,

Passo 1: Divisão do domínio em N partes (elementos).

Neste exemplo, o domínio $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ é particionado em $N = 4$ elementos de tamanhos iguais (Figura 2).

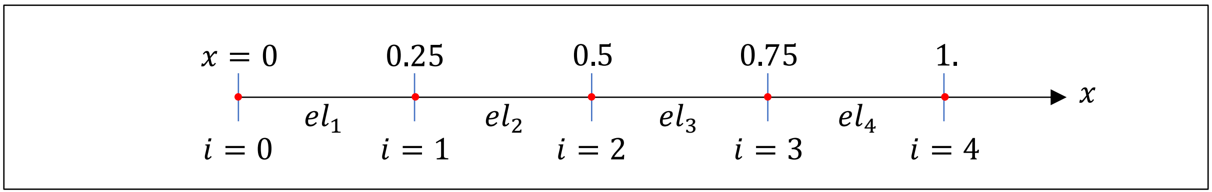

Figura 2. Divisão do domínio [0, 1] em quatro elementos iguais com nós nas posições i

Passo 2: Definição das funções de interpolação, $\phi_i(\boldsymbol{x})$ para cada nó i.

As funções de interpolação de Lagrange associadas a cada nó são mostradas na Figura 3.

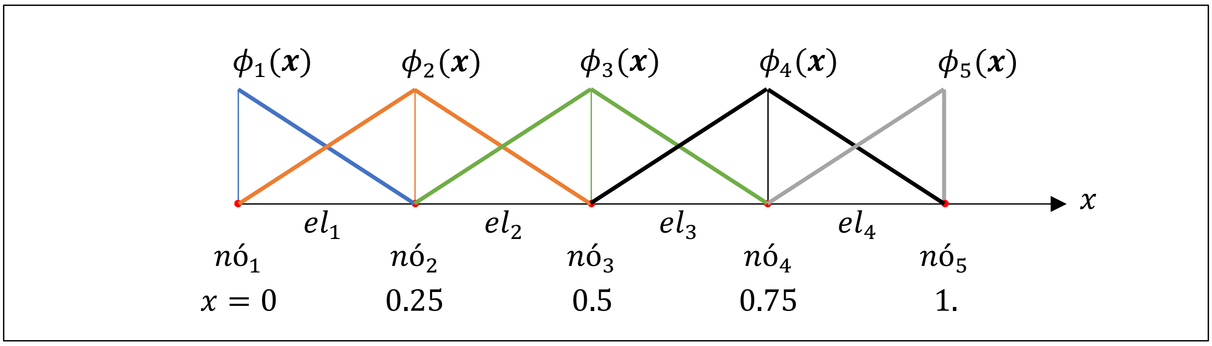

Figura 3. Funções de interpolação de Lagrange associadas a cada nó.

Note que, no subdomínio de el_i, apenas as funções de interpolação $\phi_i(\boldsymbol{x})$ e $\phi_{i+1}(\boldsymbol{x})$ têm interseção. Isso é importante no Passo 5. Essas funções são fáceis de definir, mas, por enquanto, o desenvolvimento continuará em alto nível sem necessidade de expressar essas funções de interpolação.

Passo 3: Definição da função que representa a solução aproximada.

Com as funções de interpolação ilustradas na Figura 3, é possível reescrever a equação (8) como

(12) $\boldsymbol{y}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{5} \phi_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_i = \phi_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_1 + \phi_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_2 + \phi_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_3 + \phi_4(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_4 + \phi_5(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}_5.$

Note que não há incógnitas sobre os nós 1 e 5, pois as condições de Dirichlet $\boldsymbol{y}_1 = 0$ e $\boldsymbol{y}_5 = 1$ são especificadas sobre eles.

Passo 4: Definição da função que representa a ponderação.

Nesse caso, a função de ponderação foi escolhida no mesmo conjunto onde encontra-se a função $\boldsymbol{y}^h(\boldsymbol{x})$, isto é, $\mathcal{W} \equiv \mathcal{U}$. Assim, a equação (9) pode ser reescrita como

(13) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{5} \phi_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}_i = \phi_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}_1 + \phi_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}_2 + \phi_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}_3 + \phi_4(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}_4 + \phi_5(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}_5.$

É importante lembrar que, como condições de Dirichlet foram especificadas nos nós 1 e 5, $\boldsymbol{w}_1 = 0$ e $\boldsymbol{w}_5 = 0$.

Passo 5: Substituição de $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ descritas em (12) e (13) em (7).

Note que a integral que aparece em (7) é sobre o domínio – neste caso o intervalo [0, 1]. Assim

(14) $\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}^2 y^h(x)}{\mathrm{d}x^2} - y^h(x)\right) w(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}^2 y^h(x)}{\mathrm{d}x^2} w(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 y^h(x)w(x)\mathrm{d}x = 0.$

Na equação (14), apenas o resíduo $\left(\frac{\mathrm{d}^2 y^h(x)}{\mathrm{d}x^2} - y^h(x)\right)$ foi substituído e a propriedade de “integral da soma é a soma das integrais” foi utilizada.

Note, porém, que a função $y^h(x)$ em (12) é uma cadeia de segmentos de reta (linha poligonal) e sua derivada de segunda ordem é zero. Assim, se a substituição for feita diretamente em (14), a integral $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}^2 y^h(x)}{\mathrm{d}x^2} w(x)\mathrm{d}x = 0$, eliminando completamente a contribuição do termo de derivada segunda da equação diferencial, o que levaria, certamente, a um resultado errado.

Há duas soluções para esse problema: 1) modificar as funções de interpolação para polinômios de segundo grau (essa solução não será adotada aqui) ou 2) aplicar a técnica de integração por partes à integral problemática. Assim, a integração por partes leva a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \overbrace{w(x)}^{u}\overbrace{\frac{\mathrm{d}^2 y^h(x)}{\mathrm{d}x^2}}^{dv}\mathrm{d}x &= \left(\overbrace{w(x)}^{u}\overbrace{\frac{\mathrm{d}y^h(x)}{\mathrm{d}x}}^{v}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \overbrace{\frac{\mathrm{d}y^h(x)}{\mathrm{d}x}}^{v}\overbrace{\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}}^{du}\mathrm{d}x \\
&= \left(\overbrace{w(1)}^{w_5=0}\frac{\mathrm{d}y^h(1)}{\mathrm{d}x} - \overbrace{w(0)}^{w_1=0}\frac{\mathrm{d}y^h(0)}{\mathrm{d}x}\right) - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y^h(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{15}$$

Agora sim, substituindo (15) em (14), o termo problemático não será eliminado. Logo,

$$\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}^2 y^h(x)}{\mathrm{d}x^2} - y^h(x)\right) w(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y^h(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - \int_0^1 y^h(x)w(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{16}$$

Substituindo (12) e (13) em (16) e organizando o resultado na forma de uma matriz, tem-se

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}
\int_0^1 \phi'_1\phi'_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_1\phi'_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_1\phi'_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_1\phi'_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_1\phi'_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi'_2\phi'_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_2\phi'_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_2\phi'_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_2\phi'_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_2\phi'_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi'_3\phi'_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_3\phi'_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_3\phi'_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_3\phi'_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_3\phi'_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi'_4\phi'_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_4\phi'_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_4\phi'_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_4\phi'_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_4\phi'_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi'_5\phi'_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_5\phi'_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_5\phi'_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_5\phi'_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_5\phi'_5\mathrm{d}x
\end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}\right) + \\
&\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}
\int_0^1 \phi_1\phi_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_1\phi_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_1\phi_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_1\phi_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_1\phi_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi_2\phi_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_2\phi_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_2\phi_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_2\phi_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_2\phi_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi_3\phi_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_3\phi_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_3\phi_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_3\phi_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_3\phi_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi_4\phi_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_4\phi_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_4\phi_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_4\phi_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_4\phi_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi_5\phi_1\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_5\phi_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_5\phi_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_5\phi_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_5\phi_5\mathrm{d}x
\end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}\right) = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Em (17), todos os termos da linha 1 e da linha 5 da matriz são multiplicados, respectivamente, por $\boldsymbol{w_1} = 0$ e $\boldsymbol{w_5} = 0$. Portanto, essas duas linhas são eliminadas, resultando em uma matriz cujas colunas 1 e 5 são multiplicadas, respectivamente por $\boldsymbol{y_1} = 0$ e por $\boldsymbol{y_5} = 1$. Assim, a coluna 1 também é eliminada e a coluna 5 é multiplicada por um. Portanto

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix}\left\{\left(\begin{bmatrix}
\int_0^1 \phi'_2\phi'_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_2\phi'_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_2\phi'_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_2\phi'_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi'_3\phi'_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_3\phi'_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_3\phi'_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_3\phi'_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi'_4\phi'_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_4\phi'_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_4\phi'_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_4\phi'_5\mathrm{d}x
\end{bmatrix}\right.\right. \\
&\left.\left.+\begin{bmatrix}
\int_0^1 \phi_2\phi_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_2\phi_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_2\phi_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_2\phi_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi_3\phi_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_3\phi_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_3\phi_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_3\phi_5\mathrm{d}x \\
\int_0^1 \phi_4\phi_2\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_4\phi_3\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_4\phi_4\mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_4\phi_5\mathrm{d}x
\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

Em (18), os valores de w_2, w_3 e w_4 são arbitrários já que, observando a formulação em (7), eles são responsáveis pela arbitrariedade de $w(x)$, isto é, por $\forall w(x)$. Assim, a única maneira da expressão em (18) ser igual a zero para qualquer $w(x)$ é se o termo entre { } for sempre igual ao vetor nulo. Logo,

$$(19)\quad \left(\begin{bmatrix} \int_0^1 \phi'_2\phi'_2 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_2\phi'_3 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_2\phi'_4 \mathrm{d}x \\ \int_0^1 \phi'_3\phi'_2 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_3\phi'_3 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_3\phi'_4 \mathrm{d}x \\ \int_0^1 \phi'_4\phi'_2 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_4\phi'_3 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi'_4\phi'_4 \mathrm{d}x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_2\phi_2 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_2\phi_3 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_2\phi_4 \mathrm{d}x \\ \int_0^1 \phi_3\phi_2 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_3\phi_3 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_3\phi_4 \mathrm{d}x \\ \int_0^1 \phi_4\phi_2 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_4\phi_3 \mathrm{d}x & \int_0^1 \phi_4\phi_4 \mathrm{d}x \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \int_0^1 \phi'_2\phi'_5 \mathrm{d}x + \int_0^1 \phi_2\phi_5 \mathrm{d}x \\ \int_0^1 \phi'_3\phi'_5 \mathrm{d}x + \int_0^1 \phi_3\phi_5 \mathrm{d}x \\ \int_0^1 \phi'_4\phi'_5 \mathrm{d}x + \int_0^1 \phi_4\phi_5 \mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

As seguintes observações podem ser feitas na Figura 3:

- ϕ_2 não tem interseção com ϕ_4, $\int_0^1 \phi'_2\phi'_4 \mathrm{d}x = \int_0^1 \phi_2\phi_4 \mathrm{d}x = \int_0^1 \phi'_4\phi'_2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \phi_4\phi_2 \mathrm{d}x = 0$;
- ϕ_2 e ϕ_3 só têm interseção sobre el_2, intervalo [0.25, 0.5];
- ϕ_3 e ϕ_4 só têm interseção sobre el_3, intervalo [0.5, 0.75];
- ϕ_5 só tem interseção com ϕ_4 sobre el_4, intervalo [0.75, 1.];
- As três integrais da diagonal recebem contribuições:
  - dos elementos el_1 e el_2 diagonal da primeira linha, intervalo [0.0, 0.5];
  - dos elementos el_2 e el_3 diagonal da segunda linha, intervalo [0.25, 0.75];
  - dos elementos el_3 e el_4 diagonal da terceira linha, intervalo [0.5, 1.].

Assim,

$$(20)\quad \left(\begin{bmatrix} \int_0^{0.5} \phi'_2\phi'_2 \mathrm{d}x & \int_{0.25}^{0.5} \phi'_2\phi'_3 \mathrm{d}x & 0 \\ \int_{0.25}^{0.5} \phi'_3\phi'_2 \mathrm{d}x & \int_{0.25}^{0.75} \phi'_3\phi'_3 \mathrm{d}x & \int_{0.5}^{0.75} \phi'_3\phi'_4 \mathrm{d}x \\ 0 & \int_{0.5}^{0.75} \phi'_4\phi'_3 \mathrm{d}x & \int_{0.5}^{1} \phi'_4\phi'_4 \mathrm{d}x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^{0.5} \phi_2\phi_2 \mathrm{d}x & \int_{0.25}^{0.5} \phi_2\phi_3 \mathrm{d}x & 0 \\ \int_{0.25}^{0.5} \phi_3\phi_2 \mathrm{d}x & \int_{0.25}^{0.75} \phi_3\phi_3 \mathrm{d}x & \int_{0.5}^{0.75} \phi_3\phi_4 \mathrm{d}x \\ 0 & \int_{0.5}^{0.75} \phi_4\phi_3 \mathrm{d}x & \int_{0.5}^{1} \phi_4\phi_4 \mathrm{d}x \end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_{0.75}^{1} \phi'_4\phi'_5 \mathrm{d}x + \int_{0.75}^{1} \phi_4\phi_5 \mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

Note que a matriz em (20) poderia ser montada a partir das contribuições de matrizes 2×2 de cada elemento. Os termos associados a nós com condição de Dirichlet nula não contribuem para a matriz dos coeficientes e os termos com condição de Dirichlet não nula contribuem (com sinal negativo) para o vetor do lado direito da equação. Isso, torna o processo mais geral e fácil de ser implementado.

Passo 5: Montagem alternativa do sistema de equações algébricas

Matrizes de coeficientes dos elementos

Elemento el_i:

$$(21)\quad \mathbf{K}_i = \left(\begin{bmatrix} \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}'_{in}\bar{\phi}'_{in} \mathrm{d}x & \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}'_{in}\bar{\phi}'_{fin} \mathrm{d}x \\ \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}'_{fin}\bar{\phi}'_{in} \mathrm{d}x & \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}'_{fin}\bar{\phi}'_{fin} \mathrm{d}x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}_{in}\bar{\phi}_{in} \mathrm{d}x & \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}_{in}\bar{\phi}_{fin} \mathrm{d}x \\ \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}_{fin}\bar{\phi}_{in} \mathrm{d}x & \int_{x_{in}}^{x_{fin}} \bar{\phi}_{fin}\bar{\phi}_{fin} \mathrm{d}x \end{bmatrix}\right)$$

onde x_{in} e x_{fin} são as coordenadas dos nós inicial e final do elemento el_i, $\bar{\phi}_{in}$ e $\bar{\phi}_{fin}$ são as partes das funções de interpolação dos nós inicial e final restritas ao interior do elemento. Se a integral for feita usando a parametrização de Legendre, as integrais podem ser escritas como

$$(22)\ \mathbf{K}_i = \left(\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} \overbrace{N'_{in}\frac{2}{L_i}}^{\frac{\mathrm{dN}_{in}(s)}{ds}\frac{ds}{dx}} \overbrace{N'_{in}\frac{2}{L_i}}^{\frac{\mathrm{dN}_{in}(s)}{ds}\frac{ds}{dx}} \overbrace{\frac{L_i}{2}}^{|J|} \mathrm{d}s & \int_{-1}^{1} \overbrace{N'_{in}\frac{2}{L_i}}^{\frac{\mathrm{dN}_{in}(s)}{ds}\frac{ds}{dx}} \overbrace{N'_{fin}\frac{2}{L_i}}^{\frac{\mathrm{dN}_{fin}(s)}{ds}\frac{ds}{dx}} \overbrace{\frac{L_i}{2}}^{|J|} \mathrm{d}s \\ \int_{-1}^{1} N'_{fin}\frac{2}{L_i} N'_{in}\frac{2}{L_i}\frac{L_i}{2}\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1} N'_{fin}\frac{2}{L_i} N'_{fin}\frac{2}{L_i}\frac{L_i}{2}\mathrm{d}s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} N_{in}N_{in}\frac{L_i}{2}\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1} N_{in}N_{fin}\frac{L_i}{2}\mathrm{d}s \\ \int_{-1}^{1} N_{fin}N_{in}\frac{L_i}{2}\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1} N_{fin}N_{fin}\frac{L_i}{2}\mathrm{d}s \end{bmatrix} \right)$$

onde $L_i = x_{fin} - x_{in}$ é o comprimento do elemento, $N_{in} = \frac{1-s}{2}$, $N_{fin} = \frac{1+s}{2}$, $N'_{in} = -\frac{1}{2}$, $N'_{fin} = \frac{1}{2}$, e $\frac{2}{L_i} = \frac{ds}{dx}$. Note que N_{in} e N_{fin} são as funções de interpolação para os valores no domínio do elemento em coordenadas s a partir dos valores nos nós de extremidade do elemento. No termo onde aparecem as derivadas, as derivadas são com relação à variável x, e, por isso, utiliza-se a regra da cadeia

Como todos os elementos, neste caso, têm comprimentos iguais a $L_i = \frac{1}{4}$, a matriz $\mathbf{K}_i$ é igual para todos os elementos. Assim

$$(23)\ \mathbf{K}_i = \left(\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} \overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{1/4}}^{\frac{\mathrm{dN}_{in}(s)}{ds}\frac{ds}{dx}}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{1/4}\frac{1/4}{2}\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{1/4}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{1/4}\frac{1/4}{2}\mathrm{d}s \\ \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{1/4}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2}{1/4}\frac{1/4}{2}\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{1/4}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{1/4}\frac{1/4}{2}\mathrm{d}s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1}\frac{1-s}{2}\frac{1-s}{2}\frac{1/4}{2}\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1}\frac{1-s}{2}\frac{1+s}{2}\frac{1/4}{2}\mathrm{d}s \\ \int_{-1}^{1}\frac{1+s}{2}\frac{1-s}{2}\frac{1/4}{2}\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1}\frac{1+s}{2}\frac{1+s}{2}\frac{1/4}{2}\mathrm{d}s \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{K}_i = \left(\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} 2\mathrm{d}s & -\int_{-1}^{1} 2\mathrm{d}s \\ -\int_{-1}^{1} 2\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1} 2\mathrm{d}s \end{bmatrix} + \frac{1}{32}\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1}(1-2s+s^2)\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1}(1-s^2)\mathrm{d}s \\ \int_{-1}^{1}(1-s^2)\mathrm{d}s & \int_{-1}^{1}(1+2s+s^2)\mathrm{d}s \end{bmatrix} \right)$$

$$(24)\quad = \left(\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \frac{49}{12} & -\frac{95}{24} \\ -\frac{95}{24} & \frac{49}{12} \end{bmatrix}$$

Na montagem da matriz global tem-se

$$(25)\quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \left(\overbrace{\frac{49}{12}}^{k_{22}^{el_1}} + \overbrace{\frac{49}{12}}^{k_{11}^{el_2}}\right) & \left(\overbrace{-\frac{95}{24}}^{k_{12}^{el_2}}\right) & 0 \\ \left(\overbrace{-\frac{95}{24}}^{k_{21}^{el_2}}\right) & \left(\overbrace{\frac{49}{12}}^{k_{22}^{el_2}} + \overbrace{\frac{49}{12}}^{k_{11}^{el_3}}\right) & \left(\overbrace{-\frac{95}{24}}^{k_{12}^{el_3}}\right) \\ 0 & \left(\overbrace{-\frac{95}{24}}^{k_{21}^{el_3}}\right) & \left(\overbrace{\frac{49}{12}}^{k_{22}^{el_3}} + \overbrace{\frac{49}{12}}^{k_{11}^{el_4}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{49}{6} & -\frac{95}{24} & 0 \\ -\frac{95}{24} & \frac{49}{6} & -\frac{95}{24} \\ 0 & -\frac{95}{24} & \frac{49}{6} \end{bmatrix}$$

Vetor do lado direito

Apenas o elemento el_4 tem um nó com condição de Dirichlet não nula (o nó 5). Portanto, como a função $\phi_5(\boldsymbol{x})$ só tem interseção com a função $\phi_4(\boldsymbol{x})$ sobre o elemento el_4. A contribuição só existe para a equação associada ao nó 4 (equação 3). Assim,

$$\text{(26)} \quad \mathbf{B} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int_{0.75}^{1} \phi'_4 \phi'_5 \mathrm{d}x + \int_{0.75}^{1} \phi_4 \phi_5 \mathrm{d}x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{95}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{95}{24} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, o sistema de equações algébricas pode ser escrito como

$$\text{(27)} \quad \begin{bmatrix} \frac{49}{6} & -\frac{95}{24} & 0 \\ -\frac{95}{24} & \frac{49}{6} & -\frac{95}{24} \\ 0 & -\frac{95}{24} & \frac{49}{6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{95}{24} \end{pmatrix}$$

Passo 6: Resolução do sistema de equações algébricas.

A resolução do sistema de equações em (27) resulta nos seguintes valores discretos e aproximados da função $y(x)$, isto é,

$$\text{(28)} \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.214788 \\ 0.443141 \\ 0.699481 \end{pmatrix}.$$

O resultado se aproxima mais da solução exata quanto maior for o número de partições N.

Tabela 1. Comparação entre os métodos e a solução exata

Método	Elementos Finitos	Diferenças Finitas	Solução exata
$\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.214788 \\ 0.443141 \\ 0.699481 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.215115 \\ 0.443674 \\ 0.699963 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.214955 \\ 0.443409 \\ 0.699724 \end{pmatrix}$

4.2 Método dos Elementos Finitos aplicado ao PVC2

$$\text{(29) PVC2:} \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \\ u(x,0) = 0: borda\ inferior \\ u(x,1) = 0: borda\ superior \\ u(0,y) = 0: borda\ esquerda \\ u(1,y) = 0: borda\ direita \end{cases}$$

O PVC2 é definido sobre um domínio bidimensional. A equação diferencial que governa o fenômeno estudado é uma Equação Diferencial Parcial Linear de Segunda ordem. As condições de contorno são condições de Dirichlet. Neste exemplo, a função $u(x,y)$ solução do problema (29) será aproximada por valores em pontos discretos do domínio quadrado de aresta igual a 1, de acordo com os seis passos mencionados anteriormente. A função $f(x,y)$ será considerada constante e igual a 4 em todo o domínio. Assim

Passo 1: Divisão do domínio em $N \times N$ partes (elementos).

Neste exemplo, como o domínio é quadrado, as divisões nas direções x e y serão as mesmas, isto é, $N = 4$ em cada direção (Figura 4).

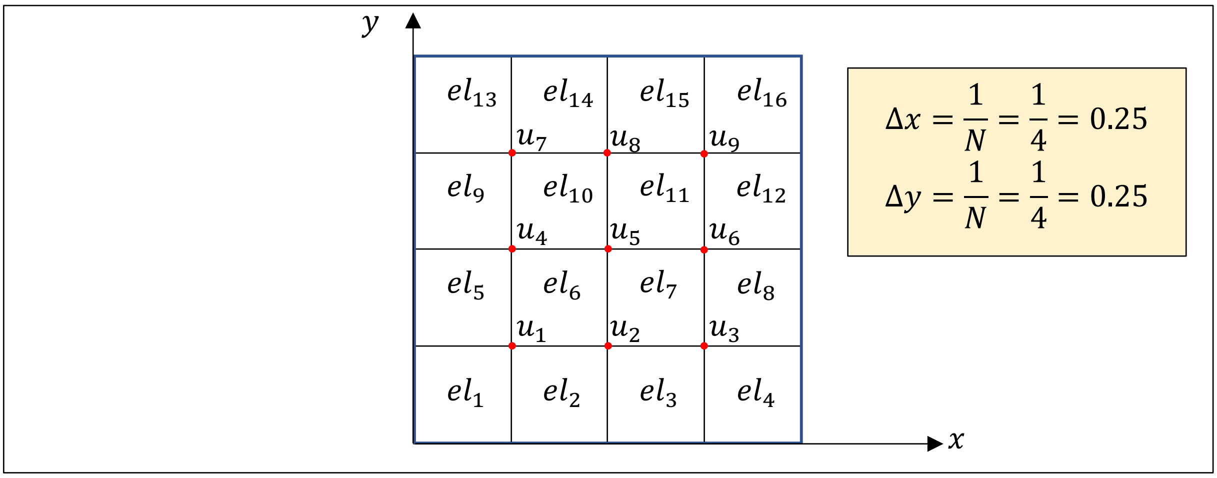

Figura 4. Partição do domínio quadrado em uma grade regular de espaçamento igual a 0.25.

Passo 2: Definição das funções de interpolação, $\phi_i(\boldsymbol{x})$ para cada nó *i*.

A função de interpolação de Lagrange associada a cada nó é a composição, por espelhamento, da função de interpolação restrita ao domínio de um elemento como ilustrada na Figura 5.

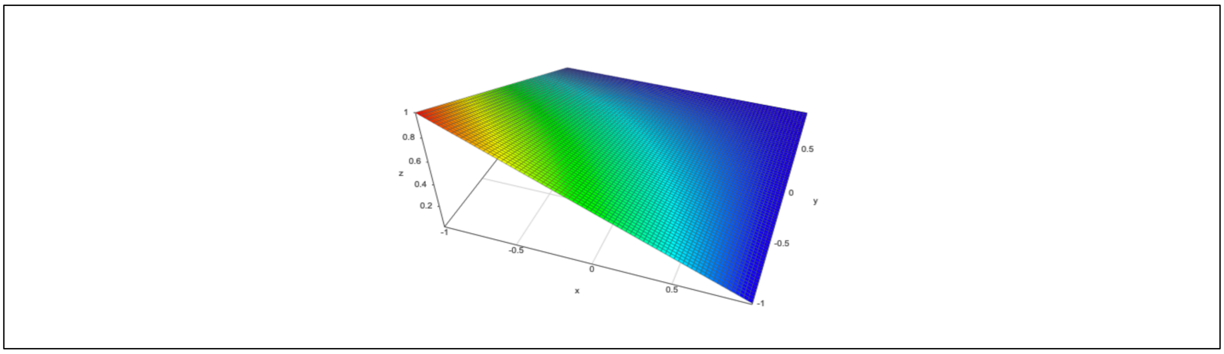

Figura 5. Função de interpolação de Lagrange associada ao nó esquerdo inferior do elemento.

A Figura 6 ilustra a função de interpolação associada ao nó 1. Pode-se notar que, dentro de um elemento, ocorre interseções apenas entre as funções de interpolação de seus nós.

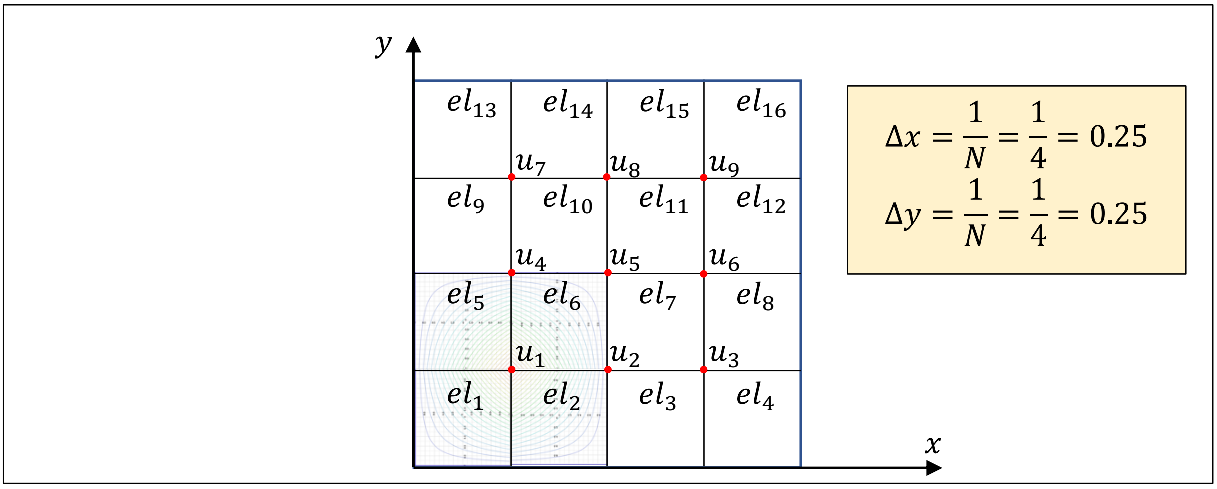

Figura 6. Função de interpolação no nó 1.

Um elemento quadrilateral com quatro nós não precisa ter uma forma regular como um quadrado, um losango etc. No entanto, ele pode ser representado no espaço de parametrização de Legendre como um quadrado de lado igual a dois, cujo centroide coincide com a origem dos eixos paramétricos que são paralelos aos seus lados (Figura 7).

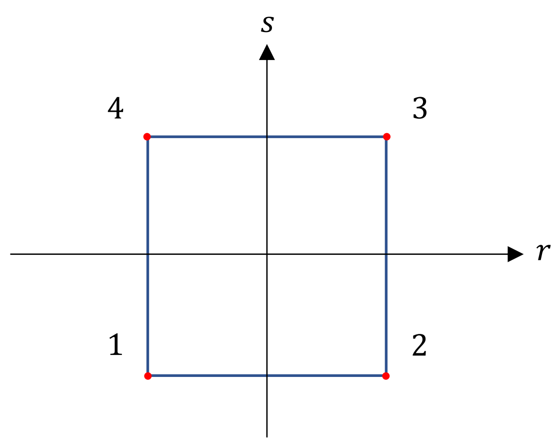

Figura 7. Elemento padrão (*parent element*) 2×2 com quatro nós.

<u>Funções de interpolação</u>.

As funções de interpolação associadas aos quatro nós do elemento padrão na Figura 7 são:

(30) $N_1(r,s) = \frac{1}{4}(r-1)(s-1);$

(31) $N_2(r,s) = -\frac{1}{4}(r+1)(s-1);$

(32) $N_3(r,s) = \frac{1}{4}(r+1)(s+1);$

(33) $N_4(r,s) = -\frac{1}{4}(r-1)(s+1).$

<u>Derivadas das funções de interpolação</u>.

As derivadas de N_i com relação a r e a s são:

(34) $\frac{\partial N_1}{\partial r}(r,s) = \frac{1}{4}(s-1) \qquad \frac{\partial N_1}{\partial s}(r,s) = \frac{1}{4}(r-1)\,;$

(35) $\frac{\partial N_2}{\partial r}(r,s) = -\frac{1}{4}(s-1) \qquad \frac{\partial N_2}{\partial s}(r,s) = -\frac{1}{4}(r+1);$

(36) $\frac{\partial N_3}{\partial r}(r,s) = \frac{1}{4}(s+1) \qquad \frac{\partial N_3}{\partial s}(r,s) = \frac{1}{4}(r+1);$

(37) $\frac{\partial N_4}{\partial r}(r,s) = -\frac{1}{4}(s+1) \qquad \frac{\partial N_4}{\partial s}(r,s) = -\frac{1}{4}(r-1).$

As derivadas de N_i com relação a x e a y estão relacionadas com suas derivadas com relação a r e a s. Quando existe relação entre dois sistemas de coordenadas, como no caso das coordenadas cartesianas (x, y) com as coordenadas de Legendre (r, s), uma função composta $g(x(r,s), y(r,s))$ com relação às coordenadas cartesianas é dada por

$$(38)\quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}; \text{ e}$$

$$(39)\quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}.$$

Sabendo que a matriz Jacobiana que mapeia perturbações nas coordenadas de Legendre em perturbações nas coordenadas cartesianas é escrita como

$$(40)\quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix},$$

pode-se constatar, pelas relações (38) e (39), que o produto de matrizes

$$(41)\quad \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(42)\quad \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}.$$

Portanto, os elementos da matriz $\mathbf{J}^{-1}$ são necessários para o cálculo das relações em (38) e (39). Assim,

$$(43)\quad \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

A relação entre os dois sistemas de coordenadas pode ser escrita por interpolação das coordenadas dos nós do elemento como

$$(44)\quad \begin{cases} x(r,s) & = & x_1 N_1(r,s) + x_2 N_2(r,s) + x_3 N_3(r,s) + x_4 N_4(r,s) \\ y(r,s) & = & y_1 N_1(r,s) + y_2 N_2(r,s) + y_3 N_3(r,s) + y_4 N_4(r,s) \end{cases}.$$

Usando (34) a (37) e (44), a matriz Jacobiana pode ser escrita como

$$(45)\quad \mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r}(r,s) & \frac{\partial N_2}{\partial r}(r,s) & \frac{\partial N_3}{\partial r}(r,s) & \frac{\partial N_4}{\partial r}(r,s) \\ \frac{\partial N_1}{\partial s}(r,s) & \frac{\partial N_2}{\partial s}(r,s) & \frac{\partial N_3}{\partial s}(r,s) & \frac{\partial N_4}{\partial s}(r,s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}.$$

A inversa da matriz Jacobiana pode ser escrita como

$$(46)\quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial x}{\partial s} \\ -\frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix},$$

onde J é o determinante da matriz Jacobiana (que é igual ao determinante de sua transposta)

$$(47)\quad J = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial r}.$$

Note que, após calcular a matriz $\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$ usando (45), as expressões em (47) e (46) podem ser calculadas facilmente.

Passo 3: Definição da função solução aproximada.

Com as funções de interpolação ilustradas na Figura 5 e na Figura 6, é possível escrever a função aproximada da solução do PVC como

(48) $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{9} \phi_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}_i.$

Note que não foram incluídas as funções de interpolação dos nós do contorno porque todos os nós no contorno têm condição de Dirichlet nula.

Passo 4: Definição da função de ponderação.

Nesse caso, decidiu-se escolher a função de ponderação no mesmo conjunto onde encontra-se a função $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$, isto é, $\mathcal{W} \equiv \mathcal{U}$. Assim, a função peso pode ser escrita como

(49) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{9} \phi_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}_i.$

É importante lembrar que, como condições de Dirichlet foram especificadas nos nós do contorno, os valores de $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ no contorno são nulos.

Passo 5: Substituição de $\boldsymbol{u}^h(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})$ dados em (48) e (49) em (7).

Note que a integral que aparece em (7) é sobre o domínio – neste caso o quadrado de lado igual a 1. Assim

(50) $\int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u^h(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^h(x,y)}{\partial y^2} - f(x,y) \right) w(x,y) \mathrm{d}x\, dy = 0.$

Analogamente ao que foi feito no PVC1, utiliza-se integração por partes para relaxar a exigência de que a função $u^h(x,y)$ seja duas vezes diferenciável com relação às variáveis x e y. Assim, (50) pode ser reescrita como

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(w(x,y) \frac{\partial^2 u^h(x,y)}{\partial x^2} \right) \mathrm{d}x\, dy + \int_0^1 \int_0^1 \left(w(x,y) \frac{\partial^2 u^h(x,y)}{\partial y^2} \right) \mathrm{d}y\, dx - \\ - \int_0^1 \int_0^1 \big(w(x,y) f(x,y) \big) \mathrm{d}x\, dy = 0$$

$$\int_0^1 \left(w(x,y) \frac{\partial^2 u^h(x,y)}{\partial x^2} \bigg|_{x=0}^{x=1} \right) dy - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \frac{\partial u^h(x,y)}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\, dy + \\ + \int_0^1 \left(w(x,y) \frac{\partial^2 u^h(x,y)}{\partial y^2} \bigg|_{y=0}^{y=1} \right) dx - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \frac{\partial u^h(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}y\, dx - \\ - \int_0^1 \int_0^1 \big(w(x,y) f(x,y) \big) \mathrm{d}x\, dy = 0$$

$$\int_0^1 \left(\overbrace{w(1,y)}^{c.c.=0} \frac{\partial^2 u^h(1,y)}{\partial x^2} - \overbrace{w(0,y)}^{c.c.=0} \frac{\partial^2 u^h(0,y)}{\partial x^2} \right) dy - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \frac{\partial u^h(x,y)}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\, dy + \\ + \int_0^1 \left(\overbrace{w(x,1)}^{c.c.=0} \frac{\partial^2 u^h(x,1)}{\partial x^2} - \overbrace{w(x,0)}^{c.c.=0} \frac{\partial^2 u^h(x,0)}{\partial x^2} \right) dx - \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \frac{\partial u^h(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}y\, dx - \\ - \int_0^1 \int_0^1 \big(w(x,y) f(x,y) \big) \mathrm{d}x\, dy = 0$$

(51)
$$- \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \frac{\partial u^h(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \frac{\partial u^h(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\, dy - \int_0^1 \int_0^1 \big(w(x,y) f(x,y) \big) \mathrm{d}x\, dy = 0$$

A equação (51) guia o desenvolvimento das matrizes 4×4 dos elementos que contribuirão para a matriz dos coeficientes do sistema global e dos vetores 4×1 dos elementos que contribuirão para o vetor do lado direito do sistema global. Como todos os dezesseis elementos têm as mesmas dimensões, suas matrizes serão todas iguais, bem como suas contribuições para o vetor do lado direito do sistema de equações.

Substituindo (12) e (13) em (16) e organizando o resultado na forma de uma matriz tem-se

(52)

$$\lfloor w_1 \quad \cdots \quad w_9 \rfloor \left\{ \begin{bmatrix} \int_D \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right) dA & \cdots & \int_D \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_9}{\partial x} + \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_9}{\partial y}\right) dA \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_D \left(\frac{\partial\phi_9}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi_9}{\partial y}\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right) dA & \cdots & \int_D \left(\frac{\partial\phi_9}{\partial x}\frac{\partial\phi_9}{\partial x} + \frac{\partial\phi_9}{\partial y}\frac{\partial\phi_9}{\partial y}\right) dA \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_D (\phi_1 f)\, dA \\ \vdots \\ \int_D (\phi_9 f)\, dA \end{pmatrix} \right\} = 0$$

Em (52), os valores de $w_1 \quad \cdots \quad w_9$ são arbitrários já que, observando a formulação em (7), eles são responsáveis pela arbitrariedade de $w(x, y)$, isto é, por $\forall w(x, y)$. Assim, a única maneira da expressão em (52) ser igual a zero para qualquer $w(x, y)$ é se o termo entre { } for sempre igual ao vetor nulo. Logo,

$$\text{(53)} \quad \begin{bmatrix} \int_D \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right) dA & \cdots & \int_D \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\frac{\partial\phi_9}{\partial x} + \frac{\partial\phi_1}{\partial y}\frac{\partial\phi_9}{\partial y}\right) dA \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_D \left(\frac{\partial\phi_9}{\partial x}\frac{\partial\phi_1}{\partial x} + \frac{\partial\phi_9}{\partial y}\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right) dA & \cdots & \int_D \left(\frac{\partial\phi_9}{\partial x}\frac{\partial\phi_9}{\partial x} + \frac{\partial\phi_9}{\partial y}\frac{\partial\phi_9}{\partial y}\right) dA \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_9 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \int_D (\phi_1 f)\, dA \\ \vdots \\ \int_D (\phi_9 f)\, dA \end{pmatrix}$$

Matrizes de coeficientes dos elementos

Elemento el_k:

$$\text{(54)} \quad \mathbf{K}_k = [K_{ij}] = \left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right) J dr ds\right], \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

A matriz em (54) é 4×4 e os termos do integrando são calculados seguindo a seguinte sequência:

1) *Matriz Jacobiana Transposta (eq. (45))*

$$\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r}(r,s) & \frac{\partial N_2}{\partial r}(r,s) & \frac{\partial N_3}{\partial r}(r,s) & \frac{\partial N_4}{\partial r}(r,s) \\ \frac{\partial N_1}{\partial s}(r,s) & \frac{\partial N_2}{\partial s}(r,s) & \frac{\partial N_3}{\partial s}(r,s) & \frac{\partial N_4}{\partial s}(r,s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

como todos os elementos são quadrados e as coordenadas cartesianas (x, y) são paralelas às coordenadas de Legendre (r, s), a matriz Jacobiana é simplesmente uma matriz de escala. Assim, se as equações (34) a (37) forem substituídas em (45) haverá simplificações resultando em

$$\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1/N}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1/N}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1/4}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1/4}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \mathbf{J}.$$

2) *Determinante da Matriz Jacobiana*

$$J = \frac{1}{64}$$

3) *Inversa de* $\mathbf{J}^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{J}^{-\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

4) *Cálculo de* $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ *pela equação* (43)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{pmatrix}$$

Substituindo-se as (34) a (37), obtém-se

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(s-1) \\ \frac{1}{4}(r-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(s-1) \\ 2(r-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(s-1) \\ -\frac{1}{4}(r+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(s-1) \\ -2(r+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(s+1) \\ \frac{1}{4}(r+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(s+1) \\ 2(r+1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}(s+1) \\ -\frac{1}{4}(r-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(s+1) \\ -2(r-1) \end{pmatrix}.$$

5) *Cálculo dos elementos* K_{ij}

Como a matriz é simétrica e 4×4 basta calcular os termos da diagonal e uma das metades. Assim

$$K_{11} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(2(s-1)2(s-1) + 2(r-1)2(r-1)\big)\frac{1}{64}drds = \frac{2}{3}$$

$$K_{22} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\big(-2(s-1)\big)\big(-2(s-1)\big) + \big(-2(r+1)\big)\big(-2(r+1)\big)\Big)\frac{1}{64}drds = \frac{2}{3}$$

$$K_{33} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\big(2(s+1)\big)\big(2(s+1)\big) + \big(2(r+1)\big)\big(2(r+1)\big)\Big)\frac{1}{64}drds = \frac{2}{3}$$

$$K_{44} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\big(-2(s+1)\big)\big(-2(s+1)\big) + \big(-2(r-1)\big)\big(-2(r-1)\big)\Big)\frac{1}{64}drds = \frac{2}{3}$$

$$K_{12} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\big(2(s-1)\big)\big(-2(s-1)\big) + \big(2(r-1)\big)\big(-2(r+1)\big)\Big)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{6}$$

$$K_{13} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\big(2(s-1)\big)\big(2(s+1)\big) + \big(2(r-1)\big)\big(2(r+1)\big)\Big)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{3}$$

$$K_{14} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\big(2(s-1)\big)\big(-2(s+1)\big) + \big(2(r-1)\big)\big(-2(r-1)\big)\Big)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{6}$$

$$K_{23} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\big(-2(s-1)\big)\big(2(s+1)\big) + \big(-2(r+1)\big)\big(2(r+1)\big)\Big)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{6}$$

$$K_{24} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\big(-2(s-1)\big)\big(-2(s+1)\big) + \big(-2(r+1)\big)\big(-2(r-1)\big)\Big)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{3}$$

$$K_{34} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Big(\big(2(s+1)\big)\big(-2(s+1)\big) + \big(2(r+1)\big)\big(-2(r-1)\big)\Big)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{6}$$

Logo, a matriz dos elementos é

$$(55) \qquad \mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Vetor do lado direito

A contribuição do elemento el_k para o vetor do lado direito do sistema de equações algébricas é dada por

$$(56) \quad \mathbf{B}_k = (B_i) = -\left(\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(N_i(r,s)f(x(r,s),y(r,s)))\,J drds\right],\ \ i = 1,2,3,4\right).$$

O vetor em (56) é 4×1 e os termos do integrando são calculados como

$$B_1 = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}(r-1)(s-1)4\right)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{16}$$
$$B_2 = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{4}(r+1)(s-1)4\right)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{16}$$
$$B_3 = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}(r+1)(s+1)\ 4\right)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{16}$$
$$B_4 = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{4}(r-1)(s+1)\ 4\right)\frac{1}{64}drds = -\frac{1}{16}$$

Montagem da matriz global simétrica

$K_{11} = K_{33}^{el_1} + K_{44}^{el_2} + K_{11}^{el_6} + K_{22}^{el_5} = 4\,.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$	$K_{22} = K_{33}^{el_2} + K_{44}^{el_3} + K_{11}^{el_7} + K_{22}^{el_6} = 4\,.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$
$K_{33} = K_{33}^{el_3} + K_{44}^{el_4} + K_{11}^{el_8} + K_{22}^{el_7} = 4\,.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$	$K_{44} = K_{33}^{el_5} + K_{44}^{el_6} + K_{11}^{el_{10}} + K_{22}^{el_9} = 4\,.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$
$K_{55} = K_{33}^{el_6} + K_{44}^{el_7} + K_{11}^{el_{11}} + K_{22}^{el_{10}} = 4\,.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$	$K_{66} = K_{33}^{el_7} + K_{44}^{el_8} + K_{11}^{el_{12}} + K_{22}^{el_{11}} = 4\,.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$
$K_{77} = K_{33}^{el_9} + K_{44}^{el_{10}} + K_{11}^{el_{14}} + K_{22}^{el_{13}} = 4\,.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$	$K_{88} = K_{33}^{el_{10}} + K_{44}^{el_{11}} + K_{11}^{el_{15}} + K_{22}^{el_{14}} = 4\,.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$
$K_{99} = K_{33}^{el_{11}} + K_{44}^{el_{12}} + K_{11}^{el_{16}} + K_{22}^{el_{15}} = 4\,.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$	$K_{12} = K_{43}^{el_2} + K_{12}^{el_6} = 2\,.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$
$K_{14} = K_{23}^{el_5} + K_{14}^{el_6} = 2\,.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$	$K_{15} = K_{13}^{el_6} = -\frac{1}{3}$
$K_{23} = K_{43}^{el_3} + K_{12}^{el_7} = 2\,.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$	$K_{24} = K_{24}^{el_6} = -\frac{1}{3}$
$K_{25} = K_{23}^{el_6} + K_{14}^{el_7} = 2\,.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$	$K_{26} = K_{13}^{el_7} = -\frac{1}{3}$
$K_{35} = K_{24}^{el_7} = -\frac{1}{3}$	$K_{36} = K_{23}^{el_7} + K_{14}^{el_8} = 2\,.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$
$K_{45} = K_{43}^{el_6} + K_{12}^{el_{10}} = 2\,.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$	$K_{47} = K_{23}^{el_9} + K_{14}^{el_{10}} = 2\,.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$
$K_{48} = K_{13}^{el_{10}} = -\frac{1}{3}$	$K_{56} = K_{43}^{el_7} + K_{12}^{el_8} = 2\,.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$
$K_{57} = K_{24}^{el_{10}} = -\frac{1}{3}$	$K_{58} = K_{23}^{el_{10}} + K_{14}^{el_{11}} = 2\,.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$
$K_{59} = K_{13}^{el_{11}} = -\frac{1}{3}$	$K_{68} = K_{24}^{el_{11}} = -\frac{1}{3}$
$K_{69} = K_{23}^{el_{11}} + K_{14}^{el_{12}} = 2.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$	$K_{78} = K_{34}^{el_{10}} + K_{12}^{el_{14}} = 2.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$
$K_{89} = K_{34}^{el_{11}} + K_{12}^{el_{15}} = 2.\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$	

Montagem do vetor do lado direito

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_3^{el_1} + N_4^{el_2} + N_1^{el_6} + N_2^{el_5} \\ N_3^{el_2} + N_4^{el_3} + N_1^{el_7} + N_2^{el_6} \\ N_3^{el_3} + N_4^{el_4} + N_1^{el_8} + N_2^{el_7} \\ N_3^{el_5} + N_4^{el_6} + N_1^{el_{10}} + N_2^{el_9} \\ N_3^{el_6} + N_4^{el_7} + N_1^{el_{11}} + N_2^{el_{10}} \\ N_3^{el_7} + N_4^{el_8} + N_1^{el_{12}} + N_2^{el_{11}} \\ N_3^{el_9} + N_4^{el_{10}} + N_1^{el_{14}} + N_2^{el_{13}} \\ N_3^{el_{10}} + N_4^{el_{11}} + N_1^{el_{15}} + N_2^{el_{14}} \\ N_3^{el_{11}} + N_4^{el_{12}} + N_1^{el_{16}} + N_2^{el_{15}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} \\ -\frac{4}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Assim, o sistema de equações algébrica a ser resolvido é

$$(56) \quad \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Passo 6: Resolução do sistema de equações algébricas.

A resolução do sistema de equações em (56) resulta nos seguintes valores discretos e aproximados da função $u(x, y)$, isto é,

$$(57) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{140} \\ -\frac{27}{112} \\ -\frac{27}{140} \\ -\frac{27}{112} \\ -\frac{87}{280} \\ -\frac{27}{112} \\ -\frac{27}{140} \\ -\frac{27}{112} \\ -\frac{27}{140} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.192857 \\ -0.241071 \\ -0.192857 \\ -0.241071 \\ -0.310714 \\ -0.241071 \\ -0.192857 \\ -0.241071 \\ -0.192857 \end{pmatrix}.$$

O resultado se aproxima mais da solução exata quanto maior for o número de partições N.

Tarefa 20. Faça o que se pede.

1. Resolver o PVC1 com $N = 8$. Compare os seus resultados com aqueles apresentados na Tabela 1, ampliando a tabela com os valores obtidos e os erros relativos à solução exata.