Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 21

1. Objetivo: Métodos que usam transformações de similaridade (continuação).

Nesta Aula, apresentamos mais um método que usa o conceito de transformação de similaridade: o Método de **Jacobi**. Mais um método de transformação de similaridade, o Método **QR**, será apresentado na aula #22.

2. Transformações de Similaridade (Recapitulação)

Dadas uma matriz **A** e uma matriz **P** que tenha uma inversa $\mathbf{P}^{-1}$, podemos construir uma nova matriz a partir do **produto** dessas três matrizes e chamá-la de $\bar{\mathbf{A}}$, isto é,

(1) $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Se **P** for ortogonal, $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$, e a equação (1) fica mais fácil por não necessitar de inversão de matrizes. Assim,

(2) $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Os autovalores da matriz $\bar{\mathbf{A}}$ são os mesmos da matriz original **A**, isto é, os espectros das duas matrizes são idênticos,

(3) $\lambda(\mathbf{A}) \equiv \lambda(\bar{\mathbf{A}})$.

Os autovetores da matriz original, **A**, podem ser obtidos a partir dos autovetores da matriz $\bar{\mathbf{A}}$ através da relação,

(4) $\mathbf{x}_i = \mathbf{P}\mathbf{v}_i$,

onde $\mathbf{v}_i$ é um autovetor da matriz $\bar{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{x}_i$ é o autovetor correspondente da matriz, **A**, ou seja, esses autovetores compartilham o mesmo autovalor λ_i.

Se pusermos todos os autovetores da matriz $\bar{\mathbf{A}}$ como colunas de uma matriz **V** então

(5) $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{V}$

onde **X** é a matriz cujas colunas são os autovetores correspondentes da matriz **A**.

Nota: O objetivo dos métodos que usam transformações de similaridade é fazer com que a matriz $\bar{\mathrm{A}}$ tenha uma **estrutura tão simples que seja fácil achar** seus **autovalores** λ_i e seus **autovetores** $\mathbf{v}_i$ para, então, através das relações (3) e (5) achar os autovalores e autovetores da matriz original **A.**

3. Método de Jacobi

O método de Jacobi tem uma estrutura de implementação parecida com a do método de Householder. Porém, o objetivo do método de Jacobi é obter uma matriz $\bar{\mathbf{A}}$ que seja **diagonal**. Se $\bar{\mathbf{A}}$ for diagonal, os autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$ são os próprios elementos de sua diagonal e os autovetores $\mathbf{v}_i$ associados são as colunas da matriz identidade **I** (chamada base canônica). Então, pela equação (3), temos automaticamente os autovalores de **A**; e, pela equação (5), temos que os autovetores de **A** são

(6) $\mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{I} = \mathbf{P}$.

Ou seja, os autovetores de **A** são as próprias colunas da matriz **P**.

O método de Jacobi faz uma sequência de transformações de similaridade até que a matriz transformada final tenha uma estrutura simples chamada matriz diagonal (isso acontece porque estamos lidando com matrizes **A simétricas**). Antes de discutirmos as propriedades da matriz de Jacobi, $\mathbf{P} \equiv \mathbf{J}$, vamos entender como essas matrizes vão ser aplicadas para chegar na matriz $\bar{\mathbf{A}}$ final, isto é,

$$\bar{\mathbf{A}} = \underbrace{\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{(\mathrm{n}-)1,\mathrm{n}} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{n},1} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{3,1} \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{2,1} \mathbf{A} \mathbf{J}_{2,1} \right)}_{\textbf{Passo 1}} \mathbf{J}_{3,1} \right)}_{\textbf{Passo 2}} \cdots \mathbf{J}_{\mathrm{n},1} \right)}_{\textbf{Passo (n}-\textbf{1)}} \cdots \mathbf{J}_{\mathrm{n},(\mathrm{n}-1)}}_{\textbf{Passo n(n}-\textbf{1)/2}}. \tag{7}$$

A equação (7) dá uma visão macroscópica de como o algoritmo de Jacobi funciona. Porém, a equação (7) representa uma **tentativa de diagonalização** que chamamos de **varredura de Jacobi**. Serão necessárias várias varreduras de Jacobi para termos uma matriz diagonal, ou muito próxima de uma matriz diagonal.

Vamos escrever o algoritmo que faz múltiplas varreduras de Jacobi até que a matriz fique muito próxima de uma matriz diagonal.

3.1 Método de Jacobi

O algoritmo recebe a matriz para a qual se deseja achar os autovalores e os autovetores correspondentes, e uma tolerância ε que serve para verificar se os elementos fora da diagonal estão suficientemente próximos de zero. Em seguida, faz um loop com múltiplas varreduras de Jacobi até atingir a forma final de uma matriz diagonal. Todas as matrizes envolvidas nas transformações de similaridade são acumuladas para poder recuperar os autovetores da matriz original.

3.1.1 Algoritmo de Jacobi

```
(Matriz, vetor) metodoDeJacobi (Matriz A, int n, float ε)
Matriz P, J, A_nova, A_velha, Ā;
Vector Lamb;              // Vetor que armazena os autovalores de A.
float val=100;            // Escalar ao qual é atribuída a soma dos quadrados dos elementos abaixo
                          // da diagonal da matriz A_nova para verificar convergência.
// Inicializar matrizes
P ← I;                    // Matriz que contém os produtos das matrizes ortogonais J
                          // para recuperar os autovetores da matriz original.
A_velha ← A;
Enquanto (val > ε) faça // loop das varreduras de diagonalização
        // Varredura de Jacobi (devolve uma matriz que deve
        // se aproximar de uma matriz diagonal
        (A_nova, J) ← varreduraDeJacobi (A_velha, n);
        // Salvar A_nova para a próxima varredura de Jacobi.
        A_velha ← A_nova;
        // Acumular o produto das matrizes de Jacobi como
        //  P ← I J_1 J_2 ⋯ J_k
        P ← P.J;
        // Verificar se a matriz A_nova já é diagonal
        val = somaDosQuadradosDosTermosAbaixoDaDiagonal(A_nova, n)
```

End Enquanto
// Ao sair do loop, o formato da matriz $\mathbf{A}_{\text{nova}}$ já está suficientemente próximo do formato de
// uma matriz diagonal. Assim, os elementos da diagonal são os autovalores da matriz original
// de entrada e as colunas de **P** são os autovetores correspondente.
$\mathbf{Lamb}(1:n) \leftarrow (\mathbf{A}_{\text{nova}})_{i,i}(1:n)$;   // Copia os elementos da diagonal da matriz no vetor Lamb
return (**P**, **Lamb**);

3.1.2 Varredura de Jacobi em forma algorítmica

O algoritmo abaixo não se preocupa com otimização, mas sim com a clareza.

(Matriz, Matriz) varreduraDeJacobi (Matriz **A**, int n)
Matriz $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}_{ij}$, $\mathbf{A}_{\text{nova}}$, $\mathbf{A}_{\text{velha}}$, $\bar{\mathbf{A}}$;
// Inicializar matrizes
$\mathbf{J} \leftarrow \mathbf{I}$; // Esta matriz contém os produtos das matrizes ortogonais $\mathbf{J}_{ij}$
    // para recuperar os autovetores da matriz original.
$\mathbf{A}_{\text{velha}} \leftarrow \mathbf{A}$;
Para j = 1 ... (n-1) **faça** // loop das colunas
    Para i = (j+1) ... (n) **faça** // loop das linhas
        // Construção da matriz de Jacobi $\mathbf{J}_{ij}$
        $\mathbf{J}_{ij} \leftarrow$ matrizJacobiBaseadaNoElemento_ij_DaMatrizVelha($\mathbf{A}_{\text{velha}}$, i, j, n);
        // Transformação de similaridade do passo ij
        // Produto de três matrizes.
        // Como $\mathbf{J}_{ij}$ **não é simétrica, sua transposta** $\mathbf{J}_{ij}^{T}$ **precisa ser computada**
        $\mathbf{A}_{\text{nova}} \leftarrow \mathbf{J}_{ij}^{T}\mathbf{A}_{\text{velha}}\mathbf{J}_{ij}$;
        // Salvar para o próximo passo.
        $\mathbf{A}_{\text{velha}} \leftarrow \mathbf{A}_{\text{nova}}$;
        // Acumular o produto das matrizes de Jacobi como
        // $\mathbf{J} \leftarrow \mathbf{I}\,\mathbf{J}_{2,1}\mathbf{J}_{3,1}\cdots\mathbf{J}_{n,1}\cdots\mathbf{J}_{n,n-1}$
        $\mathbf{J} \leftarrow \mathbf{J}.\mathbf{J}_{ij}$;
    End Para
End Para
// No final do loop externo, o formato da matriz $\mathbf{A}_{\text{nova}}$ já está mais próximo do formato de uma matriz diagonal.
$\bar{\mathbf{A}} \leftarrow \mathbf{A}_{\text{nova}}$;
return ($\bar{\mathbf{A}}$, **J**);

Neste momento, você consegue ver que o algoritmo é a reprodução exata da equação (7). Porém, alguns pontos precisam ser esclarecidos:

1) Por que temos dois loops aninhados (loop j das colunas: 1:(n-1), loop i das linhas: (j+1):n?
2) Como é o método **matrizJacobiBaseadaNoElemento_ij_DaMatrizVelha**(...)?
3) Para que serve a matriz acumulada **J**?

Nas subseções a seguir, os três pontos serão esclarecidos.

3.1.3 Estrutura da matriz diagonal $\bar{\mathbf{A}}$

O método de Jacobi aplica uma sequência de transformações de similaridade para que a matriz original seja transformada em uma matriz de estrutura mais simples. Na matriz diagonal, a **diagonal principal** tem ***n*** elementos e está representada pela cor **verde**, e todos os outros elementos fora da diagonal principal são iguais a zero. Assim, sua forma é:

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}\right]$$

$$(8) \qquad = \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}\right].$$

Note que, em todas as colunas, exceto na última, há elementos abaixo do elemento da diagonal principal com 0. Portanto, para transformar a matriz original para esse formato, precisamos zerar todos os elementos abaixo do elemento da diagonal principal em cada coluna **exceto na última**. Portanto, o loop j das colunas vai até a penúltima coluna. O loop das linhas para uma dada coluna j, percorre todos os elementos abaixo da linha da diagonal, ou seja, da linha (j+1) até a última linha (linha n). Como a matriz é simétrica, o que fizermos para as colunas acontecerá igualmente nas linhas.

Cada passo do loop j tem o objetivo de deixar apenas o elemento da diagonal diferente de zero. Por isso, o loop vai da coluna 1 até a coluna n-1.

3.1.4 Construção da matriz de Jacobi $\mathbf{J}_{\mathrm{ij}}$

Vamos repetir a equação (7) aqui e observar que a matriz $\mathbf{J}_{\mathrm{ij}}$ atua na matriz resultante dos parênteses mais internos, ou seja, na matriz resultante dos passos anteriores.

$$(7) \qquad \underbrace{\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{(\mathrm{n-})1,\mathrm{n}} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{n},1} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{3,1} \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{2,1}\mathbf{A}\mathbf{J}_{2,1}\right)}_{\textbf{Passo 1}} \mathbf{J}_{3,1}\right)}_{\textbf{Passo 2}} \cdots \mathbf{J}_{\mathrm{n},1}\right)}_{\textbf{Passo (n-1)}} \cdots \mathbf{J}_{\mathrm{n},(\mathrm{n-1})}}_{\textbf{Passo n(n-1)/2}}$$

Assim, quando aplicarmos a operação de similaridade

$$(9) \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{nova}} \leftarrow \mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{ij}}\mathbf{A}_{\mathrm{velha}}\mathbf{J}_{\mathrm{ij}},$$

o elemento $(\mathbf{A}_{\mathrm{nova}})_{\mathrm{i,j}}$ ficará igual a zero.

Esse fato é levado em conta no método
Matriz **matrizJacobiBaseadaNoElemento_ij_DaMatrizVelha(…)**.

3.1.4.1 Matiz de rotação de Jacobi

A matriz de Jacobi é uma matriz de rotação. Isso significa que, dados os valores i e j, onde j é o índice da coluna e i é o índice da linha do elemento a ser zerado, isto é, do elemento $(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{i,j}$, e sabendo que esse elemento da coluna j está abaixo da diagonal, isto é, i > j, sua estrutura é representada como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_{ij} &= \left[\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \mathrm{el}_{j,j} & \cdots & 0 & \cdots & \mathrm{el}_{j,i} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \mathrm{el}_{i,j} & \cdots & 0 & \cdots & \mathrm{el}_{i,i} & \cdots & 0 \\
 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}\right] \\
&= \left[\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & 0 & \cdots & -\mathrm{sen}(\theta) & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \mathrm{sen}(\theta) & \cdots & 0 & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & 0 \\
 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Note que a construção da matriz é bem simples: basta inicializar a matriz $\mathbf{J}_{ij}$ com a **matriz identidade**, e alterar os elementos $\mathrm{el}_{j,j} = \mathrm{el}_{i,i} = \cos(\theta)$, $\mathrm{el}_{i,j} = \mathrm{sen}(\theta)$, e $\mathrm{el}_{j,i} = -\mathrm{sen}(\theta)$.

Porém, vem a pergunta: **Qual é o valor de $\boldsymbol{\theta}$ a ser usado**?

Para responder essa pergunta, vamos escrever a equação (9) explicitamente, usando a equação (10), isto é, no produto da equação (9), o elemento

$$
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{i,j} = 0 = \left(\mathbf{J}_{ij}^{T}\right)_{i,k}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,m}\left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{m,j} = \left(\left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{k,i}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,m}\right)\left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{m,j}
\tag{11}
$$

Na equação (11), usamos a notação indicial, em que, índices repetidos implicam um somatório. Usamos também o fato de que o elemento de índice (i,k) da matriz transposta, isto é, $\left(\mathbf{J}_{ij}^{T}\right)_{i,k}$ é igual ao elemento de índice (k,j) da matriz original. Assim, $\left(\mathbf{J}_{ij}^{T}\right)_{i,k} = \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{k,i}$.

O último termo da equação (11) será calculado em duas etapas segundo o parêntese introduzido, isto é,

Etapa 1: $\left((\mathbf{J}_{ij})_{k,i}(\mathbf{A}_{velha})_{k,m}\right)$. Esse produto, com **k repetido**, equivale ao **produto escalar** da coluna i da matriz $[\mathbf{J}_{ij}]$ pela coluna m da matriz $[\mathbf{A}_{velha}]$ resultando no elemento $\mathbf{C}_{i,m}$ de uma matriz auxiliar. Assim

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_{i,m} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,i}(\mathbf{A}_{velha})_{k,m} \\
&= el_{j,i}(\mathbf{A}_{velha})_{j,m} + el_{i,i}(\mathbf{A}_{velha})_{i,m} \\
&= -\text{sen}\,(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{j,m} + \cos\,(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{i,m}
\end{aligned} \tag{12}
$$

// A coluna i da matriz $\mathbf{J}_{ij}$
// só tem dois elementos
// não nulos.

Etapa 2: $\left((\mathbf{J}_{ij})_{k,i}(\mathbf{A}_{velha})_{k,m}\right)(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} = \mathbf{C}_{i,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j}$. Este produto, com **m repetido**, equivale ao **produto escalar** da linha i da matriz $[\mathbf{C}]$ pela coluna j da matriz $[\mathbf{J}_{ij}]$ resultando no elemento $(\mathbf{A}_{nova})_{i,j} = 0$. Assim

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{nova})_{i,j} = 0 &= \mathbf{C}_{i,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} \\
0 &= \left(-\text{sen}\,(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{j,m} + \cos\,(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{i,m}\right)(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} \\
&= -\text{sen}(\theta)\,(\mathbf{A}_{velha})_{j,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} + \cos\,(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{i,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} \\
0 &= \boxed{-\text{sen}(\theta)\left\{(\mathbf{A}_{velha})_{j,j}el_{j,j} + (\mathbf{A}_{velha})_{j,i}el_{i,j}\right\} + \cos(\theta)\left\{(\mathbf{A}_{velha})_{i,j}el_{j,j} + (\mathbf{A}_{velha})_{i,i}el_{i,j}\right\}} \\
0 &= -\text{sen}(\theta)\left\{(\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{velha})_{j,i}\,\text{sen}(\theta)\right\} + \cos(\theta)\left\{(\mathbf{A}_{velha})_{i,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{velha})_{i,i}\,\text{sen}(\theta)\right\} \\
0 &= \boxed{\text{sen}(\theta)\cos(\theta)\left((\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\right) + (\mathbf{A}_{velha})_{i,j}\cos(\theta)\cos(\theta) - (\mathbf{A}_{velha})_{j,i}\,\text{sen}(\theta)\,\text{sen}(\theta)}
\end{aligned} \tag{13}
$$

Vamos fazer três substituições na equação (13):

1) como a matriz $\mathbf{A}_{velha}$ é simétrica, então $(\mathbf{A}_{velha})_{j,i} = (\mathbf{A}_{velha})_{i,j}$;
2) $\text{sen}(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}2\,\text{sen}(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\text{sen}(2\theta)$; e
3) $\cos(\theta)\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)\,\text{sen}(\theta) = \cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) = \cos(2\theta)$.

Assim, a equação (13) pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{nova})_{i,j} = 0 &= \mathbf{C}_{i,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} \\
0 &= \frac{1}{2}\text{sen}(2\theta)\left((\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\right) + \cos(2\theta)\,(\mathbf{A}_{velha})_{i,j} \\
\frac{\text{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} &= \frac{-2(\mathbf{A}_{velha})_{i,j}}{\left((\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\right)}
\end{aligned} \tag{14}
$$

A equação (14) nos dá a tangente do ângulo 2θ. Vamos analisar essa equação.

$$
\text{tg}(2\theta) = \frac{-2(\mathbf{A}_{velha})_{i,j}}{\left((\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\right)} \Longrightarrow \begin{cases} \text{se} \geq 0, \text{considerar } 0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{2} \\ \text{se} < 0, \text{considerar } -\frac{\pi}{2} < 2\theta < 0 \\ (\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j} = 0, \text{considerar } 2\theta = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{15}
$$

Assim,

$$(16)\qquad \begin{cases} \text{se } \mathrm{tg}(2\theta) \geq 0 \text{ considerar } 0 \leq \theta = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2\theta) < \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \mathrm{sen}(\theta) \geq 0 \text{ e } \cos(\theta) > 0 \\ \text{se } \mathrm{tg}(2\theta) < 0, \text{considerar } -\frac{\pi}{4} < \theta = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2\theta) < 0 \Longrightarrow \mathrm{sen}(\theta) \leq 0 \text{ e } \cos(\theta) > 0 \\ (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{i,i}} - (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{j,j}} = 0, \text{considerar } \theta = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3.1.4.2 Algoritmo de construção da matriz de Jacobi, $\mathbf{J}_{\mathbf{ij}}$

Matriz **matrizJacobiBaseadaNoElemento_ij_DaMatrizVelha**
(MatrizSimétrica **A**, int i, int j, int n)

Matriz **I**, $\mathbf{J}_{\mathbf{ij}}$;
Real $\theta, \varepsilon = 10^{-6}$;
// Inicializar vetores
$\mathbf{J}_{\mathbf{ij}} \leftarrow \mathbf{I}$; // Matriz identidade com n x n elementos
Se $\left(\mathrm{abs}\left(\mathbf{A}_{\text{i,j}}\right) \leq \varepsilon\right)$ **return** $\mathbf{J}_{\mathbf{ij}}$ // Considerar $\mathbf{A}_{\text{i,j}} = 0$, retorna a matriz identidade
// Calcular θ
Se $\left(\mathrm{abs}\left((\mathbf{A})_{\text{i,i}} - (\mathbf{A})_{\text{j,j}}\right) \leq \varepsilon\right)$ // Considerar $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{i,i}} = (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{j,j}}$ **então**
$\theta = \frac{\pi}{4}$;
Senão
$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-2(\mathbf{A})_{\text{i,j}}}{(\mathbf{A}_{\text{i,i}} - \mathbf{A}_{\text{j,j}})}\right)$; // Esta função já retorna um ângulo +/-
// no primeiro quadrante sentido anti-horário (+)
// no primeiro quadrante sentido horário (-)
End Se-Senão
$\mathbf{J}_{\mathbf{ij}}(\text{i}, \text{i}) \leftarrow \cos(\theta)$
$\mathbf{J}_{\mathbf{ij}}(\text{j}, \text{j}) \leftarrow \cos(\theta)$
$\mathbf{J}_{\mathbf{ij}}(\text{i}, \text{j}) \leftarrow \mathrm{sen}(\theta)$
$\mathbf{J}_{\mathbf{ij}}(\text{j}, \text{i}) \leftarrow -\mathrm{sen}(\theta)$

return ($\mathbf{J}_{\mathbf{ij}}$);

3.1.5 Por que a Varredura de Jacobi não diagonaliza a matriz original?

Suponha que a matriz de Jacobi $\mathbf{J}_{\text{ij}}$ tenha sido construída para, através da equação (11), zerar o elemento $(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{\text{i,j}}$. O que acontece com os termos que já tinham sido zerados em passos anteriores da varredura? Para responder isso, vamos analisar o que acontece com esses termos quando a transformação de similaridade da equação (9) é feita usando $\mathbf{J}_{\text{ij}}$, ou seja,

$$(17)\qquad (\mathbf{A}_{\text{nova}})_{\text{r,s}} = \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}^{\text{T}}\right)_{\text{r,k}} (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{k,m}} \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{m,s}} = \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{k,r}} (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{k,m}} \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{m,s}}$$

A varredura de Jacobi começa sempre com a coluna j=1. Vamos assumir inicialmente que, na equação (17), s=j. Essa condição acontece logo no primeiro passo no loop das colunas s=j=1. Assim, o que acontece com os elementos entre a diagonal (j, j) e o elemento (i, j) que acaba de ser zerado?

Caso 1) s = j

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{\text{nova}})_{\text{r,j}} &= \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{k,r}} \left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{k,m}} \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{m,j}}\right) \\ &= \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{k,r}} \left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{k,j}} \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{j,j}} + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{k,i}} \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{i,j}}\right) \\ &= \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{k,r}} \left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{k,j}} \cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{k,i}} \mathrm{sen}(\theta)\right) \end{aligned}$$

1.1) j < r < i (**elementos da coluna j que deveriam permanecer zerados**)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,j} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= (\mathbf{J}_{ij})_{r,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= \left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}\text{sen}(\theta)\right)
\end{aligned}
$$

Note que o elemento $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}$ ainda não foi zerado pois sua coluna está à direita do loop de varredura j das colunas e sua linha r não está na parte que seria zerada por simetria. Portanto, o elemento $(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,j}$ deixa de ser zero. Observe, porém que o termo vilão é multiplicado por um número entre -1 e 1, isto é, $\text{sen}(\theta)$. Por isso, **com múltiplas varreduras, esse termo tenderá a zero**.

1.2) j < r = i

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{i,j} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,i}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

1.3) i < r

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{i,j} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= (\mathbf{J}_{ij})_{r,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= \left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}\text{sen}(\theta)\right)
\end{aligned}
$$

O Caso 1) já é suficiente para concluir que os termos que haviam sido zerados deixam de ser zero. No Caso 2 vemos o que acontece com elementos de colunas anteriores à coluna que está sendo zerada.

Caso 2) s < j (elementos em colunas anteriores à coluna j que deveriam permanecer zerados)

$$
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,s} = (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,s}\right) = (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s}
$$

2.1) s < r < j

$(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,s} = (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s} = (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,s}$ **(Valor se mantem)**

2.2) j < r = j

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{j,s} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,j}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s}\\
&= (\mathbf{J}_{ij})_{j,j}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s} + (\mathbf{J}_{ij})_{i,j}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}\\
&= \cos(\theta)(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s} + \text{sen}(\theta)(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}
\end{aligned}
$$

Como $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s}$ e $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}$ deixaram de ser zero, $(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{j,s}$ já não é mais zero.

2.3) j < r < i

$(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,s} = (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s} = (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,s}$ **(Valor se mantem)**

2.4) j < r = i

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{i,s} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,i}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s} \\
&= (\mathbf{J}_{ij})_{j,i}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s} + (\mathbf{J}_{ij})_{i,i}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s} \\
&= -\text{sen}(\theta)(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s} + \cos(\theta)(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}
\end{aligned}
$$

Como $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s}$ e $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}$ deixaram de ser zero, $(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{j,s}$ já não é mais zero.

2.5) i < r

$$
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,s} = (\mathbf{J}_{ij})_{r,r}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,s} = (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,s}
$$

Tarefa #14:

Com a matriz **A** abaixo, faça o que se pede:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 40 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 30 & 12 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 20 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 25 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}
$$

1) Implemente o método de Jacobi e aplique-o sobre **A** para encontrar

i. a matriz diagonal $\bar{\mathbf{A}}$

ii. a matriz acumulada $\mathbf{P} = \mathbf{P_1 P_2 P_3} \ldots$

iii. Imprima a matriz que sai de cada varredura de Jacobi

iv. Imprima os pares (autovalor, autovetor) da matriz **A**

v. Compare os resultados do item 3) com os resultados da Tarefa #13.

2) Adapte o método de **varredura de Jacobi** para receber a matriz tridiagonal que sai do método de Householder. Neste caso, observe que:

i. as varreduras de colunas e linhas continuam as mesmas

ii imprima $\mathbf{A}_{\text{nova}}$ logo após a linha $\mathbf{A}_{\text{nova}} \leftarrow \mathbf{J}_{ij}^{T}\mathbf{A}_{\text{velha}}\mathbf{J}_{ij}$; e verifique se os termos que eram zero deixaram de ser zero.

iii. depois da diagonalização, verifique que as colunas de **P** não são os autovetores de **A**.

iv. Faça $\mathbf{P} = \mathbf{HP}$ e verifique que as colunas da nova matriz **P** são os autovetores de **A**