

Introdução à Pesquisa Operacional - Aula 2

Modelagem e Solução Gráfica

05 de Agosto de 2015

Aplicações

Pesquisa Operacional - Aplicações

- indústria de petróleo: extração, refinamento, mistura e distribuição.
- indústria de alimentos: ração animal (problema da mistura).
- planejamento da produção: dimensionamento de lotes (o que, quando e quanto produzir?).
- indústria siderúrgica: ligas metálicas (problema da mistura).
- indústria de papel: otimização do processo de cortagem de bobinas.
- indústrias de móveis: otimização do processo de cortagem de placas retangulares.
- aplicações financeiras: otimização do fluxo de caixa, análise de carteiras de investimento.

- Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional 2011 - Ubatuba SP (Silva et al. 2011)
- Modelo para o planejamento tático integrado da produção e distribuição de papel e celulose
- 3,3 milhões de variáveis de decisão
- 500 mil restrições
- Resolvido em 30 minutos (pacote CPLEX - IBM ILOG CPLEX Optimize)

- Solvers que resolvem problemas lineares
- CPLEX / IBM ILOG
- <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>
- XPRESS: www.dashoptimization.com/
- Gurobi : <http://www.gurobi.com/>
- General Algebraic Modeling System (GAMS) www.gams.com/
- Programas livres :GLPK / Gnu: www.gnu.org/software/glpk

Problema da Mistura

O PROBLEMA DA MISTURA

Problema da mistura

- Materiais disponíveis são combinados para gerar novos produtos com características convenientes;
- Um dos primeiros problemas de otimização linear implementados com sucesso na prática.
- Abordagens:
 - Ração;
 - Ligas metálicas;
 - Composição de filtros de areia.

Problema da mistura - Ração

- Queremos saber quais as quantidades ideais de cada ingrediente para fazer uma quantidade de ração, com as necessidades nutricionais atendidas e o custo total dos ingredientes seja o menor possível.
- Temos os ingredientes e seus custos:
 - Milho (A_1) - R\$ 65,00 /Kg
 - Farinha de ossos (A_2) - R\$ 30,00 /Kg

Problema da mistura - Ração

- Para fazer uma certa quantidade de ração para, digamos, aves, é necessário uma certa quantidade nutrientes, digamos, vitamina A (V_a), vitamina B (V_b) e proteína (V_c).
- Os ingredientes apresentam esses nutrientes determinadas unidades (un):
 - A_1 - **2 un. de V_a , 3 un. de V_b e 1 un. de V_c ;**
 - A_2 - **3 un. de V_a , 2 un. de V_b ;**

Problema da mistura - Ração

- Deseja-se prepara uma ração que contenha no mínimo 7 unidades de V_a , 9 unidades de V_b e 1 unidade de V_c .
- Determinar a quantidade dos alimentos necessárias para satisfazer a necessidades da ração.

Nutrientes	Ingredientes		Qtde
	A_1	A_2	Mínima
Vitamina A	2	3	7
Vitamina B	3	2	9
Proteína	1	0	1
Custos (R\$/kg)	65	30	

Problema da mistura - Pergunta-se

- Como misturar (as quantidades) dos ingredientes para produzir a ração de menor custo possível?
- A mistura atende as necessidades de nutrientes?

Problema da mistura - O que decidir?

- Quantidades dos ingredientes presentes na mistura?
- Decisões: Denominadas Variáveis de decisão.
- Definindo
- x_1 = quantidade de ingrediente do tipo 1 presente na mistura (u.m).
- x_2 = quantidade de ingrediente do tipo 2 presente na mistura (u.m).

Problema da mistura - Decidir para que?

- função custo (f)
- O custo mínimo seria nulo se não fosse as quantidades mínimas de nutrientes a serem atendidas (Vitamina A, Vitamina B e Proteína)(os custos são positivos). Objetivo: minimizar o custo total da mistura.
- Custo total é dado por uma função objetivo.
$$f(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2.$$
- Devemos determinar x_1 e x_2 tal que $f(x_1, x_2)$ seja o menor possível. $\min f(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2$

Modelagem do Exemplo 1

Considere que as composições de vitamina A, vitamina B e proteína na ração sejam satisfeitas.

Modelo Matemático:

$$\min f(x_1, x_2) = 65x_1 + 30x_2$$

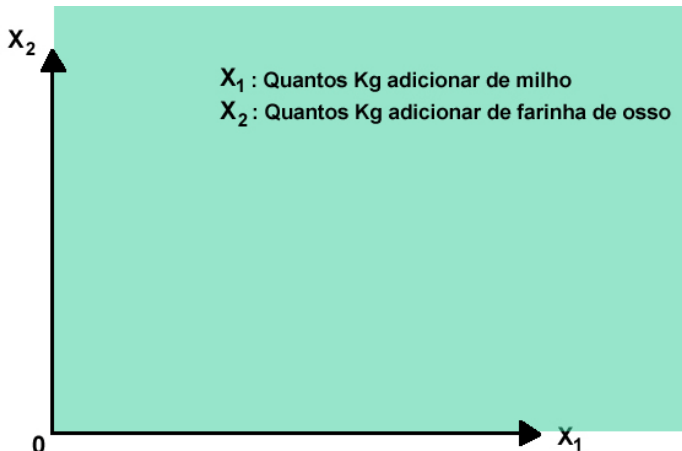
$$2x_1 + 3x_2 \geq 7$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 9$$

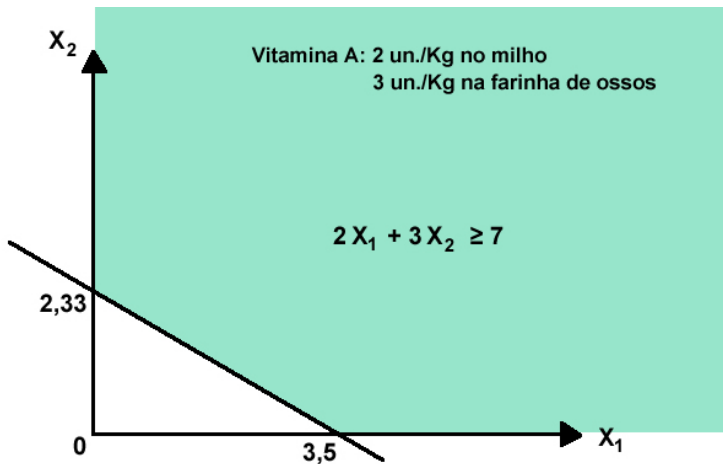
$$1x_1 + 0x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

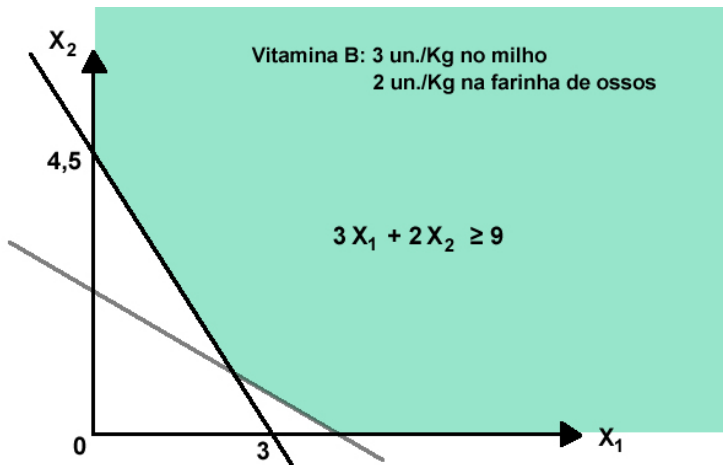
Problema da mistura - Ração



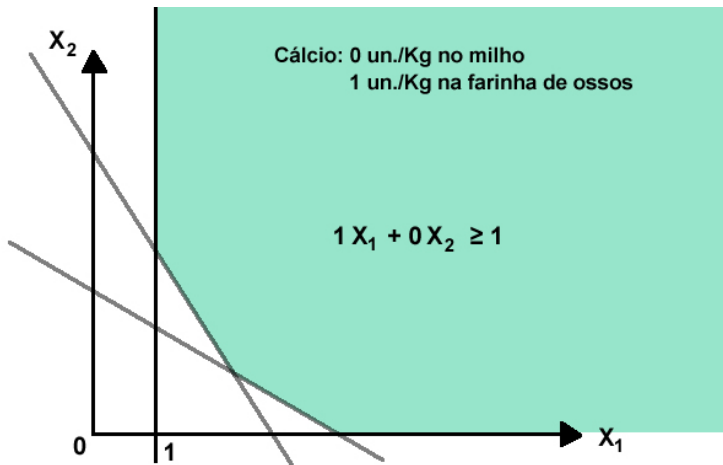
Problema da mistura - Ração



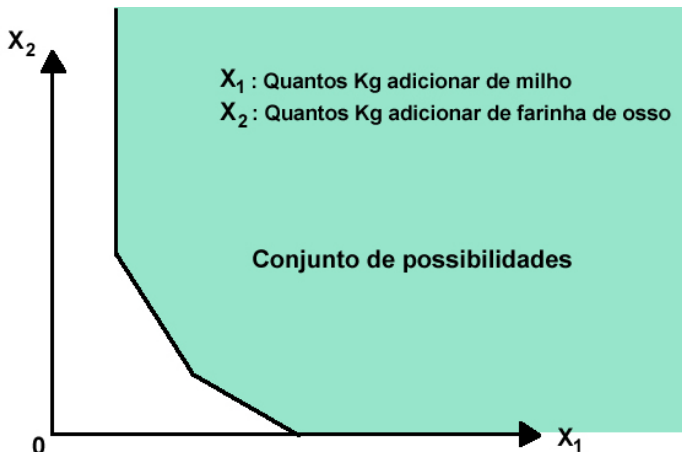
Problema da mistura - Ração



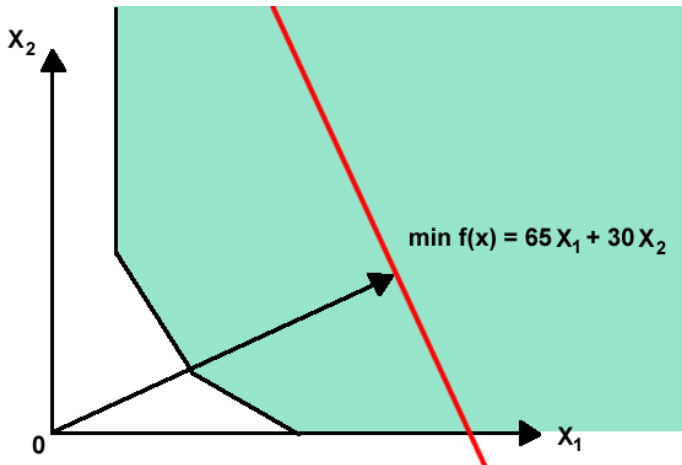
Problema da mistura - Ração



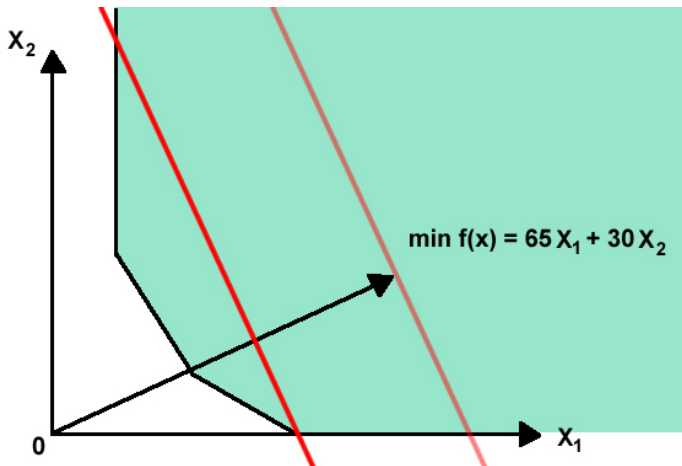
Problema da mistura - Ração



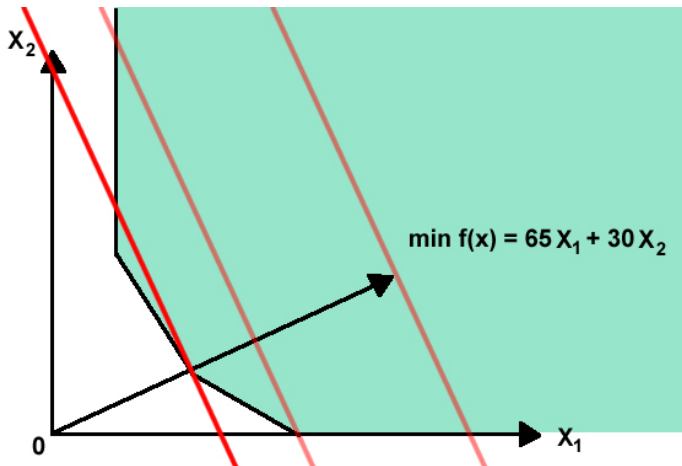
Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração

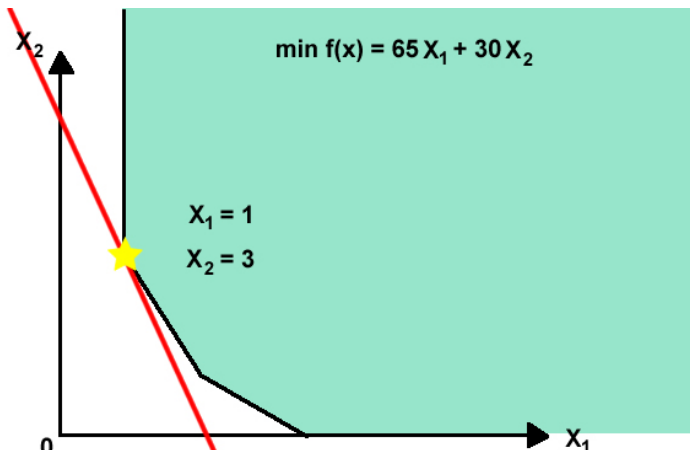


Problema da mistura - Ração



Problema da mistura - Ração

Custo Mínimo da Mistura $f^* = 155$ e devemos misturar 1 unidade do ingrediente 1 e 3 unidades do ingrediente 2.



OUTRAS APLICAÇÕES - Ligas metálicas

- Ligas metálicas são produzidas a partir de vários insumos (lingotes de ferro, grafite, sucatas industriais, entre outros).
- Cada insumo tem uma composição (quantidades de carbono, silício, manganês etc) e custo conhecidos.
- A composição da liga é determinada por normas técnicas da metalurgia (quantidades de carbono, silício, manganês etc).
- Deseja-se determinar as quantidades de cada insumo a serem fundidas, satisfazendo as normas técnicas da metalurgia com o menor preço final possível.

UMA FERRAMENTA PARA AVALIAÇÃO DE RESULTADOS DE DIVERSOS MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE DIETAS

Anderson Amendoeira Namen
Cláudio Thomás Bornstein

Histórico - Artigo de Namen e Bornstein, 2004

George Stigler apresentou, em 1945, o seguinte problema (Stigler, 1945)

Para um homem mediano pesando aproximadamente 70 kg, qual quantidade dentre 77 diferentes alimentos deveria ser ingerida diariamente, de modo que as necessidades mínimas de nutrientes fossem iguais às recomendadas pelo Conselho Nacional de Pesquisa Norte-americano e, além disso, a dieta elaborada tivesse o menor custo possível?

Histórico- Artigo de Namen e Bornstein, 2004

- Stigler resolveu um conjunto amplo de inequações (9×77) através de uma heurística, obtendo um custo total para a dieta de 39,93 dólares por ano.
- Foram examinadas manualmente 510 diferentes possibilidades de combinação de alimentos.
- Não tinha comprovação de que o valor obtido era o ótimo (O método Simplex ainda não tinha sido proposto).

Histórico- Artigo de Namen e Bornstein, 2004

- Método Simplex - George Dantzig, 1947.
- Em 1947, Jack Laderman, responsável pelo Projeto de Tabelas Matemáticas do Bureau Nacional de Padrões norte-americano, decidiu então resolver o primeiro problema de computação de grande escala com o método simplex de Dantzig.
- Com o apoio de nove pessoas utilizando calculadoras de mesa de operação manual, com utilização de um recurso estimado de 120 dias-homem, obteve-se o custo final da dieta de Stigler a 39,69 dólares (24 centavos de dólar menos que o valor originalmente obtido por Stigler)

Histórico- Artigo de Namen e Bornstein, 2004

- Dantzig (1990) narra a passagem em que, por conta própria, decide utilizar o problema da dieta para redução de seu próprio peso.
- As diversas simulações do problema, utilizando um computador IBM 701 incluíam resultados esdrúxulos (sugestão de uma refeição contendo 500 galões de vinagre), foram a base para o nascimento das restrições indicando limites máximos para as variáveis utilizadas no modelo.

Problema de planejamento da produção - mix de produção

O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

O Problema de Produção

- Função objetivo – maximizar a margem de contribuição dos produtos;
- Primeiro conjunto de restrições – fabricação dos produtos deve levar em conta a capacidade limitada dos recursos;
- Segundo conjunto de restrições – quantidade de produtos produzida não deve ser inferior à mínima e nem superior à máxima preestabelecida.

Exemplo 1 - Problema de Produção

- Uma padaria produz dois tipos de produtos: pão (P_1) e massa de pizza (P_2).
- Quatro diferentes matérias primas são utilizadas para a fabricação destes produtos: farinha (M_1), fermento (M_2), ovos (M_3) e manteiga (M_4), em que temos em estoque, respectivamente, 60 unidades, 38 unidades, 18 unidades e 55 unidades.
- Para produzir 1 kg de pão são necessárias 1 un. de farinha, 2 un. de fermento e 3 un. de manteiga.
- Para produzir 1 kg de massa de pizza são necessárias 3 un. de farinha, 1 un. de ovo e 1 un. de manteiga.

Exemplo 1 - Problema de Produção

- O pão e massa de pizza são vendidos ao custo de R\$ 22/Kg e R\$20/Kg.
- Deseja-se determinar a quantidade de cada produto a ser fabricada que maximize as vendas e respeite as restrições de estoque.

Matéria prima	Produto		Estoque
	P_1	P_2	
Farinha	1	3	60
Fermento	2	0	30
Ovos	0	1	18
Manteiga	3	1	55
Preço (R\$/kg)	22	20	

Exemplo 1 - Problema de Produção

- O que devemos decidir?
- Decisões: Denominadas Variáveis de decisão.
- Definindo
- x_1 = quantidade produzida de pão em kilos.
- x_2 = quantidade produzida de pizza em kilos.

Modelagem do Exemplo 1 - Problema de Produção

Modelo Matemático:

$$\max f(x_1, x_2) = 22x_1 + 20x_2$$

$$1x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$2x_1 + 0x_2 \leq 30$$

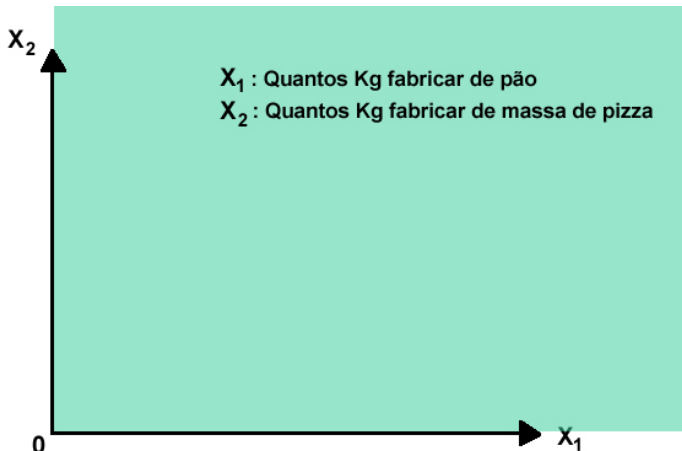
$$0x_1 + 1x_2 \leq 18$$

$$3x_1 + 1x_2 \leq 55$$

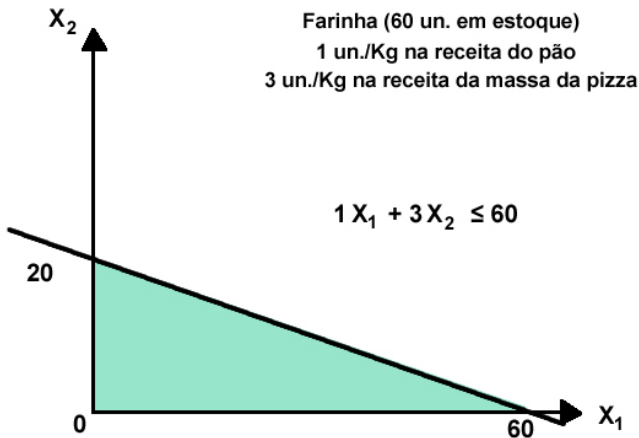
$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

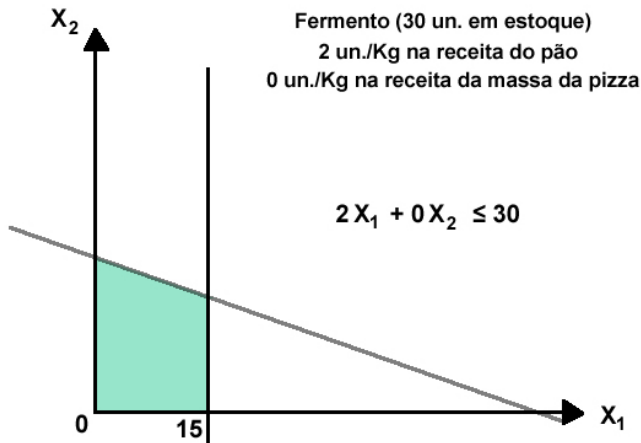
Exemplo 1 - Problema de Produção



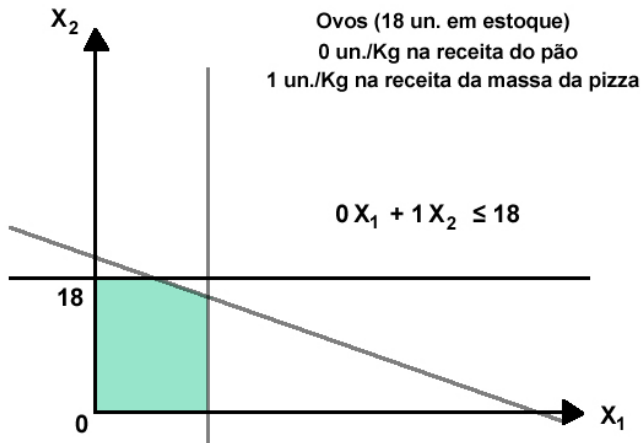
Exemplo 1 - Problema de Produção



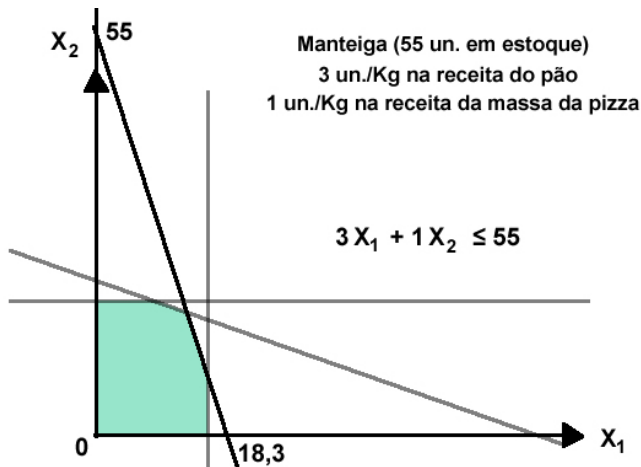
Exemplo 1 - Problema de Produção



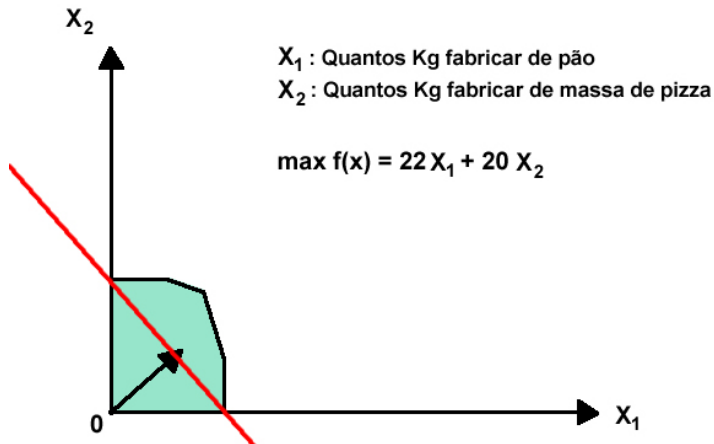
Exemplo 1 - Problema de Produção



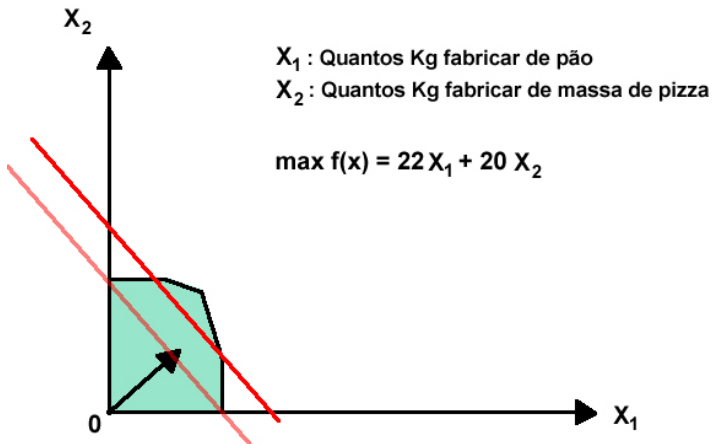
Exemplo 1 - Problema de Produção



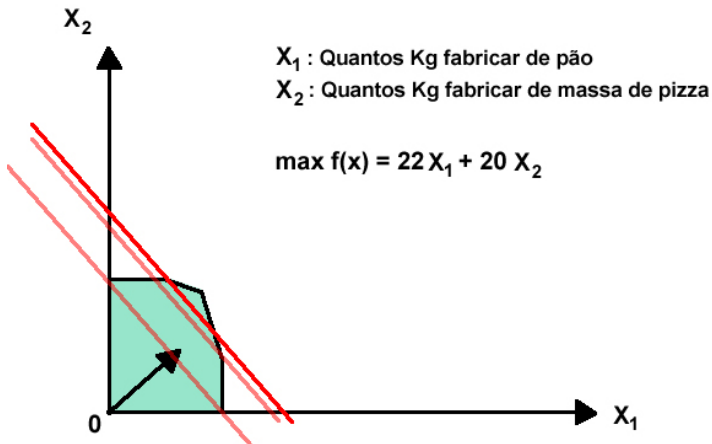
Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção

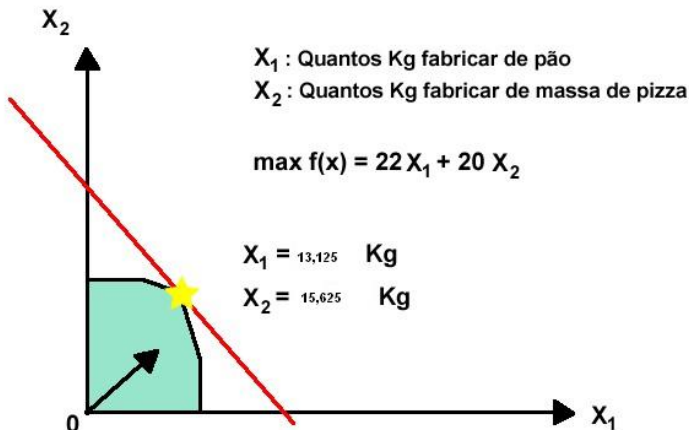


Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção

Lucro total = 601.25



Exemplo 2 - Produção de geladeiras

- Empresa precisa decidir quais modelos de geladeira instalar em sua nova planta;
- Dois possíveis modelos: luxo e básico.
- No máximo, 1500 unidades do modelo luxo e 6000 unidades do modelo básico podem ser vendidas por mês.
- Empresa contratou 25000 homens-hora de trabalho por mês;
- Os modelos luxos precisam de 10 homens-hora de trabalho para serem produzidos e os modelos básicos, 8 homens-hora.
- A capacidade da linha de montagem é de 4500 geladeiras por mês, pois as geladeiras dividem a mesma linha;
- O lucro unitário do modelo luxo é \$100,00 por mês, enquanto o modelo básico lucra \$50,00 durante o mesmo período.

Exemplo 1 - Produção de geladeiras

- **Objetivo:** determinar quanto produzir de cada geladeira, de modo a satisfazer todas as restrições e maximizar o lucro da empresa.

Variáveis de decisão:

x_1 = quantidade de geladeiras do modelo luxo a ser produzida por mês.

x_2 = quantidade de geladeiras do modelo básico a ser produzida por mês.

Modelo Matemático

Modelo Matemático:

$$\max f(x_1, x_2) = 100x_1 + 50x_2$$

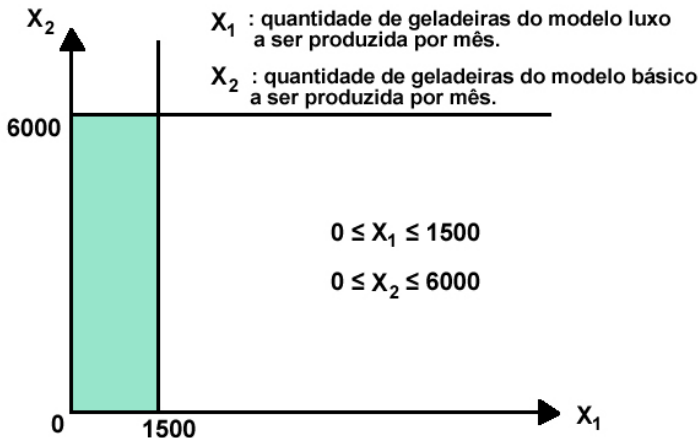
$$10x_1 + 8x_2 \leq 25000$$

$$x_1 + x_2 \leq 4500$$

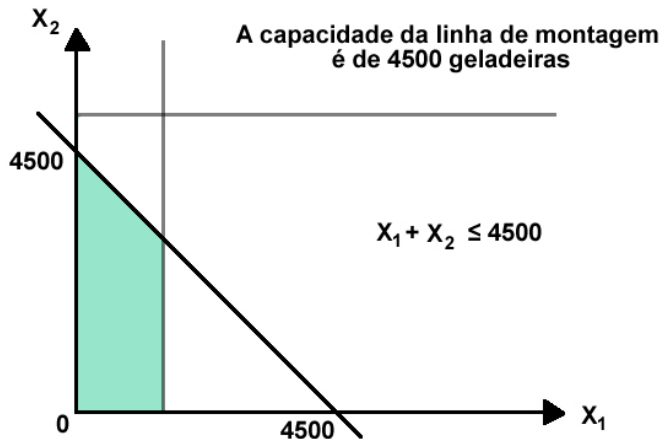
$$0 \leq x_1 \leq 1500$$

$$0 \leq x_2 \leq 6000.$$

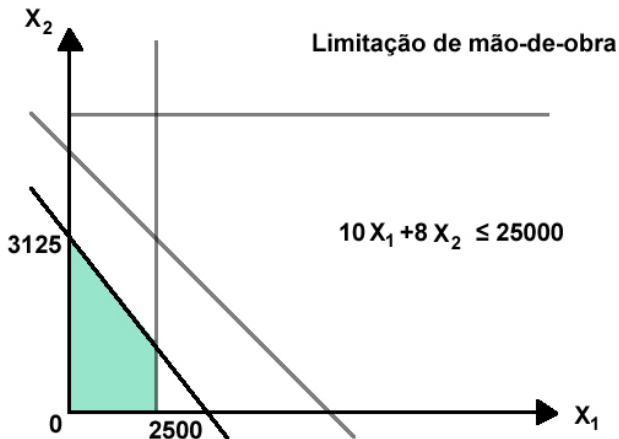
Exemplo 1 - Problema de Produção



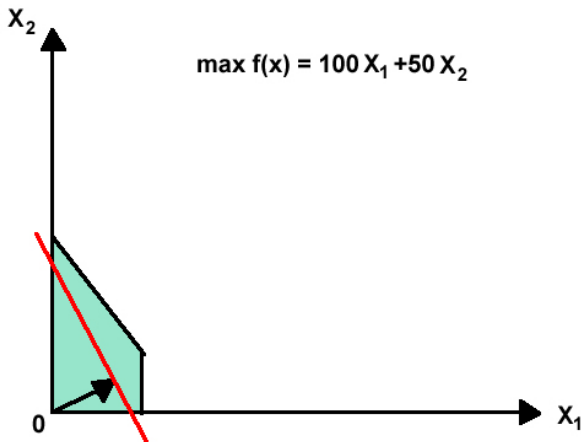
Exemplo 1 - Problema de Produção



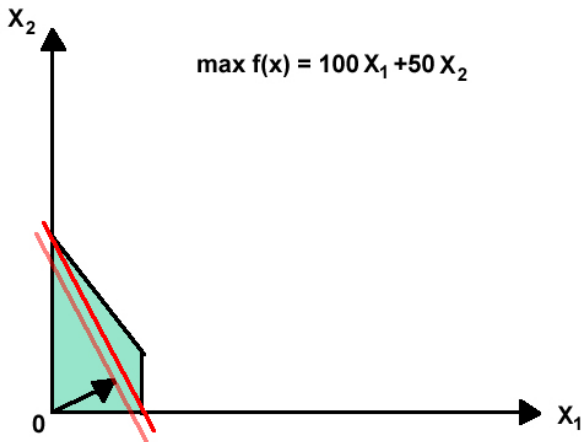
Exemplo 1 - Problema de Produção



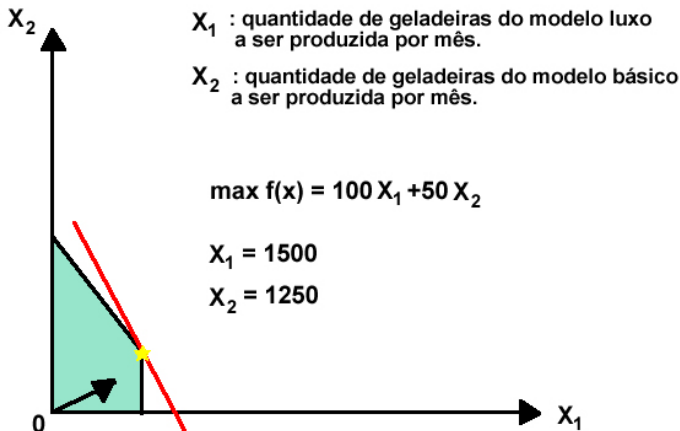
Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção



Exemplo 1 - Problema de Produção



Exercício 1 - Problema de Produção

- Uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2). Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina (a tecnologia utilizada é intensiva em mão-de-obra). Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina (a tecnologia é intensiva em capital). Sendo x_1 e x_2 as quantidades fabricadas dos produtos 1 e 2 e sabendo-se que a empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina e ainda que os lucros dos produtos são 4 u.m. (unidades monetárias) e 1 u.m. respectivamente, quanto deve a empresa fabricar de cada produto para obter o maior lucro possível (ou o lucro máximo ou ainda maximizar o lucro)?.

Exemplo 1 - Problema de Produção

Solver - Excel

The screenshot displays an Excel spreadsheet with the following data:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3	x1							
4	x2							
5	f.objetivo				=4*B3+1*B4			
6								
7								
8								

The Solver Parameters dialog box is open, showing the following settings:

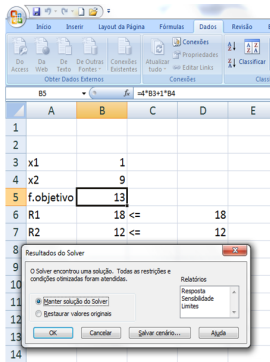
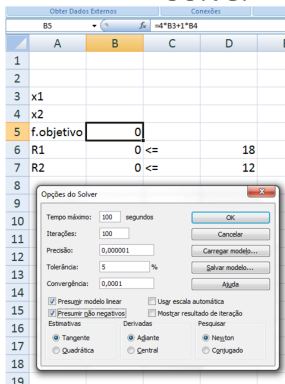
- Definir célula de destino: \$B\$5
- Por: ☒ max ☐ min ☐ valor de: 0
- Células variáveis: \$B\$3:\$B\$4
- Submeter as restrições: (empty list)

The Add Constraint dialog box is also open, showing the following settings:

- Referência de célula: \$B\$3:\$B\$7
- Restrição: <=
- Valor de: \$D\$3:\$D\$7

Exemplo 1 - Problema de Produção

Solver – Excel



Exercício1 - Problema de Produção

- BRINCAR SA é uma empresa que produz dois tipos de brinquedos: bonecos e trens. Um boneco é vendido por R\$ 27, gasta R\$ 10 de matéria-prima e R\$ 13 de mão-de-obra. Um trem é vendido por R\$ 21, gasta 9 de matéria-prima e R\$ 10 de mão-de-obra. A manufatura dos dois brinquedos requer duas operações: carpintaria e acabamento. Um boneco requer 2 horas de acabamento e 1 hora de carpintaria. O trem requer 1 hora de acabamento e 1 hora de carpintaria. A empresa obtém semanalmente toda a matéria-prima necessária para a sua produção. Porém, apenas 100 horas de acabamento e 80 horas de carpintaria podem ser utilizadas na confecção dos brinquedos. A demanda por trens é ilimitada, i.é, todos os trens produzidos são vendidos. Sabe-se, por experiência, que, no máximo, 40 bonecos são vendidos por semana.

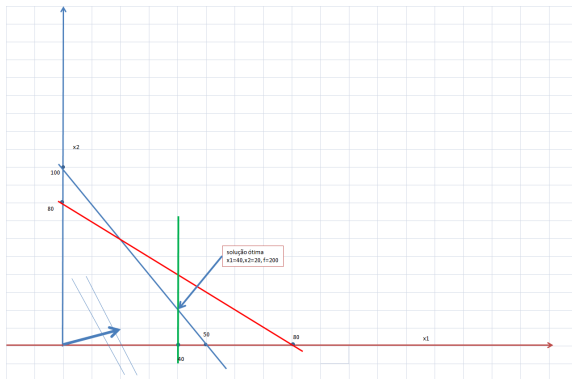
Exercício2 - Problema de Produção

- a. Formule um modelo matemático para esta situação e que possa ser utilizado para maximizar o lucro líquido de BRINCAR SA.
- b. Encontre a(s) solução(ões) ótima(s) graficamente, se houver.

Exercício2 - Problema de Produção

[illegible]

Exercício2 - Problema de Produção



Referências Bibliográficas

- ARENALES, M.; ARMENTANO, V. A.; MORABITO, R.; YANASSE, H. H. **Pesquisa operacional**. Rio de Janeiro: Campus/elsevier, 2007. 523 p. ISBN 10-85-352-145-1454-2.
- GOLDBARG, M.; LUNA, H. P. L.; **Otimização Combinatória e Programação Linear**. Campus, 2000.
- PERIN, C. **Introdução à Programação Linear**. Coleção Imecc - Textos Didáticos. V.2. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2001. 177p.
- MACHADO, A. **Notas de Aula do Prof. Alysso Machado Costa do Curso Introdução a Pesquisa Operacional**, 2008.
- NASCIMENTO, M.C.V.; ALÉM JUNIOR, D.J; CHERRI, L.H.; MASSAMITSU, F. **Apresentações para aulas de modelagem matemática**. São Carlos: ICMC-USP, 2008.

Referências Bibliográficas

- Silva, M.S., Ferreira, L.P., Reis, M.L. e Aragão, M.V.S.P. Modelo para o planejamento tático integrado da produção e distribuição de papel e celulose, Anais SBPO, 2011.
- Namen, A. A. e Bornstein, C.T., (2004). UMA FERRAMENTA PARA AVALIAÇÃO DE RESULTADOS DE DIVERSOS MODELOS DE OTIMIZAÇÃO DE DIETAS, Pesquisa Operacional, v.24, n.3, p.445-465.
- Dantzig, G.B. (1990). The Diet Problem. Interfaces, 20(4), 43-47.
- Stigler, G. (1945). The Cost of Subsistence. Journal of Farm Economics, 25, 303-314.