SME0510 - Introdução à Pesquisa Operacional

Forma Padrão e
Solução Básica

Modelos Otimização Linear

- ***Modelo matemático***

$x_1, x_2, \cdots, x_n \rightarrow$ Variáveis de decisão

$$Minimizar \quad f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \quad \leftarrow \textit{função objetivo}$$

sujeito a:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \quad \leftarrow \textit{restrições } (\leq \textit{ ou } \geq)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots \quad x_n \geq 0. \quad \leftarrow \textit{condição de não-negatividade}$$

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ Que satisfaz todas as restrições é chamado de solução factível

Forma Padrão - Definição

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } & f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0.
\end{aligned}
$$

- Características da forma padrão:
  - ✓Problema de minimização
  - ✓Todas as restrições são de igualdade
  - ✓Todas as variáveis são não negativas
  - ✓ Considerar $b \geq 0$ (nos livros geralmente não consideram).

Forma Padrão (matricial)

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz mXn chamada matriz dos coeficientes
(matriz tecnológica)

$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = (c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n)$ Vetor de Custos

$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)$ Vetor das Variáveis

$\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m)$ Vetor dos termos Independentes ou de recursos

Solução Factível - Definição

- Definição 1: Uma solução $(x_1,x_2,...x_n)$ é factível se atende a todas as restrições do problema (**Ax**=**b**) e as condições de não-negatividade ($\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$).

- Definição 2: O conjunto S={**x** tal que **Ax**=**b**, $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$**}** é denominado de conjunto de soluções factíveis (também chamado de região factível).

Solução Factível - exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\
& x_1 + \quad 2x_2 + \quad x_3 = 3 \\
& \qquad\qquad x_2 + \quad 2x_3 = 4 \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$x^T = (1, 0, 2)$ é factível. $f(1,0,2)=10$.

$x^T = (0.25, \; 0.5, \; 1.75)$ é factível ? f?

Solução Ótima - Definição

- Definição 3: Uma solução factível que fornece o menor valor à função objetivo f é chamada solução ótima, denotada por: $(x^*_1, x^*_2, \ldots x^*_n)$.

ou seja:

$(x^*_1, x^*_2, \ldots x^*_n) \in S$ é ótima se,

$$f(x^*_1, x^*_2, \ldots x^*_n) \leq f(x_1, x_2, \ldots x_n) \quad \forall \quad (x_1, x_2, \ldots x_n) \in S$$

Transformação para a forma padrão

- Problemas de maximização

Max $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_n x_n$ = Min $-c_1x_1 - c_2x_2 - ... - c_nx_n$

Pois

$$f(\mathbf{x}^*) \geq f(\mathbf{x}), \text{ para toda solução } \mathbf{x} \text{ factível.}$$

$$-f(\mathbf{x}^*) \leq -f(\mathbf{x}), \text{ para toda solução } \mathbf{x} \text{ factível}$$

Transformação para a forma padrão

- Restrição de desigualdade:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}\ x_n \leq b_1$

Variável de folga (x_k)

$x_k = b_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}\ x_n \geq 0$

Restrição na forma de igualdade:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}\ x_n + x_k = b_1$

Transformação para a forma padrão

- Restrição de desigualdade:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}\, x_n \geq b_1$

Variável de folga (x_k)

$x_k = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}\, x_n - b_1 \geq 0$

Restrição na forma de igualdade:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}\, x_n - x_k = b_1$

Transformação para a forma padrão

- Variáveis livres

x_i irrestrita.

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \text{ com } x_i^+ \geq 0, \; x_i^- \geq 0.$$

Exercício

Escrever o problema a seguir na forma padrão.

a) maximizar $z = x_1 + x_2$

sujeito a: $x_1 + 5.x_2 \leq 5$

$2.x_1 + x_2 \leq 4$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Conceitos básicos – Solução Básica

- Consideramos sempre o problema na forma padrão:

$$\text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Dimensões:
A (m x n)
b (m x 1)

Solução Básica

- Considere a seguinte região factível no R^2

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 6 \\
x_1 - x_2 &\le 4 \\
3x_1 + x_2 &\ge 3 \\
x_1 \ge 0,\ x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x_3 &= 6 - (x_1 + x_2) && \ge 0 \\
x_4 &= 4 - (x_1 - x_2) && \ge 0 \\
x_5 &= (3x_1 + x_2) - 3 && \ge 0,
\end{aligned}
}
$$

variáveis de folga

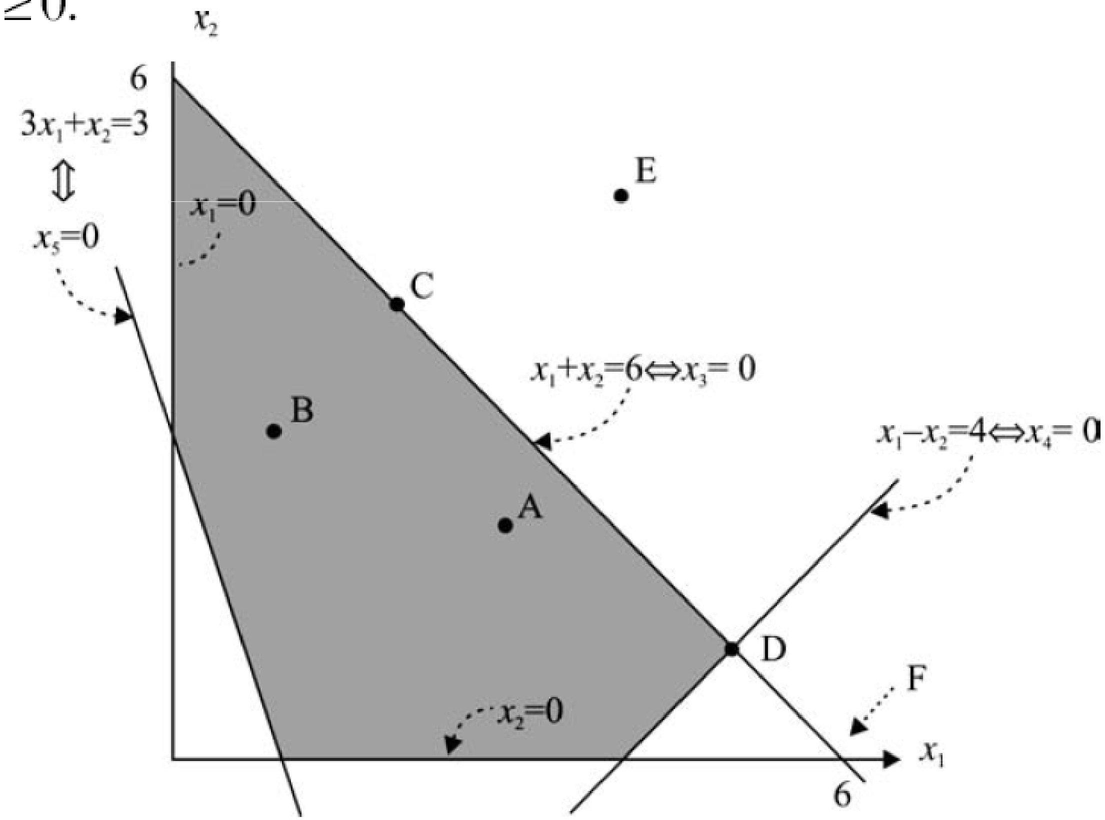
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\
x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\
3x_1 + x_2 - x_5 &= 3 \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 &\ge 0,\ x_5 \ge 0.
\end{aligned}
$$

Forma padrão

Exemplo

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \quad x_3 \qquad\qquad\qquad &= 6\\
x_1 - x_2 \qquad\quad + x_4 \qquad\quad &= 4\\
3x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad - x_5 &= 3
\end{aligned}$$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$



Alguns pontos

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - (x_1 + \ x_2) & &\geq 0 \\ x_4 &= 4 - (x_1 - \ x_2) & &\geq 0 \\ x_5 &= \quad (3x_1 + x_2) - 3 & &\geq 0, \end{aligned}$$

Ponto **A**:

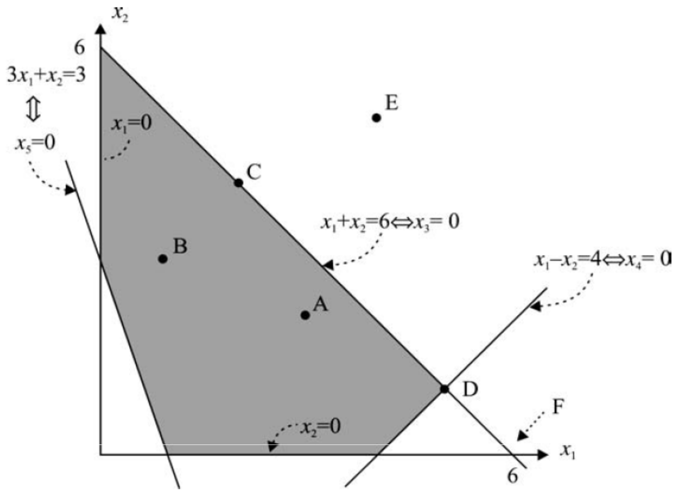
$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

$x_3 = 6 - (3 + 2) = 1$

$x_4 = 4 - (3 - 2) = 3$

$x_5 = (3 \times 3 + 2) - 3 = 8$



Ponto **B**:

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$x_3 = 6 - (1 + 3) = 2$

$x_4 = 4 - (1 - 3) = 6$

$x_5 = (3 \times 1 + 2) - 3 = 3$

Ponto **C**:

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

$x_3 = 6 - (2 + 4) = 0$

$x_4 = 4 - (2 - 4) = 6$

$x_5 = (3 \times 2 + 2) - 3 = 7$

Ponto **D**:

$x_1 = 5$

$x_2 = 1$

$x_3 = 6 - (5 + 1) = 0$

$x_4 = 4 - (5 - 1) = 0$

$x_5 = (3 \times 5 + 1) - 3 = 13.$

Factíveis (Por quê ?) (construção e não-negatividade)

Alguns pontos

$$\begin{aligned} x_3 &= 6-(x_1+x_2) &\geq 0 \\ x_4 &= 4-(x_1-x_2) &\geq 0 \\ x_5 &= (3x_1+x_2)-3 &\geq 0, \end{aligned}$$

Ponto **A**:

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

$x_3 = 6-(3+2) = 1$

$x_4 = 4-(3-2) = 3$

$x_5 = (3 \times 3 + 2) - 3 = 8$

Ponto **B**:

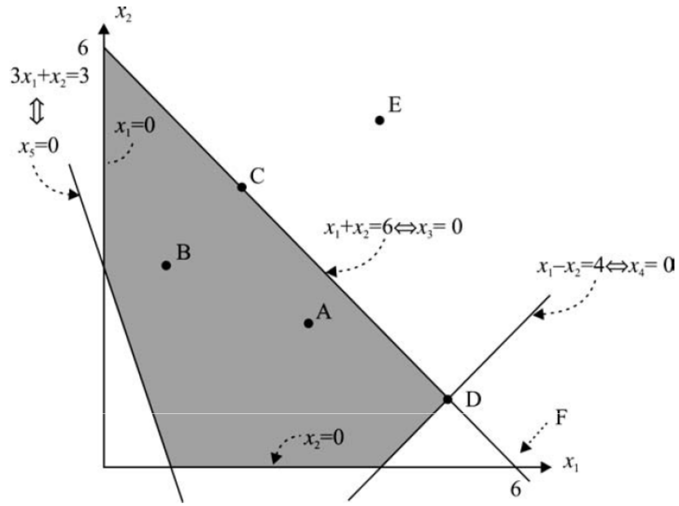
$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$x_3 = 6-(1+3) = 2$

$x_4 = 4-(1-3) = 6$

$x_5 = (3 \times 1 + 2) - 3 = 3$



No interior da região factível (todas as variáveis de folga são positivas).

Alguns pontos

$$x_3 = 6 - (x_1 + x_2) \geq 0$$
$$x_4 = 4 - (x_1 - x_2) \geq 0$$
$$x_5 = (3x_1 + x_2) - 3 \geq 0,$$

Ponto **C**:

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

$x_3 = 6 - (2 + 4) = 0$

$x_4 = 4 - (2 - 4) = 6$

$x_5 = (3 \times 2 + 2) - 3 = 7$

Ponto **D**:

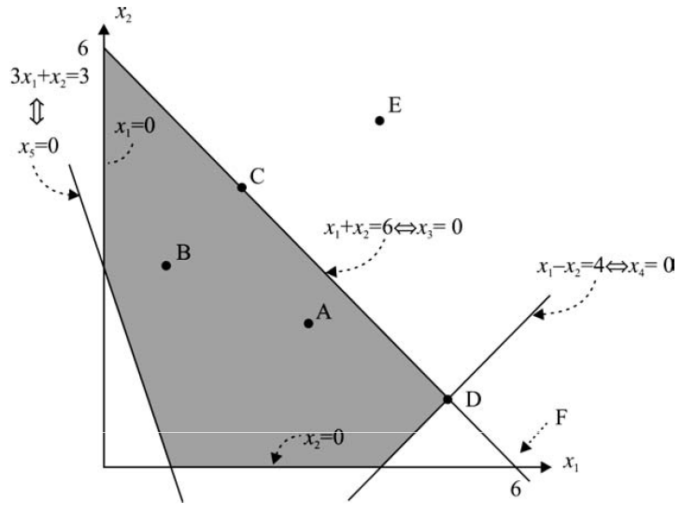
$x_1 = 5$

$x_2 = 1$

$x_3 = 6 - (5 + 1) = 0$

$x_4 = 4 - (5 - 1) = 0$

$x_5 = (3 \times 5 + 1) - 3 = 13.$



Na fronteira (alguma variável se anula)!

Variáveis nulas indicam restrições ativas!
Mais de uma variável se anula: vértice (mais de uma restrição ativa)!

Outros pontos

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 6 - (x_1 + x_2) && \geq 0 \\
x_4 &= 4 - (x_1 - x_2) && \geq 0 \\
x_5 &= (3x_1 + x_2) - 3 && \geq 0,
\end{aligned}
$$

Ponto **E**:

$x_1 = 4$

$x_2 = 5$

$x_3 = 6 - (4 + 5) = -3$

$x_4 = 4 - (4 - 5) = 5$

$x_5 = (3 \times 4 + 5) - 3 = 14$

Ponto **F:**

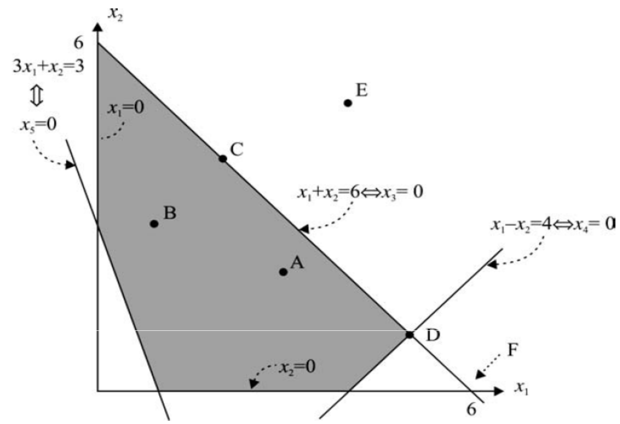
$x_1 = 6$

$x_2 = 0$

$x_3 = 6 - (6 + 0) = 0$

$x_4 = 4 - (6 - 0) = -2$

$x_5 = (3 \times 6 + 0) - 3 = 15$

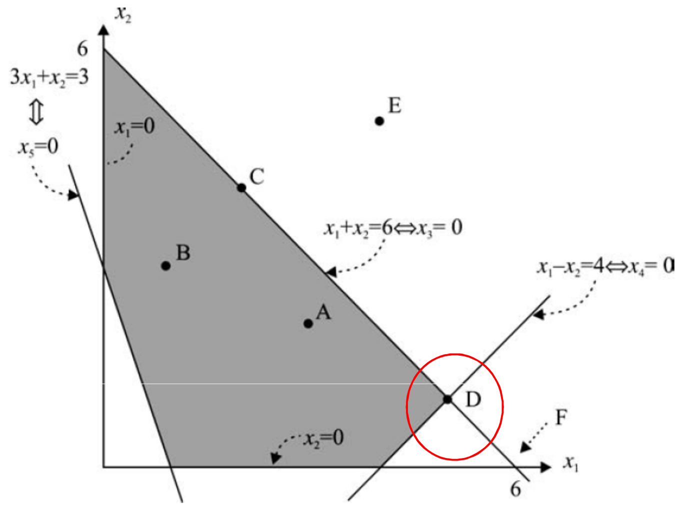


Infactíveis:

Respeitam o sistema Ax = b
mas não respeitam as restrições de não-negatividade!

Vértices

- Duas restrições ativas*: duas variáveis nulas!



Ponto **D**: $\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

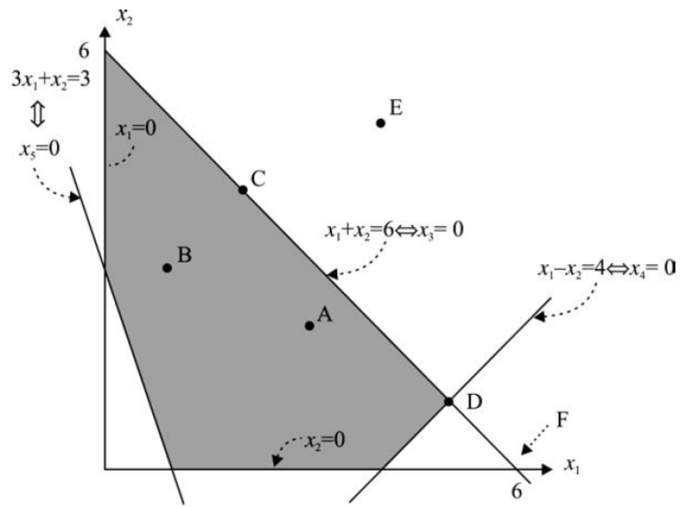
$$\begin{array}{lcr} x_1 + x_2 + x_3 & & = 6 \\ x_1 - x_2 + x_4 & & = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 & & = 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{array} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 - x_2 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 3 \end{cases}$$

3 equações, 3 incógnitas!

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \\ x_5 = 13. \end{cases}}$$

* Caso geral: n-m variáveis nulas.

Vértices



- Factíveis:
  - Ao fixar (*n*-*m*) variáveis em zero, a resolução do sistema resulta em valores positivos para as variáveis restantes. (Ex. ponto D)
- Infactíveis
  - Ao fixar (*n*-*m*) variáveis em zero, a resolução do sistema resulta em **ao menos um valor negativo** para as variáveis restantes. (Ex. ponto F)

Escrevendo o sistema (vértice D)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + x_3 & & \\ x_1 - x_2 & + x_4 & \\ 3x_1 + x_2 & & - x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Apesar de fixarmos (*n*-*m*) variáveis em zero (no exemplo, x_3 e x_4), continuamos as escrevendo (embora de maneira isolada):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{variáveis} \\ \text{restantes}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{variáveis} \\ \text{a serem} \\ \text{fixadas}}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Escrevendo o sistema

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{variáveis} \\ \text{restantes}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{variáveis} \\ \text{a serem} \\ \text{fixadas}}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Em notação matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Índices:

$B = (B_1\ B_2\ B_3)$:

$N = (N_1\ N_2)$:

$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,$

$N_1 = 3,\ N_2 = 4,$

Referenciando

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Índices:

$$B = (B_1\ B_2\ B_3):$$
$$N = (N_1\ N_2):$$

$$B_1 = 1,\ B_2 = 2,\ B_3 = 5,$$
$$N_1 = 3,\ N_2 = 4,$$

colunas associadas

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1}\ \mathbf{a}_{B_2}\ \mathbf{a}_{B_3}] = [\mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_5]$$
$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1}\ \mathbf{a}_{N_2}] = [\mathbf{a}_3\ \ \mathbf{a}_4],$$

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ x_{B_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Resumindo

- Temos um problema de otimização e o escrevemos na forma padrão.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

- Escrevemos o sistema Ax=b na forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_{\mathrm{B}} + \mathbf{N}\mathbf{x}_{\mathrm{N}} = \mathbf{b}$$

Resumindo

- Escolhendo (*n*-*m*) variáveis para x_N e o restante para X_B.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}$$

- x_N=0 (e colunas de B invertível)

- BX_B = b é um sistema com o mesmo número de equações e incógnitas (*m*). Se as variáveis solução desse sistema são ≥ 0, vértice factível. Caso contrário, vértice Infactível.

Resolvendo o sistema

- E se B não for invertível ?

  Sempre escolhemos para B, *m* variáveis cujas colunas constituem uma matriz invertível.

- Supor que posto(A)=m (implica $m \leq n$). Se m=n, o sistema tem solução única (não tem problema), na forma padrão admitimos $m < n$. Ax=b tem infinitas soluções.

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \ \ \mathbf{N}]$$

Partição básica (Matriz básica)

- B_{mXm} - matriz básica - formada por *m* colunas linearmente independentes de A.

- B pode ser escrita como:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \ \mathbf{a}_{B_2} \cdots \ \mathbf{a}_{B_m}]$$

Onde B_1, B_2,..., B_m são os índices das colunas escolhidas da matriz A (índices básicos)

Partição básica (Matriz não-básica) $\mathbf{A} = [\mathbf{B} \ \ \mathbf{N}]$

- $N_{m\times(n-m)}$ - matriz não-básica - formada pelas *n-m* colunas restantes de A.

- N pode ser escrita como:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1} \ \mathbf{a}_{N_2} \cdots \ \mathbf{a}_{Nn-m}]$$

Onde N_1, N_2,..., N_m são os índices das colunas da matriz A que pertencem a N (índices não-básicos)

Partição básica (partição das variáveis)

- Consequentemente, a partição de A em [B N] cria uma partição das variáveis:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$$ variáveis básicas

$$\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$$ variáveis não básicas

Solução geral do sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{BN}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b} - \mathbf{B^{-1}Nx_N}$$

- A última expressão de x_B é conhecida como solução geral do sistema.

Solução básica

- Considere uma partição básica A=[B,N]. Uma solução é dita básica quando:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

^

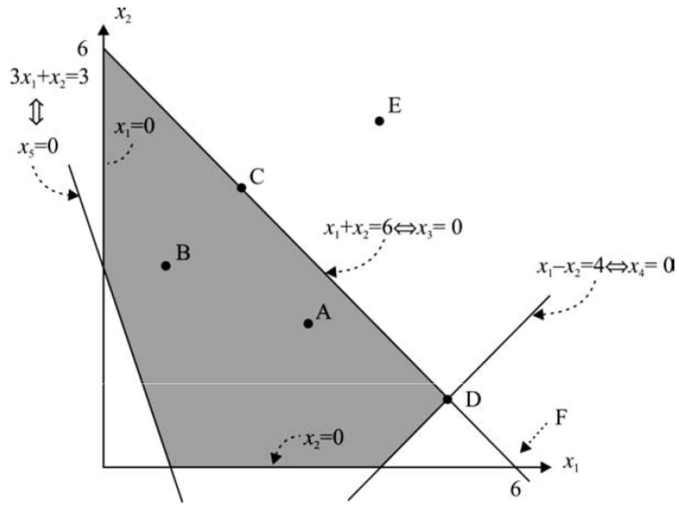
- Se todas as componentes de x_B são não-negativas, então temos uma *solução básica factível*. Caso contrário, temos uma *solução básica não-factível.*

Voltando ao exemplo

- Ponto D:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_5\end{bmatrix}}_{} + \cancel{\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}}\underbrace{\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_\mathrm{N}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}6\\ 4\\ 3\end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 4\\ 3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{B} = \mathbf{b}$$

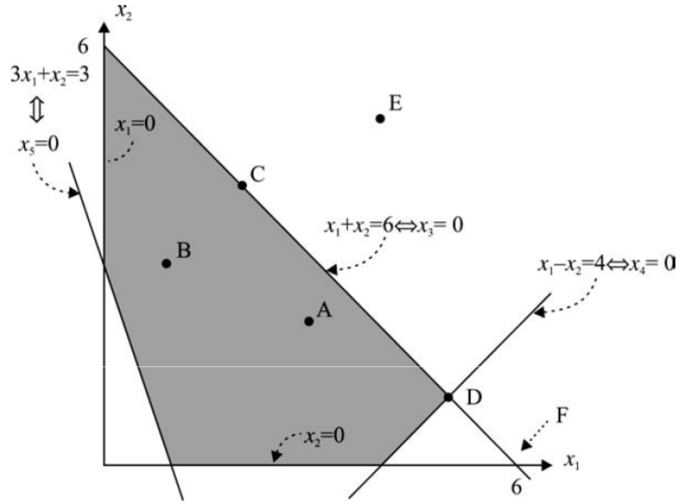


$$\hat{\mathrm{x}}_\mathrm{B} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 1\\ 13\end{bmatrix} \longrightarrow$$ Solução básica factível.

Voltando ao exemplo

- Ponto F:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x_N}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$



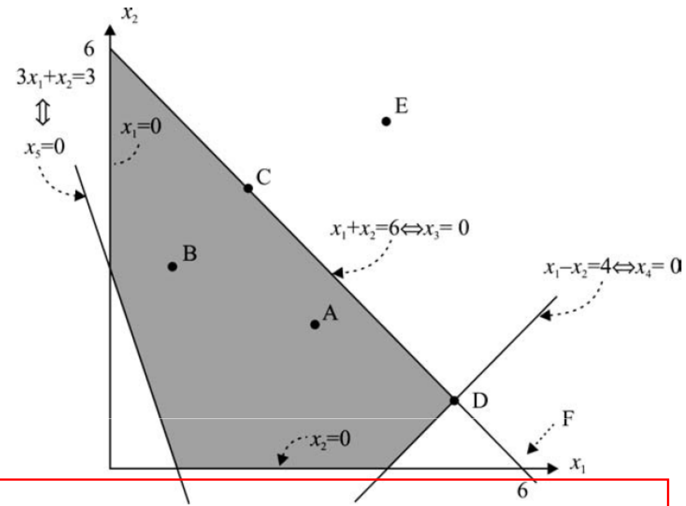
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathrm{x}}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 15 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Solução básica *não*-factível.

Propriedade básica I

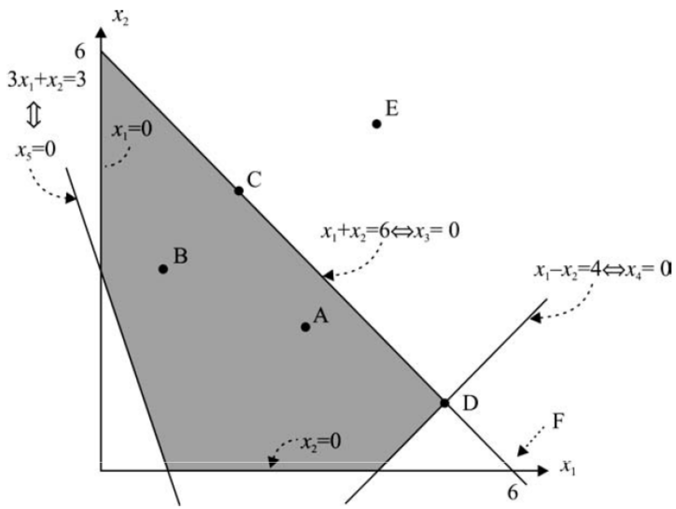
- Considere região factível



- **S**={x∈R^n | Ax=b, x ≥0}.

Um ponto x∈ **S** é um vértice de **S** se e somente se x for uma solução básica factível.

Propriedade básica II



Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo

Vértices (Pontos Extremos)

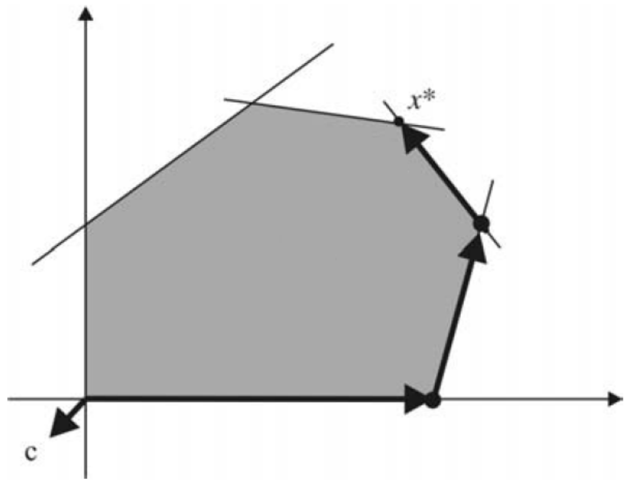
O Número de pontos extremos de S é finito.

O número de pontos extremos é limitado pelo número máximo de maneiras
De escolher m colunas das n colunas da matriz A, ou seja:

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Vértices

- Vimos que sempre que existe uma solução ótima, existe um vértice ótimo.
- Também intuímos que uma maneira de achar a solução ótima seria visitar os vértices factíveis sucessivamente
- Como determinar vértices sem o auxílio do gráfico?



Método possível

- Enumerar todas as soluções básicas (vértices)

$x_1, x_2, \ldots x_K$

- Escolher aquela com melhor função objetivo.

- Problema:

  K pode ser muito grande!

Simplex

Idéia:

- Partir de uma solução básica factível
- Visitar apenas as soluções básicas factíveis melhores que ela.

Método Simplex

Exercício

Dado o problema de Programação Linear abaixo,
transforme as restrições em um sistema de equações lineares,
calcule todas as soluções básicas, informe quais soluções são viáveis (ou factíveis)
e indique qual é a solução ótima.

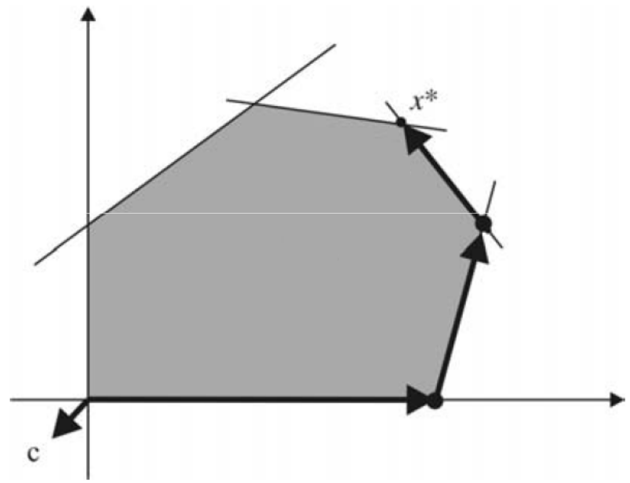
a) maximizar $z = x_1 + x_2$

sujeito a:

$$x_1 + 5.x_2 \leq 5$$
$$2.x_1 + x_2 \leq 4$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

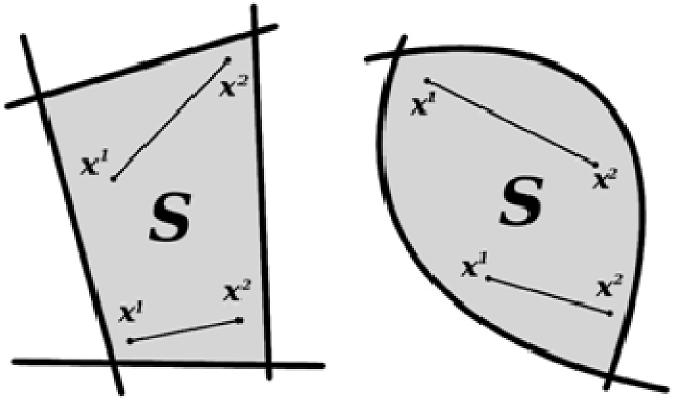
Região factível e vértices

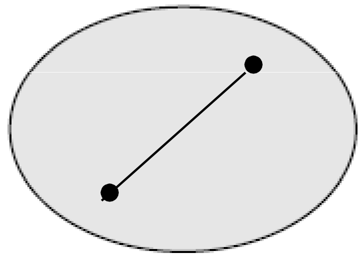
– Teorema 1: A região factível $S=\{\mathbf{x} \in R^n$ tal que $\mathbf{Ax=b, x \geq 0}\}$ é convexa.



Noções de Convexidade

- Conjuntos Convexos

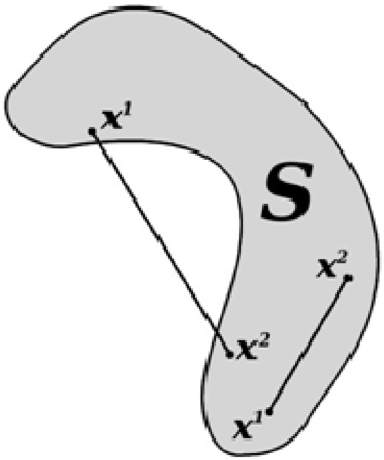


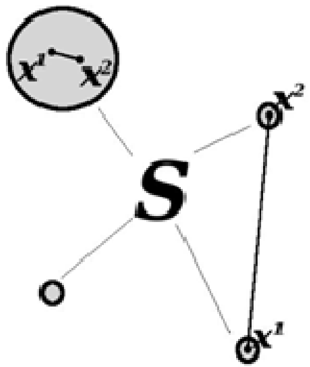


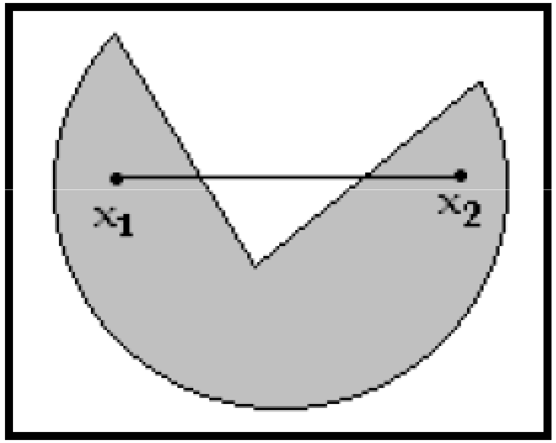
Um conjunto é dito convexo se o segmento ligando quaisquer dois de seus pontos, pertence ao conjunto.

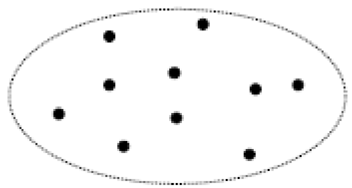
Noções de Convexidade

- Conjuntos não Convexos









Combinação convexa

- Dados $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vetores

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$$ Combinação linear dos vetores

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j, \ \alpha_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$$ Combinação convexa

Noções de Convexidade

S é convexo se e somente se

$$\forall x^1, x^2 \in S \Rightarrow [x^1 x^2] \subseteq S \Rightarrow \alpha x^1 + (1-\alpha) x^2 \in S, 0 \le \alpha \le 1$$

Exercício: Mostre que S definido a seguir é convexo.

$$S = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \ge 0\}$$

$$A_{mxn}$$

Região factível e vértices

– Teorema 1: A região factível $S=\{\mathbf{x} \in R^n$ tal que $\mathbf{Ax=b,\ x \geq 0}\}$ é convexa.