Programação Matemática
Introdução a Pesquisa Operacional

Método Simplex

Forma Padrão

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0.
\end{aligned}$$

- Características da forma padrão:

  Problema de minimização

  Todas as restrições são de igualdade

  Todas as variáveis são não-negativas

  Considerar $b \geq 0$.

Partição básica

- Seja o sistema Ax=b, onde A_{mxn} , b_{mx1} , x_{nx1} (m< n e posto de A é m).
- **Decompor A=[B,N]**
- $\mathbf{B}_{\mathbf{mxm}}$ é formada por ***m*** colunas linearmente independentes de A dada por:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{a}_{B_1} \ \mathbf{a}_{B_2} \cdots \mathbf{a}_{B_m}]$$

Onde B_1, B_2,..., B_m são os índices das colunas escolhidas da matriz A (índices básicos)

Partição básica

- $\mathbf{N}_{\mathbf{mx\ (n-m)}}$ - formada pelas ***n-m*** colunas restantes de A.

$$\mathbf{N} = [\mathbf{a}_{N_1}\ \mathbf{a}_{N_2} \cdots \mathbf{a}_{Nn-m}]$$

Onde N_1, N_2,..., N_m são os índices das colunas da matriz A que pertencem a N (índices não-básicos)

Esta reorganização é definida como partição básica

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{N}]$$

Partição básica (partição das variáveis)

- A partição de A em [B N] cria uma partição das variáveis:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}$$

variáveis básicas

$$\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_{N_1} \\ \vdots \\ x_{N_{n-m}} \end{bmatrix}$$

variáveis não básicas

Solução geral do sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{BN}] \begin{bmatrix} \mathbf{x_B} \\ \mathbf{x_N} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Bx_B} + \mathbf{Nx_N} = \mathbf{b}.$$

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N}$$

solução geral do sistema.

Solução básica

- Considere uma partição básica A=[B,N].
- Uma solução é dita básica quando:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- Se $x_B \geq 0$ então temos uma *solução básica factível*. Caso contrário, temos uma *solução básica não-factível.*
- Se $x_B > 0$ dizemos que a solução básica factível é não degenerada.

Propriedades

Teorema: Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um vértice ótimo

Teorema: Considere a região factível S={**x**$\in$ **R**^{n} tal que **Ax**=**b, x**$\geq$**0}.** Um ponto x $\in$ S é um vértice se e somente se x for uma **solução básica factível.**

Método possível

- Enumerar todas as soluções básicas factíveis (vértices)

  $x_1, x_2, \ldots x_K$

- Escolher aquela (factível) com melhor função objetivo.

- Problema:

  K pode ser muito grande!

Método Simplex

- Parte de uma solução básica factível
- Visita apenas as soluções básicas factíveis melhores que ela.

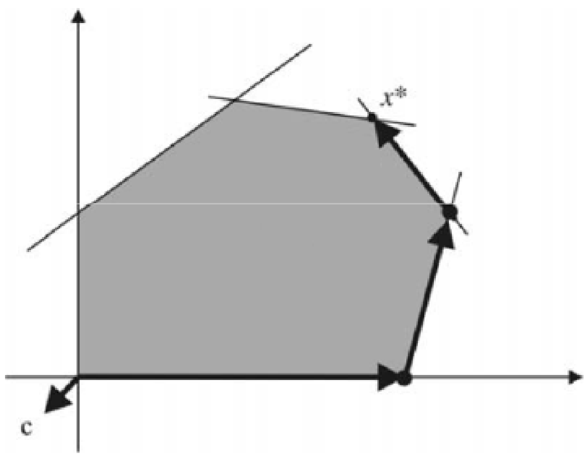
Ideia do Método Simplex

1) Encontrar um vértice da região factível (uma solução básica factível)

2) Sair do vértice corrente e ir para um vértice vizinho onde o valor da função objetivo é melhor.

3) Repetir o Passo 2 enquanto for possível

4) Retornar o vértice corrente (solução ótima)



Método Simplex

- Dada uma solução básica factível (ou seja, um vértice)
- 1) Esta solução é ótima ?

- 2)Caso não seja ótima, como encontrar uma solução básica factível melhor ?

Questão Inicial: A solução atual é ótima ?

- Considere uma solução básica factível:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_B \\ \hat{\mathbf{x}}_N \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}. \end{cases}$$

- E a solução geral do sistema :

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}. \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}$$

Verificando a otimalidade

- A função objetivo pode ser expressa considerando a partição básica:

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b}. \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B^T & \mathbf{c}_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T \underbrace{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N}_{\mathbf{x}_B}) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

$$= \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N.$$

Verificando a Otimalidade

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B^T \underbrace{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N)}_{\mathbf{x}_B} + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N$$

$$= \underbrace{\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}}_{f(\hat{\mathbf{x}})} - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N .$$

valor da solução básica associada a esta partição

- Então

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T \mathbf{x}_N .$$

$\boldsymbol{\lambda}^T$

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}}$$

Verificando a Otimalidade

$$f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N = f(\hat{\mathbf{x}}) - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N}\mathbf{x}_N + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

$$= f(\hat{\mathbf{x}}) + (\mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N})\mathbf{x}_N$$

Vamos expressar por coluna:

$$\mathbf{c}_N^T - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{N} = (c_{N_1}, c_{N_2}, \cdots, c_{N_{n-m}}) - \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{a}_{N_1}, \mathbf{a}_{N_2}, \cdots, \mathbf{a}_{N_{n-m}})$$

$$= (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_1}, c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_2}, \cdots, c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_{n-m}})$$

$$\mathbf{x}_N = (x_{N_1}, x_{N_2}, \cdots, x_{N_{n-m}})$$

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_1})x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_2})x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{a}_{N_{n-m}})x_{N_{n-m}}}$$

Custos relativos

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1}) x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2}) x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}}) x_{N_{n-m}}}$$

Definição: Os coeficientes $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$ das variáveis não-básicas na função objetivo descrito acima são chamados custos relativos ou custos reduzidos.

$$\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j}) \longrightarrow \boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{c}_{N_1} x_{N_1} + \hat{c}_{N_2} x_{N_2} + \ldots + \hat{c}_{N_{n-m}} x_{N_{n-m}}}$$

Condição de otimalidade

$$\boxed{f(\mathbf{x}) = f(\hat{\mathbf{x}}) + (c_{N_1} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_1}) x_{N_1} + (c_{N_2} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_2}) x_{N_2} + \ldots + (c_{N_{n-m}} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_{n-m}}) x_{N_{n-m}}}$$

Propriedade 2.3 (*condição de otimalidade*) Considere uma partição básica $\mathbf{A} = [\mathbf{B}\ \mathbf{N}]$ em que a solução básica associada $\hat{\mathbf{x}}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (isto é, solução básica factível), e seja $\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ o vetor multiplicador simplex. Se $(c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j}) \geq 0$, $j = 1, \ldots, n - m$, (isto é, todos os custos relativos são não-negativos), então a solução básica é ótima.

Solução básica factível e custos relativos maiores que zero $\longleftrightarrow$ Solução ótima

problema de minimização

Definição: Vetor multiplicador simplex

- Definição (vetor multiplicador simplex): O vetor λ_{mx1}, dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1}$$

O vetor multiplicador simplex pode ser obtido por:

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} \Leftrightarrow \lambda = \left(B^{-1}\right)^T c_B \Leftrightarrow B^T \lambda = c_B$$

Resumo

– Soluções básicas estão associadas a vértices (pontos extremos)
– Se há uma solução ótima, então há um ponto extremo (solução básica) ótima.
– Podemos definir os custos relativos de variáveis não básicas como: $\hat{c}_{N_j} = (c_{N_j} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{a}_{N_j})$
– Se, em um problema de minimização (maximização), para uma dada solução básica, todos os custos relativos são positivos (negativos), a solução é ótima.

Perguntas

- 1) A solução atual é ótima ?

  Respondida

- 2) Como encontrar uma solução básica factível melhor ?

Exercício

Exemplo 2.26 Considere o seguinte problema de otimização linear:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 - x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{aligned}$$