Otimização Linear

Solução Gráfica

Resolução Gráfica

- Resolver um PL consiste em determinar uma solução ótima.
- Resolução gráfica: Problemas com duas variáveis.
- Visualização e propriedades.

Resolução Gráfica - Exemplo

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 \\
& x_1 + x_2 \le 4 \\
& x_1 \le 2 \\
& x_2 \le 3 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Min\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
& sujeito\ a: \\
& \quad \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\
& \quad \mathbf{x} \ge 0
\end{aligned}$$

$$\text{Região factível: todo } \mathbf{x} \in \Re^n \text{ tal que } A\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0$$

Plano

A reta

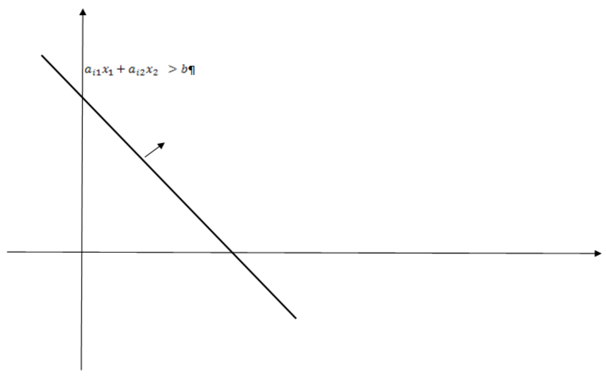
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

Separa o plano em dois semiplanos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 > b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$$

semiplano



semiplano

No R^3

A equação do plano

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$$

O plano separa o R^3 em dois semi-espaços

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 > b_i$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 < b_i$$

No R^n

Hiperplano

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}xn = b_i$$

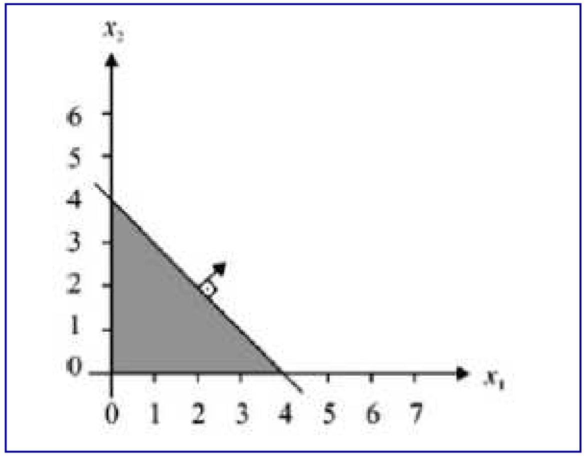
hiperplano separa o R^n em dois semi-espaços

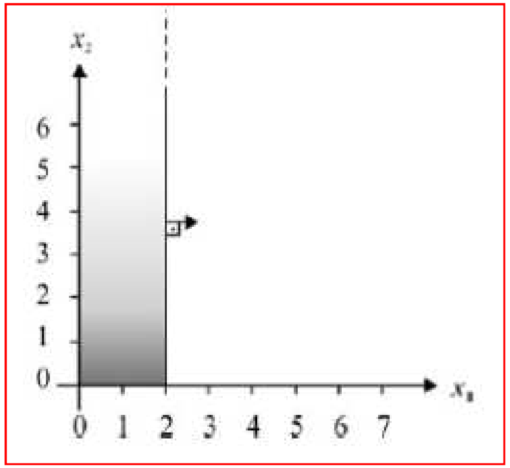
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n > b_i$$

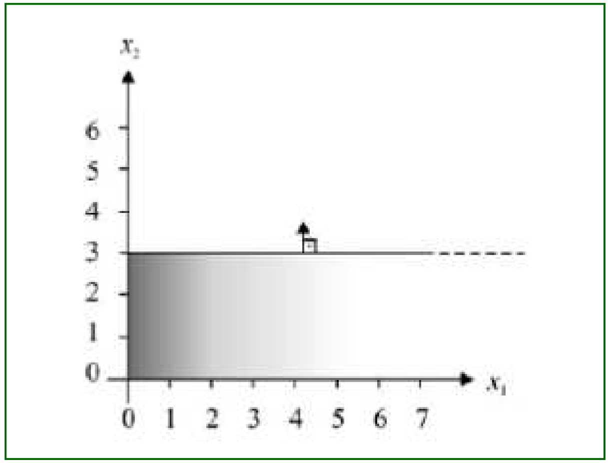
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n < b_i$$

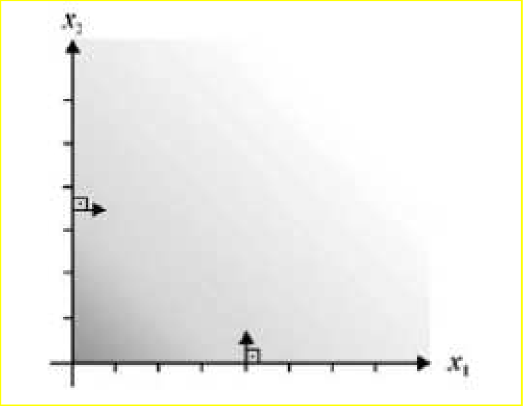
Solução Gráfica - Região factível

$$\mathbf{S} = \{(x_1, x_2) \text{ tal que } x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1 \leq 2,\ x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$



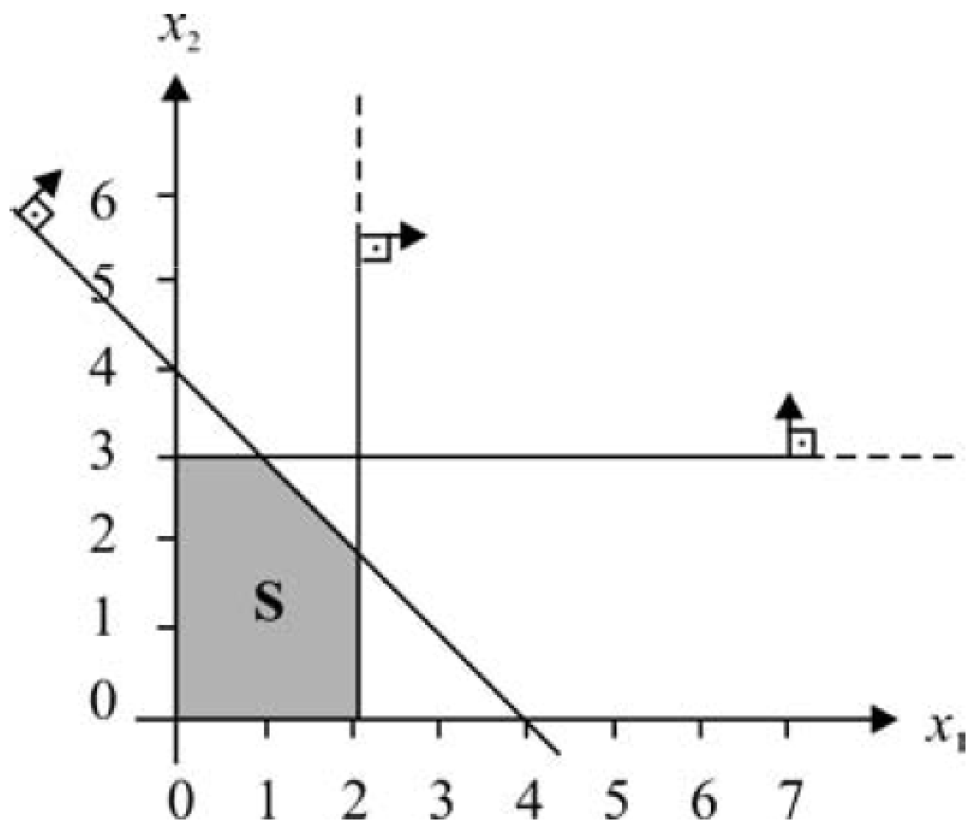






Solução Gráfica – Região factível

$$\mathbf{S} = \{(x_1, x_2) \text{ tal que } x_1 + x_2 \leq 4,\ x_1 \leq 2,\ x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$



Max cx

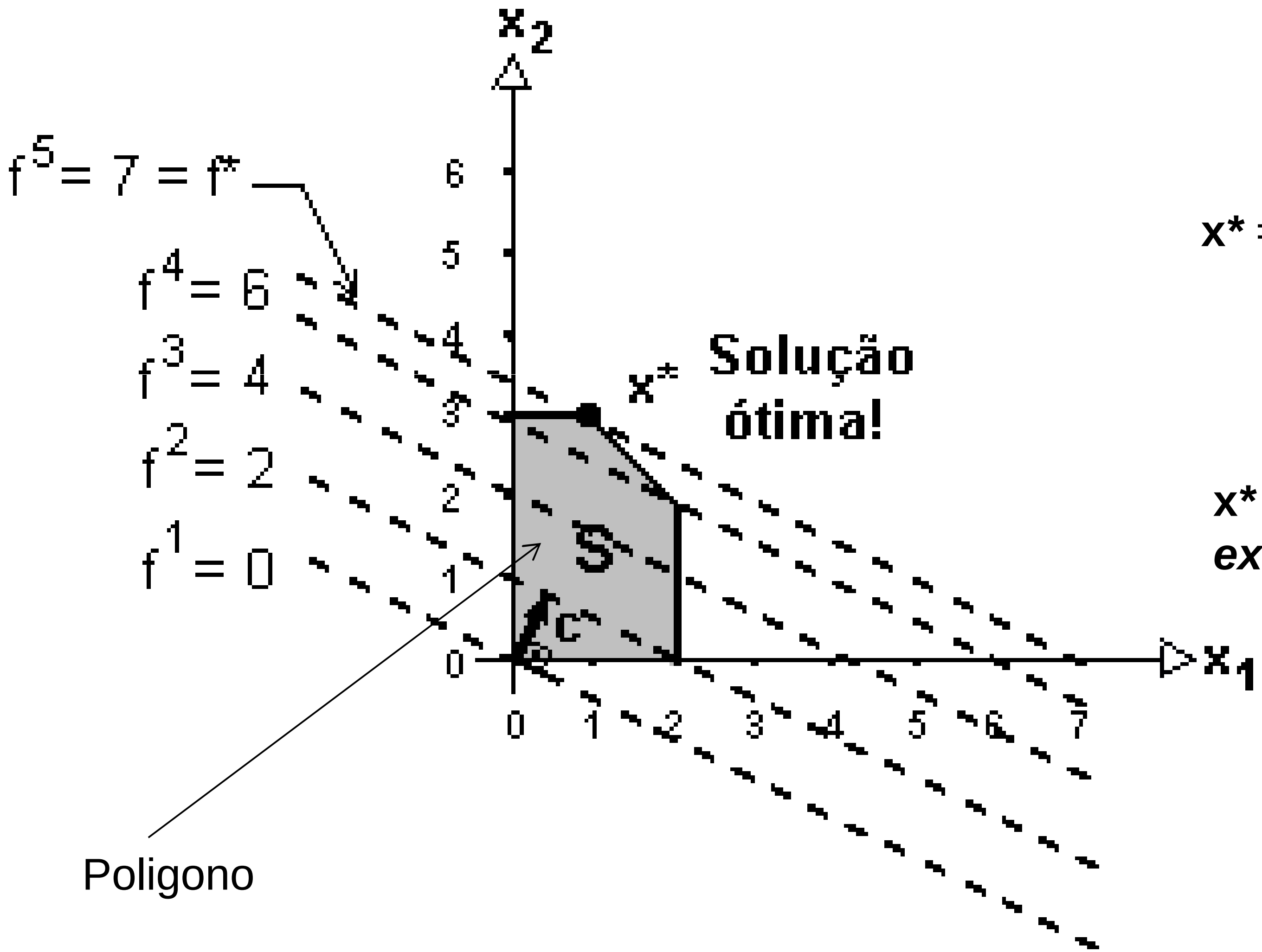
Pontos com mesmo z satisfazem

$$c^T x = z \quad (\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z)$$

Max z

$$\text{plano } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z \text{ movidoem direção } c$$

Resolução Gráfica - Exemplo



x* = $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

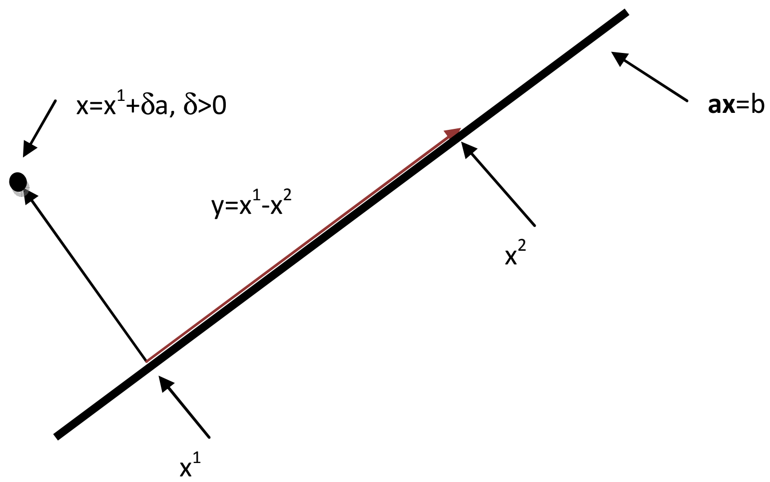
x* é um ponto extremo

Resolução Gráfica – Conceitos básicos Região Factível

- Considere uma reta qualquer:

  $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

- O vetor $\mathbf{a}=(a_1 \;\; a_2)^T$ é perpendicular à reta.



Resolução Gráfica – Conceitos básicos
Região Factível

Prova:
$a^T x = b$, onde $a^T = (a_1, a_2)$ e $x^T = (x_1, x_2)$.
Sejam x^1 e x^2 dois pontos da reta, isto é, $a^T x^1 = b$, $a^T x^2 = b$, e $y = x^2 - x^1$.
Então: $a^T y = a^T(x^2 - x^1) = a^T x^1 - a^T x^2 = b - b = 0$.

Em geral, quando o espaço é o $\mathbf{R}^n$, a equação $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$ define um conjunto chamado *hiperplano* e o vetor **a** é perpendicular ao hiperplano.

Resolução Gráfica – Conceitos básicos
Região factível

O vetor **a** aponta para o lado do plano cujos pontos satisfazem: $\mathbf{a}^T\mathbf{x}>b$.

Prova:

Os pontos do lado que aponta o vetor **a** são dados por:

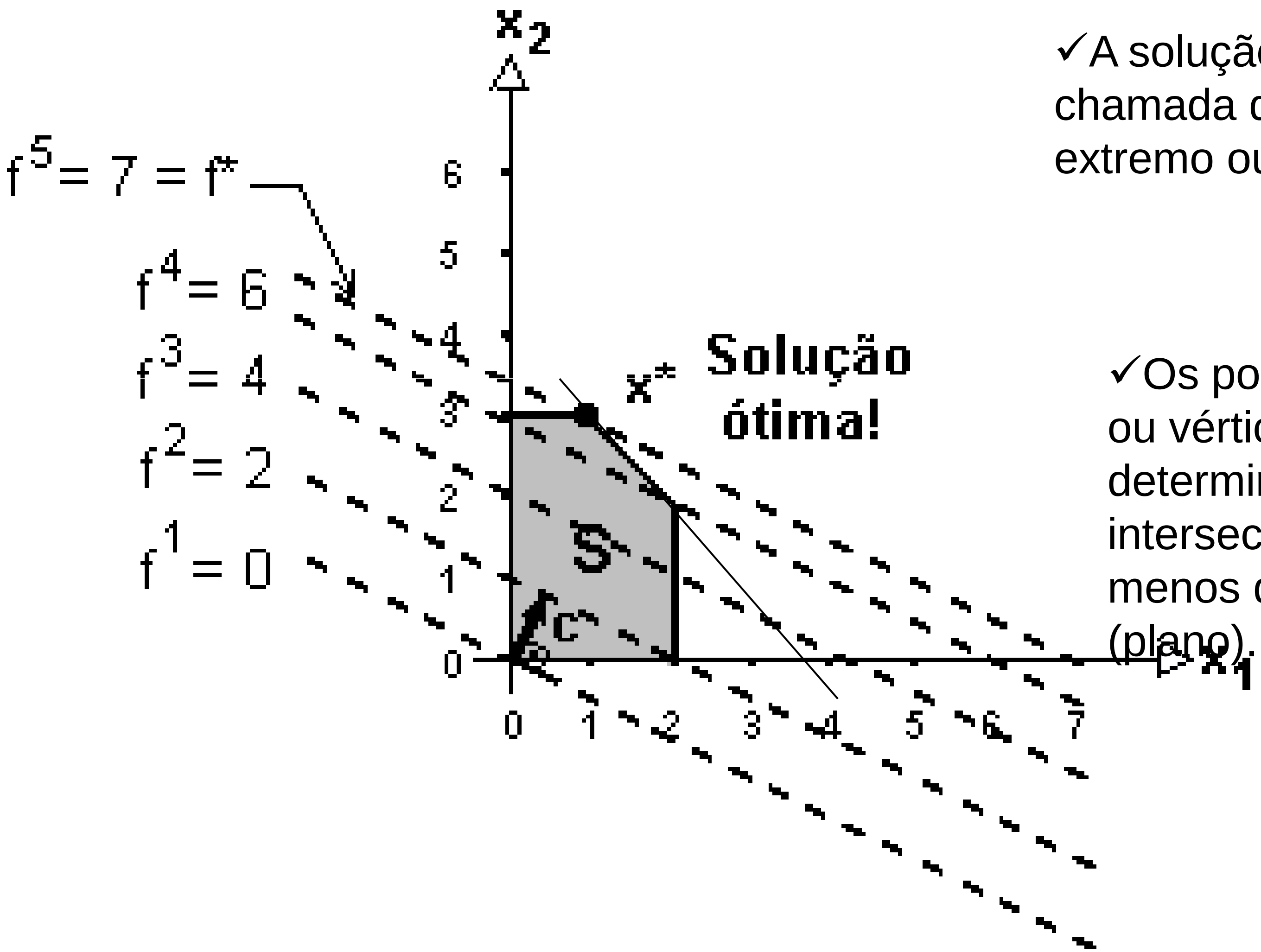
$\mathbf{x}=\mathbf{x}^1+\delta\mathbf{a}, \quad \delta>0$

Portanto,

$\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \mathbf{a}^T(\mathbf{x}^1+\delta\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}^1 + \delta\,\mathbf{a}^T\mathbf{a} = b + \delta\,\mathbf{a}^T\mathbf{a} > b,$

pois $\delta>0$ e $\mathbf{a}^T\mathbf{a} >0$ (considerando $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$.).

Resolução Gráfica - Exemplo



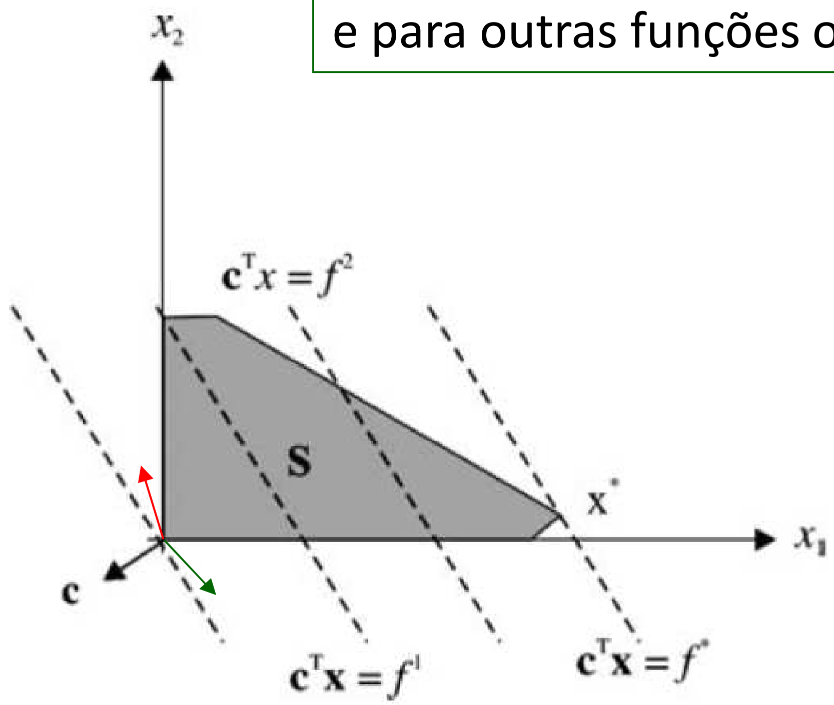
✓A solução ótima x* é chamada de ponto extremo ou vértice

✓Os pontos extremos ou vértices são determinados pela intersecção de pelo menos duas retas (plano).

Pontos extremos

- Se um problema de otimização linear tem uma solução ótima, então existe um *vértice ótimo*.

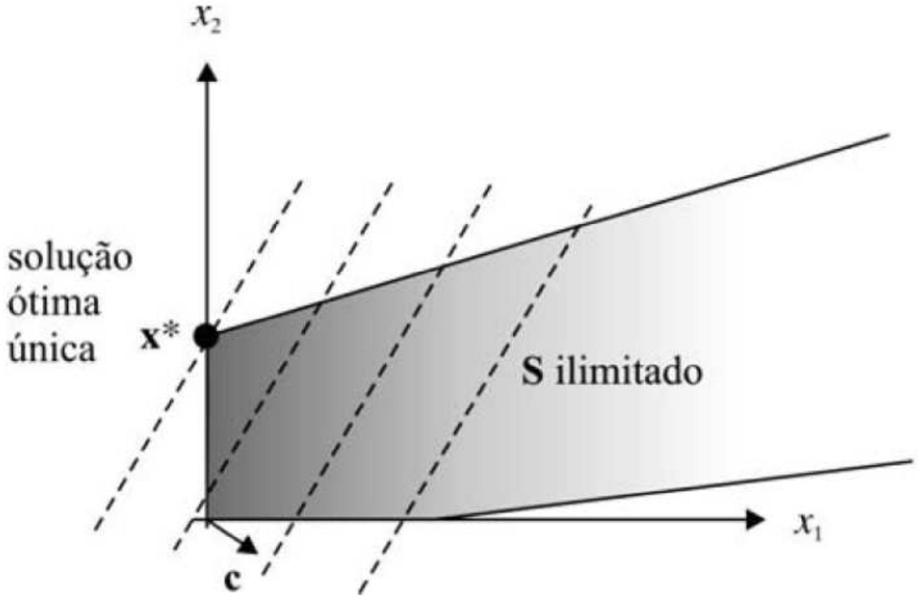
e para outras funções objetivo?



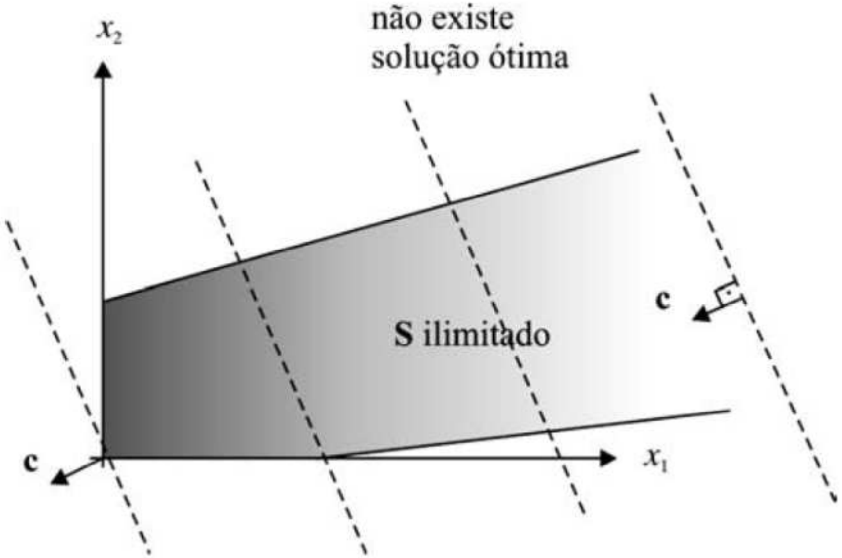
minimização

Região factível ilimitada

Região factível ilimitada e
solução ótima única (Minimização)

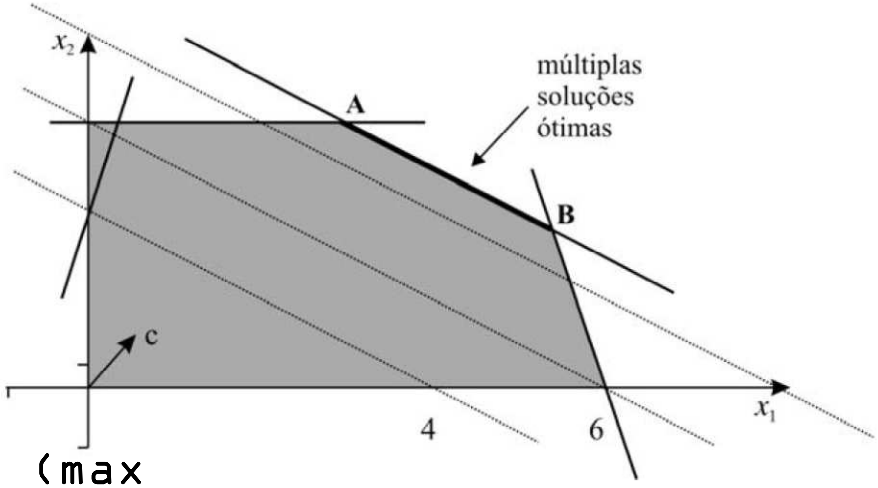


Região factível ilimitada e
não existe solução ótima

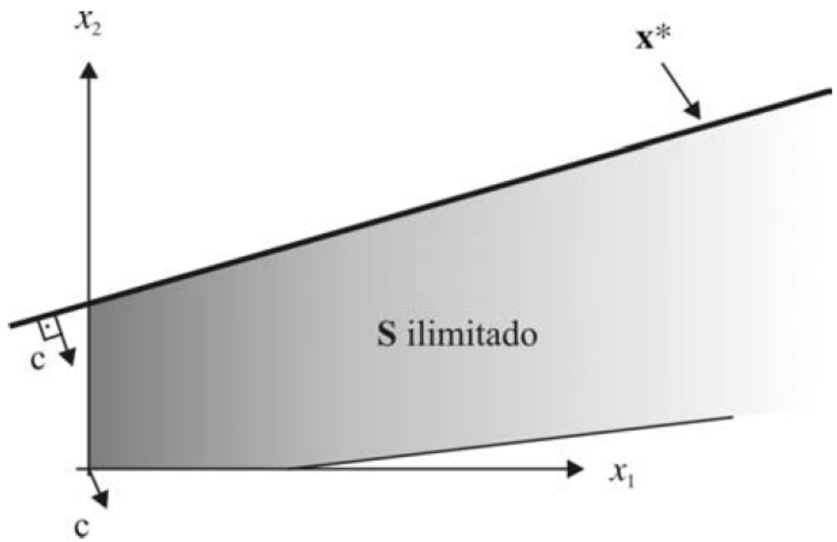


minimização

Múltiplos ótimos

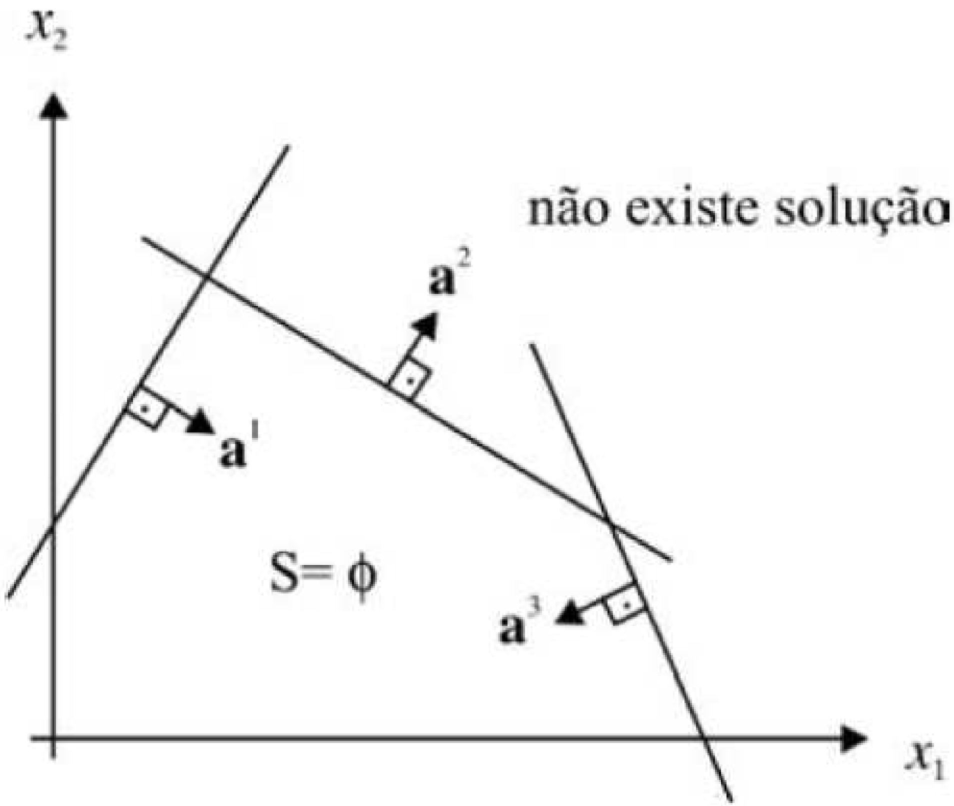


Múltiplas soluções ótimas (conjunto
Limitado



Região factível ilimitada
e infinitas soluções ótimas
(conjunto ilimitado de soluções
Ótimas).

Região infactível



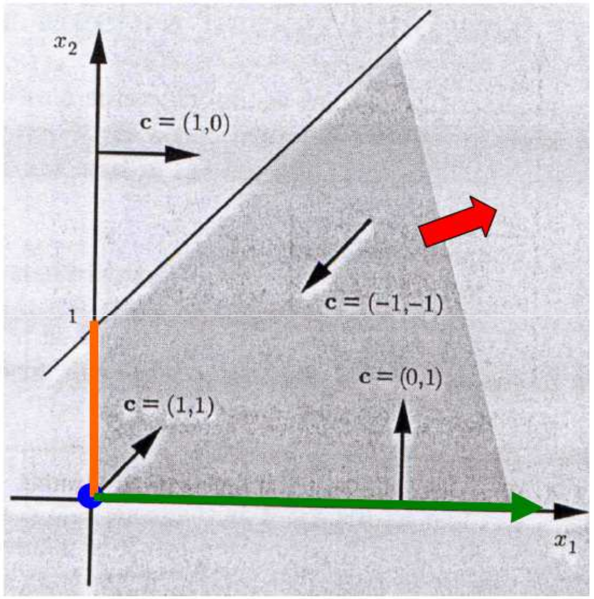
Solução Gráfica

minimizar $c_1 x_1 + c_2 x_2$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

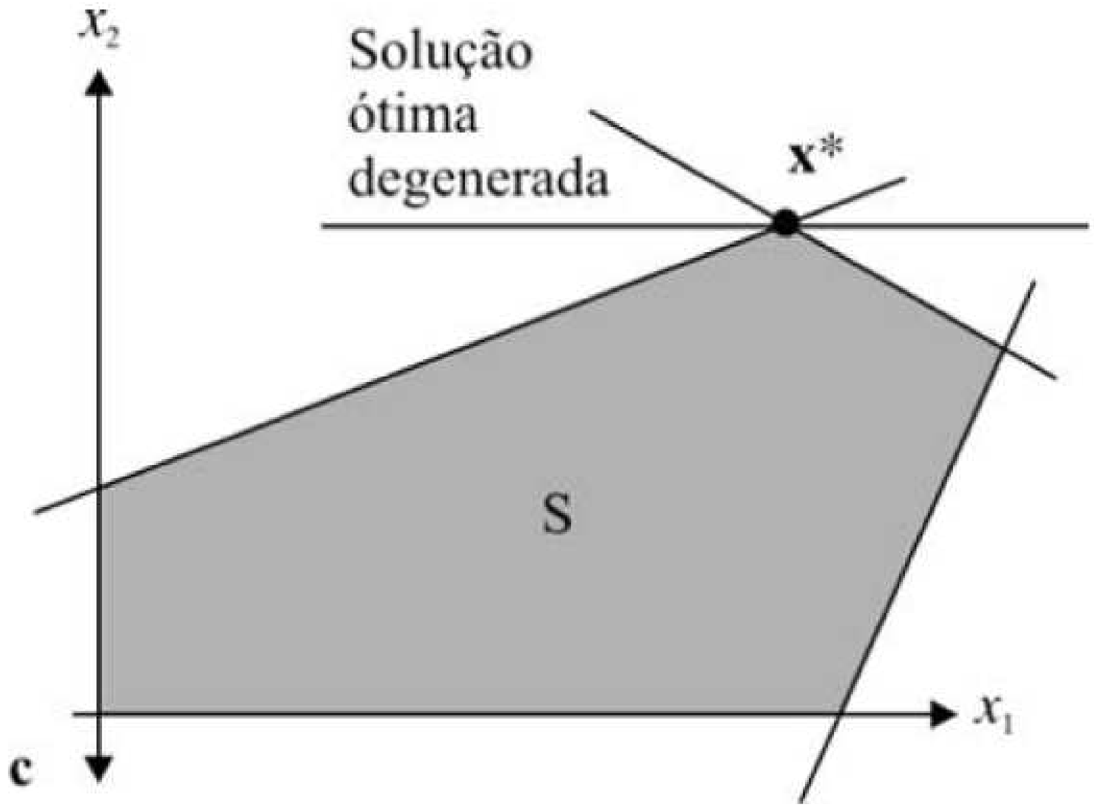
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- c=(1,1): solução ótima única (0,0)
- c=(1,0): conjunto limitado com múltiplas soluções ótimas
- c=(0,1): conjunto ilimitado com múltiplas soluções ótimas
- c=(-1,-1): solução ótima ilimitada
- restrição adicional $x_1 + x_2 \leq -2$: problema inviável



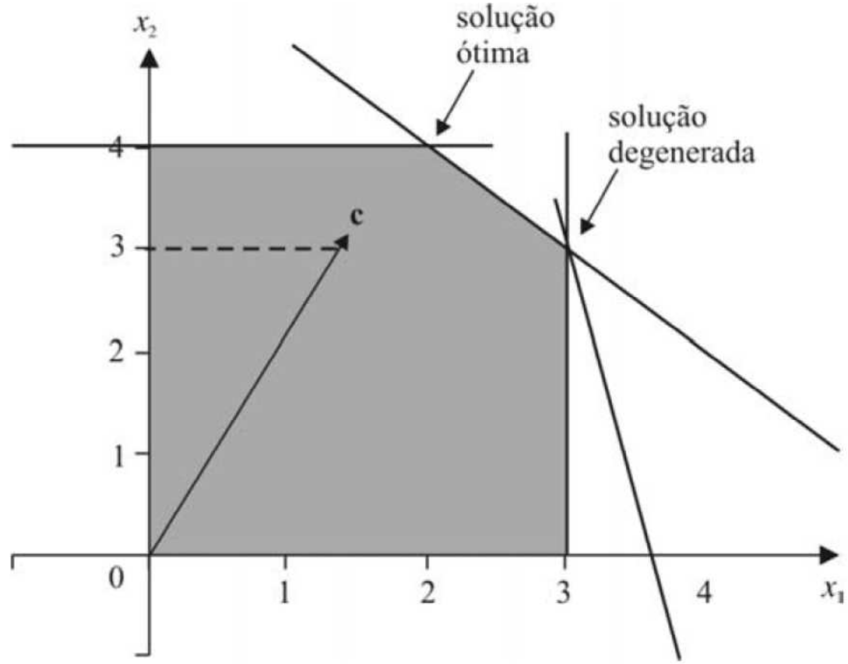
A normal $c=(c_1,c_2)$ aponta para a direção de crescimento

Solução degenerada



Exemplo: sol. degenerada

$$
\begin{array}{rrl}
\text{Maximizar} & f(x_1, x_2) & = x_1 + 3x_2 \\
 & x_2 & \leq 4 \\
 & x_1 + x_2 & \leq 6 \\
 & x_1 & \leq 3 \\
 & 5x_1 + x_2 & \leq 18 \\
 & x_1 \geq 0, \; x_2 & \leq 0.
\end{array}
$$



Exercícios

1) Considere o seguinte problema:

Minimizar $f(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$

Sujeito a: $-x_1 + x_2 \leq 2$

$2x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

a) Resolva o problema graficamente (isto é, desenhe a região factível e a(s) solução(ões) ótima(s)).

b) A solução $x_1 = x_2 = 0$ é um vértice da região factível? Identifique todos os vértices da região factível.

c) Desenhe as soluções $\mathbf{x^1}=(\;)=(1\;1)$ e $\mathbf{x^2}=(\;)=(5,\,1)$. Estas soluções são factíveis? Por que?

e) Considere agora uma outra função objetivo: ***Minimizar*** $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Verifique se a solução ótima obtida no item a. é também ótima considerando esta nova função objetivo. Há múltiplas soluções ótimas? Identifique no gráfico.

Exercícios

2. Considere o seguinte problema:

Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Sujeito a: $-x_1 + x_2 \geq 2$

$2x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$

Resolva o problema graficamente.

Considere agora: ***Maximizar*** $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ sujeito às mesmas restrições.

O que mudou?

Construa uma nova função objetivo de modo que o problema tenha: **i)** um segmento de soluções ótimas; **ii)** uma semi-reta de solução ótimas.

d) considere o problema do item b) e inclua a terceira restrição $X_1 + X_2 \leq 1$.

Resolva o problema resultante