UNIVERSIDADE DE RIBEIRÃO PRETO

CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

PEDRO SARTORI DIAS DOS REIS

SOFTWARE EDUCACIONAL PARA VERIFICAÇÃO DE ESFORÇOS EM ESTRUTURAS

RIBEIRÃO PRETO

2023

PEDRO SARTORI DIAS DOS REIS

SOFTWARE EDUCACIONAL PARA VERIFICAÇÃO DE ESFORÇOS EM ESTRUTURAS

Monografia apresentada à Universidade de Ribeirão Preto UNAERP, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientadora: Prof.ª Dra. Tamiris Luiza Soares Lanini

Ribeirão Preto

2023

**SUMÁRIO**

[1 Introdução 5](#_Toc146311421)

[1.1 A dificuldade em se calcular estruturas hiperestáticas 6](#_Toc146311422)

[1.2 O software como facilidador nos estudos 7](#_Toc146311423)

[2 Objetivos 8](#_Toc146311424)

[2.1 Objetivo geral 8](#_Toc146311425)

[2.2 Objetivos Específicos 8](#_Toc146311426)

[3 Revisão da literatura 10](#_Toc146311427)

[3.1 Apoios e Vínculos 10](#_Toc146311428)

[3.1.1 Apoios Móveis 10](#_Toc146311429)

[3.1.2 Apoios Fixos 11](#_Toc146311430)

[3.1.3 Engaste 11](#_Toc146311431)

[3.2 Forças 12](#_Toc146311432)

[3.2.1 Forças ativas 13](#_Toc146311433)

[3.2.2 Forças reativas 14](#_Toc146311434)

[3.3 Momento 14](#_Toc146311435)

[3.4 TENSÃO 15](#_Toc146311436)

[3.4.1 Tensão normal 16](#_Toc146311437)

[3.4.2 Tensão de cisalhamento 16](#_Toc146311438)

[3.5 Esforços internos solicitantes 17](#_Toc146311439)

[3.5.1 Forças normais de tração e compressão 17](#_Toc146311440)

[3.5.2 Forças cortantes 18](#_Toc146311441)

[3.5.3 Momento fletor 19](#_Toc146311442)

[3.6 Cargas distribuídas 20](#_Toc146311443)

[3.7 Condições de equilíbrio 22](#_Toc146311444)

[3.8 Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas 23](#_Toc146311445)

[3.9 Estruturas hipostáticas 23](#_Toc146311446)

[3.10 Estruturas isostáticas 24](#_Toc146311447)

[3.11 Obtenção de esforços em estruturas isostáticas 25](#_Toc146311448)

[3.11.1 Estudo de caso: Obtenção dos esforços internos em uma viga isostática 26](#_Toc146311449)

[3.12 Diagramas de esforços internos 28](#_Toc146311450)

[3.13 Estruturas hiperestáticas 29](#_Toc146311451)

[3.14 Princípio dos trabalhos virtuais 31](#_Toc146311452)

[3.15 Obtenção de esforços internos em estruturas hiperestáticas: método da força 33](#_Toc146311453)

[3.15.1 Estudo de caso: Obtenção de esforços internos em uma viga hiperestática 36](#_Toc146311454)

[3.16 A linguagem de programação C# 41](#_Toc146311455)

[3.16.1 A plataforma .NET (dot NET) 41](#_Toc146311456)

[3.16.2 Windows Forms 42](#_Toc146311457)

[3.17 Orientação a objetos 42](#_Toc146311458)

[3.17.1 Encapsulamento 43](#_Toc146311459)

[3.17.2 Herança 43](#_Toc146311460)

[3.17.3 Polimorfismo 44](#_Toc146311461)

[4 Metodologia 45](#_Toc146311462)

[5 Referências (Provisório - links dos sites) 46](#_Toc146311463)

# Introdução

A determinação de esforços em estruturas tem como objetivo analisar o que ocorre em uma estrutura quando submetida a ações, tanto externas, como cargas provenientes de uso, ocupação, vento, etc., quanto intrínsecas a esta, como seu peso próprio. Com isso é possível realizar o dimensionamento de estruturas de forma que esta resista aos esforços solicitantes sobre ela.

Tomando como exemplo uma viga apoiada sobre dois pilares (Figura 1), em que sobre ela se encontra uma carga pontual que age como um esforço ativo sobre a estrutura, tem-se que os pilares exercem um esforço reativo na viga fazendo com que esta esteja em equilíbrio, ou seja, imóvel.

Figura – Viga suportando carga pontual



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Estes esforços ativos e reativos fazem com que internamente à estrutura ajam esforços internos solicitantes, sendo eles as forças normais, que comprimem e tracionam a peça, forças tangenciais cortantes, momento fletor e momento torsor. Os esforços internos solicitantes por sua vez geram esforços internos resistentes, sendo eles as tensões de tração, compressão e cisalhamento. Estes últimos, a depender de sua intensidade podem comprometer a natureza do material de modo a leva-lo à sua degeneração e rompimento, causando assim o colapso da estrutura (M. H. C. Botelho).

Dado isso, o estudo acerca de como agem estes esforços nas estruturas é de extrema importância, já que ele possibilita a escolha correta dos materiais, seu dimensionamento e disposição de modo a garantir a segurança, viabilidade econômica e estética.

Por este motivo, o cálculo dos esforços internos de uma estrutura é de suma importância na análise estrutural, e sua obtenção pode ainda ser muito trabalhosa a depender do tipo da estrutura, isso porque as estruturas podem ser classificadas conforme o seu grau de hiperestaticidade, ou seja, seu grau de indeterminação estática, que expressa a diferença entre o número de valores desconhecidos em um sistema estático e o número de equações existentes para solucioná-lo (Luiz Fernando Martha).

As estruturas que apresentam grau de hiperestaticidade nulo podem ter seus esforços internos encontrados mais facilmente, já que o número de incógnitas possibilita a resolução do problema estático por meio das equações disponíveis, estas estruturas são chamadas de isostáticas.

Já as estruturas que possuem um grau de hiperestaticidade maior que zero apresentam uma maior dificuldade na obtenção dos esforços internos, já que seu número de incógnitas não possibilita a resolução de seu problema estático apenas utilizando-se as equações de equilíbrio disponíveis, sendo necessária a utilização de outros métodos para tal, estas estruturas são chamadas de hiperestáticas.

## A dificuldade em se calcular estruturas hiperestáticas

Como pontuado anteriormente, as estruturas hiperestáticas possuem mais incógnitas do que equações de equilíbrio, deste modo, as equações existentes são insuficientes para obter-se os valores das reações de apoio, por isso, para obtê-los usa-se o Método da Força, que é um método de aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais utilizado para a obtenção de deslocamentos e rotações em pontos da estrutura.

A utilização deste método para a resolução de sistemas hiperestáticos é feita pela retirada de reações nos apoios, de modo a separar a estrutura entre uma estrutura isostática, e outras *n* estruturas redundantes para cada uma das reações retiradas da estrutura original.

Com base nisso, devem ser encontrados os deslocamentos e/ou rotações nos pontos em que foram retiradas as reações, tanto da estrutura isostática gerada a partir da retirada das reações, quanto das estruturas redundantes geradas para cada reação que foi retirada.

O objetivo do processo é gerar equações de compatibilidade de modo que a somatória dos deslocamentos e/ou rotações em cada um dos pontos seja igual a zero, de modo a formar um sistema de *n* equações resolvível, onde as incógnitas são os valores das reações retiradas da viga original.

Deste modo, resolvendo-se as equações e encontrando os valores das reações removidas a viga original possuirá incógnitas suficientes para serem encontradas com as três equações de equilíbrio.

No entanto, este é um processo trabalhoso, e a depender do nível de hiperestaticidade da estrutura podem ser geradas inúmeras estruturas redundantes, e, por conseguinte um grande número de equações de compatibilidade tornando inviável a resolução manual do problema.

Um outro grande problema da utilização deste método é o fato de que a determinação de cada um dos deslocamentos envolve a obtenção das equações dos esforços, principalmente as equações de momento fletor, no caso das vigas, que a depender da viga e da disposição e natureza das cargas, podem existir em grande quantidade e complexidade.

## O software como facilidador nos estudos

Devido a esta grande complexidade os estudantes podem enfrentar dificuldades em realizar estes processos de cálculo, sendo uma das principais dificuldades o fato de não conseguirem confirmar se os passos intermediários de cálculo estão corretos.

Isso pode ser um grande obstáculo, já que pequenos erros acumulados podem comprometer o resultado final, além de serem difíceis de serem detectados em processos de cálculo que muitas vezes podem ser longos e repetitivos.

Nesse contexto, um software que realiza os cálculos de forma automatizada e que dê feedbacks que possam auxiliar os estudantes durante as etapas intermediárias de cálculo pode desempenhar um papel fundamental no aprendizado, fornecendo o suporte necessário e dando confiança ao estudante para que possa prosseguir com seus cálculos.

Uma outra vantagem na utilização de softwares é que, ao oferecer os feedbacks de forma automatizada, o estudante pode focar mais da compreensão dos conceitos dos cálculos, em vez de se preocuparem demasiadamente com os processos repetitivos.

# Objetivos

## Objetivo geral

Diante de tais considerações este estudo tem como objetivo a criação de um software de análise estrutural tridimensional que sirva como uma ferramenta educacional de apoio para estudantes de Engenharia Civil, fornecendo uma solução prática e acessível para as dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao lidar com os cálculos complexos envolvendo a análise de estruturas.

O software tem como propósito simplificar o processo de cálculo, permitindo que os estudantes obtenham feedbacks visuais e compreendam de forma mais eficaz os conceitos fundamentais das disciplinas de estruturas.

Por meio do software, os estudantes poderão criar modelos tridimensionais das estruturas, aplicar cargas, estabelecer relações de transmissão das cargas entre as estruturas e visualizar os resultados detalhados, como reações de apoio e diagramas de esforço cortante, deformação e momento fletor.

Isso possibilitará que os estudantes possam realizar seus estudos com mais segurança durante as etapas da realização dos cálculos, bem como melhorará a compreensão dos problemas conceituais das disciplinas.

## Objetivos Específicos

Realizar um estudo da literatura relacionada à análise estrutural e resistência dos materiais, buscando métodos utilizados para resolver problemas referentes a cálculo de estruturas isostáticas e hiperestáticas.

Definir as funcionalidades e características que o software deverá ter, incluindo a interface interativa, a criação de modelos tridimensionais discretizados, a capacidade de interação entre as estruturas, como identificação automática de apoios e de transmissão de esforços e a geração de resultados, como diagramas de esforço cortante, deformação e momento fletor, bem como as reações dos apoios e equações de momento fletor.

Projetar uma interface amigável e intuitiva, de modo a possibilitar a fácil utilização do software por parte dos estudantes.

Desenvolver uma arquitetura de software funcional, implementando as funcionalidades descritas na fase de definição, utilizando os métodos estudados durante a fase de revisão da literatura.

Realizar testes para validar as implementações do software por meio de exemplos e estudos de caso, de modo a verificar a precisão dos resultados e a usabilidade.

Apresentar os resultados obtidos no desenvolvimento do software por meio de exemplos e estudos de caso, evidenciando como ele pode efetivamente servir como uma ferramenta de auxílio nos estudos de estruturas.

# Revisão da literatura

## Apoios e Vínculos

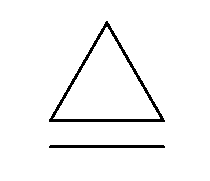
Os apoios ou vínculos são elementos nas estruturas que fornecem restrições ao movimento e à deformação.

Eles podem ser classificados de três formas a depender de sua natureza e grau de restrição de movimento, sendo elas Apoios Móveis Apoios Fixos, e Engaste.

### Apoios Móveis

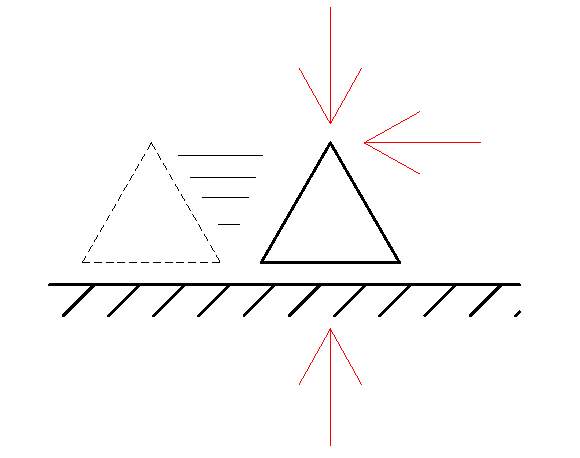
Os apoios móveis (Figura 2) são apoios que restringem o movimento do corpo na direção normal à superfície em que ele está apoiado, permitindo o movimento na direção tangencial à superfície, como mostra a Figura 3.

Figura – Representação simbólica de um apoio móvel



Fonte: elaborado pelo autor, 2023

Figura – Restrição de movimento do apoio móvel

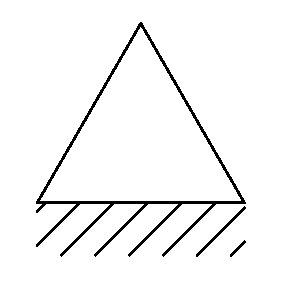


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

### Apoios Fixos

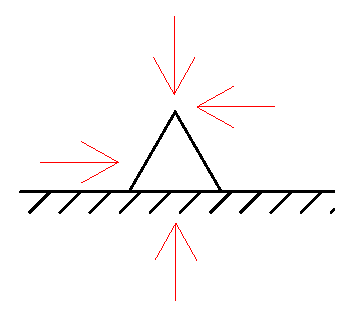
Os apoios fixos (Figura 4) são apoios que, além de restringir a movimentação do corpo na direção normal, também restringem na direção tangencial à superfície de apoio, como mostra a Figura 5.

Figura – Representação simbólica de um apoio fixo



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Figura – Restrição de movimento do apoio fixo

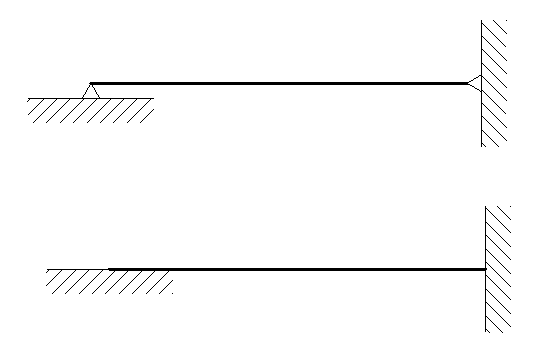


Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

### Engaste

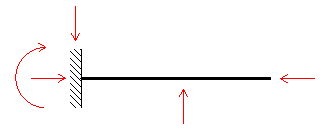
O engaste (Figura 6) é um tipo de apoio que, além de impedir a movimentação de translação em qualquer direção, ainda impede que o corpo sofra rotação, o que faz com que ele gere resistência a qualquer esforço de momento no ponto, como mostra a Figura 7.

Figura – Representações simbólicas do engaste



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Figura – Restrição de movimento do engaste



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

## Forças

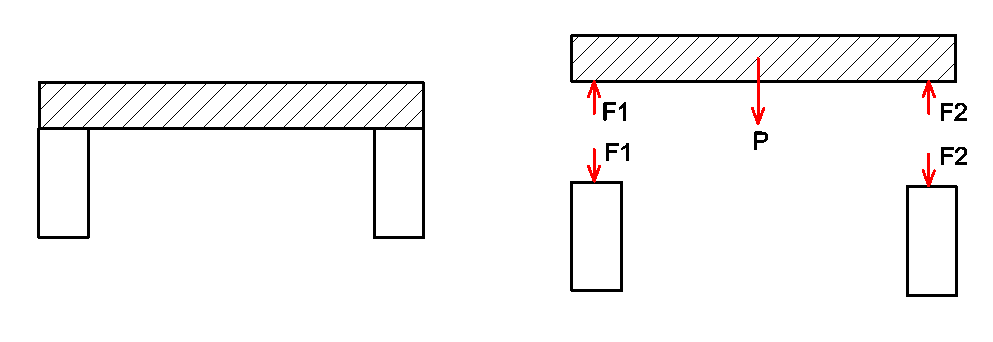
Segundo V. Feodosiev as forças podem ser consideradas como uma grandeza que expressa a interação mecânica dos corpos. Ao considerar um estrutura separada das outras partes do sistema, as forças externas são aquelas que podem ser substituídas sobre as ações das partes sobre a estrutura.

Elas podem ser separadas entre volumétricas e superficiais, sendo as primeiras as forças que agem em todas as partículas de um corpo, como exemplos pode-se citar a força peso que se dá pela relação entre a massa de um corpo e o campo gravitacional em que ele está inserido, a força magnética que é resultante da relação entre a carga de um corpo e o campo magnético. Na Figura 8 é possível verificar a força peso, uma força volumétrica, expressa por sua resultante (P), agindo em uma viga.

Já as forças superficiais são aplicadas na superfície de um corpo, e são resultado das ações de outros em contato com o corpo analisado. Na Figura 8 as forças F1 e F2 são consideradas forças superficiais, já que são resultantes da interação da viga com as superfícies das seções dos dois pilares abaixo dela.

Segundo R. C. Hibbeler, se a área de aplicação ou o volume de aplicação da carga for suficientemente pequeno comparado às demais dimensões da estrutura, ela pode ser entendida como uma carga concentrada, aplicada em um único ponto da peça. E se ela for aplicada ao longo de uma área estreita ela pode ser vista como uma carga distribuída (verificar capítulo 3.6).

Figura – Forças agindo em uma viga



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

### Forças ativas

As forças ativas são aquelas que resultam da aplicação direta de cargas sobre uma estrutura, como o peso próprio, força magnética, força do vento e forças provenientes da interação de outros corpos na estrutura, como o peso de uma parede apoiada sobre uma viga, por exemplo e o pesso próprio (P) da viga na Figura 8.

### Forças reativas

As forças reativas são aquelas que surgem nos apoios, resultantes da interação entre o elemento e outros corpos que servem como apoio para ele, estas forças surgem de modo a contrapor-se às forças ativas na estrutura a fim de que as condições de equilíbrio sejam mantidas. Na Figura 8 as forças F1 e F2 são consideradas forças reativas, já que estas surgem de modo a contrapor-se à força peso (P) que está agindo na viga.

## Momento

O momento (M), ou torque, expressa a tendência de uma força aplicada em um ponto causar uma rotação na peça, e pode ser calculado multiplicando-se o módulo da força (F) pelo braço de alavanca (d), como mostrado na Figura 9.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

O momento resultante (MR) que age em uma peça é calculado pela somatória de todos os momentos que agem sobre a peça (Sarkis Melkonian). Se a peça está em equilíbrio translacional e rotacional o momento resultante pode ser obtido tomando qualquer ponto como eixo de rotação, e seu valor será sempre nulo devido à oposição entre as forças ativas e reativas.

Na equação: *Fi* são as forças perpendiculares ao eixo de rotação e *di* são as distâncias das forças até o eixo.

Como ilustração, o momento resultante da Figura 10 pode ser calculado da seguinte forma:

Figura – Momentos aplicados em uma viga



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

## TENSÃO

A tensão, representada aqui pela letra P, pode ser entendida como uma grandeza que mede a distribuição de uma força aplicada na superfície de aplicação. A tensão média (Pm) pode ser calculada dividindo-se a força resultante (ΔR) pela área de aplicação (ΔA).

As tensões que agem em uma estrutura podem ser classificadas como tensão normal e tensão cisalhante

### Tensão normal

A tensão normal é a tensão que é causada por uma força que atua na direção normal à superfície de aplicação, como mostra a Figura 11, e é expressa pela letra grega **σ** (sigma) (R. C. Hibbeler).

Onde é a força resultante perpendicular à área de aplicação e é a área de aplicação da força.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

### Tensão de cisalhamento

A tensão de cisalhamento é a tensão que ocorre devido à aplicação de uma força resultante aplicada paralelamente ao plano da área de aplicação, como mostra a Figura 12, e é representada pela letra grega **τ** (tau) (R. C. Hibbeler).

Onde é a força resultante paralela à área de aplicação e é a área de aplicação da força.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

## Esforços internos solicitantes

Esforços internos solicitantes são as forças que ocorrem internamente a uma peça como resposta às forças externas ativas e reativas e momentos.

Segundo M. H. C. Botelho elas são um efeito intermediário que ocorre nas estruturas em função da aplicação destas cargas externas, e são responsáveis por gerar os esforços internos resistentes, que são as tensões normais de tração e compressão e as tensões de cisalhamento que são a causa de possíveis colapsos na estrutura.

Os esforços internos podem ser divididos em forças normais de tração e compressão, força cortante, momento fletor e momento torsor.

### Forças normais de tração e compressão

As forças normais de tração e compressão são forças que surgem internamente à estrutura em resposta a forças externas aplicadas na direção normal em relação à seção transversal da peça.

Segundo V. Feodosiev, a única diferença entre a força normal de compressão e a força normal de tração é o sentido desta força, que no caso da compressão ela se dirige para dentro da peça, enquanto que no caso da tração ela se dirige para fora da mesma, como mostra a Figura 14 e a Figura 13. As forças normais de tração e compressão são expressar pela letra **N**.

Figura – Força normal de compressão



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Figura – Força normal de tração



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

### Forças cortantes

As forças internas cortantes são as foças que surgem internamente à estrutura em resposta a forças externas aplicadas paralelamente à seção transversal da peça, e elas têm a mesma direção da força externa. A força interna cortante é representada pela letra **V**.

A força cortante pode ser considerada positiva ou negativa, por convenção ela é positiva quando tende a provocar a rotação da peça no sentido horário, e negativa quando tende a provocar a rotação no sentido anti-horário.

Figura



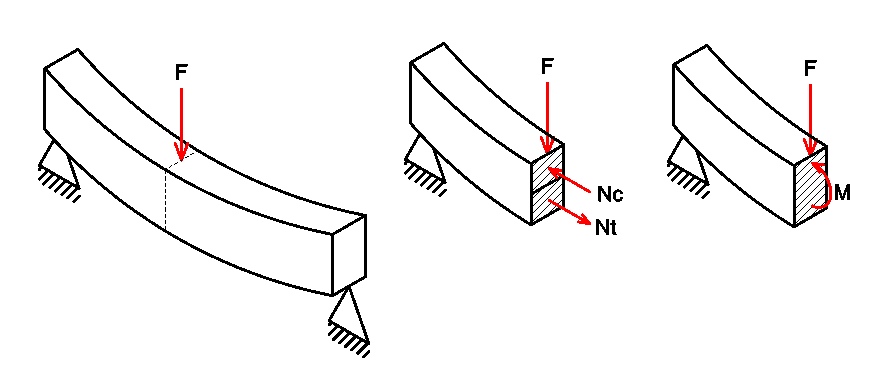
Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

### Momento fletor

Segundo Luiz Eduardo Miranda, o momento fletor pode ser entendido como o momento resultante de todos os momentos que são aplicados na estrutura em relação a um ponto, podendo ser calculado para qualquer ponto da estrutura.

Para exemplificar a atuação do momento fletor (**M**) em uma estrutura, tomar-se-á uma viga biapoiada submetida a uma força **F** vertical com sentido para baixo. Quando a força **F** externa atua em uma estrutura verticalmente com sentido para baixo, a estrutura tende a se deformar, como consequência disso aparecem forças internas normais de tração (Nt) na parte inferior e de compressão (Nc) na parte superior, como ilustra a Figura 16.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Assim como a força cortante, o momento fletor também pode ser positivo ou negativo. Segundo Sarkis Melconian ele é, por convenção, positivo quando as fibras inferiores da peça são tracionadas, e negativo quando as partes superiores são tracionadas.

## Cargas distribuídas

Foi estudado no capítulo 3.2 que as forças volumétricas são aquelas que atuam sobre todos os pontos do objeto e as foças superficiais são aquelas que atuam ao longo de uma superfície. No entanto, se o comprimento de aplicação da força for consideravelmente superior às demais dimensões da estrutura, considera-se que estas forças atuam de forma linear, ao longo de todo o comprimento de uma estrutura (R. C. Hibbeler), como mostra a Figura 17, onde a carga distribuída é expressa em uma função de x, **q(x)**, sendo **x** a distância na direção paralela ao eixo da viga.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

A força resultante **Q** de uma carga distribuída pode ser obtida pela integral da função da carga distribuída em função de **x** definida entre **A** e **B**.

E seu ponto de aplicação se dará na componente em **x** do centro geométrico da área abaixo do gráfico de **q(x)** entre **A** e **B**, na mesma direção e sentido da carga distribuída (R. C. Hibbeler), como mostra a Figura 18.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

## Condições de equilíbrio

Para que um corpo esteja em equilíbrio é necessário que ele não sofra translação quando aplicadas forças externas, e nem rotação quando aplicados momentos externos. Para que isso ocorra, as forças reativas devem ser tais que contraponham os esforços ativos de forma que as forças resultantes na estrutura sejam nulas e gerem momentos tais que a resultante dos momentos na estrutura seja nula em relação a um ponto qualquer, esteja este ponto dentro do corpo ou fora dele. Segundo R. C. Hibbeler, essas condições podem ser descritas pelas seguintes equações.

Onde é a soma de todas as forças externas atuantes e é a soma de todos os momentos atuantes na estrutura.

Como na engenharia normalmente utiliza-se um sistema coplanar de forças, a resultante de pode ser decomposta em duas componentes, x e y, resultando em três condições de equilíbrio.

Onde é a somatória das decomposições das forças no eixo x, é a somatória das decomposições das forças no eixo y e é a somatória dos momentos no plano de estudo em relação ao ponto **o**.

## Estruturas hipostáticas, isostáticas e hiperestáticas

Uma estrutura pode ser hipostática, isostática ou hiperestática, nomenclaturas que rementem ao grau de estabilidade em estruturas.

As estruturas hipostáticas são instáveis, enquanto as isostáticas e hiperestáticas são estáveis, a diferença entre estas duas últimas reside no fato de que, no caso das estruturas isostáticas é possível determinar os esforços internos utilizando as três equações de equilíbrio estudadas anteriormente, enquanto que para determina-los em uma estrutura hiperestática as equações não são suficientes, sendo necessária a utilização de outros métodos, como o método da força.

## Estruturas hipostáticas

Uma estrutura classifica-se como hipostática quando seus apoios não restringem os seus movimentos de translação e rotação, ou seja, quando alguma das três equações de equilíbrio estudadas anteriormente não é satisfeita. Neste caso, o número de vínculos não é suficiente para fornecer estabilidade à estrutura, e ela é considerada instável.

Alguns exemplos são a viga da Figura 15, onde , , mas , o que causa uma aceleração horizontal na estrutura, e a viga da Figura 20, onde , , mas , o que causa uma aceleração angular na peça.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

Figura



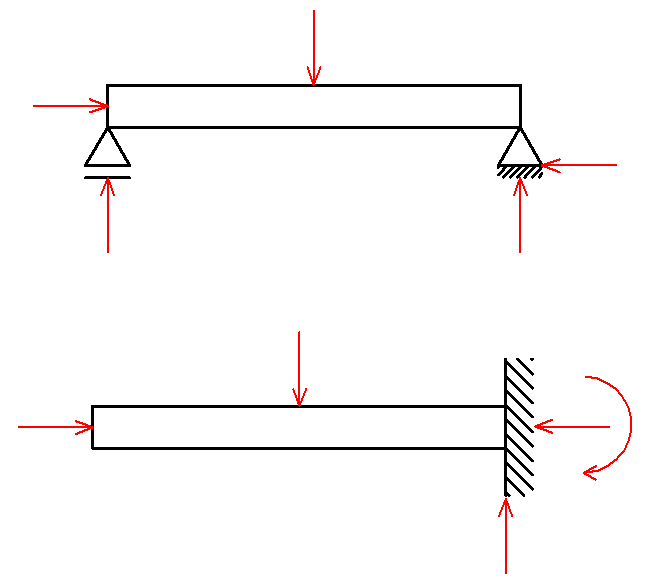
Fonte: Elaborado pelo autor, 2022

## Estruturas isostáticas

Uma estrutura classifica-se como isostática quando o número o número de vínculos é tal que fornece estabilidade translacional e rotacional à estrutura e permite a determinação dos esforços utilizando-se as três equações de equilíbrio.

Na Figura 21 é possível ver os dois exemplos apresentados anteriormente na Figura 19 e Figura 20, no entanto foram trocados os apoios de modo a torná-las isostáticas. É possível notar agora que todas as equações de equilíbrio são satisfeitas e não há mais a possibilidade de translação ou rotação nas vigas.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Neste caso a determinação destas reações nos apoios é obtida de forma simples, utilizando as equações citadas anteriormente. A obtenção das reações é crucial para a determinação dos esforços nas estruturas.

## Obtenção de esforços em estruturas isostáticas

Como já mencionado anteriormente, o processo para a obtenção dos esforços internos em estruturas isostáticas é bastante simples, e segundo R. C. Hibbeler, é possível utilizar o método das seções aplicando alguns passos para a obtenção dos resultados esperados.

Para a aplicação do método das seções para um segmento do corpo é necessário primeiramente, desenhar o diagrama de corpo livre de todo o elemento e calcular as reações nos apoios utilizando as equações de equilíbrio.

Em seguida deve-se desenhar um diagrama de corpo livre traçando um corte imaginário na seção em que se deseja obter os esforços internos, mantendo as cargas originais intactas. Assim deve-se também desenhar as resultantes das cargas internas que se deseja obter e por fim calculá-las utilizando as equações de equilíbrio.

### Estudo de caso: Obtenção dos esforços internos em uma viga isostática

Para exemplificar a aplicação do método das seções, será feito um estudo de caso, exemplificando a obtenção de esforços internos na viga da Figura 22, que mostra o diagrama de corpo livre da viga biapoiada de 6 metros, onde **Va** é a reação vertical do apoio móvel da esquerda e **Vb** e **Hb** são as reações vertical e horizontal do apoio fixo da direita, respectivamente.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Seguindo os passos do método das seções descritos anteriormente, a obtenção dos valores dos apoios é feita utilizando as equações de equilíbrio, para isso escolheu-se a extremidade esquerda da viga como eixo para o cálculo do momento resultante e tomando-se a variável **x** para representar a distância em relação à extremidade esquerda, tem-se:

Resolvendo-se as equações tem-se que , e . Em seguida, traça-se um corte imaginário a uma distância **x** da viga, e desenha-se o diagrama de corpo livre indicando os esforços internos, onde **N** é a força normal, **V** é a força cortante e **M** é o momento fletor, obedecendo as convenções descritas no capítulo 3.5.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Assim, é possível utilizar as equações de equilíbrio para obter-se os esforços internos no ponto genérico **x**.

Deste modo, os valores dos esforços internos para um ponto qualquer **x** no segmento da viga são dados pelas equações:

## Diagramas de esforços internos

Segundo Luiz Fernando Martha, os diagramas de esforços internos são gráficos que caracterizam a variação dos valores dos esforços ao longo do eixo da estrutura, e são traçados com base nas equações dos esforços internos. Os diagramas de esforços internos fornecem uma informação visual de quais são os esforços máximos nas estruturas e onde eles ocorrem, permitindo aos projetistas quais as regiões mais propensas ao rompimento (Luiz Eduardo Miranda, 2002). Para exemplificar usou-se a mesma viga calculada no capítulo 3.11.1.

Na Figura 24 observa-se o diagrama de força cortante, traçado com base na equação de cortante, já o diagrama de momento fletor na Figura 25 é desenhado com base na equação de momento fletor e, por convenção, desenha-se a parte positiva do gráfico abaixo das fibras inferiores da barra, e a parte negativa acima das fibras superiores.

Por fim, na Figura 26, tem-se o diagrama de força normal, também por convenção os esforços de tração são desenhados na parte superior da barra, e são tidos como positivos, e os de compressão são desenhados na parte superior, e tidos como negativos.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

## Estruturas hiperestáticas

Assim como nas estruturas isostáticas, nas estruturas hiperestáticas os vínculos fornecem estabilidade translacional e rotacional à estrutura de modo que as condições de equilíbrio sejam satisfeitas, no entanto não é possível obter todas as reações nos apoios apenas utilizando as três equações de equilíbrio (Sarkis Melconian), já que o número de incógnitas é superior ao número de equações, o que impossibilita a resolução das incógnitas por meio de um sistema de equações.

As estruturas hiperestáticas são classificadas conforme seu grau de hiperestaticidade (**g**), que para pórticos planos pode ser obtida pela seguinte equação (Luiz Fernando Martha):

Segundo Luiz Fernando Martha, um grau de hiperestaticidade inferior a zero é uma condição suficiente para que o modelo seja hipostático, um grau nulo é uma condição necessária para que ele seja isostático, e um grau de hiperestaticidade superior a zero é uma condição necessária para que o modelo seja hiperestático.

Um exemplo de estrutura hiperestática é a viga da Figura 27, onde há três vínculos e quatro forças reativas, o grau de hiperestaticidade pode ser obtido pela equação supramencionada:

Aplicando o método das seções para a obtenção das reações nos apoios, adotando-se o eixo de rotação como a extremidade esquerda, tem-se:

Como é possível perceber, a única reação possível de ser encontrada pelo sistema de equações é **Hb**, com valor de 15kN, as demais são impossíveis de ser determinadas utilizando apenas as equações de equilíbrio.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Por este motivo, é preciso a utilização de outros métodos para a obtenção das forças reativas das estruturas hiperestáticas, um dos métodos clássicos para a resolução deste problema é o método da força, que será estudado posterirormente.

## Princípio dos trabalhos virtuais

O Princípio dos Trabalhos Virtuais é um método de análise que se baseia no princípio da conservação de energia, tendo sido desenvolvido por John Bernoulli em 1717, e é utilizado para encontrar o deslocamento ou rotação em um ponto da estrutura. (R. C. Hibbeler)

Quando um corpo é estático, ela deve satisfazer as equações de equilíbrio, ou seja, as forças externas e as tensões internas devem estar em equilíbrio entre si, e também deve satisfazer às equações de compatibilidade, o que quer dizer que os deslocamentos externos da estrutura devem ser compatíveis com as deformações internas (Luiz Fernando Martha).

O Princípio dos Trabalhos Virtuais une estes dois sistemas por meio do conceito de trabalho, ou seja, para que uma estrutura permaneça estática, o trabalho das forças externas deve ser compatível com a energia de deformação interna, resultando na seguinte equação:

(equação 1)

Onde **F** representa as forças externas, **Δ** os deslocamentos externos, as tensões internas e as deformações internas.

Na equação, a expressão representa os trabalhos externos e a energia de deformação interna (Luiz Fernando Martha).

No Princípio dos Trabalhos Virtuais, ou PTV, para a obtenção dos deslocamentos ou rotações em um ponto, utiliza-se o sistema estrutural real, e um sistema auxiliar virtual, onde aplica-se uma força, ou momento, virtual (imaginária) **F’** unitária na mesma direção em que se procura encontrar o deslocamento.

Ao se aplicar a carga virtual **F’** e a peça sofrer as ações das cargas reais, o ponto de aplicação da carga virtual sofrerá um deslocamento real **Δ** que deve ser compatível com a deformação virtual **dε**. Deste modo, a força virtual **F’** realizará um trabalho virtual externo e a tensão virtual **σ** realizará um trabalho virtual interno, utilizando a equação 1:

Onde é o deslocamento no ponto de aplicação da carga virtual. Como a força F’ é unitária:

Dado este fato a equação do trabalho virtual pode ser descrita pela seguinte expressão (R. C. Hibbeler):

(equação 2)

Onde a primeira integral é o trabalho virtual interno realizado pelos esforços normais, a segunda é o trabalho virtual interno realizado pelo momento fletor, e a terceira é aquele realizado pelos esforços cortantes.

Como em barras longas o efeito da força cortante é pequeno em comparação às demais, seu trabalho virtual interno é desprezado, considerando-se apenas as duas primeiras integrais (Luiz Fernando Martha), resultando na seguinte expressão:

(equação 3)

E finalmente, segundo H. C. Hibbeler, quando o método é aplicado a vigas, por serem longas e esbeltas é conveniente utilizar apenas a energia de deformação virtual causada pelo momento fletor, já que este tem muito mais influência no deslocamento do que os outros esforços neste tipo de estrutura, portanto:

(equação 4)

Onde **x1** é o ponto de início da seção de análise, **x2** é o ponto final da seção de análise, **M** é o momento fletor na viga, **m** é o momento fletor virtual provocado pela carga unitária virtual, **E** é o módulo de elasticidade do material, e **I** é o momento de inércia da área da seção transversal da peça calculado em torno da linha neutra, e:

(equação 5)

Onde **θ** é a rotação no ponto e **mθ** é o momento fletor virtual provocado pelo momento unitário no ponto.

## Obtenção de esforços internos em estruturas hiperestáticas: método da força

Como visto nos capítulos anteriores, não é possível encontrar os valores das reações dos apoios nas vigas hiperestáticas utilizando apenas as três equações de equilíbrio pois o número de incógnitas é inferior ao número de equações, por isso, para tal, utiliza-se o método da força.

Este método consiste na superposição de soluções básicas isostáticas, como expressa Luiz Fernando Martha, onde o sistema hiperestático inicial é liberado das ligações adicionais, dando origem a um sistema principal isostático resultante da retirada dos vínculos adicionais e a outros sistemas básicos redundantes, onde atuam apenas as reações retiradas do sistema original (V. Feodosiev), como mostra a Figura 28, onde no lado esquerdo tem-se o sistema hiperestático inicial, que é subdividido nos três sistemas da direita, em que na parte superior tem-se o sistema principal, onde foram retiradas as reações **Ma** e **Vb**, e logo abaixo tem-se os sistemas redundantes, onde atuam apenas as reações retiradas do sistema inicial.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Deste modo a partir do sistema principal é possível, aplicando-se o princípio dos trabalhos virtuais, encontrar os deslocamentos e rotações nos pontos onde foram retirados os apoios no sistema principal, sendo estes expressos por **Δi** para os deslocamentos e **θi** para as rotações, onde **i** é a identificação do ponto.

Já no caso dos sistemas redundantes não é possível encontrar os deslocamentos gerados pelas reações, no entanto é possível encontrar os deslocamentos (ou rotações) causados por uma força (ou momento) unitária, expressos por para os deslocamentos e **αij** para as rotações, de modo que:

Onde é o deslocamento unitário no ponto i causado por uma força (ou momento) unitária no ponto j, **Rj** é a reação no ponto j, é o deslocamento no ponto i causado por Rj, **αij** é a rotação no ponto i causada por uma força (ou momento) unitária no ponto j e é a rotação no ponto i causada por Rj. Estes deslocamentos e rotações unitários são chamados de coeficientes de flexibilidade (Luiz Fernando Martha).

Sabendo-se disso, é possível estabelecer as chamadas equações de compatibilidade, sendo elas:

Deste modo, após encontrados os valores de todos os deslocamentos e rotações, tem-se um sistema linear onde as incógnitas serão as reações nos apoios retiradas do sistema hiperestático inicial.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Tomando como exemplo a Figura 29 tem-se que:

* **θa** é a rotação no ponto **a** no sistema principal.
* **Δb** é o deslocamento no ponto **b** no sistema principal.
* **αaa** é a rotação unitária no ponto **a** causada por um momento unitário no ponto **a** do sistema redundante 1.
* **αab** é a rotação no ponto **a** causada por por uma força unitária no ponto **b** do sistema redundante 2.
* **fba** é o deslocamento no ponto **b** causado por um momento unitário no ponto **a** do sistema redundante 1.
* **fbb** é o deslocamento no ponto **b** causado por uma força unitária no ponto **b** do sitema redundante 2.
* **θaa** é a rotação no ponto **a** causada por **Ma** no sistema redundante 1.
* **θab** é a rotação no ponto **a** causada por **Vb** no sistema redundante 2.
* **Δba** é o deslocamento no ponto **b** causado por **Ma** no sistema redundante 1
* **Δbb** é o deslocamento no ponto **b** causado por **Vb** no sistema redundante 2

Para o exemplo em questão tem-se as seguintes equações de compatibilidade:

### Estudo de caso: Obtenção de esforços internos em uma viga hiperestática

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Para este estudo de caso será utilizada a viga já apresentada neste capítulo (Figura 30). Primeiramente deve-se retirar os vínculos de modo a formar um sistema principal e os sistemas redundantes isostáticos (Figura 29). Para que possam ser encontrados os coeficientes de flexibilidade devem ser aplicadas forças e momentos unitários nos sistemas redundantes, deste modo, sistemas isostáticos a serem calculados estão expressos na Figura 31.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

As reações e as equações de momento fletor para cada um destes sistemas podem ser encontradas utilizando as três equações de equilíbrio e o método das seções, explorados no capítulo 3.11.

Na Figura 32 é possível ver os esforços internos nos três sistemas, incluindo as reações nos apoios calculadas utilizando-se as três equações de equilíbrio. E na Figura 33 é possível ver os diagramas e equações de momento fletor, calculados por meio do método das seções para cada um dos segmentos dos sistemas.

Figura – Esforços externos dos sistemas isostáticos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Figura – Momentos fletores dos sistemas isostáticos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

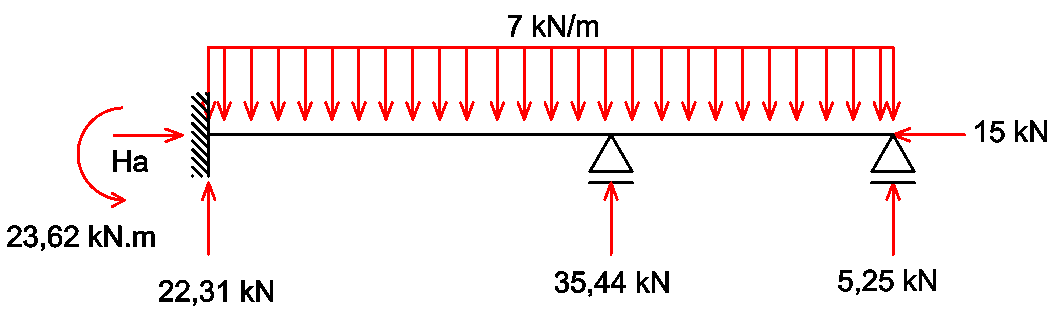
O próximo passo é encontrar as deformações, rotações e coeficientes de flexibilidade utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, portanto tem-se que:

Com os valores das deformações, rotações e coeficientes encontrados, agora é possível encontrar as reações da viga original utilizando as equações de compatibilidade:

Resolvendo o sistema de equações de compatibilidade tem-se que **Ma** vale **-23,62 kN.m**, ou seja, **23,62 kN.m** no sentido contrário ao sentido adotado para o cálculo, e **Vb** vale **35,44 kN** no mesmo sentido adotado para o cálculo.

Agora resta apenas encontrar os valores das reações **Va**, **Ha** e **Vc**, que podem ser encontradas utilizando as três equações de equilíbrio, fazendo isso obtém-se os valores das reações restantes, sendo **Va** igual a **22,31 kN**, **Ha** igual a **15 kN** e **Vc** igual a **5,25 kN**, como é possível observar na Figura 34.

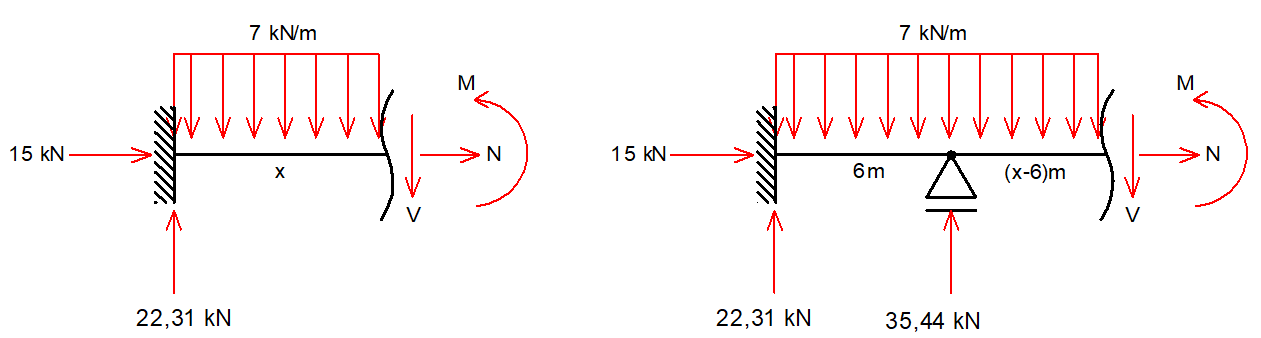
Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Depois de encontradas as reações nos apoios, os esforços internos para os segmentos entre 0 e 6 metros e entre 6 e 0 metros podem ser encontrados por meio do método das seções, como mostra a Figura 35.

Figura



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023

Finalmente, resolvendo-se as equações de equilíbrio, tem-se que, para o segmento de 0 a 6 metros:

E para o segmento de 6 a 9 metros:

Vale ressaltar que para a viga em questão, que possui grau de hiperestaticidade igual a 2, foi necessário trabalhar com três sistemas isostáticos e resolver o sistema com duas equações de compatibilidade, no entanto, conforme aumenta-se o grau de hiperestaticidade o número de sistemas isostáticos e equações de compatibilidade aumentam proporcionalmente, onde o número de sistemas isostáticos é igual ao grau de hiperestaticidade mais um, e o número de equações de compatipilidade é igual ao grau de hiperestaticidade (Luiz Fernando Martha), o que torna os cálculos de sistemas hiperestáticos com altos graus de hiperestaticidade muito mais trabalhosos.

## A linguagem de programação C#

C# é uma linguagem de programação desenvolvida pela Microsoft de tipagem forte e orientada a objetos, sendo uma linguagem com origem em linguagens derivadas de C, além disso a linguagem permite a criação de softwares executados no .NET.

Por ser fortemente tipada, os tipos de variáveis, parâmetros, e valores retornados de funções, que em C# são chamadas de “métodos”, têm seus tipos de dados especificados no código (John Skeet), o que oferece diversas vantagens, como a segurança de tipo, que evita erros de tipagem, como somar um número inteiro com um caractere de texto, por exemplo, oferecem melhor legibilidade e manutenção, já que permite que o programador saiba qual é o tipo de dado que está lidando, além de apresentar um melhor desempenho, já que não há uma sobrecarga de verificação dinâmica em tempo de execução, como ocorre em linguagens de tipagem dinâmica, como Python e JavaScript, por exemplo.

Como C# é uma linguagem orientada a objetos, é possível criar tipos de dados personalizados e definir seus comportamentos e atributos (Microsoft), um exemplo disto é a criação de um tipo de dados para as Vigas, onde é possível definir seus atributos, como comprimento, esforços internos e também seus comportamentos, como a sua aparência gráfica na interface e o modo quem que ela deve ter seus esforços internos calculados.

Por estes motivos a linguagem C# é excelente para o desenvolvimento de softwares que envolve uma maior complexidade, já que possibilita uma fácil identificação de erros, mais eficiência na execução e a criação de tipos de dados mais complexos.

### A plataforma .NET (dot NET)

O .Net, ou “dot NET”, é uma plataforma de desenvolvimento desenvolvida pela Microsoft, de código aberto, ou seja, tem seu código fonte disponibilizado de forma pública, e que permite a criação de diferentes tipos de aplicações, como desktop (aplicações para o sistema operacional), WEB, jogos, Internet das Coisas e dispositivos móveis.

O .Net permite que qualquer aplicação escrita nas linguagens C#, F# ou Visual Basic sejam executadas de forma nativa em sistemas operacionais compatíveis (Microsoft).

### Windows Forms

O Windows Forms é uma plataforma de desenvolvimento, parte da .NET, que dá suporte à criação de interfaces de usuário para aplicativos de área de trabalho (Desktop) e traz um conjunto de bibliotecas que facilitam a criação de formulários, como controles de formulário, tarefas de salvar e carregar arquivos externos e ferramentas para design de formulários.

A plataforma permite também a customização dos controles de formulário, permitindo a inclusão de imagens externas, além de permitir a inclusão de elementos gráficos, como linhas e círculos, por meio do GDI+, uma parte do sistema operacional do Microsoft que permite a criação de gráficos bidimensionais de vetores, imagens e texto. Com estas tecnologias é possível criar aplicativos para área de trabalhos (Desktop) modernas, amigáveis e interativas utilizando a linguagem C# (Microsoft).

## Orientação a objetos

Como já mencionado no capítulo anterior o C# é uma linguagem de programação orientada a objetos. A orientação a objetos é um paradigma de programação que tem sua organização pautada em unidades chamadas de objetos. Conceitualmente os objetos são instâncias de classes, entidades que encapsulam informações acerca dos objetos e de que forma eles serão manipulados, como atributos, propriedades e métodos (funções definidas internamente às classes) (Ivan Luiz Marques Ricarte).

Este paradigma possibilita a criação de tipos de objetos (classes), a proteção dos atributos e funcionalidades internas do objeto (encapsulamento), a reutilização de código (herança) e a definição das funcionalidades de cada objeto durante a execução do aplicativo (polimorfismo). Estas características são consideradas os três pilares da orientação a objetos (Thiago Leite e Carvalho).

### Encapsulamento

O encapsulamento é a premissa de que cada objeto deve manter oculta toda a informação utilizada para sua manipulação, de modo que apenas o mínimo necessário para a sua utilização seja acessado por outros componentes. Com o encapsulamento, é possível que o usuário possa manipular o objeto sem preocupar-se com lógicas e detalhes internos, trabalhando a um “nível mais alto de abstração” (Ivan Luiz Marques Ricarte), o que simplifica o processo de programação e desenvolvimento dos aplicativos.

Um exemplo deste conceito é a definição de uma classe que representa uma viga, e todo o processo de cálculo para a obtenção de seus esforços internos seja ocultada em um determinado método (função definida internamente à classe). Deste modo, é possível instanciar vários objetos do tipo “viga” e fazê-las calcular seus próprios esforços internos apenas executando o método em questão para cada uma delas, sem precisar se preocupar com a lógica interna de cálculo.

### Herança

A herança é um poderoso mecanismo das linguagens orientadas a objetos pois permite o reuso do código, ela permite que métodos e atributos definidos em uma classe sejam reutilizados em outras classes, neste relacionamento as classes das quais o código é herdado são chamadas de superclasses (ou classes mães) e as classes que herdam o código são chamadas de subclasses (ou classes filhas).

As subclasses que estendem as superclasses herdam todas as características, métodos, propriedades e atributos definidos nas classes “mães”, possibilitando a reutilização de código, e também podem sobrescrever as características se necessário, além de definir características adicionais, o que faz com que as classes “filhas” sejam mais específicas que as classes “mães” (Ivan Luiz Marques Ricarte).

Um exemplo deste mecanismo é a criação de uma classe que representa uma estrutura linear discretizada, apelidada de “LinearStructure”, que define um método que calcula a equação de reta da estrutura. Se forem criadas duas classes, uma representando um pilar, apelidada de “Column”, e outra representando uma viga, apelidada de “Beam”, e estas classes estenderem a classe “LinearStructure”, as duas classes filhas também herdarão a lógica de cálculo de suas equações de reta, eliminando a necessidade de que a lógica seja implementada novamente para cada uma das duas classes.

### Polimorfismo

O polimorfismo é uma característica da orientação a objetos que permite que uma subclasse possa invocar métodos definidos em uma superclasse mas com um comportamento diferente, ou seja, que os métodos definidos na classe mãe possam ser sobrescritos nas classes filhas, de modo que estas apresentem características únicas especificas para as classes (Ivan Luiz Marques Ricarte).

Um exemplo deste mecanismo é a criação de uma superclasse que define um apoio genérico e possui um método que executará um código que fará a representação gráfica do apoio na interface de usuário, onde serão criadas três classes que representarão os três tipos de apoio abordados no capítulo 3.1, os apoios fixos, móveis e engaste, que herdarão da superclasse.

Naturalmente estas classes filhas herdarão o método que desenha os apoios, no entanto é possível sobrescrever este método para cada uma das classes herdadas, de modo que cada uma desenhe na interface a representação gráfica correspondente ao seu tipo de apoio. Deste modo, ao executar o mesmo método em uma iteração pelos apoios instanciados a partir das classes filhas, cada um dos objetos será desenhado na interface com sua própria representação gráfica de apoio.

# Metodologia

A pesquisa utilizada neste trabalho tem objetivo exploratório, já que propõe o desenvolvimento de um novo software, com recursos inovadores, onde serão exploradas novas maneiras de atingir os objetivos, além de sugerir novas maneiras de melhorar o processo de aprendizagem dos estudantes de engenharia civil, o que alinha a pesquisa com o objetivo exploratório.

Ela também pode ser classificada como uma pesquisa de abordagem quantitativa, já que o software a ser desenvolvido manipulará valores numéricos, executará cálculos e gerará resultados quantitativos, para isso também foi necessário realizar um levantamento bibliográfico dotado majoritariamente de elementos quantitativos, como métodos de cálculo de esforços e deformações.

# Referências (Provisório - links dos sites – Nomes dos livros)

<https://learn.microsoft.com/pt-br/dotnet/csharp/tour-of-csharp/>

Orientação a Objetos - Thiago Leite e Carvalho

C# in depth - John Skeet.

Programação Orientada a Objetos – Uma abordagem com Java – Ivan Luiz Marques Ricarte.

Análise das Estruturas - R. C. Hibbeler

Introdução à análise de estruturas - Luiz Fernando Martha

Mecânica Técnica e Resistência dos Materiais - Sarkis Melconian

Resistência dos Materiais - V. Feodosiev

Resistência dos Materiais para entender e gostar - M. H. C. Botelho

Resistência dos Materiais R. C. Hibbeler

Resitência dos Materiais - Luiz Eduardo Miranda