

# Análise de séries temporais pelo método de Holt-Winters em comparação com os modelos de Box-Jenkins

Trabalho de conclusão de curso

por

Bruno de Carvalho Souza

e

Pedro Soares Figueiredo



UFRJ

Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza  
Instituto de Matemática  
Departamento de Métodos Estatísticos

# Análise de séries temporais pelo método de Holt-Winters em comparação com os modelos de Box-Jenkins

Bruno de Carvalho Souza e Pedro Soares Figueiredo

Projeto Final de Conclusão de Curso submetido ao Departamento de Métodos Estatísticos do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários para a obtenção dos títulos de Atuário e Estatístico.

Aprovada por:

---

Prof<sup>a</sup>. Kelly Cristina M. Gonçalves  
PhD - UFRJ - Orientadora.

---

Prof. João Batista de Moraes Pereira  
PhD - UFRJ.

---

Prof<sup>a</sup>. Marina Silva Paez  
PhD - UFRJ.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil  
2021

# Agradecimentos

Bruno: À minha família, que me proporcionou apoio e incentivo no caminho que trilhei, aos diversos grupos da faculdade que me auxiliaram com as disciplinas e me ajudaram a criar ótimas memórias durante a jornada universitária, à SulAmérica que despertou em mim dúvidas e desafios que eu sabia que conseguiria resolver através dos estudos e aos professores que, através de suas aulas, conseguiram transmitir empatia e tornar a sala de aula um ambiente de acolhimento para que os alunos estivessem dispostos a aprender e retribuir o conhecimento que lhes foi passado.

Pedro: Aos meus pais, que garantiram sempre a minha educação, dando todo o suporte e apoio nas minhas decisões. À minha orientadora Kelly Cristina, que me deu a oportunidade na Iniciação Científica de criar um pacote em R, [BayesSampling](#), que me abriu tantas portas e hoje é o meu maior orgulho. Aos meus amigos, da UFRJ e da vida, que foram essenciais na minha graduação, se mantendo sempre por perto, e à todos os professores que me guiaram e inspiraram nessa etapa.

Por fim, gostaríamos de fazer um agradecimento especial aos professores João Batista e Marina Silva por aceitarem fazer parte da banca, e aos grupos da faculdade “Pupodos”, “Chegamos” e “Conselho” por fazerem parte do nosso dia-a-dia.

# Resumo

Este trabalho tem seu olhar direcionado para os resultados obtidos ao trabalhar com ajuste, aderência e previsões de séries históricas, sem a utilização de covariáveis, e a partir de técnicas frequentistas. A motivação para este tema reside nos desafios diários de atuários que trabalham com modelagem de dados futuros, e necessitam de diferentes métricas para que consigam atingir bons resultados. Serão visitados alguns conceitos da modelagem de séries temporais por *Box-Jenkins* e será introduzido e estudado um outro método de ajuste e previsão de séries, o *Holt-Winters*. Com pensamentos críticos a respeito dos objetos que serão estudados, e desenvolvendo diferentes critérios de análise, a partir dos resultados obtidos torna-se possível a comparação do *Holt-Winters* com o *Box-Jenkins*, para averiguar sua viabilidade como outra opção de modelo de previsão de séries históricas.

*Palavras-chaves:* séries temporais, *Box-Jenkins*, *Holt-Winters*, suavização exponencial

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Box-Jenkins</b>	<b>2</b>
2.1	Composição do Modelo . . . . .	2
2.2	Função <i>Arima</i> do <i>R</i> . . . . .	4
2.3	Previsão . . . . .	5
2.4	Intervalo de Confiança . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Holt-Winters</b>	<b>8</b>
3.1	Modelos . . . . .	8
3.1.1	Média Móvel Exponencial (MME) . . . . .	8
3.1.2	Sazonalidade Multiplicativa . . . . .	9
3.1.3	Tendência Multiplicativa . . . . .	10
3.1.4	Tendência e Sazonalidade Multiplicativas . . . . .	11
3.1.5	Tendência e Sazonalidade Aditivas . . . . .	12
3.1.6	Tendência Aditiva e Sazonalidade Multiplicativa . . . . .	13
3.2	Intervalos de Confiança . . . . .	14
3.3	Função <i>HoltWinters</i> do <i>R</i> . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Efeito dos Parâmetros de Holt-Winters</b>	<b>17</b>
4.1	Dados: Mortes por Acidentes de Trânsito no Reino Unido . . . . .	17
4.1.1	Modelos ajustados . . . . .	18
4.1.2	Resultados . . . . .	19
4.2	Dados: Mortes por Acidentes nos E.U.A. . . . .	26
4.2.1	Modelo . . . . .	27
4.2.2	Resultados . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Avaliação da previsão em bases de dados</b>	<b>30</b>
5.1	Modelo SARIMA . . . . .	30
5.1.1	Definição das Ordens . . . . .	30
5.1.2	Definição dos Coeficientes . . . . .	34
5.2	Modelo Holt-Winters . . . . .	35
5.3	Resultados . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>40</b>

# Lista de Figuras

4.1	Número de motoristas que sofreram acidentes de trânsito graves entre 1969 e 1984. . . . .	18
4.2	Número de motoristas que sofreram acidente grave de Janeiro a Dezembro de 1984. Previsão pontual em tracejado, e previsão intervalar com 95% de confiança em pontilhado. . . . .	19
4.3	Efeito do parâmetro $\alpha$ na previsão do número mensal de motoristas que sofreram acidente grave de Janeiro a Dezembro de 1984. . . . .	20
4.4	Efeito do parâmetro $\alpha$ na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de acidentes. A linha vertical marca $\alpha = 0,08$ . . . . .	21
4.5	Efeito do parâmetro $\beta$ na previsão do número mensal de motoristas que sofreram acidente grave de Janeiro a Dezembro de 1984. . . . .	22
4.6	Efeito do parâmetro $\beta$ na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de acidentes. A linha vertical marca $\beta = 0,01$ . . . . .	23
4.7	Efeito do parâmetro $\gamma$ na previsão do número mensal de motoristas que sofreram acidente grave de Janeiro a Dezembro de 1984. . . . .	24
4.8	Efeito do parâmetro $\gamma$ na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de acidentes. A linha vertical marca $\gamma = 0,26$ . . . . .	25
4.9	Efeito dos parâmetros na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de acidentes. . . . .	26
4.10	Número de mortes acidentais entre 1973 e 1978. . . . .	27
4.11	Previsão mensal do número de mortes acidentais de Janeiro de 1977 a Dezembro de 1978. . . . .	28
4.12	Efeito dos parâmetros na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de mortes. . . . .	29
5.1	Gráficos da série de mortes acidentais sem diferenciação . . . . .	31
5.2	Gráficos da série de mortes acidentais com uma diferenciação . . . . .	32
5.3	Gráficos da série de mortes acidentais com duas diferenciações . . . . .	33
5.4	Previsão de mortes acidentais a partir do modelo de Box-Jenkins. . . . .	34
5.5	Normal Q-Q Plot: Resíduos do ajuste por Box-Jenkins . . . . .	35
5.6	Previsão de mortes acidentais, de Janeiro de 1977 a Dezembro de 1978, a partir do modelo de Holt-Winters. . . . .	36
5.7	Normal Q-Q Plot: Resíduos do ajuste por Holt-Winters . . . . .	37
5.8	Comparação da previsão dos modelos ajustados . . . . .	38
5.9	Previsões de mortes acidentais de cada modelo, com seus intervalos de confiança. . . . .	39

# Capítulo 1

## Introdução

Ao lidar com previsão para dados atuariais, algumas dificuldades podem surgir, como um provisionamento de reservas descolado, ou a previsão de perdas futuras. Em algumas situações, os recursos que se encontram à disposição não são satisfatórios e é preciso ir além, utilizar novas ferramentas de análise, e até outras metodologias para atingir os resultados necessários. Sendo assim, este trabalho visa apresentar dois possíveis métodos usados no ajuste e previsão de séries temporais. O primeiro trata-se de um método mais comum, enquanto o outro pode servir como uma complementação, com o intuito de permitir novas aplicações no mercado de seguros.

O objetivo, portanto, é realizar uma comparação prática entre os modelos SARIMA de Box-Jenkins e o método de suavização exponencial de Holt-Winters, como feito por [Markovska et al. \(2016\)](#) para dados de consumo de energia, mas trazendo para a área atuarial, modelando dados de acidentes e mortes. A pretensão, no entanto, não é definir se um modelo é melhor ou pior que o outro, até porque ambos são apenas tentativas de explicar uma realidade muito mais complexa que eles próprios. A proposta deste trabalho é, então, averiguar a validade do modelo de Holt-Winters, visto que é mais simples de ser implementado, e comparar sua aplicação e suas previsões futuras àquelas geradas pelos modelos SARIMA.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 é feita uma revisão dos modelos de Box-Jenkins, conforme apresentado em [Morettin e Toloi \(2004\)](#); o Capítulo 3 traz a apresentação do método de suavização exponencial conforme proposto por [Holt \(1957\)](#) e [Winters \(1960\)](#), mostrando as formulações completas e explicando suas aplicações em séries temporais; os Capítulos 4 e 5 contêm aplicações práticas dos modelos estudados, com dados reais disponíveis no *software R*, [R Core Team \(2020\)](#), primeiro tratando do efeito de cada parâmetro nos ajustes de Holt-Winters, e depois comparando os seus resultados na previsão de dados futuros, em comparação com aqueles obtidos através da aplicação dos modelos SARIMA. Finalmente, no Capítulo 6 serão apresentadas as conclusões que obtivemos com esse trabalho.

Todas as análises apresentadas neste trabalho foram construídas no software estatístico *R*, utilizado globalmente por estudantes e profissionais de áreas diversas. Os códigos utilizados estão disponíveis no [GitHub](https://github.com/pedrosfig/TCC)(<https://github.com/pedrosfig/TCC>).

# Capítulo 2

## Box-Jenkins

Uma série temporal é um conjunto de dados ordenadas no tempo, como a variação da inflação, valor de vendas no mês, PIB anual, entre outros. Diferente de uma regressão, a ordem que os dados estão distribuídos é de extrema relevância para a sua análise. A partir dela, podemos compreender seu comportamento, definir se possui periodicidade, dependência com termos anteriores e até mesmo realizar previsões.

O método de séries temporais de Box-Jenkins consiste no ajuste/previsão de uma série temporal estacionária (de primeira ou segunda ordem) a partir de seus valores presentes e passados, por meio de três principais parcelas: a parcela auto-regressiva, a de médias móveis e diferenciação. É possível também adicionar nesse processo um segmento para sazonalidade.

### 2.1 Composição do Modelo

O modelo de Box-Jenkins composto por uma série auto-regressiva (AR( $p$ )) parte da ideia de que é possível definir as observações presentes como uma função de  $p$  observações passadas, somadas a um erro aleatório.

Seja  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  um série temporal estacionária, podemos definir o  $t$ -ésimo elemento desse modelo da seguinte forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + r_t, \quad (2.1)$$

onde  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  são parâmetros reais de estrutura e  $r_t$  é um erro aleatório, independente e identicamente distribuído (i.i.d.), com média  $\mu_r = 0$  e variância  $\sigma_r^2$ . Algumas propriedades do modelo, como média e variância, serão visitadas mais a frente, na Seção 2.3. A seleção de observações passadas ( $p$ ) a ser utilizada nesse modelo, e para todos os demais introduzidos, será desenvolvida no Capítulo 5.

Já o modelo de Box-Jenkins composto por uma série de médias móveis (MA( $q$ )) parte da ideia que é possível definir as observações presentes como uma função de  $q$  erros aleatórios anteriores.

Podemos definir o  $t$ -ésimo elemento desse modelo da seguinte forma:

$$Z_t = r_t - \theta_1 r_{t-1} - \theta_2 r_{t-2} - \dots - \theta_q r_{t-q}, \quad (2.2)$$



onde  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  são parâmetros reais de estrutura e  $r_t$  é i.i.d., com média  $\mu_r = 0$  e variância  $\sigma_r^2$ .

Quando o modelo é oriundo da combinação de um  $\text{AR}(p)$  e um  $\text{MA}(q)$ , temos um  $\text{ARMA}(p, q)$ . Podemos então definir o  $t$ -ésimo elemento a partir das Equações (2.1) e (2.2):

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + r_t - \theta_1 r_{t-1} - \theta_2 r_{t-2} - \dots - \theta_q r_{t-q}. \quad (2.3)$$

Uma forma de simplificar a escrita dos modelos é com o operador de defasagem  $B$ , que nos permite escrever as equações dos modelos, como em (2.3), de forma resumida, podendo ser aplicado a  $Z_t$  e  $r_t$  como forma de indicar a  $t$ -ésima observação da variável em questão, subtraída de alguns termos defasados. Ele também está associado ao vetor  $\phi$  e  $\theta$ , de forma que o número de termos defasados será igual a  $p$  para a parcela auto-regressiva, e a  $q$ , quando associado a  $\theta$ .

Então, para um modelo  $\text{AR}(p)$ , temos:

$$\begin{aligned} \phi(B)Z_t &= \phi(1 - B - B^2 - \dots - B^p)Z_t \\ &= \phi(Z_{t-1} - Z_{t-2} - \dots - Z_{t-p}) \\ &= Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = r_t. \end{aligned}$$

Para um modelo  $\text{MA}(q)$ , de forma análoga:

$$\begin{aligned} Z_t &= \theta(B)r_t \\ &= \theta(1 - B - B^2 - \dots - B^q)r_t \\ &= \theta(r_{t-1} - r_{t-2} - \dots - r_{t-q}) \\ &= r_t - \theta_1 r_{t-1} - \theta_2 r_{t-2} - \dots - \theta_q r_{t-q}. \end{aligned}$$

E para um modelo  $\text{ARMA}(p, q)$ , analogamente, resultaria em:

$$\phi(B)Z_t = \theta(B)r_t,$$

ou então:

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \dots - \phi_p Z_{t-p} = r_t - \theta_1 r_{t-1} - \theta_2 r_{t-2} - \dots - \theta_q r_{t-q}.$$

Entretanto, para poder ajustar um modelo de Box-Jenkins, é necessário que a série temporal seja pelo menos estacionária de segunda ordem, ou seja:

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E(Z_{t-i}) = \mu, \quad 0 < i < t \in \mathbb{N}; \\ \text{Var}(Z_t) &= E(Z_{t-i} - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty, \quad 0 < i < t \in \mathbb{N}; \\ \text{Cov}(Z_t, Z_{t+h}) &= \gamma(t, t+h) = \gamma(t+h-t) = \gamma(h), \quad h \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Quando a série não é estacionária, uma das manipulações que pode ser feita com os dados para que se tornem estacionários é tomar a diferença entre duas observações consecutivas, o quanto for necessário, a fim de atingir a estacionariedade.

Podemos definir o  $t$ -ésimo elemento de um modelo com diferenciação (ARIMA( $p,d,q$ )) da seguinte forma:

$$\phi(B)\nabla^d Z_t = \theta(B)r_t,$$

onde  $\nabla$  é operador de diferença, tal que  $\nabla = 1 - B$ , e  $d$  é o número de diferenciações realizadas, então  $\nabla^d = (1 - B)^d$ .

Por fim, quando o modelo ARIMA não é suficiente para capturar o comportamento dos dados, devido a uma possível sazonalidade, ou comportamento cíclico da série, é possível utilizar o modelo SARIMA( $p,d,q$ )( $P,D,Q$ ), ou Seasonal ARIMA, que nada mais é do que um ARIMA( $p,d,q$ ), com a adição de um conjunto sazonal. Dessa forma, o modelo também pode levar em consideração observações e erros aleatórios mais antigos, como demonstrado em (2.4):

$$\Phi(S)\phi(B)\nabla^D\nabla^d Z_t = \Theta(S)\theta(B)r_t, \quad (2.4)$$

onde  $\Phi_{1x1}$ ,  $\Theta_{1x1}$  e  $D_{1x1}$  são as ordens das parcelas Auto-Regressiva, de Médias Móveis e Diferenciação, para a parte sazonal.

Assim, podemos escrever um modelo SARIMA(1,0,1)(1,0,1)<sub>12</sub>, da seguinte forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \Phi_1 Z_{t-12} - \theta_1 r_{t-1} - \Theta_1 r_{t-12} + r_t. \quad (2.5)$$

## 2.2 Função *Arima* do *R*

O ARIMA pode ser implementado no *R* (R Core Team, 2020) através da função *Arima*, onde os coeficientes das parcelas de Médias Móveis e Auto-Regressivas (sazonais e não sazonais) são determinados pelo método de Mínimos Quadrados, a menos que especificados pelo usuário. Entretanto, possui a limitação de que as ordens das parcelas necessitam ser especificadas pelo usuário.

No pacote *forecast*, por (Hyndman et al., 2020), temos também a função *Auto.Arima*, que utiliza o método stepwise, e funções como *Akaike Information Criterion* (AIC) e *Bayesian Information Criterion* (BIC), para definir quais serão as ordens das parcelas do modelo. As funções AIC e BIC derivam do log da função de máxima verossimilhança, e seus valores aumentam conforme aumenta a soma do quadrado dos erros do modelo ajustado. Dessa forma, são escolhidas as ordens do modelo que resultarem nos menores AIC e BIC.

Neste trabalho, definiremos as ordens dos modelos ARIMA analisando as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial da série, e então selecionaremos o melhor ajuste, analisando os seguintes critérios de seleção de modelos: AIC, BIC, Erro Quadrático Médio (EQM), raiz do Erro Quadrático Médio Relativo (raiz do EQMR) e Erro Absoluto Médio (EAM).

## 2.3 Previsão

Uma vez que temos um modelo ajustado, pode ser de interesse obter previsões de observações futuras. Dada uma série temporal  $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ , podemos denotar sua previsão  $h$  passos a frente, da seguinte forma:

$$\hat{Z}_t(h) = E(Z_{t+h} | \underline{Z}, M),$$

onde  $\underline{Z}$  é o vetor com as observações até o tempo  $t$ , e  $M$  é o modelo ajustado em questão.

Vale lembrar que até o tempo  $t$ , quando condicionados a  $\underline{Z}$  e ao modelo,  $Z_t$  e  $r_t$  são conhecidas, dados que são valores observados. A partir de  $t + 1$  passam a ser variáveis aleatórias, e  $E[r_{t+i}]$  para  $i = 1, 2, \dots$  é igual a zero. A partir de agora iremos omitir  $M$ , denotando a esperança condicional apenas em  $\underline{Z}$ .

Alguns exemplos são:

### • AR(1)

Um modelo AR(1) pode ser escrito da forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + r_t.$$

Quando aplicamos a esperança condicional para prever  $Z_{t+1}$ , temos:

$$\hat{Z}_{t+1} = E[\phi_1 Z_t + r_{t+1} | \underline{Z}] = E[\phi_1 Z_t | \underline{Z}] + E[r_{t+1} | \underline{Z}] = \phi_1 Z_t.$$

Para estimar  $Z_{t+2}$  temos:

$$\hat{Z}_{t+2} = E[\phi_1 Z_{t+1} + r_{t+2} | \underline{Z}] = E[\phi_1 Z_{t+1} | \underline{Z}] + E[r_{t+2} | \underline{Z}] = \phi_1 \times (\phi_1 Z_t).$$

A partir daí, observa-se uma lei de formação para as previsões do AR(1), do tipo:

$$\hat{Z}_{t+h} = \phi_1^h \times Z_t.$$

### • MA(1)

Um modelo MA(1) pode ser escrito da forma:

$$Z_t = r_t - \theta_1 r_{t-1}.$$

Quando aplicamos a esperança condicional para estimar  $Z_{t+1}$ , temos:

$$\hat{Z}_{t+1} = E[r_{t+1} - \theta_1 r_t | \underline{Z}] = E[r_{t+1} | \underline{Z}] - E[\theta_1 r_t | \underline{Z}] = -\theta_1 r_t.$$

Para estimar  $Z_{t+2}$  temos:

$$\hat{Z}_{t+2} = E[r_{t+2} - \phi_1 r_{t+1} | \underline{Z}] = E[r_{t+2} | \underline{Z}] - E[\phi_1 r_{t+1} | \underline{Z}] = 0.$$

Como  $E[r_{t+h}] = 0$  para  $h > 0$ , então a partir de  $h=2$  temos:

$$\hat{Z}_{t+h} = 0.$$

## • ARMA(1,1)

Um modelo ARMA(1,1) pode ser escrito da forma:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} - \theta_1 r_{t-1} + r_t.$$

Quando aplicamos a esperança condicional para estimar  $Z_{t+1}$ , temos:

$$\hat{Z}_{t+1} = E[\phi_1 Z_t - \theta_1 r_t + r_{t+1} | \underline{Z}] = \phi_1 Z_t - \theta_1 r_t.$$

Para estimar  $Z_{t+2}$  temos:

$$\hat{Z}_{t+2} = E[\phi_1 Z_{t+1} - \theta_1 r_{t+1} + r_{t+2} | \underline{Z}] = \phi_1 \times (\phi_1 Z_t - \theta_1 r_t).$$

Sendo assim, temos uma lei de formação para as previsões do ARMA(1,1) do tipo:

$$\hat{Z}_{t+h} = \phi_1^{h-1} \times (\phi_1 Z_t - \theta_1 r_t) \quad \forall h > 1.$$

## 2.4 Intervalo de Confiança

Para definir um intervalo de confiança para o modelo, iremos assumir uma premissa muito comum, que é a normalidade dos erros de previsão (o que pode ser verificado através de auxílios gráficos, como o *qq-plot*, ou testes estatísticos como *Kolmogorov-Smirnov*), e precisaremos calcular sua média e variância.

Para tal, denotaremos o modelo de Box-Jenkins pela forma de *Choques Aleatórios* onde, através de um filtro linear  $\Psi$  (com  $\psi_0 = 1$ ), podemos escrever o modelo apenas em função dos erros aleatórios  $r_t$ . Este filtro é calculado em função dos parâmetros  $\phi$  e  $\theta$  e é diretamente proporcional a eles, como mostrado em (Morettin e Tolo, 2004).

Através de choques aleatórios então, podemos definir  $Z_{t+h}$  como:

$$Z_{t+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j r_{t+h-j} = r_{t+h} + \psi_1 r_{t+h-1} + \psi_2 r_{t+h-2} + \dots$$

Sabemos que se  $\hat{Z}_{t+h} = E[Z_{t+h} | \underline{Z}]$ , então :

$$\begin{aligned} \hat{Z}_{t+h} &= E[Z_{t+h} | \underline{Z}] = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j r_{t+h-j} | \underline{Z}\right] \\ &= \psi_h r_t + \psi_{h+1} r_{t-1} + \psi_{h+2} r_{t-2} + \dots = \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j r_{t+h-j}, \end{aligned}$$

dado que para  $h > 0$ ,  $E[r_{t+h} | \underline{Z}] = 0$ .

E então obtemos que:

$$\begin{aligned} e_t(h) &= Z_t(h) - \hat{Z}_{t+h} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j r_{t+h-j} - \sum_{j=h}^{\infty} \psi_j r_{t+h-j} \\ &= r_{t+h} + \psi_1 r_{t+h-1} + \psi_2 r_{t+h-2} + \dots + \psi_{h-1} r_{t+1}. \end{aligned}$$

Sendo assim, a esperança do erro é dada por:

$$\begin{aligned} E[e_t(h)|\underline{Z}] &= E[r_{t+h} + \psi_1 r_{t+h-1} + \psi_2 r_{t+h-2} + \cdots + \psi_{h-1} r_{t+1} | \underline{Z}] \\ &= E[r_{t+h} | \underline{Z}] + \psi_1 E[r_{t+h-1} | \underline{Z}] + \psi_2 E[r_{t+h-2} | \underline{Z}] + \cdots + \psi_{h-1} E[r_{t+1} | \underline{Z}] \\ &= 0 \times (1 + \psi_1 + \psi_2 + \cdots + \psi_{h-1}) = 0. \end{aligned}$$

Já a variância dos erros é dada por:

$$\begin{aligned} V[e_t(h)|\underline{Z}] &= V[r_{t+h} + \psi_1 r_{t+h-1} + \psi_2 r_{t+h-2} + \cdots + \psi_{h-1} r_{t+1} | \underline{Z}] \\ &= V[r_{t+h} | \underline{Z}] + \psi_1^2 V[r_{t+h-1} | \underline{Z}] + \psi_2^2 V[r_{t+h-2} | \underline{Z}] + \cdots + \psi_{h-1}^2 V[r_{t+1} | \underline{Z}] \\ &= \sigma_r^2 \times (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \cdots + \psi_{h-1}^2) = \sum_{j=0}^{h-1} \sigma_r^2 \times \psi_j^2. \end{aligned}$$

Agora que temos esperança e variância do erro, e assumimos normalidade, podemos construir um Intervalo de Confiança. Para obter os limites deste intervalo com  $(1 - \alpha)$  de confiança, basta usar que:

$$P \left( z_{\alpha/2} < \frac{e_t(h) - E(e_t(h))}{\sqrt{Var(e_t(h))}} < z_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha.$$

Sabemos que os erros do modelo tem média zero, dessa forma:

$$P \left( z_{\alpha/2} < \frac{e_t(h)}{\sqrt{Var(e_t(h))}} < z_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha,$$

onde  $z_{\alpha/2}$  é o quantil da distribuição normal padrão que deixa  $\alpha/2$  de probabilidade abaixo dele.

Como  $e_t(h) = Z_{t+h} - \hat{Z}_t(h)$ , então:

$$P \left( z_{\alpha/2} < \frac{Z_{t+h} - \hat{Z}_t(h)}{\sqrt{Var(e_t(h))}} < z_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha.$$

Como o intervalo é simétrico, obtemos que:

$$P \left( -z_{1-\alpha/2} \times \sqrt{Var(e_t(h))} + \hat{Z}_t(h) < Z_{t+h} < z_{1-\alpha/2} \times \sqrt{Var(e_t(h))} + \hat{Z}_t(h) \right) = 1 - \alpha.$$

Portanto, o intervalo de confiança de  $(1 - \alpha)$  para  $Z_{t+h}$  é dado por:

$$\left( \hat{Z}_t(h) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(e_t(h))}, \hat{Z}_t(h) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(e_t(h))} \right).$$

# Capítulo 3

## Holt-Winters

O método de Holt-Winters utiliza as médias móveis exponenciais para prever séries sem tendência, com tendência aditiva ou ainda com tendência multiplicativa, além de permitir considerar casos sem sazonalidade e com sazonalidade aditiva e multiplicativa também.

Primeiro abordaremos a própria Média Móvel Exponencial, como ponto de partida para as estimações finais por Holt-Winters.

### 3.1 Modelos

#### 3.1.1 Média Móvel Exponencial (MME)

A MME consiste em uma média ponderada, onde o peso de cada observação decai exponencialmente com o tempo, dando mais relevância para informações mais recentes do que para as mais antigas.

Consideremos o problema de prever o valor esperado de uma variável aleatória cuja média varia com o tempo. Uma solução plausível seria calcular uma média ponderada de observações passadas e usá-la como estimativa da média atual da seguinte forma:

$$\bar{X}_t = \alpha[X_t + (1 - \alpha)X_{t-1} + (1 - \alpha)^2X_{t-2} + (1 - \alpha)^3X_{t-3} + \dots]. \quad (3.1)$$

Para que (3.1) seja de fato uma média ponderada, precisamos que a soma dos pesos seja igual a 1. Neste caso, basta verificar que a soma infinita da P.G. iniciando em  $\alpha$  e com fator igual a  $(1 - \alpha)$  é  $\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1$ .

Com isso, a cada nova observação, a atualização da média fica simplesmente:

$$\bar{X}_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\bar{X}_{t-1}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (3.2)$$

Se a média da variável que buscamos estimar tende a mudar drasticamente,  $\alpha$  deve ser alto, de forma a tornar as observações passadas menos relevantes. Porém, um  $\alpha$  elevado demais fará com que  $\bar{X}_t$  fique muito dependente de erros aleatórios. Abordaremos a questão da escolha do valor de  $\alpha$  posteriormente.

A seguir são apresentadas as diversas aplicações derivadas da Suavização Exponencial (MME) sugeridas por **Holt** (1957).

### 3.1.2 Sazonalidade Multiplicativa

Seja então  $X_t$  a variável de interesse observada no tempo  $t$  e  $\bar{X}_t$  sua estimativa ajustada para sazonalidade no tempo  $t$  (estimador de  $E(X_t)$ ). Ainda,  $P_t$  = fator de ajuste de sazonalidade para o tempo  $t$  (estimador de  $E[\bar{X}_t]/E[X_t]$ ). Para efeitos de visualização prática consideraremos que a variável  $X_t$  representa o volume de vendas de algum produto ou loja no tempo  $t$ .

A atualização da venda média deverá então considerar a nova observação, ajustada pela sazonalidade, na forma:

$$\bar{X}_t = \alpha X_t P_t + (1 - \alpha) \bar{X}_{t-1}. \quad (3.3)$$

De forma análoga, a atualização da estimativa de sazonalidade será:

$$P_t = \gamma \frac{\bar{X}_t}{X_t} + (1 - \gamma) P_{t-N}, \quad (3.4)$$

onde  $\gamma$  é análogo ao parâmetro  $\alpha$ , determinando o peso exponencial ( $0 < \gamma < 1$ ) a ser aplicado à estimativa do fator de sazonalidade  $P$ ; e  $N$  é o tamanho do período sazonal. No exemplo,  $N = 12$  se olharmos as vendas mês a mês e a sazonalidade for anual.

As Equações (3.3) e (3.4) são claramente interdependentes, porque uma nova observação sempre resultará em uma atualização da média e da sazonalidade. Para resolver podemos aplicar (3.4) em (3.3):

$$\bar{X}_t = \alpha [\gamma \bar{X}_t + (1 - \gamma) P_{t-N} X_t] + (1 - \alpha) \bar{X}_{t-1}. \quad (3.5)$$

Da Equação (3.5) obtemos que:

$$\bar{X}_t = \left[ \frac{\alpha(1 - \gamma)}{1 - \alpha\gamma} \right] X_t P_{t-N} + \left[ \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha\gamma} \right] \bar{X}_{t-1}. \quad (3.6)$$

Com isso temos que a estimativa atual será uma média ponderada entre a estimativa anterior (do tempo  $t - 1$ ) e a nova observação ajustada pela sazonalidade de 1 período atrás.

Podemos também isolar  $P_t$  aplicando (3.6) em (3.4):

$$P_t = \left[ \frac{1 - \gamma}{1 - \alpha\gamma} \right] P_{t-N} + \left[ \frac{\gamma(1 - \alpha)}{1 - \alpha\gamma} \right] \frac{\bar{X}_{t-1}}{X_t}. \quad (3.7)$$

Ou seja, o fator de sazonalidade atual será também uma média ponderada, composta pelo fator de 1 período atrás e pela razão entre a estimativa anterior de vendas e a venda observada atual (nova estimativa de sazonalidade).

Os valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  podem ser escolhidos de forma independente, dependendo da velocidade esperada de mudança na média e do fator de sazonalidade. Valores altos farão com que o modelo se adeque rapidamente após uma alteração nos valores reais, porém o tornarão mais sensível à oscilações aleatórias nos dados. Por outro lado, valores baixos levarão em conta observações mais antigas, necessitando de mais

tempo até que uma mudança real seja refletida na média estimada, ao mesmo tempo que a amostra maior considerada levará a uma estimação mais acurada.

A escolha dos parâmetros será abordada mais adiante, e passará por uma tentativa de diversas combinações de  $\alpha$  e  $\gamma$ , testadas em dados históricos para entender a interação entre estes.

Estimativas para períodos futuros podem ser obtidas a partir da fórmula de extrapolação, assumindo que a média de vendas e os fatores de sazonalidade se manterão:

$$E[X_{t+h}] = \frac{\bar{X}_t}{P_{t+h-N}}, \quad h = 1, 2, \dots, N.$$

Note que as estimativas podem ser estendidas além de  $N$  períodos, basta reutilizar os fatores sazonais  $P_{t+1-N}, \dots, P_t$ , como mostrado por (Holt, 1957).

Podemos observar pela Equação (3.7) que o parâmetro  $P_t$  é ajustado gradualmente pelo fator  $\bar{X}_{t-1}/X_t$ , que é a “nova observação” da razão de sazonalidade. Pelo fato de existir um *lag* de 1 período de tempo entre as duas variáveis em questão, havendo uma tendência de aumento ou redução nas vendas, esta será incorporada automaticamente no ajuste sazonal, o que seria desejável, caso o mesmo não tivesse um ajuste com *lag* de  $N$  períodos.

Com isso, em uma periodicidade anual, por exemplo, obtemos informação sobre Janeiro apenas uma vez por ano, enquanto um efeito de tendência pode ser percebido todo mês. A solução para essa incompatibilidade temporal entre efeito sazonal e efeito de tendência pode ser resolvido com a inclusão de uma variável específica para captar este último.

Vejamos inicialmente a abordagem que contempla apenas a tendência, para depois combinar os fatores em questão.

### 3.1.3 Tendência Multiplicativa

No caso em que seja de interesse, por exemplo, estimar vendas sem propriedades sazonais, mas com uma tendência de crescimento ou decrescimento, as médias móveis exponenciais podem ser aplicadas simplesmente corrigindo a média passada por um fator de tendência ao se fazer a ponderação com uma nova observação, ou seja,

$$\bar{X}_t = \alpha X_t + (1 - \alpha) R_t \bar{X}_{t-1}, \quad (3.8)$$

onde  $R_t$  é o fator de ajuste de tendência no tempo  $t$ , uma estimativa de  $E[\bar{X}_t]/E[\bar{X}_{t-1}]$ .

A correção da estimativa de tendência (após uma nova observação) é feita também de forma exponencial, através do parâmetro  $\beta$ , que controla a velocidade dessa atualização, da seguinte forma:

$$R_t = \beta \frac{\bar{X}_t}{\bar{X}_{t-1}} + (1 - \beta) R_{t-1}. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.8) temos:

$$\bar{X}_t = \left[ \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)\beta} \right] X_t + \left[ \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{1 - (1 - \alpha)\beta} \right] R_{t-1} \bar{X}_{t-1}, \quad (3.10)$$



e aplicando agora (3.10) em (3.9):

$$R_t = \left[ \frac{\alpha\beta}{1 - (1 - \alpha)\beta} \right] \frac{X_t}{\bar{X}_{t-1}} + \left[ \frac{1 - \beta}{1 - (1 - \alpha)\beta} \right] R_{t-1}.$$

O cálculo de estimativas para períodos futuros se dá facilmente através da aplicação contínua do último fator de tendência obtido (assumindo que essa taxa permanecerá constante):

$$E[X_{t+h}] = X_t R_t^h.$$

### 3.1.4 Tendência e Sazonalidade Multiplicativas

Combinando os fatores vistos até então, podemos estimar vendas médias que sofram com padrões de sazonalidade e simultaneamente tendam a crescer ou diminuir com o passar do tempo, de tal forma:

$$\bar{X}_t = \alpha X_t P_t + (1 - \alpha) R_t \bar{X}_{t-1}. \quad (3.11)$$

Os fatores de sazonalidade serão atualizados a cada  $N$  períodos, como ocorria na Equação (3.4), e taxa de tendência é atualizada a cada nova observação como visto na Equação (3.9). Substituindo ambas as equações em (3.11) temos que:

$$\bar{X}_t = \left[ \frac{\alpha(1 - \gamma)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] X_t P_{t-N} + \left[ \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] \bar{X}_{t-1} R_{t-1}.$$

Aplicando agora isto às mesmas Equações (3.4) e (3.9) teremos, respectivamente, as fórmulas de atualização da sazonalidade e da tendência desenvolvidas por (Holt, 1957):

$$P_t = \left[ \frac{[1 - \gamma][1 - (1 - \alpha)\beta]}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] P_{t-N} + \left[ \frac{\gamma(1 - \alpha)(1 - \beta)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] \frac{\bar{X}_{t-1}}{X_t} R_{t-1},$$

$$R_t = \left[ \frac{\alpha\beta(1 - \gamma)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] \frac{X_t P_{t-N}}{\bar{X}_{t-1}} + \left[ \frac{[1 - \beta][1 - \alpha\gamma]}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] R_{t-1}.$$

Note que, apesar da maior complicação gerada pela interação entre os parâmetros de suavização exponencial de cada fator, a ideia por trás das atualizações permanece inalterada. Agora, porém, é necessário ajustar a sazonalidade de acordo com a tendência e vice-versa.

Usando a fórmula de extrapolação a seguir podemos fazer previsões sobre as vendas estimadas para os próximos  $h$  períodos (assumindo sazonalidade e tendência persistentes):

$$E[X_{t+h}] = \frac{\bar{X}_t R_t^h}{P_{t+h-N}}, \quad h = 1, 2, \dots, N.$$

Novamente ressaltamos que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  podem ser escolhidos de forma independente, fato que será abordado experimentalmente mais adiante. Uma alternativa permitida pelo ajuste por médias móveis exponenciais aos fatores multiplicativos (com ajustes proporcionais) são os aditivos (lineares). Ou seja, não assumiremos mais, por exemplo, que a média de vendas seja afetada de forma proporcional por sazonalidade e tendência, mas sim com incrementos ou decrementos constantes, independentes da ordem de grandeza das vendas.

### 3.1.5 Tendência e Sazonalidade Aditivas

Apresentaremos os fatores já sendo aplicados de forma simultânea, mas a ideia pode ser estendida para os casos mais simples contendo apenas tendência ou apenas sazonalidade, assim como no caso multiplicativo.

Como mencionado, agora a atualização da média no tempo  $t$  se dará somando os fatores existentes, ao invés de multiplicá-los, ou seja,

$$\bar{X}_t = \alpha(X_t + P_t) + (1 - \alpha)(\bar{X}_{t-1} + R_t). \quad (3.12)$$

Agora o fator de sazonalidade  $P_t$  pode ser visto como  $E[\bar{X}_t] - E[X_t]$  e será estimado conforme:

$$P_t = \gamma(\bar{X}_t - X_t) + (1 - \gamma)P_{t-N}. \quad (3.13)$$

Analogamente, o fator de tendência  $R_t$  é interpretado como  $E[\bar{X}_t] - E[\bar{X}_{t-1}]$ , e estimado da seguinte forma:

$$R_t = \beta(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) + (1 - \beta)R_{t-1}. \quad (3.14)$$

Substituindo as Equações (3.13) e (3.14) em (3.12) podemos obter a fórmula direta de atualização da estimativa, por exemplo, de vendas:

$$\begin{aligned} \bar{X}_t = & \left[ \frac{\alpha(1 - \gamma)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] [X_t + P_{t-N}] \\ & + \left[ \frac{(1 - \beta)(1 - \alpha)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] [\bar{X}_{t-1} + R_{t-1}]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aplicando esta estimativa (3.15) na atualização da sazonalidade (3.13) temos que:

$$\begin{aligned} P_t = & \left[ \frac{\alpha\gamma(1 - \gamma)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} - \gamma \right] X_t \\ & + \left[ \frac{(1 - \beta)(1 - \alpha)\gamma}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] [\bar{X}_{t-1} + R_{t-1}] \\ & + \left[ \frac{\alpha\gamma(1 - \gamma)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} + (1 - \gamma) \right] P_{t-N}, \end{aligned}$$

e combinando as Equações (3.15) e (3.14) obtemos a atualização da tendência linear, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} R_t = & \left[ \frac{\alpha\beta(1 - \gamma)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] [X_t + P_{t-N}] \\ & + \left[ \frac{(1 - \beta)(1 - \alpha)\beta}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} - \beta \right] \bar{X}_{t-1} \\ & + \left[ \frac{(1 - \beta)(1 - \alpha)\beta}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} + (1 - \beta) \right] R_{t-1}. \end{aligned}$$

Estimativas para períodos futuros podem ser encontradas, supondo a continuidade dos fatores aditivos, através de:

$$E[X_{t+h}] = \bar{X}_t + R_t h - P_{t+h-N}, \quad h = 1, 2, \dots, N.$$

Os casos mais simples envolvendo apenas uma entre as duas formas de variação das vendas (tendência linear ou sazonalidade aditiva) podem ser extraídos dos cálculos acima, fazendo com que um dos fatores (e seu respectivo parâmetro) seja nulo.

### 3.1.6 Tendência Aditiva e Sazonalidade Multiplicativa

A combinação de uma tendência linear com um fator proporcional de sazonalidade é também uma possibilidade trazida pela MME, sendo comumente utilizada para previsões.

A estimativa da média de  $X_t$  será, neste caso, calculada conforme:

$$\bar{X}_t = \alpha X_t P_t + (1 - \alpha)(\bar{X}_{t-1} + R_t). \quad (3.16)$$

Combinando (3.16) com as equações apresentadas anteriormente para os fatores de sazonalidade multiplicativa (3.4) e de tendência aditiva (3.14), teremos que a fórmula, no exemplo para a venda média estimada, será da forma:

$$\begin{aligned} \bar{X}_t = & \left[ \frac{\alpha(1 - \gamma)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] X_t P_{t-N} \\ & + \left[ \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] [\bar{X}_{t-1} + R_{t-1}]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

O artigo original de Holt (1957) não apresenta as formulações finais para os fatores  $P_t$  e  $R_t$ , apenas menciona que podem ser obtidas através da aplicação do resultado acima nas Equações (3.4) e (3.14). Abaixo apresentamos a nossa reprodução de tal ideia:

Partindo da Equação (3.4) e aplicando (3.17) teremos:

$$\begin{aligned} P_t &= \gamma \frac{\bar{X}_t}{X_t} + (1 - \gamma) P_{t-N} \\ &= \frac{\gamma}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \left[ \frac{\alpha(1 - \gamma) X_t P_{t-N}}{X_t} + \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta) [\bar{X}_{t-1} + R_{t-1}]}{X_t} \right] + (1 - \gamma) P_{t-N}, \end{aligned}$$

onde podemos agrupar os termos para obter a formulação do fator de sazonalidade, que terá a seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_t &= \left[ \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)\gamma}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] \frac{[\bar{X}_{t-1} + R_{t-1}]}{X_t} \\ &\quad + \left[ \frac{\alpha\gamma(1 - \gamma)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} + (1 - \gamma) \right] P_{t-N}. \end{aligned}$$

De forma análoga, partindo da Equação (3.14) e aplicando (3.17) teremos:

$$\begin{aligned} R_t &= \beta(\bar{X}_t - \bar{X}_{t-1}) + (1 - \beta)R_{t-1} \\ &= \beta \left( \left[ \frac{\alpha(1 - \alpha)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] X_t P_{t-N} + \left[ \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] [\bar{X}_{t-1} + R_{t-1}] - \bar{X}_{t-1} \right) + (1 - \beta)R_{t-1}, \end{aligned}$$

o que resulta na fórmula de atualização do fator de tendência, conforme:

$$\begin{aligned} R_t &= \left[ \frac{\alpha\beta(1 - \alpha)}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} \right] X_t P_{t-N} \\ &\quad + \left[ \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)\beta}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} - \beta \right] \bar{X}_{t-1} \\ &\quad + \left[ \frac{(1 - \alpha)(1 - \beta)\beta}{1 - \alpha\gamma - (1 - \alpha)\beta} + (1 - \beta) \right] R_{t-1}. \end{aligned}$$

Por fim, podemos novamente obter estimativas da variável  $X$  nos períodos futuros pela fórmula de extrapolação:

$$E[X_{t+h}] = \frac{\bar{X}_t + R_t h}{P_{t+h-N}}, \quad h = 1, 2, \dots, N.$$

## 3.2 Intervalos de Confiança

Alguns ajustes de Holt-Winters já são considerados “ótimos” para determinados modelos SARIMA, tais como:

- Suavização Exponencial Simples (3.2): ARIMA(0, 1, 1)
- Tendência Aditiva (derivado de 3.12): ARIMA(0, 2, 2)
- Tendência e Sazonalidade Aditivas (3.12): SARIMA(0, 1,  $N + 1$ )(0, 1, 0) <sub>$N$</sub>

Tais relações, como mostrado por [Yar e Chatfield \(1990\)](#), são úteis para a construção de Intervalos de Previsão (Confiança). A ideia é assumir diretamente que o modelo ARIMA ótimo representa o real comportamento da série temporal estudada, e calcular a variância dos erros do modelo a partir de tal relação. Serão assumidos erros normais e independentes entre si.

Seja  $\hat{X}_t(h)$  a estimativa para o valor da série daqui a  $h$  passos, calculada no tempo  $t$ ;  $e_t(h) = X_{t+h} - \hat{X}_t(h)$  o erro de previsão  $h$  passos a frente; e  $\sigma_e^2 = Var(e_t(1)) = Var(e_t)$  a variância do erro de previsão 1 passo a frente (que pode ser estimada através dos erros de treino). As variâncias dos erros futuros  $Var(e_t(h))$  podem ser calculadas, para cada modelo, conforme mostrado abaixo:

- **Suavização Exponencial Simples**

$$Var(e_t(h)) = [1 + (h - 1)\alpha^2] \sigma_e^2; \quad (3.18)$$

- **Tendência Aditiva**

$$Var(e_t(h)) = [1 + (h-1)\alpha^2(1 + h\beta + \frac{1}{6}h(2h-1)\beta^2)] \sigma_e^2; \quad (3.19)$$

- **Tendência e Sazonalidade Aditivas**

Pode ser mostrado que, independente da “verdadeira forma” da série temporal, os erros para o ajuste completo de Holt-Winters são da forma:

$$e_t(h) = \sum_{i=0}^{h-1} \nu_i e_{t+h-i},$$

onde:

$$\nu_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ \alpha + i\alpha\beta, & i \neq 0, N, 2N, 3N, \dots \\ \alpha + i\alpha\beta + \gamma(1 - \alpha), & i = N, 2N, 3N, \dots \end{cases}$$

Sendo este o modelo ótimo, com erros não-correlacionados, temos então:

$$Var(e_t(h)) = \left[ \sum_{i=0}^{h-1} \nu_i^2 \right] \sigma_e^2,$$

e podemos abrir o termo que multiplica a variância dos erros do modelo:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{h-1} \nu_i^2 &= 1 + (h-1)\alpha^2 [1 + h\beta + \frac{1}{6}h(2h-1)\beta^2] \\ &\quad + s [\gamma^2(1 - \alpha)^2 + \alpha\gamma(1 - \alpha)[2 + N\beta(s+1)]] , \end{aligned}$$

onde  $s$  é a parte inteira de  $h/N$ , ou seja, quantos períodos inteiros de sazonalidade já se passaram no passo  $h$  da projeção. É fácil ver que a igualdade acima leva aos casos mais simples das Equações (3.19) (quando  $\gamma = 0$ ) e (3.18) (quando  $\beta = \gamma = 0$ ).

Por fim temos então, assumindo normalidade, e sendo  $z_{1-\alpha/2}$  o quantil da distribuição normal padrão que deixa  $(1 - \alpha/2)$  de probabilidade abaixo dele, que o intervalo com  $(1 - \alpha)$  de confiança, será:

$$\left( \hat{X}_t(h) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(e_t(h))} , \hat{X}_t(h) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(e_t(h))} \right) .$$

Uma vez entendidas as fórmulas acima fica claro que alguns fatores podem levar ao aumento dos intervalos de previsão: o aumento da distância, passos em direção ao futuro, da previsão ( $h$ ); e o aumento do valor dos parâmetros de ajuste de Holt-Winters ( $\beta$  e  $\gamma$ ).

O primeiro, por ser intuitivo, já era esperado, pois quanto mais longe do presente estão as nossas estimativas, maior a incerteza sobre elas. Ao mesmo tempo é preciso notar que a largura dos intervalos gerados não é linearmente proporcional a  $h$ , como sugerido por outras abordagens da literatura.

O segundo item, acerca do aumento dos valores de  $\beta$  e  $\gamma$ , apesar de não ser intuitivo, pode ser importante na escolha dos parâmetros do modelo. Não pode ser, no entanto, a única informação relevante a se considerar, uma vez que os valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  influenciam na velocidade de resposta do modelo à variações nos dados observados.

### 3.3 Função *HoltWinters* do *R*

O método de Holt-Winters pode ser facilmente implementado no *R* através da função *HoltWinters*, que utiliza os mesmos parâmetros apresentados nessa monografia (na forma das variáveis *alpha*, *beta* e *gamma*). Além disso, a variável *seasonal* indica o efeito que a sazonalidade terá (*additive* ou *multiplicative*), na modelagem da série temporal informada na variável *x*.

Uma fragilidade dessa função, infelizmente, é a impossibilidade de optar pela forma como a tendência afeta o modelo. Como vimos, a abordagem de HW permite tanto um efeito aditivo quanto um multiplicativo, porém este último não é contemplado na função.

Uma característica interessante dessa função é que, quando os parâmetros de ajuste não são informados, o próprio software fixa valores de *alpha*, *beta* e *gamma* de forma a gerar os menores erros quadráticos de previsão possíveis. Para fazer isso, portanto, é considerada apenas a previsão 1 passo a frente e, de qualquer forma, minimizar erros sobre todos os dados disponíveis pode criar um viés muito grande no modelo. Então, separamos a todo momento os conjuntos de dados a serem ajustados em 2: treino e teste. Ajustando o modelo a partir dos dados de treino e minimizando os erros de teste podemos chegar a um ajuste menos viesado e com poder de previsão mais confiável.

## Capítulo 4

# Efeito dos Parâmetros de Holt-Winters

Com o objetivo de avaliar os efeitos práticos da oscilação dos parâmetros dos ajustes de Holt-Winters, selecionamos 2 conjuntos de dados a serem analisados. Os modelos serão ajustados de forma a minimizar o Erro Quadrático Médio de teste, e em seguida serão ajustados novamente, variando os valores dos parâmetros. Compararemos então, graficamente e quantitativamente (através do EQM) todos os ajustes feitos.

### 4.1 Dados: Mortes por Acidentes de Trânsito no Reino Unido

O conjunto de dados *UKDriverDeaths*, proveniente do pacote *datasets* do *R*, é uma série temporal contendo o número mensal de motoristas da Grã-Bretanha mortos ou machucados seriamente em acidentes de carro entre Janeiro de 1969 e Dezembro de 1984. O uso obrigatório do cinto de segurança foi instaurado em 31 de Janeiro de 1983, o que levou à uma redução significativa no número de acidentes, visível na Figura 4.1. A série apresenta portanto uma clara mudança de regime.

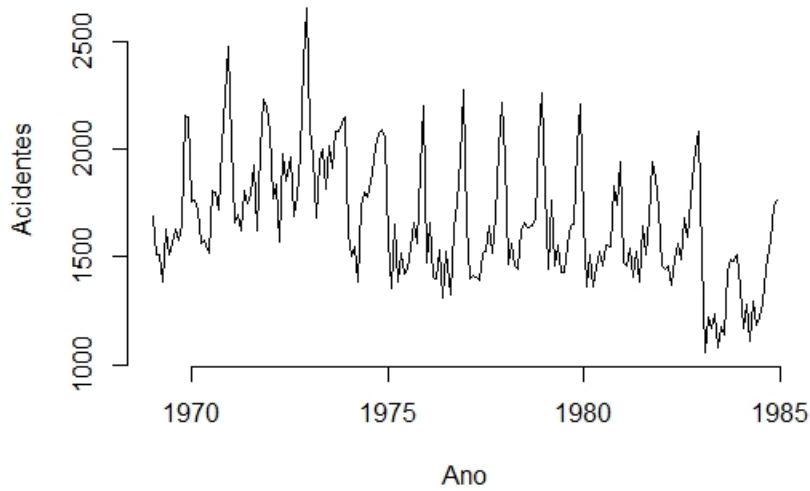


Figura 4.1: Número de motoristas que sofreram acidentes de trânsito graves entre 1969 e 1984.

#### 4.1.1 Modelos ajustados

Conforme comentado, inicialmente separamos os 16 anos de dados disponíveis em um conjunto de treino, que vai de Janeiro de 1969 até Dezembro de 1983, e outro de teste, com o ano de 1984 apenas. Nosso intuito com essa separação foi contemplar o efeito da obrigatoriedade do cinto de segurança (Janeiro de 1983) nos dados de treino.

Após essa separação, ajustamos todos os  $(2 \times 10^6)$  modelos possíveis, fazendo os parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  variarem de 0,01 até 1, com intervalos de 0,01, e testando a sazonalidade aditiva e multiplicativa. Em cada ajuste, computamos o Erro Quadrático Médio de teste, ou seja, a média das diferenças quadráticas entre os números previstos de acidentes de carro para o ano de 84 e o ocorrido no ano (conjunto de dados de teste), para assim optarmos pelo menor EQM, considerando-o como o modelo com melhor poder de previsão.

Além disso, para capturar realmente todas as possibilidades, ajustamos também modelos apenas com fator de tendência e apenas com sazonalidade, mas estes performaram pior do que o modelo completo.

Esse processo de seleção de parâmetros será mencionado outras vezes ao longo das próximas aplicações, então nos referiremos a ele apenas como “otimização”, ficando registrado aqui que estará subentendido o foco nos EQMs dos dados de teste.

A combinação de parâmetros escolhida por esse critério foi, então:  $\alpha = 0,08$ ,  $\beta = 0,01$  e  $\gamma = 0,26$ , com fator de sazonalidade aditivo, ou seja, o modelo completo como apresentado na Equação (3.12). Na Figura 4.2 consta o gráfico comparativo do previsto para o ano de 1984 contra o realizado, além do Intervalo de Confiança a um nível de 95% para esta previsão.



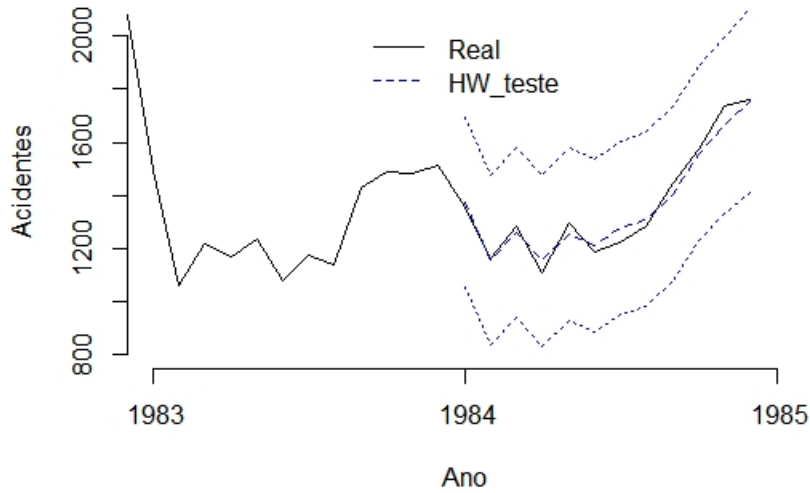


Figura 4.2: Número de motoristas que sofreram acidente grave de Janeiro a Dezembro de 1984. Previsão pontual em tracejado, e previsão intervalar com 95% de confiança em pontilhado.

Naturalmente a previsão é bem aderente ao ocorrido, pois minimizamos o erro de teste, que vem justamente da diferença entre previsto e realizado. Com isso, podemos focar nossa atenção no modo como essa estimativa futura é afetada pela alteração dos parâmetros do modelo.

Primeiro, pensando em realmente visualizar graficamente o efeito na previsão, fizemos o seguinte processo: fixando 2 dos parâmetros nos seus valores escolhidos pela otimização, variamos o terceiro em 4 pontos (0,05, 0,20, 0,50 e 0,80). Esses pontos foram selecionados de modo a termos ao mesmo tempo ajustes próximos ao original e ajustes bem distantes. Assim teremos noção da sensibilidade do modelo ao parâmetro de estudo. Para melhor visualização, apresentaremos nos gráficos apenas as estimativas pontuais, omitindo os intervalos de confiança.

Após isso, focando agora em ter uma visão mais quantitativa, de novo fixamos 2 dos parâmetros, mas agora fizemos o terceiro oscilar pelo intervalo de 0,01 até 1, dando passos de tamanho 0,01. Ao invés de olhar para o gráfico da estimativa gerada para o ano de 1984, desta vez computamos a raiz do Erro Quadrático Médio Relativo (EQMR) de teste de cada ajuste, por fim plotando seu comportamento.

### 4.1.2 Resultados

Na Figura 4.3 variamos o valor do parâmetro  $\alpha$ , o qual minimiza o EQM de teste em 0,08. Os parâmetros  $\beta$  e  $\gamma$  foram fixados nos valores que minimizam o EQM, como apresentado na Subseção 4.1.1.

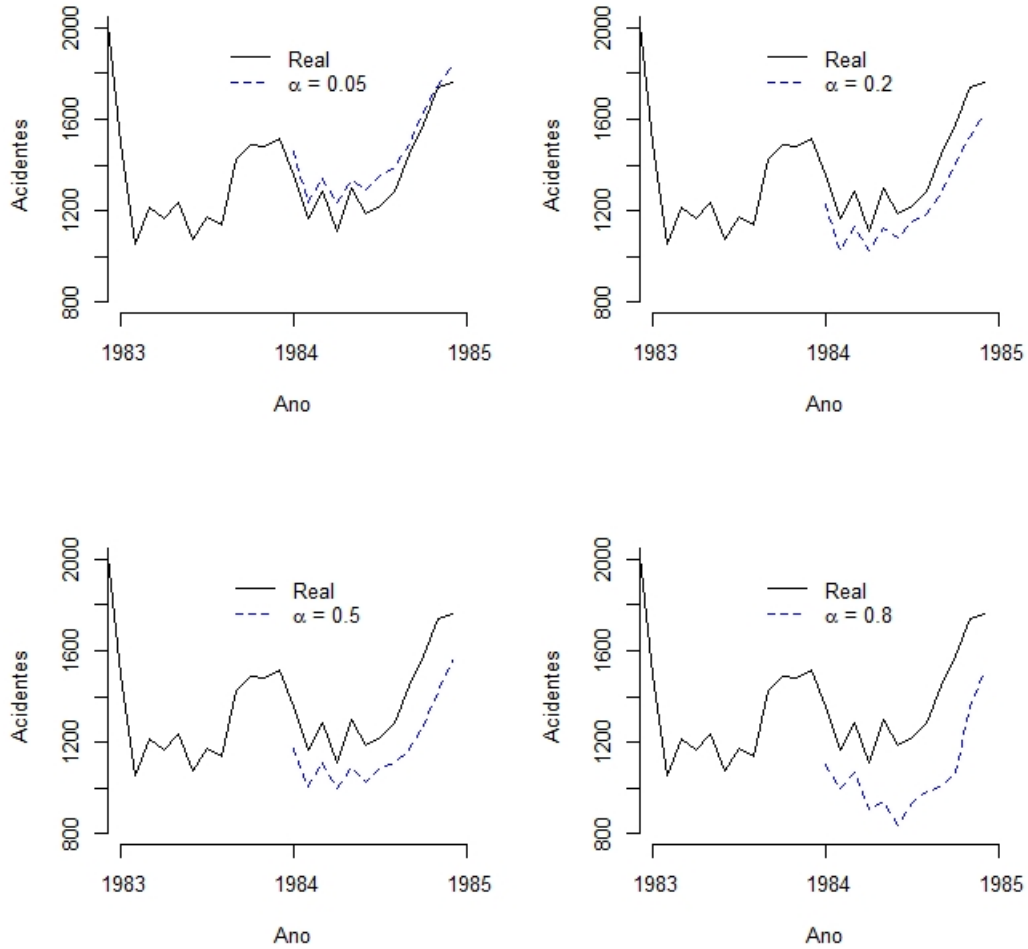


Figura 4.3: Efeito do parâmetro  $\alpha$  na previsão do número mensal de motoristas que sofreram acidente grave de Janeiro a Dezembro de 1984.

Fica visível na Figura 4.3 que mesmo uma alteração pequena, seja para menos ou para mais, já leva a uma previsão bem distante do ocorrido, superestimando o número de acidentes quando  $\alpha = 0,05$ , e subestimando de forma acentuada quando aumentamos o parâmetro. A alteração de  $\alpha = 0,20$  para  $\alpha = 0,50$ , por outro lado, não parece piorar o modelo tanto, pois apesar de ser possível enxergar o aumento da distância da estimativa pro dado real (principalmente no fim do ano de 84), a piora não parece responder linearmente à variação do parâmetro. O aumento final para  $\alpha = 0,80$  já leva a um distanciamento realmente mais relevante entre as linhas.

Uma análise condensada do efeito de variação no valor de  $\alpha$  pode ser obtida ao se olhar para a variação da raiz do EQMR na Figura 4.4.

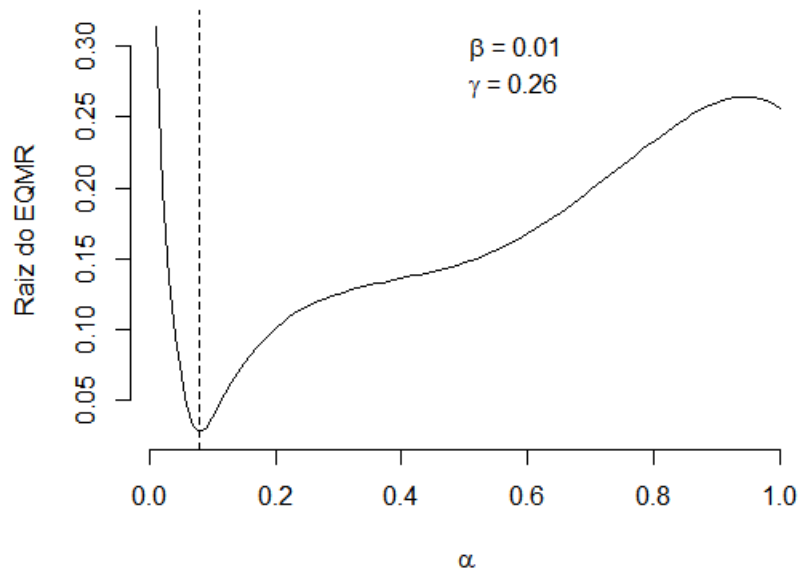


Figura 4.4: Efeito do parâmetro  $\alpha$  na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de acidentes. A linha vertical marca  $\alpha = 0,08$ .

Aqui fica mais clara ainda a ideia de sensibilidade alta próxima ao valor ideal que tivemos na Figura 4.3, e podemos ainda confirmar a diferença na oscilação da previsão dada a mudança em  $\alpha$ , observando a inclinação da curva nos intervalos. De fato, entre 0,05, 0,08 e 0,20 a curva é muito mais inclinada do que no trecho entre 0,20 e 0,50, e esta volta a ter uma subida rápida entre 0,50 e 0,80, decaindo após 0,90. Isso sugere um efeito não linear do parâmetro em relação ao EQM.

Adicionalmente, na Figura 4.5, variamos o parâmetro de tendência, o qual minimiza o EQM de teste em  $\beta = 0,01$ , e obtivemos a previsão para cada um desses casos. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  foram fixados nos valores que minimizam o EQM, como apresentado na Subseção 4.1.1.

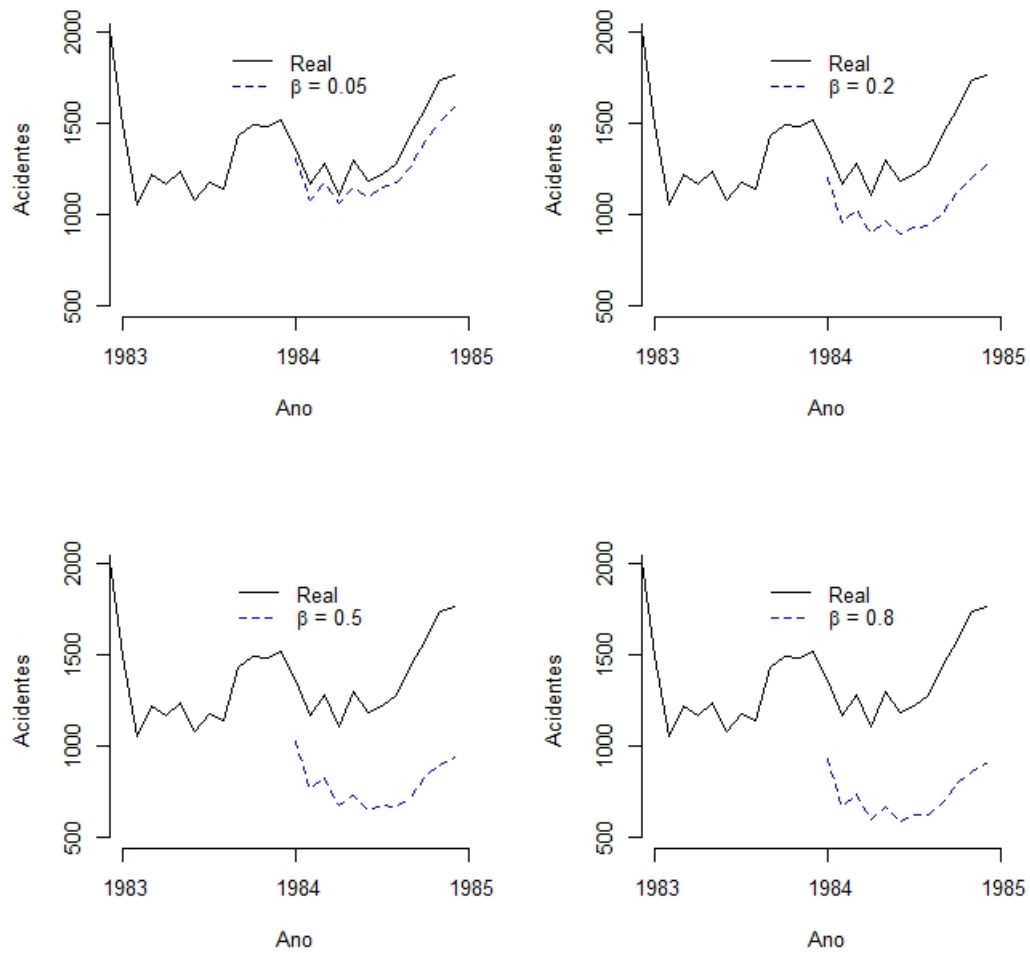


Figura 4.5: Efeito do parâmetro  $\beta$  na previsão do número mensal de motoristas que sofreram acidente grave de Janeiro a Dezembro de 1984.

Neste caso a previsão acerca do ano de 1984 parece ser ainda mais sensível, ficando muito claro o descolamento da linha tracejada em relação à linha cheia, com uma distância pequena em  $\beta = 0,05$ , mas que já aumenta rapidamente conforme esse parâmetro sobe para 0,20 e 0,50. A estimativa não parece piorar muito, no entanto, ao subirmos  $\beta$  para 0,80.

Observemos, na Figura 4.6 a variação da raiz do EQMR para verificar tais movimentos.

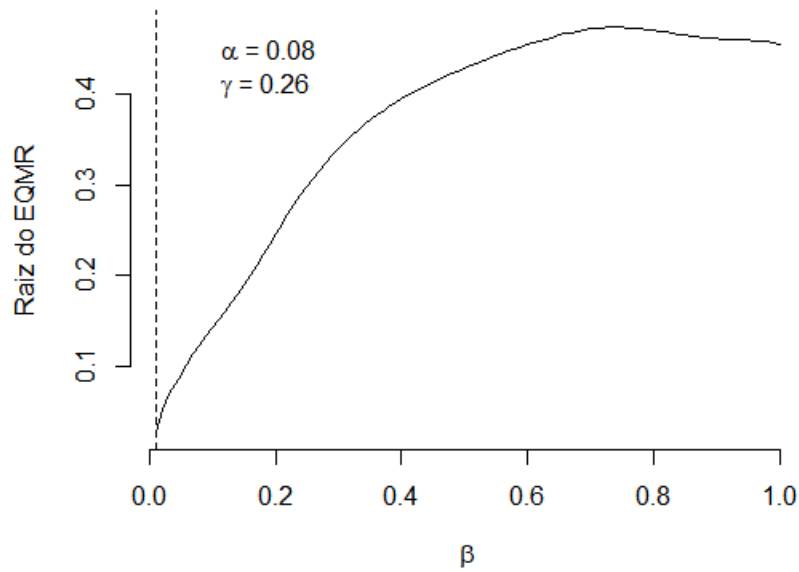


Figura 4.6: Efeito do parâmetro  $\beta$  na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de acidentes. A linha vertical marca  $\beta = 0,01$ .

Podemos ver na Figura 4.6 que realmente a inclinação da curva é muito acentuada desde o início, indo com um formato quase exponencial até 0,40 (o que condiz com o aumento das distâncias entre o previsto e o verdadeiro para  $\beta = 0,05$ ,  $\beta = 0,20$  e  $\beta = 0,50$  na Figura 4.5). Ainda, a similaridade entre os gráficos com  $\beta = 0,50$  e  $\beta = 0,80$  é explicada pela atenuação da curva da raiz do EQMR, que perde seu crescimento rápido após 0,60 e passa a decair após 0,70.

Na Figura 4.7 variamos parâmetro de sazonalidade (aditiva), o qual minimiza o EQM de teste em  $\gamma = 0,26$ . Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram fixados nos valores que minimizam o EQM, como apresentado na Subseção 4.1.1.

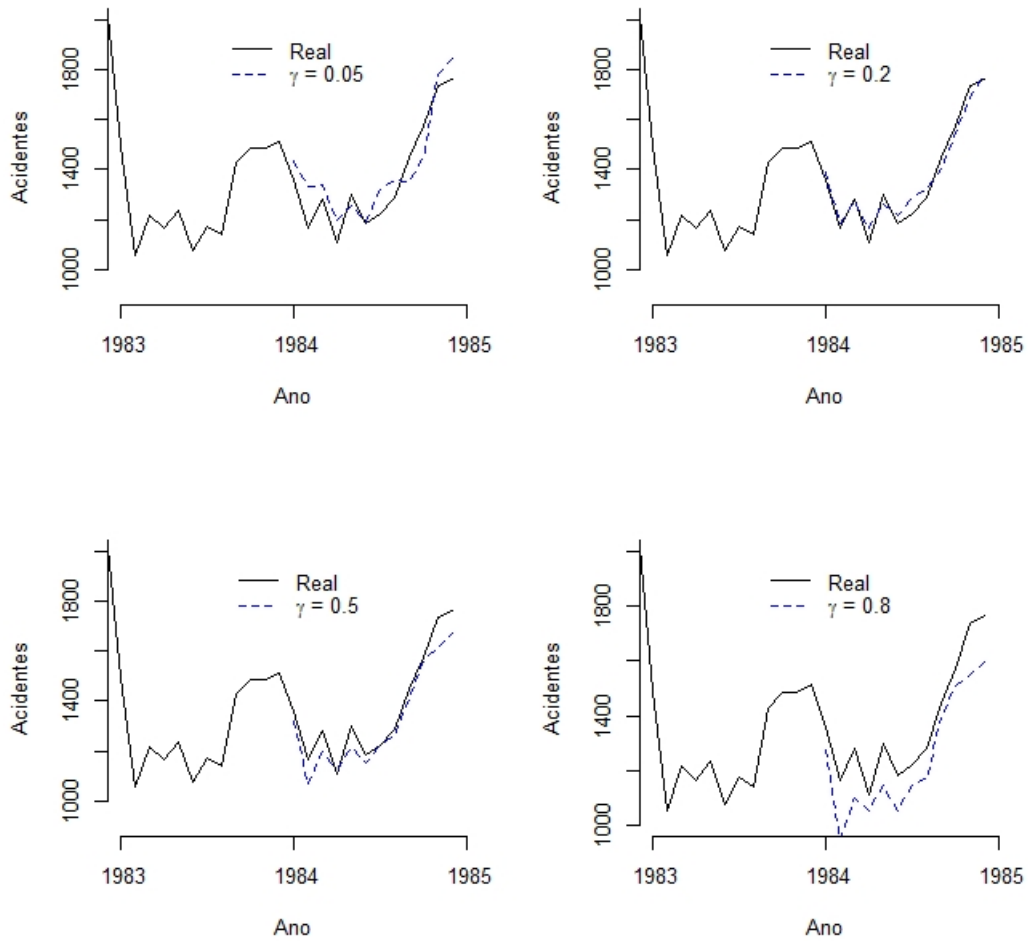


Figura 4.7: Efeito do parâmetro  $\gamma$  na previsão do número mensal de motoristas que sofreram acidente grave de Janeiro a Dezembro de 1984.

O efeito da sazonalidade molda prioritariamente o formato das oscilações de curto prazo, demarcando os picos e vales da estimativa de acidentes, ou seja, quanto cada mês se distancia da média projetada para o ano. Por isso, a variação de  $\gamma$  acaba por não ser capaz de distanciar muito a projeção do ocorrido, o que fica claro nos 3 primeiros gráficos da Figura 4.7. O último, onde  $\gamma = 0,80$ , é o único onde a linha tracejada azul não consegue tocar a linha preta, sempre subestimando o número de acidentes do ano de 1984. Nos demais casos até é possível ver uma tendência a superestimar ( $\gamma = 0,05$ ) ou subestimar ( $\gamma = 0,50$ ), mas sempre permanecendo próximo ao ocorrido.

De novo utilizaremos o comportamento da raiz do Erro Quadrático Médio Relativo dos dados de teste, em função do parâmetro de interesse, para validar essa análise inicial.

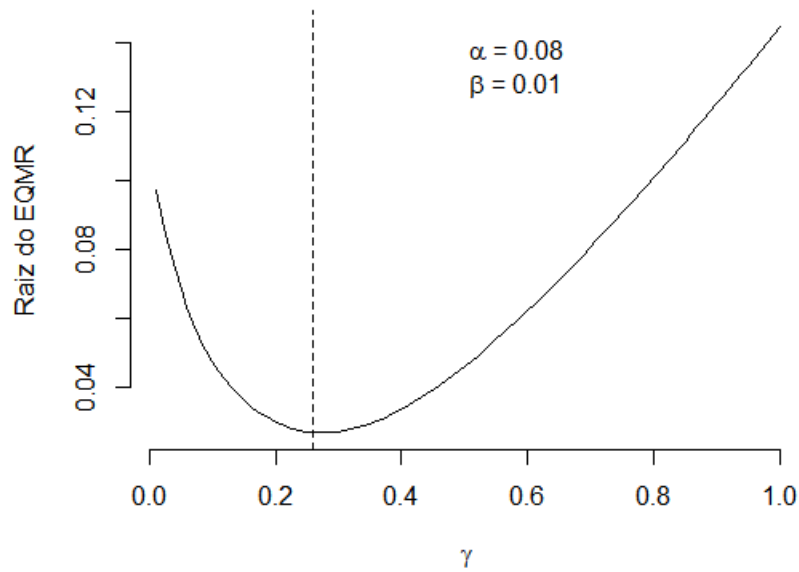


Figura 4.8: Efeito do parâmetro  $\gamma$  na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de acidentes. A linha vertical marca  $\gamma = 0,26$ .

O formato similar a uma parábola visto na Figura 4.8, em conjunto com o baixo valor máximo da raiz do EQMR, condizem com a ideia do efeito suave visto na Figura 4.7. Note que a raiz do EQMR máxima atingida através dessa oscilação de  $\gamma$  foi de 0,13, muito inferior às geradas pela mudança dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  estudados anteriormente, que alcançaram 0,30 e 0,47, respectivamente.

Ao plotar as 3 curvas juntas na Figura 4.9 essa comparação dos efeitos de cada parâmetro fica mais clara.

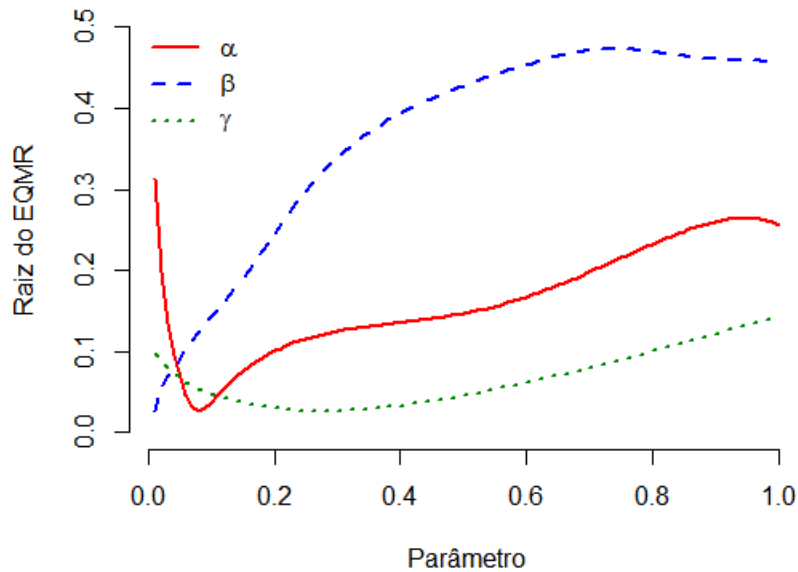


Figura 4.9: Efeito dos parâmetros na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de acidentes.

Agora não há dúvidas que a sazonalidade tem um impacto bem menor na raiz do EQMR do que o fator de tendência ou o próprio fator  $\alpha$  de ponderação das observações. Ressaltamos, no entanto, que esse resultado é particular para o conjunto de dados em questão, onde existiu uma mudança clara na média dos dados a partir da implementação do cinto de segurança obrigatório, mas que não necessariamente gerou uma mudança na relação sazonal dos acidentes. As próprias relações de interdependência entre os parâmetros vistas acima não podem ser tomadas como regra para o método de Holt-Winters, pois também dependem dos dados estudados.

Para ilustrar essa ideia de dependência dos dados, repetiremos todo o procedimento apresentado até então para um segundo conjunto de dados, e o formato das curvas da raiz do EQMR serão reavaliados.

## 4.2 Dados: Mortes por Acidentes nos E.U.A.

O conjunto de dados *USAccDeaths*, proveniente do pacote *datasets* do *R*, é uma série temporal contendo o número mensal de mortes acidentais nos Estados Unidos entre os anos de 1973 e 1978, como pode ser visto na Figura 4.10.



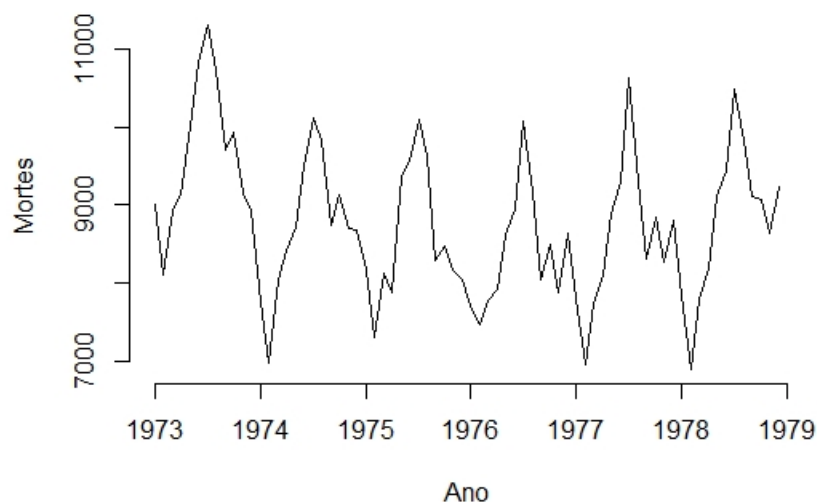


Figura 4.10: Número de mortes acidentais entre 1973 e 1978.

### 4.2.1 Modelo

Utilizamos como dados de treino no ajuste do modelo o intervalo entre 1973 e 1976, com o intuito de usar o ano de 77 como teste, minimizando o EQM da sua estimativa, para termos o ano de 1978 como referência para fazer previsão de fato. Posteriormente compararemos esta à previsão feita através de modelos SARIMA.

Conforme comentado, repetimos o processo de otimização aplicado para *UKDriverDeaths*, e a combinação de parâmetros escolhida foi:  $\alpha = 0,09$ ,  $\beta = 0,39$  e  $\gamma = 0,80$ , com fator de sazonalidade multiplicativo. Na Figura 4.11 temos o gráfico com os dados originais (linha sólida em preto) e as estimativas para 1977 (linha tracejada azul) e 1978 (linha pontilhada azul). Neste caso não apresentamos intervalo de confiança para as projeções pela impossibilidade de se aplicar o método visto em 3.2 para um modelo com sazonalidade multiplicativa (Yar e Chatfield, 1990).

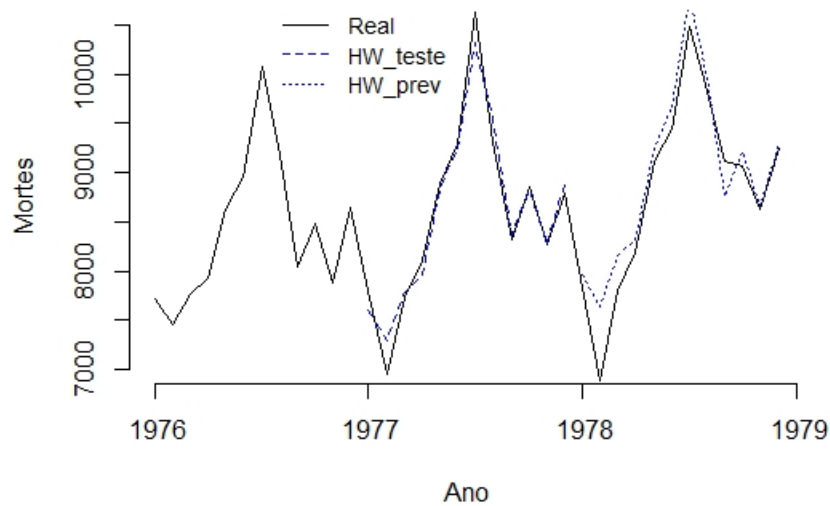


Figura 4.11: Previsão mensal do número de mortes acidentais de Janeiro de 1977 a Dezembro de 1978.

### 4.2.2 Resultados

Ressaltamos que a análise da raiz dos EQMRs foi feita apenas sobre os dados de teste (mortes do ano de 1977), sem considerar o ano de 1978 (previsão), novamente mantendo 2 parâmetros fixos e oscilando o terceiro no intervalo de 0,01 a 1. Para fins de simplificação da análise, mostramos aqui apenas o gráfico comparativo entre os efeitos dos valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  na previsão.

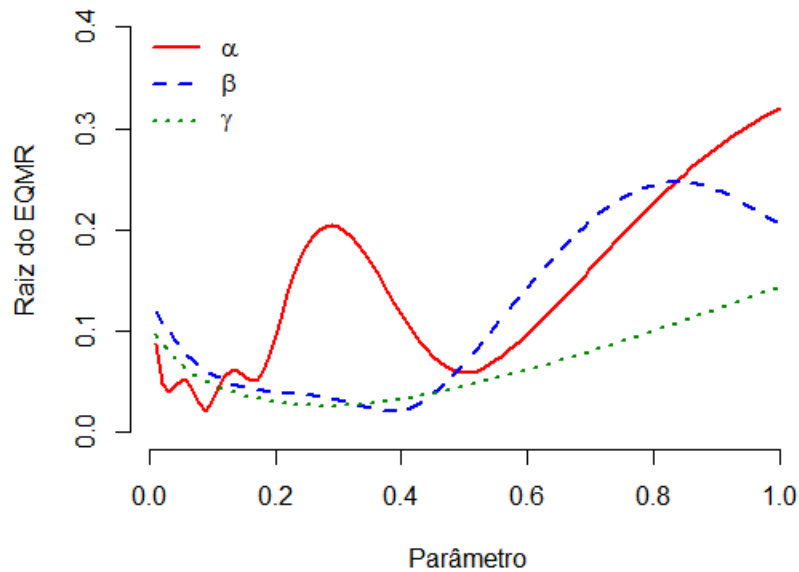


Figura 4.12: Efeito dos parâmetros na raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de teste para a previsão de mortes.

Ao contrário do observado no exemplo anterior, onde o parâmetro de tendência era o mais impactante, se tratando dos dados de mortes (Figura 4.12) temos um equilíbrio maior entre  $\alpha$  e  $\beta$ . Vemos também que os formatos das curvas são totalmente diferentes, inclusive aparecendo alguns pontos de mínimos locais para  $\alpha$ , sendo 3 próximos uns aos outros no início do intervalo, e um quarto perto de 0,50. Essa discrepância é interessante pela diferença prática entre usar um fator pequeno como  $\alpha = 0,09$ , que dá pouca relevância para cada nova observação, usando por isso um histórico maior do processo; e um valor alto como  $\alpha = 0,50$ , que já faz uma ponderação totalmente diferente, ignorando boa parte do passado dos dados.

O parâmetro  $\beta$ , que antes tinha um crescimento acelerado no início do intervalo e ficava mais estável após 0,60, agora gera raízes de EQMRs relativamente baixas até cerca de 0,50. O aumento no erro de teste após esse ponto tem formato curiosamente gaussiano, atingindo um máximo próximo a  $\gamma = 0,80$  e decaindo depois disso.

Novamente o parâmetro de sazonalidade, que aqui é multiplicativo, tem pouca influência no EQM de teste do modelo.

## Capítulo 5

# Avaliação da previsão em bases de dados

Já familiarizados com o funcionamento do modelo de Holt-Winters e com os efeitos práticos dos seus parâmetros, agora iremos comparar o seu poder de previsão, que é o que de fato interessa neste trabalho, com os modelos de Box-Jenkins. Para tal comparação, partiremos dos dados de Mortes Acidentais já apresentados (*USAccDeaths*) e ilustrados na Figura 4.10, com sua divisão previamente estabelecida entre dados de treino, teste e previsão.

Por já termos explicitado, no Capítulo 4, como foi feito o ajuste de Holt-Winters sobre estes mesmos dados, inclusive mostrando o resultado final, iremos passar apenas pela explicação do ajuste de Box-Jenkins. Ao final desta faremos a comparação, tanto gráfica quanto numérica, entre as previsões geradas para as mortes do ano de 1978 por cada modelo. Repetimos que a ideia não é definir se um modelo é melhor ou pior do que o outro, mas sim averiguar a validade do modelo de suavização exponencial, visto que ele é mais simples de ser implementado.

### 5.1 Modelo SARIMA

Para chegar no ajuste ideal para o modelo SARIMA, foram feitas duas etapas: a definição das ordens do modelo (com e sem sazonalidade de 12 meses) e dos coeficientes, ambos sobre o conjunto de treino (anos 1973, 1974, 1975 e 1976).

#### 5.1.1 Definição das Ordens

Para definir as ordens do modelo, iremos analisar os comportamentos dos gráficos FAC e FACP (*Função de AutoCorrelação* e *Função de AutoCorrelação Parcial*), e também tentar obter melhores resultados diferenciando a série.

O gráfico de FAC analisa a correlação entre o valor presente da série com seus termos defasados, enquanto o FACP analisa a correlação entre o resíduo com os termos defasados da série, e assim conseguimos ter uma noção melhor dos possíveis valores das ordens  $p$  e

$q$  do modelo. Além disso, a linha pontilhada encontrada nos gráficos indica o limiar em que as correlações calculadas passam a se tornar estatisticamente insignificantes.

Resumidamente, para analisar qual o melhor modelo a partir dos gráficos mencionados, devemos observar as seguintes condições:

- **AR( $p$ ):**
  - O gráfico de FAC apresenta decaimento exponencial/senoidal
  - O gráfico de FACP apresenta decaimento bruto em  $p$
- **MA( $q$ ):**
  - O gráfico de FACP apresenta decaimento exponencial/senoidal
  - O gráfico de FAC apresenta decaimento bruto em  $q$
- **ARMA( $p, q$ ):**
  - O gráfico de FAC apresenta decaimento exponencial/senoidal a partir do  $\text{lag } \max(0, q - p)$
  - O gráfico de FACP apresenta decaimento exponencial/senoidal a partir do  $\text{lag } \max(0, p - q)$

Na existência de poucos dados para a análise gráfica, a definição de ordens para a parcela sazonal pode se tornar um pouco limitada.

Inicialmente, vamos estudar os gráficos de FAC e FACP sem nenhuma diferenciação:

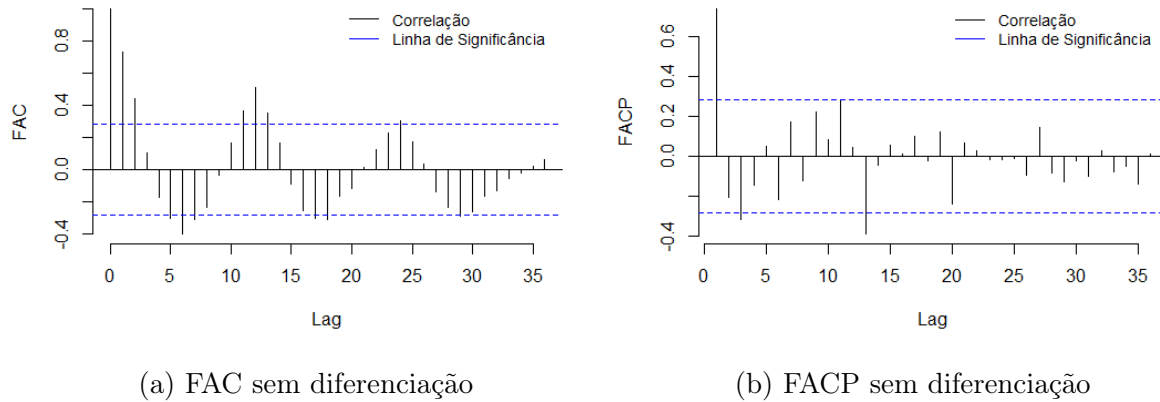


Figura 5.1: Gráficos da série de mortes acidentais sem diferenciação

Na Figura 5.1 podemos observar um decaimento senoidal no gráfico de FAC, a partir do  $\text{lag } 1$ , e um decaimento brusco no gráfico de FACP, a partir do  $\text{lag } 1$ . Assim, podemos estimar um modelo SARIMA(1,0,0)(...).

Para a parte sazonal, existe um decaimento exponencial pouco expressivo no gráfico de FAC, e não existem *lags* significativos para o gráfico de FACP, então estimaremos um modelo SARIMA(1,0,0)(1,0,0), que será tido como ajuste 1.

Após tentar identificar o melhor ajuste para um modelo sem diferenciação, replicaremos a análise, aplicando a diferença entre dois termos consecutivos (diferenciação com *lag* igual a 1).

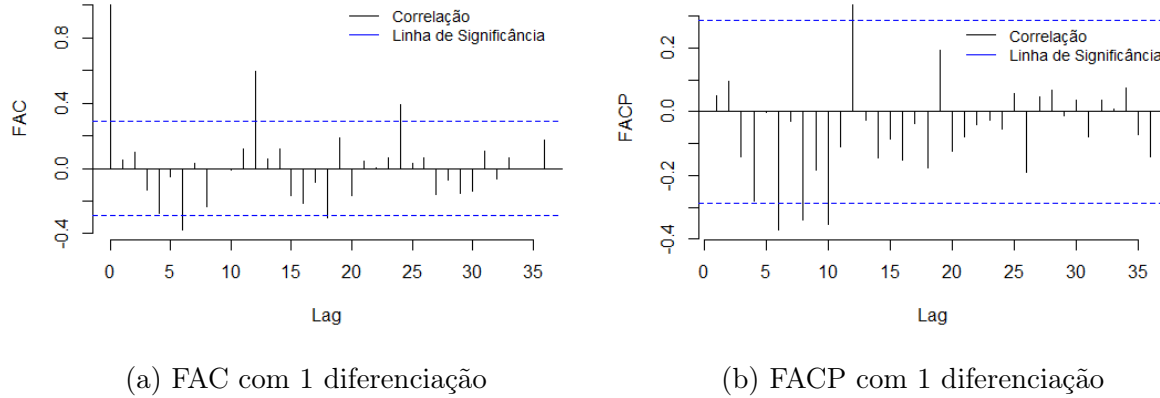


Figura 5.2: Gráficos da série de mortes acidentais com uma diferenciação

Podemos observar na Figura 5.2 que, com exceção dos *lags* múltiplos de 12, não existem valores fora da região assintótica. Dessa forma, teremos um modelo SARIMA(0,1,0)(...).

Para a parte sazonal, temos um decaimento exponencial no gráfico de FAC, e para o FACP, apenas o *lag* 12 possui valor maior que a zona assintótica, podendo indicar um SARIMA(0,1,0)(1,0,0), que será o ajuste 2.

Testaremos também aplicar adicionalmente uma diferenciação com 12 unidades de diferença (diferenciação com *lag* igual a 12).

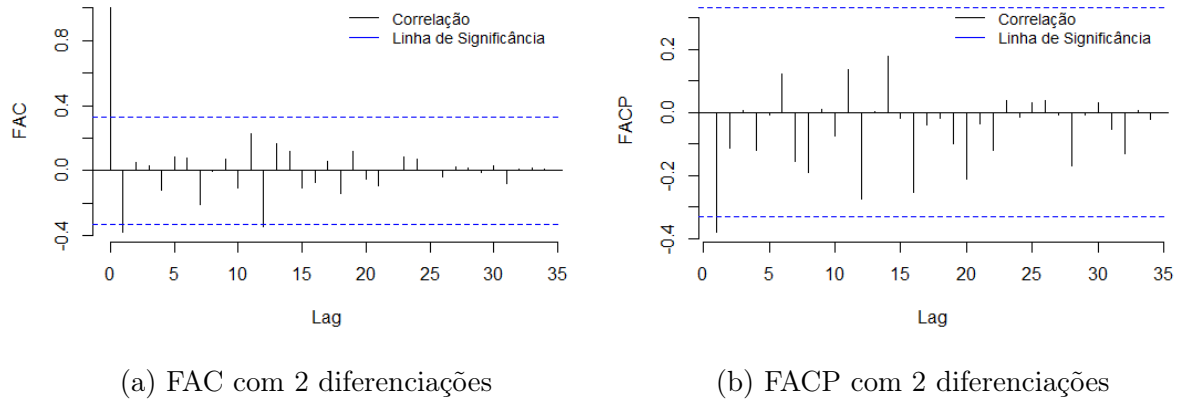


Figura 5.3: Gráficos da série de mortes acidentais com duas diferenciações

Apesar de pouco expressivo, no gráfico de FAC, podemos ver o *lag* 1 negativo, que poderia indicar um decaimento senoidal, enquanto no de FACP, apenas o primeiro *lag* está fora da região assintótica, podendo indicar um SARIMA(1,1,0)(...).

Para a parte sazonal, não existem valores fora da região assintótica. Dessa forma, teremos um modelo SARIMA(1,1,0)(0,1,0), que será o ajuste 3.

Para se juntar à lista de possíveis ajustes, rodamos a função *auto.arima()* do *R*, que nos retornou um modelo SARIMA(0,1,1)(1,1,0), que será incluído como ajuste 4.

E por último, como ajuste número 5, o modelo SARIMA(0,1,13)(0,1,0), que conforme visto na Seção 3.2, é bem ajustado a modelos de *Holt-Winters* com tendência e sazonalidade aditivas.

Dessa forma, ficamos com os 5 ajustes abaixo, e seus valores de AIC, BIC, EQM (Erro Quadrático Médio), EAM (Erro Absoluto Médio) e raiz do EQMR (Erro Quadrático Médio Relativo), respectivamente:

Ajuste SARIMA	AICs	BICs	EQMs	EAMs	Raiz dos EQMRs
(1,0,0)(1,0,0)	732,0	739,5	193.635,0	309,8	0,057
(0,1,0)(1,0,0)	717,4	721,1	261.345,0	416,3	0,068
(1,1,0)(0,1,0)	523,7	526,8	96.786,6	205,4	0,043
<b>(0,1,1)(1,1,0)</b>	<b>520,4</b>	<b>525,1</b>	<b>79.741,9</b>	<b>241,7</b>	<b>0,033</b>
(0,1,13)(0,1,0)	536,1	557,9	154.772,1	343,8	0,050

Tabela 5.1: Resultado dos ajustes Box-Jenkins para os dados de mortes acidentais.

Analisando a Tabela 5.1, podemos chegar à conclusão que o ajuste 4, resultante da função *auto.arima()*, obteve melhores resultados, então seguiremos com ele.

### 5.1.2 Definição dos Coeficientes

Quando rodamos no *R* a função *arima()* e especificamos as ordens do modelo, já nos são retornados os coeficientes estimados. Mas para fins de comparação com o ajuste do Holt-Winters, iremos usar o processo de otimização no conjunto de teste (ano de 1977), para tentar obter a melhor previsão possível (minimizando o EQM) para os valores de 1978.

Quando utilizamos otimização para a definição de parâmetros ao invés de mínimos quadrado, por exemplo, é preciso levar alguns pontos em consideração. A estimação por mínimos quadrados exige menor capacidade operacional e o resultado encontrado é o que melhor se ajusta ao conjunto de treino. Quando utilizamos a otimização, é necessário passar por diversos cenários, o que pode ser muito extensivo dependendo do número de parâmetros a ser estimado, mas o resultado encontrado é o que mais se adequa ao conjunto de teste, e portanto foi o método utilizado.

Após a otimização, com passos de tamanho 0,02 (o dobro do Holt-Winters, pois os coeficiente variam de -1 até 1, ao invés de 0 a 1), a combinação de coeficientes escolhida foi:  $\theta = -0,46$  para o MA(1) da parte não sazonal, e  $\phi = -0,14$  para o AR(1) da parte sazonal. Na Figura 5.4 consta o gráfico comparativo do previsto para os anos de 1977 (teste) e 1978 (previsão) contra o realizado, e na Figura 5.5 apresentamos os resíduos, para averiguarmos se chegam próximos dos quantis de uma distribuição Normal.

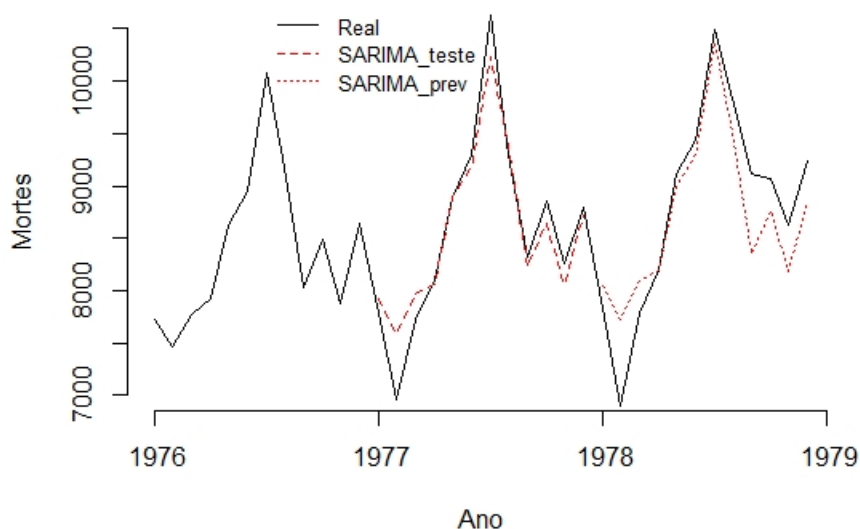


Figura 5.4: Previsão de mortes acidentais a partir do modelo de Box-Jenkins.



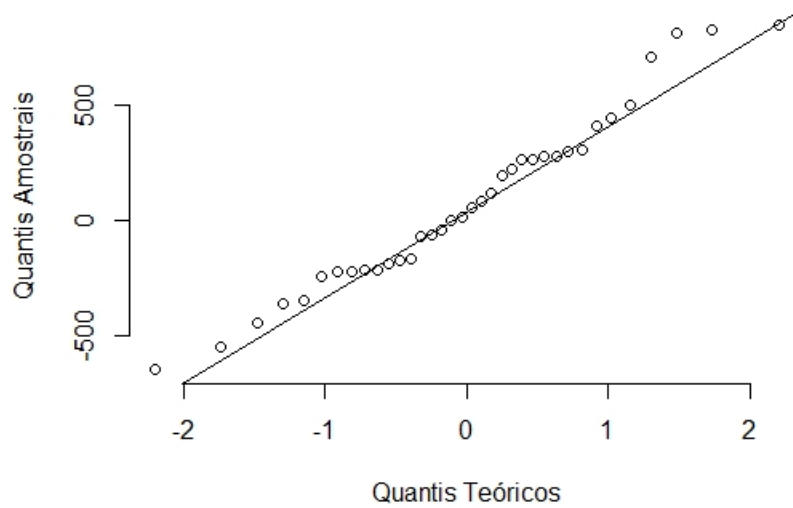


Figura 5.5: Normal Q-Q Plot: Resíduos do ajuste por Box-Jenkins

## 5.2 Modelo Holt-Winters

Apesar de já ter sido apresentado na Aplicação 1 (Seção 4.2) o ajuste de Holt-Winters para esse conjunto de dados de mortes acidentais, aqui faremos uma pequena alteração, a título de conseguir gerar intervalos de confiança para comparar com o modelo de Box-Jenkins. Neste caso, utilizaremos um ajuste com sazonalidade aditiva, uma vez que a sazonalidade multiplicativa não permite a construção de intervalos com a mesma técnica apresentada anteriormente.

Aplicamos novamente o processo de otimização, agora fixando o efeito da sazonalidade escolhido, e os novos parâmetros minimizadores do erro quadrático médio foram:  $\alpha = 0,09$ ,  $\beta = 0,38$  e  $\gamma = 0,82$ , muito próximos dos valores anteriores ( $0,09$ ,  $0,39$  e  $0,80$ , respectivamente). O EQM mínimo obtido agora subiu de 28.750 para 30.344. Notamos que a previsão para o ano de 1978 ficou ainda melhor do que no caso multiplicativo utilizado anteriormente, com Erro Quadrático Médio de previsão caindo levemente de 87.520 para 84.380. O ajuste realizado pode ser visto graficamente na Figura 5.6.

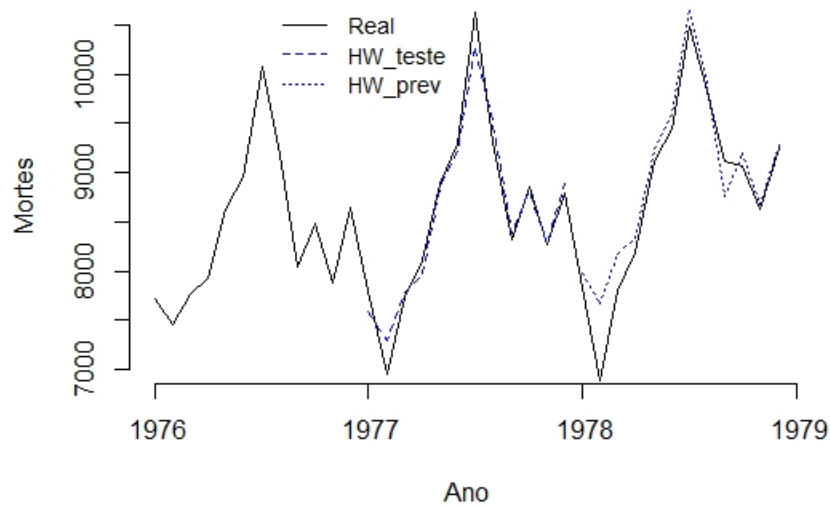


Figura 5.6: Previsão de mortes acidentais, de Janeiro de 1977 a Dezembro de 1978, a partir do modelo de Holt-Winters.

Na Figura 5.7 abaixo analisamos o *Normal Q-Q Plot* dos resíduos de treino, com o intuito de verificar a hipótese de normalidade dos resíduos do modelo, o que possibilita a aplicação dos intervalos de previsão apresentados nesta dissertação. A proximidade dos pontos em relação à linha mostra que os quantis amostrais dos resíduos são condizentes com os quantis empíricos de uma distribuição Normal.

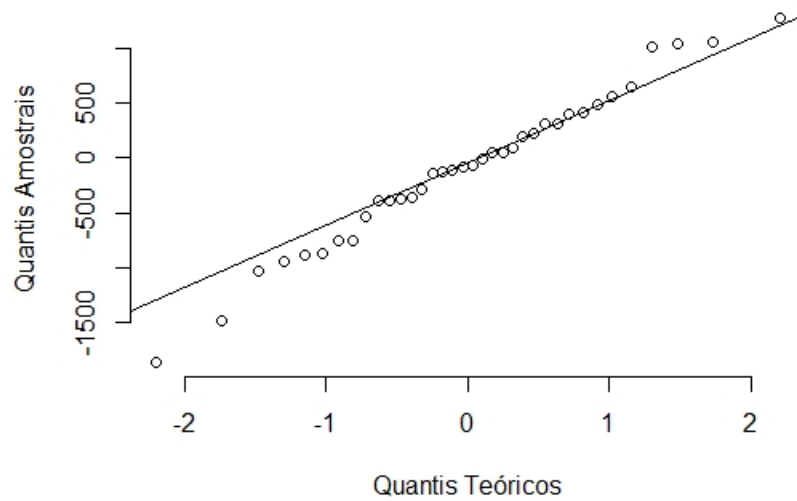


Figura 5.7: Normal Q-Q Plot: Resíduos do ajuste por Holt-Winters

Com isso podemos partir para o gráfico com os intervalos em si, mas o faremos diretamente na próxima seção, onde iremos comparar os ajustes feitos até aqui.

## 5.3 Resultados

Finalmente, comparando o ajuste de Holt-Winters com o modelo de Box-Jenkins, temos na Figura 5.8 as estimativas calculadas para os anos de 1977 (teste) e 1978 (previsão):

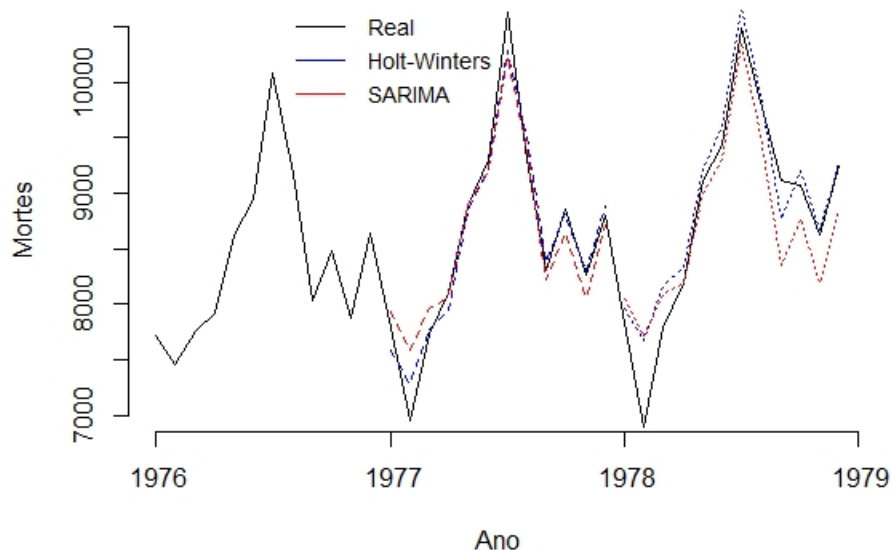


Figura 5.8: Comparação da previsão dos modelos ajustados

As estimativas de Holt-Winters para as mortes acidentais ocorridas a cada mês são visivelmente mais próximas do realizado do que aquelas geradas pelo modelo SARIMA, tanto no conjunto de dados de teste quanto na previsão de fato. A tradução numérica dessa diferença em proximidades está registrada na Tabela 5.2 com os seguintes valores: Erro Quadrático Médio de teste, EQM de previsão, Erro Absoluto Médio de previsão e ainda a Raiz do Erro Quadrático Médio Relativo de previsão. Além desses números calculados para os ajustes do gráfico acima, colocamos na última linha as informações relativas ao ajuste de Holt-Winters calculado na Aplicação 1 (4.2), com sazonalidade multiplicativa.

Ajuste	EQM teste	EQM prev	EAM prev	Raiz do EQMR prev
SARIMA	63.202	166.035	328	0,051
HW aditivo	30.344	84.380	210	0,039
HW multiplicativo	28.750	87.520	229	0,039

Tabela 5.2: Comparação dos resultados dos modelos ajustados.

Apesar da mudança do modelo multiplicativo para o aditivo, que obteve pior desempenho na otimização (EQM de teste mais alto), ter sido motivada apenas pela possibilidade de se calcular intervalos de confiança, a mudança mostrou-se favorável para o modelo. Tanto o erro quadrático quanto o erro absoluto médio de previsão do ajuste aditivo foram menores, enquanto obtiveram raiz dos EQMRs similares, significando uma assertividade melhor nas estimativas futuras.

As previsões feitas pelo modelo de Box-Jenkins, por outro lado, foram piores do que ambos os casos de Holt-Winters estudados. Talvez pela maior complexidade do modelo, com um maior número de decisões a serem tomadas a respeito das parcelas de Médias Móveis, Auto Regressiva e de Diferenciação, além dos parâmetros de cada uma delas, possa criar maior indecisão a respeito de qual seria o modelo mais aderente para a série histórica em questão.

Voltemos agora a nossa atenção aos Intervalos de 95% de Confiança gerados para as previsões feitas por cada modelo, na Figura 5.9.

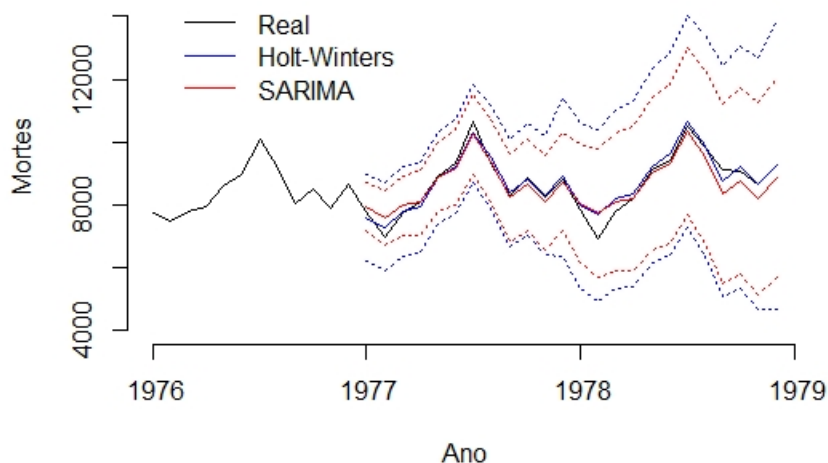


Figura 5.9: Previsões de mortes acidentais de cada modelo, com seus intervalos de confiança.

Aqui obtemos um resultado interessante, onde a abordagem de Box-Jenkins, apesar de ter gerado estimativas piores para as mortes acidentais futuras, tem um intervalo de confiança mais estreito do que o de Holt-Winters. Ou seja, apesar da estimativa pontual ter sido pior, o poder de previsão do modelo SARIMA não é necessariamente menor, visto que os intervalos são normalmente usados como base para provisionar valores ou estimar esforços relacionadas a alguma tarefa futura.

É válido mencionar também que ambos os intervalos de confiança aumentam em amplitude, conforme aumentamos os coeficientes dos modelos (seja  $\alpha$ ,  $\beta$  ou  $\gamma$  para o *Holt-Winters*, ou então os vetores  $\Theta$  e  $\Phi$  para o SARIMA). É possível observar essa relação ao recordar que os coeficientes retratam a dependência com os valores mais recentes da série que, se tratando de previsão  $h$  passos a frente, passam a ser valores estimados, e portanto trazem maior incerteza para a previsão, aumentando assim o intervalo.

# Capítulo 6

## Conclusão

Uma estatística é um resultado ou conjunto de resultados que se obtém em função dos dados que estão à disposição. A busca por estes resultados em função de dados, - seja através de uma análise exploratória dos dados, com médias, variâncias e histogramas, ou então com o ajuste de distribuições e séries temporais - é apenas uma tentativa de traduzir fenômenos naturais que não possuem equações definidas. Por isso é de extrema importância que se tenha não só estimativas pontuais, mas intervalos de confiança condizentes.

Voltando para o contexto atuarial, onde reside a motivação deste trabalho, se faz necessário, inclusive por meios regulatórios, o provisionamento para a cobertura de todos os sinistros (materialização dos riscos definidos nos contratos de seguro) ocorridos e que ainda não foram liquidados. Mais importante do que acertar exatamente o valor que deverá ser coberto é se aproximar dele, uma vez que estimativas muito distantes podem afetar drasticamente os resultados da companhia.

Outro ponto que também reitera o fato da estatística ser uma função dos dados que estão à disposição, é o resultado que foi obtido na aplicação de parâmetros do *Holt-Winters*, com o estudo da sazonalidade. Foi observada quase nenhuma alteração quando alternamos o valor de  $\gamma$ . Isso acontece pois o comportamento sazonal dos dados não se altera com o passar do tempo, então não faz muita diferença usar um parâmetro alto, que se ajuste mais a dados presentes, ou um parâmetro baixo, mais dependente de dados passados. Em 2020 e 2021 especificamente, com a pandemia da Covid-19 vigente, a alteração do valor atribuído a qualquer um dos três parâmetros ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) poderia causar grandes impactos no ajuste de dados.

Em suma, conclui-se que a técnica estudada é capaz de gerar estimativas futuras confiáveis para dados de séries temporais contendo características de tendência e sazonalidade, de maneira simples e de certa forma intuitiva, uma vez entendido o conceito de suavização exponencial. A simplicidade do modelo se traduz não só nas fórmulas de ajuste, mas no formato de armazenamento e atualização das informações, uma vez que o mesmo pode ser simplificado em poucas medidas (a média atual, o fator de tendência e os  $N$  fatores de sazonalidade), e estas podem ser facilmente conjugadas com novas observações coletadas. Como desvantagem do método, podemos citar a dificuldade de se gerar Intervalos de Confiança (IC) para ajustes multiplicativos. Box-Jenkins, por outro lado, tem uma estrutura de cálculo dos IC's bem definida, aplicável em qualquer caso,

porém, necessita de um esforço adicional para a decisão das ordens do modelo, antes da estimação dos parâmetros.

# Referências Bibliográficas

- Holt, C. C. (1957) Forecasting seasonals and trends by exponentially weighted moving averages. *ONR Memorandum*, **52**.
- Hyndman, R., Athanasopoulos, G., Bergmeir, C., Caceres, G., Chhay, L., O'Hara-Wild, M., Petropoulos, F., Razbash, S., Wang, E. e Yasmeeen, F. (2020) *forecast: Forecasting functions for time series and linear models*. URL<https://pkg.robjhyndman.com/forecast/>. R package version 8.13.
- Markovska, M., Bučkovska, A. e Taskovski, D. (2016) Comparative study of arima and holt-winters statistical models for prediction of energy consumption. Em *XIII International Conference ETAI*.
- Morettin, P. e Toloi, C. (2004) *Análise de Séries Temporais*, vol. 1: Modelos lineares univariados. Blucher.
- R Core Team (2020) *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL<https://www.R-project.org/>.
- Winters, P, R. (1960) Forecasting sales by exponentially weighted moving averages. *Management Science*, **6(3)**, 324–342.
- Yar, M. e Chatfield, C. (1990) Prediction intervals for the holt-winters forecasting procedure. *International Journal of Forecasting*, **6(1)**, 127–137.