Notas de Aula de

Álgebra Linear

Volume I

Lino Marcos da Silva

lino.silva@univasf.edu.br

Sumário

1 Espaço Vetorial

1.1 Introdução

Vetores são entes matemáticos que se caracterizam por possuir uma intensidade,uma direção e um sentido. São utilizados, por exemplo, para representar grandezas físicas, como força e velocidade. No curso de Álgebra Linear, consideramos como um vetor cada um dos elementos de um espaço vetorial. No contexto de espaços vetoriais, denominaremos de *escalar* qualquer elemento de um corpo[1] $\mathbb{K}$. Nesse curso, iremos considerar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (o corpo dos números reais) ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (o corpo dos números complexos). A seguir daremos a definição de um espaço vetorial e apresentaremos alguns exemplos clássicos. Para alguns desses exemplos iremos apresentar a prova, de que os mesmos são espaços vetoriais, na sala de aula; para alguns outros as provas serão apresentadas nesse texto e os demais ficarão como exercício para o aluno. **Atenção.** *Estas notas de aulas tem como objetivo guiar os alunos nos estudos da disciplina álgebra linear, nas turmas de minha responsabilidade, nos cursos de engenharia da UNIVASF. O uso das mesmas não dispensa a leitura dos livros didáticos indicados nas referências bibliográficas da disciplina, bem como a resolução de exercícios propostos nos mesmos.*

1.2 Espaço Vetorial

Definição. Um conjunto V não vazio é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ se em seus elementos, denominados **vetores**, estiverem definidas as seguintes duas operações:

- **Soma de Vetores:** A cada par de elementos u e v de V corresponde um vetor $u + v$, chamado de soma de u e v, satisfazendo, para quais quer u, v e w pertecentes a V, as seguintes propriedades:

  (A_1) $u + v = v + u$ (*comutatividade*)

  (A_2) $u + (v + w) = (u + v) + w$ (*associatividade*)

  (A_3) Existe um vetor $\theta \in V$, denominado **vetor nulo**, tal que $u + \theta = u$. (*existência do elemento neutro*)

  (A_4) Dado o vetor $u \in V$ existe o vetor $-u \in V$, denominado **vetor oposto**, tal que $u + (-u) = \theta$. (*existência do elemento simétrico*)

[1]Corpo é uma estrutura matemática na qual está definida duas operações satisfazendo algumas propriedades

- **Multiplicação por Escalar:** A cada par $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in V$, corresponde um vetor $\alpha \times v$, denominado produto por escalar de α por V, satisfazendo as seguintes propriedades:

(ME_1) $\alpha \times (u + v) = \alpha \times u + \alpha \times v$

(ME_2) $(\alpha + \beta) \times u = \alpha \times u + \beta \times u$

(ME_3) $(\alpha \times \beta) \times u = \alpha(\beta \times u)$

(ME_4) $1 \times u = u$.

Na definição anterior, quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dizemos que V é um espaço vetorial real. Por outro lado, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, dizemos que V é um espaço vetorial complexo. Em um espaço vetorial V, o elemento neutro e o elemento oposto, das propriedades (A3) e (A4), respectivamente, quando existem, são únicos.

1.3 Exemplos

1. **Espaço Vetorial Euclidiano.** O conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2); x_i \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de soma de vetores
$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
e a multiplicação por escalar
$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$
é um espaço vetorial real.

2. O conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de soma de vetores
$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
e a multiplicação por escalar
$$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$$
é um espaço vetorial real.

3. De um modo geral para $n \geqslant 1$, o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de soma de vetores
$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$
e a multiplicação por escalar
$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$
é um espaço vetorial real.

   Dessa forma, o conjunto $\mathbb{R}$ com as operações de adição e multiplicação de números reais, onde nesse caso os vetores são os números reais, é um espaço vetorial real (Justifique).

4. **Espaço Vetorial de Matrizes.** O Conjunto $\mathbb{M}(m, n)$ das matrizes reais de ordem $m \times n$ com a soma de matrizes e a multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial real.

5. **Espaço Vetorial de Polinômios.** O conjunto de polinômios $\mathbb{P}_n(t) = \{a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_2t^2 + a_1t + a_0, \;\; a_i \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de soma de polinômios

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= (a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t_+ a_0) + (b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + ... + b_1 t + b_0) \\ &= (a_n + b_n)t^n + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1} + ... + (a_1 + b_1)t + a_0 + b_0; \end{aligned}$$

e multiplicação de polinômios por escalar

$$\alpha \cdot p(t) = (\alpha a_n)t^n + (\alpha a_{n-1})t^{n-1} + ... + (\alpha a_1)t + \alpha a_0;$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Em particular, o conjunto

$$\mathbb{P}_2(t) = \{a_2t^2 + a_1t + a_0, \;\text{ com }\; a_2, a_1 \;\text{ e }\; a_0 \in \mathbb{R}\}$$

é um espaço vetorial, relativamente às mesmas operações. A seguir mostraremos que, de fato, $\mathbb{P}_2(t)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $p(t) = a_2t^2+a_1t+a_0$, $q(t) = b_2t^2+b_1t+b_0$ e $m(t) = c_2t^2+c_1t+c_0$ elementos de $\mathbb{P}_2(t)$ e considere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que as operações soma de polinômios e multiplicação de polinômio por escalar possuem as oitos propriedades da definição de espaço vetorial.

Primeiro vamos verificar que a propriedade (A1) é válida. De fato,

$$\begin{aligned} p(t) + q(t) &= a_2t^2 + a_1t + a_0 + b_2t^2 + b_1t + b_0 \\ &= (a_2 + b_2)t^2 + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0) \\ &= (b_2 + a_2)t^2 + (b_1 + a_1)t + (b_0 + a_0) \\ &= q(t) + p(t) \end{aligned}$$

para todo $p(t), q(t) \in \mathbb{P}_2(t)$. Agora, para mostrar que (A2) também vale, veja que

$$\begin{aligned} (p(t) + q(t)) + m(t) &= (a_2 + b_2)t^2 + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0) + c_2t^2 + c_1t + c_0 \\ &= (a_2 + b_2 + c_2)t^2 + (a_1 + b_1 + c_1)t + (a_0 + b_0 + c_0) \\ &= (a_2 + (b_2 + c_2))t^2 + (a_1 + (b_1 + c_1))t + (a_0 + (b_0 + c_0)) \\ &= \underbrace{a_2t^2 + a_1t + a_0}_{p(t)} + (\underbrace{(b_2 + c_2)t^2 + (b_1 + c_1)t + b_0 + c_0}_{q(t)+m(t)}) \\ &= p(t) + (q(t) + m(t)). \end{aligned}$$

Isto é, a soma de polinômios é **associativa**.

O *polinômio identicamente nulo* de grau menor ou igual a 2,

$$\theta(t) = 0t^2 + 0t + 0,$$

é tal que

$$\begin{aligned} p(t) + \theta(t) &= a_2t^2 + a_1t + a_0 + 0t^2 + 0t + 0 \\ &= (a_2 + 0)t^2 + (a_1 + 0)t + (a_0 + 0) \\ &= a_2t^2 + a_1t + a_0 \\ &= p(t), \end{aligned}$$

para todo $p(t) \in \mathbb{P}_2(t)$. Logo, o polinõmio identicamente $\theta(t) = 0t^2 + 0t + 0$ é o elemento neutro da soma de polinômios em $\mathbb{P}_2(t)$, e assim a propriedade (A3) também está verificada.

Agora note, que para cada polinômio $p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0 \in \mathbb{P}_2(t)$, existe o polinômio $-p(t) = -a_2t^2 - a_1t - a_0 \in \mathbb{P}_2(t)$ tal que

$$
\begin{aligned}
p(t) + (-p(t)) &= a_2t^2 + a_1t + a_0 + (-a_2t^2 - a_1t - a_0 \\
&= (a_2 - a_2)t^2 + (a_1 - a_1)t + (a_0 - a_0) \\
&= 0t^2 + 0t + 0 \\
&= \theta(t).
\end{aligned}
$$

Logo, a propriedade (A4) também está verificada.

Agora, para verificarmos a validade das propriedades (ME1)-(ME4), veja que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e para todo $p(t), q(t)$ em $\mathbb{P}_2(t)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\alpha(\beta(p(t))) &= \alpha(\beta(a_2t^2 + a_1t + a_0)) \\
&= \alpha(\beta a_2t^2 + \beta a_1t + \beta a_0) \\
&= \alpha\beta a_2t^2 + \alpha\beta a_1t + \alpha\beta a_0 \\
&= (\alpha\beta)(a_2t^2 + a_1t + a_0) \\
&= (\alpha\beta)p(t)
\end{aligned}
$$

e dessa forma, (ME1) é válida. Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\alpha + \beta)p(t) &= (\alpha + \beta)(a_2t^2 + a_1t + a_0) \\
&= (\alpha + \beta)a_2t^2 + (\alpha + \beta)a_1t + (\alpha + \beta)a_0 \\
&= \alpha a_2t^2 + \alpha a_1t + \alpha a_0 + \beta a_2t^2 + \beta a_1t + \beta a_0 \\
&= \alpha(a_2t^2 + a_1t + a_0) + \beta(a_2t^2 + a_1t + a_0) \\
&= \alpha p(t) + \beta p(t),
\end{aligned}
$$

e assim, (M2) é válida. Para mostrar que (ME3) também é válida, fazemos:

$$
\begin{aligned}
\alpha(p(t) + q(t)) &= \alpha((a_2 + b_2)t^2 + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)) \\
&= (\alpha a_2 + \alpha b_2)t^2 + (\alpha a_1 + \alpha b_1)t + (\alpha a_0 + \alpha b_0) \\
&= \alpha a_2t^2 + \alpha a_1t + \alpha a_0 + \alpha b_2t^2 + \alpha b_1t + \alpha b_0 \\
&= \alpha(a_2t^2 + a_1t + a_0) + \alpha(b_2t^2 + b_1t + b_0) \\
&= \alpha q(t) + \alpha p(t).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
1 \cdot p(t) &= 1 \cdot (a_2t^2 + a_1t + a_0) \\
&= 1 \cdot a_2t^2 + 1 \cdot a_1t + 1 \cdot a_0 \\
&= a_2t^2 + a_1t + a_0 \\
&= p(t)
\end{aligned}
$$

para todo $p(t) \in \mathbb{P}_2(t)$. Logo, a propriedade (ME4) também é válida e, portanto, mostramos que $\mathbb{P}_2(t)$ é um espaço vetorial real.

6. **Espaço Vetorial de Funções.** Dados números reais a e b com $a < b$, considere o intervalo da reta $\mathbb{X} = [a, b]$ (ou seja, $\mathbb{X}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}$). Denotemos por $\mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ o conjunto formado por todas as funções reais com domínio $\mathbb{X}$ e imagens real. Isto é, o conjunto formado por todas as funções
$$f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}.$$
Considerando em $\mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ as operações de soma de funções e multiplicação de função por escalar, como definidas a seguir:
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \;\text{ e }\; (\alpha g)(x) = \alpha g(x),$$
então $\mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial real.

Demonstração. Sejam f, g e h funções definidas em $\mathbb{X}$. Como para todo $x \in \mathbb{X}$, temos
$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$
pois $f(x)$ e $g(x)$ sao números reais, então temos
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x),$$
para todo $x \in \mathbb{X}$. Logo, $f + g = g + f$. Isto é, a soma de funções é **comutativa**.

De modo análogo,
$$[f+(g+h)](x) = f(x)+(g+h)(x) = f(x)+g(x)+h(x) = (f+g)(x)+h(x) = [(f+g)+h](x),$$
para todo $x \in \mathbb{X}$. Logo, $f + (g + h) = (f + g) + h$, e assim, a soma de funções é **associativa**.

Existe a função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, tal que, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Trata-se da função *nula*, que será denotada por θ. Assim, para todo $x \in \mathbb{X}$ e para toda $f \in \mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ temos
$$(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x).$$
Ou seja, existe a função $\theta(x) \in \mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ tal que
$$\theta + f = f$$
para toda $f \in \mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$. A função nula é o **elemento neutro** desta operação.

Para cada função $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ dada, a função $-f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, que transforma cada $x \in \mathbb{X}$ em $-f(x)$ é tal que
$$[f + (-f)](x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = \theta(x).$$
Logo, dada função $f \in \mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, existe a função $-f \in \mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ tal que $f + (-f) = \theta$. Isto é, a função $-f$ é o **elemento simétrico** da soma de funções.

Agora sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$.

$\alpha(\beta f)(x) = \alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta)f(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Logo,
$$\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f.$$
$((\alpha + \beta)f)(x) = (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f + \beta f)(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Logo,
$$(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f.$$

$(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x) = \alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Logo,

$$\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g.$$

Finalmente, $1 \cdot f(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Logo,

$$1 \cdot f = f.$$

Dessa forma, as operações de soma de funções e multiplicação por escalar satisfazem as oitos propriedades da definição, e portanto, $\in \mathbb{F}(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

7. **Espaço Vetorial das Soluções de um Sistema Linear Homogêneo.** O conjunto $\{(x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$ das soluções de um sistema linear homogêneo

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}\right. , \tag{1.3.1}$$

também é um espaço vetorial.

1.4 Exercícios Propostos

1. Seja V o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Qual é o vetor nulo de$V$? O que representa o vetor $-(x_1, x_2, ..., x_n)$?

2. Seja $W = \mathbb{M}(2,2)$. Descreva o vetor nulo e vetor oposto em W.

3. Descreva o vetor nulo e o vetor oposto em $\mathbb{P}_2(t) = \{a_2t^2 + a_1t + a_0, \text{ com } a_i \in \mathbb{R}\}$.

4. Mostre que o conjunto $V = \{(x,y); x, y \in \mathbb{R} \text{ e } xy > 0\}$ com as operações

$$(a,b) \oplus +(c,d) = (ac, bd) \text{ e } \alpha \otimes (a,b) = (a^\alpha, b^\alpha)$$

é um espaço vetorial real.

5. Mostre que o conjunto $V = \{(1,y); y \in \mathbb{R}\}$ com as operações

$$(1,y_1) + (1,y_2) = (1, y_1 + y_2) \text{ e } \alpha(1,y) = (1, \alpha y)$$

é um espaço vetorial real.

6. Seja o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y); x, y \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $\mathbb{R}^2$ não é um espaço vetorial com as operações assim definidas:

$$(x,y) + (z,w) = (x+z, y+w) \text{ e } \alpha(x,y) = (\alpha x, y).$$

7. Mostre a seguinte afirmação: Em um espaço vetorial V existe um único vetor nulo e cada elemento de$V$ possui um único inverso.

8. Mostre que os exemplos 4 e 7 são de fato espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

2 Subespaços Vetoriais

2.1 Introdução

Um espaço vetorial pode ser um conjunto muito grande e às vezes pode ser útil identificar outros espaços vetoriais dentro dele. Espaços vetoriais que estão dentro de outros espaços vetoriais são chamados de subespaços vetoriais. **Atenção.** *Estas notas de aulas tem como objetivo guiar os alunos nos estudos da disciplina álgebra linear, nas turmas de minha responsabilidade, nos cursos de engenharia da UNIVASF. O uso das mesmas não dispensa a leitura dos livros didáticos indicados nas referências bibliográficas da disciplina, bem como a resolução de exercícios propostos nos mesmos.*

2.2 Subespaço Vetorial

Definição. Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. O subconjunto W é um **subespaço vetorial** de V, se W é um espaço vetorial em relação as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em V.

De acordo com a definição anterior, qualquer subespaço de um espaço vetorial V deve, necessariamente, conter o vetor nulo de V. De fato, a operação de adição de vetores a ser considerada no subconjunto W é obrigatoriamente a mesma de V e o elemento neutro dessa operação é único. A Figura 2.1 ilustra esse fato.

Figura 2.1: Um subespaço vetorial é um espaço vetorial dentro de outro

Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto formado apenas pelo vetor nulo e o próprio espaço. Isto é, $\{0\}$ e V. Esses dois subespaços de V são chamados de **subespaços triviais**.

Utilizar a definição de subespaço vetorial para identificar se um subconjunto W de um espaço vetorial V é um subespaço é uma atividade laboriosa, pois exige a verificação das oito propriedades, (A1)-(A4) e (ME1)-(ME4), da definição de espaço vetorial. Felizmente, de acordo com a próxima proposição, não precisaremos fazer a verificação de todas essas propriedades. De fato, sendo W um subconjunto de V, as propriedades das operações que são válidas em V devem também ser válidas em W, desde que W seja um conjunto fechado em relação a essas operações. Isto é, o resultado das operações realizadas com elementos de W resultam em elementos de W.

Um subespaço vetorial W de um espaço vetorial V fica caracterizado pela seguinte proposição:

Proposição. Dados um espaço vetorial V e um subconjunto W de V não vazio. W é um subespaço de V se as duas condições a seguir forem satisfeitas:

(i) Se u e v são vetores quaisquer de W, então $u + v \in W$;

(ii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e v é um vetor qualquer de W, então $\alpha v \in W$.

Observações.

1. Todo subespaço W de um espaço vetorial V precisa, necessariamente, conter o vetor nulo de V. De fato, se tomarmos $\alpha = 0$, por (ii), temos

$$0 \cdot v = 0$$

para todo $v \in W$.

2. Dessa forma, se um subconjunto não vazio W de um espaço vetorial V não possuir o vetor nulo de V, então W não pode ser um subespaço vetorial de V.

2.3 Exemplos

1. Seja $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2); x_i \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais de soma de vetores e a multiplicação por escalar. O subconjunto

$$W = \{(x, y); y = kx, \ k \text{ é uma constante}\}$$

é um subespaço vetorial de V.

Demonstração. Observe que W também pode ser escrito da seguinte maneira:

$$W = \{(x, kx); x \in \mathbb{R} \text{ e } k \text{ constante}\}.$$

Primeiro é conveniente observar que $(0, 0) \in W$. De fato, para $x = 0$ teremos $kx = 0$, para todo $k \in \mathbb{R}$. Logo, $(0, 0) \in W$ e, desse modo, $W \neq \emptyset$.

Agora sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores de W. Dessa maneira, podemos escrever $u = (x_1, kx_1)$ e $v = (x_2, kx_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, kx_1) + (x_2, kx_2) \\ &= (x_1 + x_2, kx_1 + kx_2) \\ &= (x_1 + x_2, k(x_1 + x_2)). \end{aligned}$$

Fazendo $x_3 = x_1 + x_2$, temos que $u + v = (x_3, kx_3)$. Logo, $u + v \in W$ e o item (i) é satisfeito. Agora seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, y_1) \in W$. Assim

$$\begin{aligned} \alpha u &= \alpha(x_1, x_2) \\ &= \alpha(x_1, kx_1) \text{ pois } u \in W; \\ &= (\alpha x_1, \alpha k x_1). \end{aligned}$$

Fazendo $x_4 = \alpha x_1$ temos que $\alpha u = (x_4, kx_4)$. Logo, $\alpha u \in W$ e o intem (ii) da proposição está satisfeito. Poranto, W é um subespaço vetorial de V. Observe ainda que os elementos de W descrevem uma reta passando pela origem.

2. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $U = \{(x, 5x + 3); x \in \mathbb{R}\}$. O subconjunto U, com as operações usuais de soma de vetores e a multiplicação por escalar,não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. De fato, o vetor $\{(0, 0\}$ não pertence a W. Observe que os elementos de U descrevem uma reta em $\mathbb{R}^2$ que não passa pela origem.

3. Todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$ são: $\{(0, 0)\}$, o $\mathbb{R}^2$ e os seus subconjuntos que descrevem retas passando pela origem.

4. Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; ax + by + cz = 0\}$. Observe que W descreve, em $\mathbb{R}^3$, um **plano que passa pela origem**. W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   Demonstração. Primeiro é conveniente observar que $(0, 0, 0) \in W$. De fato, para $x = y = z = 0$ teremos $ax + by + cz = 0$, quaisquer que sejam os escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$. Logo, $(0, 0, 0) \in W$ e, desse modo, $W \neq \emptyset$.

   Agora sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ vetores de W. Dessa maneira, temos que $ax_1 + bx_1 + cz_1 = 0$ e $ax_2 + bx_2 + c_z2 = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \end{aligned}$$

   Fazendo $x_3 = x_1 + x_2$,$y_3 = y_1 + y_2$ e $z_3 = z_1 + z_2$ temos que

$$\begin{aligned} ax_3 + by_3 + cz_3 &= a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) \\ &= \underbrace{ax_1 + by_1 + cz_1}_{0} + \underbrace{ax_2 + by_2 + cz_2}_{0} \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

   Logo, $u + v \in W$ e o item (i) é satisfeito. Agora seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, y_1, z_1) \in W$. Assim, $ax_1 + bx_1 + cz_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha u &= \alpha(x_1, y_1, z_1) \\ &= \alpha(x_1, y_1, z_1) \\ &= (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1). \end{aligned}$$

   Fazendo $x_4 = \alpha x_1$, $y_4 = \alpha y_1$ e $z_4 = \alpha z_1$ temos que

$$\begin{aligned} ax_4 + by_4 + cz_4 &= a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) \\ &= \alpha(ax_1 + by_1 + cz_1) \\ &= \alpha \underbrace{ax_1 + by_1 + cz_1}_{0} \\ &= \alpha \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

   Logo, $\alpha u \in W$ e o intem (ii) da proposição está satisfeito. Portanto, W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

5. Todos os subespaços de $\mathbb{R}^3$ são: $\{(0, 0, 0)\}$, o $\mathbb{R}^3$, os seus subconjuntos que descrevem retas passando pela origem e os subconjuntos que descrevem planos passando pela origem.

6. Considere em $\mathbb{M}(n, n)$ o conjunto S das matrizes simétricas de ordem n. S é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}(n, n)$. Isto é,

$$S = \{A \in \mathbb{M}(n, n); A^T = A\}.$$

S é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}(n, n)$.

Demonstração. Primeiro observe que a matriz nula de ordem n é uma matriz simétrica. Logo, $S \neq \emptyset$. Agora sejam A e B matrizes simétricas de ordem n. Pela propriedade das matrizes simétricas, temos que

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

Por outro lado, A e B são matrizes simétricas. Logo, $A^T = A$ e $B^T = B$. Daí, vem que

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B.$$

Ou seja, $A + B$ é uma matriz simétrica. Logo, $A + B \in \mathbb{M}(n, n)$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e A uma matriz simétrica de ordem n, temos, pela propriedade de matriz simétrica, que

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A.$$

Assim, αA é uma matriz simétrica, ou seja, $\alpha A \in \mathbb{M}(n, n)$. Portanto, S é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}(n, n)$.

7. Considere o sistema linear homogêneo

$$AX = 0$$

onde A, a matriz dos coeficientes, tem ordem $m \times n$, X é a matriz das incógnitas e tem ordem $n \times 1$ e 0 pé matriz dos termos independentes e tem ordem $m \times 1$. Seja S_h o conjunto das soluções desse sistema linear homogêo. Isto é,

$$S_h = \{X \in \mathbb{M}(n, 1); AX = 0\}.$$

S_h é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}(n, n)$.

Intersecção de Subespaços

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponha que U e W são subespaços vetoriais de V. Então o conjunto

$$U \cap W = \{v \in V;\ v \in U \text{ e } v \in W\}$$

é um subespaço vetorial de V.

Demonstração.

Primeiro note que $U \cap W \neq \emptyset$. Isto é, $0 \in U \cap W$. De fato, como U e W são subespaços de V, então $0 \in U$ e $0 \in W$, logo $0 \in U \cap W$.

Agora, vamos mostrar que a soma de dois vetores quaisquer de $U \cap W$ é um vetor de $U \cap W$. Para isso suponha que $u, v \in U \cap W$. Dessa forma temos:

$$u \in U \cap W, \text{ logo } u \in U \text{ e } u \in W;$$
$$v \in U \cap W, \text{ logo } v \in U \text{ e } v \in W.$$

Dessa maneira, temos $u, v \in U$; e $u, v \in W$. Como U e W são subespaços, então $u + v \in U$ e $u + v \in W$. Logo,

$$u + v \in U \cap W.$$

Para mostrarmos que a multiplicação de um vetor de $U \cap W$ por um escalar também é um vetor $U \cap W$, considere $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in U \cap W$. Desse modo, $u \in U$ e $u \in W$ (ambos são subespaços de V), então $\alpha \cdot u \in U$ e $\alpha \cdot u \in W$. Logo, $\alpha \cdot u \in U \cap W$. Dessa forma concluimos que $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V.

Exemplos

1. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$$

e

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\}.$$

Seja (a,b,c) um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$. Observe que $(a,b,c) \in U \cap W$ se, e somente se, $(a,b,c) \in U$ e $(a,b,c) \in W$, simultaneamente. Mas, isso somente ocorre se tivermos $a = 0$ e $c = 0$. Logo, um vetor v do $\mathbb{R}^3$ está em $U \cap W$ se, e somente se, v é do tipo $(0,b,0)$. Assim, escrevemos

$$U \cap W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = z = 0\} = \{(0,y,0); y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Considere em $\mathbb{R}^2$ os subespaços

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x\}$$

e

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = -x\}.$$

Seja (a,b) um vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$. Observe que $(a,b) \in U \cap W$ se, e somente se, $(a,b) \in U$ e $(a,b) \in W$, simultaneamente. Mas, isso ocorre somente se tivermos $b = a$ e $b = -a$. De onde concluímos que $b = 0$ e $a = 0$. Logo, um vetor v do $\mathbb{R}^2$ está em $U \cap W$ se, e somente se, $v = (0,0)$. Assim, obtemos

$$U \cap W = \{(0,0)\}.$$

3. Sejam $V = \mathbb{M}(n,n)$ seja o espaço vetorial das matrizes quadradas, com entradas reais, de ordem n; U o subconjunto das matrizes triangulares inferiores e W o subconjunto das matrizes triangulares superiores de ordem n. É possível mostrar que U e W são subespaços vetoriais de V (Exercício). Observe que $U \cap W$ é o conjunto de todas as matrizes diagonais de ordem n.

Sobre a reunião, $U \cup W$, de dois subespaços U e W de um dado espaço vetorial V podemos dizer que, em geral, não é um subespaço vetorial de V. A Figura 2.2 ilustra a união e a intersecção de subconjuntos de V.

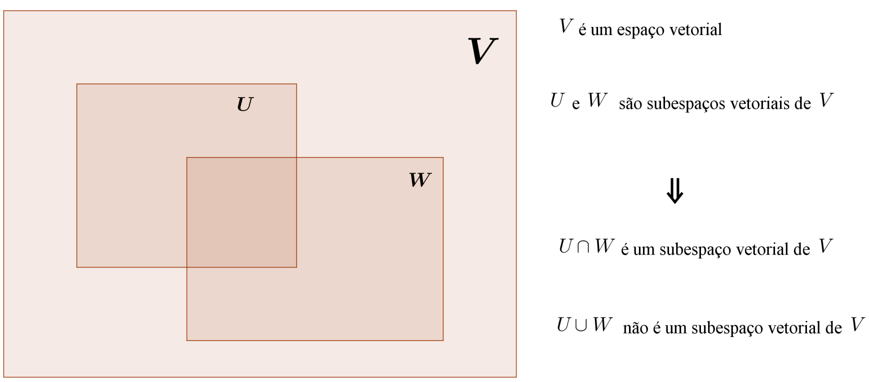

Figura 2.2: A intersecção de subespaços vetoriais é um subespaço vetorial

Mostraremos que a reunião de dois subespaços nem sempre é um subespaço vetorial, apresentando um exemplo no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$:

$$U = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\} \text{ e } W = \{(0,y); y \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que o vetor $(2,0) \in U$ e o vetor $(0,5) \in W$. Logo, ambos pertencem ao conjunto $U \cup W$. No entanto, a soma desses dois vetores

$$(2,0) + (0,5) = (2,5)$$

não é um vetor de U nem um vetor W. Logo, não é um vetor de $U \cup W$. Portanto, $U \cup W$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Soma de Subespaços

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponha que U e W são subespaços vetoriais de V. Então o conjunto

$$U + W = \{v \in V; v = v_1 + v_2,\ v_1 \in U \text{ e } v_2 \in W\}$$

é um subespaço vetorial de V. O subespaço $U + W$ chama-se *soma* de U e W.

Demonstração.

Primeiro note que $U + W \neq \emptyset$. Isto é, $0 \in U + W$. De fato, como U e W são subespaços de V, $0 \in U$ e $0 \in W$. Desse modo, como

$$0 = 0 + 0,$$

temos que 0 pode ser escrito como a soma de um elemento de U com um elemento de W.

Sejam $u, v \in U + W$. Dessa forma podemos escrever

$$\begin{aligned} u &= u_1 + w_1, \text{ com } u_1 \in U \text{ e } w_1 \in W; \\ v &= u_2 + w_2, \text{ com } u_2 \in U \text{ e } w_2 \in W. \end{aligned}$$

Assim, como $u_1, u_2 \in U$ (e U é um subespaço de V), então $u_1 + u_2 \in U$. Do mesmo modo, como $w_1, w_2 \in W$ (e W é um subespaço de V), então $w_1 + w_2 \in W$.

Desse modo,

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) \\ &= (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2). \end{aligned}$$

Fazendo $u_3 = u_1 + u_2$ e $w_3 = w_1 + w_2$, temos que $u + v = u_3 + w_3$, onde $u_3 \in U$ e $w_3 \in W$. Logo, $u + v \in U + W$.

Agora, sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in U + W$. Logo, existem $u_1 \in U$ e $w_1 \in W$ tais que $u = u_1 + w_1$. Daí,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u &= \alpha \cdot (u_1 + w_1) \\ &= \alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot w_1. \end{aligned}$$

Note que $\alpha \cdot u_1 \in U$ e $\alpha \cdot w_1 \in W$, pois U e W sao subespaços. Assim, fazendo $u_4 = \alpha \cdot u_1$ e $w_4 = \alpha \cdot w_1$, temos que $\alpha \cdot u = u_4 + w_4$, onde $u_4 \in U$ e $w_4 \in W$. Logo, $\alpha \cdot u \in U + W$. Dessa forma concluimos que $U + W$ é um subespaço vetorial de V.

Exemplos

1. Considere em $\mathbb{R}^3$, os subespaços

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$$

e

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}.$$

Dado (a,b,c) um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$(a,b,c) = (a,b,0) + (0,0,c).$$

Observe que $(a,b,0) \in U$ e $(0,0,c) \in W$. Logo, $(a,b,c) \in U+W$. Como (a,b,c) é um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^3$, concluimos que

$$U + W = \mathbb{R}^3.$$

2. Considere em $\mathbb{R}^2$, os subespaços

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = x\}$$

e

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = -x\}.$$

Seja (a,b) um vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$. Note que podemos escrever (a,b) do seguinte modo:

$$(a,b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{a-b}{2}, \frac{-a+b}{2}\right).$$

Como $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \in U$ e $\left(\frac{a-b}{2}, \frac{-a+b}{2}\right) \in W$, então $(a,b) \in U+W$. Mas, (a,b) é um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^2$, logo

$$\mathbb{R}^2 = U + W.$$

3. Sejam $V = \mathbb{M}(2,2)$ seja o espaço vetorial das matrizes quadradas, com entradas reais, de ordem 2; U o subconjunto das matrizes triangulares inferiores e W o subconjunto das matrizes triangulares superiores de ordem 2. Dada uma matriz quadrada de ordem 2 qualquer, digamos, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ c & \frac{d}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & b \\ 0 & \frac{d}{2} \end{bmatrix}.$$

Ou seja, qualquer matriz quadrada de ordem 2 pode ser escrita como a soma de um elemento de U (matriz triangular superior) e um elemento de W (matriz triangular superior). Portanto,

$$U + W = \mathbb{M}(2,2).$$

Soma direta

Definição. Seja V um espaço vetorial. Suponha que U e W são subespaços vetoriais de V. Diz-se que V é a *soma direta* de U e W, denota-se $V = U \oplus W$, se

(i) $U \cap W = \{0\}$;

(ii) $V = U + W$.

Exemplos

1. No exemplo 1 (Soma de Subespaços) os subespaços
$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$$
e
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$$
são tais que $\mathbb{R}^3 = U + W$. Além disso, $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$ (verifique!). Portanto,
$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W.$$

2. No exemplo 2 (Soma de Subespaços) os subespaços
$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x\}$$
e
$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = -x\}$$
são tais que $\mathbb{R}^2 = U + W$. Além disso, Além disso, $U \cap W = \{(0, 0)\}$ (verifique!). Portanto,
$$\mathbb{R}^2 = U \oplus W.$$

3. O exemplo 3 (Soma de Subespaços) temos $U + W = \mathbb{M}(2, 2)$, mas essa soma não pode ser uma soma direta por que $U \cap W$ é formado por todas as matrizes diagonais de ordem 2.

2.4 Exercícios Propostos

1. Mostre que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z - y = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

2. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ um plano do $\mathbb{R}^3$ passando pela origem. Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

3. Mostre que cada um dos subconjuntos de $\mathbb{R}^4$ a seguir são subespaços vetoriais.
   (a) $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 e z - t = 0\}$
   (b) $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; 2x + y - t = 0 e z = 0\}$

4. Verifique se os subconjuntos U e W, abaixo, são subespaços vetoriais de $\mathbb{M}(2, 2)$.
   (a) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; b = c \text{ e } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$
   (b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; b = c + 1 \text{ e } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

5. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$: $U = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$.
   (a) Mostre que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$;
   (b) Mostre que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$;
   (c) Mostre que $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

6. Mostre que o subcojunto das matrizes anti-simétricas de ordem n é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}(n, n)$.

7. Seja $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais e

$$P = \{f \in V; f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Ou seja, P é o subconjunto das funções pares. Mostre que P é um subespaço vetorial de V.

8. Seja $V = \mathbb{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções reais. Verifique se os seguintes subconjuntos de V são subespaços vetoriais.

   (a) $W_1 = \{f \in V; f \text{ é contínua}\}$

   (b) $W_2 = \{f \in V; f \text{ é derivável}\}$

   (c) $W_3 = \{f \in V; f \text{ é integrável}\}$

item Sejam $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2);\ b = c \right\}$ e $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}(2,2);\ a = d = 0 \text{ e } b = -c \right\}$.

   a) Mostre que U e V são subespaços vetoriais de $\mathcal{M}(2,2)$.

   b) Mostre que $\mathcal{M}(2,2) = U \bigoplus V$.

3

Combinação Linear

3.1 Introdução

Já sabemos que dados vetores u e v de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, os vetores $u + v$ e $\alpha u + \beta v$ estão em V, quaisquer que sejam os escalares α e β. Nesta seção veremos que qualquer vetor $v \in V$ pode ser escrito como soma de produtos por escalar de outros vetores de V. **Atenção.** *Estas notas de aulas tem como objetivo guiar os alunos nos estudos da disciplina álgebra linear, nas turmas de minha responsabilidade, nos cursos de engenharia da UNIVASF. O uso das mesmas não dispensa a leitura dos livros didáticos indicados nas referências bibliográficas da disciplina, bem como a resolução de exercícios propostos nos mesmos.*

3.2 Combinação Linear

Definição. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores de V. Dizemos que o vetor $v \in V$ é uma *combinação linear* dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$, se existem escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n. \tag{3.2.1}$$

A Figura 1 ilustra uma combinação linear de vetores no plano.

3.3 Exemplos

1. Considere o espaço vetorial $\mathbb{P}_2$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2 sobre $\mathbb{R}$. O polinômio $p(x) = 5x^2 - 3x - 3$ é uma combinação linear dos polinômios $p_1(x) = x^2 - x + 1$ e $p_2(x) = -3x^2 + x + 5$. De fato, verifica-se que $p(x) = 2p_1(x) - p_2(x)$.

2. Dados os vetores $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, 1)$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, temos:

   (a) O vetor $v = (-4, -18, 1)$ é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

   (b) O vetor $w = (4, 3, -6)$ não é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2.
   De fato, no item (a) observe que

$$v = 2v_1 + (-3)v_2.$$

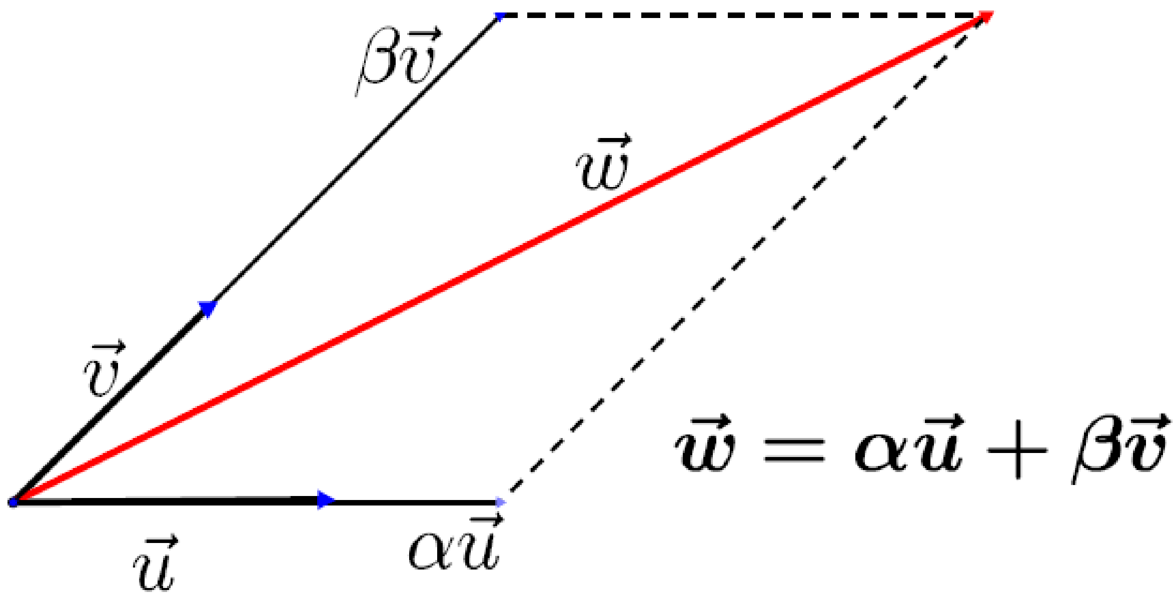

Figura 3.1: O vetor $\vec{w}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Uma forma de obter os escalares 2 e -3 é usando a definição de combinação linear, de onde vem a seguinte equação

$$\begin{aligned}(-4,-18,1) &= a_1(1,-3,2) + a_2(2,4,1)\\ &= (a_1 + 2a_2, -3a_1 + 4a_2, 2a_1 + a_2).\end{aligned}$$

Da iguadade de vetores em $\mathbb{R}^3$, obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= -4\\ -3a_1 + 4a_2 &= -18\\ 2a_1 + a_2 &= 1. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Resolvendo o sistema (3.3.1), concluimos que $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$ formam a única solução do mesmo.

Já para o item (b), usamos o mesmo procedimento, obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 4\\ -3a_1 + 4a_2 &= 3\\ 2a_1 + a_2 &= -6, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

o qual não possui solução. Logo, o vetor W não é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

3. O vetor $(3,4)$ do $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito de infinitas maneiras como combinação linear do vetores $(1,0)$, $(0,1)$ e $(2,-1)$. Com efeito, por definição, o vetor $(3,4)$ será uma combinação linear dos vetores $(1,0)$, $(0,1)$ e $(2,-1)$ se existirem escalares a_1, a_2 e a_3 tais que

$$(3,4) = a_1(1,0) + a_2(0,1) + a_3(2,-1).$$

Resolvendo essa equação vetorial, obtemos

$$(3,4) = (a_1 + 2a_3, a_2 - a_3),$$

de onde vem o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_3 &= 3 \\ a_2 - a_3 &= 4. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Note que o sistema linear (3.3.3) possui mais incógnitas do que equação. Logo é um sistema indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções. Considerando a_3 como uma variável livre, a solução geral o sistema linear (3.3.3) é dada por

$$\{(3 - 2a_3, 4 + a_3, a_3); a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

3.4 Subespaços Gerados

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $W = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um subconjunto não vazio de V. O conjunto S de **todas as combinações lineares** dos vetores de W é um subespaço vetorial de V.

De fato, $S \neq \emptyset$ pois

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n.$$

Isto é, o vetor nulo de V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de W. Agora, suponha que w_1 e w_2 são vetores quaisquer de S, então existem escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ e $b_1, b_2, .., b_n$ tais que

$$w_1 = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n \text{ e } w_2 = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n.$$

Daí, vem que

$$w_1 + w_2 = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + ... + (a_n + b_n)v_n.$$

Logo, $w_1 + w_2 \in S$ pois também é uma combinação linear de vetores de W. Além disso, tem-se que

$$\alpha \cdot w_1 = (\alpha a_1)v_1 + (\alpha a_2)v_2 + ... + (\alpha a_n)v_n$$

e, dessa maneira, $\alpha \cdot w_1 \in S$, para todo escalar α e todo $w_1 \in S$. Portanto, S é um subespaço vetorial de V.

Observações.

1. Diz-se que S é o *subespaço gerado* pelos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$. Ou que S é o *subespaço gerado* por W. Denota-se
$$S = G(W) = [v_1, v_2, ..., v_n].$$

2. Os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são chamados de vetores *geradores* do subespaço S, enquando W é o conjunto *gerador* do subespaço S.

3. Define-se $G(\emptyset) = \{0\}$. Isto é, o espaço gerado pelo conjunto vazio é o espaço vetorial formado apenas pelo vetor nulo.

4. $W \subset G(W)$. Ou seja, um conjunto de geradores sempre está contido no subespaço gerado por ele.

5. Todo subconjunto W de um espaço vetorial V gera um subespaço de V, podendo $G(W) = V$. Neste caso, diz-se que W é um gerador de V.

3.5 Exemplos

1. Em $\mathbb{R}^2$ o vetor $(1,1)$ gera o subespaço

$$U = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\}.$$

   Com efeito, qualquer vetor $(x,x) \in U$ pode ser escrito da seguinte maneira

$$(x,x) = x \cdot (1,1).$$

   Logo, $U = [(1,1)]$.

2. Os vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ geram o espaço $\mathbb{R}^2$. De fato, dado um vetor (x,y), qualquer, de $\mathbb{R}^2$, têm-se

$$(x,y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1).$$

   Ou seja, qualquer vetor do $\mathbb{R}^2$ se escreve como uma combinação linear dos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$. Portanto,

$$[(1,0),(0,1)] = \mathbb{R}^2.$$

3. Um vetor (x,y), qualquer, de $\mathbb{R}^2$, também pode ser escrito do seguinte modo:

$$(x,y) = \frac{x+y}{2}(1,1) + \frac{y-x}{2}(-1,1).$$

   Ou seja, qualquer vetor do $\mathbb{R}^2$ também pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $(1,1)$ e $(-1,1)$. Portanto,

$$[(1,1),(-1,1)] = \mathbb{R}^2.$$

   Observação. Os escalares $\dfrac{x+y}{2}$ e $\dfrac{y-x}{2}$ podem ser calculados resolvendo-se a equação

$$(x,y) = a_1(1,1) + a_2(-1,1)$$

   em função de x e y.

4. O conjunto de polinômios $\{1,t,t^2\}$ gera todo o espaço $\mathbb{P}_2$. De fato, qualquer polinômio $p(t)$ de grau igual ou menor do que 2 se escreve da seguinte maneira $p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$.

5. Em $\mathbb{M}(2,2)$, temos $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Logo, o subespaço das matrizes triângulares superiores de ordem 2 é gerado pelas matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Se $[u_1, u_2, .., u_k] = U$ e $[w_1, w_2, ..., w_k] = W$, então $U + W = [u_1, u_2, .., u_k, w_1, w_2, ..., w_k]$. Isto é, se os vetores $u_1, u_2, .., u_k$ geram o subespaço vetorial U; e se os vetores $w_1, w_2, ..., w_k$ geram o subespaço vetorial W, então o subespaço vetorial $U + W$ é gerado pela reunião dos vetores geradores de U com os vetores geradores de W.

3.6 Dependência e Independência Linear

Definição. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores de V. Dizemos que o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto *linearmente independente (LI)*, ou que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LI, se a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0_v$$

admite apenas a solução nula. Isto é, se $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

No caso em que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que o o conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto *linearmente dependente (LD)*, ou que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LD.

Observação. O símbolo 0_v na definição acima indica o vetor nulo do espaço vetorial V em questão.

O teorema a seguir estabelece outra caracterização da depência linear.

Teorema 1. *O conjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é* LD *se, e somente se, pelo menos um desses vetores for combinação linear dos demais.*

Demonstração.
Suponha que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto LD. Então, por definição, a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0$$

admite uma solução diferente da trivial. Isto é, existe uma solução $(a_1, a_2, ..., a_n)$ onde pelo menos um $a_i \neq 0$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $a_1 \neq 0$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n &= 0; \\ a_1v_1 &= -a_2v_2 - a_3v_3 - ... - a_nv_n; \\ v_1 &= \frac{1}{a_1}(-a_2v_2 - ... - a_nv_n); \\ v_1 &= -\frac{a_2}{a_1}v_2 - \frac{a_3}{a_1}v_3 - ... - \frac{a_n}{a_1}v_n. \end{aligned}$$

Logo, v_1 é uma combinação linear de $\{v_2, ..., v_n\}$.

Por outro lado, suponha que algum dos vetores de $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma combinação linear dos demais. sem perda de generalidade, vamos supor que v_1 seja esse vetor. Pela definição de combinação linear, existem escalares $(a_2, a_3, ..., a_n)$ tais que

$$v_1 = a_2v_2 + a_3v_3 + ... + a_nv_n.$$

Dessa equação, obtemos

$$v_1 - a_2v_2 - a_3v_3 - ... - a_nv_n = 0$$

que é uma combinação linear nula tendo o número 1 como o coeficiente de v_1. Logo, qualquer solução dessa equação será diferente da solução nula. Portanto, o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto LD. $\square$

Equivalentemente ao **Teorema1** , temos o seguinte:

Teorema 2. *O conjunto* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *é LI se, e somente se, nenhum desses vetores for combinação linear dos demais.*

3.7 Exemplos

1. *Em* $\mathbb{R}^2$, *os vetores* $(1,1)$ *e* $(-1,1)$ *são vetores LI.*

   De fato, sejam a_1 e a_2 tais que

$$\begin{aligned} a_1(1,1) + a_2(-1,1) &= (0,0) \\ (a_1 - a_2, a_1 + a_2) &= (0,0). \end{aligned}$$

   Daí, obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \end{aligned}$$

   cuja solução é $a_1 = a_2 = 0$.

2. *Em* $\mathbb{R}^2$, *Os vetores* $(1,0)$, $(0,1)$ *e* $(2,-1)$ *são linearmente dependentes.* De fato, note que o vetor $(2,-1)$ é uma combinação linear dos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$ pois

$$(2,-1) = 2(1,0 - 1(0,1).$$

   Logo pelo Teorema 1, o conjunto $\{(1,0),(0,1),(2,-1)\}$ é LD.

3. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e vetores $u, v \in V$. Provar que se u e v são LI, então $u + v$ e u–v também o são.

   Demonstração. Como queremos mostrar que os vetores $u + v$ e u–v são LI, considere a combinação linear dando o vetor nulo $a(u + v) + b(u - v) = 0_v$. Devemos mostrar que $a = b = 0$.

$$\begin{aligned} a(u+v) + b(u-v) &= 0_v \\ au + av + bu - bv &= 0_v \\ (a+b)u + (a-b)v &= 0_v \end{aligned}$$

   Como os vetores u e v são LI, por hipótese, segue da terceira equação que a e b deve satisfazer o sistema de equações

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ a - b &= 0, \end{aligned}$$

   cuja solução é $a = b = 0$. $\square$

4. *Seja* V *o espaço vetorial das funções reais contínuas. O conjunto* $\{e^x, e^{-x}\}$, *onde* e *é o número de Euler (base dos logaritmos naturais), é LI.*

   Demonstração. Devemos mostrar que a equação $ae^x + be^{-x} = 0$ admite apenas a solução $a = b = 0$. Dada a equação

$$ae^x + be^{-x} = 0, \tag{3.7.1}$$

   calculemos a derivada das funções de ambos os menbros. Daí, obtemos

$$ae^x - be^{-x} = 0. \tag{3.7.2}$$

Somando as equações (3.7.1) e (3.7.2), vem que

$$2ae^x = 0.$$

Como $2e^x \neq 0$ para todo x real, segue que $a = 0$. Substituindo o valor de a na equação (3.7.1), obtemos

$$be^{-x} = 0.$$

Como $e^{-x} \neq 0$ para todo x real, segue que $b = 0$. Logo, $a = b = 0$ e equação $ae^x + be^{-x} = 0$ admite apenas a solução nula. Portanto, o conjunto $\{e^x, e^{-x}\}$ é LI como queríamos demosntrar. □

Propriedades da Dependência e Independência Linear

Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.

1. Se $W = \{w\}$ e $w \neq 0_v$, então W é LI.
2. Se um conjunto $W \subset V$ contém o vetor nulo, então W é LD.
3. Se uma parte do conjunto $W \subset V$ é LD, então W é também LD.
4. Se um conjunto W é LI, qualquer parte $\bar{W}$ de W também é LI.
5. Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é LI e $\{v_1, v_2, ..., v_n, w\}$ é LD,então w é combinação linear de dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$.

   Demontração. Para provar (i), considere a equação $\alpha w = 0_v$. Como $w \neq 0_v$, então $\alpha = 0$ é a única solução possível. Logo pela definição de dependência linear, W é LI.

   Para provar (ii), suponha que W é um subconjunto de V contendo o vetor nulo. Como podemos escrever o vetor nulo como combinação linear dos demais vetores (basta tomar os coeficientes da combinação linear como sendo o número zero), então pelo Teorema 1, W é um conjunto LD.

   Para mostrar que (iii) vale, seja $W = \{v_1, v_2, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ um conjunto de V e seja $\bar{W} = \{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset W$ um conjunto LD. Logo, existe pelo menos um vetor de $\bar{W}$ que é uma combinação linear dos demais vetores de $\bar{W}$. Digamos que v_1 seja esse vetor. Logo, existem escalares $a_2, ...a_k$ tais que $v_1 = a_2v_2 + ... + a_kv_k$. Como podemos escrever,

   $$v_1 = a_2v_2 + ... + a_kv_k + 0v_{k+1} + ... + 0v_n,$$

   segue v_1 também é uma combinação linear dos demais vetores de W e, portanto, W é um conjunto LD.

   Os itens (iv) e (v) fica como exercício.□

3.8 Exercícios Propostos

1. Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.
   (a) Escrever o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.
   (b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v?

(c) Determinar uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v.

2. Consideremos no espaço $\mathbb{P}_2 = at^2 + bt + c; a, b, c\mathbb{R}$ os vetores $p(t) = t^2–2t+1$, $q(t) = t+2$ e $h(t) = 2t^2 - t$.

   (a) Escrever o vetor $m(t) = 5t^2–5t + 7$ como combinação linear de $p(t)$, $q(t)$ e $h(t)$.

   (b) Escrever o vetor $m(t) = 5t^2–5t + 7$ como combinação linear de $p(t)$ e $q(t)$.

   (c) Determinar uma condição para a, b e c de modo que o vetor at^2+bt+c seja combinação linear de $q(t)$ e $h(t)$.

   (d) É possível escrever $p(t)$ como combinação linear de $q(t)$ e $h(t)$?

3. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$S = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)]$$

   (a) o vetor $(2/3, 1, -1, 2)$ pertence a S?

   (b) o vetor $(0, 0, 1, 1)$ pertence a S?

4. Seja W o subespaço de $\mathbb{M}(2, 2)$ definido por

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

5. Seja W o subespaço de $\mathbb{M}(3, 2)$ gerado pelas matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Verifique se a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in W$.

6. Seja $V = \mathbb{C}[0, 1]$ o espaço vetorial das funções reais contínuas no intervalo $[0, 1]$. Verifique se cada um dos subconjutnos a seguir são LI em V.

   (a) $\{x, x+1, x^2 - 1\}$

   (b) $\{1, e^x, e^{-x}\}$

   (c) $\{senx, cosx\}$.

7. Dados vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ de um espaço vetorial V, prove que se $w \in V$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, ..., v_n$, então

$$[v_1, v_2, ..., v_n, w] = [v_1, v_2, ..., v_n].$$

8. Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$ vetores linearmente independentes de um espaço vetorial V. Prove que se $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n$, então $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$,..., $a_n = b_n$.

9. Sejam V um espaço vetorial e $u, v, w \in V$. Prove que o conjunto $\{u, v, w\}$ é LI se, e somente se, o conjunto $\{u + v, u + w, v + w\}$ é LI.

10. Sejam V um espaço vetorial e $u, v, w \in V$. Suponha que $\{u, v, w\}$ é LI. Dado $t \in V$, existem escalares α, β e γ tais que $t = \alpha u + \beta v + \gamma w$. Prove que $\{u + t, v + t, w + t\}$ é LI se, e somente se, $\alpha + \beta + \gamma \neq 1$.

4 Base e Dimensão

4.1 Introdução

Um espaço vetorial possui, em geral, infinitos vetores. Contudo, já sabemos que alguns espaços vetoriais podem ser gerados a partir de um número finito de seus elementos, através de combinações lineares realizadas com os mesmos. Esse resultado é muito interessante no sentido de que podemos construir todo um espaço vetorial usando apenas alguns de seus elementos. Nessa seção, veremos que conjuntos de geradores que são linearmente independentes tem essa propriedade. Por exemplo, o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é um conjunto LI de geradores do $\mathbb{R}^2$. Conjuntos dessa natureza serão chamados de bases e são o tema central da seção. **Atenção.** *Estas notas de aulas tem como objetivo servir de guia aos alunos que cursam a disciplina álgebra linear, nas turmas sob minha responsabilidade, dos cursos de engenharia da UNIVASF. O uso das mesmas não dispensa a leitura dos livros didáticos indicados nas referências bibliográficas da disciplina, bem como a resolução de exercícios propostos nos mesmos.*

4.2 Base

Definição. Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto de vetores não nulos de V. Dizemos que o conjunto β é uma base de V se:

(i) $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é LI

(ii) $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gera V. Ou seja,

$$V = [v_1, v_2, ..., v_n].$$

De maneira resumida, dizemos que um subconjunto não-vazio β de vetores de um espaço vetorial V é uma base de V se β é LI e gera V.

Observações.

1. Prova-se que todo espaço vetorial $V \neq \emptyset$ possui uma base. Além disso, se V possui um conjunto gerador com um número finito de elementos diz-se que V é um espaço *finitamente gerado*. Nesse caso, qualquer base de V terá um número finito de elementos.

2. Se V não for um espaço finitamente gerado, então qualquer base de V possui infinitos elementos. Isso acontece, por exemplo, com o espaço $F(\mathbb{X}, \mathbb{R})$ das funções reais definidas em $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$.

4.3 Exemplos

1. O subconjunto $\beta = \{e_1, e_2\}$ de vetores de $\mathbb{R}^2$, tal que $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, é uma base do $\mathbb{R}^2$;

   O subconjunto $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ de vetores de $\mathbb{R}^3$, tal que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, é uma base do $\mathbb{R}^3$. De um modo geral, o conjunto

$$\beta = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

   é uma base do $\mathbb{R}^n$. Tal base é conhecida como *base canônica* do $\mathbb{R}^n$.

2. Considere o espaço vetorial $\mathbb{P}_3$ dos polinômios de grau menor ou igual a 3 sobre $\mathbb{R}$. O subconjunto de $\mathbb{P}_3$ formado pelos polinômios

$$\beta = \{1, t, t^2, t^3\}$$

   é uma base de $\mathbb{P}_3$. De um modo geral, o conjunto

$$\{1, t, t^2, ..., t^n\}$$

   é uma base do espaço vetorial real $\mathbb{P}_n$. Esta base é chamada de *base canônica* do $\mathbb{P}_n$.

3. O subconjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   é uma base para o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem dois, $\mathbb{M}(2, 2)$. Esta é a base canônica de $\mathbb{M}(2, 2)$.

4.4 Exercícios resolvidos

1. Mostre que o subconjunto $\beta = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 2)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

2. Mostre que o conjunto

$$\beta = \{1, t - 1, t^2 + t, t^3 - t + 1\}$$

   é uma base $\mathbb{P}_3$, o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 3 sobre $\mathbb{R}$.

3. Mostre que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   é uma base para o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem dois, $\mathbb{M}(2, 2)$.

4.5 Resultados Importantes

Dado um conjunto de geradores de um espaço vetorial V, sempre podemos extrair do mesmo uma base de V. Além disso, se V é um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de n vetores, então quaisquer subconjunto de V com mais de n elementos é, necessariamente, um conjunto LD. Essas duas afirmações são apresentadas nos próximos teoremas.

Teorema 1. *Sejam $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial V. Então dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.*

Teorema 2. *Sejal V um espaço vetorial finitamente gerado pelo conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

Corolário. *Qualquer base de um espaço vetorial finitamente gerado tem sempre o mesmo número de elementos.*

O fato do número de elementos de uma base de um espaço vetorial V ser invariante motiva mais uma definição.: a d*imensão do espaço*. A dimensão de um espaço vetorial, que será definida a seguir, desempenha uma papel importante no estudo dos espaços vetoriais.

4.6 Dimensão

Definição. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se V admite uma base finita, então chamamos de *dimensão de* V ao número de elementos de tal base. Caso contrário dizemos que a dimensão de V é infinita. Denotaremos a dimensão de um espaço vetorial V por $\dim(V)$.

4.7 Exemplos

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Em particular, $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ e $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

2. $\dim(\mathbb{P}_n) = n + 1$.

3. $\dim(\mathbb{M}(m, n) = m \times n$.

4. $\dim(F(\mathbb{X}, \mathbb{R})) = \infty$.

Teorema 3. *Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.*

Corolário. *Se $\dim V = n$, então qualquer conjunto de n vetores LI de V formará uma base de V.*

A importância desse corolário está no fato de que se você souber que a dimensão de um espaço vetorial V é 2, por exemplo, e encontrar um conjunto de dois vetores LI, então você pode afirmar que ele é uma base de V.

4.8 Coordenadas

Teorema 4. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K, finitamente gerado e tal que $\dim(V) \geqslant 1$. Então, um conjunto não-vazio β de V é uma base de V se, e somente se, cada elemento de V se escreve de maneira única como uma combinação linear dos vetores de β.*

O ***Teorema 4*** estabelece que dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V, na qual foi fixada uma ordem nos seus elementos; e dado um vetor $v \in V$, existem escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ únicos, tais que,

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

. Os escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ são chamados de as *coordenadas* do vetor v em relação à base β de V. Denotamos

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

As coordenadas de um vetor $v \in V$ depende sempre da base β escolhida e da ordem de seus elementos.

4.9 Exercício Resolvido

O exercício seguinte estabelece que um espaço vetorial V é uma soma direta dos subespaços gerados por cada um dos vetores que compõem essa base.

1. *Dado um subconjunto não-vazio $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V, mostre que β é uma base de V se, e somente se,*

$$V = [v_1] \oplus [v_2] \oplus ... \oplus [v_n].$$

Resolução. Suponha que $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ seja uma base de V e sejam $V_1 = [v_1], V_2 = [v_2], ..., V_n = [v_n]$. Vamos mostrar que

$$V_i \cap V_j = \{0\}, \text{ para todo } i \neq j;$$

e que

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n.$$

Primeiro, suponha que $v \in V_i \cap V_j$. Logo, $v \in V_i$ e $v \in V_j$. Daí, existem escalares a_1 e a_2 tais que

$$v = a_1v_i \text{ e } v = a_2v_j.$$

Assim,

$$a_1v_i = a_2v_j.$$

Mas, se a_1 e a_2 forem, simultaneamente, diferentes de zero, então teríamos

$$v_i = \frac{a_2}{a_1}v_j \text{ e } v_j = \frac{a_1}{a_2}v_i.$$

Mas, isso não pode ocorrer porque v_i e v_j são vetores LI, já que pertencem a uma base de V. Logo, $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$. Isto é, $v = 0$ e assim, $V_i \cap V_j = \{0\}$. Como V_i e V_j foram tomados arbitrariamente, então o resultado vale para para todo $i, j = 1, 2, ..., n$. Agora seja $v \in V$. Como $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de V, então existem escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ tais que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n.$$

Isso mostra que

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n.$$

Portanto,

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n.$$

Por outro lado, suponha que

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n.$$

Vamos mostrar que $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base de V. Para isso, precisamos mostrar que β gera V e é LI. Como, por hipótese, $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$, então $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$. Logo, qualquer vetor $v \in V$ se escreve, do seguinte modo:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

para alguma sequência de escalares $a_1, a_2, ..., a_n$. Como v é arbitrário, segue que β gera V. Agora, suponha que $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ seja LD. Então existe, $v_j \in \beta$ que é combinação linear dos demais vetores de β. Digamos, sem perda de generalidade, que $v_j = a v_i$ para algum $i = 1, 2, ..n$ e $i \neq j$. Então, temos que $a v_i \in V_j$ e $a v_i \in V_i$. Logo, $a v_i \in V_j \cap V_i$. Mas, isso contradiz o fato de que $V_i \cap V_j = \{0\}$ (V é soma direta de $V_1, V_2, ..., V_j$). Portanto, β é um conjunto LI. □

4.10 Exercícios Propostos

1. Escreva uma base para o espaço das matrizes de ordem 2×3 com entradas reais. Qual seria uma base para o espaço das matrizes quadradas de ordem n?

2. Mostre que o conjunto $\{1 - t^3, (1 - t)^2, 1 - t, 1\}$ é uma base de $\mathbb{P}_3$.

3. Dado o subespaço W de $\mathbb{M}(2, 2)$ que é gerado pelo conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Determine uma base de W e a sua dimensão.

4. Considere o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.

   (a) O vetor $(1, -3, 1, 1) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$?

   (b) Determine uma base de $[v_1, v_2, v_3, v_4]$.

   (c) $[v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbb{R}^4$. Por quê?

5. Considere o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$. Verifique se $[v_1, v_2, v_3] = \mathbb{R}^3$.

6. Sejam $U = \{(x, y, z, t)\} \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ e } z - t = 0$ e $W = \{(x, y, z, t)\} \in \mathbb{R}^4; 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0$ dois subespaços de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine $U \cap W$;

(b) Determine $U + W$;

(c) Verifique se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

7. Dados os vetores $u = (2, -1, 4, 0)$, $v = (1, -2, 2, 3)$ e $w = (4, -5, 8, 6)$, faça o que se pede a seguir.

   (a) Mostre que os vetores u, v e w são vetores LD;

   (b) Mostre que dois vetores quaisquer constituem uma base para o subespaço $S = [u, v, w]$;

   (c) Seja o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(0, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$. Determine o subespaço $S \cap T$.

   (d) Quais são as dimensões dos subespaços S, T, $S \cap T$ e $S + T$?

   (e) Verifique se $\mathbb{R}^4 = S \oplus T$.

8. (a) Mostre que os conjuntos $\alpha = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta = \{(i, 0), (2, -3)\}$ e $\gamma = \{(i, i), (-1, 2i)\}$ são bases do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$.

   (b) Mostre que o conjunto $\delta = \{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ é uma bases do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

9. Qual é a dimensão do seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$S = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)]?$$

10. Seja W o subespaço de $\mathbb{M}(2, 2)$ definido por

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2a & a + 2b \\ 0 & a - b \end{bmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Determine uma base de W;

   (b) Determine $\dim(W)$;

   (c) Determine um subespaço S de $\mathbb{M}(2, 2)$ tal que $\mathbb{M}(2, 2) = S \oplus W$.

11. Considere o sistema linear

$$(*) \begin{cases} 2x + 4y - 6z &= a \\ x - y + 4z &= b \\ 6y - 14z &= c. \end{cases}$$

Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z)$ é solução de (*)$\}$. Isto é, S é o conjunto-solução do sistema linear (*).

   (a) Que condições devemos impor para a, b e c para que o sistema linear seja um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$?

   (b) Nas condições determinadas no ítem (a), determine uma base para S.

   (c) Verifique que $\dim(S)$ é igual ao grau de liberdade do sistema (*).

5 Mudança de Base

5.1 Introdução

Sejam V um espaço vetorial e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ uma base de V. Para cada vetor $v \in V$ existem únicos escalares a_1, a_2,...,a_n tais que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n.$$

Os escalares a_1, a_2,...,a_n são chamados de *coordenadas* de v em relação à base β. Denotamos,

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Exemplos

1. Considere $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Observe que o vetor $(2,3) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito como uma combinar linear dos vetores da base canônica do seguinte modo

   $$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1).$$

   Logo, $[(2,3)]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   De um modo geral, dado um vetor (x,y) qualquer em $\mathbb{R}^2$, sempre podemos escrever

   $$(x,y) = x(1,0) + y(0,1).$$

   Assim as coordenadas de (x,y) em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$ são os próprios escalares x e y. Isto é, $[(x,y)]_\beta = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Porém, em relação à outras bases do $\mathbb{R}^2$ as coordenadas de um vetor genérico (x,y) são, em geral, diferentes dos escalares x e y. Por exemplo, considere a base $\beta' = \{(1,1),(-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Em relação à esta base o vetor $(2,3)$ é escrito da seguinte maneira:

$$(2,3) = \frac{5}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(-1,1).$$

Daí, as coordendas de $(2,3)$ em relação à base β' são $\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Ou seja,

$$[(2,3)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Observação.

A ordem em que os elementos $v_1, v_2, ..., v_n$ de uma base de um espaço vetorial V estão dispostos, nessa base, influi na construção da matriz de coordenadas de um dado vetor v, em relação a essa base. Por exemplo, se considerarmos em $\mathbb{R}^2$, as bases $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta' = \{(0,1),(1,0)\}$, então as coordenadas do vetor $(4,5)$ em relação a essas bases, são dadas por $[(4,5)]_\beta = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $[(4,5)]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Por essa razão, deste ponto em diante, dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de um espaço vetorial V iremos considerar que a mesma está ordenada na ordem em que seus elementos aparecem.

5.2 Mudança de Base

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o conjunto dos números reais. Sejam $\alpha = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ duas bases de V. Então existem escalares $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ tais que

$$u = x_1u_1 + x_2u_2 + ... + x_nu_n \tag{5.2.1}$$

e

$$u = y_1v_1 + y_2v_2 + ... + y_nv_n. \tag{5.2.2}$$

Dessa forma, $[u]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $[u]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Agora, como cada vetor v_j, $j = 1, 2, ..., n$, pertence a V e α é uma base de V podemos escrever v_j como combinação linear de dos vetores $u_1, u_2, ..., u_n$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{n1}u_n \\ v_2 &= a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{n2}u_n \\ \vdots &= \qquad \vdots \\ v_n &= a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{nn}u_n \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Substituindo a equação (3) em (2), obtemos

$$\begin{aligned} u = y_1(a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{n1}u_n) + y_2(a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \\ + ... + a_{n2}u_n) + ... + y_n(a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{nn}u_n). \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Desenvolvendo os produtos e arrumando a equação em função de $u_1, u_2, ..., u_n$ obtemos:

$$\begin{aligned} u = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n)u_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n)u_2 + \\ + ... + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n)u_n. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

Da igualdade entre as equações (1) e (5), devido a unicidade das coordenadas $x_1, x_2, ..., x_n$, obtemos

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ \vdots &= \qquad\quad \vdots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n. \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Usando a notação matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Denotando

$$[I]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

obtemos

$$[u]_\alpha = [I]^\beta_\alpha [v]_\beta.$$

Definição (Mudança de base). Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o conjunto dos números reais, $\alpha = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ duas bases de V. A matriz $[I]^\beta_\alpha$ é chamada a *matriz mudança de base* da base β para a base α.

Observações

1. A $j-$ésima coluna da matriz $[I]^\beta_\alpha$ é formada pelas coordenadas do vetor v_j, da base β, em relação à base α. Isto é,

$$[I]^\beta_\alpha = [[v_1]_\alpha, [v_2]_\alpha, ..., [v_n]_\alpha].$$

2. A matriz $[I]_\alpha^\beta$ é invertível e a sua inversa é matriz $[I]_\beta^\alpha$. Isto é.

$$\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1} = [I]_\beta^\alpha.$$

Exemplos

1. Considere $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1),(-1,1)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. Note que

$$\begin{aligned}(1,1) &= 1(1,0) + 1(0,1)\\ (-1,1) &= -1(1,0) + 1(0,1).\end{aligned}$$

Daí, $[(1,1)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $[(-1,1)]_\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Logo,

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned}(1,0) &= \frac{1}{2}(1,1) - \frac{1}{2}(-1,1)\\ (0,1) &= \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(-1,1).\end{aligned}$$

Assim, $[(1,0)]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $[(0,1)]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Logo,

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Note que $[I]_\alpha^\beta [I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Isto é, as matrizes $[I]_\alpha^\beta$ e $[I]_\beta^\alpha$ são inversíveis, sendo uma a inversa da outra.

2. Sejam V um espaço vetorial e $\alpha = \{u, v, w, t\}$ e $\beta = \{u, u - v, v + w + t, v - t\}$ bases de V. Determine $[I]_\alpha^\beta$ e $[I]_\beta^\alpha$.

Resolução. Para determinarmos $[I]_\alpha^\beta$ precisamos escrever cada um dos vetores de β como combinação linear dos vetores de α. Sejam

$$\begin{aligned}v_1 &= u\\ v_2 &= u - v\\ v_3 &= v + w + t\\ v_4 &= v - t.\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
v_1 &= 1u + 0v + 0w + 0t \\
v_2 &= 1u + (-1)v + 0w + 0t \\
v_3 &= 0u + 1v + 1w + 1t \\
v_4 &= 0u + 1v + 0w + (-1)t.
\end{aligned}$$

De onde obtemos,

$$[v_1]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [v_2]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [v_3]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } [v_4]_\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[I]_\alpha^\beta = [v_1]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para obtermos $[I]_\beta^\alpha$ precisamos escrever os vetores de α como combinação linear dos vetores de β. Para isso, basta resolvermos o sistema (6) em função de v_1, v_2, v_3 e v_4. Feito isso, obtemos

$$\begin{aligned}
u &= v_1 \\
v &= v_1 - v_2 \\
w &= -2v_1 + 2v_2 + v_3 + v_4 \\
t &= v_1 - v_2 - v_4.
\end{aligned}$$

Daí obtemos

$$[u]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [v]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [w]_\beta = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } [t]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Outra maneira de calcular $[I]_\beta^\alpha$ é calcular $\left([I]_\alpha^\beta\right)^{-1}$.

5.3 Exercícios Propostos

1. Sejam $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta = \{(-1,1),(1,1)\}$ e $\gamma = \{(\sqrt{3},1),((\sqrt{3},-1)\}$.

(a) Determine a matriz mudança de base da base β para a base α, $[I]^{\beta}_{\alpha}$.

(b) Determine a matriz mudança de base da base α para a base β, $[I]^{\alpha}_{\beta}$.

(c) Determine $[I]^{\alpha}_{\gamma}$ e $[I]^{\gamma}_{\alpha}$.

(d) Calcule as coordenadas de $v = (3, -2)$ em relação a cada uma das bases α, β e γ.

2. Dadas duas bases α e β de $\mathbb{R}^3$ tais que $[I]^{\beta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule $[v]_{\alpha}$ sabendo-se que $[v]_{\beta} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (b) Calcule $[v]_{\beta}$ sabendo-se que $[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

3. Seja α a base canônica do $\mathbb{R}^2$ e seja β a base obtida da base α pela rotação de um ângulo $-\frac{\pi}{3}$. Ache $[I]^{\beta}_{\alpha}$ e $[I]^{\alpha}_{\beta}$.

4. Seja $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V. Mostre que $[I]^{\alpha}_{\alpha} = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

6

A Matriz de uma Transformação Linear

6.1 Introdução

O objetivo deste tópico é possibilitar o trabalho com transformações lineares através do estudo de matrizes associadas a essas transformações. A abordagem do estudo de tranformações lineares via matrizes é interessante por que, de um modo geral, os problemas fundamentais da álgebra linear, a resolução de sistemas lineares e cálculo de autovalores e autovetores, se reduzem ao trabalho com matrizes.

Inicialmente note que dada uma matriz A de ordem $m \times n$ podemos definir uma aplicação $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por

$$T_A(x) = Ax \tag{6.1.1}$$

para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Para tornar compatível as operações matriciaiso o vetor x é tomado como a matriz coluna $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

A aplicação T_A definida em (6.1.1) é uma transformação linear. De fato, sejam x e y vetores pertencentes ao $\mathbb{R}^n$ e α um escalar. Usando a definição de T_A e as propriedades das operações matriciais, temos

$$T_A(x + \alpha y) = A(x + \alpha y) = Ax + \alpha Ay = T_A(x) + \alpha T_A(y).$$

Ou seja, T_A é linear. Dessa forma, a cada matriz A de ordem $m \times n$ podemos associar uma transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. A recíproca dessa afirmação também é verdadeira. Isto é, a cada transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ podemos associar uma matriz A de ordem $m \times n$.

A seguir veremos que esse resultado pode ser generalizado para transformações lineares quaisquer, entre espaços vetoriais de dimensão finita quaisquer. Também veremos um procedimento para obter a matriz de uma transformação linear qualquer.

6.2 A Matriz de uma Transformação Linear

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, $T : U \to V$ uma transformação linear, $\alpha = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base U e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ uma base de V. Dessa forma, dado $u \in U$, existem únicos escalares a_1, a_2,...,a_n tais que

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n. \tag{6.2.1}$$

Como T é linear, então obtemos

$$T(u) = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + ... + a_nT(u_n). \tag{6.2.2}$$

Mais adiante voltaremos as equações (1) e (2). Por enquanto, observe que como $T(u_1)$, $T(u_2)$,...,$T(u_n)$ são vetores de V, então existem escalares a_{ij}, com $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$ tais que

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m \\ T(u_2) &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{m2}v_m \\ \vdots &= \vdots \\ T(u_n) &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{mn}v_m \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

Daí obtemos a matriz de coordenadas (ou vetor de coordenadas, já que possui uma única coluna), em relação a base β, de $T(u_1)$, $T(u_2)$,..., $T(u_n)$. Isto é,

$$[T(u_1)]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, [T(u_2)]_\beta = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, ..., [T(u_n)]_\beta = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definição (Matriz de uma tranformação linear). A matriz da transformação linear $T : U \to V$ em relação às bases α e β, denotamos $[T]_\beta^\alpha$, é a matriz cujas colunas são formadas pelos elementos das matrizes de coordenadas $[T(u_1)]_\beta, [T(u_2)]_\beta, ..., [T(u_n)]_\beta$. Isto é,

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Exemplos

1. Sejam $\alpha = \{(1,1), (-1,1)\}$ uma base $\mathbb{R}^2$, $\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e a transformação linear definida por $T(x,y,z) = (x, x+y, y)$. Determine a matriz de T em relação as bases α e β. Isto é, $[T]_\beta^\alpha$.

   Resolução. Por definição, $[T]_\beta^\alpha$ é a matriz cujas colunas são formadas pelos vetores $[T(1,1)]_\beta$ e $[T(-1,1)]_\beta$, nessa ordem. Logo, precisamos calcular primeiro $T(1,1)$ e $T(-1,1)$ e em seguida as suas coordendas em relação a base β.

   1. Cálculo de $T(1,1)$ e de suas coordenadas na base β, $[T(1,1)]_\beta$.

   Como $T(1,1) = (1,2,1)$, devemos calcular a_1, a_2 e a_3, tais que,

$$\begin{aligned}
(1,2,1) &= a_1(1,1,1) + a_2(1,1,0) + a_3(1,0,0),\\
(1,2,1) &= (a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2, a_1).
\end{aligned}$$

Daí obtemos o sistema linear

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= 1\\
a_1 + a_2 &= 2\\
a_1 &= 1,
\end{aligned}$$

cuja solução é $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ e $a_3 = -1$. De onde obtemos $[T(1,1)]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. Cálculo de $T(-1,1)$ e de suas coordenadas na base β, $[T(-1,1)]_\beta$.

Como $T(-1,1) = (-1,0,1)$, devemos calcular a_1, a_2 e a_3, tais que,

$$\begin{aligned}
(-1,0,1) &= a_1(1,1,1) + a_2(1,1,0) + a_3(1,0,0),\\
(-1,0,1) &= (a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2, a_1).
\end{aligned}$$

Analogamente, ao primeiro caso, resolvemos o sistema linear

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= -1\\
a_1 + a_2 &= 0\\
a_1 &= 1,
\end{aligned}$$

cuja solução é $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ e $a_3 = -1$ e obtemos $[T(-1,1)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. Escrevemos a matriz de T.

Finalmente, temos a matriz

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Dado $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^4$ e $\beta = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$, determinar a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolução. Primeiro note que pela definição de $[T]^\alpha_\beta$, temos:

$[T(e_1)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $[T(e_2)]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,$[T(e_3)]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $[T(e_4)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Dessa maneira, obtemos:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= 1(1,1,1) + (-1)(0,1,1) + 5(0,0,1) = (1,0,6), \\ T(e_2) &= 2(1,1,1) + 0(0,1,1) + 4(0,0,1) = (2,2,6), \\ T(e_3) &= 3(1,1,1) + 1(0,1,1) + 0(0,0,1) = (3,4,4), \\ T(e_4) &= 0(1,1,1) + 1(0,1,1) + (-2)(0,0,1) = (0,1,-1). \end{aligned}$$

Agora o problema se reduz a encontrar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (1,0,6), \\ T(e_2) &= (2,2,6), \\ T(e_3) &= (3,4,4), \\ T(e_4) &= (0,1,-1). \end{aligned}$$

Para isto, consideremos um vetor genérico do $\mathbb{R}^4$, isto é, (x,y,z,w) e vamos escrevê-lo como combinação linear dos vetores da base $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Ou seja,

$$(x,y,z,w) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4.$$

Como T é linear, obtemos:

$$\begin{aligned} T(x,y,z,w) &= xT(e_1) + yT(e_2) + zT(e_3) + wT(e_4), \\ &= x(1,0,6) + y(2,2,6) + z(3,4,4) + w(0,1,-1), \\ &= (x + 2y + 3z, 2y + 4z + w, 6x + 6y + 4z + w). \end{aligned}$$

Portanto, a transformação linear procurada é

$$T(x,y,z,w) = (x + 2y + 3z, 2y + 4z + w, 6x + 6y + 4z + w).$$

3. **Matriz da transformação Identidade e a matriz mudança de base.** Sejam $\alpha = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ duas bases distintas de U e $T : U \to U$ a transformação linear identidade, isto é, $T(u) = u$ para todo $u \in U$. Então a matriz de T em relação às bases α e β é igual a matriz de mudança de base, da base α para a base β. Ou seja, $[T]^\alpha_\beta = [I]^\alpha_\beta$.

   Demonstração. Neste caso, observe que como $T(u_i) = u_i$ para $i = 1, 2, .., n$, então quando calculamos as coordenadas de $T(u_1), T(u_2), ..., T(u_n)$ na base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, estamos, na verdade, calculando as coordenadas de $u_1, u_2, ..., u_n$ na base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Ou seja,

$$\begin{aligned} T(u_1) &= u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{n1}v_n \\ T(u_2) &= u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{n2}v_n \\ \vdots &= \vdots \\ T(u_n) &= u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{nn}v_n \end{aligned}$$

   Assim, obtemos

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n_2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [I]^\alpha_\beta.$$

4. Quando temos transformações lineares $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e as bases α e β consideradas são as bases canônicas dos espaços envolvidos, então é comum representarmos a matriz da transformação T, simplesmente, por $[T]$. Por exemplo, considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (z - x, z - y)$. A matriz de T em relação as bases canônicas $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\beta = \{e_1, e_2\}$ do $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, é a matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Sejam $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (a_0, a_1, a_2),$$

$\alpha = \{1, t, t^2\}$ base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Determinar $[T]^\alpha_\beta$.

Resolução. Primeiro note que $1 = 1+0\cdot t+0\cdot t^2$, $t = 0\cdot 1+1\cdot t+0\cdot t^2$ e $t^2 = 0\cdot 1+0\cdot t+1\cdot t^2$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} T(1) &= T(1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2) = (1, 0, 0) \\ T(t) &= T(0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2) = (0, 1, 0) \\ T(t^2) &= T(0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot t^2) = (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Para calcular as coordenas desses vetores na base β do $\mathbb{R}^3$ precisamos resolver os sistemas lineares dados pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} (1, 0, 0) &= a_{11}(1, 0, 1) + a_{21}(0, 1, 1) + a_{31}(0, 1, 1) \\ (0, 1, 0) &= a_{12}(1, 0, 1) + a_{22}(0, 1, 1) + a_{32}(0, 1, 1) \\ (0, 0, 1) &= a_{13}(1, 0, 1) + a_{23}(0, 1, 1) + a_{33}(0, 1, 1) \end{aligned}$$

De onde, obtemos

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

6.3 Exercícios Propostos

1. Determine a matriz da tranformação em relação à base canônica da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (z - x, z - y, z)$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x\cos\theta - y\mathrm{sen}\theta, x\mathrm{sen}\theta + y\cos\theta)$. Determine $[T]^\alpha_\beta$ sendo $\alpha = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ e $\beta = \{e_1, e_2\}$.

3. Determine a matriz de cada das seguintes tranformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em relação à base canônica $\mathbb{R}^2$.

   a) $T(x, y) = c(x, y)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ (*Contração ou expansão*).

b) $T(x, y) = (x, -y)$ (*Reflexão em torno do eixo x*).

c) $T(x, y) = (-x, -y)$ (*Reflexão na origem*).

d) $T(x, y) = (x + cy, y)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ (*Cisalhamento horizontal*).

Teorema 1. Sejam U e V espaços vetoriais, α e β bases de U e de V, respectivamente, e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então, para cada $u \in U$ vale

$$[T(u)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [u]_\alpha.$$

Figura 6.1: As coordenadas de $T(u)$ na base β é igual ao produto da matriz de $[T]_\beta^\alpha$ pelo vetor das coordendas de u na base α.

Demonstração. Considerando que $\alpha = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ são as bases de U e V, respectivamente. Basta voltarmos às equações (1), (2) e (3) do início do texto. Substituindo as equações de (3) na equação (2), obtemos:

$$\begin{aligned} T(u) = {} & a_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{m1}v_m) + a_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{m2}v_m) + \\ & + ... + a_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{mn}v_m). \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

A equação (4) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} T(u) &= (a_1a_{11} + a_2a_{12} + ... + a_na_{1n})v_1 + (a_1a_{21} + a_2a_{22} + ... + a_na_{2n})v_2 + \\ &= + ... + (a_1a_{m1} + a_2a_{m2} + ... + a_na_{mn})v_m. \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

Daí, fazendo

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1a_{11} + a_2a_{12} + ... + a_na_{1n} \\ b_2 &= a_1a_{21} + a_2a_{22} + ... + a_na_{2n} \\ \vdots &= \vdots \\ b_m &= a_1a_{m1} + a_2a_{m2} + ... + a_na_{mn} \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Obtemos, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Mas, note de (1), (3) e de (5) que $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [u]_\alpha$, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m_2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [T]_\beta^\alpha$ e que $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = [T(u)]_\beta$. Portanto, temos

$$[T(u)]_\beta = [T]_\beta^\alpha [u]_\alpha.$$

6.4 Matriz da composição de tranformações lineares

O próximo teorema estabelece que a matriz de uma composição de transformações lineares é igual ao produto das matrizes das transformações envolvidas em relação as bases consideradas para os seus respectivos domínios e contradomínios. Essa é uma das vantagens de se trabalhar com as matrizes de transformações lineares, pois o cálculo de produto de matrizes pode ser efetuado eficientemente através de computadores. A **Figura 2** ilustra a composição de duas transformações lineares T_1 e T_2 do teorema abaixo.

Teorema 2. Sejam $T_1 : U \to V$ e $T_2 : V \to W$ transformações lineares e α, β e γ bases de U, V e W respectivamente. Então a aplicação composta de T_1 com T_2,

$$T_2 \circ T_1 : U \to W,$$

é uma transformação linear e

$$[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha = [T_2]_\gamma^\beta \cdot [T_1]_\beta^\alpha.$$

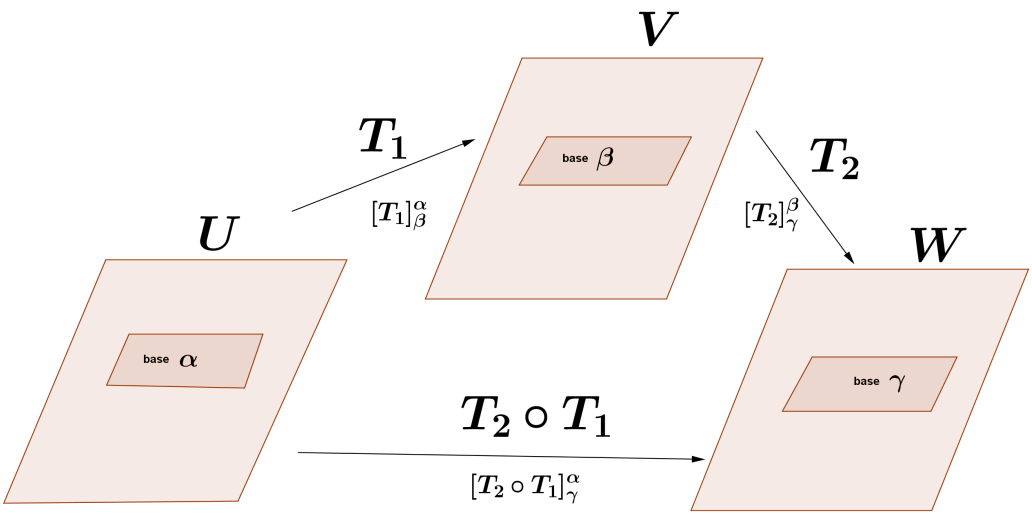

Figura 6.2: Matriz da composição de duas transformações lineares

Demonstração. Queremos mostrar que $[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha = [T_2]_\gamma^\beta \cdot [T_1]_\beta^\alpha$. Para isso note que pelo **Teorema 1** temos

$$[(T_2 \circ T_1)(u)]_\gamma = [T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha [u]_\alpha \ \text{ e } \ [(T_2(T_1(u))]_\gamma = [T_2]_\gamma^\beta [T_1(u)]_\beta. \tag{6.4.1}$$

Como $(T_2 \circ T_1)(u) = (T_2(T_1(u))$, segue que

$$[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha [u]_\alpha = [T_2]_\gamma^\beta [T_1(u)]_\beta. \tag{6.4.2}$$

Mas, por outro lado, também pelo **Teorema 1**, vem que

$$[T_1(u)]_\beta = [T_1]_\beta^\alpha [u]_\alpha. \tag{6.4.3}$$

Substituindo (6.4.3) em (6.4.2), obtemos:

$$[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha [u]_\alpha = [T_2]_\gamma^\beta [T_1]_\beta^\alpha [u]_\alpha. \tag{6.4.4}$$

Pela unicidade das coordenadas do vetor u em relação a base α, segue que

$$[T_2 \circ T_1]_\gamma^\alpha = [T_2]_\gamma^\beta [T_1]_\beta^\alpha,$$

como queríamos demonstrar.

Como consequência do **Teorema 2** resulta que se T é uma transformação linear inversível, então a matriz da transformação inversa T^{-1} pode ser obtida calculando a matriz inversa da matriz de T. Isso é o que afirma o próximo corolário.

Corolário 1. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear inversível, ou seja T é um isomorfismo, e α e β são bases de U e V, então $T^{-1} : V \to U$ é uma transformação linear e

$$[T^{-1}]_\alpha^\beta = \left([T]_\beta^\alpha\right)^{-1}.$$

Matrizes Semelhantes

Seja $T : U \to U$ uma transformação linear e considere α e β bases distintas de U. Então, podemos obter uma matriz de T em relação a base α, $[T]_\alpha^\alpha$; e uma matriz de T em relação a base β, e $[T]_\beta^\beta$. Uma pergunta importante a se fazer sobre essas duas matrizes é a seguinte: qual a relação entre as matrizes $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$?

Para responder a essa questão, considere a **Figura 3.**

Figura 6.3:

Note que as transformações identidade I_1 e I_2 possuem matrizes em relação as bases α e β, $[I_1]_\alpha^\beta$ e $[I_2]_\beta^\alpha$, respectivamente. Note ainda que podemos escrever T como a transformação composta

$$T = I_2 \circ T \circ I_1.$$

Dessa forma, obtemos

$$[T]_\beta^\beta = [I_2 \circ T \circ I_1]_\beta^\beta.$$

Segue do **Teorema 2** que

$$[T]_\beta^\beta = [I_2]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I_1]_\alpha^\beta.$$

Como $[I_1]_\alpha^\beta = ([I_2]_\beta^\alpha)^{-1}$, pois são matrizes mudança de base entre as bases α e β e vice-versa; fazendo $P = [I_2]_\beta^\alpha$, obtemos

$$[T]_\beta^\beta = P[T]_\alpha^\alpha P^{-1}.$$

Isto significa que as matrizes $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ são *matrizes semelhantes.*

Dizemos que duas matrizes A e B de mesma ordem n são semelhantes, se existe uma matriz P, também de ordem n, invertível e tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

Matrizes semelhantes são importantes porque compartilham, entre outras propriedades, a de possuirem o mesmo determinante e os mesmos autovalores. No nosso contexto, isso significa que o determinante da matriz $[T]_\alpha^\alpha$ é igual ao determinante da matriz $[T]_\beta^\beta$, que é igual ao determinante da matriz da transformação T em qualquer base de U. A relevância desse resultado está no fato de que podemos determinar uma base de U na qual a matriz de T possa ser a mais simples possível. Por exemplo, uma matriz diagonal. O problema de determinar uma base do espaço vetorial U para a qual a transformação linear $\mathsf{T} : \mathsf{U} \to \mathsf{U}$ seja uma matriz diagonal é um problema central nesse curso e será estudado mais adiante.

7 Transformações Lineares

7.1 Introdução

O objetivo deste tópico é estudar funções (também chamadas de aplicações ou transformações) entre espaços vetoriais. Estamos interessados particularmente em funções que preservem as operações de soma de vetores e multiplicação por escalar. As funções que satisfazem tais propriedades são chamadas de transformações lineares. Estudaremos aqui apenas transformações lineares entre espaços vetoriais reais. No entanto, todos os conceitos apresentados são extensíveis à espaços vetoriais complexos.

7.2 Transformação Linear

Definição (Transformação Linear). Sejam U e V espaços vetoriais sobre o conjunto dos números reais. Uma transformação linear de U em V,

$$T : U \to V$$

é uma função que possui as seguintes propriedades:

(i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$, para todo u e v em U.

(ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$, para todo $u \in U$ e todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observações.

1. As propriedades (i) e (ii) são equivalentes à

$$T(u + \alpha v) = T(u) + \alpha T(v)$$

para todo u e v em U e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear, então

$$T(0_u) = 0_v.$$

As duas observações anteriores facilitam o trabalho de verificar se uma dada aplicação $T : U \to V$ é uma transformação linear, o que pode ser feito da seguinte maneira: Primeiro, calculamos $T(0_u)$. Se $T(0_u) \neq 0_v$, então T não pode ser uma transformação linear. Agora, caso $T(0_u) = 0_v$, então verificamos se T satisfaz $T(u+\alpha v) = T(u)+\alpha T(v)$ para todo u e v em U e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Em caso afirmativo, concluímos que T é uma transformação linear de U em V.

7.3 Exemplos de Transformações Lineares

1. A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y) = x + y$ é uma transformação linear. De fato, $T(0, 0) = 0 + 0 = 0$. Além disso, sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$ e α um número real qualquer. Note que

$$u + \alpha v = (x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2).$$

Assim,

$$T(u + \alpha v) = T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) = (x_1 + \alpha x_2) + (y_1 + \alpha y_2) = (x_1 + y_1) + \alpha(x_2 + y_2).$$

Por outro lado, como $T(u) = x_1 + y_1$ e $T(v) = x_2 + y_2$, então

$$T(u) + \alpha T(v) = x_1 + y_1 + \alpha(x_2 + y_2).$$

Portanto, $T(u + \alpha v) = T(u) + \alpha T(v)$.

2. A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x + 1)$ não é uma transformação linear. De fato, $T(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0)$.

3. A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x, x + y, y)$ é uma transformação linear. De fato, $T(0, 0) = (0, 0, 0)$. Além disso, sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$ e α um número real qualquer.

$$T(u + \alpha v) = T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2) = (x_1 + \alpha x_2, x_1 + \alpha x_2 + y_1 + \alpha y_2, y_1 + \alpha y_2).$$

Por outro lado, como $T(u) = (x_1, x_1 + y_1, y_1$ e $T(v) = (x_1, x_2 + y_2, y_2)$, então

$$T(u)+\alpha T(v) = (x_1, x_1+y_1, y_1)+\alpha(x_2, x_2+y_2, y_2) = (x_1+\alpha x_2, x_1+y_1+\alpha(x_2+y_2), y_1+\alpha y_2).$$

Portanto, $T(u + \alpha v) = T(u) + \alpha T(v)$.

4. A aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, y, z)$ é uma transformação linear. De fato, $T(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Além disso, sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^3$ e α um número real qualquer. Note que

$$u + \alpha v = (x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2, z_1 + \alpha z_2).$$

Dessa maneira,

$$T(u + \alpha v) = T(x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2, z_1 + \alpha z_2) = (x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2, z_1 + \alpha z_2).$$

Por outro lado,

$$T(u) + \alpha T(v) = (x_1, x_1, z_1) + \alpha(x_2, x_2, z_2) = (x_1 + \alpha x_2, y_1 + \alpha y_2, z_1 + \alpha z_2).$$

Portanto, $T(u + \alpha v) = T(u) + \alpha T(v)$.

5. A aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{M}(2,2)$ definida por

$$T(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & 3 \\ x-y & z-x \end{bmatrix}$$

não é uma transformação linear. De fato, $T(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. A aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y) = (x\cos\theta - y\,sen\theta, x\,sen\theta + y\cos\theta)$$

é uma transformação linear. Com efeito, dados $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} T(u+\alpha v) &= T(x_1+\alpha x_2, y_1+\alpha y_2) \\ &= ((x_1+\alpha x_2)\cos\theta - (y_1+\alpha y_2)sen\theta, (x_1+\alpha x_2)sen\theta + (y_1+\alpha y_2)\cos\theta) \\ &= (x_1\cos\theta - y_1 sen\theta, x_1 sen\theta + y_1\cos\theta) + (\alpha x_2\cos\theta - \alpha y_2 sen\theta, \alpha x_2 sen\theta + \alpha y_2\cos\theta) \\ &= (x_1\cos\theta - y_1 sen\theta, x_1 sen\theta + y_1\cos\theta) + \alpha(x_2\cos\theta - y_2 sen\theta, x_2 sen\theta + y_2\cos\theta)) \\ &= T(u) + \alpha T(v). \end{aligned}$$

7. A aplicação $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_2)$$

é uma transformação linear. Com efeito, sejam $p(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$ e $q(x) = b_0+b_1x+b_2x^2$ polinômios quaisquer do espaço vetorial $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Da soma de dois polinômios obtemos

$$p + \alpha q = a_0 + \alpha b_0 + (a_1 + \alpha b_1)x + (a_2 + \alpha b_2)x^2.$$

Assim,

$$T(p+\alpha q) = T(a_0 + \alpha b_0 + (a_1 + \alpha b_1)x + (a_2 + \alpha b_2)x^2) = (a_0 + \alpha b_0, a_1 + \alpha b_1, a_2 + \alpha b_2).$$

Por outro lado, como $T(p) = (a_0, a_1, a_2)$ e $T(q) = (b_0, b_1, b_2))$, então

$$T(p) + \alpha T(q) = (a_0, a_1, a_2) + \alpha(b_0, b_1, b_2) = (a_0 + \alpha b_0, a_1 + \alpha b_1, a_2 + \alpha b_2).$$

Logo, $T(p + \alpha q) = T(p) + \alpha T(q)$.

8. Seja $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ uma transformação do espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 3 no espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2, ambos sobre $\mathbb{R}$, tal que

$$D(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1.$$

Isto é, $\mathcal{D}$ é a função derivada restrita ao espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Como a derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas dessas funções; e a derivada do produto de uma constante por uma função é igual a constante vezes a derivada da função, então podemos afirmar que D é uma transformação linear de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

9. Seja $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ o conjunto formado por todas as funções reais $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas em $[a,b]$. A transformação $S : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que

$$S(f) = \int_a^b f(x)dx$$

é uma transformação linear. De fato, a constatação deste fato é uma consequências das propriedades das integrais definidas.

7.4 Exercícios Propostos

1. Seja V um espaço vetorial real qualquer. Mostre que $T : V \to V$ dada por $T(v) = v$ é uma transformação linear.

2. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação definida por $T(x) = \lambda x$. Mostre que T é linear. (Na verdade, toda transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é da forma λx. Mostre isso!).

3. Mostre que as seguintes aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são transformações lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = c(x, y)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ (*Contração ou expansão*).

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, -y)$ (*Reflexão em torno do eixo x*).

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-x, -y)$ (*Reflexão na origem*).

   (d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + cy, y)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ (*Cisalhamento horizontal*).

4. Sejam a e b números reais diferentes de zero. Mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + a, y + b)$ (*Translação*) não é uma transformação linear.

5. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}(2, 2)$ definida por

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} x + y & x \\ y & x - y \end{bmatrix}$$

   é uma transformação linear.

6. Seja $P \in \mathbb{M}(2, 2)$ uma matriz invertível e $T_P : \mathbb{M}(2, 2) \to \mathbb{M}(2, 2)$, definida por

$$T_P(X) = P^{-1}XP.$$

   Mostre que T_P é linear.

7. Sejam U e V espaços vetoriais quaisquer. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear, mostre que $T(0_u) = 0_v$.

8. Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que se $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ é um conjunto linearmente independente de W, então $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto linearmente independente de V.

7.5 Determinando uma transformação linear a partir da imagem dos vetores de uma base do domínio

Uma característica muito importante das transformações lineares é que uma transformação linear fica univocamente determinada se conhecemos seus valores nos vetores de uma base do domínio. Esse resultado é consequência do seguinte teorema:

Teorema 1. *Sejam* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ *uma base de um espaço vetorial* U. *Sejam* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *vetores de um espaço vetorial* V. *Então, existe uma única transformação linear* $T : U \to V$ *tal que* $T(u_i) = v_i$ *para* $i = 1, 2, ..., n$.

Observação. Esta aplicação é dada por: se

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n,$$

então

$$T(u) = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + ... + a_nT(u_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n.$$

Além de afirmar a existência de uma única transformação linear satisfazendo certas condições, o teorema anterior, e a observação anterior, nos fornecem um roteiro de como determinar uma transformação linear $T : U \to V$ conhecendo-se uma base de U, $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$, e n vetores de V, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, tais que $T(u_i) = v_i$ para $i = 1, 2, ..., n$.

1. Certifique-que $u_1, u_2, ..., u_n$ formam uma base de U;
2. Escreva um vetor genérico de $u \in U$ como uma combinação linear de $u_1, u_2, ..., u_n$. Isto é, calcule escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ tais que
$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n;$$
3. Escreva a equação $T(u) = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + ... + a_nT(u_n)$;
4. Faça a substituição $T(u_i) = v_1$ para $i = 1, 2, ..., n$.
5. Organize os cálculos e escreva a expressão para $T(u)$, onde u é um vetor qualquer de U.

7.6 Exemplo

Dada uma base qualquer de $\mathbb{R}^2$, por exemplo, $\beta = \{(1, 1), (-1, 1)\}$, e dois vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$, por exemplo, $(1, -1, 1)$ e $(0, 1, 2)$. O teorema anterior afirma que existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, 1) = (1, -1, 1)$$

e

$$T(-1, 1) = (0, 1, 2).$$

Além disso, como dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sempre vai existir escalares a_1 e a_2 únicos, tais que, $(x, y) = a_1(1, 1) + b_1(-1, 1)$, então a transformação linear T é dada por

$$T(x, y) = a_1T(1, 1) + b_1T(-1, 1) = a_1(1, -1, 1) + a_2(0, 1, 2).$$

Dessa maneira, para encontrarmos uma fórmula para T basta apenas calcularmos os escalares a_1 e a_2. Isso pode ser feito, resolvendo-se o sistema

$$(x, y) = a_1(1, 1) + b_1(-1, 1).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} x &= a_1 - b_1 \\ y &= a1 + b1. \end{aligned}$$

Daí obtemos $a_1 = \dfrac{x+y}{2}$ e $a_2 = \dfrac{y-x}{2}$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \frac{x+y}{2}(1, -1, 1) + \frac{y-x}{2}(0, 1, 2) \\ &= \left(\frac{x+y}{2}, -x, \frac{-x+3y}{2}\right). \end{aligned}$$

Portanto, a transformação linear procurada é

$$T(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, -x, \frac{-x+3y}{2}\right).$$

7.7 Exercícios Propostos

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1,0) = (1,1)$ e $T(0,1) = (-1,1)$.
   (a) Determine $T(x,y)$.
   (b) Calcule $T(2,3)$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(1,0,0) = (2,-1,1)$, $T(1,1,0) = (-1,2,1)$ e $T(1,1,1) = (1,1,-2)$.
   (a) Determine $T(x,y,z)$.
   (b) Calcule $T(2,3,1)$.

3. Seja Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(1,-1,1) = 1$, $T(1,0,2) = 2$ e $T(1,1,1) = 3$. Determine $T(x,y,z)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $T(1,0,0,0) = (1,1)$, $T(1,1,0,0) = (-1,1)$, $T(0,1,1,0) = (1,-1)$ e $T(0,0,1,1) = (-1,-1)$.
   (a) Determine $T(x,y,z,t)$.
   (b) Calcule $T(1,2,2,3)$.

5. Seja $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(1+2x+x^2) = (1,2,1)$, $T(1+x) = (1,-1,-2)$ e $T(2) = (1,0,0)$. Determine $T(a_0 + a_1x + a_2x^2)$.

7.8 Núcleo e Imagem

Definição (Núcleo e Imagem). *Sejam* U *e* V *espaços vetoriais e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

1. *O conjunto* $\{u \in U;\ T(u) = 0_v\}$ *é chamado de Núcleo de* T *e será denotado por Ker(T).*

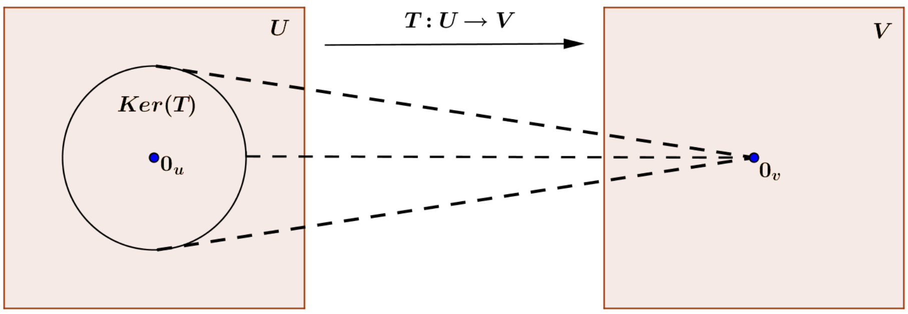

Figura 7.1: Cada vetor $u \in \mathrm{Ker}(T)$ é levado em 0_v por T .

2. *O conjunto* $\{v \in V;\ v = T(u)\ \ \text{para algum}\ u \in U\}$ *é chamado de Imagem de* T *e será denotado por Im(T), ou simplesmente* $T(U)$.

Observe que tanto *Ker(T)* como *Im(T)* são conjuntos diferentes do vazio. Isto porque, como já sabemos, $T(0_u) = 0_v$. Logo, cada um desses conjuntos têm pelo menos o elemento nulo. Dessa forma, é conveniente investigar se esses conjuntos possuem a estrutura de um espaço vetorial. A resposta a essa pergunta é dada pelo **Teorema 2**.

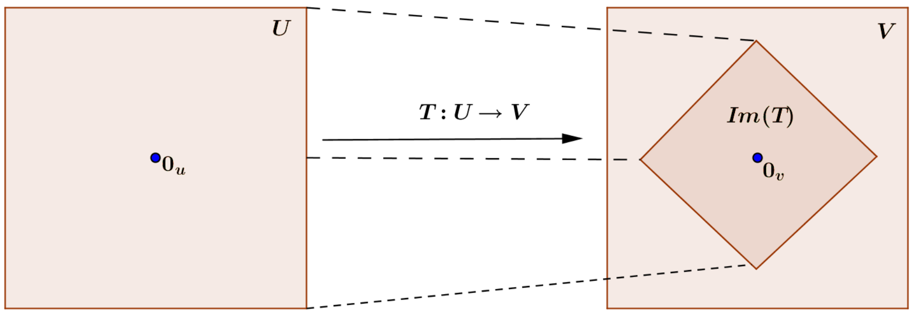

Figura 7.2: Representação gráfica da imagem de T.

Teorema 2. *Seja* $T : U \to V$ *uma transformação linear. Então, Ker(T) é um subespaço vetorial de* U *e Im(T) é um subespaço vetorial de* V.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que *Ker(T)* é um subespaço vetorial de U. Para isso, sejam u_1 e u_2 dois vetores quaisquer de *Ker(T)* e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que $u_1 + \lambda u_2 \in \text{Ker}(T)$. De fato,

$$T(u_1 + \lambda u_2) = T(u_1) + \lambda T(u_2)$$

pois T é linear. Mas, como u_1 e u_2 pertencem a *Ker(T)*, temos $T(u_1) = 0_v$ e $T(u_2) = 0_v$. Daí,

$$T(u_1 + \lambda u_2) = 0_v + \lambda 0_v = 0_v.$$

Logo, $u_1 + \lambda u_2 \in \text{Ker}(T)$ e, portanto, *Ker(T)* é um subespaço vetorial de U.

Agora para mostrar que *Im(T)* é um subespaço vetorial de V, considere dois vetores genéricos v_1 e v_2 em *Im(T)*. Daí, pela definição da *Im(T)*, existem vetores u_1 e u_2 no domínio da transformação tais que

$$v_1 = T(u_1) \text{ e } v_2 = T(u_2).$$

Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$v_1 + \lambda v_2 = T(u_1) + \lambda T(u_2).$$

Como T é linear, então

$$v_1 + \lambda v_2 = T(u_1 + \lambda u_2).$$

Isso mostra que $v_1 + \lambda v_2 \in \text{Im}(T)$, pois é imagem do vetor $u_1 + \lambda u_2 \in U$. Portanto, $\text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de V.

A seguir veremos como calcular o núcleo e a imagem de uma transformação linear por meio de alguns exemplos.

7.9 Exemplos

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x, y) = (x, y, x + y, x - y).$$

Para determinar $\text{Ker}(T)$ note que $(x, y) \in \text{Ker}(T)$ se, e somente se, $T(x, y) = (0, 0)$. Mas isso implica em $(x, y, x + y, x - y) = (0, 0, 0, 0)$. Logo, devemos ter $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 0$ e $x - y = 0$. Obviamente, $x = y = 0$. Assim obtemos,

$$\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}.$$

Agora, para calcular $Im(T)$, note que cada elemento de $\mathbb{R}^4$ que está na imagem de T é dado pela transformação $T(x,y) = (x, y, x+y, x-y)$. Assim, fazemos

$$(x, y, x+y, x-y) = x(1,0,1,1) + y(0,1,1,-1).$$

Dessa maneira,

$$Im(T) = [(1,0,1,1), (0,1,1,-1)].$$

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x,y)$. O vetor $(x,y,z) \in Ker(T)$ se, e somente se, $T(x,y,z) = (0,0)$. Mas isso implica em $(x,y) = (0,0)$. Logo, devemos ter $x = 0$ e $y = 0$. Mas, não encontramos nenhuma restrição sobre a variável z. Ou seja, z é livre. Assim obtemos,

$$Ker(T) = \{(0,0,z);\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Já $Im(T)$ pode ser obtida através de

$$T(x,y) = (x,z) = x(1,0) + y(0,1).$$

Logo,

$$Im(T) = [(1,0), (0,1)] = \mathbb{R}^2.$$

7.10 Exercícios Propostos

1. Para cada uma das transformações lineares dos exercícios da **Seção 6**
   (a) Calcular $Ker(T)$.
   (b) Descrever $Im(T)$.
2. Determine o núcleo e a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z,w) = (x-y, y-z, z-w)$.
3. Demonstre o Teorema 2.

7.11 Transformações Lineares Injetivas e Sobrejetivas

Uma função $T : U \to V$ é *injetiva* (ou injetora) se

$$T(x) = T(y) \Rightarrow x = y, \text{ para todo } x, y \in U.$$

Isto equivale a dizer que numa função injetiva as imagens de elementos distintos são distintas.

Por outro lado, T é uma função *sobrejetiva* (ou sobrejetora) se $Im(T) = V$. Isto é, todo elemento do contradomínio V é imagem de algum elemento do domínio U. Se uma função T é injetiva e sobrejetiva, dizemos que T é *bijetiva* (ou bijetora).

Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ não é injetora, pois $f(-2) = f(2) = 4$. Ou seja, dois elementos distintos do domínio, -2 e 2, possuem a mesma imagem 4. Esta função também não é sobrejetiva, pois $f(x) = x^2 \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $Im(f) = [0, \infty) \neq \mathbb{R}$. Já a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é injetiva e sobrejetiva. Com efeito,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x^3 - y^3 = 0 \Rightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 0$$

como $x^2 + xy + y^2 > 0$ sempre que $x^2 + y^2 \neq 0$, então $x - y = 0$. Logo, $x = y$ e portanto f é injetora. É simples verificar que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$, logo f é sobrejetiva.

A tarefa de identificar se uma função T é injetiva, em geral, é mais simples se T é uma transformação linear. Isso porque, conforme o **Teorema 3** que será apresentado a seguir, o trabalho de identificar se T é injetiva fica reduzido a calcular o $\mathrm{Ker}(T)$. Esta importante relação entre o núcleo de uma transformação linear e o fato da mesma ser ou não injetiva é estabelecida pelo seguinte teorema:

Teorema 3. *Seja* $T : U \to V$ *uma transformação linear. Então,* T *é uma aplicação injetiva se, e somente se,* $\mathrm{Ker}(T) = \{0_u\}$.

Demonstração. Primeiro, suponha que T é uma transformação linear injetiva e seja $u \in \mathrm{Ker}(T)$. Então, por definição $T(u) = 0_v$. Mas, já sabemos que $T(0_u) = 0_v$. Assim, $T(u) = T(0_u)$. Como T é injetiva, $u = 0_u$. Como o vetor u foi tomado de modo arbitrário, segue que o único vetor no $\mathrm{Ker}(T)$ é o vetor nulo 0_u. Ou seja, $\mathrm{Ker}(T) = \{0_u\}$.

Por outro lado, suponha que $\mathrm{Ker}(T) = \{0_u\}$ e sejam vetores quaisquer u_1 e u_2 em U, tais que $T(u_1) = T(u_2)$. Vamos mostrar que $u_1 = u_2$. De fato, se $T(u_1) = T(u_2)$, temos $T(u_1) - T(u_2) = 0_v$. Mas, como T é linear, segue que $T(u_1 - u_2) = 0_v$. Logo, $u_1 - u_2 \in \mathrm{Ker}(T)$. Mas, como $\mathrm{Ker}(T) = \{0_u\}$, então $u_1 - u_2 = 0_u$. Logo, $u_1 = u_2$. Portanto, de acordo com a definição de função injetiva, T é injetiva.

7.12 Exemplos

1. A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 2y, y)$ é injetiva. Com efeito, de acordo com a definição de núcleo $(x, y) \in \mathrm{Ker}(T)$ se, e somente se, $T(x, y) = (0, 0)$. Mas isso implica em $(x + 2y, y) = (0, 0)$. Logo, $x + 2y = 0$ e $y = 0$ e assim obtemos, $x = y = 0$. Portanto, $\mathrm{Ker}(T) = \{(0, 0)\}$ e T é injetiva, segundo o teorema.

2. A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x, y, z) = x + y + z$ não é injetiva. De fato, de acordo com a definição de núcleo $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(T)$ se, e somente se, $T(x, y, z) = 0$. Mas isso implica em $x + y + z = 0$. De onde obtemos $z = -x - y$. Assim, as variáveis x e y são livres e podem assumir qualquer valor real. Dessa forma

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, -x - y); x, y \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\}.$$

   Logo, T não é injetiva.

7.13 Exercícios Propostos

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, x, z - y)$.

   (a) Determine $\mathrm{Ker}(T)$. T é injetiva?

   (b) Determine uma base para $\mathrm{Ker}(T)$.

   (c) Determine uma base para $\mathrm{Im}(T)$. Qual a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$.

(d) T é sobrejetiva?

2. Sejam U e V espaços vetoriais e $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de U. Mostre que, se $T : U \to V$ é uma transformação linear injetiva, então $\{T(u_1), T(u_2), ..., T(u_n)\}$ é um conjunto de vetores linearmente de V (Isto é, transformações lineares injetivas levam conjunto LI em conjunto LI).

7.14 O Teorema do Núcleo e da Imagem. Isomorfismos

O próximo teorema é um dos mais importantes da Álgebra Linear. Ele relaciona as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear $T : U \to V$ com a dimensão do espaço U (o domínio da transformação linear). Esse teorema traz consequências interessantes para a análise de transformações injetivas e sobrejetivas, como veremos nas próximas seções.

Teorema 4 (Teorema do Núcleo e da Imagem). *Sejam U e V espaços vetoriais, sendo U de dimensão finita, e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então,*

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(U).$$

Demonstração. Aula

Para avaliarmos um pouco a importância do **Teorema 4**, considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. O Teorema do Núcleo e da Imagem afirma que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Isto é, a soma da dimensão do núcleo de T com a dimensão da imagem de T tem que ser exatamente 3. Mas, como $\mathrm{Im}(T) \subset \mathbb{R}^2$, a dimensão da imagem de T é no máximo igual a 2. Logo, a dimensão do núcleo de T deve ser maior ou igual a 1. Portanto, $\mathrm{Ker}(T) \neq \{0_u\}$. Dessa maneira, concluimos que T não pode ser injetora. Esse raciocínio se aplica a todas as transformações lineares $T : U \to V$ tais que $\dim(U) > \dim(V)$. No caso em que $\dim(U) = \dim(V)$, temos o seguinte resultado:

Corolário 1. *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $T : U \to V$ uma transformação linear. Se $\dim(U) = \dim(V)$, então T é injetiva se, e somente se, T é sobrejetiva.*

Definição (Isormorfismo). Sejam U e V espaços vetoriais.

1. Se $T : U \to V$ é uma transformação linear bijetiva, T é chamada de *isomorfismo*.
2. Quando existe um isomorfismo $T : U \to V$, dizemos que U e V são espaços vetoriais *isomorfos* e denotamos $U \simeq V$.

Espaços vetoriais isomorfos são essencialmente iguais. A diferença está apenas na forma de representação dos seus vetores e das operações de soma de vetores e mutiplicação de vetores por escalar. Espaços vetoriais isomorfos devem ter a mesma dimensão. Outras informações relevantes sobre isomorfismos estão resumidas na **Proposição 1**.

Proposição 1. *Seja $T : U \to V$ um isomorfismo. Então,*

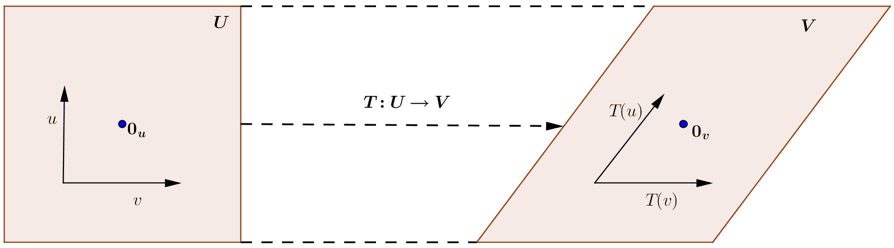

Figura 7.3: Espaços isomorfos possuem a mesma estrutura vetorial

1. T *leva uma base de* U *em uma base de* V.
2. *Existe a aplicação inversa* $T^{-1}: V \to U$ *que é linear e também é um isomorfismo.*

A **Proposição 1** apresenta uma caracterização importante dos isomorfismos: levar base em base. Isto é, todo isomorfismo $T: U \to V$ transforma uma base $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ de U no conjunto $\{T(u_1), T(u_2), ..., T(u_n)\}$ que é uma base de V. Dessa forma, considerando que U e V possuam a mesma dimensão n, podemos determinar a transformação linear inversa $T^{-1}: V \to U$ definindo

$$\begin{aligned} T^{-1}(T(u_1)) &= u_1 \\ T^{-1}(T(u_2)) &= u_2 \\ \vdots &= \vdots \\ T^{-1}(T(u_n)) &= u_n \end{aligned}$$

e usando o roteiro apresentado pelo **Teorema 1**.

Além disso, de acordo com a **Proposição 1** podemos dizer que espaços vetoriais isomorfos possuem a mesma dimensão. A recíproca dessa afirmação também é verdadeira. Ou seja, espaços vetoriais que possuem a mesma dimensão finita são isomorfos. Dessa maneira, como podemos ver nos exemplos a seguir, os espaços $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathbb{M}(2,2)$ são espaços vetoriais isomorfos entre si já que todos têm dimensão 4. Isso significa que, a menos dos seus elementos, esses espaços vetoriais são idênticos. Em outras palavras, apesar dos elementos de cada um desses espaços serem diferentes (de fato, matrizes e polinômios, por exemplo, são objetos matemáticos de naturezas distintas), os espaços vetoriais isomorfos possuem a mesma estrutura. São indistinguíveis. Dessa maneira, podemos dizer que conjuntos LI de um espaço, correspondem a conjuntos LI do outro espaço, por exemplo.

7.15 Exemplos

1. Os espaços $\mathcal{M}(2,2)$ e $\mathbb{R}^4$ são isomorfos. Com efeito, basta definir $T: \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}(2,2)$ por

$$T(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

É simples verificar que T é uma transformação linear e que $\mathrm{Ker}(T) = \{(0,0,0,0)\}$. Logo T é injetiva. Como os dois espaços possuem a dimensão, 4, então T também é sobrejetiva e portanto é um isomorfismo.

2. $\mathbb{R}^4 \simeq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. De fato, a aplicação $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$$

é um isomorfismo entre os dois espaços. Verifique!

3. Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$. W é isomorfo a $\mathbb{R}^2$. De fato, note que $W = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ e que $\dim(W) = 2$. Agora note que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y) = (x, y, 0)$$

é tal que $\mathrm{Im}(T) = W$. Como $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(W) = 2 = \dim(\mathrm{Im}(T))$, então T é um isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ e W.

7.16 Exercícios Resolvidos

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$. Mostre que T é um isomorfismo e determine $T^{-1}(x, y, z)$.

Resolução.

Mostrando que T é um isomorfismo. Primeiro vamos mostrar que T é injetiva. De fato, $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(T)$ se, e somente se, $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Logo, devemos ter $(x, x + y, x + y + z) = (0, 0, 0)$. Ou seja,

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x + y &= 0 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Assim, $x = y = z = 0$, logo $\mathrm{Ker}(T) = \{(0, 0, 0)\}$ e portanto T é injetiva. Como T é uma tranformação linear entre espaços de mesma dimensão, o Teorema do Núcleo e da Imagem garante que T é também sobrejetiva, logo T é um isomorfismo.

Calculando T^{-1}***.*** Primeiro precisamos encontrar os valores de T em uma base do seu domíno, neste caso o $\mathbb{R}^3$. Vamos considerar a base canônica, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Note que

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 1, 1) \\ T(0, 1, 0) &= (0, 1, 1) \\ T(0, 0, 1) &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Como T é um isomorfismo, então os vetores $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$ formam uma base para $\mathrm{Im}(T)$, que nesse caso é o próprio $\mathbb{R}^3$. De acordo com o **Teorema 1**, T^{-1} é a transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} T^{-1}(1, 1, 1) &= T^{-1}(T(1, 0, 0)) = (1, 0, 0) \\ T^{-1}(0, 1, 1) &= T^{-1}(T(0, 1, 0)) = (0, 1, 0) \\ T^{-1}(0, 0, 1) &= T^{-1}(T(0, 0, 1)) = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Agora, tomamos um vetor (x, y, z) qualquer de $\mathrm{Im}(T)$ e escrevemos como combinação linear dos vetores, $(1, 1, 1), (0, 1, 1)$ e $(0, 0, 1)$. Isto é, vamos calcular escalares a_1, a_2 e a_3 tais que

$$(x, y, z) = a_1(1, 1, 1) + a_2(0, 1, 1) + a_3(0, 0, 1).$$

Para isso, devemos resolver o sistema linear

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 \\
y &= a_1 + a_2 \\
z &= a_1 + a_2 + a_3
\end{aligned}
$$

de onde obtemos, $a_1 = x$, $a_2 = y - x$ e $a_3 = z - y$. Daí,

$$
\begin{aligned}
T^{-1}(x, y, z) &= a_1 T^{-1}(1,1,1) + a_2 T^{-1}(0,1,1) + a_3 T^{-1}(0,0,1), \\
&= a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1), \\
&= x(1,0,0) + (y-x)(0,1,0) + (z-y)(0,0,1), \\
&= (x, y-z, z-y).
\end{aligned}
$$

De onde obtemos $T^{-1}(x, y, z) = (x, y-z, z-y)$.

2. Sejam $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = 1 - t$, $p_3(t) = 1 - t - t^2$ e $p_4(t) = 1 - t - t^2 - t^3$ polinômios do espaço vetorial $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Mostre que eles formam um conjunto linearmente independente.

   Resolução.

   Como $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$, podemos associar os polinômios dados ao seguinte conjunto de vetores do $\mathbb{R}^4$:
   $$\{(1,0,0,0), (1,-1,0,0), (1,-1,-1,0), (1,-1,-1,-1)\}.$$

   Como este é um conjunto de vetores LI do $\mathbb{R}^4$, então $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ é um conjunto de vetores LI em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

7.17 Exercícios Propostos

1. Mostre que nenhuma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ pode ser sobrejetiva.

2. Mostre que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$ é um isomorfismo e determine $T^{-1}(x, y, z)$.

3. Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = (0, x, 0)$. Verifique que T é linear. Mostre que T é um isomorfismo de V em $Im(T)$.

4. a) Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que
   $$\text{Ker}T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + z = 0\}.$$

   b) Determine um subespaço de $\mathbb{R}^4$ isomorfo a $\text{Ker}T$.

7.18 Exercícios Gerais

1. Seja $V = \{(x, y, z, t) \in R^4; x = 0 \text{ e } y = 0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

   a) Determine uma base de V;

   b) Determine um subespaço W de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = V \bigoplus W$.

   c) Encontre uma transformação linear de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $\text{Ker}T = V$.

d) Mostre que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a V.

2. Mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear se, e somente se, existem números reais a, b, c e d tais que $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$.

3. Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Defina a aplicação $T_A : \mathbb{R}^{m\times 1} \to \mathbb{R}^{1\times n}$ por

$$T_A(x) = Ax.$$

   (a) Mostre que T_A é uma transformação linear.

   (b) Verifique a solução do sistema linear homogêneo é igual a $Ker(T)$.

   (c) Mostre que o sistema linear $Ax = b$ tem solução se, e somente se, $b \in Im(T_A)$.

4. Seja $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções reais contínuas. Mostre que a função $\mathcal{T} : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por

$$(\mathcal{T}f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

é uma transformação linear.

5. Dados $a \in \mathbb{R}$ e o conjunto $\beta = \{(1, a), (-a, 1)$.

   (a) Verifique β é uma base de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Determine a transformação linear $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $P(1, a) = (1, a)$ e $P(-a, 1) = (0, 0)$

   (c) Determine a transformação linear $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $R(1, a) = (1, a)$ e $R(-a, 1) = (a, -1)$

Observação. *A aplicação* P *realiza a projeção do vetor* (x, y) *sobre a reta* $y = ax$ *e* R *realiza a reflexão de* (x, y) *em torno dessa mesma reta.*

8

Autovalores e Autovetores

8.1 Introdução

Uma transformação linear $T : V \to V$, ou seja T é uma transformação linear do espaço vetorial V nele mesmo, é comumente chamada de *operador linear*. Nesta seção estamos interessados em descobrir quais vetores v do espaço vetorial V permanecem com a sua direção inalterada por um operador linear T, isto é, quais vetores $v \in V$ satisfazem a condição $T(v) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$. O par $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ que satistazem essa condição são chamados de autovalor e autovetor, respectivamente.

8.2 Autovalores e Autovetores

Definição (Autovalor e Autovetor). Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existirem um vetor $v \in V$, não nulo, e um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$T(v) = \lambda v,$$

dizemos que λ é um *autovalor* de T e v é um *autovetor* de T associado ao autovalor λ.

Observações

1. Na definição acima, $\lambda \in \mathbb{R}$ pode ser igual a zero, mas devemos ter sempre $v \neq 0$. Isto é, o vetor nulo nunca será autovetor, embora o número zero possa ser um autovalor.

2. Da equação $T(v) = \lambda v$, podemos concluir intuitivamente que autovetores têm a sua direção preservada pela tranformação linear. Isto é, a ação da transformação linear T sobre um autovetor v, ou aumenta ou diminui o seu tamanho; ou muda o seu sentido.

3. Para cada autovalor λ de T, o subconjunto de V definido por

$$v_\lambda = \{v \in V; T(v) = \lambda v\}$$

é um subespaço vetorial de V e é chamado de *autoespaço de* V *associado a* λ.

Autovalores e autovetores de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de A, se existir v uma matriz coluna de ordem $n \times 1$, não nula, tal que

$$Av = \lambda v.$$

Observe que essa definição equivale a dizer que os autovalores e autovetores da matriz A são os autovalores e autovetores do operador linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$T_A(x) = Ax.$$

Por exemplo, os autovalores da matriz da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ podem ser obtidos resolvendo-se a equação $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. De onde obtemos o sistema não linear
$\begin{cases} 2x & = & \lambda x \\ x - 3y & = & \lambda y \end{cases}.$

Resolvendo-se esse sistema não linear, determinamos os valores reais de λ, se existirem, e o respectivo autoespaço associado. Porém a solução de um sistema não linear, em geral, não é uma tarefa simples. Uma maneira mais adequada para calcular os autovalores de um operador linear será apresentado a seguir. Trata-se do polinômio característico de T.

8.3 Polinômio Caracteristico

Seja A uma matriz de ordem n. A matriz

$$A - \lambda I$$

é chamada de *matriz característica* de A na indeterminada λ. O determinante dessa matriz, isto é,

$$\det(A - \lambda I)$$

é um polinômio em λ chamado de *polinômio característico* de A. Prova-se que os autovalores da matriz A são exatamente as raízes reais do polinômio característico de A, ou seja, as raízes do polinômio

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Agora se $T : V \to V$ é um operador linear e α é uma base de V, então definimos o polinômio característico de T é como sendo

$$p(\lambda) = \det([T]^{\alpha}_{\alpha} - \lambda I).$$

Observações. O polinômio característico $p(\lambda)$ de T independe da base α de V escolhida. Isto é, se β é outra base de V, então

$$\det([T]^{\alpha}_{\alpha} - \lambda I) = \det([T]^{\beta}_{\beta} - \lambda I).$$

Dessa forma, para operadores lineares

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

sempre podemos escolher a base canônica $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ e, assim, simplificarmos o cálculo da matriz $[T]^{\alpha}_{\alpha}$.

Exemplos

1. Determine os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

   Resolução.

   Primeiro, construimos a matriz característica de A.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

   Em seguida, calculamos o polinômio característico de A. Isto é, obtemos $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$p(\lambda) = (2-\lambda)(-3-\lambda).$$

   Cálculo dos Autovalores de A

   Os autovalores de A são as raízes de $P(\lambda)$. Logo, devemos resolver a equação $P(\lambda) = 0$, que implica em $(2-\lambda)(-3-\lambda) = 0$. Logo, $\lambda = 2$ ou $\lambda = -3$.

   Agora, para calcular os autovetores de T devemos resolver o sistema

$$Av = \lambda v$$

   ou o sistema

$$(A - \lambda I)v = 0,$$

   onde zero representa a matriz coluna nula de ordem 2×1. Vamos utilizar o segundo sistema.

   Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$. Resolveremos o sistema

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   para $\lambda = 2$. Daí, obtemos o sistema linear homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 1 & -3-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   De onde obtemos $x - 5y = 0$ o que implica $x = 5y$. Logo,

$$v_{\lambda_1} = \{(5y, y); y \in \mathbb{R}\} = [(5,1)]$$

   é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$ e $v = (5,1)$ é um autovetor de A associado a $\lambda_1 = 2$. *Autovetores associados ao autovalor* $\lambda_2 = -3$.

   Resolveremos o sistema

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   para $\lambda = -3$. Daí, obtemos o sistema linear homogêneo:

$$\begin{bmatrix} 2-(-3) & 0 \\ 1 & -3-(-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   De onde obtemos $5x = 0$ e $x = 0$. Logo, $x = 0$ e y é uma variável livre. Assim ,

$$v_{\lambda_2} = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\} = [(0,1)]$$

   é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = -3$ e $v = (0,1)$ é um autovetor de A associado a $\lambda_2 = -3$.

   Note que o conjunto $\{(5,1), (0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de A.

2. Determine os autovalores e autovetores do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -2y, z)$. **Resolução.**

Neste caso, primeiro devemos encontrar a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ de T em relação à alguma base α de $\mathbb{R}^3$. Como o polinômio característico de T independe da base escolhida, vamos escolher a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Assim temos

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora podemos construir a matriz característica de T, ou seja, a matriz característica de $[T]$.

$$[T] - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix},$$

de onde obtemos o polinômio característico de T

$$p(\lambda) = \det([T] - \lambda I) = (1-\lambda)^2(-2-\lambda).$$

Cálculo dos Autovalores de T

Os autovalores de T são as raízes de $P(\lambda)$. Logo, devemos resolver a equação $P(\lambda) = 0$, que implica em $(1-\lambda)^2(-2-\lambda) = 0$. Logo, $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$. Assim, T possui dois autovalores distintos, que são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$.

Agora, para calcular os autovetores de T devemos resolver o sistema

$$[T]v = \lambda v$$

ou o sistema

$$([T] - \lambda I)v = 0,$$

onde zero representa a matriz coluna nula de ordem 3×1. Vamos utilizar o segundo sistema.

Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$. Resolveremos o sistema

$$([T] - \lambda I)v = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = 1$.

Daí , obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema homogêneo, obtemos as equações

$$2y + 3z = 0 \text{ e } -3y = 0.$$

Logo, $y = 0$ o que implica $z = 0$ e a variável x é livre. Dessa forma, obtemos

$$v_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 0),$$

que é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$. Já o vetor $v = (1, 0, 0)$ é um autovetor de T associado a $\lambda_2 = 1$.

Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -2$.

Resolveremos o sistema

$$([T] - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $\lambda = -2$. Daí, obtemos o sistema linear homogêneo

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos as equações

$$3x + 2y + 3z = 0 \text{ e } 3z = 0.$$

Daí obtemos, $z = 0$ o que implica $3x + 2y = 0$. Assim,

$$y = -\frac{3}{2}x$$

e a variável x é livre. Dessa forma, obtemos

$$v_{\lambda_2} = \{(x, -\frac{3x}{2}, 0); x \in \mathbb{R}\} = [(1, -\frac{3}{2}, 0)] = [(2, -3, 0)]$$

que é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda_2 = -2$. O vetor $v = (2, -3, 0)$ é um autovetor de T associado a $\lambda_2 = -2$, porém note que qualquer vetor do tipo $(2k, -3k, 0)$ e um autovetor de T associado ao autovalor -2.

Note que o conjunto $\{(1, 0, 0), (2, -3, 0)\}$, apesar de ser um conjunto LI, não é uma base de $\mathbb{R}^3$ pois possui apenas dois vetores. Dessa maneira, concluimos que não existe uma base $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

8.4 Exercícios Propostos

1. Determine os autovalores e autovetores correspondentes das seguintes transformações lineares.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, -y)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (-x, -y)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x, x + 2y, x + y - 3z)$.

   (e) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, w, z) = (x + y + z + w, -2y + z + w, 3z + w, 2w)$.

8.5 Diagonalização de Operadores

O Objetivo desta seção é determinar uma base α do espaço vetorial V, em relação a qual a matriz do operador $T : V \to V$ é uma matriz diagonal. Veremos que uma base de V formada por autovetores de T satisfaz essa propriedade.

De fato, uma condição necessária para que um conjunto de vetores formem uma base para um espaço vetorial V é que os mesmos formem um conjunto LI. O teorema a seguir mostra que autovetores associados a autovalores distintos são vetores linearmente independentes.

Teorema 8.5.1 *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

Demonstração. Vamos considerar caso em que T possui dois autovalores distintos. Suponha que λ_1 e λ_2 são dois autovalores distintos do operador linear $T : V \to V$; e sejam v_1 e v_2 os autovalores associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Daí temos,

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 \\ T(v_2) &= \lambda_2 v_2. \end{aligned} \tag{8.5.1}$$

Para mostrar que $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto LI, vamos considerar a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0. \tag{8.5.2}$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} T(a_1 v_1 + a_2 v_2) &= T(0), \\ a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) &= 0, \end{aligned}$$

o que implica em

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 = 0. \tag{8.5.3}$$

Multiplicando a equação (8.5.2) por λ_1, obtemos

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_1 v_2 = 0. \tag{8.5.4}$$

Daí, subtraindo as equações (8.5.3) e (8.5.4) uma da outra, obtemos

$$a_2 \lambda_2 v_2 - a_2 \lambda_1 v_2 = 0. \text{ ou seja, } a_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0.$$

Como, por hipótese, $\lambda_2 \neq \lambda_1$ e, por definição, $v_2 \neq 0$, então $a_2 = 0$. Substituindo esse valor em (8.5.2) obtemos $a_1 = 0$. Portanto, o conjunto $\{v_1, v_2\}$ é LI.

De acordo com o Teorema 8.5.1, se em um espaço V de dimensão n, o operador linear $T : V \to V$ possuir n autovalores distintos, então podemos garantir a existência de n autovetores linearmente independentes, e portanto, uma base de V formada por autovetores de T.

Teorema 8.5.2 *Um operador linear* $T : V \to V$ *admite uma base* $\alpha = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *em relação a qual* $[T]_\alpha^\alpha$ *será uma matriz diagonal se, e somente se, essa base* α *é formada por autovetores de* T.

Definição (Operador diagonalizável). Seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um *operador diagonalizável* se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T.

Exemplos

1. O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (2x, x + 3y)$ é diagonalizável. De fato, a matriz de T em relação a base canônica de $\mathbb{R}^2$ é

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

   Note que $[T]$ é igual a matriz A do **Exemplo 1** da **Seção 3.1**. Logo, existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T e, portanto, T **é diagonalizável**.

2. O operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ do **Exemplo 2** da **Seção 3.1 não é diagonalizável**. De fato, não foi possível determinar uma base para o $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.

Definição (Matriz Diagonalizável). Dizemos que uma matriz A quadrada de ordem n é diagonalizável, se a transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$T_A(v) = Av$$

é diagonalizável.

Equivalentemente, dizemos que uma matriz A quadrada de ordem n é diagonalizável se existe uma matriz P de ordem n, invertível e tal que

$$P^{-1}AP$$

é uma matriz diagonal. Dizemos que a matriz P é a matriz que diagonaliza A.

Observação. No caso da matriz A de ordem n ser diagonalizável, existe uma base α de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de A. Dessa forma, a matriz P que diagonaliza A é a matriz cujas colunas são os n autovetores que formam a base α.

Exemplos

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável. De fato, do **Exemplo 1** da **Seção 3.1**, $(5, 1)$ e $(0, 1)$, vetores do $\mathbb{R}^2$, são autovetores de A linearmente independentes. Logo, a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   cujas colunas são formadas pelos elementos desses vetores é uma matriz invertível, cuja inversa é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -1/5 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Além disso, temos que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ -1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

   é uma matriz diagonal. Logo, P é a matriz que diagonaliza A. Portanto, A é diagonalizável.

8.6 Exercícios Propostos

1. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável.

2. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

3. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. (sugestão: mostre que existe uma matriz invertìvel P tal que $P^{-1}AP = B$)

4. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável?

5. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável?

8.7 Exercícios Gerais

1. Diz-se que um operador linear $T : V \to V$ é *idempotente* se

$$T(T(v)) = T(v)$$

para todo $v \in V$.

   (a) Seja T idempotente. Ache seus autovalores.
   (b) Encontre uma matriz A de ordem 2, não nula, tal que $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja idempotente.
   (c) Mostre que um operador linear idempotente é diagonalizável.

2. **Teorema de Cayley-Hamilton:** Se $T : V \to V$ é um operador linear, α é uma base de V e $p(\lambda)$ é o polinômio característico de T, então

$$p([T]^{\alpha}_{\alpha} = 0.$$

Sendo que o 0 representa a matriz nula.

   (a) Seja $T(x, y) = (x + y, -y)$. Ache o polinômio característico $p(\lambda)$ de T.
   (b) Se $[T]$ é a matriz de T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$, verifique que $p([T]) = 0$.
   (c) Se $p(t) = t^2 + at + bt = 0$, então $p(A) = A^2 + aA + bI = 0$, onde 0 é matriz nula de ordem 2. Dessa forma, pode-se usar a equação

$$A^2 = -aA - bI$$

   para calcular A^2. Use os resultados dos itens (a) e (b) e calcule as matrizes $[T]^2$ e $[T]^3$.

Espera-se que ao ter estudado essa seção você tenha adquirido as seguintes competências e habilidades:

- Calcular os autovalores e autovetores de uma matriz quadrada de ordem n;
- Calcular os autovalores e os autovetores de um operador linear T ;
- Verificar se uma dada matriz é diagonalizável e obter a matriz P que diagonaliza a mesma;
- Verificar se um determinado operador linear é diagonalizável;
- Dado um operador $T : V \to V$ obter, quando existir, uma base de V formada por autovetores de T.

8.8 Respostas

Exercícios 4

1. (a) $\lambda_1 = -1$ e $V_{\lambda_1} = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$; $\lambda_2 = 1$ e $V_{\lambda_2} = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\lambda = -1$ e $V_\lambda = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\} = [(1, 0), (0, 1)] = \mathbb{R}^2$.
   (c) $\lambda_1 = -\sqrt{2}$ e $V_{\lambda_1} = \{(x, (1 + \sqrt{2})x); x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1 + \sqrt{2})]$; $\lambda_2 = \sqrt{2}$ e $V_{\lambda_2} = \{(x, (\sqrt{2} - 1)x); x \in \mathbb{R}\} = [(1, \sqrt{2} - 1)]$.
   (d) $\lambda_1 = 1$ e $V_{\lambda_1} = \{(-5y, y, -y); y \in \mathbb{R}\}$; $\lambda_2 = 2$, $V_{\lambda_2} = \{(0, y, 5y); y \in \mathbb{R}\}$; $\lambda_3 = -3$ e $V_{\lambda_3} = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}$.
   (e) $\lambda_1 = 1$ e $V_{\lambda_1} = \{(x, 0, 0, 0); x \in \mathbb{R}\}$; $\lambda_2 = -2$, $V_{\lambda_2} = \{(x, -3x, 0, 0); x \in \mathbb{R}\}$; $\lambda_3 = 3$ e $V_{\lambda_3} = \{(x, 0, 2x, 0); x \in \mathbb{R}\}$; $\lambda_4 = 2$ e $V_{\lambda_4} = \{(5y, y, 0, 4y); y \in \mathbb{R}\}$.

Exercícios 6

1. $\lambda = 1$ é o único autovalor do operador T_A e o seu autoespaço associado é $V_\lambda = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$. Logo, R^2 não possui uma base formada por autovetores de T_A. Assim, T_A não é diagonalizável e portanto A não é uma matriz diagonalizável.

2. Considerando que a matriz A é a matriz na base canônica do operador linear $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$T_A(v) = Av$$
onde v é um vetor coluna. Temos que $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ são autovalores distintos T_A. Logo, T_A é diagonalizável. Portanto, A é diagonalizável.

3. A matriz P que diagonaliza a matriz A é a matriz cujas colunas são formadas por autovetores linearmente independentes de A. Neste caso,
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios 7

1. (a) Sejam T um operador idempotente, λ um autovalor de T e $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Como T é idempotente vale a igualdade
$$T(T(v)) = T(v).$$

Substituindo, nessa equação, $T(v)$ por λv , obtemos:

$$\begin{aligned} T(T(v)) &= \lambda v \\ T(\lambda v) &= \lambda v \\ \lambda T(v) &= \lambda v \\ \lambda\lambda v &= \lambda v \\ \lambda^2 v - \lambda v &= 0 \\ (\lambda^2 - \lambda)v &= 0. \end{aligned}$$

Como $v \neq 0$, então devemos ter $\lambda^2 - \lambda = 0$; de onde obtemos $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

(b) Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a condição solicitada.

2. (a) $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$.

(b) Como $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, temos:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - 1 \\ p([T]) &= [T]^2 - 1I_2 \\ p([T]) &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)^2 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ p([T]) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ p([T]) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ p([T]) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Calculando o polinômio característico na matriz $[T]$ obtemos $p([T]) = [T]^2 - I_2$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, $p([T]) = 0$. Logo, devemos ter

$$[T]^2 - I_2 = 0,$$

de onde obtemos $[T]^2 = I_2$, como já foi verificado no item (b). Para calcular $[T]^3$, usamos a igualdade $[T]^3 = [T]^2[T]$. Como $[T]^2 = I_2$, então $[T]^3 = I_2[T]$. Logo, $[T]^3 = [T]$.

9 Espaços com Produto Interno

9.1 Introdução

O espaço $\mathbb{R}^3$ possui características importantes que gostaríamos que fossem compartilhadas por outros espaços vetoriais. Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$ podemos calcular ângulo e distâncias entre dois vetores. Como esses conceitos são oriundos da geometria, dizemos de um modo geral, que o espaço $\mathbb{R}^3$ possui uma geometria. Nesta seção, teremos como objetivo extender tais conceitos, naturais ao $\mathbb{R}^3$, para outros outros espaços vetoriais.

9.2 Produto interno

Definição (Produto interno). Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um *produto interno* sobre V é uma função $\langle\rangle$ de $V \times V$ em $\mathbb{R}$,

$$\langle\rangle : V \times V \to \mathbb{R},$$

que satisifaz as seguintes propriedades:

(i) $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ e $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$.

(ii) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para quaisquer $u, v \in V$.

(iii) $\langle u + w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$ para quaisquer u, v e $w \in V$.

(iv) $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$ para todo $k \in \mathbb{R}$ e para quaisquer $u, v \in V$.

Observações.

1. $\langle 0, v\rangle = \langle v, 0\rangle = 0$ para todo $v \in V$.

2. $\langle u, w + v\rangle = \langle u, w\rangle + \langle u, v\rangle$ para quaisquer u, v e $w \in V$.

Exemplos

1. **Espaço Vetorial $\mathbb{R}^3$.** Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^3$. A função definida por
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$
é um produto interno sobre $\mathbb{R}^3$.

   Demonstração. *Aula.*

2. **Espaço Vetorial $\mathbb{R}^n$.** Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, .., y_n)$ vetores quaisquer do $\mathbb{R}^n$. A função definida por
$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$
é um produto interno sobre $\mathbb{R}^n$. Este produto interno é chamado de **produto interno canônico** de $\mathbb{R}^3$ ou produto interno usual $\mathbb{R}^n$.

3. **Espaço Vetorial $\mathcal{C}[0, 1]$ (o espaço vetorial formado por todas as funções que são contínuas $[0, 1]$).** Sejam f e g funções quaisquer de $\mathcal{C}[0, 1]$. Isto é, f e g são funções contínuas no intervalo $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$. A função definida por
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$
é um produto interno sobre $\mathcal{C}[0, 1]$, sendo também chamado de produto interno canônico de $\mathcal{C}[0, 1]$.

   Demonstração. Primeiro lembre-se das seguintes propriedades da integral:

   $(a)\ \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$, $(b)\ \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

   e $(c)\ \int_a^b f(x)dx \geqslant 0$, sempre que $f(x) \geqslant 0$ em $[a, b]$.

   A **propriedade** (i) da definição de produto interno é satisfeita. De fato,
$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f(t)f(t)dt = \int_0^1 [f(t)]^2dt.$$
Como $[f(t)]^2 \geqslant 0$ para todo $t \in [0, 1]$, pela propriedade (c) das integrais, obtemos que $\int_0^1 [f(t)]^2dt \geqslant 0$ e, portanto, $\langle f, f\rangle \geqslant 0$.

   Agora, se $\langle f, f\rangle = 0$, então temos $\int_0^1 [f(t)]^2dt = 0$. Daí, $f(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$ e, portanto, $f = 0$. Isto é, f é a função que se anula em todo ponto de $[0, 1]$.

   Para provarmos que a **propriedade** (ii) é válida, basta atentarmos para o fato de que vale a comutatividade para o produto de números reais. Isto é, $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ para todo x real. Daí, temos
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 g(t)f(t)dt = \langle g, f\rangle.$$

A **propriedade** (iii) da definição de produto interno pode ser verificada fazendo uso da propriedade (a) das integrais. De fato, dadas funções $f, g, h \in \mathcal{C}[0,1]$ temos

$$\begin{aligned}\langle f+g, h\rangle &= \int_0^1 [f+g](t)h(t)dt = \int_0^1 [f(t)+g(t)]h(t)dt = \int_0^1 [f(t)h(t)+g(t)h(t)]dt \\ &= \int_0^1 f(t)h(t)dt + \int_0^1 g(t)h(t)dt \\ &= \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle.\end{aligned}$$

Por fim, a **propriedade** (iv) pode ser verificada fazendo uso da propriedade (b) das integrais. De fato, dadas uma constante real k e uma função $f \in \mathcal{C}[0,1]$, segue da propriedade (b) das integrais e da definição deste produto interno

$$\langle kf, g\rangle = \int_0^1 (kf)(t)g(t)dt = \int_0^1 kf(t)g(t)dt = k\int_0^1 (f)(t)g(t)dt = k\langle f, g\rangle.$$

Portanto, comos as propriedades (i)-(iv) da definição de produto são satisfeitas, então

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

é um produto interno sobre $\mathcal{C}[0,1]$.

4. **Espaço Vetorial** $\mathcal{M}(m,n)$**.** Seja X uma matriz quadrada de ordem n. Chama-se *traço* da matriz X, denotamos $tr(X)$, a soma dos termos de sua diagonal principal. Isto é,

$$tr(X) = x_{11} + x_{22} + ... + x_{nn} = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}.$$

Sejam A e B matrizes quaisquer de $\mathcal{M}(m,n)$. Isto é, A e B são matrizes de ordem $m \times n$. A função definida por definida por

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^T A) = \sum_{i}^{n} (B^T A)_{ii}$$

é um produto interno sobre $\mathcal{M}(m,n)$.

Demonstração. *Exercício.*

9.3 Norma

Definição (Norma). Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para cada $v \in V$, definimos a norma de v, denotamos $||v||$, como sendo o número real

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Observações.

1. $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \Longleftrightarrow ||v||^2 = \langle v, v\rangle.$

2. Se $v \in V$ é tal que $||v|| = 1$, dizemos que v é *unitário*.
3. Sendo V um espaço vetorial com produto interno segue, diretamente das definições de produto interno e de norma, as seguintes propriedades:

   (i) $||v|| \geqslant 0$ e $||v|| = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

   (ii) $||k \cdot v|| = |k| \cdot ||v||$ para todo $k \in \mathbb{R}$ e para todo $v \in V$.

Exemplos

1. Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual as normas dos vetores $x = (1, -1)$ e $y = (-2, -3)$ são respectivamente,

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\langle (1,-1),(1,-1)\rangle} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$
$$||y|| = \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\langle (-2,-3),(-2,-3)\rangle} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}.$$

2. No espaço das funções polinomiais de grau menor ou a 2, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, podemos considerar o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

De fato, toda função polinômial de grau menor ou igual a 2 é também uma função contínua. Assim, dado o polinômio $p(x) = x^2 - 2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, em relação a esse produto interno temos

$$||p(x)||^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \int_0^1 (x^2-2)(x^2-2)dx = \int_0^1 (x^4 - 4x^2 + 4)dx = \frac{43}{15}.$$

A Desigualdade de Cauchy-Shwarz.

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então,

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u|| \cdot ||v|| \tag{9.3.1}$$

para quaisquer $u, v \in V$. A igualdade vale se, e somente se, u e v forem vetores linearmente dependentes.

Demonstração. *Aula.*

A Desigualdade de Cauchy-Schwarz tem aplicações em vários ramos da matemática. Nesta seção, essa desigualdade será utilizada para demonstrar outra desigualdade muito importante, a *Desigualdade Triangular*, e também para estabelecermos a definição de ângulo entre dois vetores.

A Desigualdade Triangular

Sabe-se da *Geometria Euclidiana* que se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo qualquer, então

$$a < b + c.$$

Isto é, a medida de um dos lados é sempre inferior à soma das medidas dos outros dois lados. Uma versão deste resultado para vetores será apresentada a seguir.

Desigualdade Triangular. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então,

$$||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v|| \tag{9.3.2}$$

para quaisquer $u, v \in V$.

Demonstração. *Aula.*

Ângulo entre dois vetores

Sejam u e v dois vetores não nulos do espaço vetorial com produto interno V. Da desigualdade de Cauchy-Shwarz temos que

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u|| \cdot ||v||$$

para quaisquer $u, v \in V$. Efetuando a divisão dessa desigualdade pelo número real positivo $||u||\cdot||v||$, obtemos

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{||u|| \cdot ||v||} \leqslant 1. \tag{9.3.3}$$

Devido à propriedade de módulo de números reais, a equação (9.3.3) pode ser reescrita do seguinte modo

$$-1 \leqslant \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} \leqslant 1. \tag{9.3.4}$$

Por outro lado, sabemos que a função $\cos(t)$ é tal que

$$-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1. \tag{9.3.5}$$

Além disso, para t variando de 0 até π radianos, a função $\cos(t)$ assume cada valor do intervalo $[-1, 1]$ uma única vez. Portanto, existe um ângulo $t \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos(t) = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}. \tag{9.3.6}$$

Este ângulo t é chamado de ângulo entre os vetores u e v.

Ortogonalidade

Note que da igualdade (9.3.6)

$$\cos(t) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} = 0 \Longleftrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$

Além disso, $\cos(t) = 0$, no intervalo $[0, \pi]$ se, e somente se, $t = \dfrac{\pi}{2}$. Dessa forma, é conveniente a seguinte definição de *ortogonalidade* entre dois vetores u e v:

Definição (Vetores Ortogonais). Seja V um espaço com produto interno. Dizemos que dois vetores u e v são ortogonais se $\langle u, v\rangle = 0$, e denotamos $u \perp v$.

Exemplos

1. No Espaço Vetorial $\mathbb{R}^3$ considere os vetores $x = (1, -1, 0)$ e $y = (1, 1, 1)$ e o produto interno usual. Calculando $\langle x, y\rangle$, obtemos

$$\langle x, y\rangle = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times 1 = 0.$$

   Assim, os vetores x e y são ortogonais.

2. Podemos verificar facilmente que os vetores e_1, e_2, ..., e_n da base canônica do $\mathbb{R}^n$ são dois a dois ortogonais, segundo o produto interno usual.

3. No Espaço Vetorial $\mathcal{C}[0, \pi]$ considere as funções $f(x) = \mathrm{sen} x$ e $g(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \int_0^\pi f(x)g(x)dx \\ &= \int_0^\pi \mathrm{sen}(x)\cos(x)dx \\ &= \int_0^\pi \frac{2}{2}\mathrm{sen}(x)\cos(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi 2\mathrm{sen}(x)\cos(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{sen}(2x)dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Logo, o conjunto $\{\mathrm{sen}(x), \cos(x)\}$ é um conjunto ortogonal de $\mathcal{C}[0, \pi]$.

Base Ortogonal e Base Ortornormal

Vetores ortogonais são linearmente independentes. Este fato será estabelecido pelo próximo teorema.

Teorema 1. Seja V um espaço vetorial com produto interno e $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto de vetores de V dois a dois ortogonais. Então, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto linearmente independentes.
Demonstração. *Aula.*

Definição (Base Ortogonal). Uma base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V é dita ser uma *base ortogonal* se os vetores de β são dois a dois ortogonais. Isto é, $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortogonal de V se

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0$$

para todo $i \neq j$.

Definição (Base Ortonormal). Uma base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de V é dita ser uma *base ortonormal* se β é uma base ortogonal e os seus vetores são unitários. Isto é, $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortonormal de V se

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Coefiecientes de Fourier

Se V é um espaço vetorial com produto interno e $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é uma base ortogonal de V, então cada vetor $v \in V$ pode ser escrito como

$$v = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}v_2 + ... + \frac{\langle v, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle}v_n \tag{9.3.7}$$

Os coeficientes $\frac{\langle v, v_i\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle}$ para cada $i = 1, 2, ..., n$ são chamados de *coeficientes de Fourier*. Note que no caso de $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ser uma base ortornormal, como os vetores v_i são unitários, então a combinação linear de v fica

$$v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 + ... + \langle v, v_n\rangle v_n. \tag{9.3.8}$$

Exemplos

1. As bases canônicas $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$,....,$\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ são exemplos de bases ortornormais, onde esses espaços são considerados com o produto interno usual.

2. Considere os vetores $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, $v = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ e $w = (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \times 0 = 0 \\
\langle u, w\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 0 \times 1 = 0 \\
\langle v, w\rangle &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + 0 \times 1 = 0
\end{aligned}$$

Logo os vetores u, v e w são dois a dois ortogonais, e assim o conjunto $\{u, v, w\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Além disso, pode ser facilmente verificado que que esses vetores são unitários. Dessa forma, a base $\{u, v, w\}$ é ortonormal.

Sabendo-se que essa base é ortonormal, o vetor $x = (1, 1, 1)$ pode ser escrito como combinação linear dessa base do seguinte modo

$$x = \langle x, u\rangle u + \langle x, v\rangle v + \langle x, w\rangle w.$$

Efetuando os cálculos dos coeficientes de Fourier, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle x, u\rangle &= 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \times 0 = \sqrt{2} \\
\langle x, v\rangle &= 1 \times (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \times 0 = 0 \\
\langle x, w\rangle &= 1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1
\end{aligned}$$

Portanto, x escrito como combinação linear dos vetores u, v e w fica

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}u + 0v + 1w, \\ &= \sqrt{2}u + w. \end{aligned}$$

Exercícios Propostos

1. Dados os vetores $u = (1, 1, 1, 1)$ e $v = (1, 2, 3, 4)$ do $\mathbb{R}^4$, use o produto interno canônico para calcular
   a) $\langle u, v\rangle$
   b) $||u||$
   c) $||v||$
   d) O ângulo entre u e v.
2. Determine a norma de $p(t) = t^2 - t + 2$, usando o produto interno usual de $\mathcal{C}[0, 1]$.
3. Definimos a *distância entre os vetores* u e v como sendo o número real dado por
$$d(u, v) = ||u - v||.$$
   a) Calcule a distância entre os vetores u e v do item (1).
   b) Mostre que $d(u, 0) = ||u||$ para todo $u \in V$.
4. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Mostre que
$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2,$$
   e que
$$||u - v||^2 = ||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2.$$
5. Sejam V um espaço com produto interno e vetores u e v de V tais que $||u|| = 1$, $||v|| = 2$ e $||u - v|| = 5$. Determine $\langle u, v\rangle$.
6. Mostre que, em um espaço vetorial com produto interno V,
$$\frac{1}{4}||u + v||^2 - \frac{1}{4}||u - v||^2 = \langle u, v\rangle.$$
7. Mostre que os vetores v e $u - \dfrac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v$ são ortogonais.
8. Mostre que
$$||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u|| \times ||v|| \cos(\theta).$$
   (*Lei dos cossenos*)
9. Se u e v são vetores ortogonais, mostre que
   a) $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$
   b) $||u + v|| = ||u - v||$

10. Seja V um espaço vetorial com produto interno a $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base ortonormal de V. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Mostre que

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \langle T(v_1), v_1\rangle & \langle T(v_2), v_1\rangle & \langle T(v_3), v_1\rangle \\ \langle T(v_1), v_2\rangle & \langle T(v_2), v_2\rangle & \langle T(v_3), v_2\rangle \\ \langle T(v_1), v_3\rangle & \langle T(v_2), v_3\rangle & \langle T(v_3), v_3\rangle \end{bmatrix}.$$

9.4 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Esse processo gera uma base ortonormal do espaço vetorial V a partir de uma base qualquer.

Seja $\alpha = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base qualquer do espaço vetorial V. Primeiro o processo gera uma base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ortogonal, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \\ v_3 &= u_3 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 \\ \vdots &= \vdots \\ v_n &= u_n - \frac{\langle u_n, v_{n_1}\rangle}{\langle v_{n-1}, v_{n-1}\rangle} v_{n-1} - ... - \frac{\langle u_n, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 - \frac{\langle u_n, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1. \end{aligned} \tag{9.4.1}$$

Em seguida, normalizando cada um dos vetores v_i, isto é, fazendo $w_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$, $w_2 = \frac{v_2}{||v_2||}$,...., $w_n = \frac{v_n}{||v_n||}$, obtemos o conjunto

$$\gamma = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$$

que é uma base ortonormal de V.

Exemplos

1. Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir da base $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

9.5 Complemento Ortogonal

Seja V um espaço vetorial com produto interno e S um subconjunto não vazio de V. O *complementar ortogonal* de S em V é o conjunto

$$S^\perp = \{v \in V; v \perp u, \text{ para todo } u \in S\}.$$

Isto é, $S^\perp$ é formado por todos os vetores de V que são ortogonais a todos os vetores de S.

Observações.

1. $S^\perp$ é um subespaço vetorial (ainda que S não seja).

2. Quando S também é um subespaço vetorial de V, temos
$$V = S \oplus S^{\perp}.$$

3. $\{0\}^{\perp} = V$ e $V^{\perp} = \{0\}$

Exemplos

1. Seja $S = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)]$. Para determinar o complemento ortogonal de S devemos determinar todos os vetores $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que
$$\langle (x, y), (1, 1) \rangle = 0.$$
Daí, obtemos $x + y = 0$, o que implica $y = -x$. Sendo assim, obtemos
$$S^{\perp} = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)].$$

2. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelo vetores $(1, 1, -1, 0)$ e $(-1, 1, 0, 1)$. Determinar $W^{\perp}$.
Resolução. Precisamos determinar todos os vetores $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tais que
$$\langle (x, y, z, w), (1, 1, -1, 0) \rangle = 0,$$
$$\langle (x, y, z, w), (-1, 1, 0, 1) \rangle = 0.$$
Daí, obtemos
$$\begin{aligned} x + y - z &= 0, \\ -x + y + w &= 0. \end{aligned}$$
De onde obtemos, $z = x + y$ e $w = x - y$. Assim,
$$W^{\perp} = \{(x, y, x + y, x - y); x, y \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1)].$$

9.6 Exercícios Propostos

1. Seja $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Use o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

2. Seja $\beta = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)\}$. Use o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

3. Determine uma base ortonormal, em relação ao produto interno usual, para o subespaço
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}.$$

4. $W \in \mathbb{R}^3$ o subespaço gerado pelos vetores $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$. Determine uma base para $W^{\perp}$ (usando o produto interno usual).

5. Considere o subespaço $W \in \mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ e $w = (1, -1, -1)$. Considerando o produto interno usual do $\mathbb{R}^3$
   a) Determine $W^{\perp}$;
   b) Determine uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Im}(T) = W$ e $\mathrm{Ker}(T) = W^{\perp}$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por
$$T(x, y, z) = (x, x - y, -z).$$
e $W = \mathrm{Ker}(T)$. Usando o produto interno usual, determine uma base ortonormal para $W^{\perp}$.

9.7 Exercícios Gerais

1. No espaço vetorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

   (a) Mostre que a função que a função

   $$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

   é um produto interno.

   (b) Mostre que $\{1, x, x^2\}$, a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, é ortonormal em relação a esse produto interno.

   (c) Mostre que $\{1, x, x^2\}$, a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, não é ortonormal em relação ao produto interno canônico de $\mathcal{C}[0, 1]$.

   (d) Use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para ortogonalizar a base $\{1, x, x^2\}$ em relação ao produto interno canônico de $\mathcal{C}[0, 1]$.

2. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno definido por

   $$\langle(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

   a) Verifique que $\langle,\rangle$ é mesmo um produto interno.

   b) Verifique que o conjunto $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ não é ortogonal em relação a esse produto interno.

   c) A partir da base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, obtenha uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$, em relação a esse produto interno.

3. Sejam A e B matrizes de $\mathcal{M}(2, 2)$.

   a) Verifique que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^TA)$ é mesmo um produto interno em $\mathcal{M}(2, 2)$. (Veja a definição da função traço na seção de exemplos 2.1)

   b) Determine uma base ortonormal, segundo esse produto interno, a partir da base

   $$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

9.8 Respostas

Exercícios 3.10

1. (a) 10.

   (b) 2.

   (c) $\sqrt{30}$.

   (d) $\theta = \arccos(\sqrt{30}/6)$.

2. $||p(t)|| = \sqrt{15/2}$.

   (a) $\sqrt{14}$.

   (b) Como $d(u, v) = ||u - v||$, então $d(u, 0) = ||u - 0|| = ||u||$, para todo $u \in V$.

3. $\langle u, v\rangle = -10$.

Exercícios 6

1. Sabendo que $W = [(1, 0, -1), (0, 1, 1)]$ use o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter a base solicitada.

2. $W^{\perp} = [(1, -1, -1)]$.

3. $W^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

10 Operadores Especiais

10.1 Introdução

Nesta seção serão estudados dois tipos de operadores especiais. Trata-se do operador simétrico e do operador ortogonal. Esses operadores possuem interessantes propriedades teóricas e são muito utilizados na modelagem e resolução de vários problemas práticos.

Uma boa característica desses operadores é que as suas matrizes, em relação à qualquer base ortonormal do espaço, são tipos bem especiais de matrizes. Por isso, antes de estudar tais operadores, começaremos revendo os conceitos e propriedades de matrizes simétricas e matrizes ortogonais.

Definição. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e A^T a sua transposta. Dizemos que A é uma *matriz simétrica* se

$$A^T = A$$

e que A é uma *matriz ortogonal* se

$$A^T A = A A^T = I_n.$$

Observe que a matriz inversa de uma matriz ortogonal é sua transposta.

Propriedades das matrizes ortogonais

As propriedades a seguir apresentam outras caracterizações de matrizes ortogonais e facilitam a tarefa de determinar se uma dada matriz é ou não ortogonal.

1. Se A é uma matriz ortogonal de ordem n. Então, $\det(A) = -1$ ou $\det(A) = 1$;

2. A é uma matriz ortogonal se, e somente se, as colunas (ou linhas) A são vetores ortonormais.

Exemplos

1. A matriz $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal. De fato, calculando RR^T, obtemos

$$RR^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $RR^T = I_2$, então, por definição, R é uma matriz ortogonal. Outra maneira de verificar que a matriz R é ortogonal, seria constatar que as suas colunas formam um conjunto de vetores ortonormais do $\mathbb{R}^2$.

2. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ não pode ser ortogonal. De fato, $\det(A) = 2$.

3. A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é tal que $\det(B) = 1$. Porém, como a condição $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$ não é suficiente para garantir que A seja ortogonal, não podemos afirmar que B é uma matriz ortogonal. De fato, B não é uma matriz ortogonal pois, segundo o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$, a segunda coluna da matriz não é um vetor unitário.

10.2 Operador Simétrico

Definição (Operador Simétrico). Seja V um espaço vetorial com produto interno, α uma base ortonormal de V e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que o operador T é um *operador simétrico* se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica.

Observações.

1. O operador simétrico é também chamado de operador *auto-adjunto*.

2. A definição independe da escolha da base ortonormal α.

Exemplos

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 3y - z, x - y + 4z)$. Note que $[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica. Logo T é um operador simétrico.

2. Determine um operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que seja simétrico.

   Resolução.

   De acordo com a definição, basta apenas considerar uma matriz simétrica de ordem 2 qualquer. Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica. Podemos definir então o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T_A(x, z) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

   Isto é, $T_A(x, z) = (x - 2y, -2x + y)$. Em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$, que é ortonormal,

$$[T_A] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Isto é, T_A é um operador simétrico.

Propriedades dos Operadores Simétricos.

Nos teoremas seguintes, considere V um espaço vetorial no qual está definido um produto interno $\langle , \rangle$.

Teorema 10.2.1 $T : V \to V$ *é um operador simétrico se, e somente se,*

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$$

para todo $u, v \in V$.

Teorema 10.2.2 *Se* $T : V \to V$ *é um operador simétrico e* λ_1 *e* λ_2 *são autovalores distintos de* T *e* v_1 *e* v_2 *autovetores associados a* λ_1 *e* λ_2*, respectivamente, então* $v_1 \perp v_2$.

Demonstração. *Sejam* λ_1 *e* λ_2 *autovalores distintos de* T *e suponha que* v_1 *e* v_2 *são tais que* $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ *e* $T(v_2) = \lambda_2 v_2$*. Do Teorema 1, temos que*

$$\begin{aligned} \langle T(v_1), v_2\rangle &= \langle v_1, T(v_2)\rangle \\ \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle &= \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle \end{aligned}$$

Logo, $\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle - \lambda_2\langle v_1, v_2\rangle = 0$. De onde obtemos, $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Como, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, e portanto, v_1 e v_2 são ortogonais. **C.Q.D.**

O próximo teorema é um dos teoremas mais importantes da Álgebra Linear. O mesmo estabelece que operadores simétricos são diagonalizáveis. Isto é, se V é um espaço vetorial com produto interno e se $T : V \to V$ e um operador simétrico, então existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

Teorema 10.2.3 ***(Teorema Espectral.)*** *Seja* $T : V \to V$ *um operador Simétrico. Então, existe uma base ortonormal de* V *formada por autovetores de* T.

É importante ressaltar que dizer que existe uma base α de V formada por autovetores de T é equivalente a dizer que existe uma base α de V, em relação a qual, a matriz $[T]^\alpha_\alpha$ é diagonal. Assim, concluimos que um operador simétrico é diagonalizável, e além disso, V admite uma base ortonormal de autovetores de T.

Teorema 10.2.4 ***(Teorema Espectral, versão matricial.)***
Se $A \in \mathcal{M}(n, n)$ *é simétrica, então existe uma matriz* $P \in \mathcal{M}(n, n)$ *que é ortogonal e tal que*

$$P^{-1}AP$$

é uma matriz diagonal.

Como a matriz P deve ser ortogonal, então por definição, $P^{-1} = P^T$. Dessa forma, podemos reescrever o Teorema Espectral para matriz da seguinte forma:

Se $A \in \mathcal{M}(n,n)$ *é simétrica, então existe uma matriz* $P \in \mathcal{M}(n,n)$ *que é ortogonal e tal que*

$$P^T AP$$

é uma matriz diagonal.

Na prática a matriz P é formada calculando-se os autovalores ortonormais da matriz A.

Exercícios Propostos

1. Seja $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Suponha que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador simétrico tal que
$$A = [T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Determine uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

2. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Suponha que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um operador simétrico tal que
$$A = [T] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$
Determine uma matriz P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

3. Seja V um espaço vetorial com produto interno a $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base ortonormal de V. Seja $T : V \to V$ um operador simétrico. Mostre que
$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \langle T(v_1), v_1\rangle & \langle T(v_1), v_2\rangle & \langle T(v_1), v_3\rangle \\ \langle T(v_1), v_2\rangle & \langle T(v_2), v_2\rangle & \langle T(v_2), v_3\rangle \\ \langle T(v_1), v_3\rangle & \langle T(v_2), v_3\rangle & \langle T(v_3), v_3\rangle \end{bmatrix}.$$

10.3 Operador Ortogonal

Definição (Operador Ortogonal). Seja V um espaço vetorial com produto interno, α uma base ortonormal de V e $T : \mathbb{V} \to V$ um operador linear. Então T é chamado de *operador ortogonal* se $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz ortogonal.

Exemplos

1. Considere o operador rotação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o qual é definido por
$$T(x, y) = (x cos\theta + y sen\theta, -x sen\theta + y cos\theta).$$
T é um operador ortogonal. De fato, a matriz de T em relação a base canônica do $\mathbb{R}^2$, é
$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}.$$
Sejan u_1 e u_2 a primeira e a segunda coluna de $[T]$, respectivamente, temos o seguinte:

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle (cos\theta, -sen\theta), (sen\theta, cos\theta) \rangle = cos\theta sen\theta - sen\theta cos\theta = 0$$
$$\langle u_1, u_1 \rangle = \langle (cos\theta, -sen\theta), (cos\theta, -sen\theta) \rangle = cos^2\theta + sen^2\theta = 1$$
$$\langle u_2, u_2 \rangle = \langle (sen\theta, cos\theta), (sen\theta, cos\theta) \rangle = sen^2\theta + cos^2\theta = 1.$$

Assim as colunas da matriz $[T]$ são vetores ortonormais, logo $[T]$ é uma matriz ortogonal e portanto, T é um operador ortogonal.

Caracterização de Operadores Ortogonais

O Teorema a seguir apresenta uma caracterização para os operadores ortogonais. Dessa forma, conheceremos várias maneiras diferentes de reconhecer um operador dessa categoria. Uma das principais características desses operadores é que os mesmos preservam produto interno. Este é um dos motivos pelos quais esses operadores estão associado a movimentos rígidos.

Teorema (Caracterização de Operadores Ortogornais)
Seja $T : V \to V$ um operador linear em um espaço vetorial V com produto interno. Então, as condições abaixo são equivalentes.

1. T é ortogonal.
2. T transforma base ortonormal em base ortonormal.
3. $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in V$. (T preserva produto interno).
4. $||T(u)|| = ||u||$ para todo $u \in V$ (T preserva norma).

10.4 Exercícios Propostos

1. Dentre os operadores lineares a seguir, verificar quais são ortogonais.
   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-y, -x)$.
   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x - y, x + y)$. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (-y, -x) = (z, x, -y)$. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por
   $$T(x, y, z) = (x, ycos\theta + zsen\theta, -ysen\theta + zcos\theta).$$
2. Considere o $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear dado por $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$.
   a) Mostre que T é um operadpr simétrico mas não é ortogonal.
   b) Se $v = (2, -1, 5)$ e $w = (3, 0, 1)$, verifique que $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$.
   c) Determine uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T.
3. Construa uma matriz ortogonal A cuja primeira coluna seja os elementos do vetor $(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$.
4. Construa uma matriz ortogonal A cuja primeira coluna seja os elementos do vetor $(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$.
5. Mostre que se T é um operador ortogonal, então T é injetivo.