

Guia Completo: Balanceamento de Árvores AVL

1. Conceitos Fundamentais

O que é uma Árvore AVL?

Uma árvore AVL é uma árvore binária de busca **auto-balanceada** onde, para cada nó, a diferença entre as alturas das subárvores esquerda e direita não pode ser maior que 1.

Fator de Balanceamento (FB)

O **Fator de Balanceamento** de um nó é calculado como:

$$FB = \text{Altura}(\text{subárvore direita}) - \text{Altura}(\text{subárvore esquerda})$$

Valores possíveis:

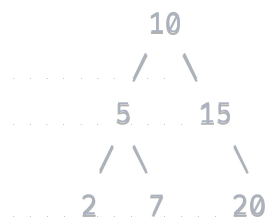
- **FB = 0:** Árvore perfeitamente balanceada
 - **FB = +1:** Subárvore direita é 1 nível mais alta
 - **FB = -1:** Subárvore esquerda é 1 nível mais alta
 - **FB = +2 ou -2:** Árvore **DESBALANCEADA** → Precisa rotacionar!
-

2. Como Calcular a Altura de um Nó

Definição de Altura

- **Altura:** Maior caminho do nó até uma folha
- **Folha:** altura = 0
- **Nó interno:** altura = 1 + max(altura_esquerda, altura_direita)
- **Nó nulo:** altura = -1

Exemplo Prático



Calculando alturas:

- $\text{Altura}(2) = 0$ (folha)
- $\text{Altura}(7) = 0$ (folha)

- $\text{Altura}(20) = 0$ (folha)
- $\text{Altura}(5) = 1 + \max(0, 0) = 1$
- $\text{Altura}(15) = 1 + \max(-1, 0) = 1$
- $\text{Altura}(10) = 1 + \max(1, 1) = 2$

Calculando fatores de balanceamento:

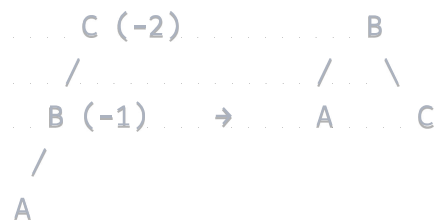
- $\text{FB}(2) = (-1) - (-1) = 0$
 - $\text{FB}(7) = (-1) - (-1) = 0$
 - $\text{FB}(20) = (-1) - (-1) = 0$
 - $\text{FB}(5) = 0 - 0 = 0$
 - $\text{FB}(15) = 0 - (-1) = +1$
 - $\text{FB}(10) = 1 - 1 = 0$
-

3. Os 4 Casos de Rotação

Quando um nó tem $\text{FB} = +2$ ou -2 , precisamos identificar qual rotação aplicar:

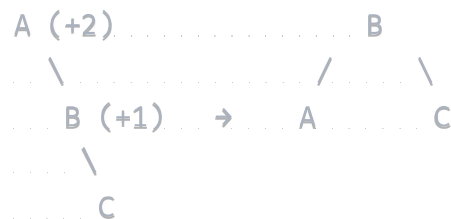
Caso 1: Rotação Simples à Direita (LL)

Quando usar: $\text{FB}(\text{nó}) = -2$ e $\text{FB}(\text{filho_esquerdo}) = -1$



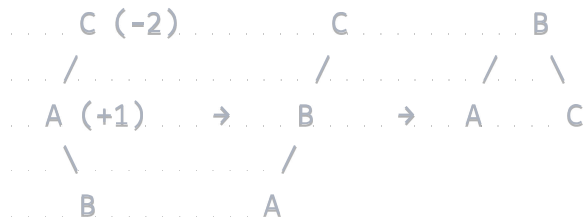
Caso 2: Rotação Simples à Esquerda (RR)

Quando usar: $\text{FB}(\text{nó}) = +2$ e $\text{FB}(\text{filho_direito}) = +1$



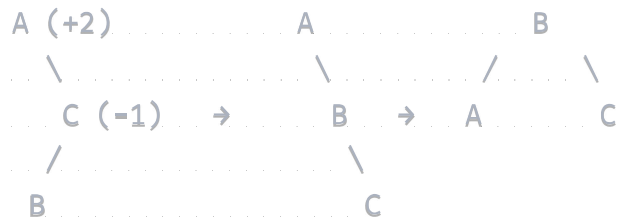
Caso 3: Rotação Dupla Esquerda-Direita (LR)

Quando usar: $\text{FB}(\text{nó}) = -2$ e $\text{FB}(\text{filho_esquerdo}) = +1$



Caso 4: Rotação Dupla Direita-Esquerda (RL)

Quando usar: $FB(nó) = +2$ e $FB(filho_direito) = -1$



4. Algoritmo Passo a Passo

Para cada inserção/remoção:

1. **Execute a operação normal** (inserir/remover como em BST)
2. **Recalcule as alturas** dos nós no caminho da raiz até o nó modificado
3. **Calcule os fatores de balanceamento**
4. **Identifique nós desbalanceados** ($FB = \pm 2$)
5. **Determine o tipo de rotação** necessária
6. **Execute a rotação**
7. **Recalcule alturas** após a rotação

5. Exemplo Detalhado: Inserção

Vamos inserir os valores: 10, 5, 15, 2, 7, 12, 20, 1

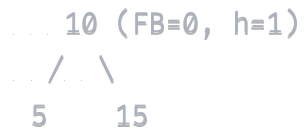
Passo 1: Inserir 10

10 (FB=0, h=0)

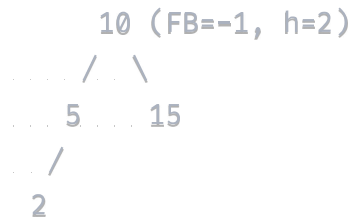
Passo 2: Inserir 5

10 (FB=-1, h=1)
 /
 5 (FB=0, h=0)

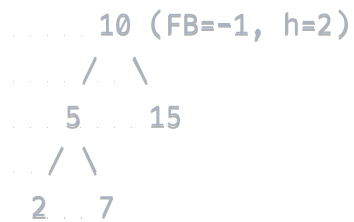
Passo 3: Inserir 15



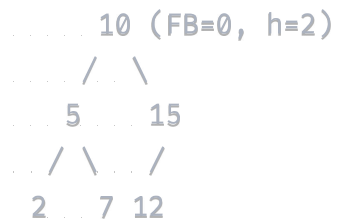
Passo 4: Inserir 2



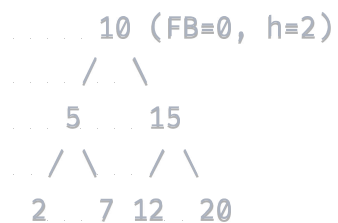
Passo 5: Inserir 7



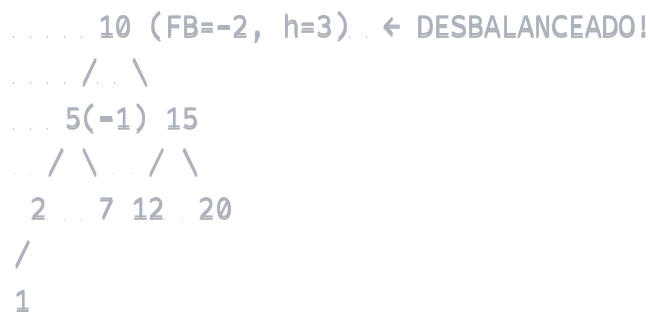
Passo 6: Inserir 12



Passo 7: Inserir 20



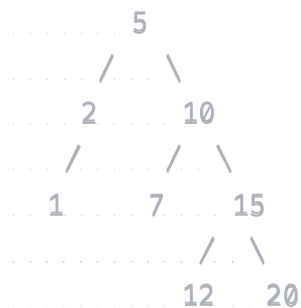
Passo 8: Inserir 1 → **DESBALANCEAMENTO!**



Análise:

- $FB(10) = -2 \rightarrow$ Desbalanceado
- $FB(5) = -1 \rightarrow$ Caso LL (Rotação Simples à Direita)

Após rotação:



6. Dicas Importantes

Como Identificar o Tipo de Rotação:

1. **Identifique o nó desbalanceado** ($FB = \pm 2$)
2. **Olhe para o filho na direção do desbalanceamento:**
 - Se $FB = -2$, olhe o filho esquerdo
 - Se $FB = +2$, olhe o filho direito
3. **Compare os sinais:**
 - **Sinais iguais** \rightarrow Rotação simples
 - **Sinais diferentes** \rightarrow Rotação dupla

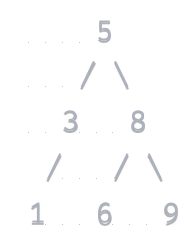
Tabela de Decisão:

FB(nó)	FB(filho)	Rotação
-2	-1 ou 0	LL (Simples à direita)
+2	+1 ou 0	RR (Simples à esquerda)
-2	+1	LR (Dupla esq-dir)
+2	-1	RL (Dupla dir-esq)

7. Exercícios Práticos

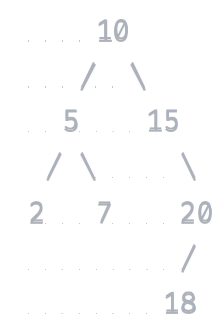
Questão 1 (Básico)

Calcule o fator de balanceamento de cada nó na árvore:



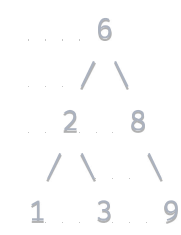
Questão 2 (Básico)

Determine se a seguinte árvore é AVL:



Questão 3 (Intermediário)

Insira o valor 4 na árvore AVL abaixo e mostre o estado final:



Questão 4 (Intermediário)

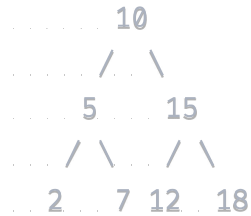
Que tipo de rotação é necessária quando um nó tem FB = +2 e seu filho direito tem FB = -1?

Questão 5 (Intermediário)

Construa uma árvore AVL inserindo os valores na ordem: 1, 2, 3, 4, 5, 6

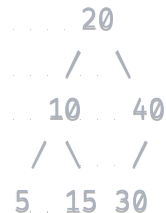
Questão 6 (Intermediário)

Remova o valor 10 da árvore AVL:



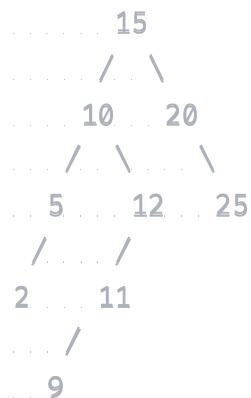
Questão 7 (Avançado)

Insira os valores 25, 30, 35 na árvore AVL abaixo e mostre todas as rotações necessárias:



Questão 8 (Avançado)

Determine a sequência de rotações necessárias para balancear a árvore após inserir o valor 8:



Questão 9 (Avançado)

Construa uma árvore AVL com altura mínima que contenha exatamente 15 nós.

Questão 10 (Difícil)

Dada a sequência de inserções: 50, 25, 75, 10, 30, 60, 80, 5, 15, 27, 35, 55, 65, 90, 85. Mostre o estado da árvore após cada rotação necessária.

Questão 11 (Difícil)

Prove que após uma rotação simples em uma árvore AVL, todos os fatores de balanceamento ficam entre -1 e +1. Use um exemplo específico para demonstrar.

Questão 12 (Muito Difícil)

Você tem uma árvore AVL com 1000 nós. Após uma sequência de operações, você precisa inserir os valores de 1001 a 1010 em ordem crescente. Determine:

- Quantas rotações serão necessárias no pior caso?
 - Qual será a altura final da árvore?
 - Desenhe a estrutura da árvore após as 3 primeiras inserções, mostrando todas as rotações.
-

Respostas dos Exercícios

Resposta 1:

- $FB(1) = 0, FB(3) = -1, FB(6) = 0, FB(9) = 0, FB(5) = -1, FB(8) = 0$

Resposta 2:

Não é AVL. O nó 15 tem $FB = +2$.

Resposta 3:

Após inserir 4, será necessária uma rotação RL no nó 6.

Resposta 4:

Rotação dupla direita-esquerda (RL).

Resposta 5:

A árvore final terá 4 como raiz, com rotações necessárias após inserir 3, 5 e 6.

[As demais respostas podem ser desenvolvidas individualmente conforme necessário]

Conclusão

O balanceamento de árvores AVL segue um padrão sistemático:

- Identifique** o desbalanceamento ($FB = \pm 2$)
- Determine** o tipo de rotação baseado nos fatores de balanceamento
- Execute** a rotação apropriada
- Recalcule** as alturas

Com prática, esse processo se torna automático. Lembre-se sempre de que o objetivo é manter a propriedade AVL: **$|\mathbf{FB}| \leq 1$** para todos os nós.