Probabilidade II - variáveis aleatórias e distribuições

1. Um vírus de computador está tentando corromper dois arquivos. O primeiro deles tem probabilidade 0.3 de ser corrompido e o segundo tem probabilidade 0.2.

a) Calcule a função da massa de probabilidade (fmp) de *X*, o número de arquivos corrompidos.

b) Desenhe o gráfico da função de distribuição acumulada (fda).

Sejam os eventos independentes,

P1 = {Prob. arquivo 1 corrompido} = 0.3;

P2 = {Prob. arquivo 2 corrompido} = 0.2;

X = {num. arquivos corrompidos}

a)

Para x = 0:

P(X=0) = (1−p1)(1−p2) = (0.7)(0.8)= **0.5**

Para x = 1:

P(X=1) = p1(1−p2) + (1−p1) p2 = (0.3)(0.8) + (0.7)(0.2) = 0.24 + 0.14 = **0.38**

Para x = 1:

P(X=2) = p1p2 = (0.3)(0.2) = **0.06**

b)

Para x <0:

F(X) = 0

Para 0 <= x < 1

F(x) = P(X=0) = 0.56

Para 1<= x < 2

F(x) = P(X=0) + P(X=1) = 0.56 + 0.38 = 0.94

Para x >= 2

F(x) = 1

2. O lançamento de um dado pode resultar em um número de 1 a 6 com probabilidades iguais. Seja *X* o valor do resultado. Calcule **E**(*X*) e Var(*X*). O que significa o valor de **E**(*X*) nesse contexto?

Considerando que o dado é honesto a prob. de cair uma face qualquer é ⅙.

Logo,

E(x) = 1/6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6

E(x^2) = 1/6(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = 91/6

Var(X) =E(x^2) − [E(x)]^2; = 91 / 6 - (21/6)^2 = 35/12

O valor E(x) representa o valor esperado do resultado do lançamento caso ele fosse repetido um grande número de vezes. No caso do experimento, esse valor teórico seria de 21/6.

3. O número de apagões diários em certa cidade tem a seguinte funç ao de distribuição(fmp):

x	0	1 2
$f(x)$	0.6	0.3 0.1

Um aplicativo de delivery local estima um prejuízo de R$500 em cada apagão. Calcule o valor esperado (esperança matemática) e a variância do prejuízo diário deste aplicativo causado pelos apagões.

Sejam,

P(X=0) = 0.6 ; P(X=1) = 0.3; P(X=2) = 0.1

Prej. apagão = 500;

Prej. diário = Y =500x

Então,

E(X) = 0*0.6 + 1*0.3 + 2*0.1 = 0.3 + 0.2 = 0.5 (média teórica apagões/ dias)

E(Y) = E(500*X) = 500*E(X) = 500*0.5 = 250 (média teórica prejuízo/dias)

Var(X) = E(X^2) − [E(X)]^2 = 0.7 − (0.5)^2= 0.7 − 0.25 = 0.45

Var(Y) = 500^2 *Var(X) =250000*0.45 = 112500

Esperança matemática do prejuízo = 250.

Variância do prejuízo = 112.500.

4. O nu´mero de falhas de hardware (X) e o nu´mero de falhas de software (Y) em qualquer dia em certo laborat´orio de computadores tem a distribui¸c˜ao conjunta $f(x, y)$ com $f(0, 0) = 0.6$, $f(0, 1) = 0.1$, $f(1, 0) = 0.1$ e $f(1, 1) = 0.2$. Baseando-se nesta informa¸c˜ao, responda:

a) falhas de hardware e software (X e Y) s˜ao independentes?

b) Qual o valor esperado do nu´mero total de falhas em um dia ($\mathbf{E}(X + Y)$)?

Sejam,

f(0,0) = 0.6; f(0,1) = 0.1; f(1,0) = 0.1; f(1,1) = 0.2

a)

Se X e Y são independentes, em particular, f(x,y) = Px(X) * Py(y)

Como, Px(0) * Py(0) = 0.7 * 0.7 = 0.48 != 0.49,

Portanto, não são independentes.

b)

Note que, por propriedade, E(X+Y) = E(X) + E(Y), então,

E(X) = 0*P(X=0) + 1*P(X=1)= 0 +1*0.3 = 0.3

E(Y) = 0*P(Y=0) + 1*P(Y=1) = 0+ 1*0.3 = 0.3

E(X+Y)= 0.3 + 0.3 = 0.6

5. O tempo, em minutos, gasto para certo sistema reiniciar é uma variável contínua com a densidade

$$f(x) = \begin{cases} C(10-x)^2 & \text{se } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Calcule C e a probabilidade do sistema gastar entre 1 a 2 minutos para ser reiniciado.

Por abuso de notação, considere (10,0) como o intervalo de integração, limite superior e limite inferior respectivamente.

a) Calculando C

Devemos analisar se, ∫(0,10) C(10−x)^2 dx =1

Substituindo u = 10 - x; du = -dx; temos,

∫(0,10) C(10−x)^2dx = C ∫(0,10) u^2(−du) =C∫(0,10)u^2du = C[u^3/3](10, 0) = C · 1000/3 = 1

C = 3/1000;

b) Prob. de 1 < X < 2

P(1 < X < 2) = ∫(2,1) (3/1000) * (10 - x) ^2 dx = (3/1000) * [- (10-x)^3/ 3](2,1)

= (1/1000) * [- (10-2)^3 + (10-1)^3]= (1/1000) * [- (8)^3 + (9)^3]= (1/1000) * [-512 + 729]

= (1/1000) * 217= 217/1000 = 0,217

6. A rede de um laboratório com 20 computadores recebeu ataques de vírus de computador. O vírus entra em cada computador com probabilidade 0.3 independente dos demais computadores. Qual a probabilidade do vírus entrar em pelo menos 10 computadores?

Sejam,

n=20; p = {prob. vírus entrar no pc} = 0.3;

Calculando o complementar da prob. binomial, P(X >= 10) = 1− P(X <=9)

Como,

P(X >= 10) = Σ(20, k=10) de (k 20) * (0.3)^3 * (0.7)^20-k e

P(X = k) = (k 20) * (0.3)^3 * (0.7)^20-k

Então,

P(X=0) =~ 0,000798; P(X=1) =~ 0,006839; P(X=2) =~ 0,027846; P(X=3) =~ 0,071604; P(X=4) =~

0,130421; P(X=5) =~ 0,178863; P(X=6) =~ 0,191639; P(X=7) =~ 0,164262; P(X=8) =~ 0,114397; P(X=9) =~ 0,065370.

P(X >=10) = 1−0.952038 =~ 0.047962 =~ 0.048 = 4,8%

7. Certo sistema recebe, em média, 8 requisições por hora.

a) Qual a probabilidade dele receber pelo menos 5 requisições na próxima hora?

b) E dele receber exatamente 5 requisições na próxima hora?

a)

Como,

P(X >= 5) = 1 - P(X <= 4) = {Prob. de receber pelo menos 5 requisições}

Então,

Por Poisson, P(X = k) = (e^-λ * λk)/ k!
Para k = 0,1,2,3,4 temos,

P(X=0) = e^(-8) * 8^0/0! =~ 0,000335,

P(X=1) =~e^(-8) * 8^1/1! ≈ 0,002684,

P(X=2) = e^(-8) * 8^2/2! =~0,010735,

P(X=3) = e^(-8) * 8^3/3! =~0,028626,

P(X=4) = e^(-8) * 8^4/4! =~0,057252.

P(X<=4) = 0.099632

p(X>=5) = 1 - 0.099632 = 0.900368

b) P(X=5) = e^(-8) * 8^5/5! =~ 0.091604

8. Uma ferramenta de busca procura por uma palavra-chave em uma sequência de websites de forma independente. Acredita-se que 30% deles possuem esta palavra-chave.

a) Qual a probabilidade de pelo menos 5 dos 10 primeiros websites visitados possuírem a palavra-chave?

b) E visitar pelo menos 5 websites até achar o primeiro que tenha a palavra-chave?

Sejam,

n = 10, p = 0.3, X ~ Binomial(n=10, p=0.3)

a)

Sabemos que, P(X = k) = (10,k) (0.3)^k (0.7)^10-k

Então,

P(X=0) = 0.7^10 ≈ 0.028248,

P(X=1) = 10*0.3*0.0403536 =~ 0.121061,

$P(X=2) = 45*0.09*0.057648 =\sim 0.233474$,

$P(X=3) = 120*0.027*0.082354 =\sim 0.266828$,

$P(X=4) = 210*0.0081*0.117649 =\sim 0.200121$.

$P(X<=4) = 0.849732$

Portanto,

$P(X>=5) =\sim 1 - 0.849732 = 0.150268$

b)

Seja a distribuição geométrica,

$Y \sim G(p = 0.3)$ onde Y = {nº teste até primeiro sucesso}

Como,

$P(Y>=k) = (1 - p)^{(k - 1)}$

Então,

$P(Y>=5) = 0.7^4 = 0.2401$