

Projeto e Análise de Controladores PID Aplicados a Sistemas com Atraso e Instabilidade

Pedro Otávio Gaspar de Freitas * Regiane Aparecida Pereira *

* Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
(CEFET-MG), Campus Divinópolis, MG, Brasil.
(e-mail: pedro.freitas@aluno.cefetmg.br, regiane@aluno.cefetmg.br)

Abstract: This work presents the design and analysis of classical control strategies applied to three linear plants with distinct dynamic characteristics. Well-established tuning methods, such as Direct Synthesis and Root Locus, were used to meet specifications of stability, settling time, and steady-state accuracy. Simulations in Python were performed to evaluate transient and steady-state behavior, disturbance rejection, and robustness under parameter uncertainty. Overall, integral action provided accurate tracking, derivative filtering ensured physical realizability, and frequency-domain analysis confirmed the consistency between stability, performance, and robustness of the designed solutions.

Resumo: Este trabalho apresenta o projeto e a análise de controladores clássicos aplicados a três plantas lineares com diferentes características dinâmicas. Foram utilizados métodos consolidados de sintonia, como a Síntese Direta e o Lugar das Raízes, buscando atender requisitos de estabilidade, tempo de acomodação e erro estacionário. As simulações em Python permitiram avaliar o comportamento transitório e em regime permanente, bem como a rejeição a distúrbios e a robustez frente a incertezas. De modo geral, observou-se que a ação integrativa garante rastreamento preciso, o termo derivativo filtrado melhora a realizabilidade física e a análise em frequência confirma a coerência entre estabilidade, desempenho e robustez das soluções obtidas.

Keywords: PID; LGR; Síntese Direta; Controle clássico.

1. INTRODUÇÃO

O controlador proporcional–integral–derivativo (PID) permanece como a estratégia de controle mais empregada na indústria, devido à sua simplicidade estrutural, facilidade de sintonia e bom desempenho em uma ampla variedade de processos, conforme discutido por Åström and Hägglund (1995). Contudo, o projeto de controladores PID torna-se desafiador quando o sistema apresenta atraso de transporte, múltiplos polos ou instabilidade, exigindo técnicas específicas de projeto e análise para garantir estabilidade e desempenho adequados (Franklin et al., 2019).

Neste trabalho são projetados e avaliados controladores PID aplicados a três sistemas de referência com diferentes características dinâmicas, denominados Plantas A, B e C. A Planta A representa um processo de primeira ordem com atraso, típico de sistemas térmicos e de processo contínuo; a Planta B caracteriza um sistema de segunda ordem com atraso significativo; e a Planta C representa um sistema instável de ganho negativo, que demanda ação compensatória cuidadosa para estabilização (Ogata, 2010).

Empregam-se duas metodologias clássicas de projeto — o método do Lugar das Raízes (LGR) e a Síntese Direta (SD) —, amplamente descritas em Ogata (2011), explorando suas aplicações, limitações e critérios de ajuste. As análises incluem o desempenho transitório e de regime permanente,

a rejeição a distúrbios, a robustez a incertezas paramétricas e a resposta em frequência das malhas fechadas.

O objetivo principal é compreender como diferentes estratégias de controle clássico influenciam o comportamento de cada sistema, destacando a relação entre estrutura do controlador, desempenho temporal e propriedades de estabilidade.

Todos os códigos e simulações utilizadas para obtenção dos resultados e *plots* apresentados neste trabalho estão disponíveis em um repositório público dos autores (Freitas and Pereira, 2025) no *GitHub*, permitindo a reprodução completa dos experimentos e a verificação dos resultados apresentados.

2. DESCRIÇÃO DAS PLANTAS

As três plantas analisadas neste trabalho são representadas por funções de transferência no domínio de Laplace. Cada uma apresenta características dinâmicas distintas que influenciam diretamente a estratégia de controle adotada.

2.1 Planta A

A Planta A é modelada como um sistema de primeira ordem com atraso (*First-Order Plus Dead Time* — FOPDT):

$$G_A(s) = \frac{0,20 e^{-5s}}{20s + 1}. \quad (1)$$

* Trabalho desenvolvido no âmbito da disciplina de Sistemas de Controle I, CEFET-MG, Campus Divinópolis.

Esse tipo de processo é comum em sistemas térmicos e de nível, nos quais o atraso de transporte $\theta = 5\text{ s}$ representa o tempo morto e a constante de tempo $\tau = 20\text{ s}$ define a inércia da resposta. O ganho estático é $K = 0,20$. Essas características impõem limitações no desempenho transitório, especialmente no tempo de acomodação e no sobressinal.

2.2 Planta B

A Planta B é descrita por uma função de transferência de segunda ordem com atraso:

$$G_B(s) = \frac{100e^{-7s}}{(14s+1)(21s+1)}. \quad (2)$$

O sistema apresenta uma dinâmica mais lenta, com dois polos reais e um atraso de transporte significativo. A presença de múltiplas constantes de tempo ($\tau_1 = 14\text{ s}$ e $\tau_2 = 21\text{ s}$) e do atraso $\theta = 7\text{ s}$ exige um projeto cuidadoso, uma vez que métodos convencionais podem resultar em esforço de controle elevado ou perda de estabilidade.

2.3 Planta C

A Planta C é representada por:

$$G_C(s) = \frac{-8}{s^2 + 1,5s - 1}. \quad (3)$$

Esse sistema possui um polo instável em $s = 0,5$ e outro estável em $s = -2$. O ganho negativo introduz uma inversão de fase adicional. Nessa condição, o uso direto de ação integrativa na malha de controle tende a comprometer a estabilidade, devendo ser evitado. Assim, o controlador deve ser projetado de modo a realocar os polos da malha fechada para o semiplano esquerdo, garantindo estabilidade e bom desempenho transitório.

3. METODOLOGIA DE PROJETO E CRITÉRIOS DE DESEMPENHO

Os controladores projetados neste trabalho foram desenvolvidos a partir de duas abordagens clássicas do controle clássico: o método do Lugar das Raízes (LGR) e o método da Síntese Direta (SD). A escolha de cada técnica foi feita de acordo com as características dinâmicas de cada planta, visando estabilidade, rapidez de resposta e robustez frente a incertezas paramétricas.

3.1 Método do Lugar das Raízes (LGR)

O método do Lugar das Raízes foi empregado na Planta C, conforme as recomendações de Ogata (2011) e Dorf and Bishop (2011), cuja função de transferência apresenta um polo no semiplano direito. Essa abordagem permite realocar os polos de malha fechada por meio do ajuste dos parâmetros do controlador, garantindo estabilidade e atendendo a restrições de amortecimento e velocidade.

O controlador considerado possui estrutura PID convencional:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad (4)$$

com os ganhos ajustados de modo que os polos dominantes da malha fechada permaneçam no semiplano esquerdo, limitados a $\Re\{p_d\} \leq -10$, condição que impõe o limite inferior para o tempo de acomodação:

$$T_s \approx \frac{4}{|\Re\{p_d\}|}. \quad (5)$$

Além disso, adotou-se uma topologia de realimentação com dois graus de liberdade (2-DOF), incluindo um pré-filtro $F(s)$ no caminho da referência, de forma a eliminar o erro estacionário sem comprometer o desempenho transitório. O filtro é obtido pela relação:

$$F(s) = \frac{1}{T(0)} = \frac{1 + L(0)}{L(0)}, \quad (6)$$

em que $L(s) = C(s)G(s)$ representa a função de malha aberta.

3.2 Método da Síntese Direta (SD)

A Síntese Direta foi aplicada às Plantas A e B, conforme a formulação clássica apresentada por Franklin et al. (2019), ambas com atraso de transporte. Nessa metodologia, define-se previamente o modelo de resposta desejado em malha fechada $G_m(s)$, e o controlador é determinado analiticamente a partir da relação:

$$C(s) = \frac{G_m(s)}{G(s)[1 - G_m(s)]}. \quad (7)$$

Para a Planta A, modelada como um processo de primeira ordem com atraso (*First-Order Plus Dead Time* — FOPDT), adotou-se um modelo de malha fechada de primeira ordem, cuja constante de tempo λ foi escolhida para que o tempo de acomodação T_s fosse de aproximadamente 60 s. O controlador resultante foi implementado na forma equivalente ao modelo de Controle Interno (IMC-PID).

Na Planta B, que apresenta dois polos reais e atraso de transporte, o mesmo procedimento foi aplicado para dois modelos de referência distintos — de primeira e de segunda ordem. Em ambos os casos, o tempo de acomodação desejado foi definido como 70% do tempo de acomodação em malha aberta, permitindo avaliar o impacto da ordem do modelo sobre o esforço de controle e o desempenho do sistema.

3.3 Critérios de Desempenho

A avaliação dos controladores foi realizada por meio de simulações no domínio do tempo e da frequência, utilizando os seguintes índices de desempenho:

- **Tempo de acomodação (T_s):** tempo necessário para que a resposta permaneça dentro de $\pm 2\%$ do valor final;
- **Sobressinal percentual (%OS):** razão entre o pico máximo e o valor final da resposta;
- **Erro estacionário:** diferença entre a saída e a referência para entradas em degrau e rampa;
- **Integral do erro absoluto (IAE):**

$$IAE = \int_0^{t_f} |e(t)| dt, \quad (8)$$

que quantifica o erro acumulado ao longo do tempo;

- **Índice de variação do controle (IVU):**

$$IVU = \int_0^{t_f} |\Delta u(t)| dt, \quad (9)$$

que mede a agressividade da ação de controle;

- **Margens de estabilidade:** margem de ganho (GM) e margem de fase (PM), obtidas a partir dos diagramas de Bode.

Esses critérios foram empregados para comparar os resultados obtidos entre as diferentes plantas e métodos de projeto, evidenciando os compromissos entre desempenho transitório, robustez e esforço de controle.

4. PROJETO E SINTONIA DOS CONTROLADORES

Nesta seção, apresentam-se os resultados da sintonia obtidos pelos métodos de Síntese Direta e de LGR.

4.1 Planta A

Item I: Projeto do Controlador por Síntese Direta (Alvo de 1ª Ordem)

Para esta questão, considerou-se a planta de primeira ordem com tempo morto (FOPDT) dada por:

$$G(s) = \frac{0.20e^{-5s}}{20s + 1}$$

Os requisitos de projeto para o sistema em malha fechada são: tempo de acomodação (t_s) de 1 minuto (60s), sobressinal (%OS) de no máximo 5%, e o menor tempo de subida possível.

O primeiro passo do projeto é a seleção de um modelo de referência para a malha fechada, $G_d(s)$. Para atender às especificações de projeto, foi feita uma escolha estratégica. O requisito de sobressinal ($OS \leq 5\%$) é naturalmente atendido pela seleção de um modelo de referência de primeira ordem, que por sua natureza possui 0% de sobressinal. Esta escolha também representa a forma mais simples de se atender ao critério de tempo de acomodação.

O modelo de referência de primeira ordem desejado é, portanto

$$G_d(s) = \frac{1}{\tau_d s + 1}$$

A especificação de tempo de acomodação (t_s) de 60 segundos (para o critério de 2%) é então utilizada para definir a constante de tempo alvo, τ_d :

$$\tau_d = \frac{t_s}{4.6} = \frac{60s}{4.6} \approx 13.04s$$

O controlador $C(s)$ é derivado algebraicamente da fórmula da Síntese Direta, $C = \frac{1}{G_m(s)} \frac{G_d}{1-G_d}$, onde $G_m(s) = K/(\tau s + 1)$ é a parte invertível da planta. Esta abordagem resulta na conhecida regra de sintonia IMC (Internal Model Control) para um controlador do tipo PI:

$$K_c = \frac{\tau}{K(\tau_d + \theta)} \quad ; \quad T_i = \tau$$

Substituindo os valores nominais da planta ($K = 0.2$, $\tau = 20$, $\theta = 5$) e o valor de τ_d calculado:

$$K_c = \frac{20}{0.2 \cdot (13.04 + 5)} = \frac{20}{0.2 \cdot (18.04)} = \frac{20}{3.608} \approx 5.54$$

$$T_i = \tau = 20s$$

Isso resulta em um controlador PI com ganho proporcional $K_c = 5.54$ e tempo integral $T_i = 20s$. A função de transferência do controlador é:

$$C(s) = 5.54 \left(1 + \frac{1}{20s} \right)$$

A simulação da malha fechada com este controlador para a planta nominal é apresentada na Figura 1. A análise do gráfico valida o projeto para o ponto nominal: a resposta em malha fechada (G_{mf} , curva azul) demonstra um comportamento de primeira ordem, sem sobressinal, e atinge a faixa de 2% do valor de regime permanente em aproximadamente 60 segundos, seguindo fielmente a especificação G_d (curva laranja).

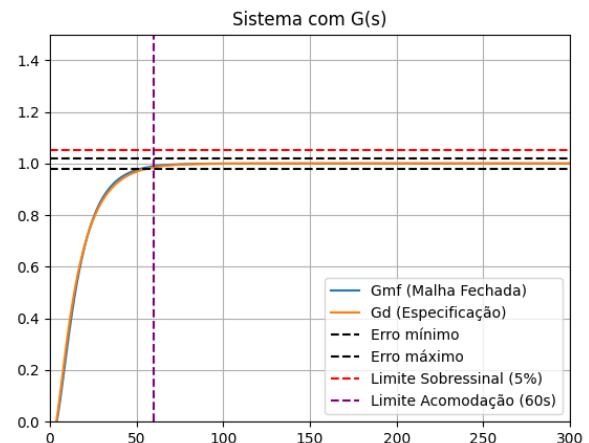


Figura 1. Simulação do sistema nominal com o controlador PI sintonizado.

Item II: Avaliação da Família de Respostas

Neste item, avaliou-se a robustez do controlador PI projetado no Item I para uma família de plantas com incertezas:

- Ganho (K_c): $0.15 \leq k \leq 0.25$
- Atraso de tempo (θ): $3 \leq \theta \leq 5$
- Constante de tempo (τ): $15 \leq \tau \leq 25$

As especificações de desempenho robusto exigem que todas as respostas da família atendam simultaneamente a um tempo de acomodação (t_s) de no máximo 60 segundos e um sobressinal (OS) de no máximo 5%.

A análise das Figuras 2 e 3 demonstra que, embora o critério de sobressinal é satisfeito, onde todas as trajetórias permanecem abaixo do limite sobressinal de 5%, o controlador falha em garantir o desempenho robusto para o tempo de acomodação. Observa-se há curvas que não atingem a faixa de 2% (delimitada por Erro mínimo (2%)

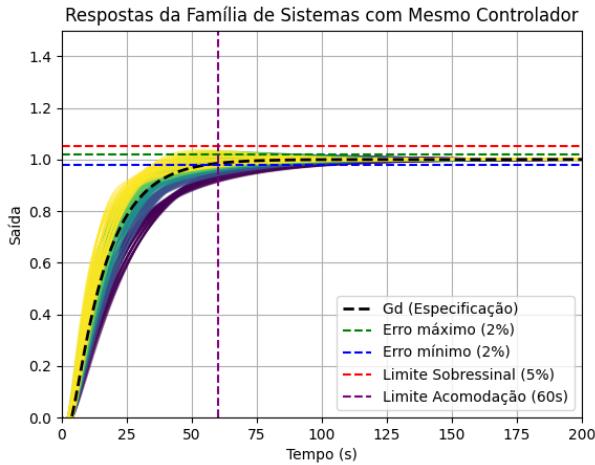


Figura 2. Resposta da família de respostas com mesmo controlador.

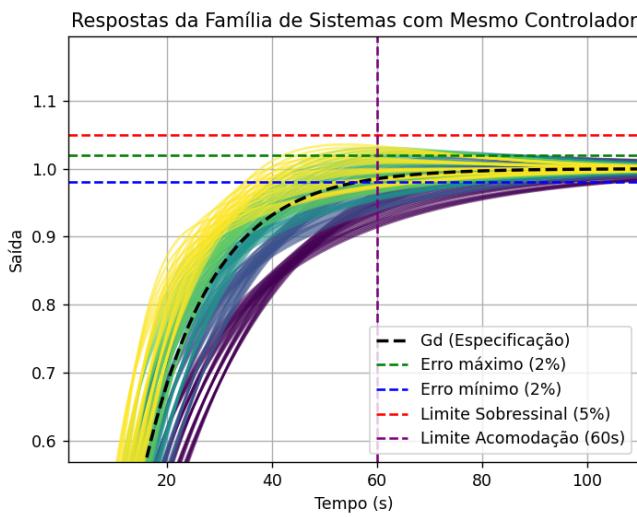


Figura 3. Resposta da família ampliada.

e Erro máximo (2%)) dentro do limite acomodação de 60 segundos.

Conclui-se que o controlador projetado é excessivamente conservador. Ele garante a estabilidade robusta e um comportamento não-oscilatório em toda a faixa de incerteza, mas carece da agressividade necessária para compensar a dinâmica das plantas do pior caso. Portanto, o projeto falha em atender à especificação de tempo de acomodação para toda a família de sistemas.

Por outro lado, a análise de estabilidade robusta Figuras 4 e 5 mostra que este controlador é extremamente estável. O gráfico 3D dos polos demonstra que, mesmo nos piores casos de parâmetros, todos os polos da malha fechada permanecem firmemente no semiplano esquerdo (estável).

Item III: Implementação e Avaliação da Solução Proposta

A análise do Item II (Figura 3) demonstrou que o controlador PI original, embora estável, não possui robustez de desempenho. Especificamente, ele falha em garantir o

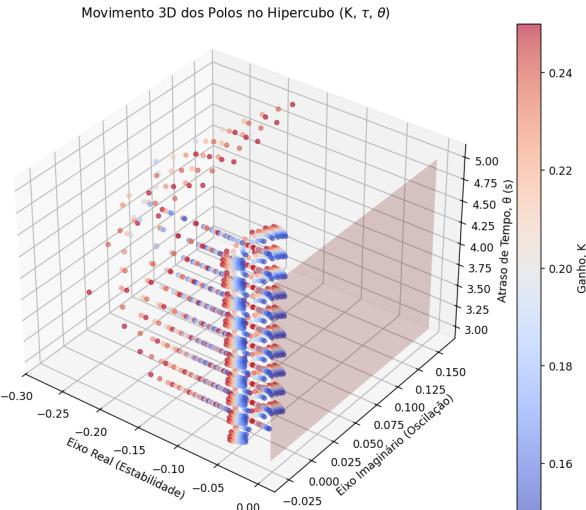


Figura 4. Hipercubo da família de respostas.

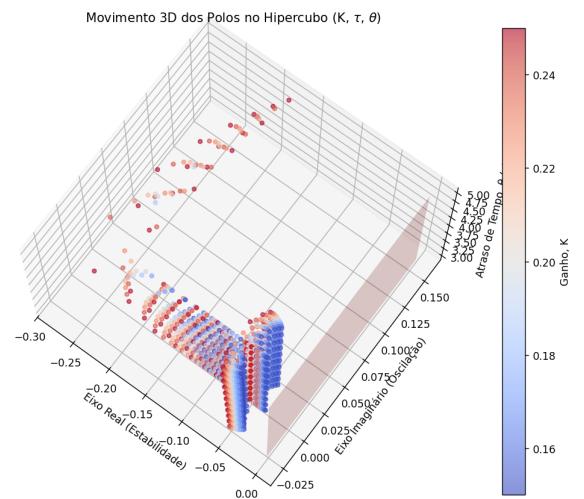


Figura 5. Hipercubo da família de respostas.

tempo de acomodação de 60 segundos para o pior caso da família de plantas.

A estratégia investigada foi tornar o controlador mais agressivo, reprojetando-o para um tempo de acomodação nominal significativamente mais rápido. Foi definido um novo alvo de $t_s = 20s$.

O novo projeto segue a mesma metodologia:

$$t_{d,rob} = \frac{t_{s,rob}}{4.6} = \frac{20s}{4.6} \approx 4.35s$$

Isso resulta em um novo ganho proporcional, substancialmente mais agressivo:

$$\begin{aligned} K_{c,rob} &= \frac{\tau}{K(\tau_{d,rob} + \theta)} = \frac{20}{0.2 \cdot (4.35 + 5)} \\ &= \frac{20}{0.2 \cdot (9.35)} \approx 10.69 \end{aligned}$$

O tempo integral permanece $T_i = 20s$.

O novo controlador robusto ($K_c \approx 10.69$) foi então testado em toda a família de incertezas. O resultado é apresentado na Figura 6.

A análise deste gráfico expõe um conflito de robustez (trade-off) intratável para este método de sintonia.

O controlador, agora muito agressivo, faz com que o melhor caso do sistema (curvas rápidas, em amarelo) responda com uma dinâmica fortemente oscilatória, violando claramente o limite sobressinal de 5%.

Simultaneamente, o controlador ainda não é eficaz o suficiente para o pior caso (curvas lentas, em roxo escuro). Como observado, estas curvas ainda não entram na faixa de 2% antes do Limite Acomodação.

Conclui-se, portanto, que não é possível para um controlador PI linear, sintonizado por este método, garantir que toda a família de plantas atenda simultaneamente a ambos os critérios de desempenho robusto (sobressinal e tempo de acomodação). A solução exigiria técnicas de controle robusto mais avançadas.

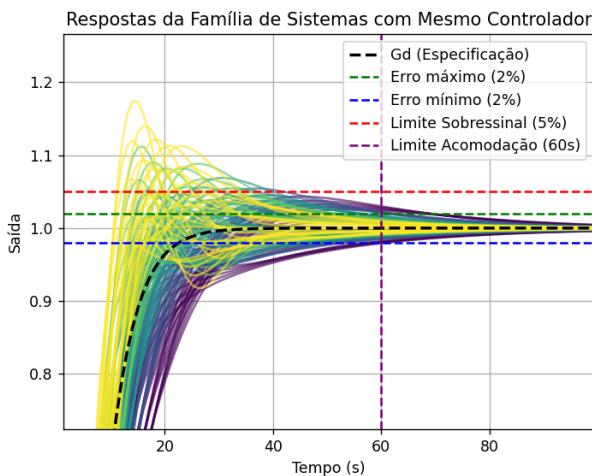


Figura 6. Avaliação da solução proposta ampliada.

Item IV: Análise da Resposta em Frequência da Solução

A análise da resposta em frequência foi realizada para o controlador projetado no Item I, o controlador PI com $K_c \approx 5.54$ e $T_i = 20s$. Esta análise valida, no domínio da frequência, o comportamento observado no domínio do tempo.

O diagrama de Bode de malha aberta ($L = C^*G$), apresentado na Figura 7, é utilizado para determinar as margens de estabilidade do sistema nominal.

A frequência de cruzamento de ganho (W_{cp}), onde a magnitude é 0 dB, ocorre em $\omega \approx 0.055$ rad/s. Nesta frequência, a fase é de aproximadamente -105° . Isso resulta em uma margem de fase de $PM = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

A frequência de cruzamento de fase (W_{cg}), onde a fase é -180° , ocorre em $\omega \approx 0.314$ rad/s. Em W_{cg} , a magnitude do sistema é de aproximadamente -15 dB.

Ambas as margens são muito elevadas ($PM = 75^\circ$, $GM = 15$ dB), indicando um sistema altamente estável e

robusto à instabilidade para a planta nominal. A grande margem de fase, em particular, é um forte indicador de um comportamento não-oscilatório, o que corrobora o sobressinal de 0% observado na resposta ao degrau.

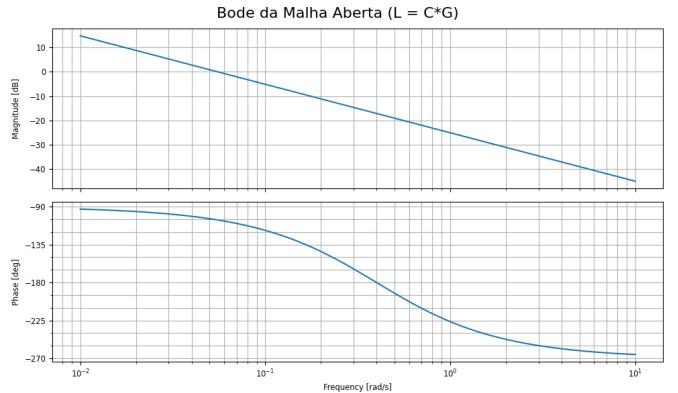


Figura 7. Bode da Malha Aberta ($L = C^*G$) da solução nominal.

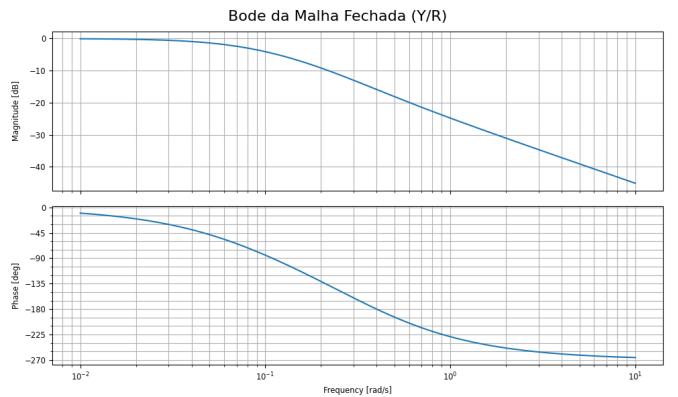


Figura 8. Bode da Malha Fechada (Y/R) da solução nominal.

O diagrama de Bode de malha fechada, na Figura 8, descreve o desempenho do sistema final no rastreamento de referência.

O ganho em baixas frequências é de 0 dB, ganho unitário. Isso confirma que o controlador PI garante erro nulo em regime permanente para uma entrada degrau.

O gráfico de magnitude não apresenta pico de ressonância (M_r), ele tem uma característica puramente passa-baixas. A ausência de M_r é a contrapartida no domínio da frequência para o sobressinal de 0% observado no domínio do tempo.

A largura de banda, frequência na qual o ganho cai para -3 dB, é de aproximadamente $\omega_{bw} \approx 0.07$ rad/s. Este valor é baixo, o que é consistente com um sistema de resposta lenta, tendo em vista o tempo de acomodação de 60 segundos.

Em suma, a análise de frequência confirma as observações da simulação temporal: um sistema robustamente estável, não-oscilatório, mas com uma resposta lenta.

A análise final da solução (o controlador PI com $K_c \approx 5.54$) é feita no domínio da frequência, avaliando a resposta de toda a família de plantas.

O diagrama de Bode de malha aberta ($L = C^*G$) para os 8 casos extremos é mostrado na Figura 9. A "nuvem" de curvas é usada para avaliar a robustez da estabilidade.

A frequência de cruzamento de ganho, onde a magnitude é 0 dB, varia de $\omega \approx 0.04$ rad/s (pior caso de ganho, $K=0.15$) até $\omega \approx 0.07$ rad/s (melhor caso de ganho, $K=0.25$). A menor margem de fase ocorre para o caso $K=0.25$, $T=15.0$, $\theta=5.0$ (curva roxa), com $PM \approx 45^\circ$ ($180^\circ - 135^\circ$). A maior ocorre para $K=0.15$, $T=25.0$, $\theta=3.0$ (curva verde), com $PM \approx 75^\circ$ ($180^\circ - 105^\circ$).

A frequência de cruzamento de fase, onde a fase é -180° , varia de $\omega \approx 0.3$ rad/s a $\omega \approx 0.5$ rad/s. A pior margem de ganho é de aproximadamente -10 dB.

A análise de malha aberta confirma o que foi visto no gráfico de polos 3D: o controlador é robusto em estabilidade. Todas as 8 plantas extremas apresentam margens de ganho e fase seguras e positivas.

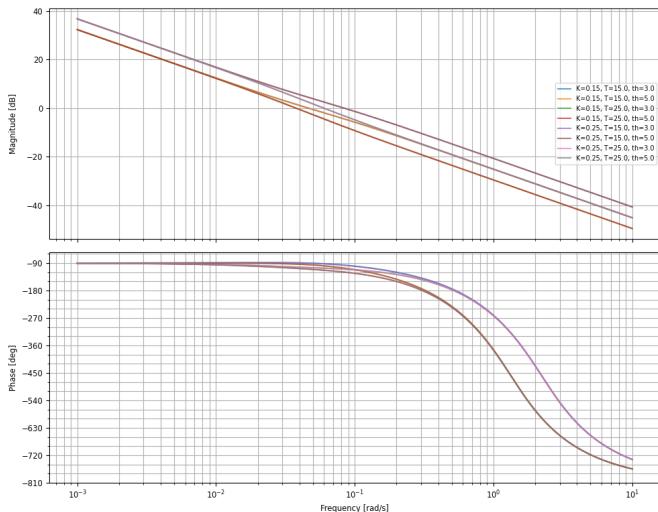


Figura 9. Bode de Malha Aberta ($L = C^*G$) da família de plantas.

O diagrama de Bode de malha fechada (Y/R), na Figura 10, revela o desempenho robusto do sistema.

Todas as 8 curvas começam em 0 dB, confirmando que o erro em regime permanente é nulo para toda a família.

Não há picos de ressonância significativos em nenhuma das curvas. Algumas curvas (casos de $K=0.25$) apresentam um leve "ombro", consistente com um sobressinal pequeno, mas todas estão bem abaixo do comportamento oscilatório, validando o $OS \leq 5\%$ robusto.

Este é o ponto crítico. A largura de banda, onde as curvas cruzam -3 dB, varia drasticamente. O "melhor caso" (curva roxa, $K=0.25$, $T=15$, $\theta=3$) tem $W_{bw} \approx 0.1$ rad/s. O "pior caso" (curva verde, $K=0.15$, $T=25$, $\theta=5$) tem $W_{bw} \approx 0.045$ rad/s.

A grande variação na largura de banda é a prova, no domínio da frequência, da falha na robustez de desempenho. Uma largura de banda que varia por um fator maior que 2 significa que a velocidade do sistema muda drasticamente, o que é exatamente o que foi observado na Figura 3, onde o "pior caso" falhou em atender ao tempo de acomodação.

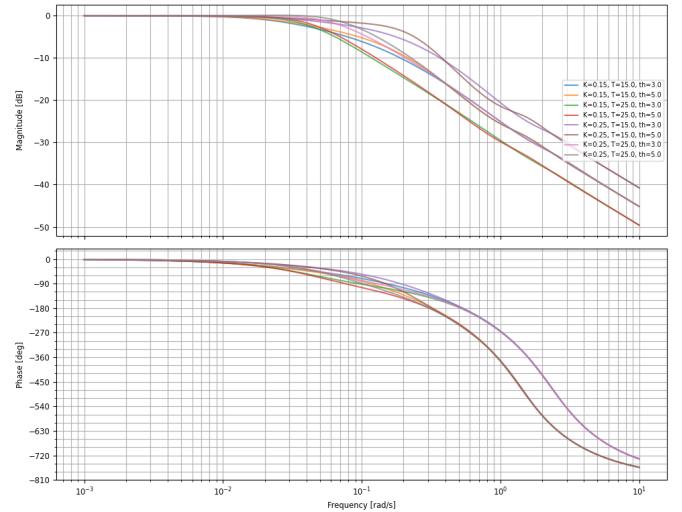


Figura 10. Bode de Malha Fechada (Y/R) da família de plantas.

4.2 Planta B

Item I: Comparação dos Controladores (Alvo 1^a vs 2^a Ordem)

A planta a ser controlada, é um sistema de segunda ordem com tempo morto:

$$G(s) = \frac{100e^{-7s}}{(14s+1)(21s+1)}$$

O requisito de projeto é que o tempo de acomodação da malha fechada ($t_{s,mf}$) seja 70% do tempo de acomodação da malha aberta ($t_{s,ma}$). Será feito dois controladores a partir da analise de Síntese Direta, sendo um de 1^a ordem e outro de 2^a ordem.

Cálculo do Tempo Alvo O tempo de acomodação da malha aberta é composto pelo atraso de tempo ($\theta = 7s$) e pelo tempo de acomodação do processo, que é dominado pelo polo mais lento ($\tau_{dom} = 21s$).

$$t_{s,processo} \approx 4.6 \times \tau_{dom} = 4.6 \times 21s = 96.6s$$

$$t_{s,ma} = t_{s,processo} + \theta = 96.6s + 7s = 103.6s$$

A Figura 11 valida este cálculo, mostrando o processo acomodando-se próximo a 100s. O tempo de acomodação alvo para o projeto é, portanto:

$$t_{s,alvo} = 0.70 \times t_{s,ma} = 0.70 \times 103.6s \approx 72.52s$$

Foram projetados dois controladores por Síntese Direta para atingir o $t_{s,alvo} \approx 72.52s$.

A base de toda a Síntese Direta é a mesma equação, derivada da álgebra da malha fechada. Nós definimos que a resposta real $\frac{Y(s)}{R(s)}$ deve ser igual à nossa resposta desejada $W(s)$:

$$W(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

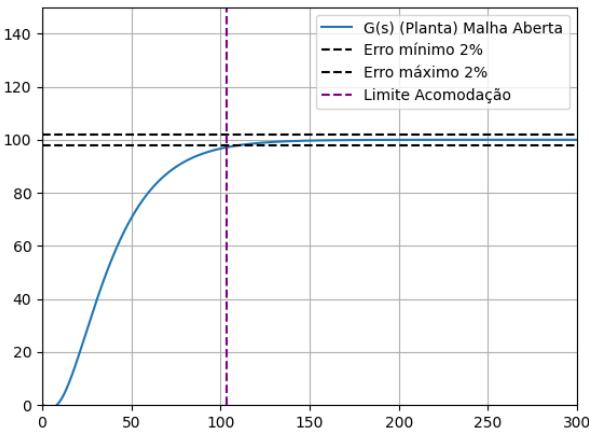


Figura 11. Resposta em malha aberta da planta, indicando $t_s \approx 100s$.

Isolando o controlador $G_c(s)$, chegamos à equação fundamental da síntese:

$$G_c(s) = \frac{1}{G_p(s)} \cdot \frac{W(s)}{1 - W(s)}$$

E então aplicar esta fórmula para diferentes $W(s)$.

O primeiro controlador foi feito com modelo de 1ª ordem, este é o método clássico para derivar as regras de sintonia para um controlador PID.

$$G_p(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$W(s) = \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1}$$

Substituímos $G_p(s)$ e $W(s)$ na equação de síntese:

$$G_c(s) = \left[\frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p e^{-\theta s}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1}}{1 - \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1}} \right]$$

Simplificamos o segundo termo (o colchete da direita):

$$\frac{\frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1}}{(\tau_c s + 1) - e^{-\theta s}} = \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1 - e^{-\theta s}}$$

Substituímos de volta e cancelamos os termos $e^{-\theta s}$:

$$G_c(s) = \left[\frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p e^{-\theta s}} \right] \cdot \left[\frac{e^{-\theta s}}{\tau_c s + 1 - e^{-\theta s}} \right]$$

$$G_c(s) = \left[\frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p} \right] \cdot \left[\frac{1}{\tau_c s + 1 - e^{-\theta s}} \right]$$

O termo $e^{-\theta s}$ no denominador torna o controlador irrealizável. Usamos a aproximação de Taylor de 1ª ordem ($e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s$) para simplificá-lo:

$$(\tau_c s + 1) - (1 - \theta s) = \tau_c s + 1 - 1 + \theta s = (\tau_c + \theta)s$$

O controlador final é:

$$G_c(s) = \left[\frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p} \right] \cdot \left[\frac{1}{(\tau_c + \theta)s} \right]$$

ou

$$G_c(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p(\tau_c + \theta)s}$$

Para ver a forma PID, reorganizamos (assumindo τ_1 é o maior):

$$G_c(s) = \left[\frac{\tau_1}{K_p(\tau_c + \theta)} \right] \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_1 s} \right) \cdot (\tau_2 s + 1)$$

$$K_c = \frac{\tau_1}{K_p(\tau_c + \theta)}$$

$$\tau_I = \tau_1$$

$$\tau_D = \tau_2$$

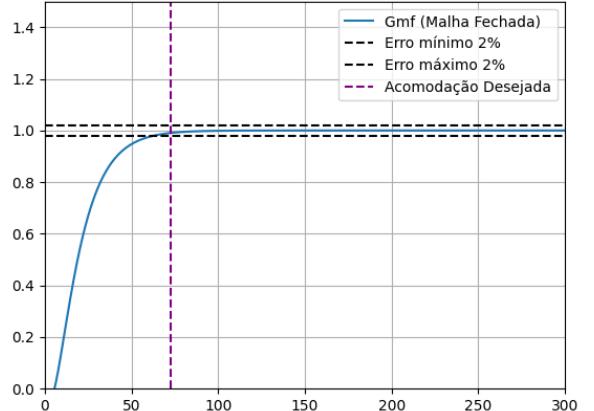


Figura 12. Resposta do Projeto 1 (Alvo 1ª Ordem).

Agora para o segundo controlador, com modelo de 2ª ordem, o método nos dá mais controle sobre a resposta, permitindo-nos definir o amortecimento ζ .

$$G_p(s) = \frac{K_p e^{-\theta s}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$W(s) = \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c^2 s^2 + 2\zeta\tau_c s + 1}$$

Substituímos na equação de síntese:

$$G_c(s) = \left[\frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p e^{-\theta s}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{e^{-\theta s}}{\tau_c^2 s^2 + 2\zeta\tau_c s + 1}}{1 - \frac{e^{-\theta s}}{\tau_c^2 s^2 + 2\zeta\tau_c s + 1}} \right]$$

Simplificamos o segundo termo (idêntico ao caso anterior):

$$\frac{e^{-\theta s}}{\tau_c^2 s^2 + 2\zeta\tau_c s + 1 - e^{-\theta s}}$$

Substituímos de volta e cancelamos os $e^{-\theta s}$:

$$G_c(s) = \left[\frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p} \right] \cdot \left[\frac{1}{\tau_c^2 s^2 + 2\zeta\tau_c s + 1 - e^{-\theta s}} \right]$$

Usamos a mesma aproximação de Taylor ($e^{-\theta s} \approx 1 - \theta s$):

$$(\tau_c^2 s^2 + 2\zeta\tau_c s + 1) - (1 - \theta s)$$

$$\tau_c^2 s^2 + 2\zeta\tau_c s + \theta s = s \cdot (\tau_c^2 s + 2\zeta\tau_c + \theta)$$

O controlador final é:

$$G_c(s) = \left[\frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p} \right] \cdot \left[\frac{1}{s \cdot (\tau_c^2 s + 2\zeta\tau_c + \theta)} \right]$$

ou

$$G_c(s) = \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{K_p s (\tau_c^2 s + 2\zeta\tau_c + \theta)}$$

Para ver os blocos, reorganizamos e fatoramos o novo termo do denominador ($\tau_f s + 1$):

$$G_c(s) = \left[\frac{\tau_1}{K_p(2\zeta\tau_c + \theta)} \right] \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_1 s} \right) \cdot (\tau_2 s + 1) \cdot \left[\frac{1}{\frac{\tau_c^2}{2\zeta\tau_c + \theta} s + 1} \right]$$

$$K_c = \frac{\tau_1}{K_p(2\zeta\tau_c + \theta)}$$

$$\tau_I = \tau_1$$

$$\tau_D = \tau_2$$

Os parâmetros nominais extraídos da função de transferência da planta foram:

- Ganho da Planta (K): $K = 100.0$
- Constante de Tempo 1 (τ_1): $\tau_1 = 14.0s$
- Constante de Tempo 2 (τ_2): $\tau_2 = 21.0s$
- Atraso de Tempo (θ): $\theta = 7.0s$

O tempo de acomodação em malha aberta foi calculado como $t_{s,ma} \approx 103.6s$. O tempo de acomodação alvo (70% deste valor) foi definido como $t_{s,alvo} \approx 72.52s$.

Constante de Tempo Alvo (τ_d ou τ_c):

$$\tau_d = \frac{t_{s,alvo}}{4.6} = \frac{72.52s}{4.6} \approx 15.765s$$

A diferença mais significativa entre os projetos é observada no sinal de controle, $u(t)$, conforme a Figura 14.

A curva azul exibe um "chute derivativo"(derivative kick). Este pico agudo em $t = 0$ é resultado da ação derivativa pura ($K_d s$) atuando sobre o degrau do erro, sendo fisicamente irrealizável e potencialmente danoso a atuadores.

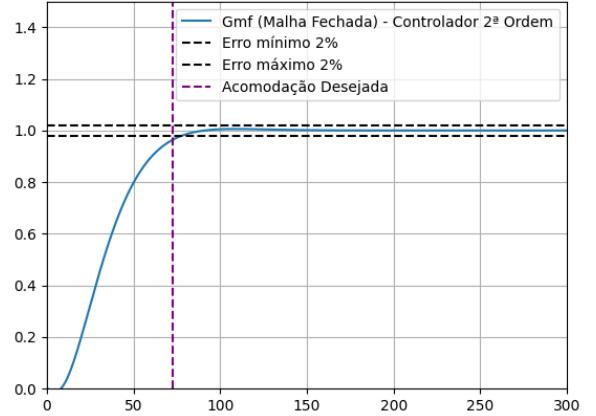


Figura 13. Resposta do Projeto 2 (Alvo 2ª Ordem).

A curva laranja é suave e sem picos. O filtro, que surgiu naturalmente da derivação de 2ª ordem, torna o controlador próprio (realizável) e elimina o "chute", resultando em uma ação de controle muito mais suave e prática.

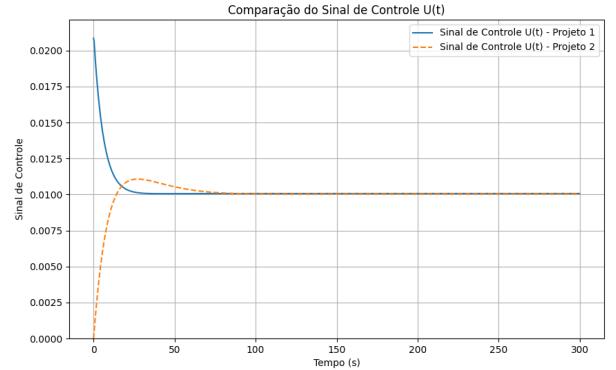


Figura 14. Comparação do sinal de controle $u(t)$ para ambos os projetos.

Para avaliar o desempenho vamos usar os índices IAE e IVU. A Tabela 1 quantifica o desempenho dos controladores.

Tabela 1. Comparação dos Índices de Desempenho.

Projeto	IAE (Erro)	IVU (Esforço)
Projeto 1	22.765	3.083
Projeto 2	35.848	2.996

A análise dos resultados revela um "trade-off"(conflito) de engenharia. O projeto 1 apresentou o melhor desempenho de rastreamento, com um IAE de 22,765, significativamente menor que os 35,848 do projeto 2. Isso confirma quantitativamente que sua resposta mais rápida ($t_s = 63.06s$) resultou em menor erro acumulado.

Por outro lado, o Projeto 2 foi o mais eficiente, apresentando o menor IVU, 2,996 contra 3,083. Esta métrica é diretamente explicada pela Figura 14. O Projeto 1, sendo um PID puro, exibe um "chute derivativo"(pico agudo em $t = 0$), que consome uma grande quantidade de "energia" de

controle e infla o valor do IVU. Em contraste, o Projeto 2, com seu sinal suave e filtrado, teve um uso de energia total mais eficiente, apesar de sua resposta mais lenta. Em suma, o Projeto 1 foi o de melhor desempenho (menor IAE), enquanto o Projeto 2 foi o mais eficiente e prático (menor IVU e sinal de controle realizável).

Item II: Análise de Robustez (Atraso do Sensor)

Este item avalia o atraso de tempo adicional (Δ_{max}) que cada controlador tolera antes de levar a malha fechada à instabilidade. O cálculo é baseado na Margem de Fase (PM) e na Frequência de Cruzamento de Ganho (W_{cp}) de cada projeto.

Tabela 2. Análise de Robustez a Atrasos no Sensor.

Projeto	PM (graus)	W_{cp} (rad/s)	Δ_{max} (segundos)
Projeto 1	72.52	0.044	28.81
Projeto 2	67.88	0.028	42.70

A análise da Tabela 2 revela um resultado crucial:

O projeto 2 é significativamente mais robusto a atrasos no sensor. Embora sua Margem de Fase (67.88°) seja ligeiramente menor, sua Frequência de Cruzamento (0.028 rad/s) é muito mais baixa. Isso torna o sistema inherentemente mais lento e, consequentemente, muito menos sensível a atrasos de fase, resultando em uma tolerância a atrasos (Δ_{max}) 48% maior que a do Projeto 1.

O projeto 1 foi mais rápido, menor IAE, mas seu sinal de controle é irrealista com alto "chute" derivativo e é menos robusto a atrasos. O projeto 2 foi mais lento, mas é fisicamente implementável devido seu sinal suave, mais eficiente, menor IVU, e muito mais robusto a incertezas de atraso. Para uma aplicação industrial, o segundo controlador é a melhor escolha.

4.3 Planta C

A Planta C é descrita pela função de transferência:

$$G(s) = \frac{-8}{s^2 + 1,5s - 1}.$$

Trata-se de um sistema de segunda ordem com ganho negativo, o que implica uma inversão de fase de 180° entre o sinal de entrada e saída (Ogata, 2010). A análise dos polos do denominador mostra a presença de um polo em $s = +0,5$ e outro em $s = -2$, indicando que o sistema é **instável em malha aberta**, uma vez que possui um polo no semiplano direito.

O ganho negativo e a presença de um polo instável tornam necessária a utilização de um controlador compensador para estabilização da resposta, conforme princípios apresentados em Franklin et al. (2019). Além disso, a ausência de polos na origem revela que o sistema é do tipo 0, apresentando erro finito em regime permanente para entradas do tipo degrau e erro infinito para entradas do tipo rampa.

Item I: Sintonia via Lugar das Raízes

O projeto do controlador da Planta C foi conduzido com base no método do *Lugar das Raízes* (LGR), conforme solicitado, metodologia clássica descrita em Dorf and Bishop

(2011). Considerando que a planta apresenta um polo no semiplano direito, a ação integrativa foi descartada nesta etapa para evitar o acréscimo de ordem e o risco de instabilidade, recomendação coerente com a análise de Åström and Hägglund (1995). Assim, optou-se pela utilização de um **controlador do tipo PD**, cuja função de transferência simbólica é dada por:

$$C(s) = -(1 + T_d s),$$

onde o sinal negativo assegura a convenção de realimentação negativa, visto que a planta possui ganho estático negativo.

O parâmetro derivativo T_d foi ajustado de modo a posicionar o zero do controlador em $s_z = -1/T_d$, influenciando diretamente a forma do LGR. A partir de simulações realizadas em Python, observou-se que o valor de $T_d = 0,2$, correspondente a um zero em $s_z = -5,0$, produz o traçado mais favorável: o LGR passa próximo à reta vertical $\Re(s) = -10$, limite adotado para o menor tempo de acomodação admissível.

A Figura 15 apresenta o LGR obtido para a planta com o controlador PD ajustado. O ponto de cruzamento com a reta $\Re = -10$ indica a região de ganho K em que os polos dominantes de malha fechada apresentam a maior rapidez possível sem ultrapassar o critério de estabilidade especificado.

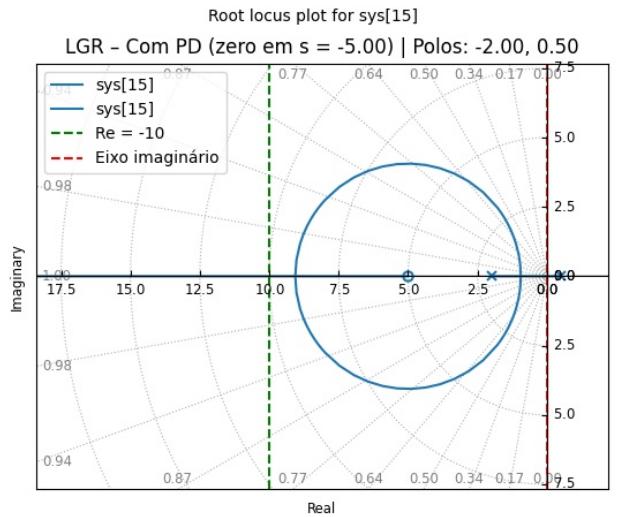


Figura 15. LGR Planta C com controlador PD e $T_d = 0,2$.

A equação característica da malha fechada é dada por:

$$1 + KL(s) = 0$$

$$s^2 + 1,5s - 1 + 8K(1 + T_d s) = 0$$

Substituindo $T_d = 0,2$, obtém-se:

$$s^2 + (1,5 + 1,6K)s + (8K - 1) = 0$$

A condição para a existência de polos complexos conjugados é determinada pela anulação do discriminante:

$$\Delta = (1,5 + 1,6K)^2 - 4(8K - 1) = 0$$

Resolvendo para K :

$$K = \frac{27,2 \pm \sqrt{27,2^2 - 4(2,56)(6,25)}}{2(2,56)}$$

$$K_1 = 0,24, \quad K_2 = 10,39$$

Assim, o arco de polos complexos se forma para $0,24 < K < 10,39$, e o ponto de fechamento — correspondente à extremidade do arco — ocorre em $K^* \approx 10,39$. Esse valor define o ganho máximo que mantém os polos complexos e garante o menor tempo de acomodação dentro da restrição $\Re(s) \geq -10$.

Portanto, o controlador ajustado é:

$$C(s) = -K^*(1 + 0,2s),$$

com $K^* \approx 10,4$, correspondendo a polos dominantes em torno de $\Re(s) \approx -10$, o que resulta em um tempo de acomodação aproximado de:

$$T_s \approx \frac{4}{|\Re(p_{\text{dom}})|} \approx 0,4 \text{ s.}$$

Item II: Topologia com Erro Nulo de Regime Permanente

O controlador do tipo PD projetado no Item I foi capaz de estabilizar a planta e atender à restrição de polos de malha fechada com parte real maior ou igual a -10 . Entretanto, por não possuir ação integrativa, o sistema resultante permanece de **tipo 0**, apresentando erro finito em regime permanente para entradas do tipo degrau e erro infinito para entradas rampa.

Para que o erro de regime permanente seja nulo, é necessário que a função de malha fechada apresente pelo menos um **polo na origem**, o que requer a introdução de uma ação integrativa no controlador. Dessa forma, propõe-se, de maneira teórica, uma topologia do tipo PID, expressa por:

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad G(s) = \frac{-8}{s^2 + 1,5s - 1}.$$

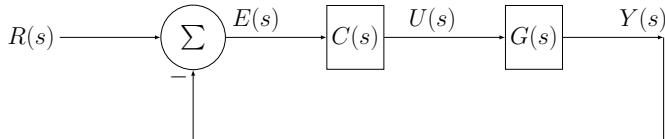


Figura 16. Topologia teórica de controle PID com realimentação negativa.

Contudo, a planta $G(s)$ apresenta um polo instável no semiplano direito, e a inserção direta de um integrador aumenta a ordem do sistema e introduz defasagem de 90° , o que tende a reduzir a margem de fase e pode comprometer a estabilidade (Ogata, 2011). Assim, embora seja **teoricamente possível** estabilizar o sistema com um

controlador PID mediante um novo ajuste simultâneo de K_p , T_i e T_d , tal procedimento exigiria nova análise do Lugar das Raízes.

Para fins práticos, a topologia mostrada na Figura 16 servirá como base para o projeto do Item III, em que se buscará uma combinação dos parâmetros K_p , T_i e T_d que proporcione estabilidade e erro nulo de regime permanente.

Item III: Determinação dos Parâmetros e Simulação

Com base na topologia teórica de controle PID apresentada no Item II, foram definidos os parâmetros do controlador de modo a garantir estabilidade e erro nulo de regime permanente. A partir da análise do Lugar das Raízes realizada no Item I, manteve-se o zero derivativo em $s = -5$ ($T_d = 0,2$), pois esse valor resultou no menor tempo de acomodação sem comprometer a estabilidade.

A introdução da ação integrativa foi feita com $T_i = 1,2$, proporcionando um integrador lento capaz de eliminar o erro estacionário sem deslocar excessivamente os polos dominantes. O ganho proporcional foi ajustado para $K_p = 5,0$. Para garantir realizabilidade física e evitar ganho infinito em altas frequências, foi incluído um filtro derivativo de primeira ordem (Åström and Hägglund, 1995), resultando na forma prática:

$$C(s) = -K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right)$$

$$K_p = 5, \quad T_i = 1,2, \quad T_d = 0,2, \quad N = 10.$$

A Figura 17 mostra a resposta do sistema em malha fechada para uma entrada degrau unitário. Observa-se erro estacionário nulo e tempo de acomodação inferior a 3 s, com sobressinal aproximado de 20 %. O sinal de controle correspondente, ilustrado na Figura 18, apresenta um pico inicial pronunciado (devido ao ganho negativo da planta), seguido de estabilização suave, sem saturação do atuador.

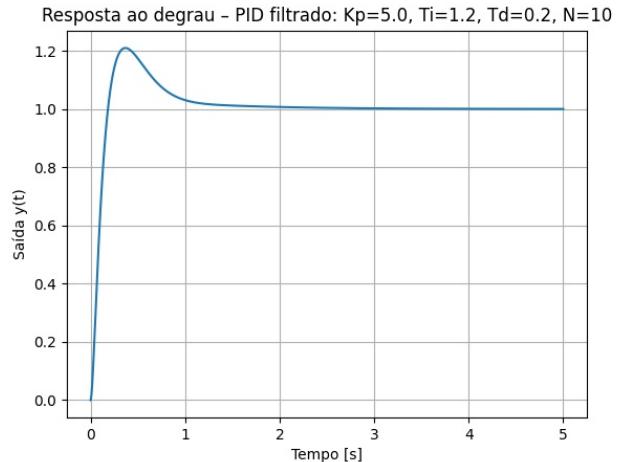


Figura 17. Resposta ao degrau da planta C controlada por PID filtrado.

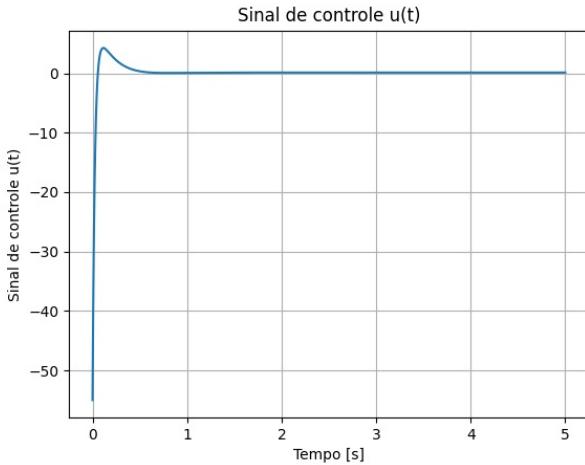


Figura 18. Sinal de controle $u(t)$ correspondente à resposta ao degrau.

Os resultados confirmam que a topologia proposta no Item II, implementada na forma prática com filtro derivativo, proporciona estabilidade e erro nulo de regime permanente para a planta instável C.

Item IV: Avaliação Teórica e Experimental dos Erros Estacionários

O erro estacionário de um sistema linear depende do seu *tipo*, definido pelo número de polos na origem da função de malha aberta $L(s) = C(s)G(s)$. O sistema controlado por PD (Item I) não possui integrador, sendo, portanto, de **tipo 0**. Já o sistema controlado por PID (Item III) contém um polo na origem devido ao termo $1/(T_i s)$, caracterizando um sistema de **tipo 1**.

Para o controlador PD:

$$C_{\text{PD}}(s) = -K(1 + T_d s),$$

o ganho DC é finito, logo:

$$e_{ss,\text{degrau}} = \frac{1}{1 + K_p G(0)} \neq 0, \quad e_{ss,\text{rampa}} = \infty.$$

Assim, o PD estabiliza a planta, mas não elimina o erro estacionário.

Para o PID filtrado:

$$C_{\text{PID}}(s) = -K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d}{N} s} \right),$$

a presença do termo integrativo adiciona um polo em $s = 0$, tornando o sistema de tipo 1, o que garante:

$$e_{ss,\text{degrau}} = 0, \quad e_{ss,\text{rampa}} = \frac{1}{K_v},$$

onde

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s L(s) \approx -\frac{8K_p}{T_i}.$$

Com os parâmetros do Item III:

$$K_v = -\frac{8 \times 5}{1,2} = -33,3 \Rightarrow |e_{ss,\text{rampa}}| \approx 0,03.$$

As simulações foram realizadas para ambos os controladores — PD (Item I) e PID (Item III) — aplicando entradas

de degrau e rampa unitários. Os parâmetros utilizados foram:

$$\text{PD: } K = 10,39, \quad T_d = 0,2,$$

$$\text{PID: } K_p = 5,0, \quad T_i = 1,2, \quad T_d = 0,2, \quad N = 10.$$

As Figuras 19 e 20 apresentam as respostas ao degrau unitário para ambos os controladores. O PD atinge um valor de regime permanente inferior à referência (erro de aproximadamente 0,012), enquanto o PID converge exatamente para o valor desejado, validando o erro estacionário nulo. As Figuras 21 e 22 mostram o comportamento frente à entrada rampa: o PD exibe erro crescente, enquanto o PID mantém erro constante e limitado.

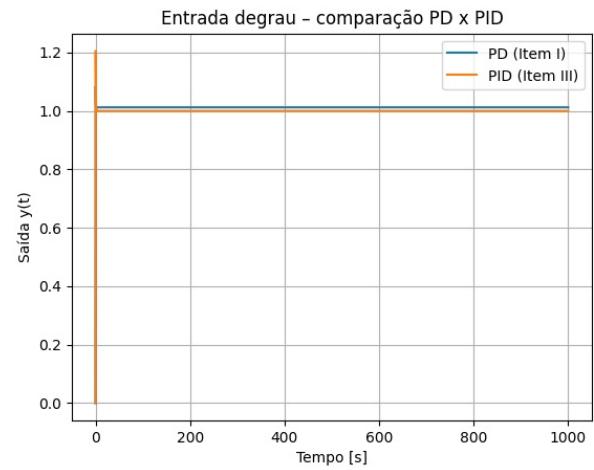


Figura 19. Resposta ao degrau para controladores PD e PID.

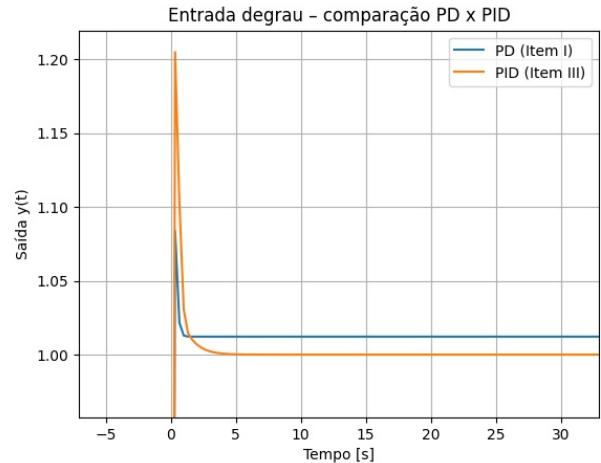


Figura 20. Ampliação da resposta ao degrau, destacando o erro estacionário.

A Tabela 3 apresenta os valores numéricos obtidos para diferentes horizontes de simulação, calculados como a média dos últimos 20% das amostras de $e(t) = r(t) - y(t)$.

Os resultados confirmam integralmente a análise teórica:

- O controlador PD (tipo 0) produz erro finito para o degrau e divergente para a rampa.

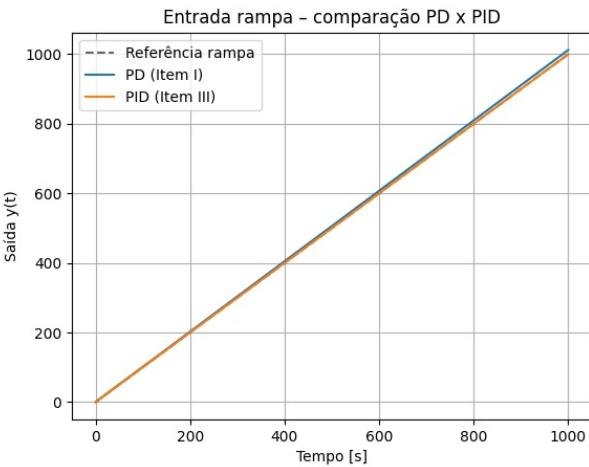


Figura 21. Resposta à rampa unitária para controladores PD e PID.

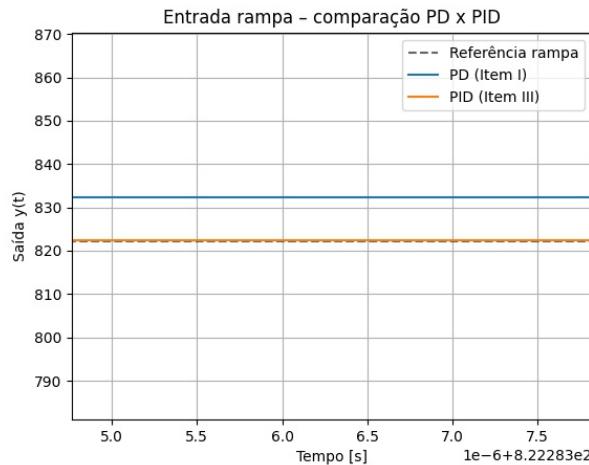


Figura 22. Ampliação da resposta à rampa, evidenciando erro finito e constante no PID.

Tabela 3. Erros estacionários obtidos por simulação (valores absolutos).

Tempo [s]	Controlador	Entrada	$ e_{ss} $
1	PD	Degrau	0,013
	PD	Rampa	0,010
	PID	Degrau	0,031
	PID	Rampa	0,006
10	PD	Degrau	0,012
	PD	Rampa	0,089
	PID	Degrau	≈ 0
	PID	Rampa	0,030
100	PD	Degrau	0,012
	PD	Rampa	1,075
	PID	Degrau	≈ 0
	PID	Rampa	0,030
1000	PD	Degrau	0,012
	PD	Rampa	10,94
	PID	Degrau	≈ 0
	PID	Rampa	0,030

- O controlador PID (tipo 1) elimina o erro estacionário para o degrau e mantém erro constante e limitado para a rampa, em torno de $|e_{ss}| \approx 0,03$, coerente com o valor teórico $1/K_v = 0,03$.

Dessa forma, a ação integrativa do PID foi eficaz em garantir erro nulo em regime permanente sem comprometer a estabilidade do sistema.

Item V: Rejeição de distúrbios

Considera-se um distúrbio $D(s)$ somado ao sinal de controle na entrada da planta, conforme o diagrama da Figura 23. Com realimentação unitária, define-se

$$L(s) = C(s)G(s),$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)},$$

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$

A sensibilidade da saída ao distúrbio é dada por

$$T_d(s) \triangleq \frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} = G(s)S(s).$$

Portanto, distúrbios de *baixa frequência* são atenuados quando $|L(j\omega)|$ é grande, pois $S(j\omega) \approx 0$ e, logo, $|T_d(j\omega)| \approx 0$.

Sem integrador, $L(0)$ é finito. Para a planta $G(0) = -8$ e $C_{PD}(0) = -K$, logo $L(0) = 8K$ e

$$S(0) = \frac{1}{1 + 8K}, \quad T_d(0) = \frac{-8}{1 + 8K}.$$

Com o ganho de fechamento do arco $K = 10,390625$, obtém-se

$$|T_d(0)| = \frac{8}{1 + 83,125} \approx 0,095 (\approx -20,4 \text{ dB}),$$

ou seja, **atenuação finita** para degraus de distúrbio (não nula). Para rampas de distúrbio, o erro cresce (sistema tipo 0 quanto ao canal de distúrbio).

Com integrador, $C(s) \sim K_i/s$ quando $s \rightarrow 0$, de modo que $L(s) \rightarrow \infty$ e

$$S(0) = 0, \quad T_d(0) = 0.$$

Logo, há **rejeição perfeita** de distúrbios constantes. Para distúrbios do tipo rampa, em baixas freqüências

$$T_d(s) = G(s)S(s) \approx \frac{s}{K_i},$$

indicando **erro finito e constante** proporcional à inclinação da rampa (com melhor rejeição quanto maior K_i). O filtro derivativo do PID limita $|C(j\omega)|$ em altas freqüências, reduzindo a transmissão de ruído (distúrbios rápidos).

A solução I (PD) oferece rejeição *parcial* de distúrbios constantes e não rejeita rampas; a solução III (PID) rejeita *completamente* distúrbios constantes e limita o efeito de rampas com erro estacionário finito, além de atenuar ruído em alta freqüência graças ao filtro derivativo.

Item VI: Análise em Freqüência da Malha Fechada

A resposta em freqüência da malha fechada, expressa por

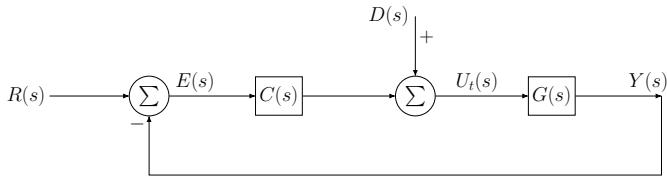


Figura 23. Topologia de controle com distúrbio $D(s)$ somado antes da planta.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)},$$

foi analisada para as soluções obtidas nos Itens I (PD) e III (PID filtrado), seguindo a abordagem de Ogata (2010). A Figura 24 apresenta os diagramas de Bode de magnitude e fase correspondentes.

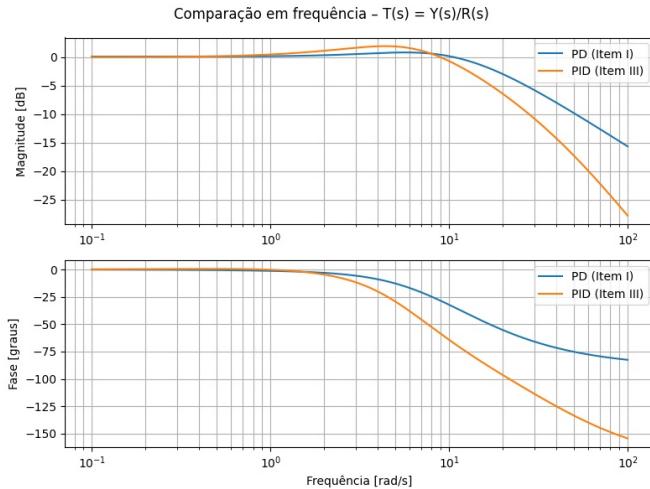


Figura 24. Comparação em frequência das soluções PD e PID filtrado: resposta em magnitude e fase da malha fechada $T(s) = Y(s)/R(s)$.

Observa-se que ambos os controladores mantêm a magnitude próxima de 0 dB em baixas frequências, indicando seguimento preciso de sinais lentos e ganho unitário de malha fechada. Na região intermediária ($1 < \omega < 10$ rad/s), o controlador PD apresenta ganho levemente superior a 0 dB, associado a uma resposta rápida e com pequeno sobressinal. O PID filtrado, por sua vez, exibe atenuação mais suave e fase mais negativa devido à presença do integrador e do filtro derivativo, resultando em maior estabilidade e robustez.

Em altas frequências ($\omega > 10$ rad/s), o ganho do PID decai mais rapidamente que o do PD, pois o filtro $1/(1 + \frac{T_d}{N}s)$ limita a ação derivativa, reduzindo a sensibilidade a ruídos de medição. O PD mantém maior largura de banda e, portanto, maior suscetibilidade a distúrbios rápidos.

Tabela 4. Margens de estabilidade obtidas a partir dos diagramas de Bode.

Controlador	Margem de Fase [°]	Margem de Ganho [dB]
PD (Item I)	78,8	-38,4
PID (Item III)	60,9	-26,9

Um detalhe importante observado na Figura 24 é o leve aumento de ganho do controlador PID na faixa intermediária

de frequências ($1 < \omega < 10$ rad/s). Esse comportamento decorre da interação entre o termo integrativo e o zero derivativo do controlador: nessa região, o integrador ainda influencia a resposta enquanto o zero T_{ds} começa a atuar, produzindo um pequeno *bump* de magnitude. Tal reforço transitório melhora o amortecimento e reduz o erro de regime permanente sem comprometer a estabilidade global. À medida que a frequência aumenta, o filtro derivativo $1/(1 + \frac{T_d}{N}s)$ passa a dominar, causando a queda mais acentuada da magnitude e garantindo menor transmissão de ruído em altas frequências.

Em síntese, o controlador PD apresenta maior largura de banda e resposta mais rápida, enquanto o PID filtrado oferece comportamento mais amortecido, rejeição mais eficiente de ruídos e melhor desempenho em regime permanente (Franklin et al., 2019).

5. CONCLUSÃO

O trabalho apresentou o projeto e a análise de controladores PID aplicados a três sistemas com dinâmicas distintas, utilizando os métodos do Lugar das Raízes (LGR) e da Síntese Direta. Cada abordagem foi escolhida de acordo com as características de cada planta, permitindo avaliar o impacto da estrutura e dos parâmetros de controle sobre a estabilidade, o desempenho transitório e o erro de regime permanente.

As simulações mostraram que, nas Plantas A e B, a Síntese Direta possibilitou ajustar o comportamento dinâmico de forma previsível, atendendo aos requisitos de tempo de acomodação e sobressinal, mesmo na presença de atraso de transporte. Já na Planta C, o método do Lugar das Raízes permitiu estabilizar o sistema instável e obter resposta rápida, especialmente com a inclusão da ação derivativa e do filtro de alta frequência.

A análise dos erros estacionários confirmou o papel da ação integrativa na eliminação do erro permanente e a contribuição do filtro derivativo na limitação do esforço de controle. As respostas em frequência evidenciaram margens de estabilidade adequadas, indicando boa robustez para as condições de projeto.

Conclui-se que a combinação de metodologias clássicas — LGR e SD — fornece resultados consistentes e complementares, permitindo a aplicação eficiente do controle PID a diferentes tipos de processos, desde sistemas com atraso até plantas instáveis.

REFERÊNCIAS

- Åström, K.J. and Hägglund, T. (1995). *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America, Research Triangle Park, NC. Referência padrão sobre teoria e implementação de controladores PID.
- Dorf, R.C. and Bishop, R.H. (2011). *Modern Control Systems*. Prentice Hall, Boston, 12th edition. Referência sobre PID, lugar das raízes e análise de desempenho.
- Franklin, G.F., Powell, J.D., and Emami-Naeini, A. (2019). *Feedback Control of Dynamic Systems*. Pearson, New York, 8th edition. Análise de estabilidade, desempenho e compensadores.

- Freitas, P. and Pereira, R. (2025). Códigos de simulação e sintonia de controladores pid aplicados a sistemas com atraso e instabilidade. <https://github.com/pedrotaviog/primeiroTrabalhoSCI.git>. Repositório público contendo os scripts em Python desenvolvidos para o projeto do CEFET-MG.
- Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 5th edition. Referência clássica para fundamentos de controle contínuo e discreto.
- Ogata, K. (2011). *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Education do Brasil, São Paulo, 5^a edition. Versão em português amplamente usada em cursos de Engenharia de Controle.