

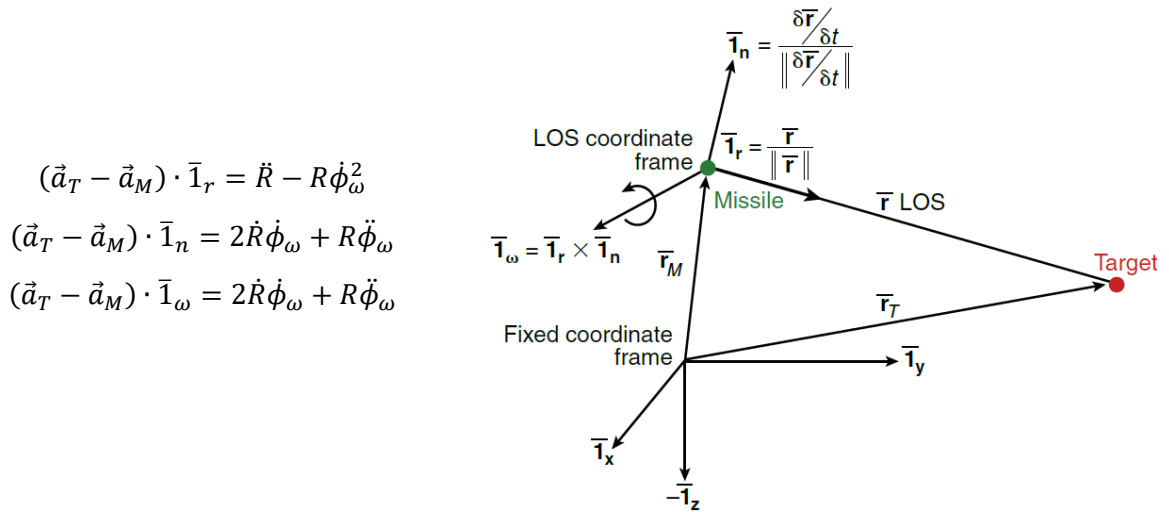
## CONTROLO DA ORIENTAÇÃO DE UM MÍSIL (TEORIA)

CONTROLO PROPORCIONAL / PILOTO AUTOMÁTICO DE 3 LOOP'S

### Desenvolvimento da Lei de Navegação Proporcional

A maioria dos mísseis guiados empregam Navegação Proporcional como lei de controlo durante a fase de perseguição do seu alvo. Existem diferentes categorias de mísseis, terrestres para perseguição aérea, aéreos para perseguição aérea e aéreos para perseguição terrestre, assim como aplicações espaciais.

De modo a desenvolver uma lei de controlo de navegação proporcional, primeiro observamos as seguintes equações de modo a obter condições suficientes para atingir uma interseção entre objetos.



$$\begin{aligned}
 (\vec{a}_T - \vec{a}_M) \cdot \vec{1}_r &= \ddot{R} - R\dot{\phi}_\omega^2 \\
 (\vec{a}_T - \vec{a}_M) \cdot \vec{1}_n &= 2\dot{R}\dot{\phi}_\omega + R\ddot{\phi}_\omega \\
 (\vec{a}_T - \vec{a}_M) \cdot \vec{1}_\omega &= 2\dot{R}\dot{\phi}_\omega + R\ddot{\phi}_\omega
 \end{aligned}$$

Olhando para a primeira equação verificamos que uma condição suficiente para interseção entre objetos é  $\dot{\phi}_\omega = 0$ , assim sendo a capacidade do míssil de acelerar ao longo do ângulo da trajetória de voo é maior ou igual à aceleração do alvo ao longo do ângulo da trajetória de voo,  $\vec{a}_M \cdot \vec{1}_r \geq \vec{a}_T \cdot \vec{1}_r$ . O valor inicial da derivada da distância entre o míssil e alvo é negativa,  $\dot{R}(0) < 0$ . Neste caso a distância entre míssil e o alvo,  $R$ , vai diminuir linearmente  $(\vec{a}_T - \vec{a}_M) \cdot \vec{1}_r = 0$  ou quadraticamente  $(\vec{a}_T - \vec{a}_M) \cdot \vec{1}_r < 0$  em ordem ao tempo e, eventualmente, passará por zero.

Aplicando a transformada de Laplace à segunda equação obtemos o seguinte polinómio s:

$$(\vec{a}_T(s) - \vec{a}_M(s)) \cdot \vec{1}_n = (sR - 2V_c)\dot{\phi}_\omega(s)$$

Se definirmos a aceleração perpendicular ao ângulo da trajetória do voo do míssil como:

$$\vec{a}_M(s) \cdot \vec{1}_n = \Lambda \dot{\phi}_\omega(s)$$

Assim podemos escrever a função de transferência da aceleração do míssil perpendicular à direção da trajetória de voo para a correspondente variação do ângulo da trajetória de voo como:

$$\frac{\dot{\phi}_\omega(s)}{(\vec{a}_T(s) \cdot \vec{1}_n)} = \frac{1}{(sR - 2V_c + \Lambda)}$$

Para assegurar um sistema estável é necessário que  $\Lambda > 2V_c$ , isto permite-nos chegar à lei de controlo de navegação proporcional:

$$\vec{a}_M(s) \cdot \vec{1}_n = NV_c \dot{\phi}_\omega(s), N > 2.$$

Ou então:

$$\vec{a}_{M_c} = NV_c \ddot{\phi} \vec{1}_r, N > 2.$$

Onde  $\vec{a}_{M_c}$  representa o comando de aceleração perpendicular ao ângulo da trajetória de voo do míssil. Tal comando é executado com recurso a componentes defletores de controlo aerodinâmico e controlo de proporção do míssil.

De modo a simplificar o tratamento matemático do nosso problema vamos introduzir uma outra variante da Navegação Proporcional que é referida em ambiente académico como Pura Navegação Proporcional. A mesma é descrita como:

$$a_{M_c} = NV_c \dot{\lambda}$$

Em que  $N$  é o ganho da navegação proporcional,  $V_c$  é a velocidade do míssil e  $\dot{\lambda}$  é a derivada em ordem ao tempo do ângulo da trajetória de voo do míssil.

A implementação convencional da Navegação Proporcional requiere o conhecimento da velocidade relativa entre o míssil e o alvo,  $V_c$ , assim como a derivada do ângulo da trajetória de voo,  $\dot{\lambda}$ , de modo a calcular ação de comando referente à aceleração perpendicular ao ângulo da trajetória de voo. O modo como  $V_c$  e  $\dot{\lambda}$  são obtidos vai depender do tipo de sensores utilizados e da forma como os mesmos são montados no corpo do míssil.

### Elementos do Sistema de Controlo de Voo

O sistema de controlo de voo é um elemento-chave que permite ao míssil atingir a performance requerida pelo sistema.

O objetivo principal do sistema de controlo de voo é forçar o míssil a adquirir a orientação comandada pelo sistema de controlo de navegação proporcional. O tipo de comando varia consoante a fase de voo em que o míssil se encontra.

O sistema de controlo de voo é um elemento dentro do sistema que governa o movimento do nosso míssil após adquirido um alvo. O movimento do míssil controlado pelo sistema de controlo de voo combinado com o movimento do alvo permite estabelecer as relações geométricas necessárias entre o míssil e o alvo.

Como é de esperar o Sistema de Controlo de Voo é um sistema em malha fechada que se encontra após a lei de Navegação Proporcional, os mesmos podem ser representados da seguinte forma:

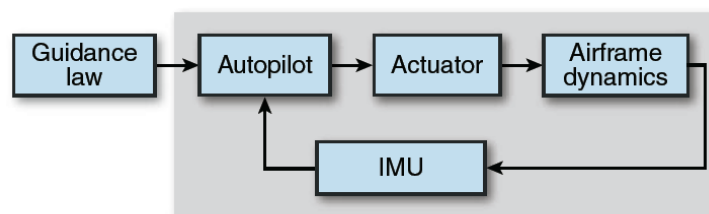


Figura 1 - Diagrama de blocos dos elementos de um sistema de controlo de voo.

Os quatro elementos básicos do sistema de controlo de voo são salientados na caixa cinza. O IMU sente o movimento inercial do míssil e faz output para o sistema de “Autopilot” que juntamente com o output da Lei de Navegação proporcional permite determinar o esforço necessário a ser compilado pelo “Autopilot” de modo a lançar um comando com o ângulo de deflexão para o modelo aerodinâmico do míssil. O atuador transforma o comando do “Autopilot” num movimento físico que

influência o modelo aerodinâmico do míssil de modo a respeitar o comando da lei de navegação definida inicialmente.

Para resumir, o objetivo básico do sistema de controlo de voo é forçar a condições dinâmicas do míssil a seguirem os comandos provenientes da lei de navegação, de forma controlada e “bem-comportada”.

### Modelo Aerodinâmico

O modelo aerodinâmico de um míssil ou alvo é definido por equações de movimentos, com as suas características determinadas pela resposta aerodinâmica do míssil, propulsão e massa.

Assumindo que o movimento do míssil e do alvo se realizam a 2D, as equações de movimentos podem ser adquiridas de forma bastante direta.

Considerando a seguinte imagem:

Ângulo da trajetória de voo,  $\gamma$ : ângulo entre o eixo inercial e o vetor velocidade relativa do míssil.

Ângulo de ataque,  $\alpha$ : ângulo entre o vetor velocidade do míssil e o vetor velocidade relativa do míssil.

Ângulo de inclinação,  $\theta$ : ângulo entre o vetor velocidade do míssil e o eixo inercial do míssil.

$A_z$  é a aceleração perpendicular à velocidade do míssil. Para valores de ângulo de ataque,  $\alpha$ , diferentes de zero o sistema insere uma deflexão no atuador do míssil e uma força aerodinâmica é criada. A aceleração normal é criada por uma variável de entrada de controlo  $\delta$  definida como ângulo de deflexão da proporção.

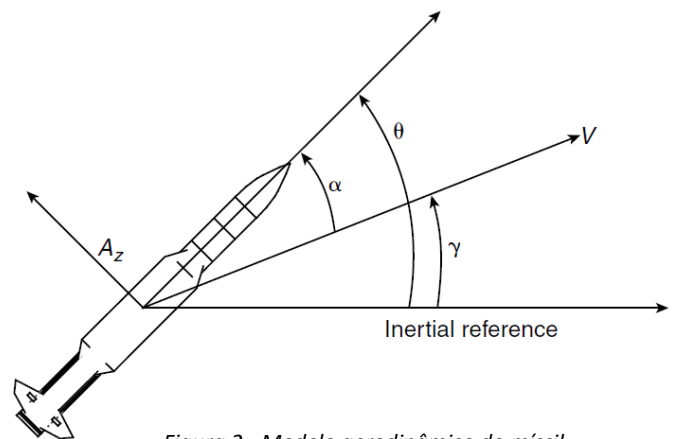


Figura 2 - Modelo aerodinâmico do míssil.

Com base na figura 2 vemos que a relação fundamental entre os 3 ângulos é:

$$\alpha = \theta - \gamma \rightarrow \dot{\alpha} = \dot{\theta} - \dot{\gamma}$$

A aceleração angular é o momento aplicado na fuselagem do míssil a dividir pelo momento de inércia do mesmo.

$$\ddot{\theta} = \frac{M(\alpha, \delta)}{J}$$

O momento aplicado à fuselagem é controlado pelo input  $\delta$  e pela força aerodinâmica induzida pelo ângulo de ataque  $\alpha$ . A derivada do ângulo da trajetória de voo em ordem ao tempo é igual à componente perpendicular da aceleração em relação à velocidade a dividir pela magnitude do vetor velocidade. Isto assumindo que o ângulo de ataque é pequeno.

$$\dot{\gamma} = \frac{A_z \cdot \cos(\alpha)}{V} \approx \frac{A_z}{V}$$

A aceleração normal é determinada pela divisão da força aplicada no míssil pela sua massa.

$$A_z = \frac{F_z(\alpha, \delta)}{m}$$

A força aplicada é função da variável de entrada de controlo  $\delta$  e da força aerodinâmica induzida pelo ângulo de ataque  $\alpha$ . Juntando as equações anteriores obtemos um conjunto de equações diferenciais não lineares em que as variáveis de estado são o ângulo de ataque,  $\alpha$ , e o ângulo de inclinação,  $\theta$ :

$$\dot{\alpha} = \dot{\theta} - \frac{F_z(\alpha, \delta)}{mV} \quad \ddot{\theta} = \frac{M(\alpha, \delta)}{J}$$

Assumindo uma velocidade constante do míssil, a linearização das equações anteriores produz uma descrição em espaço de estados de 2ª ordem da dinâmica do míssil.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Z_\alpha}{V} & 1 \\ M_\alpha & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Z_\delta}{V} \\ M_\delta \end{bmatrix}}_B \delta$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ A_z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ Z_\alpha & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ Z_\delta \end{bmatrix}}_D \delta$$

Em que os coeficientes numéricos são definidos como:

$$Z_\alpha = \frac{1}{m} \frac{\partial F_z(\alpha, \delta)}{\partial \alpha}; \quad Z_\delta = \frac{1}{m} \frac{\partial F_z(\alpha, \delta)}{\partial \delta}; \quad M_\alpha = \frac{1}{J} \frac{\partial M(\alpha, \delta)}{\partial \alpha}; \quad M_\delta = \frac{1}{J} \frac{\partial M(\alpha, \delta)}{\partial \delta}$$

A questão de estabilidade do sistema é respondida através da determinação das raízes do polinómio caraterístico das equações no espaço de estados:

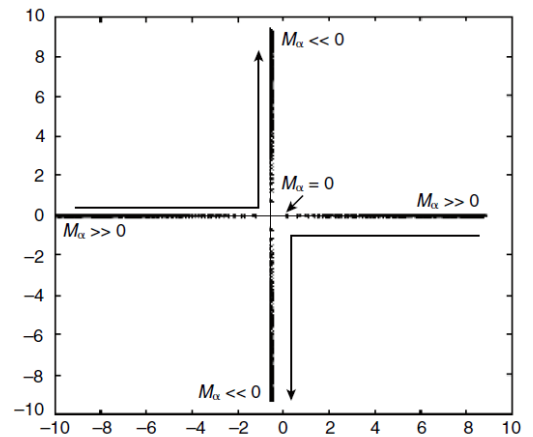
$$s^2 + \frac{Z_\alpha}{V}s + (-M_\alpha) = 0$$

A condição necessária e suficiente para ambas as raízes terem parte real negativa e assim garantirem estabilidade do sistema é todos os coeficientes serem positivos. Usando esta convenção  $Z_\alpha$  é sempre positivo.

Por consequente, a estabilidade do míssil na ausência de qualquer input de controlo é determinada pelo sinal de  $M_\alpha$ .

Se  $M_\alpha > 0$  o momento da força aerodinâmica de inclinação diverge do ângulo de ataque, e o míssil é instável.

Se  $M_\alpha < 0$  o míssil tende para um estado em que repõem o ângulo de ataque, e o míssil tem comportamento estável.



A estabilidade estática do míssil é uma propriedade crucial determinada unicamente pelo sinal de  $M_\alpha$ . A imagem seguinte ilustra, no plano complexo, a variação das raízes da equação caraterística em função de  $M_\alpha$ .

Para valores positivos elevados de  $M_\alpha$ , o míssil é estaticamente instável e a dinâmica do sistema tem uma raiz real positiva e uma raiz real negativa.

À medida que  $M_\alpha$  diminui as raízes aproximam-se da origem. Esta condição é chamada de estabilidade neutra.

Para valores cada vez mais negativos de  $M_\alpha$ , as raízes comportam-se como pares complexos puros.

#### **Resumo de estabilidade:**

A estabilidade estática do modelo aerodinâmico é determinada pelo declive do momento de inclinação da curva de trajetória em respeito ao ângulo de ataque,  $M_\alpha$ .

Se o declive é positivo, o míssil é estaticamente instável e uma das raízes do polinómio característico da equação diferencial tem parte real positiva.

Se o declive é negativo, ambas as raízes estão têm parte real negativa e o míssil é estaticamente estável.

O caso é que o declive é zero o míssil é estaticamente neutro, com uma das raízes na origem do plano complexo.

#### **Atuador:**

O atuador dum míssil converte o comando de controlo proveniente do piloto automático, num movimento físico, como por exemplo a rotação de uma *tail fin* que irá afetar o movimento do míssil.

O modelo matemático utilizado para simular o comportamento de um atuador, é um sistema de segunda ordem com a seguinte função de transferência:

$$\frac{\delta(s)}{\delta_c(s)} = \frac{\omega_a^2}{s^2 + 2\zeta_a\omega_a s + \omega_a^2}$$

O atuador apresenta duas limitações relevantes, a variação angular máxima temporal e a posição limite de rotação.

A variação máxima temporal essencialmente limita o quão rápido o atuador causa uma rotação na direção do míssil, que efetivamente limita o tempo de resposta do sistema de controlo automático face a um comando proveniente da lei de navegação.

#### **IMU:**

O IMU (Unidade de Medição Inercial) mede parâmetros aerodinâmicos do míssil, o resultado da medição é fornecido ao bloco de piloto automático.

#### **Piloto Automático (Autopilot):**

O piloto automático é um conjunto de equações que toma como input o comando proveniente da Lei de Orientação e os parâmetros medidos pelo IMU e dá como output um comando de controlo para o modelo aerodinâmico do míssil.

Usualmente o piloto automático é um conjunto de equações diferenciais, o cálculo do seu output evolve a integração dos sinais em ordem ao tempo. Existem diversos tipos de piloto automático, piloto automático com controlo de aceleração, piloto automático com controlo de altitude e piloto automático com controlo de ângulo da trajetória de voo. Para implementação deste projeto será necessário a utilização de um piloto automático com controlo de aceleração.

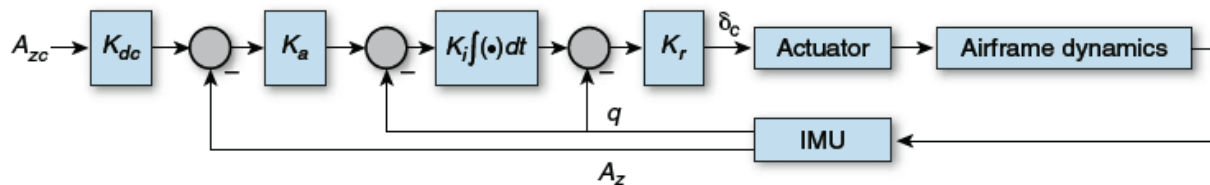
#### **Sistema de controlo de aceleração:**

Este tipo de sistema de controlo utilizado para controlar a aceleração perpendicular à velocidade do míssil. Neste sistema aerodinâmico uma deflexão na superfície de controlo, tal como uma *tail fin*, é a variável de entrada de controlo juntamente com a derivada do ângulo de inclinação ( $q$ ) e a

aceleração perpendicular ( $A_z$ ), ambas medidas pelo IMU e dadas como *feedback* ao sistema de piloto automático.

O defletor produz uma pequena força aerodinâmica na *tail fin* mas um grande momento no míssil devido à sua distância ao centro de massa do míssil. O momento induzido roda o míssil de modo a produzir o ângulo de ataque pretendido.

A figura seguinte representa as equações que podem ser implementadas no sistema de piloto automático de modo a desenvolver o comando de controlo, ângulo de deflexão, a ser lançado no atuador baseado no ângulo de inclinação ( $\alpha$ ) e a aceleração perpendicular ( $A_z$ ).



Como indicado na figura anterior, o erro entre o comando de aceleração perpendicular e a aceleração perpendicular do míssil é usado como input para o loop interno que controla o ângulo de inclinação do míssil. O Loop do Sistema de Controlo do Ângulo de Inclinação inclui a integração em ordem ao tempo de modo a satisfazer a necessidade das equações diferenciais do sistema.

Os ganhos dos três Loop's são seleccionados de modo que o Sistema de Controlo de voo em malha fechada tenha a velocidade de resposta necessária e a robustez necessária para lidar com as limitações de outros componentes como o atuador por exemplo.

#### Piloto Automático de Três Loop's:

O diagrama de bloco anterior ilustra uma abordagem clássica à construção de um sistema de piloto automático com controlo de aceleração.

A diferença entre o comando de aceleração perpendicular à velocidade e a medida da aceleração perpendicular à velocidade do míssil atual é multiplicada por um ganho para formar o comando da derivada do ângulo de inclinação.

A diferença entre o comando do ângulo de inclinação e o ângulo de inclinação medido pelo IMU é multiplicado por um ganho e integrado em ordem ao tempo. Ao resultado da integração é subtraído o valor da derivada do ângulo de inclinação e multiplicado por um terceiro ganho, formando o desejado comando do ângulo de deflexão  $\delta_c$  para o atuador.

A esta básica estrutura de controlo em piloto automático é atribuído o nome de "Piloto automático de três loops."

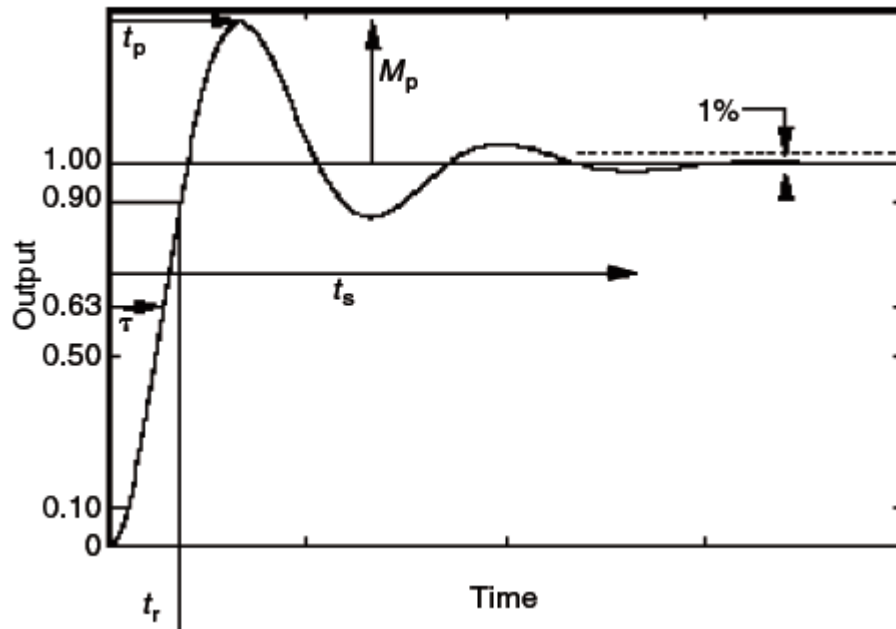
#### Resposta ao Degrau:

O seguinte gráfico mostra a resposta no domínio do tempo, do modelo aerodinâmico do míssil a uma entrada em degrau como input de comando.

Esta resposta pode representar a aceleração obtida dada uma aceleração de comando. A constante de tempo  $\tau$ , e o tempo de subida  $t_r$ , caracterizam o quão rápido o sistema responde a variação na variável de comando de entrada.

A percentagem de overshoot e a amplitude de pico  $M_p$  caracterizam o grau em que a resposta é bem controlada.

O erro contínuo e o tempo de estabelecimento  $t_s$  indicam o quão bem o sistema atinge o valor esperado de acordo com a variável de comando.



Resumindo a resposta a um degrau permite definir o quão rápido o míssil irá responder a uma variação na variável de comando e também permite quantificar o quão longe o movimento do míssil ficou do comportamento pretendido. ( $\tau$  é a constante de tempo,  $M_p$  é a amplitude do pico,  $t_p$  é o tempo para o primeiro pico,  $t_r$  é o tempo de subida e  $t_s$  é o tempo de estabelecimento.)

### Simulação:

O nosso projeto tem por base um sistema de piloto automático com controlo de aceleração de um míssil com um atuador do tipo *tail fin*.

A dinâmica do míssil é caracterizada por uma velocidade Mach 3. Avaliando os declives dos parâmetros das equações em espaço de estados e calculando a função de transferência no domínio das frequências temos:

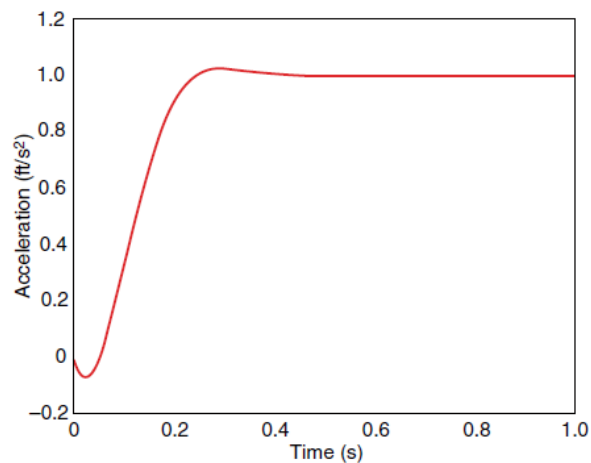
$$\frac{A_z(s)}{\delta(s)} = \frac{0.2038(s^2 - 34.3^2)}{s + 0.56 \pm 9.32j}; \quad \frac{q(s)}{\delta(s)} = \frac{-131(s + 1)}{s + 0.56 \pm 9.32j}$$

O denominador de ambas as funções de transferência é a equação característica do nosso sistema. Nesta condição o míssil tem um comportamento estável com um par de raízes complexas de parte real negativa.

O atuador considerado neste sistema é representado por um sistema de 2ª ordem com uma função de transferência com  $\omega_a = 150 \text{ rad/s}$  e  $\zeta_a = 0.7$ . O IMU é considerado ideal, isto é, os valores obtidos pelo IMU correspondem aos valores reais sem erros.

O sistema de controlo com piloto automático de três Loop's tem os seus ganhos selecionados de modo que a constante de tempo seja menos de 0.2 segundos, com overshoot mínimo. Os ganhos correspondentes são:  $K_{dc} = 1.1$ ,  $K_a = 4.5$ ,  $K_i = 14.3$  e  $K_r = -0.37$ .

A aceleração obtida como resposta a uma entrada de aceleração de comando em degrau é mostrada de seguida.



A constante de tempo é aproximadamente 0.18 segundos e o overshoot é de 1.3 %.

A resposta ao degrau de comando de aceleração mostra que o míssil adquire inicialmente uma aceleração na direção negativa antes de reverter o sentido de variação e eventualmente ir de acordo com o comando de aceleração pretendido. Este tipo de comportamento é comum em míssil controlados com atuadores do tipo *tail fin*. O atuador desenvolve uma aceleração negativa de modo a movimentar o nariz do míssil para cima e de seguida desenvolve um ângulo de ataque positivo.

A força negativa inicial é uma forma de dar um empurrão ao centro de gravidade do míssil na direção negativa antes de a aceleração perpendicular do míssil adquirir a direção desejada.