

# Game Theory | Solving diner's dilemma game.

Gil M. Marques, pg47210<sup>1,2</sup>, Pedro M. Teixeira, pg50693<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Informática, Universidade do Minho, Portugal.

<sup>2</sup>Aluno do Mestrado em Engenharia Física, especialização em Física da Informação.

## Abstract

Resolvemos o problema do *Diner's Dilemma Game* com quatro jogadores tomando proveito da mecânica quântica. O dilema do jogo é ultrapassado com uma estratégia quântica que se encontra entre o *The Pareto Optimal point* e o *Nash Equilibrium Point*. A estratégia quântica em questão maximiza a pontuação individual sem afetar a pontuação e estratégia dos restantes jogadores, esta toma proveito dos fenómenos de sobreposição e entrelaçamento que permitem uma supremacia quântica sobre as estratégias clássicas. Foi criado um circuito quântico que traduz o ambiente do 'diner's dilemma game' usando as ferramentas do qiskit. Foram realizadas diversas simulações das possíveis estratégias quânticas num simulador de modo a testar as diferentes premissas apresentadas.

## Keywords

Entrelaçamento, Sobreposição, Nash Equilibrium Point, Pareto Optimal point, Computador Quântico IBM.

## 1. Introdução

O *Diner's dilemma* é um dos problemas estudados em *Game Theory*, sendo *Game Theory* uma ciência que utiliza modelos matemáticos rigorosos que descrevem situações de conflito e cooperação, em busca da melhor estratégia dado um certo objetivo. A estratégia escolhida deve ser a mais racional possível, isto é, aquela que maximiza a pontuação possível de obter dados os limites do jogo.

Foi em 1950 que se discutiu matematicamente pela primeira vez o *Diner's dilemma*, sendo que por volta desse século foi desenvolvido por *John Nash* um critério de consistência entre estratégias de vários jogadores, denominado *Nash equilibrium*. *Nash* provou que num jogo com um número finito de jogadores, com *non-zero-sum* e sem possível cooperação entre os jogadores existe um *Nash Equilibrium Point* nas diferentes estratégias.

Na resolução do nosso dilema utilizamos três propriedades da mecânica quântica, o entrelaçamento, a não localidade e a sobreposição. Através da não localidade ganhamos uma grande vantagem face às estratégias quânticas e dado que o jogo é não cooperativo, isto é, os jogadores não podem interagir entre eles assim que o jogo começa, o entrelaçamento tem um papel vital na decisão da estratégia a tomar.

O jogo tem como base um jantar entre 4 pessoas em que ao chegar ao restaurante são informadas que a conta do jantar será dividida entre os quatro, tendo à sua disposição duas escolhas no menu, um prato barato (*cheap food*) ou um prato caro (*expensive food*). Cada jogador



pg47210@alunos.uminho.pt (G. M. M. pg47210); pg50693@alunos.uminho.pt (P. M. T. pg50693)



© 2023 Copyright for this paper by its authors. Use permitted under Creative Commons License Attribution 4.0 International (CC BY 4.0).



CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org)

desconhece por completo o tipo de prato que os outros jogadores escolheram, portanto não podem escolher uma estratégia tendo em consideração o tipo de prato escolhido pelos restantes jogadores. De acordo com a estratégia escolhida é atribuída uma pontuação a cada jogador. O objetivo de cada jogador é aumentar o máximo possível a sua pontuação individual.

## 2. Métodos

### 2.1. Modelo Clássico

O *diner's dilemma game* clássico é não cooperativo e não competitivo. Temos quatro jogadores: Alice (A), Bob (B), Colin (C) e o Doug (D). Cada jogador tem duas estratégias disponíveis, escolher um prato barato (*cheap meal*, C) ou um prato caro (*expensive food*, E). Dependendo da estratégia escolhida, é-lhe atribuído uma pontuação.

Consideremos que  $\alpha$  quantifica a sensação de comer um prato caro,  $\beta$  a sensação de comer um prato barato,  $\gamma$  o custo do prato caro e  $\delta$  o custo do prato barato. Vamos considerar que  $(\gamma - \delta)$  é maior  $(\alpha - \beta)$  na atribuição da pontuação para diferentes casos. A pontuação a cada jogador é atribuída consoante as diferenças entre as sensação marginal  $(\alpha - \beta)$  e o custo marginal  $(\gamma - \delta)$ , se a diferença for máxima é atribuída a pontuação 8, se a diferença for mínima é atribuída a pontuação 0. Por exemplo, quando tomamos os jogadores escolhem um prato barato ou caro, não existe diferença entre a diferença marginal da sensação e a diferença marginal do custo, mas é-lhes atribuído uma pontuação de 6 pontos para o primeiro caso e de 1 ponto para o segundo caso, esta atribuição de pontuação é justificada pela primeira suposição que apresentamos,  $(\gamma - \delta)$  é maior  $(\alpha - \beta)$ . Quando o jogador A escolhe um prato barato e os restantes três jogadores pedem um prato caro, a diferença entre sensação marginal e o custo marginal é máximo para A. Portanto o jogador A tem uma pontuação de 0 e os restantes jogadores têm uma pontuação de 3. Mas quando três jogadores (B, C e D) pedem pratos baratos e um jogador (A) pede um prato caro, a diferença entre o custo marginal e a sensação marginal para A é máxima sendo-lhe atribuído uma pontuação de 8 pontos enquanto que ao resto são-lhes atribuídos 4 pontos. A pontuação clássica é atribuída segundo a tabela da figura 1.

A pontuação do jogador D (Doug) é calculada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} Pf_D = & 6P(0000) + 8P(0001) + 4P(0010) + 4P(0011) \\ & + 4P(0100) + 4P(0101) + 3P(0110) + 3P(0111) \\ & + 4P(1000) + 4P(1001) + 3P(1010) + 3P(1011) \\ & + 3P(1100) + 3P(1101) + 0P(1110) + 1P(1111) \end{aligned}$$

onde  $P(wxyz)$  é a probabilidade de selecionar a estratégia w, x, y e z para os jogadores A, B, C e D, sendo que w, x, y e z  $\in \{C, E\}$ . Analogamente a pontuação para os restantes jogadores segue a mesma fórmula.

O *Nash Equilibrium point* é um estado em que cada participante escolhe uma estratégia que otimiza a sua pontuação, baseada nas estratégias especáveis dos restantes jogadores. Formalmente, seja  $S_i$  o conjunto de todas as possíveis estratégias para o jogador  $i$ , onde  $i = 1, \dots, N$ . Seja  $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$  ser o perfil de estratégias, um conjunto de uma estratégia para cada jogador,

		<u>Bob</u>				
		C		E		
		<u>Doug</u>				
<u>Alice</u>	C	C		C		
		<u>Colin</u>		<u>Colin</u>		
	E	6,6,6,6	4,4,4,8	E	4,8,4,4	3,4,3,4
		4,4,8,4	3,3,4,4	D	3,4,4,3	0,3,3,3
E	C	C		C		
		<u>Colin</u>		<u>Colin</u>		
	E	8,4,4,4	4,3,3,4	E	4,4,3,3	3,3,0,3
		4,3,4,3	3,0,3,3	E	3,3,3,0	<u>1,1,1,1</u>

**Figure 1:** Tabela de pontuação clássica para o *Diner's dilemma* com 4 jogadores.

onde  $s_{-i}^*$  denota as  $N - 1$  estratégias de todos os jogadores exceto  $i$ . Seja  $u_i(s_i, s_{-i}^*)$  a pontuação do jogador  $i$  em função da sua estratégia. O perfil da estratégia  $s^*$  é um *Nash Equilibrium* se:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \leq u_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ para todo } s_i \in S_i$$

Para a Alice, independentemente da estratégia dos restantes jogadores, a melhor decisão é um prato caro, E. Dado que o jogo é simétrico por natureza, isto é, as recompensas e as punições são as mesmas para cada jogador, o mesmo é aconselhável para os restantes jogadores e assim E é uma estratégia dominante. Assim a estratégia de ABCD é EEEE devido ao seu *Nash Equilibrium point*, em que a pontuação atribuída a cada jogador é de 1 ponto. Existe um ponto em que a pontuação é máxima para cada jogador sem diminuir a pontuação dos jogadores vizinhos, sendo ela CCCC, que faz com que a cada jogador será atribuído 6 pontos. A estratégia CCCC é conhecido como *Paerto optimal point*. Isto cria um dilema na cabeça dos jogadores, eles só conseguem obter máxima pontuação através de cooperação mútua, algo que não é permitido nas regras do jogo.

## 2.2. Modelo Quântico

O nosso modelo quântico utiliza o protocolo EWL, Eisert-Wilkens-Lewenstein, para a quantização do jogo. À estratégia prato barato (C) é atribuído o estado  $|C\rangle = |0\rangle$  e à estratégia do prato caro (E) é atribuído o estado  $|E\rangle = |1\rangle$ . Em qualquer ponto, o estado do jogo é dado pelo por um vetor  $|WXYZ\rangle$  onde  $(W, X, Y, Z) \in \{0, 1\}$ . O estado inicial do jogo é descrito por  $|\psi_0\rangle = |CCCC\rangle$ , onde o primeiro *qubit* está com a Alice, o segundo com o Bob, o terceiro com o Colin, e o quarto com o Doug.

O protocolo EWL começa com um estado  $|0000\rangle$  que através do operador  $J$  é transformado num estado entrelaçado. De seguida a Alice, o Bob, o Colin e o Doug aplicam a sua estratégia através do operador  $U_i(\theta_i, \phi_i)$ , em que  $i \in \{A, B, C, D\}$ , no seu correspondente *qubit*.

Consequentemente, o estado final  $|\psi_f\rangle$  é obtido através do transposto conjugado do operador  $J$ ,  $J^\dagger$ . Os repetivos calculos que verificam matemática o comportamento do operador  $J$  e  $J^\dagger$  encontram-se no ficheiro **verifcircuit.ipynb** em anexo com o relatório.

Cada jogador pode calcular a sua pontuação através do estado final  $|\psi_f\rangle$ :

$$|\psi_f\rangle = J^\dagger(U(\theta_A, \phi_A) \otimes U(\theta_B, \phi_B) \otimes U(\theta_C, \phi_C) \otimes U(\theta_D, \phi_D))J|0000\rangle$$

Onde o operador  $U(\theta_i, \phi_i)$  é dado por:

$$U(\theta_i, \phi_i) = \begin{bmatrix} e^{i\phi_i} \cos \frac{\theta_i}{2} & \sin \frac{\theta_i}{2} \\ -\sin \frac{\theta_i}{2} & e^{-i\phi_i} \cos \frac{\theta_i}{2} \end{bmatrix}$$

E o operador  $J$  é dado por:

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}}(I \otimes I \otimes I \otimes I + i(X \otimes X \otimes X \otimes X))$$

Sendo  $I$  o operador identidade, e  $X$  o operador de Pauli-X.

Aplicando o operador  $J$  ao estado inicial,  $|\psi_0\rangle$ , temos:

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0000\rangle + i|1111\rangle)$$

A pontuação atribuída ao Doug pode ser calculada usando a equação 1, onde  $P(X_A, X_B, X_C, X_D)$  é a probabilidade conjunta do estado final colapsar para  $X_A, X_B, X_C, X_D \in \{C, E\}$ , quando medimos  $P = |\langle X_A, X_B, X_C, X_D | \psi_f \rangle|^2$ .

Neste modelo quântico temos três estratégias quânticas,  $C$ ,  $E$  e  $A$ , onde:

$$\begin{aligned} C &= U(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ E &= U(\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ A &= U(0, \pi/2) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As probabilidades conjuntas para o conjunto de diferentes estratégias são calculadas e apresentadas no ficheiro **circuitpaper.ipynb**, que se encontra em anexo com o relatório. Temos um total de 81 estratégias que a Alice, o Bob, o Colin e o Doug podem utilizar. A tabela de pontuação para o modelo quântico do jogo é dada no figura 2.

Nesta tabela podemos observar que existem 8 *Pareto optimal points*, encontram-se a negrito na tabela. Digamos que a Alice, o Bob e o Colin escolhem  $E$ ,  $E$  e  $E$  como estratégia, assim a melhor estratégia para o Doug será  $A$ , mas se a Alice, o Bob e o Colin escolherem  $C$ ,  $C$  e  $C$ , a melhor estratégia para o Doug será  $E$ . Se qualquer par de jogadores escolher  $C$  e  $C$  como

	Bob	C			E			A		
	Doug	C	E	A	C	E	A	C	E	A
Alice	Colin									
C	C	(6, 6, 6, 6)	(4, 4, 4, 8)	(1, 1, 1, 1)	(4, 8, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 0, 3, 3)	(1, 1, 1, 1)	(3, 3, 3, 0)	(6, 6, 6, 6)
	E	(4, 4, 8, 4)	(3, 3, 4, 4)	(3, 3, 0, 3)	(3, 4, 4, 3)	(0, 3, 3, 3)	(4, 3, 3, 4)	(3, 3, 0, 3)	(4, 4, 3, 3)	(4, 4, 8, 4)
	A	(1, 1, 1, 1)	(3, 3, 3, 0)	(6, 6, 6, 6)	(3, 0, 3, 3)	(4, 3, 4, 3)	(4, 8, 4, 4)	(6, 6, 6, 6)	(4, 4, 4, 8)	(1, 1, 1, 1)
E	C	(8, 4, 4, 4)	(4, 3, 3, 4)	(0, 3, 3, 3)	(4, 4, 3, 3)	(3, 3, 0, 3)	(3, 3, 4, 4)	(0, 3, 3, 3)	(3, 4, 4, 3)	(8, 4, 4, 4)
	E	(4, 3, 4, 3)	(3, 0, 3, 3)	(3, 4, 3, 4)	(3, 3, 3, 0)	(1, 1, 1, 1)	(4, 4, 4, 8)	(3, 4, 3, 4)	(4, 8, 4, 4)	(4, 3, 4, 3)
	A	(0, 3, 3, 3)	(3, 4, 4, 3)	(8, 4, 4, 4)	(3, 3, 4, 4)	(4, 4, 8, 4)	(4, 4, 3, 3)	(8, 4, 4, 4)	(4, 3, 3, 4)	(0, 3, 3, 3)
A	C	(1, 1, 1, 1)	(3, 3, 3, 0)	(6, 6, 6, 6)	(3, 0, 3, 3)	(4, 3, 4, 3)	(4, 8, 4, 4)	(6, 6, 6, 6)	(4, 4, 4, 8)	(1, 1, 1, 1)
	E	(3, 3, 0, 3)	(4, 4, 3, 3)	(4, 4, 8, 4)	(4, 3, 3, 4)	(8, 4, 4, 4)	(3, 4, 4, 3)	(4, 4, 8, 4)	(3, 3, 4, 4)	(3, 3, 0, 3)
	A	(6, 6, 6, 6)	(4, 4, 4, 8)	(1, 1, 1, 1)	(4, 8, 4, 4)	(3, 4, 3, 4)	(3, 0, 3, 3)	(1, 1, 1, 1)	(3, 3, 3, 0)	(6, 6, 6, 6)

**Figure 2:** Tabela de pontuação do modelo quântico do problema *diner's dilemma* para quatro jogadores.

estratégia, então a melhor estratégia para os restantes dois jogadores será  $C$  e  $C$  ou então  $A$  e  $A$ . Estes dois casos só podem ser obtidos através de cooperação mútua entre os jogadores. Assim, a estratégia  $E \otimes E \otimes E \otimes E$  deixa de ser um *Nash equilibrium point*. Um novo *Nash equilibrium point*,  $A \otimes A \otimes A \otimes A$ , é obtido que dá uma pontuação de 6 pontos a todos os jogadores.

$$P_{fi}(A \otimes A \otimes A \otimes A) = 6$$

onde  $i$  é A, B, C ou D.

$$\begin{aligned} P_{f_A}(X \otimes A \otimes A \otimes A) &\leq P_{f_A}(A \otimes A \otimes A \otimes A) \\ P_{f_B}(A \otimes X \otimes A \otimes A) &\leq P_{f_B}(A \otimes A \otimes A \otimes A) \\ P_{f_C}(A \otimes A \otimes X \otimes A) &\leq P_{f_C}(A \otimes A \otimes A \otimes A) \\ P_{f_D}(A \otimes A \otimes X \otimes X) &\leq P_{f_D}(A \otimes A \otimes A \otimes A) \end{aligned}$$

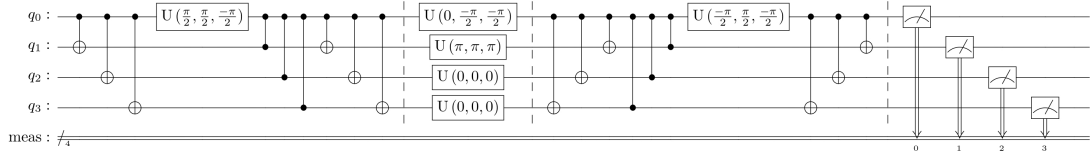
onde  $X$  pode ser  $E$ ,  $C$  ou  $A$ .

Podemos observar que nenhum jogador consegue sair do estado  $A \otimes A \otimes A \otimes A$  e aumentar a sua pontuação sem diminuir a pontuação de outro jogador, o que tomar essa estratégia pouco provável do ponto de vista do adversário. Assim  $A \otimes A \otimes A \otimes A$  é a melhor estratégia para ser utilizada, que é também um dos oito *Pareto optimal points*. Assim, podemos concluir que utilizando estratégias quânticas, o dilema é removido entre os jogadores.

### 2.3. Implementação em Qiskit

A implementação do modelo quântico num circuito quântico é dado pelo seguinte circuito:

Para criar o entrelaçamento utilizamos uma série de gates CNOT, seguido de uma gate U com parâmetros  $(\theta, \phi, \lambda) = (\pi/2, \pi/2, -\pi/2)$ , seguida de uma série de gates CZ e para terminar uma série de gates CNOT, com isto aplicamos o operador  $J$ . Para aplicar as diferentes estratégias quânticas utilizamos um gate U com diferentes parâmetros. Para a estratégia C temos  $U(0,0,0)$ , para a estratégia E temos  $U(\pi,\pi,\pi)$  e para a estratégia A temos  $U(0,-\pi/2,-\pi/2)$ . De seguida utilizamos a operação  $J^\dagger$  para quebrar o entrelaçamento e finalmente medimos nas bases de Z.



**Figure 3:** Circuito usado para implementar o *diner's dilemma* num simulador em qiskit.

Denotar que na figura 3, o  $qubit_0$  pertence à Alice, o  $qubit_1$  pertence ao Bob, o  $qubit_2$  pertence ao Colin e o  $qubit_3$  pertence ao Doug.

### 3. Resultados

De seguida apresentamos os resultados obtidos num simulador quântico em qiskit para 3 das 81 estratégias possíveis de serem aplicadas, na forma de histograma, sendo que todas as simulações podem ser consultadas no ficheiro **circuitpaper.ipynb**, que se encontra em anexo com o relatório. O primeiro é  $C \otimes E \otimes C \otimes E$  (figura 4), o segundo é  $C \otimes C \otimes E \otimes A$  (figura 5) e o terceiro é  $A \otimes A \otimes A \otimes A$  (figura 6). O resultado da simulação e correspondente pontuação das 81 possíveis estratégias pode ser consultado na figura 7, figura 8 ou figura 9.

### 4. Discussão e Conclusão

Conseguimos demonstrar com sucesso que a versão quantizada do problema do *Diner's Dilemma game* consegue remover o dilema ao jogo. Foi observado que se o jogador utiliza método quânticos para participar no *Diner's Dilemma game*, o mesmo consegue escapar ao dilema de escolher a estratégia a adotar ao escolher a comida. Aplicando uma estratégia quântica faz com que os jogadores atinjam o *Pareto optimal point* assim como o *Nash equilibrium point*. O entrelaçamento dos qubits desempenha um papel crucial na pontuação dos jogadores. A função que atribuí a pontuação está deveras relacionada com o entrelaçamento, sendo que caso o entrelaçamento seja inexistente, o jogo reduz-se a um cenário clássico.

Apresentamos um circuito quântico no qual utilizamos operadores unitários de modo a poder simular o jogo em questão. Foram feitas provas matemáticas que se encontram no ficheiro **verifycircuit.ipynb** em anexo, na qual comprovamos o funcionamento do operador J como um operador capaz de criar um entrelaçamento entre os *qubits* e do operador U como um operador capaz de implementar as diferentes estratégias possíveis de adotar no jogo. Também foram realizadas e verificadas todas as simulações das diferentes estratégias no circuito quântico que modela o jogo *Diner's Dilemma*, os resultados das simulações encontram-se no ficheiro em anexo **circuitpaper.ipynb**.

A nível das dificuldades sentidas no desenvolvimento do projeto, as mesmas foram sentidas na compreensão do *Nash equilibrium point*, do *Pareto optimal point*, na organização e compreensão dos resultados obtidos nas diferentes simulações realizadas, dado que o jogo tinha 4 jogadores ao

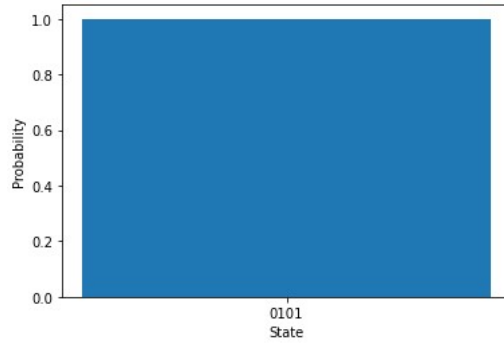
compor as tabelas de pontuação por vezes tornava-se complicado manter a linha de pensamento com uma tabela de 4 dimensões.

De uma forma geral foi uma experiência bastante enriquecedora e que nos permitiu aprofundar o conhecimento adquiridos na UC de Computação Quântica. Algumas das melhorias futuras passaria pela implementação do modelo quântico do jogo de formar interativa e claro, o que tornaria a compreensão de terceira mais imediata.

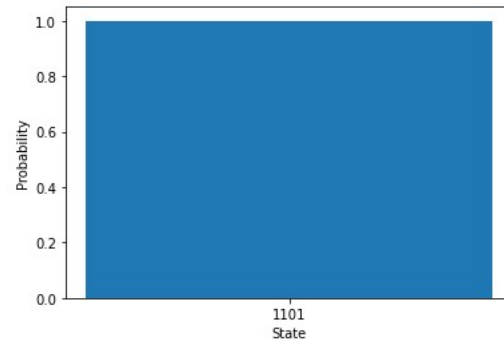
## References

- [1] A. Anand, B. K. Behera, P. K. Panigrahi, Solving diner's dilemma game, circuit implementation and verification on the IBM quantum simulator, Quantum Information Processing 19 (2020). URL: <https://doi.org/10.1007/s11128-020-02687-5>. doi:10.1007/s11128-020-02687-5.
- [2] V. Kolokoltsov, Quantum games: a survey for mathematicians, 2019. URL: <https://arxiv.org/abs/1909.04466>. doi:10.48550/ARXIV.1909.04466.
- [3] J. Eisert, M. Wilkens, M. Lewenstein, Quantum games and quantum strategies, Physical Review Letters 83 (1999) 3077–3080. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.83.3077>. doi:10.1103/PhysRevLett.83.3077.
- [4] P. Sousa, R. Ramos, J. filho, New models of quantum games (2006). URL: [https://www.researchgate.net/publication/2199165\\_New\\_models\\_of\\_quantum\\_games](https://www.researchgate.net/publication/2199165_New_models_of_quantum_games).
- [5] P. Frackiewicz, Application of the EWL protocol to decision problems with imperfect recall, CoRR abs/1012.0806 (2010). URL: <http://arxiv.org/abs/1012.0806>. arXiv:1012.0806.

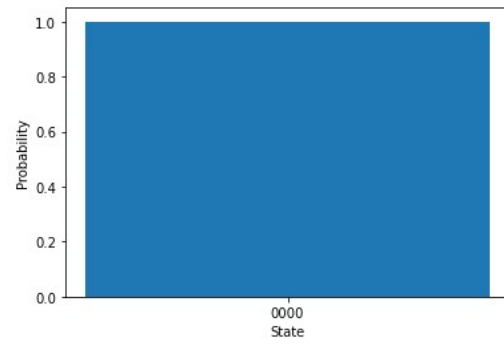
## Anexos



**Figure 4:** Resultado da simulação para a estratégia  $C \otimes E \otimes C \otimes E$ .



**Figure 5:** Resultado da simulação para a estratégia  $C \otimes C \otimes E \otimes A$ .



**Figure 6:** Resultado da simulação para a estratégia  $A \otimes A \otimes A \otimes A$ .



	End State	Payoff Alice	Payoff Bob	Payoff Colin	Payoff Doug
C⊗C⊗C⊗C	0000>	6	6	6	6
C⊗C⊗C⊗E	1000>	8	4	4	4
C⊗C⊗C⊗A	1111>	1	1	1	1
C⊗C⊗E⊗C	0100>	4	8	4	4
C⊗C⊗E⊗E	1100>	4	4	3	3
C⊗C⊗E⊗A	1011>	3	0	3	3
C⊗C⊗A⊗C	1111>	1	1	1	1
C⊗C⊗A⊗E	0111>	0	3	3	3
C⊗C⊗A⊗A	0000>	6	6	6	6
C⊗E⊗C⊗C	0010>	4	4	8	4
C⊗E⊗C⊗E	1010>	4	3	4	3
C⊗E⊗C⊗A	1101>	3	3	0	3
C⊗E⊗E⊗C	0110>	3	4	4	3
C⊗E⊗E⊗E	1110>	3	3	3	0
C⊗E⊗E⊗A	1001>	4	3	3	4
C⊗E⊗A⊗C	1101>	3	3	0	3
C⊗E⊗A⊗E	0101>	3	4	3	4
C⊗E⊗A⊗A	0010>	4	4	8	4
C⊗A⊗C⊗C	1111>	1	1	1	1
C⊗A⊗C⊗E	0111>	0	3	3	3
C⊗A⊗C⊗A	0000>	6	6	6	6
C⊗A⊗E⊗C	1011>	3	0	3	3
C⊗A⊗E⊗E	0011>	3	3	4	4
C⊗A⊗E⊗A	0100>	4	8	4	4
C⊗A⊗A⊗C	0000>	6	6	6	6
C⊗A⊗A⊗E	1000>	8	4	4	4
C⊗A⊗A⊗A	1111>	1	1	1	1

Figure 7: Tabela 1 de pontuação com estado.

	End State	Payoff Alice	Payoff Bob	Payoff Colin	Payoff Doug
$E \otimes C \otimes C \otimes C$	$ 0001\rangle$	4	4	4	8
$E \otimes C \otimes C \otimes E$	$ 1001\rangle$	4	3	3	4
$E \otimes C \otimes C \otimes A$	$ 1110\rangle$	3	3	3	0
$E \otimes C \otimes E \otimes C$	$ 0101\rangle$	3	4	3	4
$E \otimes C \otimes E \otimes E$	$ 1101\rangle$	3	3	0	3
$E \otimes C \otimes E \otimes A$	$ 1010\rangle$	4	3	4	3
$E \otimes C \otimes A \otimes C$	$ 1110\rangle$	3	3	3	0
$E \otimes C \otimes A \otimes E$	$ 0110\rangle$	3	4	4	3
$E \otimes C \otimes A \otimes A$	$ 0001\rangle$	4	4	4	8
$E \otimes E \otimes C \otimes C$	$ 0011\rangle$	3	3	4	4
$E \otimes E \otimes C \otimes E$	$ 1011\rangle$	3	0	3	3
$E \otimes E \otimes C \otimes A$	$ 1100\rangle$	4	4	3	3
$E \otimes E \otimes E \otimes C$	$ 0111\rangle$	0	3	3	3
$E \otimes E \otimes E \otimes E$	$ 1111\rangle$	1	1	1	1
$E \otimes E \otimes E \otimes A$	$ 1000\rangle$	8	4	4	4
$E \otimes E \otimes A \otimes C$	$ 1100\rangle$	4	4	3	3
$E \otimes E \otimes A \otimes E$	$ 0100\rangle$	4	8	4	4
$E \otimes E \otimes A \otimes A$	$ 0011\rangle$	3	3	4	4
$E \otimes A \otimes C \otimes C$	$ 1110\rangle$	3	3	3	0
$E \otimes A \otimes C \otimes E$	$ 0110\rangle$	3	4	4	3
$E \otimes A \otimes C \otimes A$	$ 0001\rangle$	4	4	4	8
$E \otimes A \otimes E \otimes C$	$ 1010\rangle$	4	3	4	3
$E \otimes A \otimes E \otimes E$	$ 0010\rangle$	4	4	8	4
$E \otimes A \otimes E \otimes A$	$ 0101\rangle$	3	4	3	4
$E \otimes A \otimes A \otimes C$	$ 0001\rangle$	4	4	4	8
$E \otimes A \otimes A \otimes E$	$ 1001\rangle$	4	3	3	4
$E \otimes A \otimes A \otimes A$	$ 1110\rangle$	3	3	3	0

Figure 8: Tabela 2 de pontuação com estado.

	End State	Payoff Alice	Payoff Bob	Payoff Colin	Payoff Doug
A⊗C⊗C⊗C	1111>	1	1	1	1
A⊗C⊗C⊗E	0111>	0	3	3	3
A⊗C⊗C⊗A	0000>	6	6	6	6
A⊗C⊗E⊗C	1011>	3	0	3	3
A⊗C⊗E⊗E	0011>	3	3	4	4
A⊗C⊗E⊗A	0100>	4	8	4	4
A⊗C⊗A⊗C	0000>	6	6	6	6
A⊗C⊗A⊗E	1000>	8	4	4	4
A⊗C⊗A⊗A	1111>	1	1	1	1
A⊗E⊗C⊗C	1101>	3	3	0	3
A⊗E⊗C⊗E	0101>	3	4	3	4
A⊗E⊗C⊗A	0010>	4	4	8	4
A⊗E⊗E⊗C	1001>	4	3	3	4
A⊗E⊗E⊗E	0001>	4	4	4	8
A⊗E⊗E⊗A	0110>	3	4	4	3
A⊗E⊗A⊗C	0010>	4	4	8	4
A⊗E⊗A⊗E	1010>	4	3	4	3
A⊗E⊗A⊗A	1101>	3	3	0	3
A⊗A⊗C⊗C	0000>	6	6	6	6
A⊗A⊗C⊗E	1000>	8	4	4	4
A⊗A⊗C⊗A	1111>	1	1	1	1
A⊗A⊗E⊗C	0100>	4	8	4	4
A⊗A⊗E⊗E	1100>	4	4	3	3
A⊗A⊗E⊗A	1011>	3	0	3	3
A⊗A⊗A⊗C	1111>	1	1	1	1
A⊗A⊗A⊗E	0111>	0	3	3	3
A⊗A⊗A⊗A	0000>	6	6	6	6

Figure 9: Tabela 3 de pontuação com estado.