UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO (UFERSA)
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS (CMPF)
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS E TECNOLOGIA (DETEC)

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Aula 05
Transformada Z

Prof.: Pedro Thiago Valério de Souza
UFERSA – Campus Pau dos Ferros
pedro.souza@ufersa.edu.br

Transformada Z

- Equivalente à transformada de Laplace, porém para tempo discreto;
- Utilizada para a análise de sistemas (causalidade, estabilidade e solução de equação de diferenças);
- Definição: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$, em que z é uma variável complexa, $z = re^{j\omega}$

$$x[n] \overset{TZ}{\rightleftarrows} X(z)$$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z)$$

- Relação entre a transformada Z e a transformada de Fourier:

$$X(z) = X\left(re^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\}$$

A Transformada Z é a DTFT da sequência $x[n]r^{-n}$.

Transformada Z

- Quando $r = 1$ ($|z| = 1$), a transformada Z é igual a DTFT.

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\big|_{|z|=1} = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

- Região de Convergência (RoC): Conjunto de valores de z para qual a transformada converge.

$$X(z) = \mathcal{F}\left\{x[n]r^{-n}\right\}$$

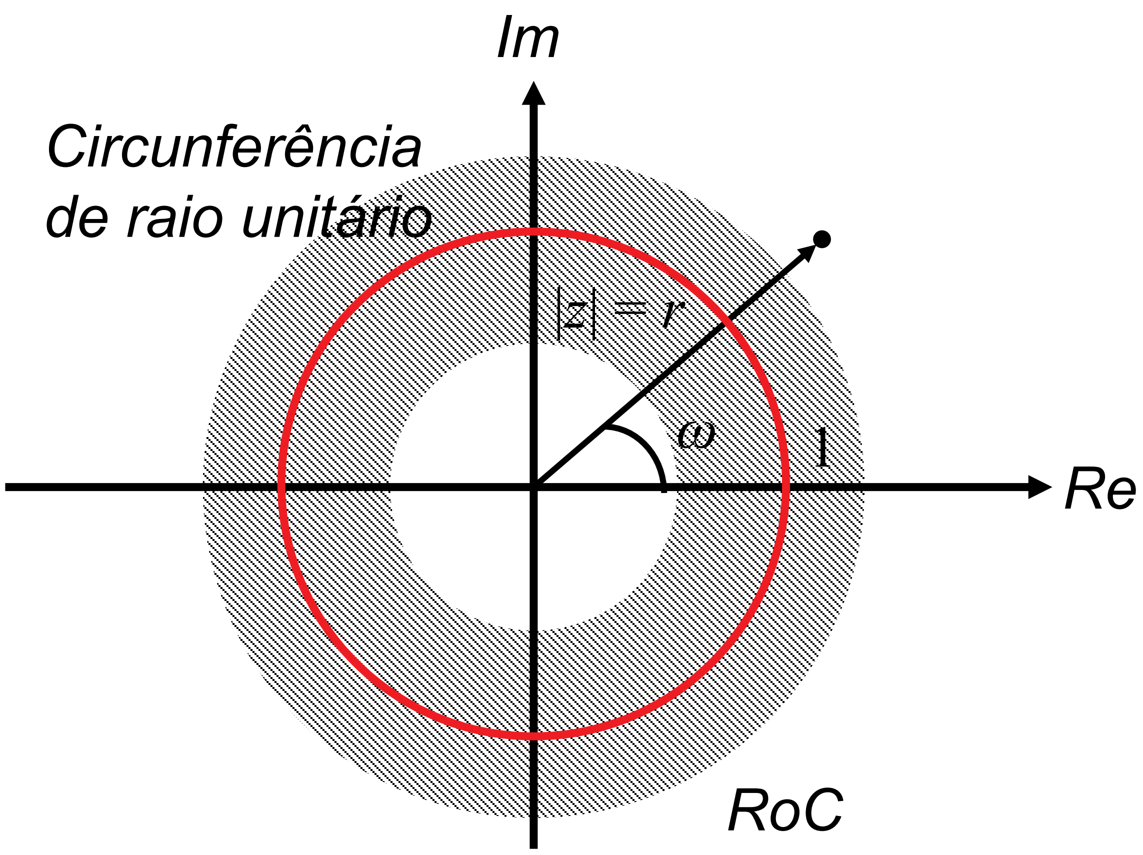
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]r^{-n}\right| < \infty$$

O conjunto de valores de r que faz com que o somatório convirja define a RoC.

Como $r = |z|$, então a RoC geralmente é expressa em termos de $|z|$.

Transformada Z

- Interpretação Geométrica da RoC:
  - A RoC formará um anel no plano complexo Z, sempre centrado na origem;
  - Se a RoC incluir o círculo de raio unitário ($r = 1$, $|z| = 1$), então a DTFT também converge.



Transformada Z

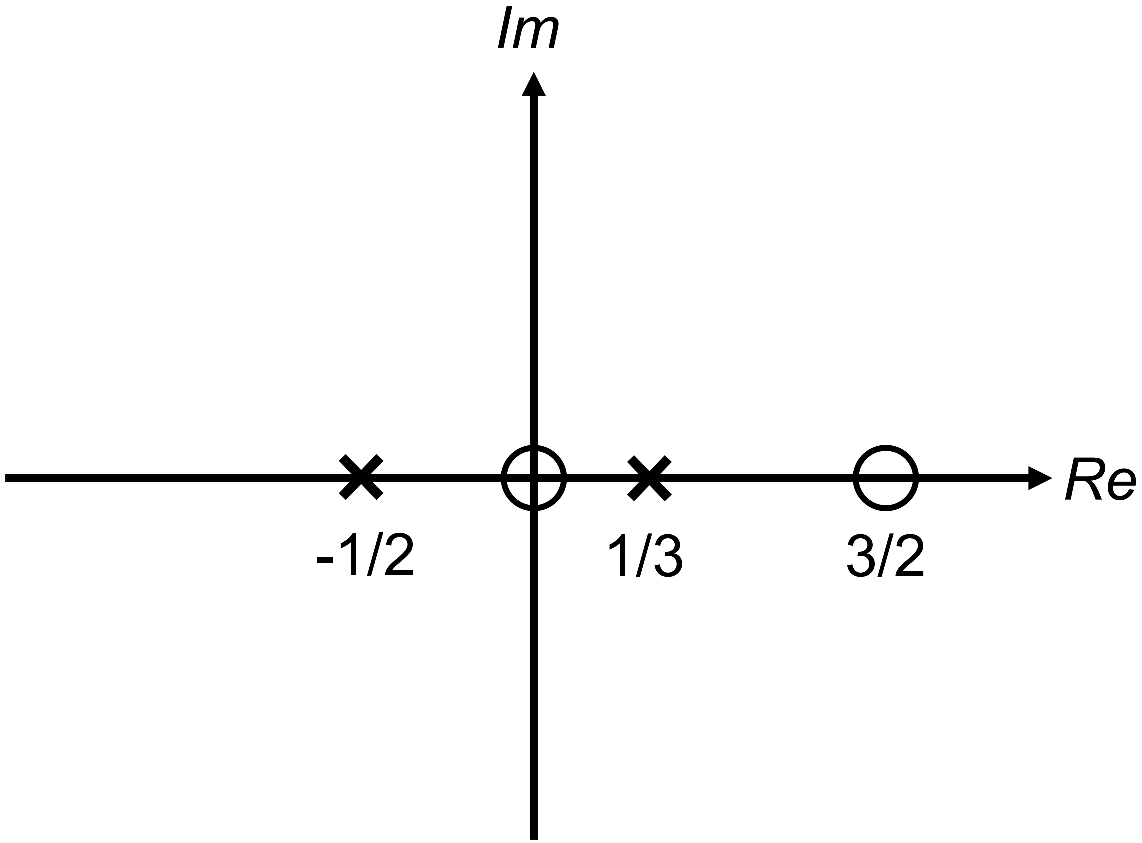
- Transformadas Z racionais:

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

- Polos e Zeros:
    - Zeros: valores que fazem $X(z) = 0$ (raizes de $P(z)$);
    - Polos: valores que fazem $X(z) \to \infty$ (raizes de $Q(z)$, **desde que não haja cancelamento de polos com zeros**);
- Diagrama de polos e zeros:
    - Polo - símbolo ×;
    - Zeros - símbolo o;

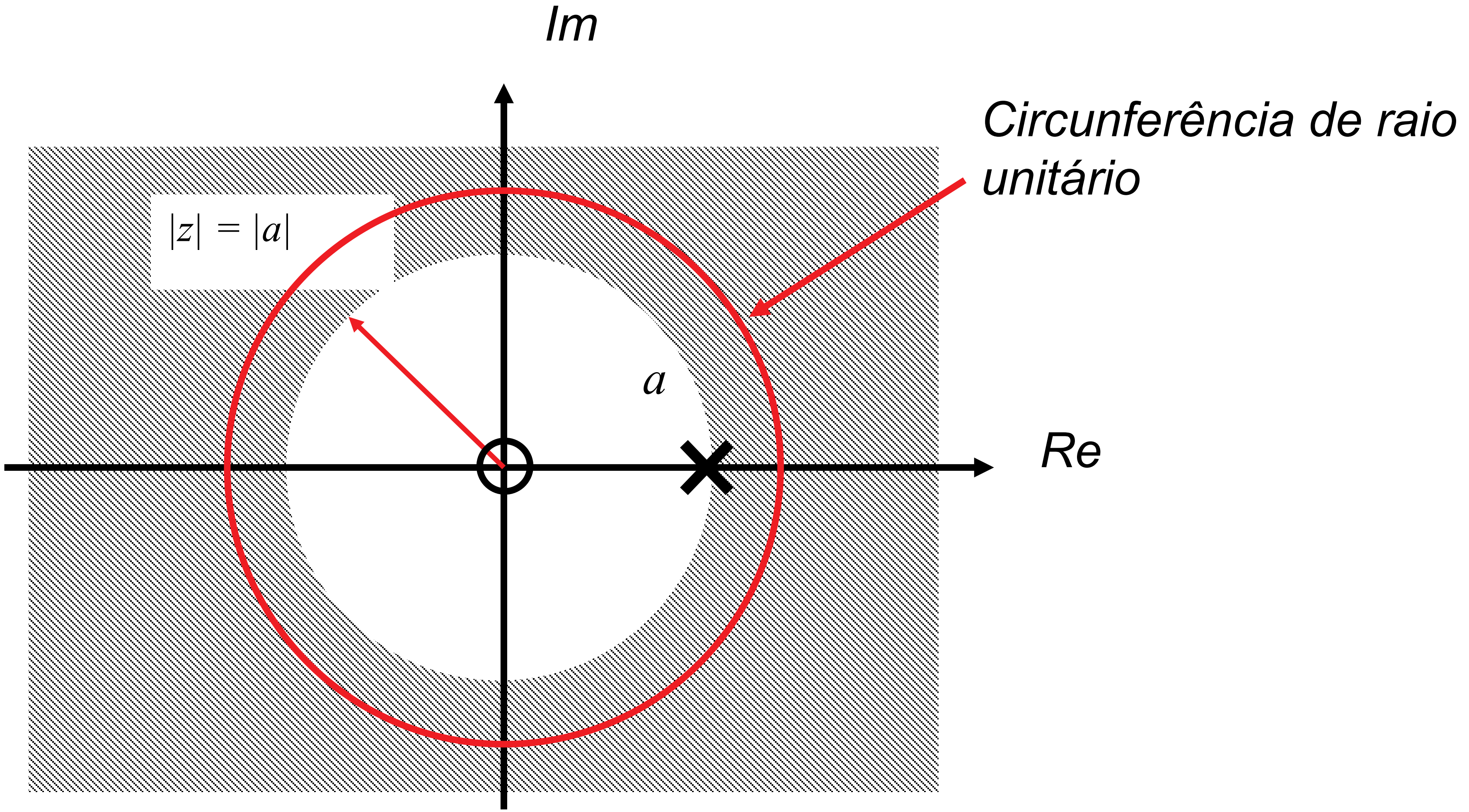
Exemplo:

- Zeros: 0, 3/2;
- Polos: 1/3 e -1/2.



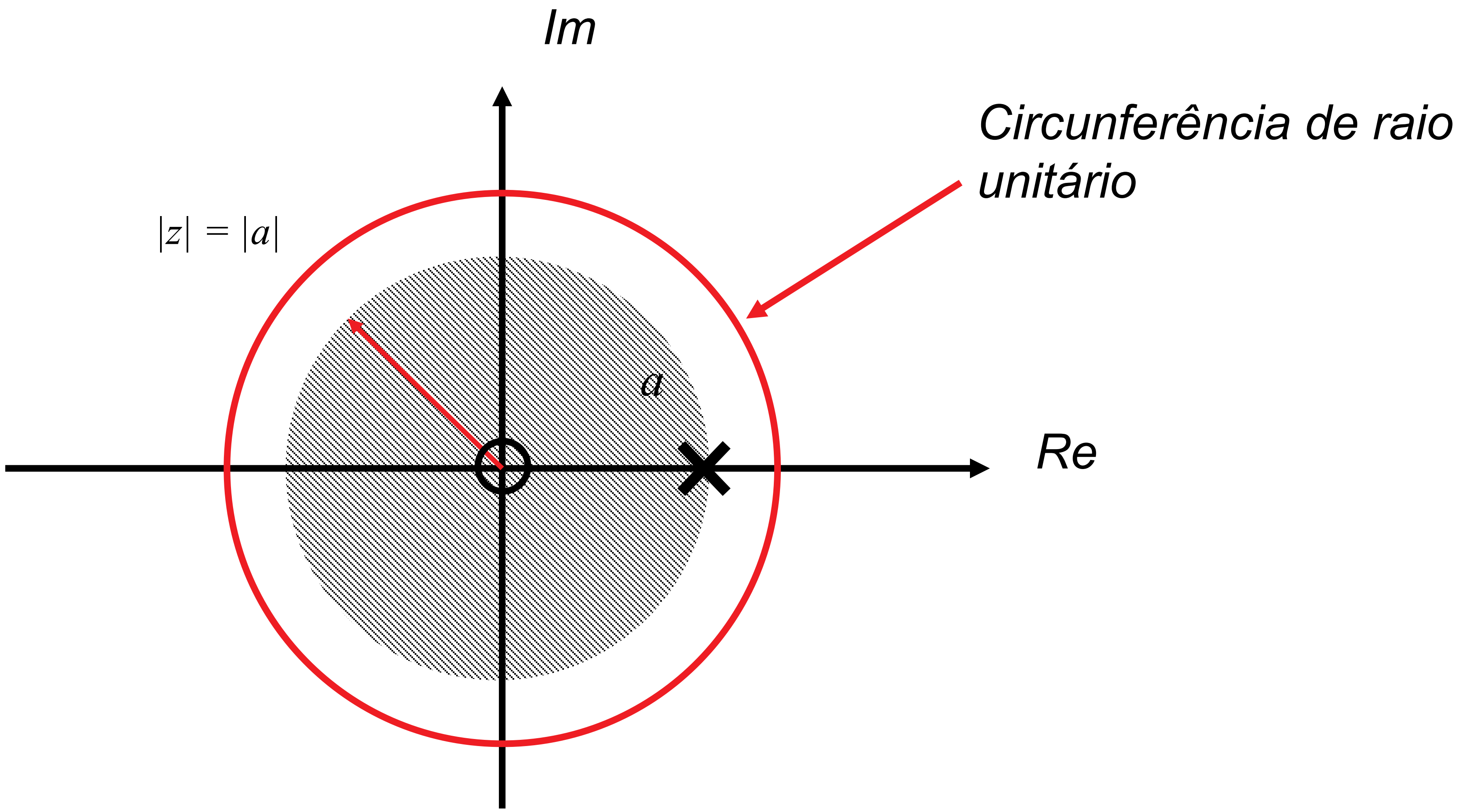
Transformada Z

Exemplo 1: Determine a transformada Z de $x[n] = a^n u[n]$



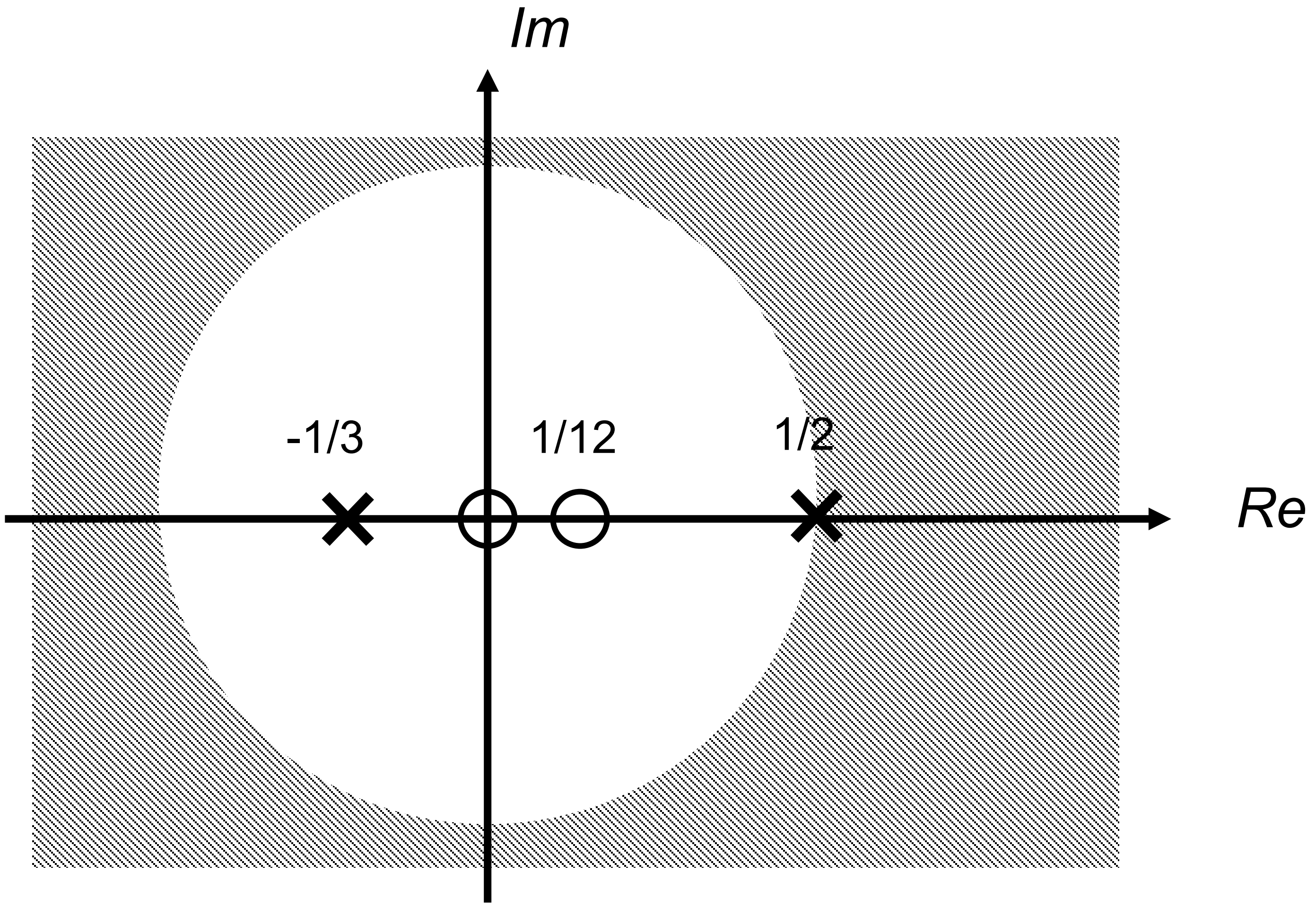
Transformada Z

Exemplo 2: Determine a transformada Z de $x[n] = -a^n u[-n-1] = \begin{cases} -a^n & n \leq -1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$



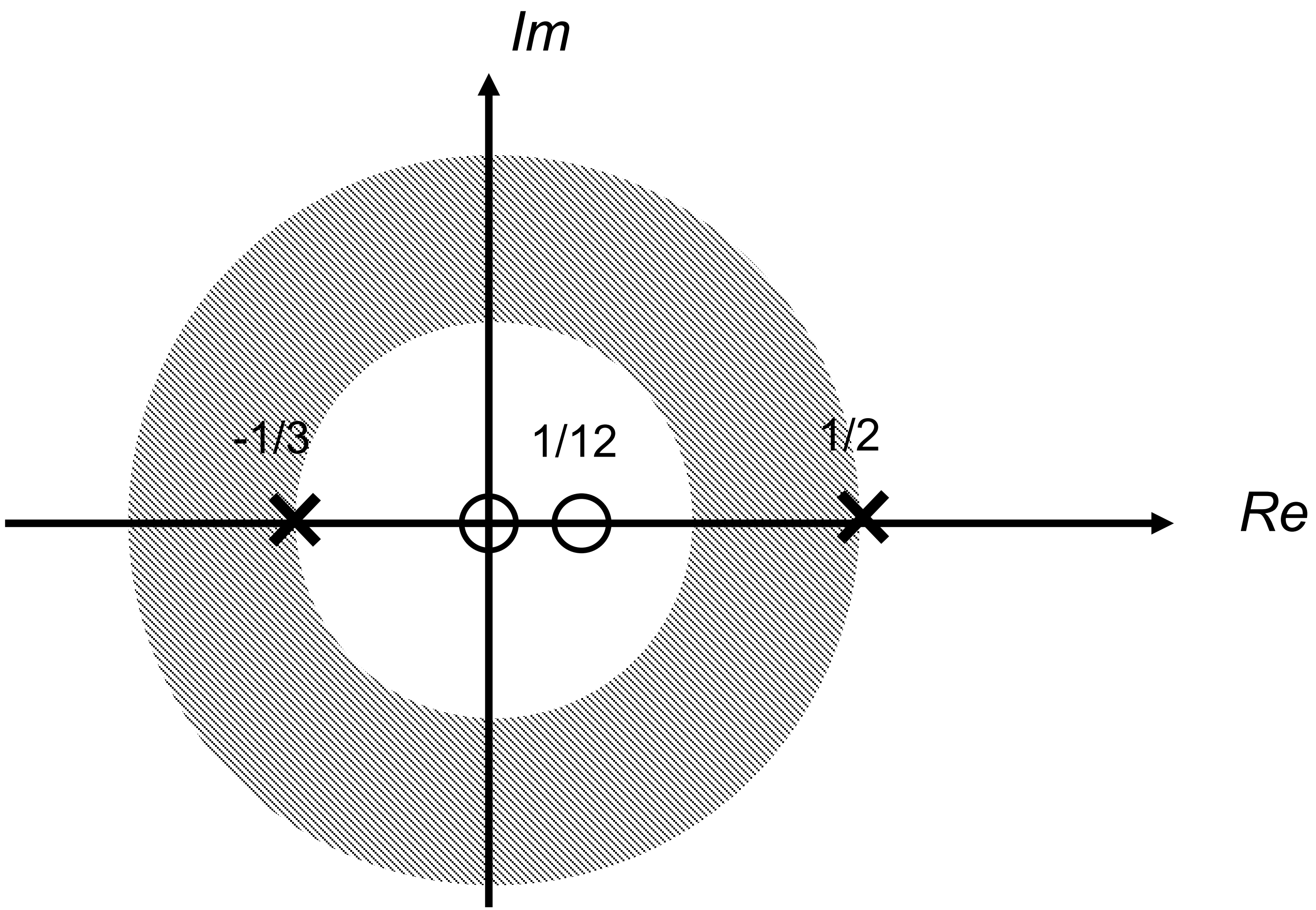
Transformada Z

Exemplo 3: Determine a transformada Z de $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$



Transformada Z

Exemplo 4: Determine a transformada Z de $x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

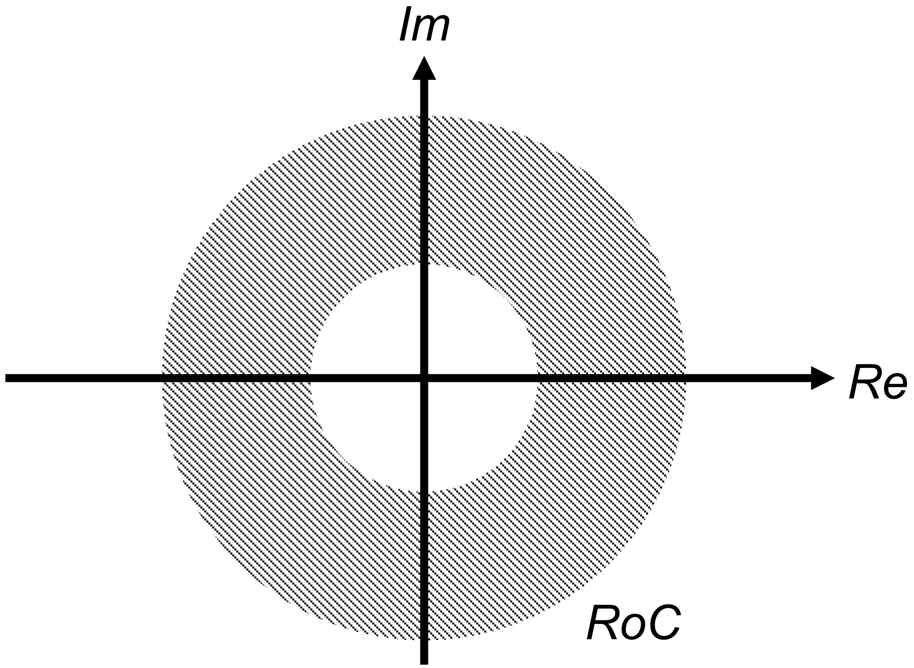


Propriedades da RoC

Propriedade 1: A RoC não contém polos.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \qquad \text{Polos: } D(z) = 0 \Rightarrow X(z) \to \infty$$

Propriedade 2: A RoC consiste em anéis concêntricos na origem do plano Z.



Propriedades da RoC

Propriedade 3: A transformada de Fourier de $x[n]$ converge somente se a RoC da transformada Z incluir o círculo de raio unitário.

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X\left(z\right)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Propriedade 4 - A RoC de uma transformada Z racional é delimitada por polos e conforme a propriedade 1, não pode conter polos.

Propriedades da RoC

Propriedade 5: Se $x[n]$ tiver duração finita, então a RoC será o plano z inteiro, exceto possivelmente $z = 0$ e/ou $z = \infty$.

Para uma sequência de duração finita: $X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$

$N_1 < 0$ e $N_2 > 0$: $X(z) = \sum_{n=-2}^{3} x[n] z^{-n}$

$$= x[-2]z^{2} + x[-1]z + \cdots + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3}$$

A RoC não contém $z = 0$ e $z = \infty$.

$N_1 \geq 0$ e $N_2 > 0$: $X(z) = \sum_{n=0}^{3} x[n] z^{-n}$

$$= x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3}$$

A RoC não contém $z = 0$.

Propriedades da RoC

Propriedade 5 (cont'd): Se $x[n]$ tiver duração finita, então a RoC será o plano z inteiro, exceto possivelmente $z = 0$ e/ou $z = \infty$.

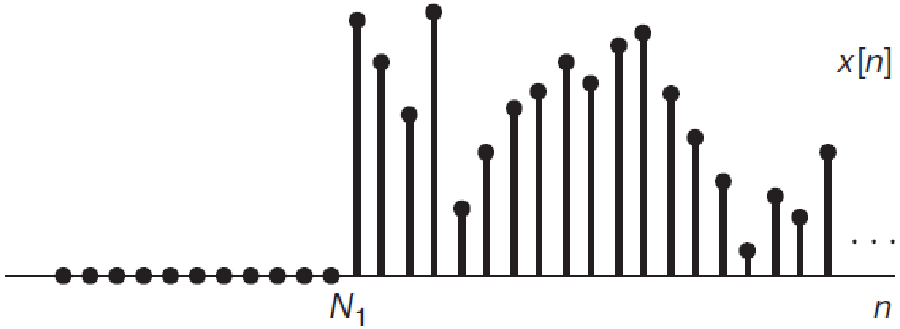
$N_1 < 0$ e $N_2 \leq 0$: $X(z) = \sum_{n=-3}^{-1} x[n] z^{-n} = x[-3] z^3 + x[-2] z^2 + x[-1] z$

A RoC não contém $z = \infty$.

Propriedades da RoC

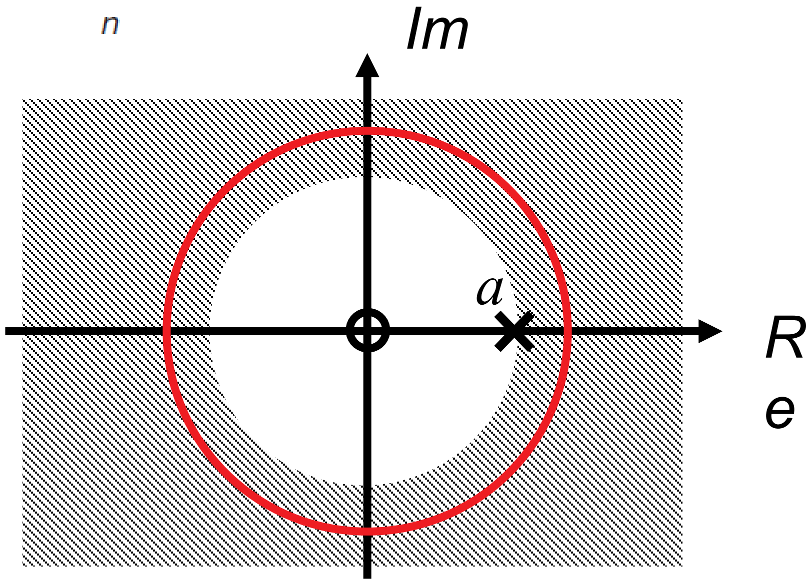
Propriedade 6: Se $x[n]$ for uma sequência lateral direita, então a RoC se estende do polo finito mais externo até (possivelmente incluindo) $z=\infty$.

Se a sequência for causal, a RoC inclui $z=\infty$.



(sinal lateral direito)

$$a^n u[n] \overset{TZ}{\rightleftarrows} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

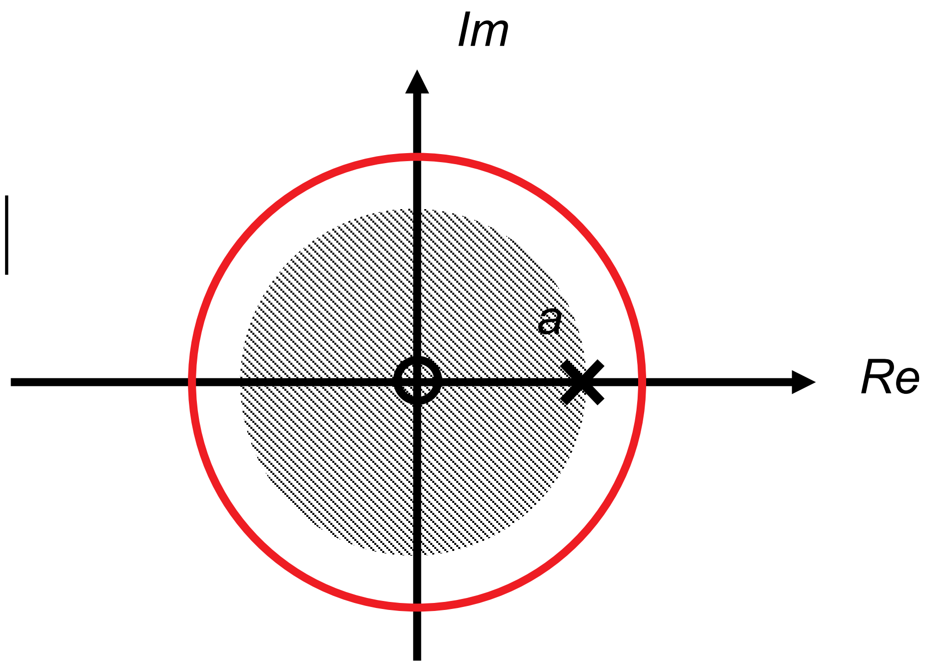


Propriedades da RoC

Propriedade 7: Se $x[n]$ for uma sequência lateral esquerda, então a RoC se estende do polo não-nulo mais interno até (possivelmente incluindo) $z=0$.

Se a sequência for anti-causal, a RoC inclui $z=0$.

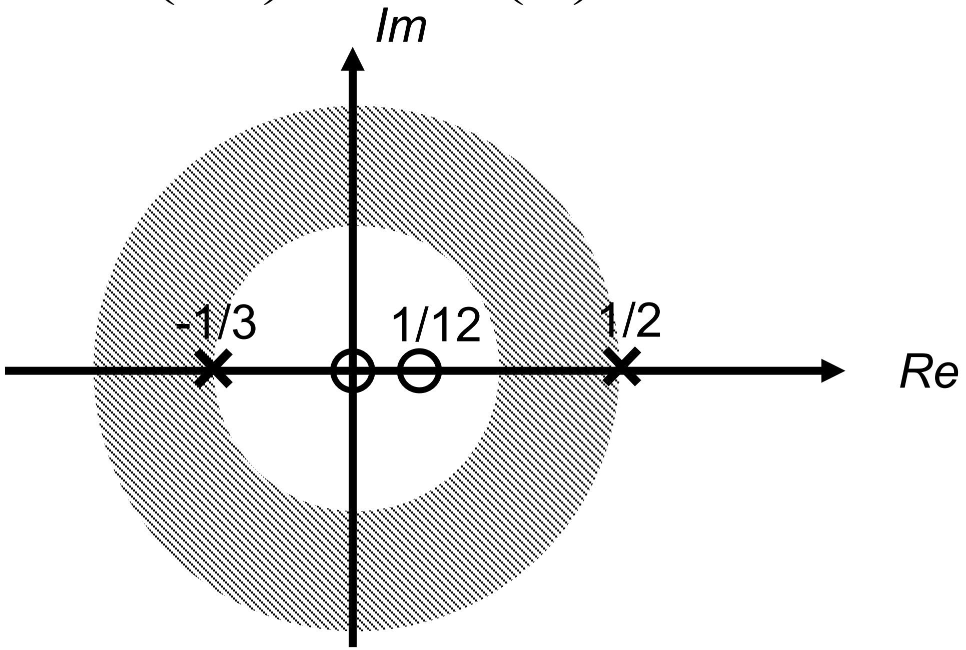
$$-a^n u[-n-1] \overset{TZ}{\rightleftarrows} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|<|a|$$



Propriedades da RoC

Propriedade 8: Se $x[n]$ for uma sequência bilateral, então a RoC possui formato anelar, limitada a dois polos, e conforme a propriedade 1, não pode conter polos.

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$



Propriedade 9: A RoC precisar ser uma região conectada.

Propriedades da RoC

Exemplo 5: Para cada uma das RoC da seguinte transformada Z, diga se a sequência corresponde à um sinal lateral direito, esquerdo ou bilateral:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Transformada Z Inversa

- Determinar $x[n]$ a partir do conhecimento da transformada Z e da região de convergência;
- Métodos:
  - Integral de contorno (definição matemática).
  - Inspeção;
  - Série de potências;
  - Frações parciais;

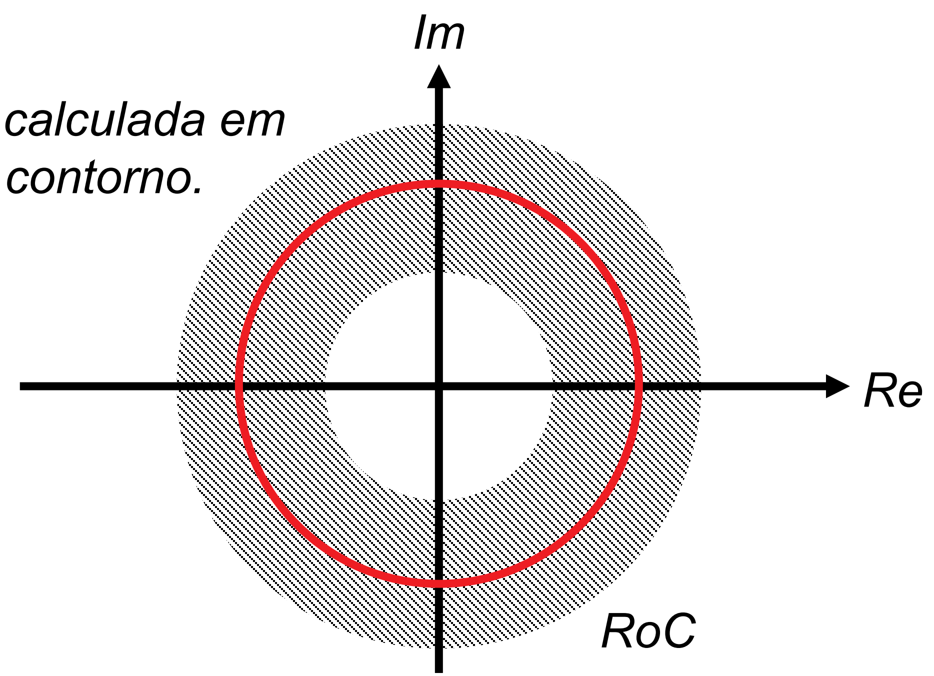
Transformada Z Inversa

Definição matemática:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\,z^{n-1}dz$$

C é um contorno, no sentido anti-horário, e que esteja na RoC.

A integral é calculada em cima desse contorno.



Transformada Z Inversa

Inspeção:

$$a^n u[n] \xrightleftharpoons{TZ} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|>|a|$$

$$-a^n u[-n-1] \xrightleftharpoons{TZ} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|<|a|$$

$$na^n u[n] \xrightleftharpoons{TZ} \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} \quad |z|>|a|$$

$$-na^n u[-n-1] \xrightleftharpoons{TZ} \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} \quad |z|>|a|$$

$$\delta[n] \xrightleftharpoons{TZ} 1 \quad \text{RoC = Todo plano Z}$$

Transformada Z Inversa

Inspeção:

A transformada Z é linear.

$$\mathcal{Z}\{x_1[n]\} = X_1(z)$$

$$\mathcal{Z}\{x_2[n]\} = X_2(z)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{aX_1(z) + bX_2(z)\} = ax_1[n] + bx_2[n]$$

A RoC de cada termo deve ser escolhida de tal forma a atender a RoC da transformada.

Exemplo 6: Determine a transformada Z inversa de:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z| > \frac{1}{3}$$

Transformada Z Inversa

Série de Potências:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\ldots+x[-2]z^{2}+x[-1]z+x[0]+x[1]z^{-1}+\cdots$$

Pela comparação, pode-se determinar ..., x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], ...

Exemplo 7: Determine a transformada Z inversa de:

$$X(z)=z^{2}-\frac{1}{2}z-1+\frac{1}{2}z^{-1} \qquad \mathrm{RoC}=\mathbb{C}\text{ - }\{z=0,z=\infty\}$$

Transformada Z Inversa

Exemplo 8: Determine a transformada Z inversa de:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

Exemplo 9: Determine a transformada Z inversa de:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| < |a|$$

Transformada Z Inversa

Expansão em Frações Parciais:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$= \frac{\left(1 - c_1 z^{-1}\right)\left(1 - c_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1 - c_M z^{-1}\right)}{\left(1 - d_1 z^{-1}\right)\left(1 - d_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1 - d_N z^{-1}\right)}$$

em que: $\{c_k\}$ são os zeros de $X(z)$

$\{d_k\}$ são os polos de $X(z)$

Transformada Z Inversa

Expansão em Frações Parciais:

Caso I – Fração própria, raízes de $D(z)$ diferentes entre si.

$$X(z)=\frac{N(z)}{\left(1-d_1z^{-1}\right)\left(1-d_2z^{-1}\right)\cdots\left(1-d_nz^{-1}\right)}=\frac{A_1}{1-d_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-d_2z^{-1}}+\cdots+\frac{A_n}{1-d_nz^{-1}}$$

$$A_k=X(z)\left(1-d_kz^{-1}\right)\Big|_{z=d_k}$$

Exemplo 10: Determine a transformada Z inversa de:

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

Transformada Z Inversa

Expansão em Frações Parciais:

Caso II – Fração própria, com uma raiz de *D*(*z*) com multiplicidade *r* e as outras raízes diferentes entre si.

$$X(z)=\frac{N(z)}{\left(1-\lambda z^{-1}\right)^{r}\left(1-d_1 z^{-1}\right)\cdots\left(1-d_{n-r}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{A_1}{1-d_1 z^{-1}}+\cdots+\frac{A_{n-r}}{1-d_{n-r}z^{-1}}+\frac{B_1}{1-\lambda z^{-1}}+\frac{B_2}{\left(1-\lambda z^{-1}\right)^{2}}+\cdots+\frac{B_r}{\left(1-\lambda z^{-1}\right)^{r}}$$

$$A_k=X(z)\left(1-d_k z^{-1}\right)\Big|_{z=d_k}$$

$$B_k=\frac{1}{(r-k)!(-\lambda)^{r-k}}\frac{d^{r-k}}{d\left(z^{-1}\right)^{r-k}}\left[X(z)\left(1-\lambda z^{-1}\right)^{r}\right]\Bigg|_{z=\lambda}$$

Caso III – Fração imprópria: Dividir *N*(z) por *D*(z) até obter um resto com ordem inferior à *D*(z).

Propriedades da Transformada Z

Em todas as propriedades:

$$x[n] \overset{TZ}{\rightleftarrows} X(z) \quad \mathrm{RoC} = R_x$$

$$x_1[n] \overset{TZ}{\rightleftarrows} X_1(z) \quad \mathrm{RoC} = R_{x1}$$

$$x_2[n] \overset{TZ}{\rightleftarrows} X_2(z) \quad \mathrm{RoC} = R_{x2}$$

Propriedade 1 – Linearidade: $ax_1[n] + bx_2[n] \overset{TZ}{\rightleftarrows} aX_1(z) + bX_2(z)$

A RoC contém $R_{x1} \cap R_{x2}$, mas pode ser maior se houver cancelamento de polos e zeros.

1. Não há cancelamento de polos e zeros → A RoC será:

$$\mathrm{RoC} = R_{x1} \cap R_{x2}$$

2. Há cancelamento de polos e zeros → A RoC será maior.

Propriedades da Transformada Z

Propriedade 2 – Deslocamento:

$$x[n-n_0] \xrightleftharpoons{TZ} z^{-n_0}X(z) \quad \mathrm{RoC} = R_x$$

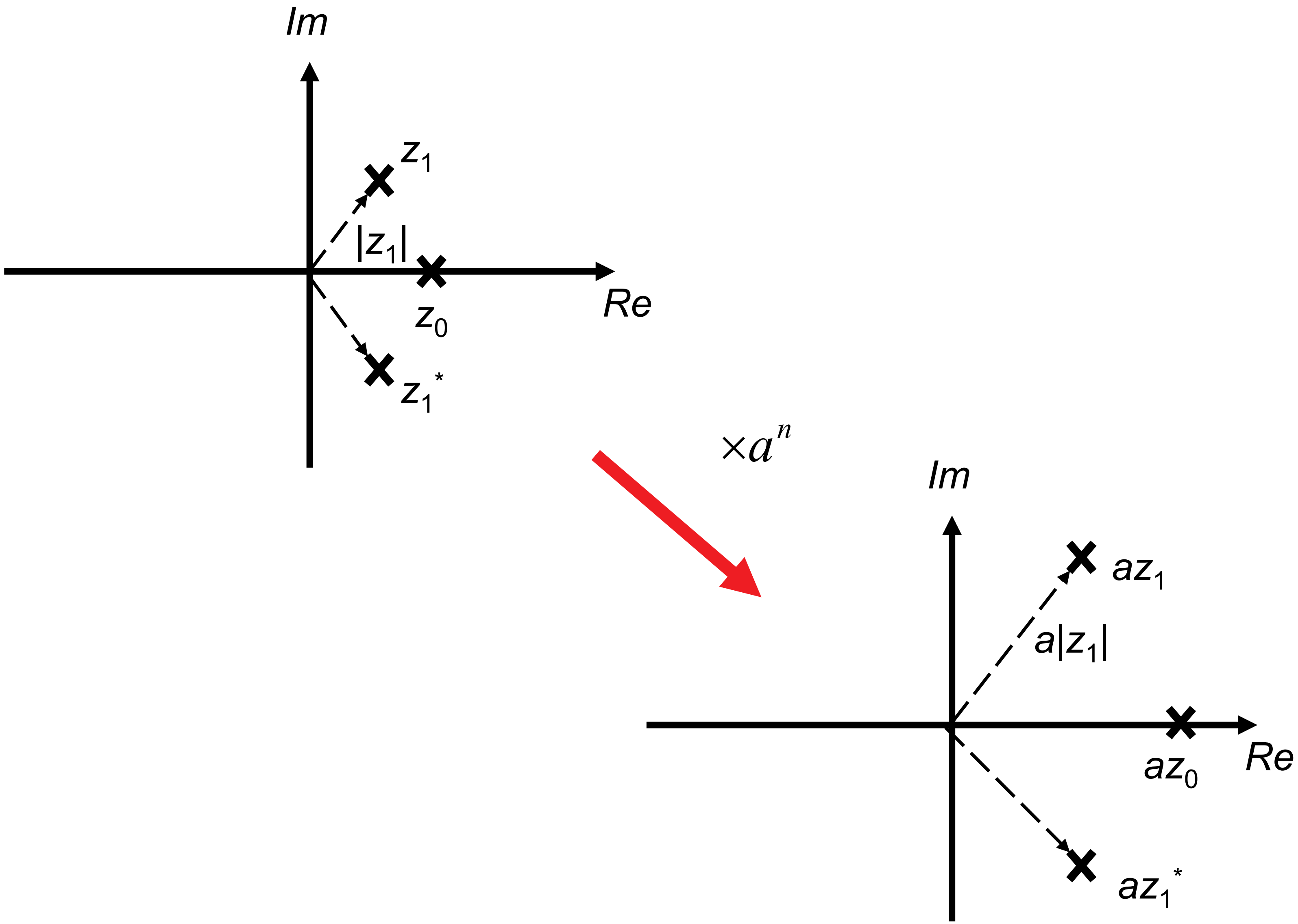
Propriedade 3 – Multiplicação por Exponencial:

$$a^n x[n] \xrightleftharpoons{TZ} X\left(\frac{z}{a}\right) \quad \mathrm{RoC} = |a| R_x$$

Efeito nos polos e nos zeros: Se $X(z)$ tem um polo (ou zero) em $z = z_0$, então $X(z/a)$ tem um polo (ou zero) em $z = az_0$.

Efeito nos polos e zeros devido à multiplicação por exponencial.

Caso I – *a* real



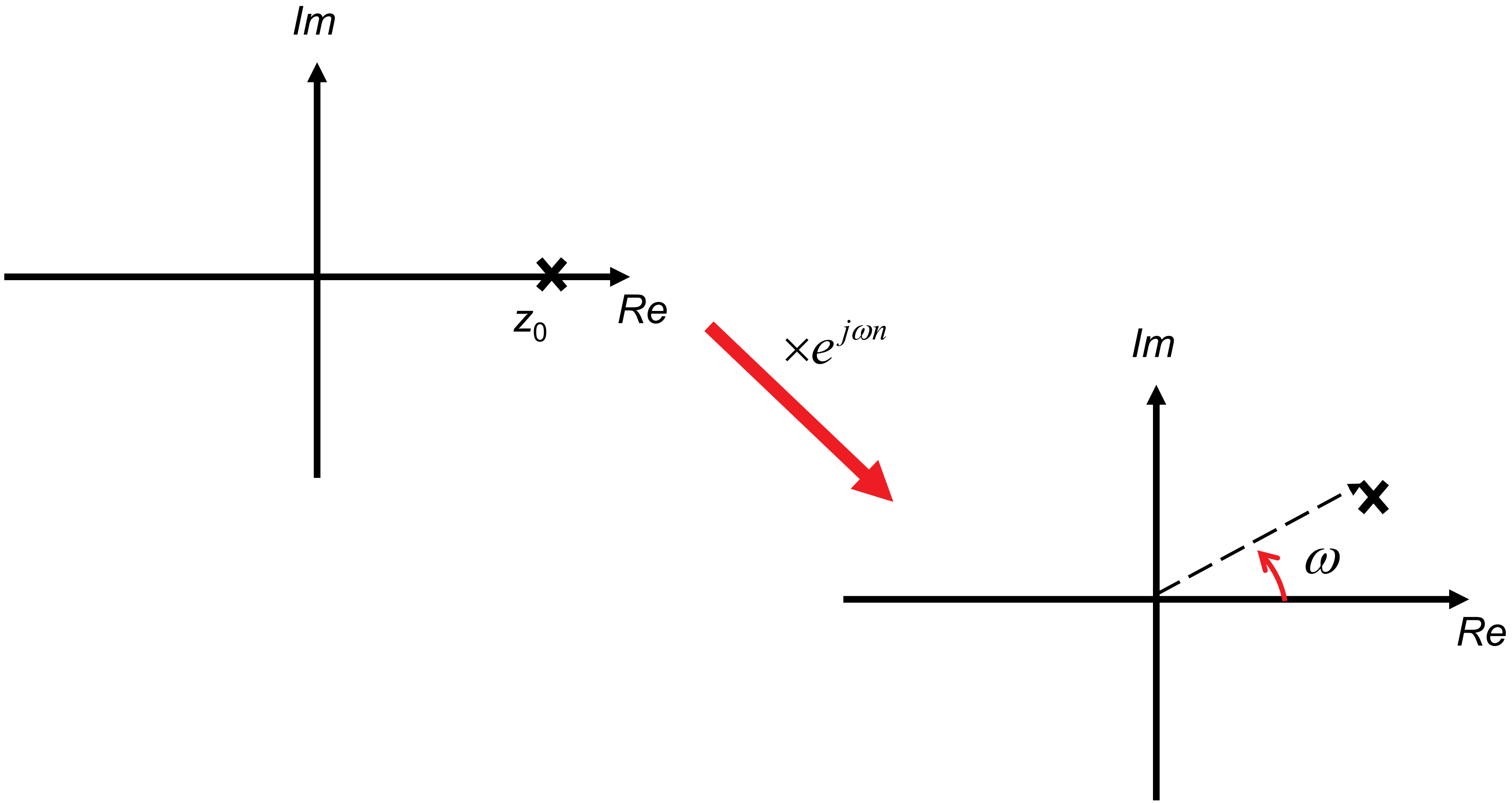
Efeito nos polos e zeros devido à multiplicação por exponencial.

Caso II – *a* complexo

$$a = |a| e^{j\measuredangle a}$$

$$z_0 = |z_0| e^{j\measuredangle z_0}$$

Polo/zero em $az_0 = |a||z_0| e^{j(\measuredangle z_0 + \measuredangle a)}$



Propriedades da Transformada Z

Propriedade 4 – Diferenciação em *z*:

$$nx[n] \overset{TZ}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} \quad \mathrm{RoC} = R_x$$

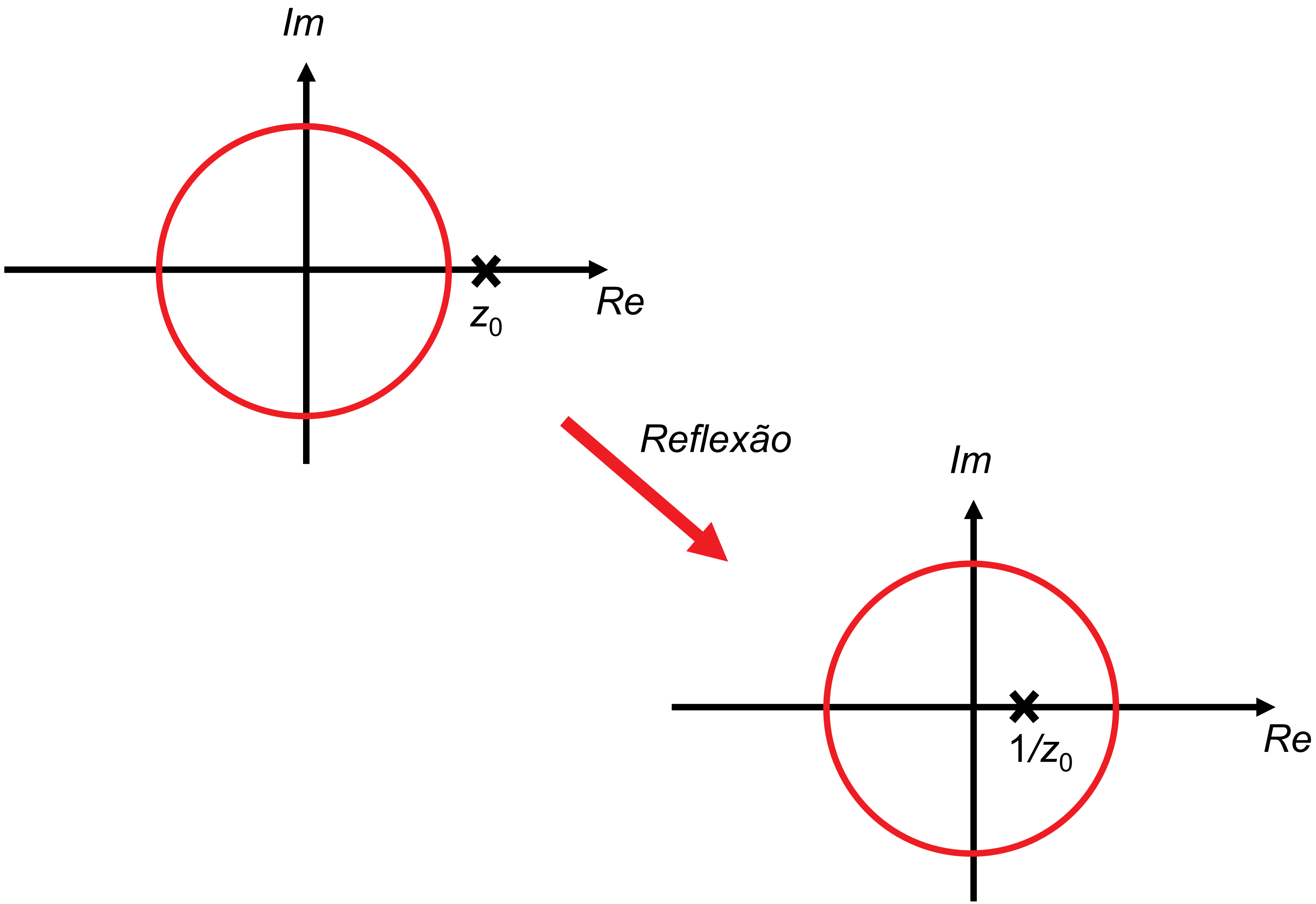
Propriedade 5 – Reflexão: Sendo $x[n]$ real,

$$x[-n] \overset{TZ}{\longleftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right) \quad \mathrm{RoC} = \frac{1}{R_x}$$

Efeito nos polos e nos zeros: Se $X(z)$ tem um polo (ou zero) em $z = z_0$, então $X(1/z)$ tem um polo (ou zero) em $z = 1/z_0$.

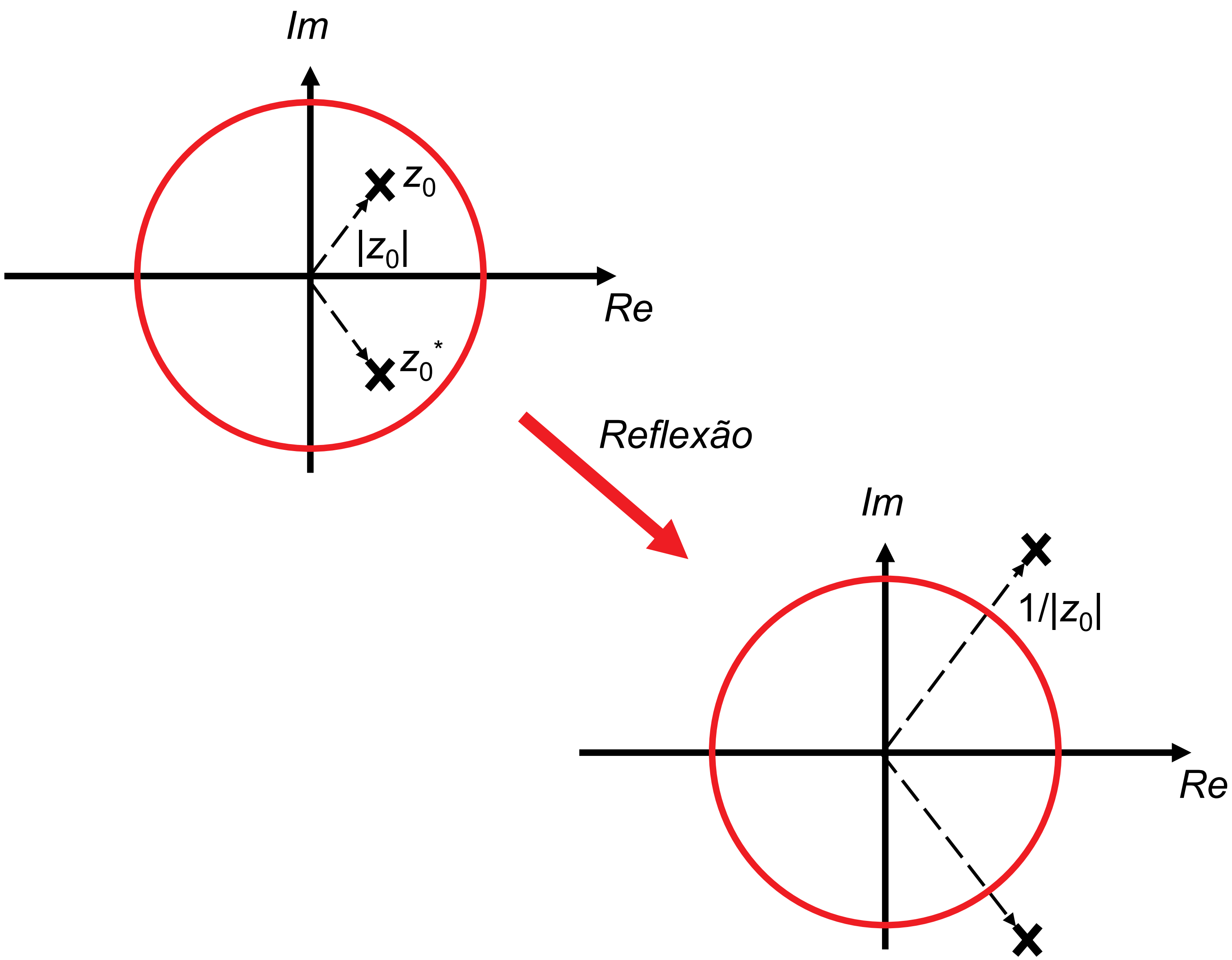
Efeito nos polos e zeros devido à reflexão temporal.

Caso I – Polo/Zero real



Efeito nos polos e zeros devido à reflexão temporal.

Caso II – Polo/Zero complexo



Propriedades da Transformada Z

Propriedade 6 – Convolução:

$$x_1[n] * x_2[n] \xrightleftharpoons{TZ} X_1(z)X_2(z)$$ A RoC contém $R_{x1} \cap R_{x2}$.

Exemplo 11: Determine a convolução entre os seguintes sinais:

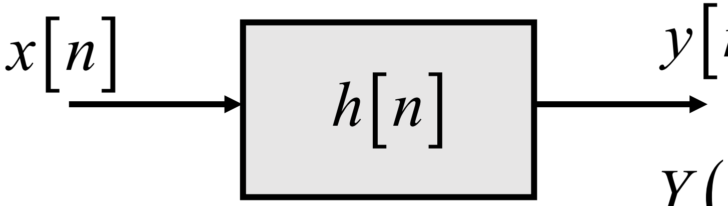
$$x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$
$$x_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Propriedade 7 – Teorema do valor inicial: Sendo *x*[*n*] causal, então:

$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

Transformada Z e Análise de Sistemas LTI

Considerando um sistema LTI:



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

Função de Sistema

Desta forma: $H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

Sistema descrito a partir de uma equação de diferenças:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k]\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}$$

Transformada Z e Análise de Sistemas LTI

$$\sum_{k=0}^{N} \mathcal{Z}\{a_k y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} \mathcal{Z}\{b_k x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{Z}\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathcal{Z}\{x[n-k]\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} b_k X(z) z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

Conclusões:

- $H(z)$ é uma função racional.
- A equação de diferenças não fornece informações sobre a RoC, sendo necessário alguma informação adicional (causalidade ou estabilidade).

Transformada Z e Análise de Sistemas LTI

Causalidade:

- **Critério 1 –** Um sistema é causal se e somente se a saída em $n = n_0$ depende apenas das entradas em $n \leq n_0$.
- **Critério 2 –** Um sistema é causal se e somente se a $h[n]$ for uma sequência causal.

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}$$ RoC de uma sequência causal

↓

Se estende do polo finito mais externo até (e incluindo) $z = \infty$

Transformada Z e Análise de Sistemas LTI

Causalidade:

- **Critério 3 –** Um sistema é causal se e somente se a RoC de $H(z)$ se estende do polo finito mais externo até (e incluindo) $z = \infty$.

  Se a RoC inclui $z = \infty$, então $H(z)$ para $z = \infty$ é finito.

  Se $H(z)$ é expresso como uma razão de polinômios em z, isso só é possível se a ordem do polinômio do denominador for igual ou maior do que o polinômio numerador.

- **Regra –** Se $H(z)$ expresso como uma razão de polinômios em z, a ordem do polinômio do denominador for menor do que o polinômio numerador, então o sistema é não-causal.

  Exemplo: $H(z) = \dfrac{z^3 - 3z^2 + z}{z^2 + (1/4)z + 1/8}$ → Não Causal.

Transformada Z e Análise de Sistemas LTI

Estabilidade:

- **Critério 1 –** Um sistema é dito estável se para uma entrada com amplitude limitada, a saída também tem amplitude limitada;
- **Critério 2 –** Um sistema é dito estável se e somente se $h[n]$ for absolutamente somável;
- **Critério 3 –** Um sistema é dito estável se e somente a transformada de Fourier de $h[n]$ (ou seja, a resposta em frequência) convergir.

Lembrando que a Transformada de Fourier é a Transformada Z calculada em $|z| = 1$.

Transformada Z e Análise de Sistemas LTI

Estabilidade:

- **Critério 4 –** Um sistema é estável se e somente se a RoC de *H*(*z*) contiver o circulo de raio unitário.
- **Caso Particular (Sistema Causal) –** Um sistema causal é estável se e somente se todos os polos de H(z) estiverem dentro da circunferência de raio unitário.

Exemplo 12: Considere o sistema descrito para seguinte equação de diferenças. Determine todas as respostas ao impulso possíveis, e para cada uma delas, determine se o sistema é (i) estável (ii) causal.

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

Transformada Z e Análise de Sistemas LTI

Exemplo 13: O sistema descrito pela seguinte equação de diferenças é causal. Determine: (a) função transferência, (b) resposta ao impulso, (c) o sistema será estável?

$$y[n-2]-5y[n-1]+6y[n]=x[n]$$

Interpretação Gráfica do Diagrama de Polos e Zeros

- Função transferência racional: $H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$

- Fatorando em termos dos polos e zeros:

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1 - c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - d_k z^{-1}\right)} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_k \text{ são os zeros.} \\ d_k \text{ são os polos.} \end{array} \right.$$

- Se o sistema for estável, a resposta em frequência pode ser obtida como:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1 - c_k e^{-j\omega}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - d_k e^{-j\omega}\right)}$$

Interpretação Gráfica do Diagrama de Polos e Zeros

- Análise da Resposta em Frequência:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k e^{-j\omega}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k e^{-j\omega}\right)}\times\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}}=\left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(e^{j\omega}-c_k\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(e^{j\omega}-d_k\right)}$$

- Magnitude da Resposta em Frequência:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|\frac{b_0}{a_0}\right|\times\frac{\prod_{k=1}^{M}\left|e^{j\omega}-c_k\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{j\omega}-d_k\right|}$$

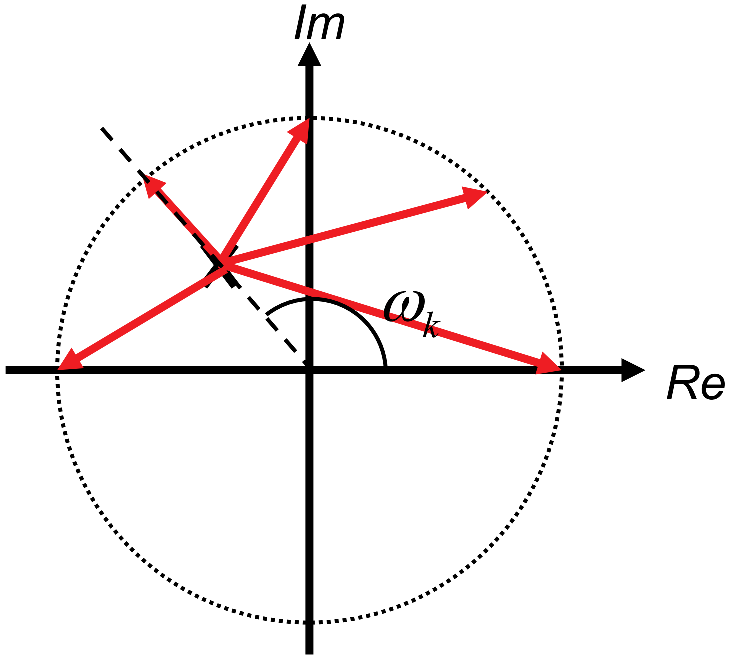
$\left|e^{j\omega}-c_k\right|$ é a magnitude do vetor que vai do zero c_k até o ponto com ângulo ω sobre a circunferência de raio unitário

$\left|e^{j\omega}-d_k\right|$ é a magnitude do vetor que vai do polo d_k até o ponto com ângulo ω sobre a circunferência de raio unitário

Interpretação Gráfica do Diagrama de Polos e Zeros

- Magnitude da Resposta em Frequência: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \times \frac{\prod_{k=1}^{M}\left|e^{j\omega} - c_k\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{j\omega} - d_k\right|}$

Exemplo de um polo em $d_k = r_k e^{j\omega_k}$ $\rightarrow$ $\left|e^{j\omega} - d_k\right| = \underbrace{\left|e^{j\omega} - r_k e^{j\omega_k}\right|}_{\text{Mínimo quando } \omega = \omega_k}$



Como o termo $\left|e^{j\omega} - d_k\right|$ está no denominador, então quando $\omega = \omega_k$, há um aumento da resposta em magnitude.

→ Um polo aumenta a resposta em magnitude nas proximidades em que está localizado

Interpretação Gráfica do Diagrama de Polos e Zeros

- Magnitude da Resposta em Frequência:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \times \frac{\prod_{k=1}^{M}\left|e^{j\omega}-c_k\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{j\omega}-d_k\right|}$$

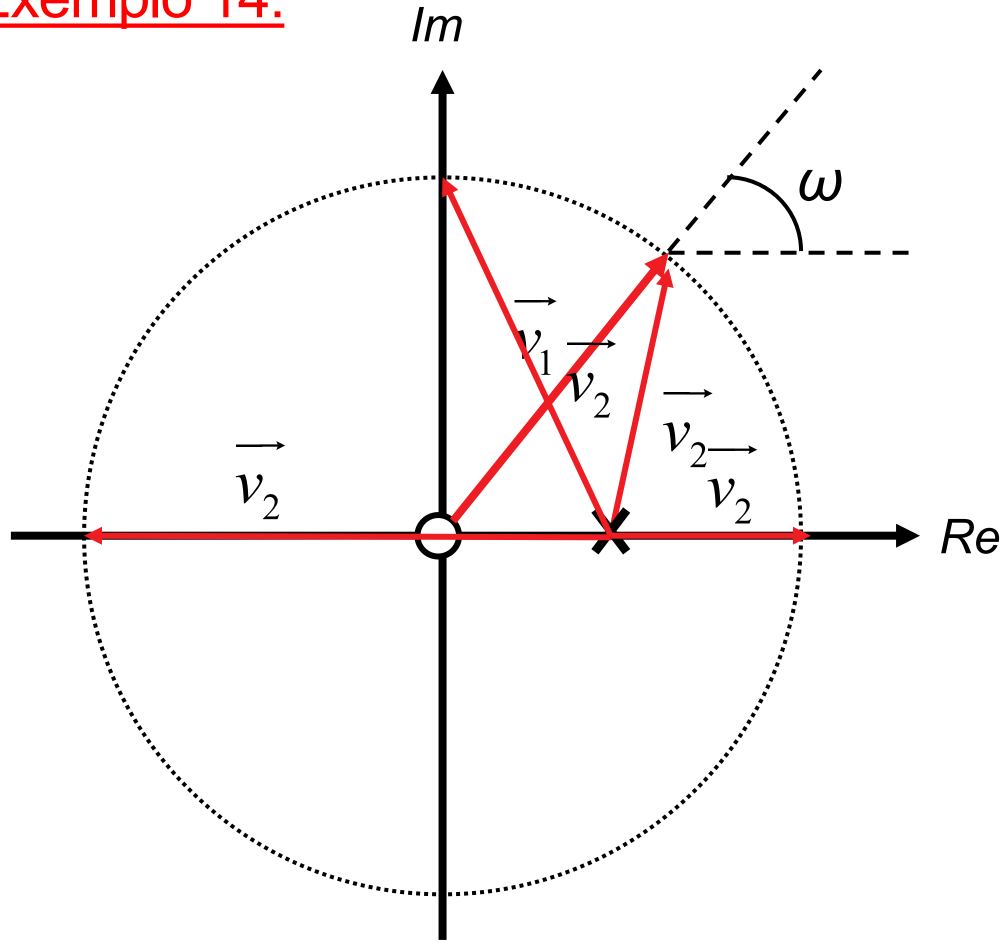
Polo → Aumenta a resposta em magnitude.

Zero → Diminui a resposta em magnitude.

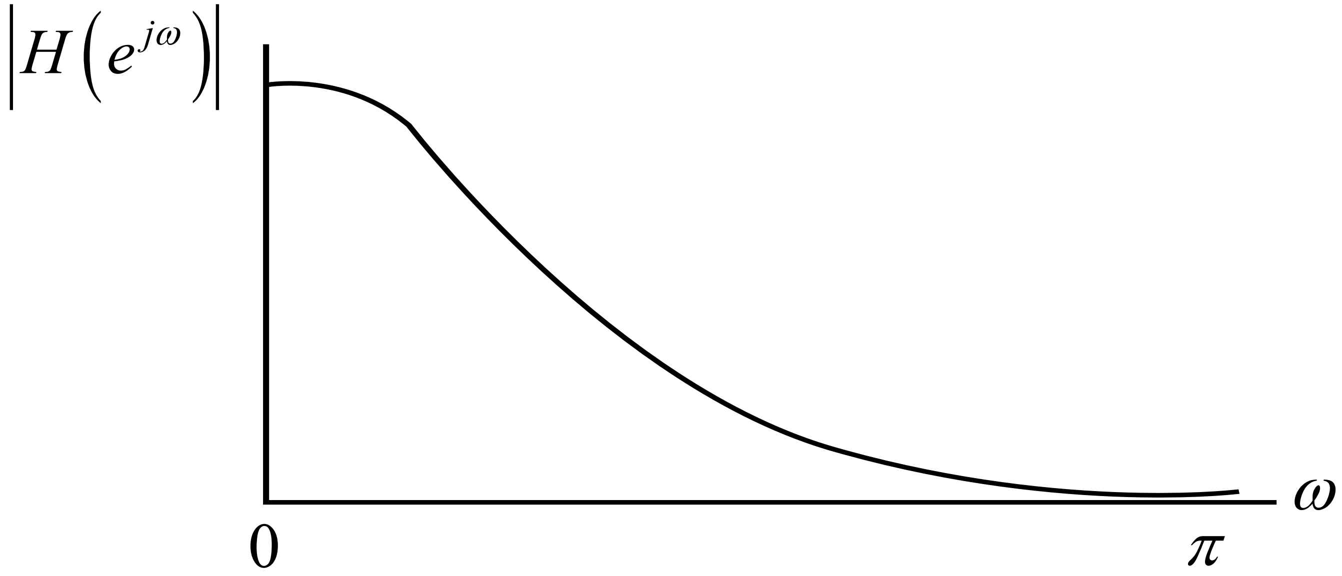
$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = A \times \frac{\prod_{k=1}^{M}\left|\overrightarrow{\text{zeros}}\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|\overrightarrow{\text{polos}}\right|}$$

Interpretação Gráfica do Diagrama de Polos e Zeros

Exemplo 14:

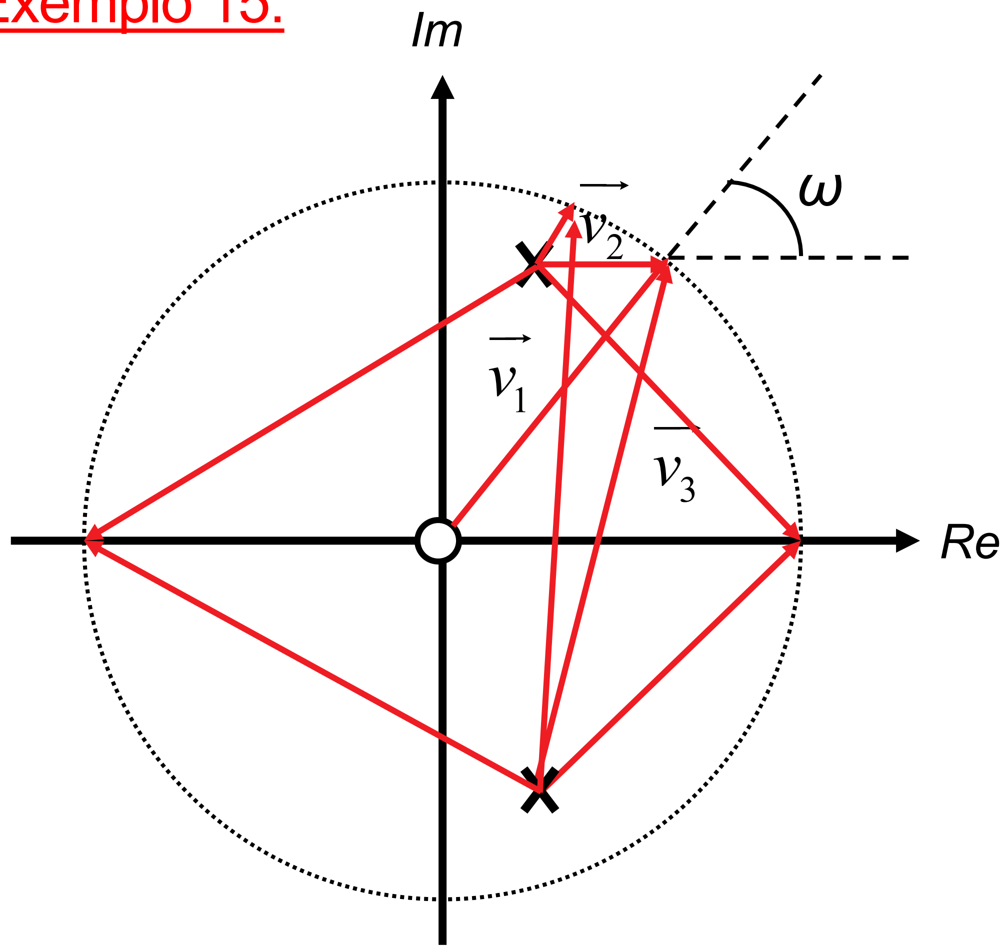


$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \times \frac{\prod_{k=1}^{M}\left|e^{j\omega} - c_k\right|}{\prod_{k=1}^{M}\left|e^{j\omega} - d_k\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{v_1}\right|}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|} = \frac{1}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|}$$

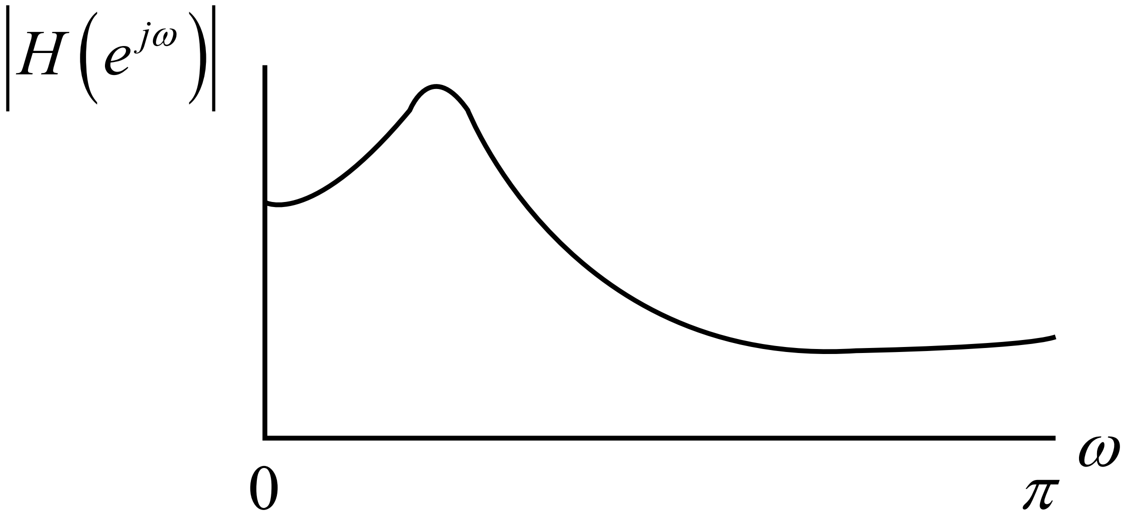


Interpretação Gráfica do Diagrama de Polos e Zeros

Exemplo 15:



$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{\left|\vec{v}_1\right|}{\left|\vec{v}_2\right|\left|\vec{v}_3\right|} = \frac{1}{\left|\vec{v}_2\right|\left|\vec{v}_3\right|}$$



Sistemas Inversos

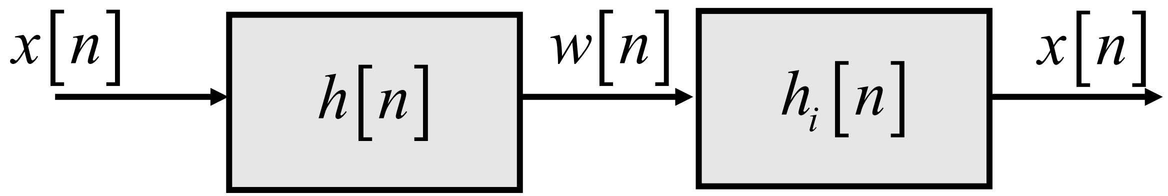
- $H_i(z)$ é um sistema inverso ao sistema $H(z)$ se:

$$H(z)H_i(z)=1 \quad \rightarrow \quad H_i(z)=\frac{1}{H(z)} \quad \rightarrow \quad H_i\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{H\left(e^{j\omega}\right)}$$

- Aplicando a propriedade da convolução:

$$h[n]*h_i[n]=\delta[n] \quad \begin{cases} h[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} \\ h_i[n]=\mathcal{Z}^{-1}\{H_i(z)\} \end{cases}$$

- Intepretação gráfica:



O sistema inverso pode servir para reduzir (ou eliminar) a distorção gerada por um determinado sistema.

Sistemas Inversos

- Sendo $H(z)$ racional:

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}$$

c_k são os zeros
d_k são os polos

- O sistema inverso será:

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)} = \left(\frac{a_0}{b_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}$$

d_k são os zeros
c_k são os polos

Ou seja, os polos de $H(z)$ são os zeros de $H_i(z)$ e os zeros de $H(z)$ são os polos de $H_i(z)$.

- RoC do sistema inverso: pela propriedade da convolução, a RoC de $H(z)$ e $H_i(z)$ deve ser sobrepor.

Sistemas Inversos

Exemplo 16: Determine o sistema inverso para os sistemas dados a seguir.

$$H(z)=\frac{1-0,5z^{-1}}{1-0,9z^{-1}} \quad |z|>0,9 \qquad\qquad H(z)=\frac{z^{-1}-0,5}{1-0,9z^{-1}} \quad |z|>0,9$$

Sistemas Inversos

- $H(z)$ estável e causal → Todos os polos de $H(z)$ dentro da circunferência de raio unitário.
- $H_i(z)$ estável e causal → Todos os polos de $H_i(z)$ dentro da circunferência de raio unitário → Todos os zeros de $H(z)$ dentro da circunferência de raio unitário;
- Assim, sendo $H(z)$ um sistema causal e estável, o sistema inverso $H_i(z)$ será causal e estável se todos os polos e zeros de $H(z)$ estiverem dentro da circunferência de raio unitário.
  - Sistema de Fase Mínima;

Transformada Z Unilateral

- Definição:

$$X^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x[n]z^{-n} \qquad X^{+}(z)=\mathcal{Z}^{+}\{x[n]\} \qquad x[n]\overset{UTZ}{\rightleftarrows}X^{+}(z)$$

- Se $x[n] = 0$ para $n < 0$, a transformada Z unilateral e a transformada Z bilateral são idênticas;
- Se $x[n] \neq 0$ para $n < 0$, a transformada Z unilateral e a transformada Z bilateral são diferentes;
- Propriedades da RoC: As mesmas de uma sequência lateral direita → A RoC se estende do polo finito mais externo até (possivelmente incluindo) $z = \infty$.
- Propriedades Importantes:
  - Linearidade:

$$\mathcal{Z}^{+}\{x_1[n]\}=X_1^{+}(z) \quad \mathrm{RoC}=R_{x1}$$

$$\mathcal{Z}^{+}\{x_2[n]\}=X_2^{+}(z) \quad \mathrm{RoC}=R_{x2}$$

$$\mathcal{Z}^{+}\{ax_1[n]+bx_2[n]\}=aX_1^{+}(z)+bX_2^{+}(z)$$

A RoC contém a intersecção, podendo ser maior se houver cancelamento de polos e zeros.

Transformada Z Unilateral

- Propriedades Importantes:
  - Deslocamento:

$$\mathcal{Z}^{+}\left\{x[n]\right\} = X^{+}(z)$$
$$\mathcal{Z}^{+}\left\{x[n-1]\right\} = x[-1] + z^{-1}X^{+}(z)$$

A RoC se mantém.

$$\mathcal{Z}^{+}\left\{x[n-2]\right\} = x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}X^{+}(z)$$
$$\mathcal{Z}^{+}\left\{x[n-3]\right\} = x[-3] + x[-2]z^{-1} + x[-1]z^{-2} + z^{-3}X^{+}(z)$$

- Aplicação: Solução de equação de diferenças com condições iniciais diferentes de zero.

Transformada Z Unilateral

Exemplo 17: Determine a expressão para a saída *y*[*n*] para *n* ≥ 0 de um sistema descrito pela seguinte equação de diferenças:

$$y[n]+0,9y[n-1]=x[n] \qquad x[n]=u[n]$$

$$y[-1]=1/3$$