UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO (UFERSA)
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS (CMPF)
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS E TECNOLOGIA (DETEC)

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Aula 03
Transformada de Fourier em Tempo Discreto

Prof.: Pedro Thiago Valério de Souza
UFERSA – Campus Pau dos Ferros
pedro.souza@ufersa.edu.br

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LTI)

Sistema LTI de tempo discreto:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] = a_1\theta_1[n] + a_2\theta_2[n] + \cdots \quad \begin{cases} \theta_1[n] \to \varphi_1[n] \\ \theta_2[n] \to \varphi_2[n] \\ \end{cases}$$

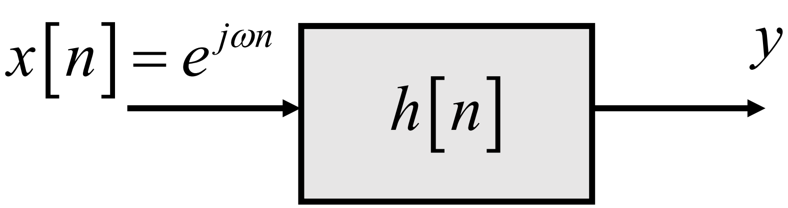
então: $y[n] = a_1\varphi_1[n] + a_2\varphi_2[n] + \cdots$

Escolher um sinal $\theta_k[n]$ que seja fácil de calcular a saída:

- Impulso: Convolução;
- Exponenciais complexas: Análise de Fourier.

Sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LTI)

Saída de um sistema LTI à uma exponencial complexa:



$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega(n-k)} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega n}e^{-j\omega k} \\
&= e^{j\omega n}\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}_{H(e^{j\omega})} = e^{j\omega n}H(e^{j\omega})
\end{aligned}
$$

Resumo: $e^{j\omega n} \rightarrow e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k} \longrightarrow$$ Transformada de Fourier em Tempo Discreto de $h[n]$

Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT)

- Generalização para qualquer sequência (desde que não seja periódica):

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$ (Análise ou Transformada Direta)

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$ (Síntese ou Transformada Inversa)

$x[n]\overset{DTFT}{\rightleftarrows}X\left(e^{j\omega}\right)$ ou, de forma equivalente: $\begin{cases}\mathcal{F}\{x[n]\}=X\left(e^{j\omega}\right)\\ \mathcal{F}^{-1}\{X\left(e^{j\omega}\right)\}=x[n]\end{cases}$

$X\left(e^{j\omega}\right) \longrightarrow$ Espectro de *x*[*n*]

$$X\left(e^{j\omega}\right)=X_R\left(e^{j\omega}\right)+jX_Ie^{j\omega}=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$\begin{cases}\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| \rightarrow \text{Espectro de magnitude}\\ \measuredangle X\left(e^{j\omega}\right) \rightarrow \text{Espectro de fase}\end{cases}$

Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT)

Comentários:

1. $x[n]$ → Soma infinitesimal de exponenciais complexas.

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

2. $X\left(e^{j\omega}\right)$ periódico em ω.

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\cancelto{1}{e^{-j2\pi n}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}=X\left(e^{j\omega}\right)$$

$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)$ → Periódico em ω com período de 2π

Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT)

Comentários:

3. Convergência: $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| < \infty \quad \forall \omega$

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right| < \infty}_{\text{Absolutamente somável}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 < \infty}_{\text{Energia Finita}}$$

Caso a sequência seja absolutamente somável, a convergência é uniforme.

Caso a sequência tenha energia finita (mas não seja absolutamente somável), a convergência é na média):

$$X_M\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-M}^{M} x[n] e^{-j\omega n}$$

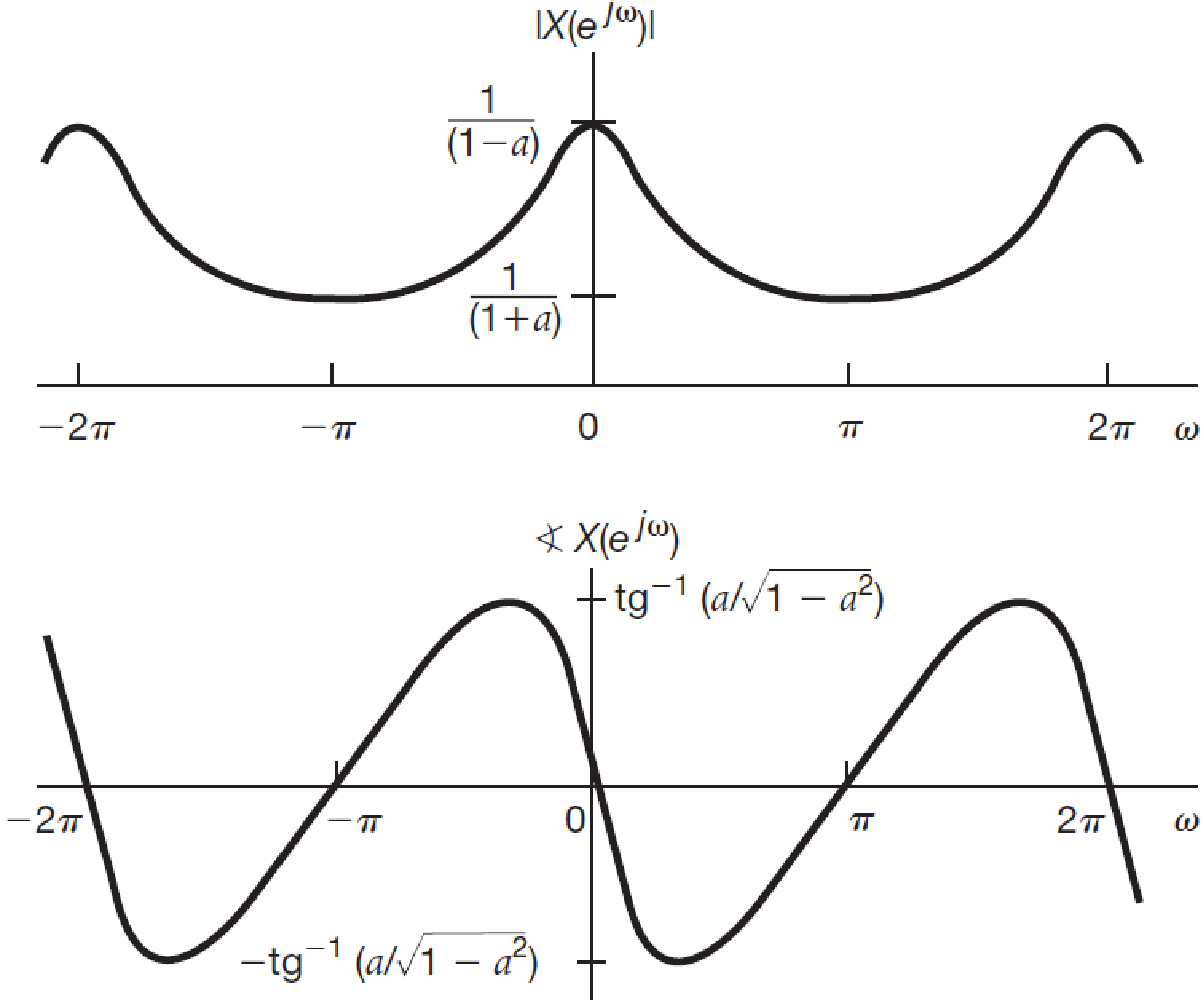
$$\lim_{M \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right) - X_M\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = 0$$

Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT)

Exemplo 1: Determine a transformada de Fourier do seguinte sinal:

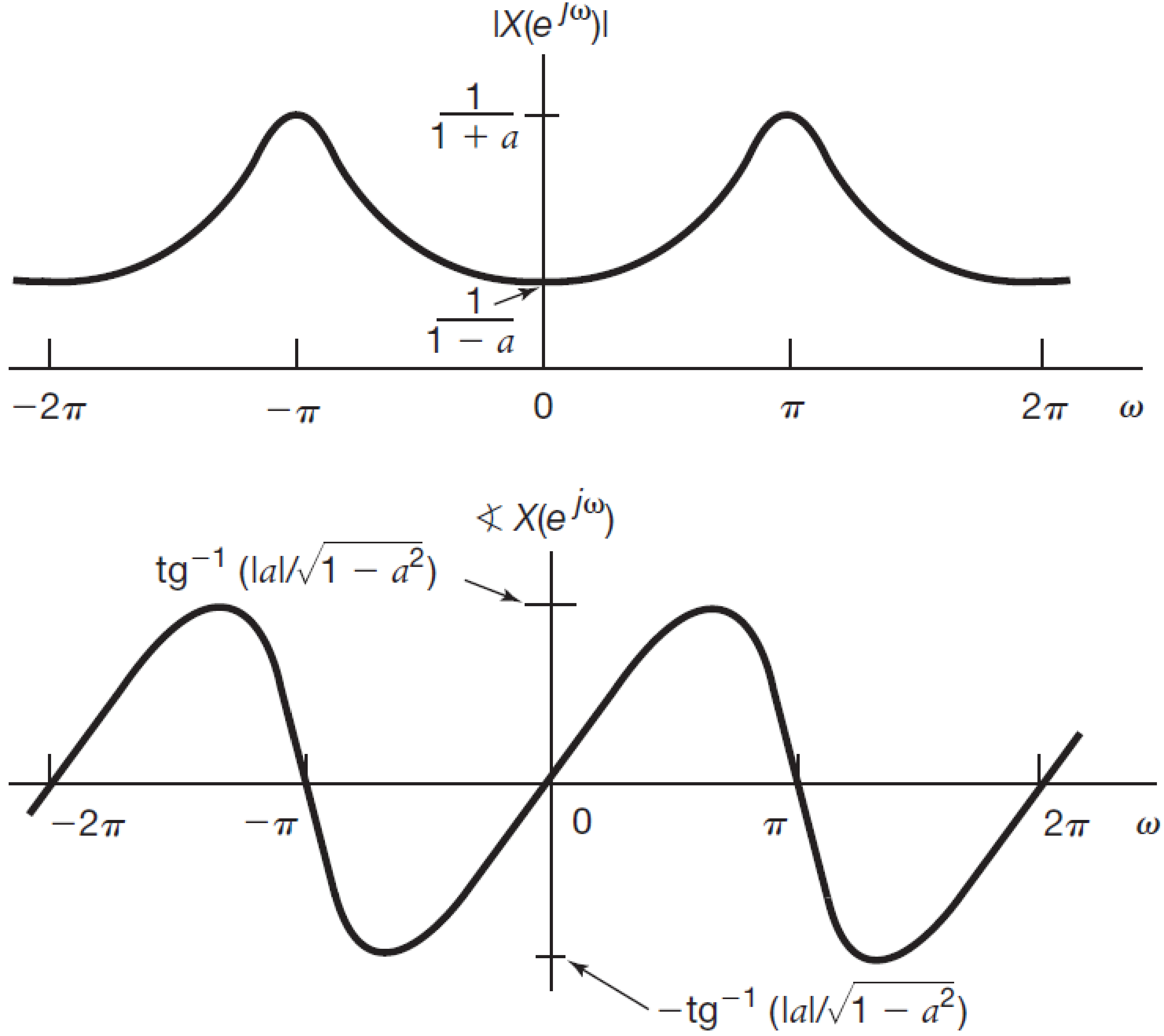
$$x[n] = a^n u[n] \qquad |a| < 1$$

Caso $0 < a < 1$:



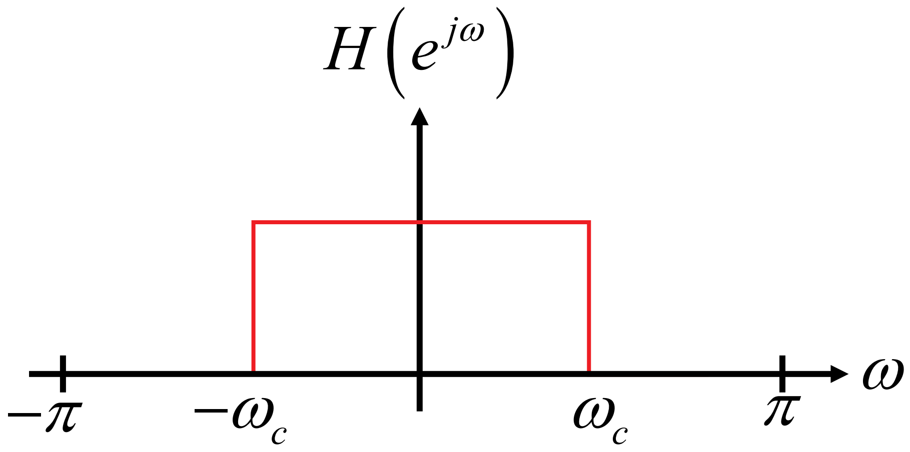
$|X(e^{j\omega})|$
$\frac{1}{(1-a)}$
$\frac{1}{(1+a)}$
-2π
$-\pi$
0
π
2π
ω
$\sphericalangle X(e^{j\omega})$
$\mathrm{tg}^{-1}(a/\sqrt{1-a^2})$
$-\mathrm{tg}^{-1}(a/\sqrt{1-a^2})$
-2π
$-\pi$
0
π
2π
ω

Caso -1 < *a* < 0:

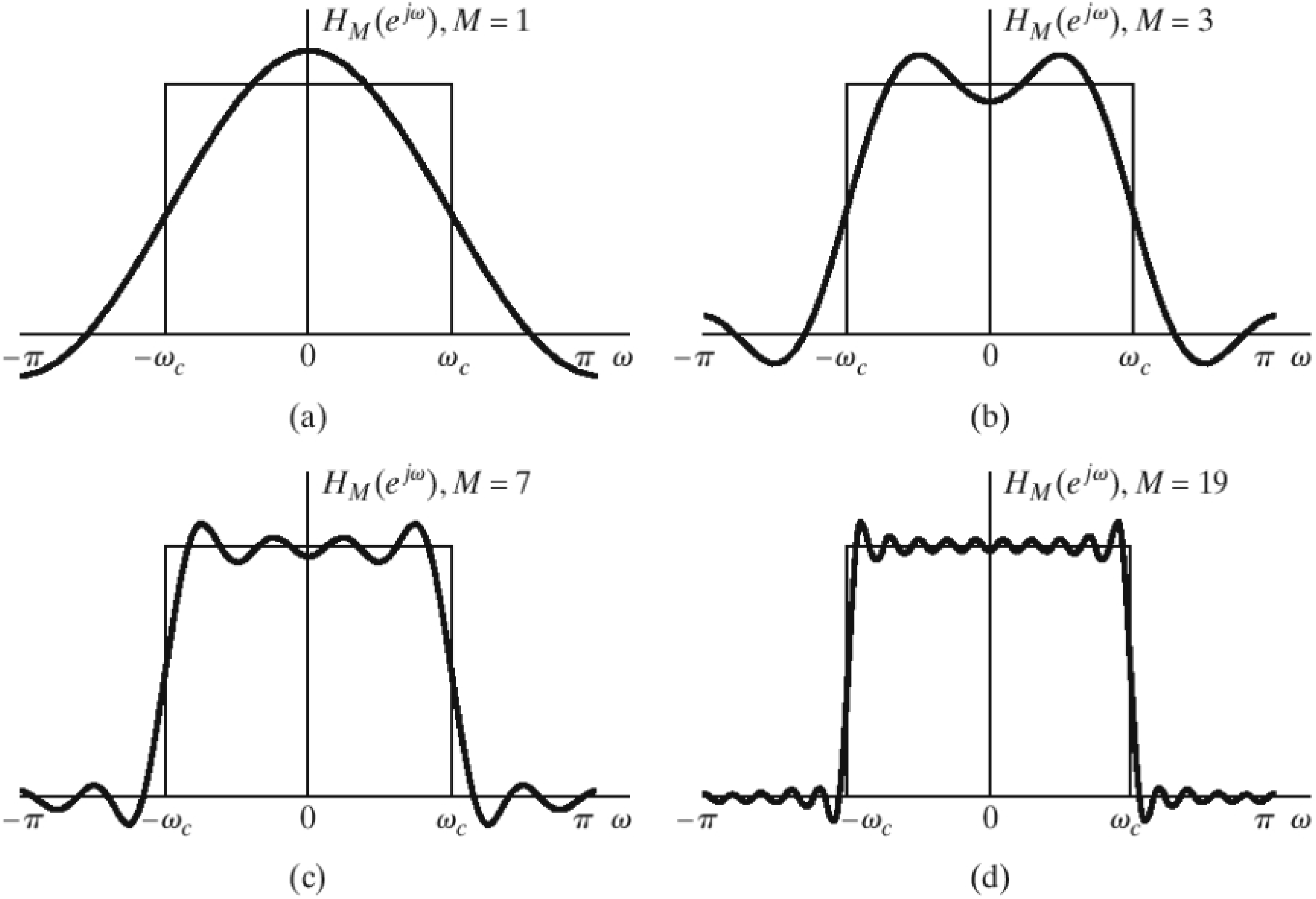


Transformada de Fourier em Tempo Discreto (DTFT)

Exemplo 2: Determine a transformada de Fourier inversa para o seguinte espectro:



$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|\le\pi\end{cases}$$



$H_M(e^{j\omega}), M = 1$
$-\pi$
$-\omega_c$
0
ω_c
π
ω
(a)
$H_M(e^{j\omega}), M = 3$
$-\pi$
$-\omega_c$
0
ω_c
π
ω
(b)
$H_M(e^{j\omega}), M = 7$
$-\pi$
$-\omega_c$
0
ω_c
π
ω
(c)
$H_M(e^{j\omega}), M = 19$
$-\pi$
$-\omega_c$
0
ω_c
π
ω
(d)

Propriedades da Transformada de Fourier

Considerações iniciais:

$$\mathcal{F}\{x[n]\} = X(e^{j\omega})$$

$$\mathcal{F}\{x_1[n]\} = X_1(e^{j\omega})$$

$$\mathcal{F}\{x_2[n]\} = X_2(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\measuredangle X(e^{j\omega})}$$

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \qquad \begin{cases} x_e[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\} \\ x_o[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[-n]\} \end{cases}$$

P1) Periodicidade:

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{j(\omega+2\pi)})\right|$$

$$\measuredangle X(e^{j\omega}) = \measuredangle X(e^{j(\omega+2\pi)})$$

Propriedades da Transformada de Fourier

P2) Linearidade: $\mathcal{F}\left\{ax_1[n]+bx_2[n]\right\} = aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)$

P3) Deslocamento no tempo: $\mathcal{F}\left\{x[n-n_0]\right\} = e^{-jn_0\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$

P4) Deslocamento na frequência: $\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 n}x[n]\right\} = X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$

P5) Conjugação: $\mathcal{F}\left\{x^*[n]\right\} = X^*\left(e^{-j\omega}\right)$

P6) Simetria: Sendo $x[n]$ real, então:

a) $X\left(e^{j\omega}\right) = X^*\left(e^{-j\omega}\right)$

b) $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|X\left(e^{-j\omega}\right)\right|$ (simetria par)

c) $\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right) = -\measuredangle X\left(e^{-j\omega}\right)$ (simetria impar)

d) $X_R\left(e^{j\omega}\right) = X_R\left(e^{-j\omega}\right)$ (simetria par)

e) $X_I\left(e^{j\omega}\right) = -X_I\left(e^{-j\omega}\right)$(simetria impar)

Propriedades da Transformada de Fourier

P6) Simetria: Sendo $x[n]$ real, então:

f) $\mathcal{F}\left\{x_e[n]\right\} = X_R\left(e^{j\omega}\right)$

$x[n]$ par $\rightleftharpoons X\left(e^{j\omega}\right)$ real

g) $\mathcal{F}\left\{x_o[n]\right\} = jX_I\left(e^{j\omega}\right)$

$x[n]$ impar $\rightleftharpoons X\left(e^{j\omega}\right)$ imaginário

P7) Reflexão: Sendo $x[n]$ real, então: $\mathcal{F}\left\{x[-n]\right\} = X\left(e^{-j\omega}\right)$

P8) Parseval: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 \rightarrow$ Densidade espectral de energia

P9) Convolução: $\mathcal{F}\left\{x_1[n] * x_2[n]\right\} = X_1\left(e^{j\omega}\right)X_2\left(e^{j\omega}\right)$

Propriedades da Transformada de Fourier

P10) Multiplicação:

$$\mathcal{F}\{x_1[n]x_2[n]\} = \overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right)X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta}^{\text{Convolução periódica}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_2\left(e^{j\theta}\right)X_1\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

Transformada de Fourier Inversa

- Definição Matemática (Integral);
- Inspeção;
- Expansão em Frações Parciais.

Transformada de Fourier Inversa

Inspeção: Tabela de transformadas:

$$a^n u[n] \xrightleftharpoons{\mathcal{F}} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$(n+1)a^n u[n] \xrightleftharpoons{\mathcal{F}} \frac{1}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)^2}$$

$$\delta[n] \xrightleftharpoons{\mathcal{F}} 1$$

Exemplo 3: Determine a transformada de Fourier inversa de:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{3}{1-1/2e^{-j\omega}} + \frac{2}{1-1/4e^{-j\omega}}$$

Transformada de Fourier Inversa

Expansão em Frações Parciais:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{N\left(e^{j\omega}\right)}{D\left(e^{j\omega}\right)}$$

Exemplo: $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$

- Escrever $X\left(e^{j\omega}\right)$ como uma soma de frações simples.
- Calcular a transformada inversa das parcelas simples.

$\Rightarrow$ **Frações Parciais**

$z=e^{j\omega}$ $\Rightarrow$ $$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{N\left(e^{j\omega}\right)}{D\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

$\left.\begin{array}{l} N(z) : \text{ordem } m \\ D(z) : \text{ordem } n \end{array}\right\}$ Fração própria: $n > m$

Transformada de Fourier Inversa

Expansão em Frações Parciais:

$$X(z) = \frac{N(z)}{\left(1-d_1 z^{-1}\right)\left(1-d_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1-d_n z^{-1}\right)}$$

$\{d_1, d_2, \cdots d_n\}$: raízes de $D(z)$

Caso I – Fração própria, raízes de *D*(*z*) diferentes entre si.

$$X(z) = \frac{N(z)}{\left(1-d_1 z^{-1}\right)\left(1-d_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1-d_n z^{-1}\right)} = \frac{A_1}{1-d_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1-d_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{A_n}{1-d_n z^{-1}}$$

$$A_k = X(z)\left(1-d_k z^{-1}\right)\Big|_{z=d_k}$$

Transformada de Fourier Inversa

Exemplo 4: Determine a transformada de Fourier inversa de:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

Transformada de Fourier Inversa

Expansão em Frações Parciais:

Caso II – Fração própria, com uma raiz de *D*(*z*) com multiplicidade *r* e as outras raízes diferentes entre si.

$$X(z)=\frac{N(z)}{\left(1-\lambda z^{-1}\right)^{r}\left(1-d_1 z^{-1}\right)\cdots\left(1-d_{n-r}z^{-1}\right)}$$

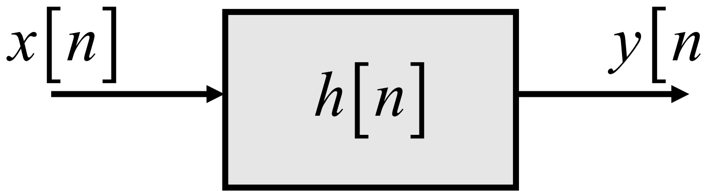
$$=\frac{A_1}{1-d_1 z^{-1}}+\cdots+\frac{A_{n-r}}{1-d_{n-r}z^{-1}}+\frac{B_1}{1-\lambda z^{-1}}+\frac{B_2}{\left(1-\lambda z^{-1}\right)^{2}}+\cdots+\frac{B_r}{\left(1-\lambda z^{-1}\right)^{r}}$$

$$A_k=X(z)\left(1-d_k z^{-1}\right)\Big|_{z=d_k}$$

$$B_k=\frac{1}{(r-k)!(-\lambda)^{r-k}}\frac{d^{r-k}}{d\left(z^{-1}\right)^{r-k}}\left[X(z)\left(1-\lambda z^{-1}\right)^{r}\right]\Bigg|_{z=\lambda}$$

Caso III – Fração imprópria: Dividir *N*(z) por *D*(z) até obter um resto com ordem inferior à *D*(z).

Transformada de Fourier e Análise de Sistemas LTI



$$y[n] = x[n] * h[n] \quad \begin{cases} \mathcal{F}\{x[n]\} = X(e^{j\omega}) \\ \mathcal{F}\{h[n]\} = H(e^{j\omega}) \\ \mathcal{F}\{y[n]\} = Y(e^{j\omega}) \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{y[n]\} = Y(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n] * h[n]\} = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{Resposta em frequência}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\measuredangle H(e^{j\omega})} \begin{cases} \left|H(e^{j\omega})\right| \rightarrow \text{Resposta em magnitude} \\ \measuredangle H(e^{j\omega}) \rightarrow \text{Resposta em fase} \end{cases}$$

Transformada de Fourier e Análise de Sistemas LTI

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)\quad \begin{cases} X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right)} \\ Y\left(e^{j\omega}\right)=\left|Y\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\measuredangle Y\left(e^{j\omega}\right)} \\ H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\left|Y\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\measuredangle Y\left(e^{j\omega}\right)} &= \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right)}\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right)} \\ &= \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\left(\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right)+\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right)\right)}\end{aligned}\quad \begin{cases} \left|Y\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \\ \measuredangle Y\left(e^{j\omega}\right)=\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right)+\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right) \end{cases}$$

- Resposta em magnitude: Ganho do sistema;
- Resposta em fase: Deslocamento em fase (relacionado à atraso);

Transformada de Fourier e Análise de Sistemas LTI

Limitação: $H\left(e^{j\omega}\right)$ deve convergir.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{F}\left\{h[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \xrightarrow{\text{Convergência}} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h[n]\right| < \infty}_{\text{Sistema estável}}$$

Generalização (sistemas instáveis): Transformada Z.

Transformada de Fourier e Análise de Sistemas LTI

Sinais senoidais e sistemas LTI:

$$x[n]=\cos(\omega_0 n) \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n]=\cos(\omega_0 n)=\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}\right)$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= T\{x[n]\} = T\left\{\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[T\left\{e^{j\omega_0 n}\right\}+T\left\{e^{-j\omega_0 n}\right\}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n}H\left(e^{j\omega_0}\right)+e^{-j\omega_0 n}H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)}+e^{-j\omega_0 n}\left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|e^{j\measuredangle H\left(e^{-j\omega_0}\right)}\right]
\end{aligned}$$

$h[n]$ real $\begin{cases} \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| = \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right| \\ \measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right) = -\measuredangle H\left(e^{-j\omega_0}\right) \end{cases}$

Transformada de Fourier e Análise de Sistemas LTI

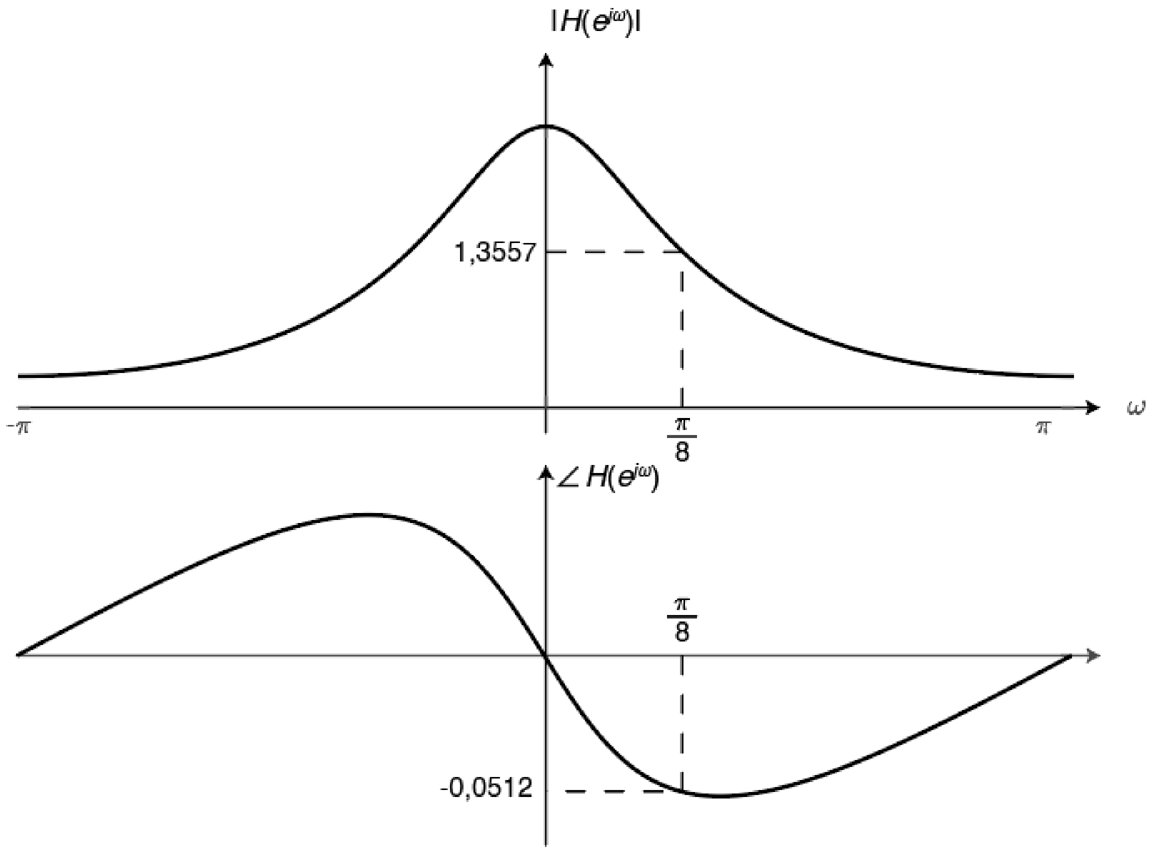
Sinais senoidais e sistemas LTI:

$$y[n] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| e^{j\measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)} + e^{-j\omega_0 n}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| e^{-j\measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)} \right]$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \frac{1}{2}\left[e^{j\left(\omega_0 n + \measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} + e^{-j\left(\omega_0 n + \measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)} \right]$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$$

Resumo: $\cos\left(\omega_0 n\right) \rightarrow \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$



$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{8}n\right)$$

$$y[n] = 1,3557\cos\left(\frac{\pi}{8}n - 0,0512\right)$$

Transformada de Fourier e Análise de Sistemas LTI

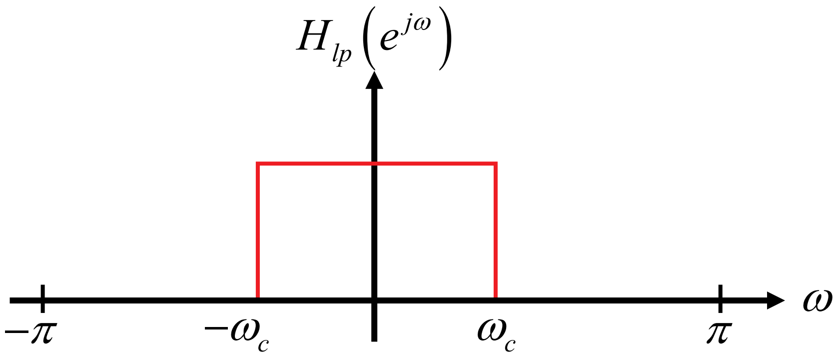
Filtros seletivos em frequência: $H\left(e^{j\omega}\right) \quad -\pi \le \omega < \pi$

Passagem: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \approx 1$

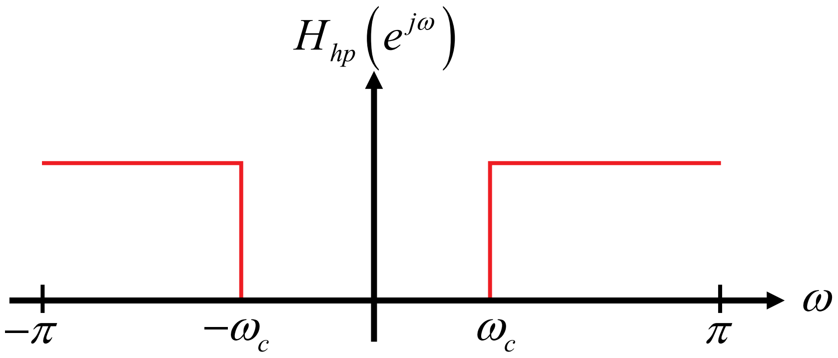
Rejeição: $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| \approx 0$

Aplicações:

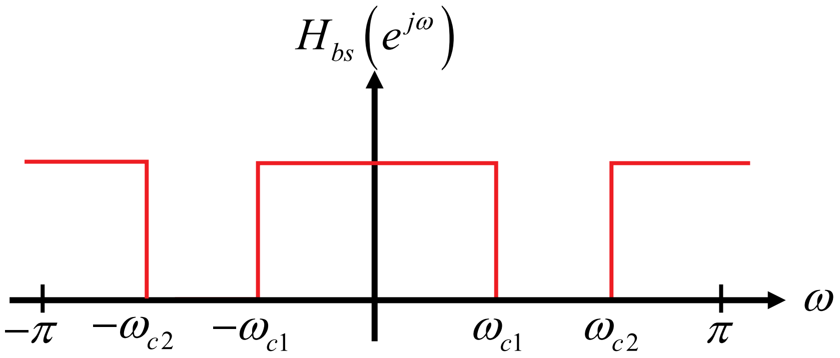
- Remoção de sinais indesejados;
- Sistemas de telecomunicações;
- Imagens digitais: detecção de bordas.



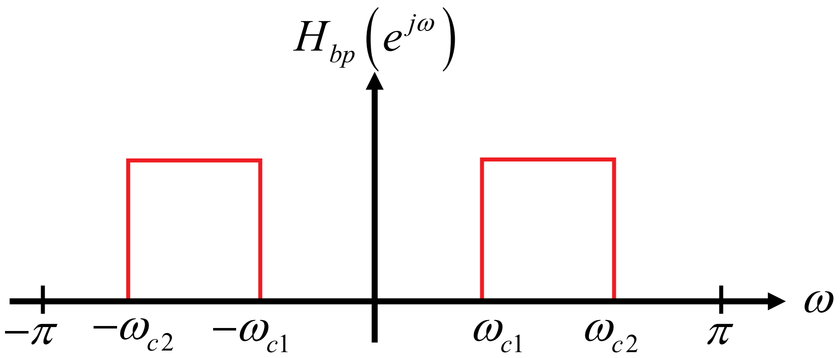
Passa-baixas.



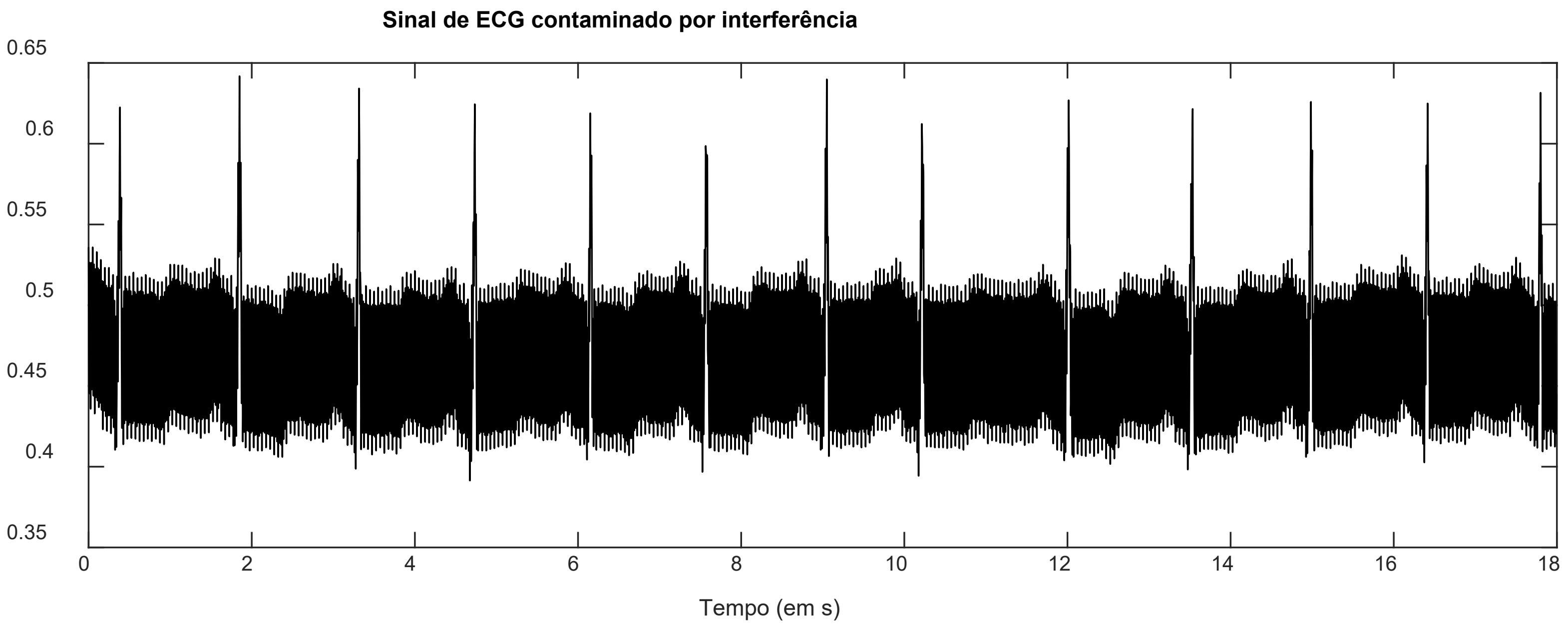
Passa-altas.

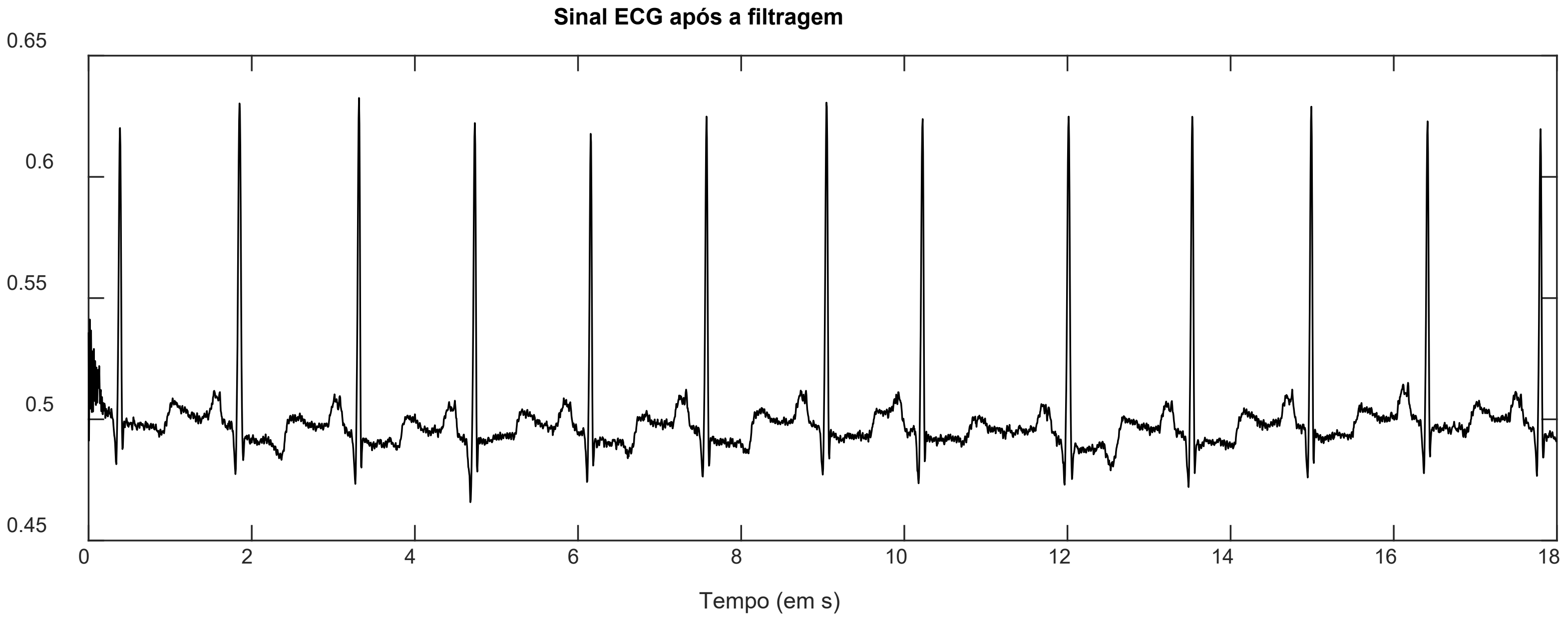


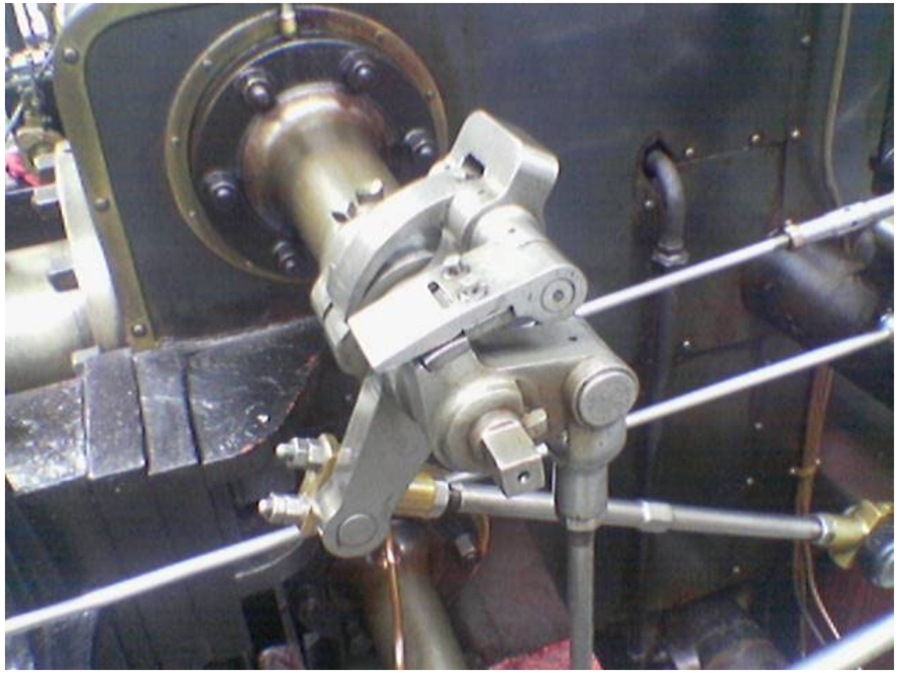
Rejeita-faixa.

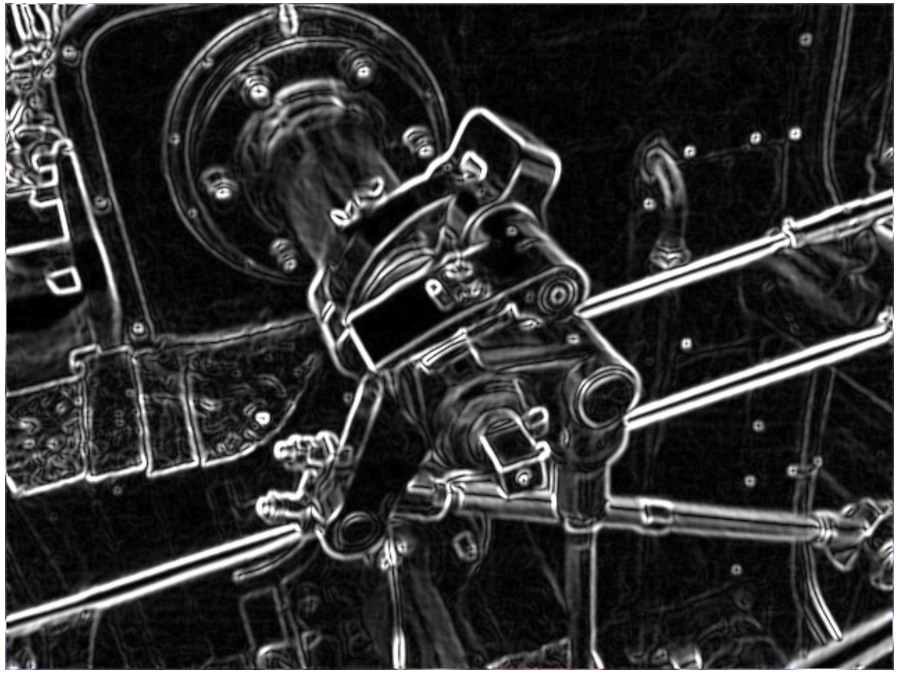


Passa-bandas.


Sinal de ECG contaminado por interferência
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
Tempo (em s)


Sinal ECG após a filtragem
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
Tempo (em s)





Transformada de Fourier de Tempo Discreto e Análise de Sistemas LTI

Exemplo 5: Considere um sistema LTI de tempo discreto descrito por:

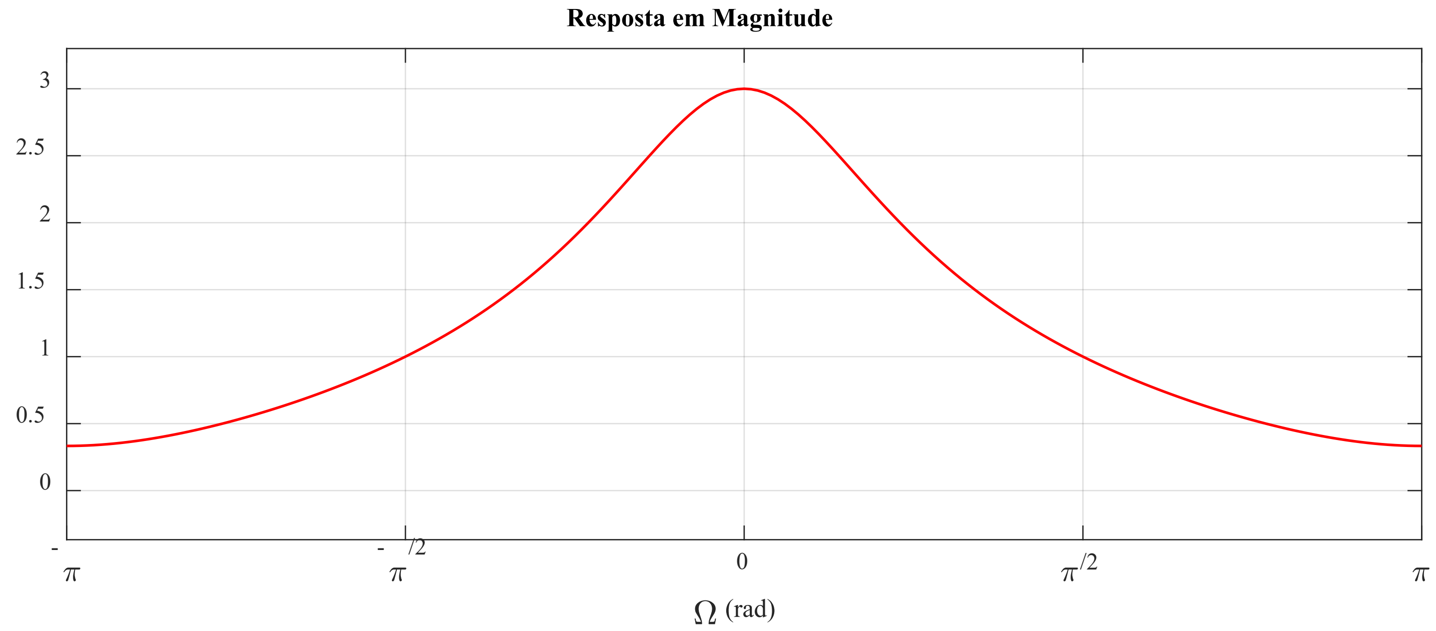
$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]$$

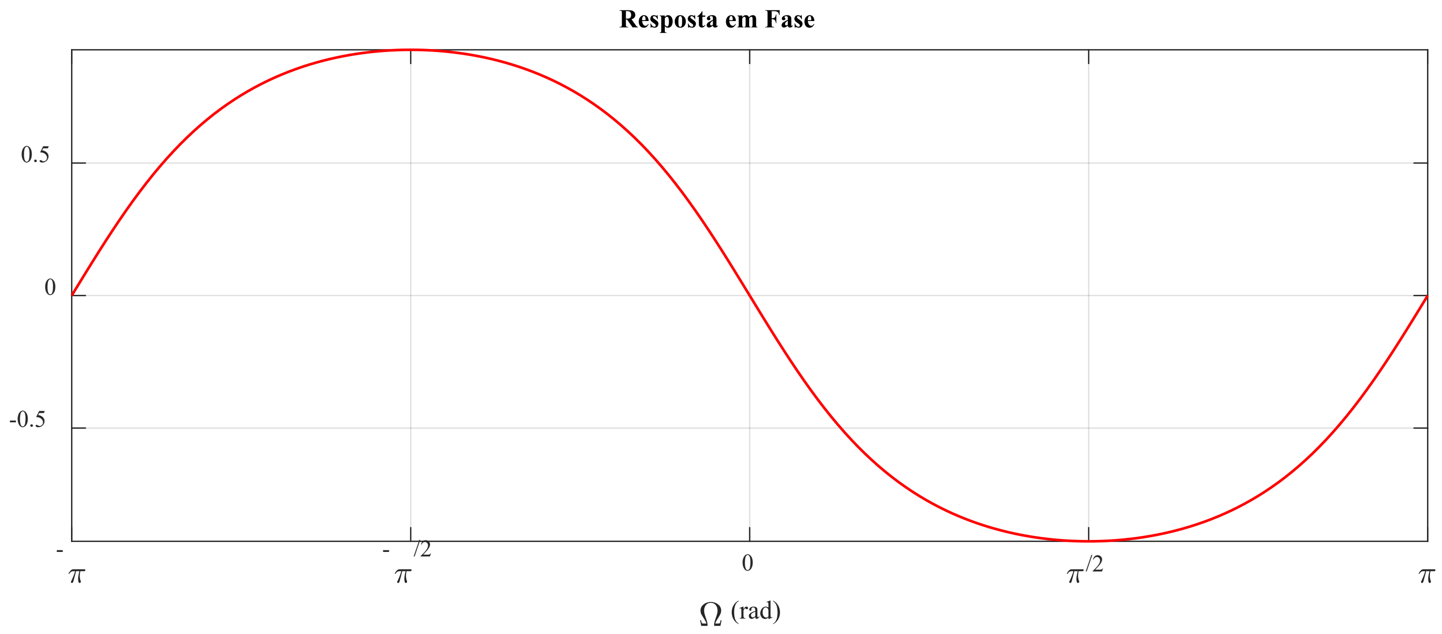
(a) Determine a resposta em frequência do sistema.

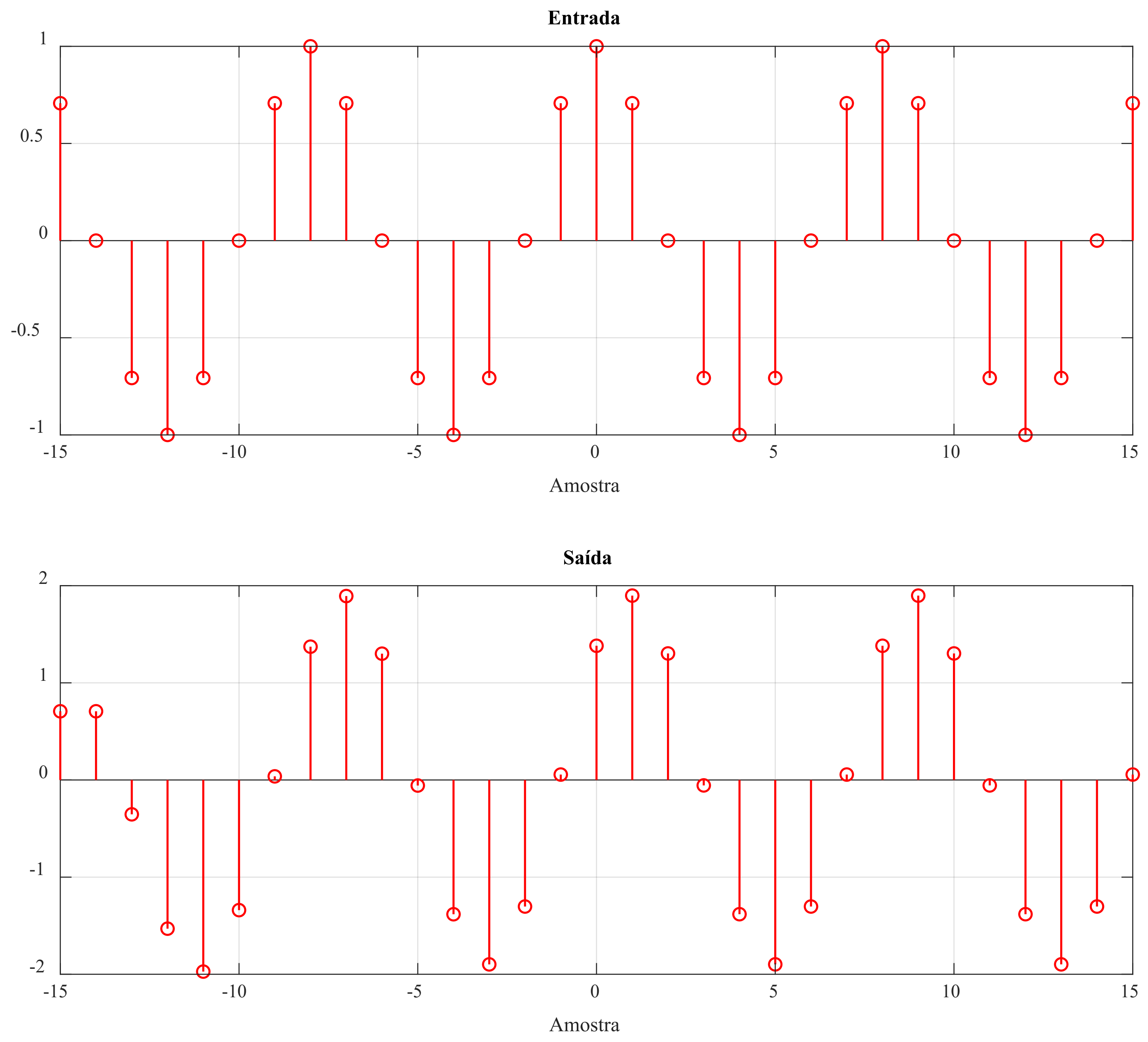
(b) Determine a resposta ao impulso do sistema.

(c) Determine a saída do sistema à entrada:

$$x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$


Resposta em Magnitude
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-π
-π/2
0
π/2
π
Ω (rad)


Resposta em Fase
0.5
0
-0.5
-π
-π/2
0
π/2
π
Ω (rad)


Entrada
1
0.5
0
-0.5
-1
-15
-10
-5
0
5
10
15
Amostra
Saída
2
1
0
-1
-2
-15
-10
-5
0
5
10
15
Amostra

Resposta em Frequência de Sistemas LTI

- Atraso de Grupo: É uma medida de linearidade da fase do sistema:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right)$$

Se a fase é linear → Atraso de grupo constante;

- Atraso de Fase:

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right)}{\omega}$$

Um sistema sem distorção é aquele que: $\tau_g(\omega) = \tau_p(\omega)$

Resposta em Frequência de Sistemas LTI

Para um sistema LTI: $\cos\left(\omega_0 n\right) \rightarrow \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$

Se o sistema possui fase linear: $\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right) = -k\omega$

$$\tau_p\left(\omega\right) = -\frac{\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right)}{\omega} = -\frac{\left(-k\omega\right)}{\omega} = k \qquad \tau_g\left(\omega\right) = -\frac{d}{d\omega}\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{d}{d\omega}\left(k\omega\right) = k$$

$\tau_g\left(\omega\right) = \tau_p\left(\omega\right)$ → Sistema sem distorção

Assim sendo: $\cos\left(\omega_0 n\right) \rightarrow \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n + \measuredangle H\left(e^{j\omega_0}\right)\right)$

$$\rightarrow \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left(\omega_0 n - k\omega_0\right)$$

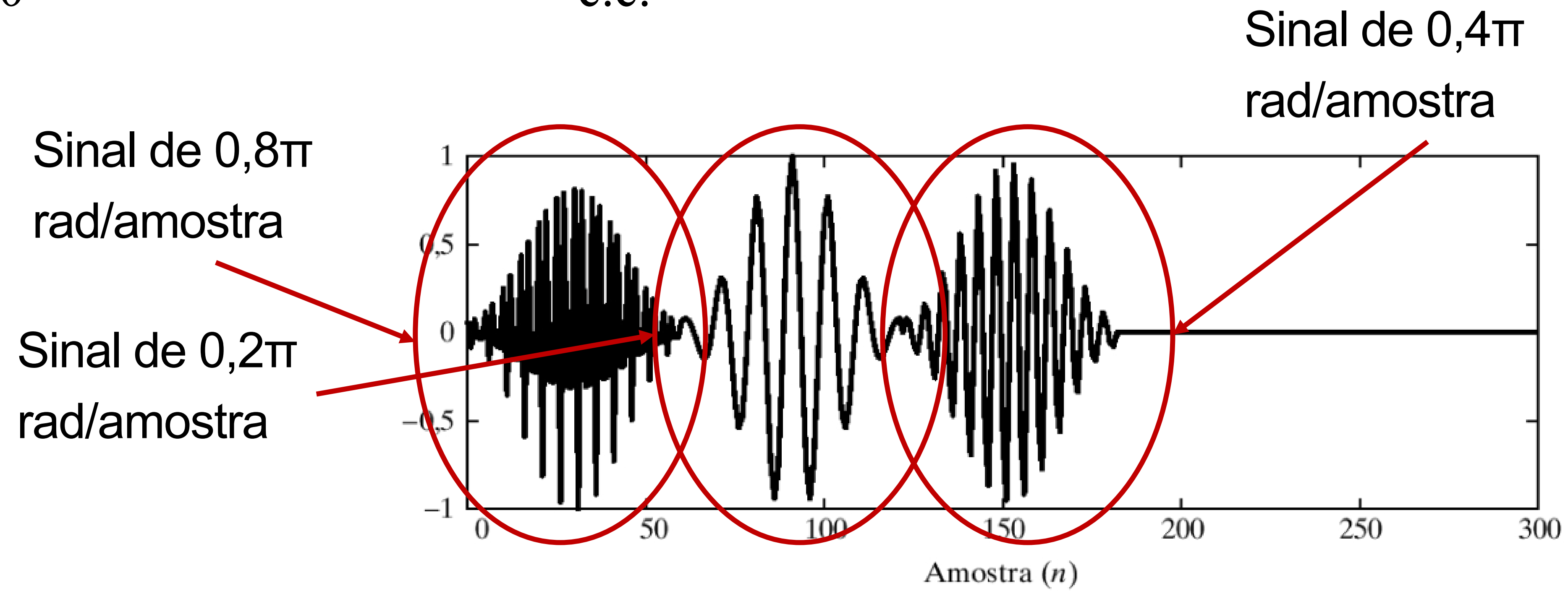
$$\rightarrow \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cos\left[\omega_0\left(n-k\right)\right]$$

→ Saída multiplicada por um ganho e deslocada de *k* amostras

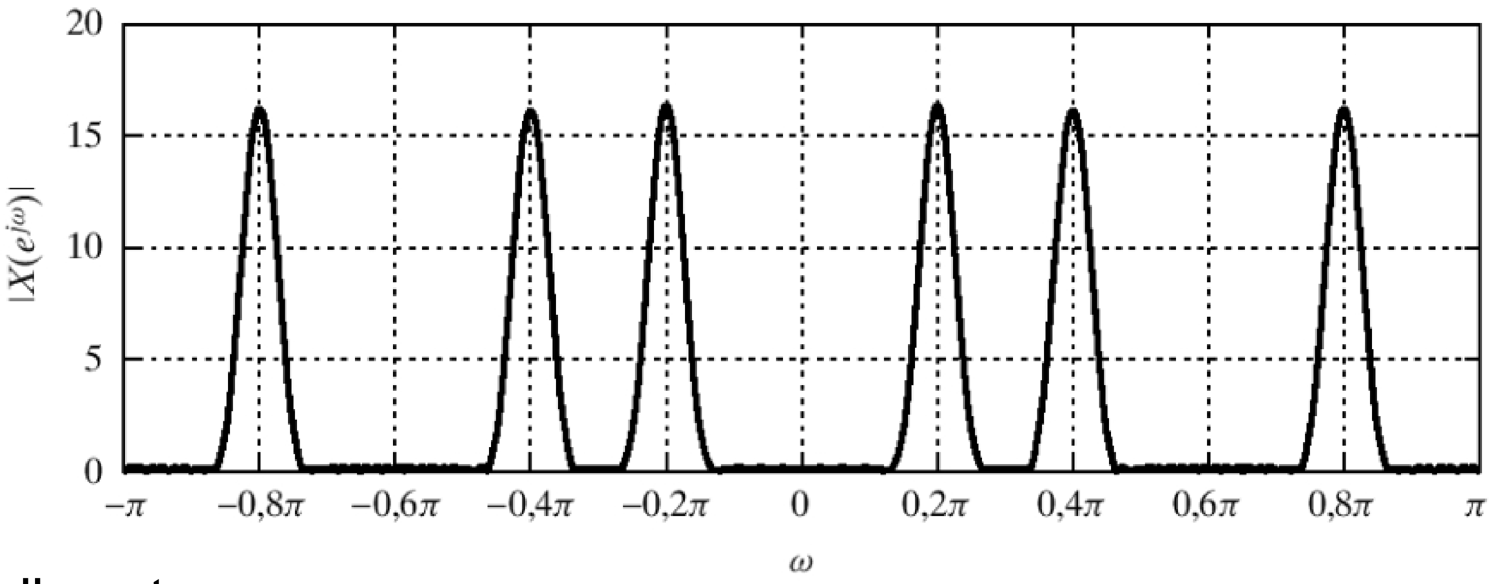
$$x_1[n] = w[n]\cos(0,2\pi n)$$
$$x_2[n] = w[n]\cos(0,4\pi n - \pi/2)$$
$$x_3[n] = w[n]\cos(0,8\pi n + \pi/5)$$

$$x[n] = x_3[n] + x_1[n-61] + x_2[n-122]$$

$$w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46\cos(2\pi n/60) & 0 \le n \le 60 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



Transformada de Fourier de *x*[*n*]:

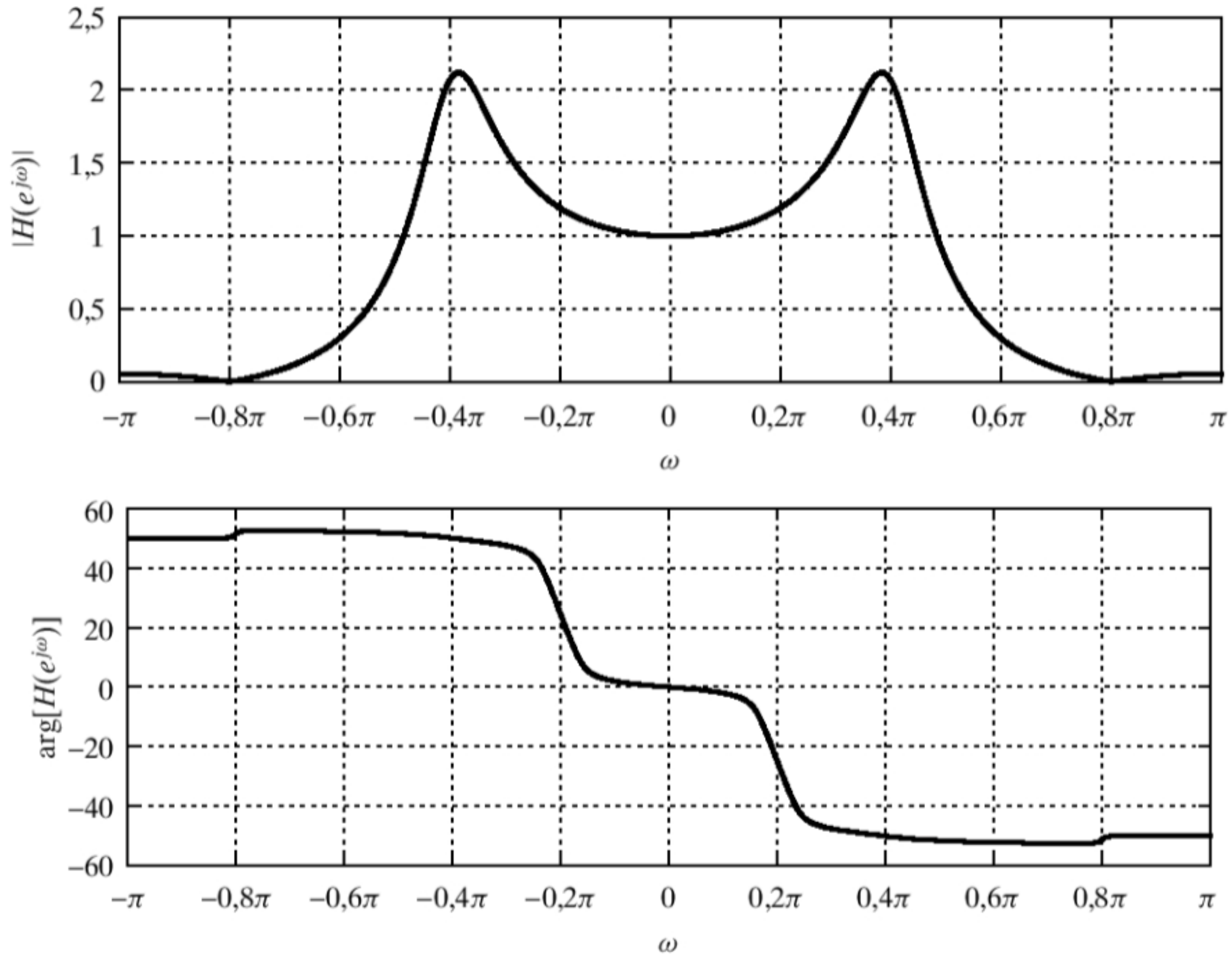


Sistema de tempo discreto:

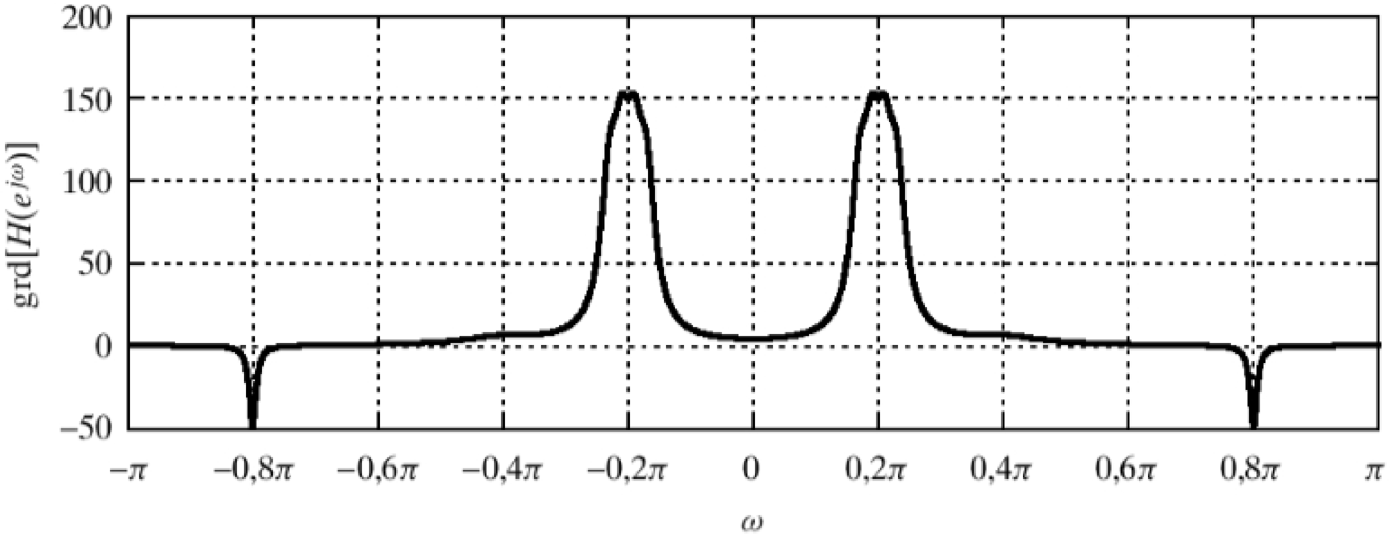
$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left[\frac{\left(1-0{,}98e^{j0{,}8\pi}e^{-j\omega}\right)\left(1-0{,}98e^{-j0{,}8\pi}e^{-j\omega}\right)}{\left(1-0{,}8e^{j0{,}4\pi}e^{-j\omega}\right)\left(1-0{,}8e^{-j0{,}4\pi}e^{-j\omega}\right)}\right]\prod_{k=1}^{4}\left[\frac{\left(c_k^*-e^{-j\omega}\right)\left(c_k-e^{-j\omega}\right)}{\left(1-c_k e^{-j\omega}\right)\left(1-c_k^* e^{-j\omega}\right)}\right]$$

$$c_k=0{,}95e^{j\left(0{,}15\pi+0{,}02\pi k\right)}\qquad k=1,2,3,4$$

Resposta em Frequência do sistema:



Atraso de grupo:

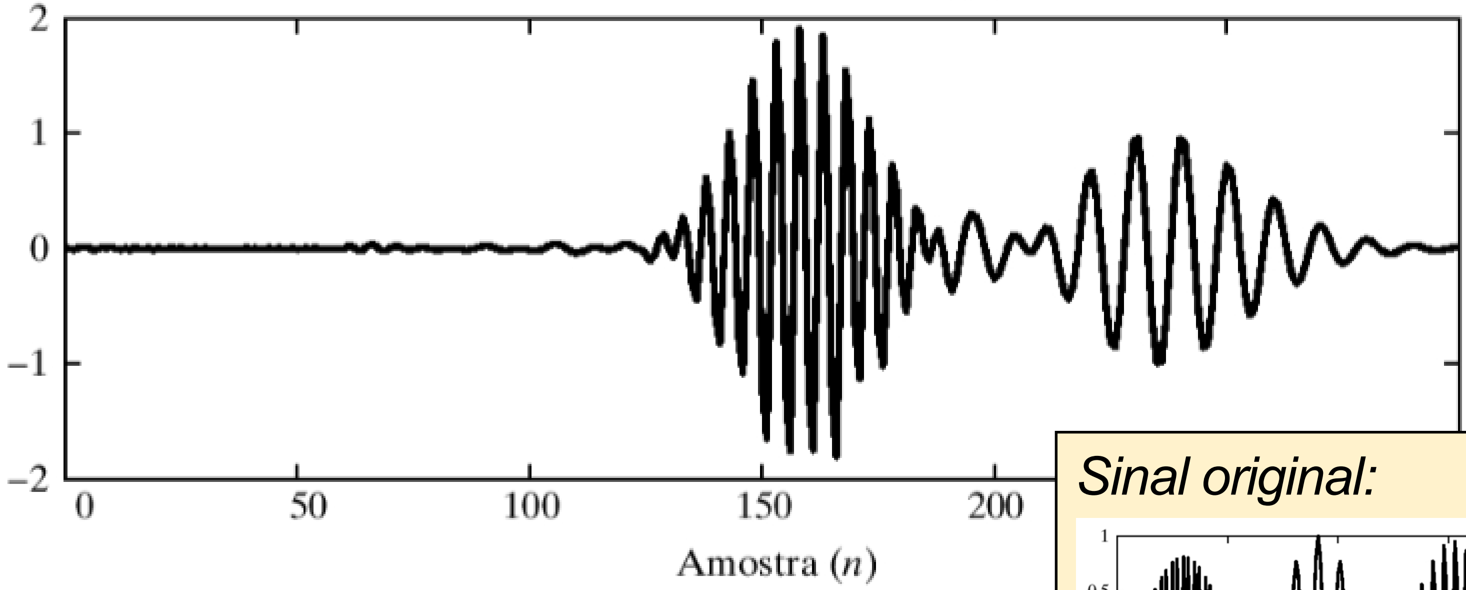


<u>Atrasos de Grupo (Aproximado):</u>

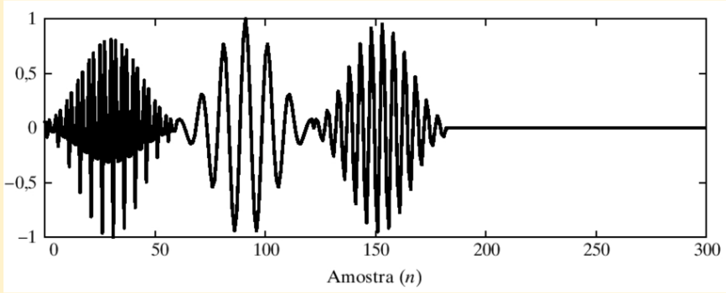
- 0,2π rad → 150 amostras;
- 0,4π rad → 10 amostras;
- 0,8π rad → -50 amostras;

Como o atraso de grupo não é constante, o sistema sofre com distorção.

Sinal Resultante após aplicação de *x*[*n*] no sistema:



Sinal original:



- O pulso de 0,8π rad foi zerado, o pulso de 0,4π rad foi amplificado e o pulso 0,2π rad foi levemente amplificado;
- O pulso de 0,4π rad e de 0,2π rad "trocaram" de ordem (o atraso de grupo de 0,2π rad é superior ao de 0,4π rad).