UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO (UFERSA)
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS (CMPF)
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS E TECNOLOGIA (DETEC)

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Aula 06
Representação de Sistemas de Tempo Discreto

Prof.: Pedro Thiago Valério de Souza
UFERSA – Campus Pau dos Ferros
pedro.souza@ufersa.edu.br

Introdução

- Implementação de um sistema de tempo discreto;
  - Algoritmo;
  - Estrutura de *Hardware*;
- Equação de diferenças de ordem *N*:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad a_0 = 1$$

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

<u>Operações básicas:</u>

Deslocamento: $y[n] \rightarrow y[n-k]$

$x[n] \rightarrow x[n-k]$

Multiplicação: $y[n-k] \rightarrow a_k y[n-k]$

$x[n-k] \rightarrow b_k x[n-k]$

Soma: $\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] \qquad \sum_{k=1}^{M} b_k x[n-k]$

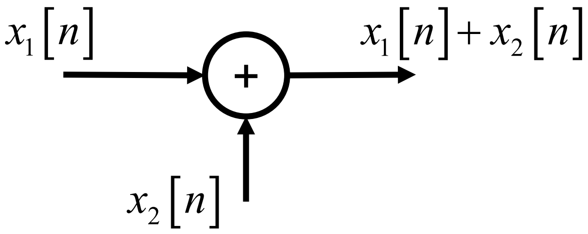
Introdução

- Representação de sistemas de tempo discreto:
  - Diagrama de blocos;
  - Diagrama de fluxo;
- Supor que o sistema é causal.

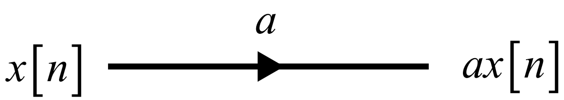
Representação em diagrama de blocos

- Blocos elementares:

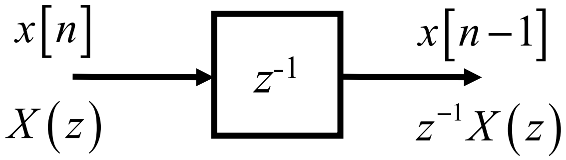
Soma:



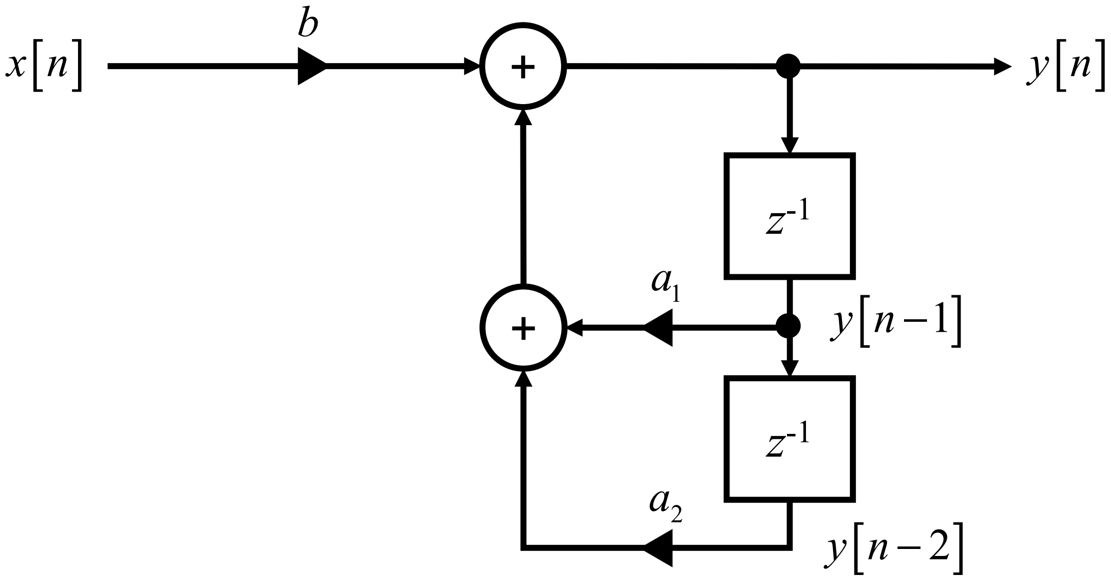
Multiplicação:



Deslocamento:

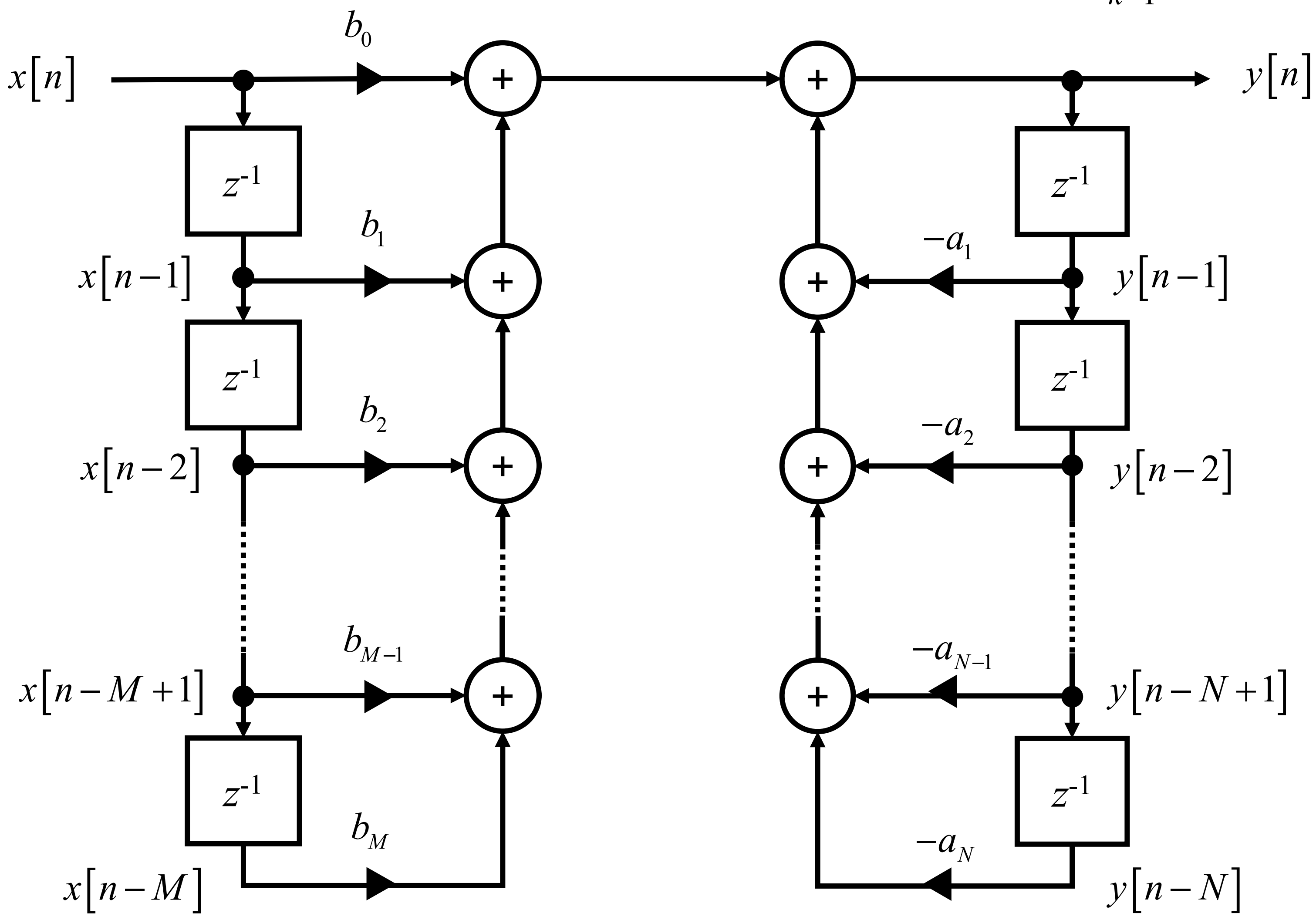


Exemplo 1: $y[n]=a_1y[n-1]+a_2y[n-2]+bx[n]$



Representação em diagrama de blocos

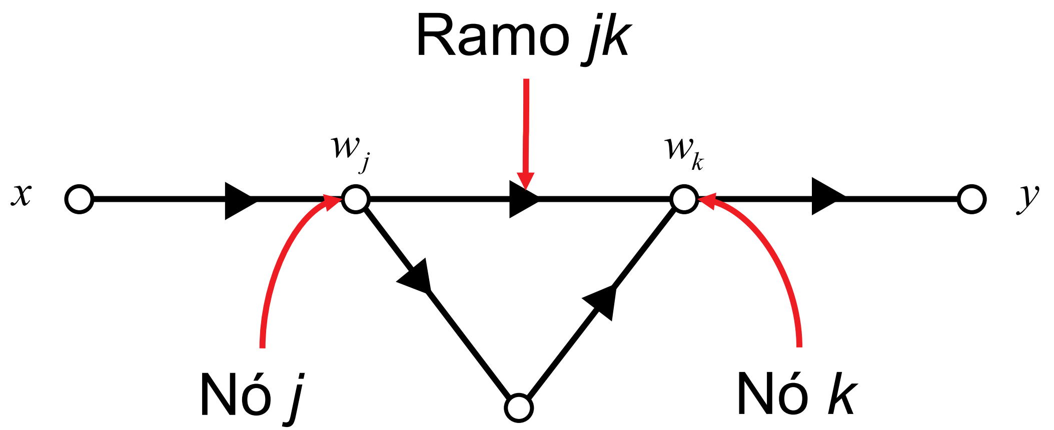
- Para uma equação diferenças genérica: $y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$



Existem outras formas para representar a mesma equação de diferenças.

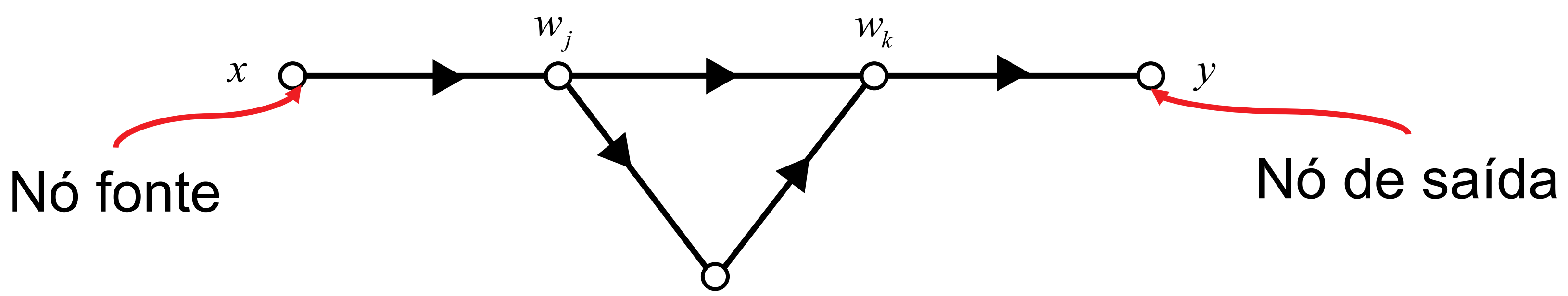
Representação em diagramas de fluxo

- Representação semelhante ao diagrama de blocos, porém mais simplificada.



- Nó: Ponto de ligação;
- Para cada nó existe um valor associado;
- Ramo *jk*: ligação do nó *j* para o nó *k*, com direção indicada pela seta;
  - Cada ramo executa uma transformação sobre a entrada;
    - Ganho;
    - Deslocamento.

Representação em diagramas de fluxo

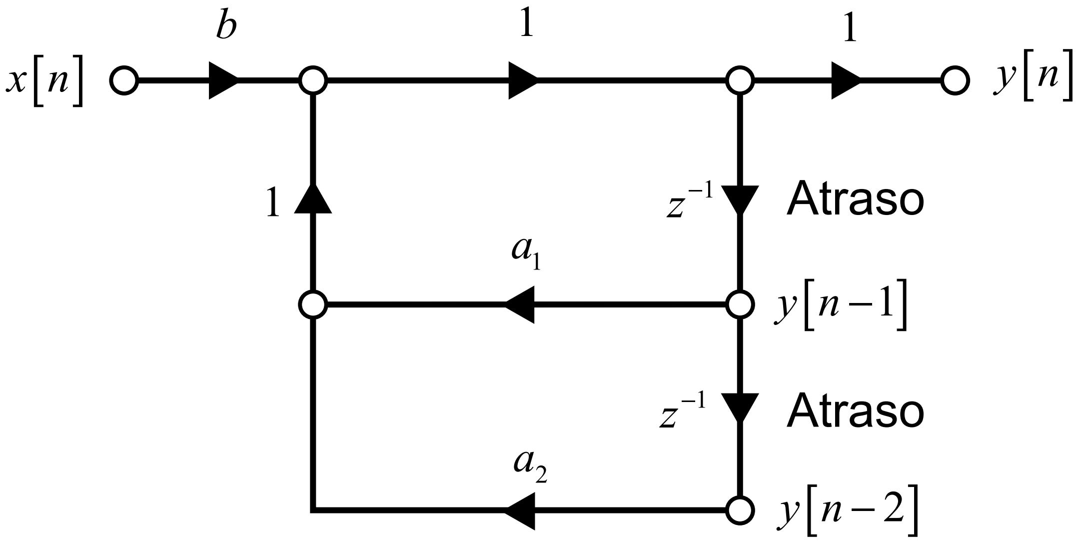


$$w_k[n] = \sum \text{Saídas dos ramos que entram no nó } k$$

- Nó fonte: Nó em que não há ramos de entrada, apenas ramos de saída;
- Nó de saída: Nó que só possui ramos de entrada.

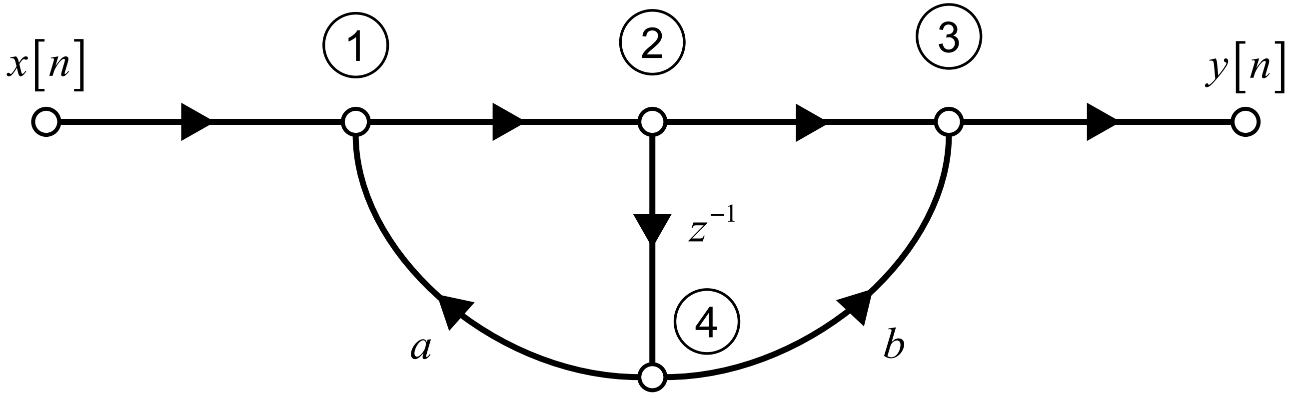
Representação em diagramas de fluxo

Exemplo 2: $y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + bx[n]$



Representação em diagramas de fluxo

Exemplo 3:

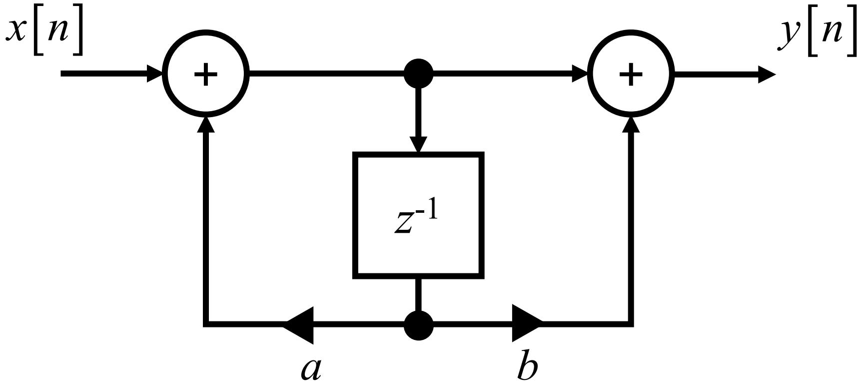


Resposta: $y[n] = x[n] + bx[n-1] + ay[n-1]$

Representação em diagramas de fluxo

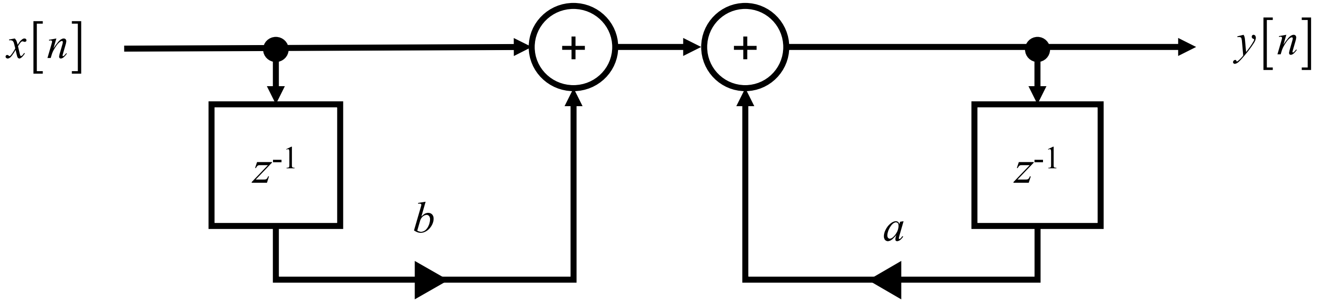
$$y[n] = x[n] + bx[n-1] + ay[n-1]$$

Diagrama de blocos (a partir do diagrama de fluxo):



Diagramas de blocos diferentes, mas que executam a mesma função.

Diagrama de blocos (a partir da equação de diferença):

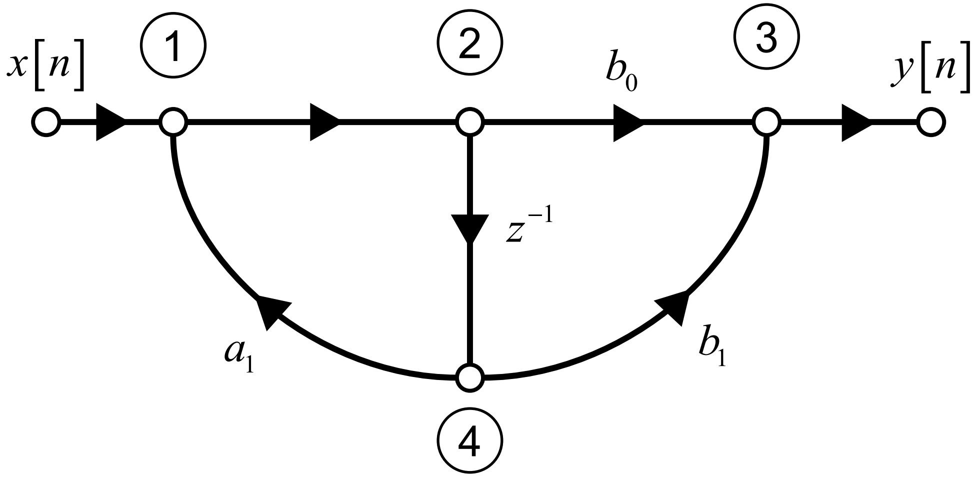


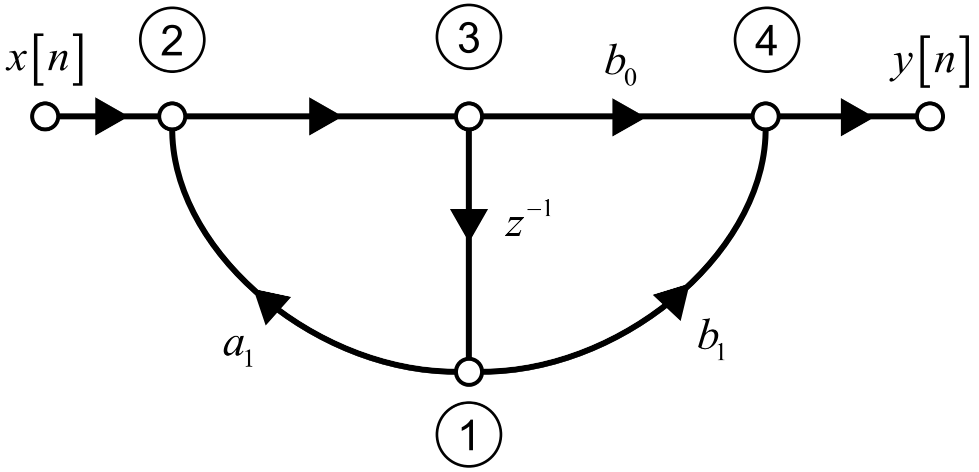
Representação em diagramas de fluxo

- Diagrama de Fluxo vs. Diagrama de Blocos:
  - Diagrama de Blocos:
    - Nós: Só podem ser pontos de ramificação;
    - Existe um bloco especial para somador;
  - Diagrama de Fluxo:
    - Nós: Podem ser pontos de ramificação ou somadores;
      - Várias saídas, uma entrada: Ramificação;
      - Uma saída, várias entradas: Somador;
    - Não há um bloco especial para somador;

Sistemas computáveis

- São sistemas em que a numeração dos nós permite que eles sejam computados em ordem.





$$
\begin{aligned}
w_1[n] &= x[n] + a_1 w_4[n] \\
w_2[n] &= w_1[n] \\
w_3[n] &= b_0 w_2[n] + b_1 w_4[n] \\
w_4[n] &= w_2[n-1] \\
y[n] &= w_3[n]
\end{aligned}
$$

Rede não computável

$$
\begin{aligned}
w_1[n] &= w_3[n-1] \\
w_2[n] &= a_1 w_1[n] + x[n] \\
w_3[n] &= w_2[n] \\
w_4[n] &= b_1 w_1[n] + b_0 w_3[n] \\
y[n] &= w_4[n]
\end{aligned}
$$

Rede computável

Representação de Sistemas de Tempo Discreto

- Como representar um sistema de tempo discreto através de uma rede digital linear?
  - Variedades de configuração possíveis;
  - Diferentes complexidades computacionais;
    - Menos multiplicadores: operações mais rápidas;
    - Menos atrasos: menos requisitos de memória;
- Equação diferença:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \begin{cases} a_k = 0 & \rightarrow \text{Sistema FIR} \\ a_k \neq 0 & \rightarrow \text{Sistema IIR} \end{cases}$$

Representação de Sistemas IIR

- Formas de Implementação de Sistemas IIR:
  - Formas Diretas;
  - Formas Transpostas;
  - Estrutura em Cascata;
  - Estrutura em Paralelo.

Formas Diretas

- Forma Direta: Implementa diretamente os coeficientes da função de sistema;

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \qquad a_0 = 1$$

$$y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$Y(z) + Y(z)\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

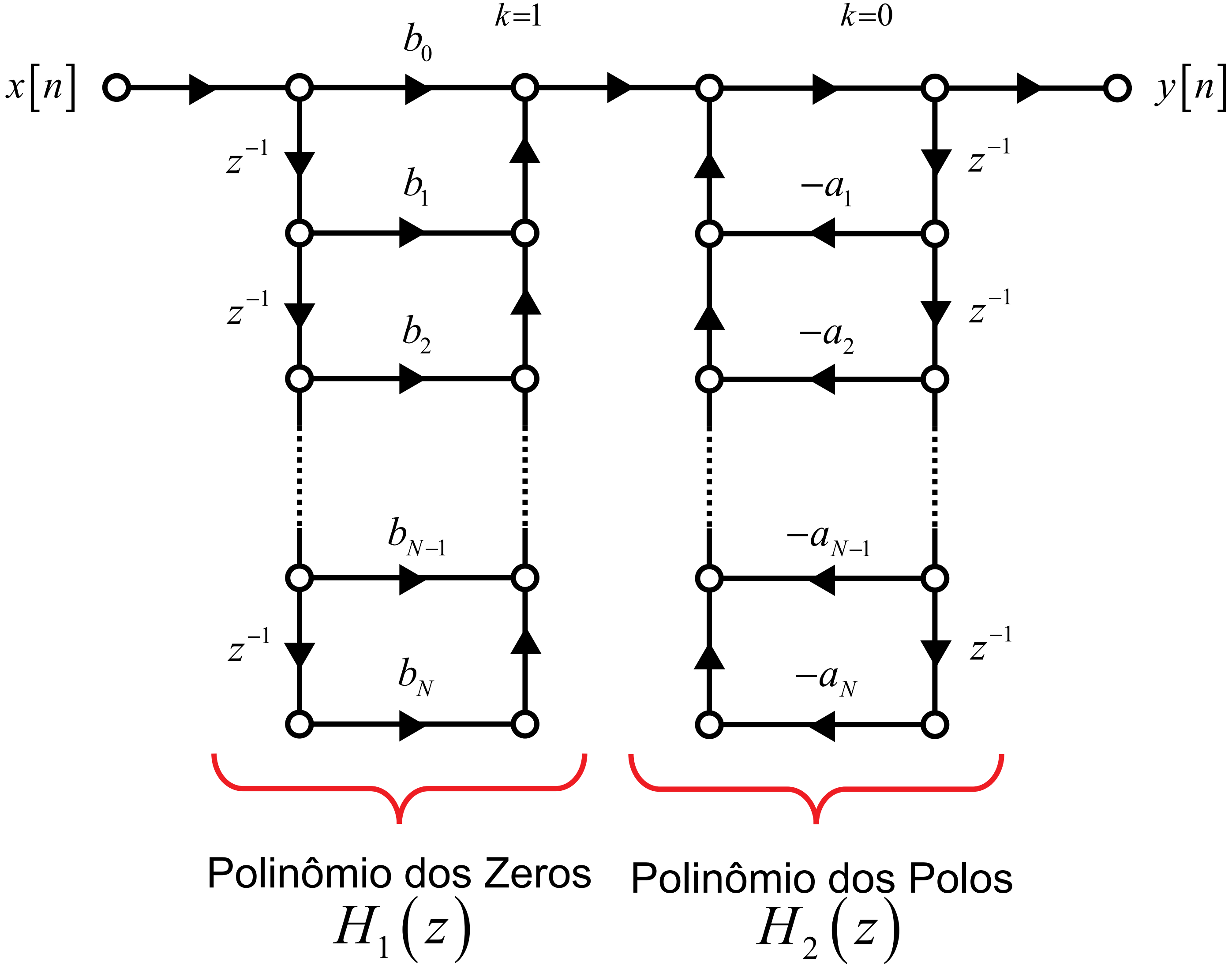
Formas Diretas

- Forma Direta I: $y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

Considerando: *M* = *N*

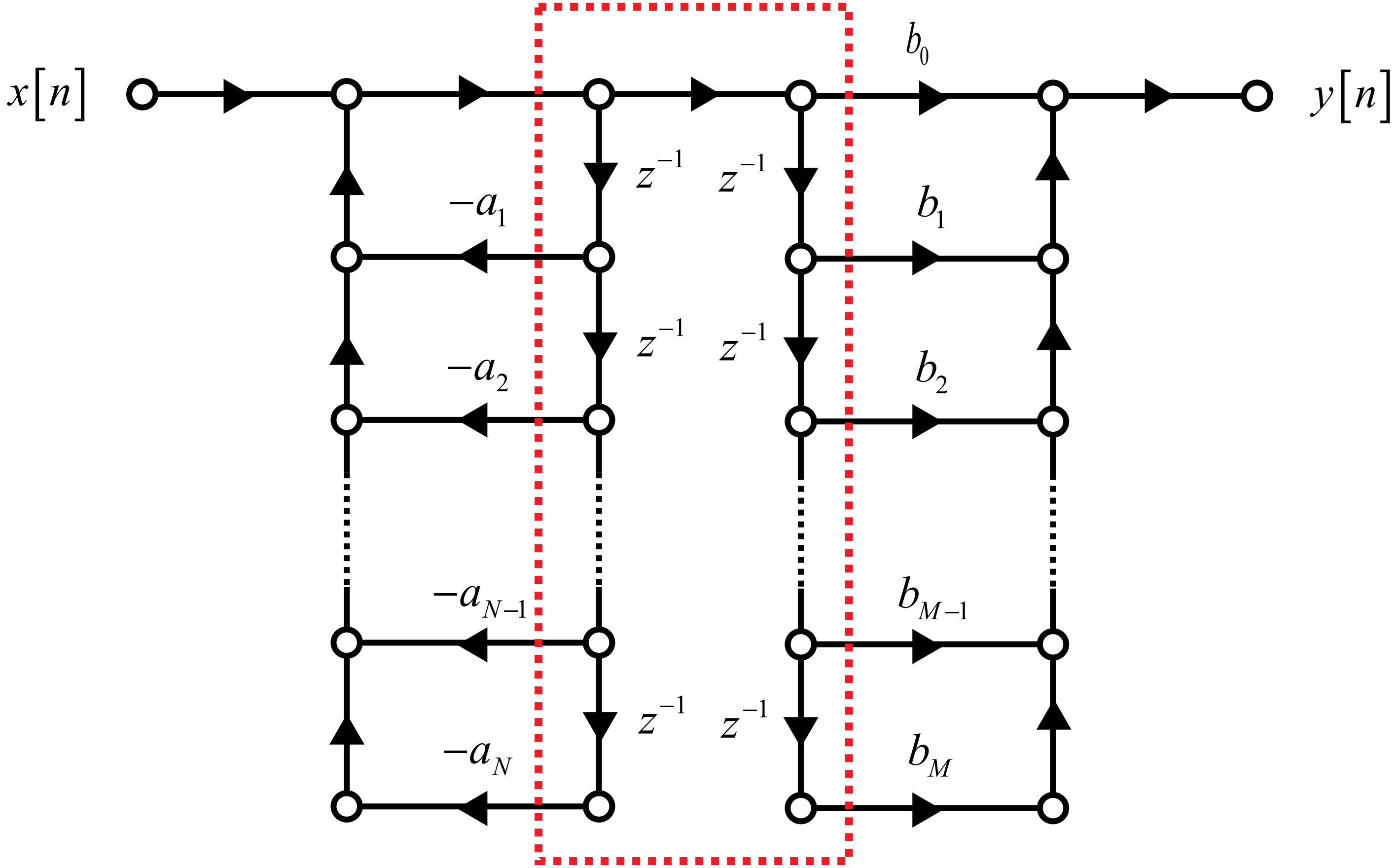
Forma Direta I

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$



Formas Diretas

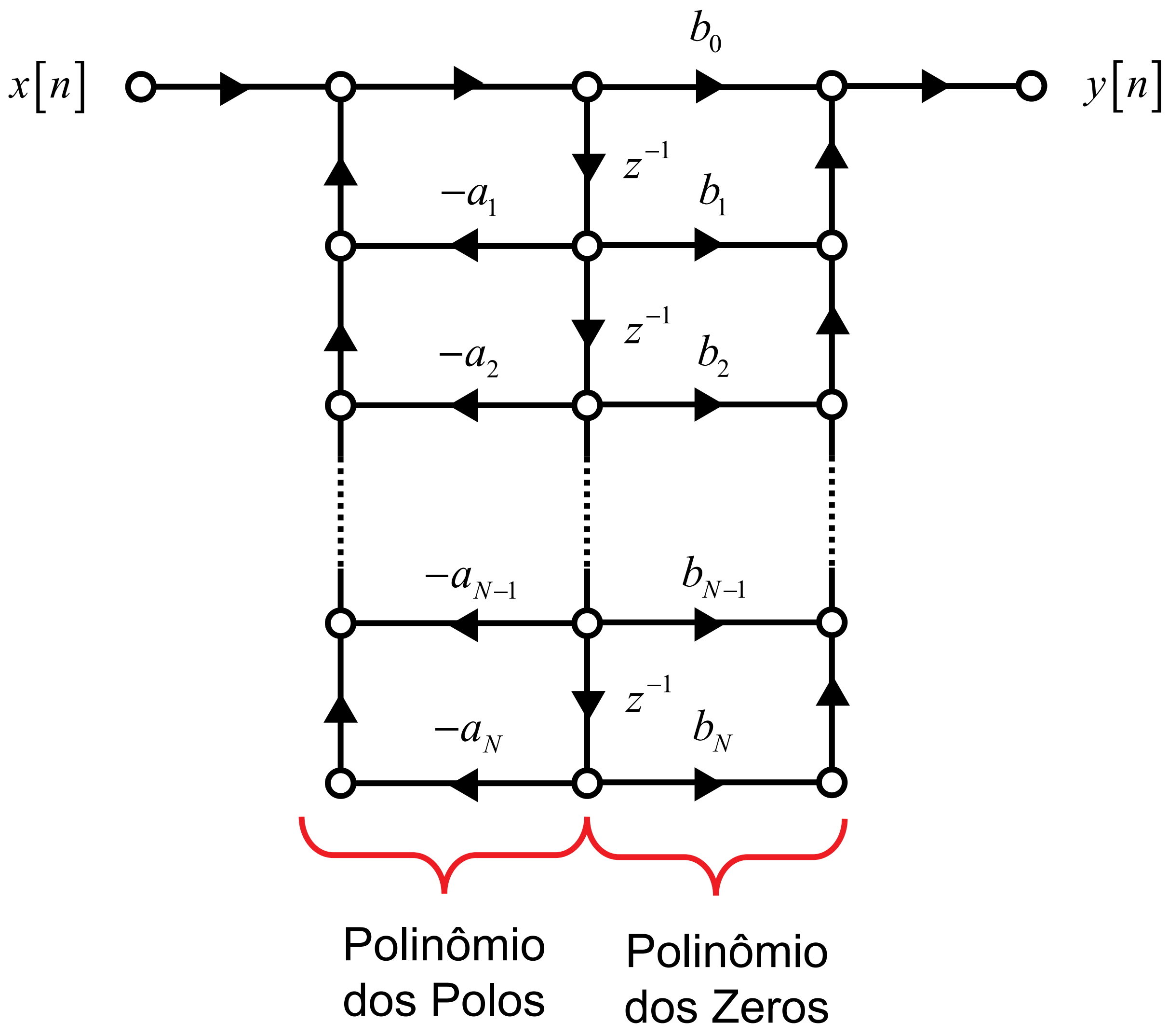
- Os sistemas $H_1(z)$ e $H_2(z)$ podem ser permutados:



Redes de atraso que podem ser unidas

Formas Diretas

- Reunindo as duas redes:



Considerando: *M* = *N*

Forma Direta II

Implementação com menos elementos de atrasos

Forma canônica: Implementação que utiliza a menor quantidade possível de atrasos

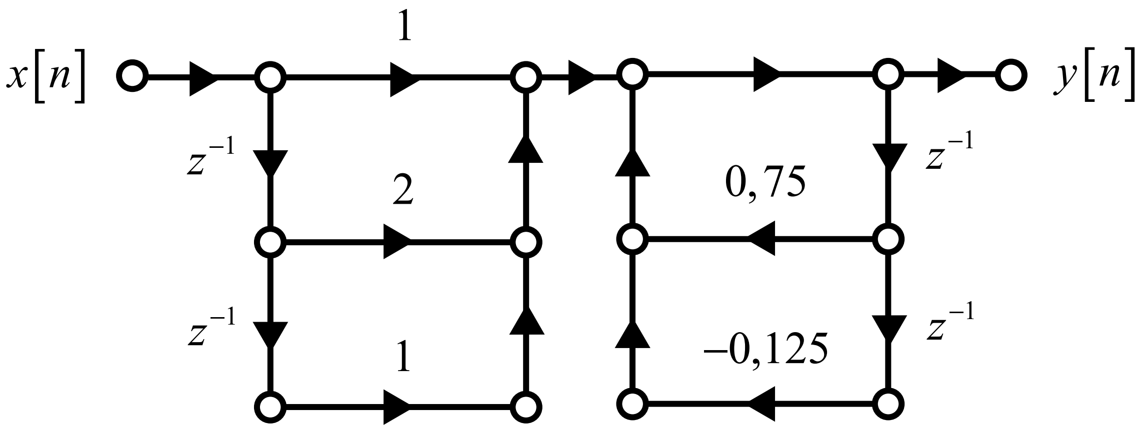
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Formas Diretas

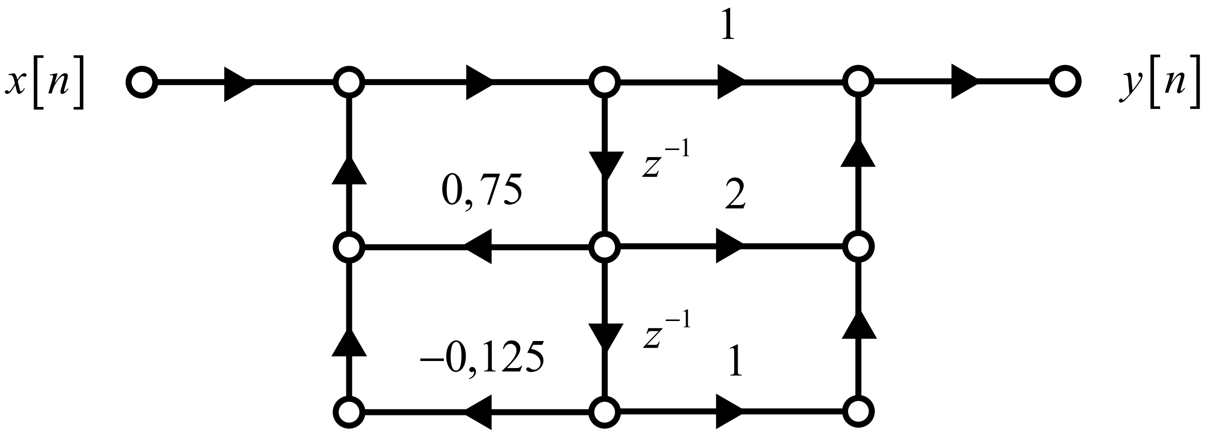
Exemplo 4:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,75z^{-1} + 0,125z^{-2}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \quad \left\{ \begin{array}{ll} b_0 = 1 & \\ b_1 = 2 & a_1 = -0,75 \\ b_2 = 1 & a_2 = 0,125 \end{array} \right.$$

Forma direta I:



Forma direta II:

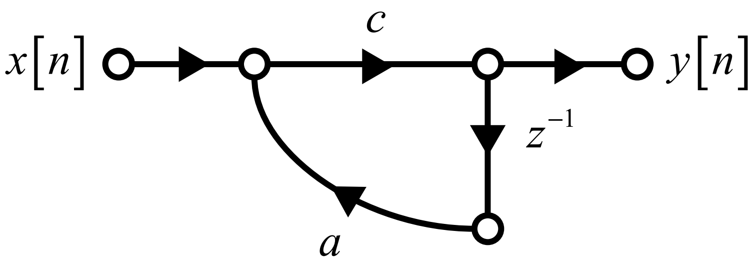


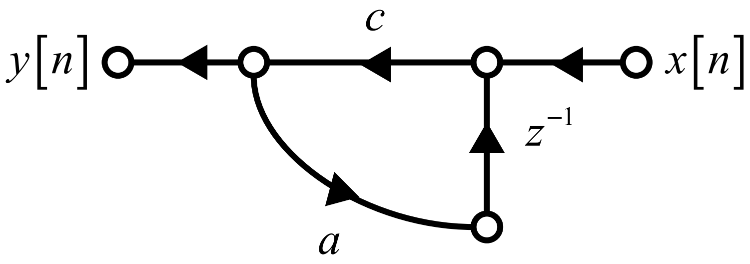
Teorema da Transposição

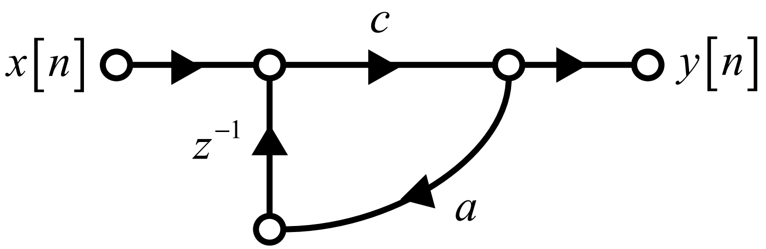
1) Inverter a direção de todos os ramos;
2) Trocar a entrada e saída de posição.

Função de Sistema permanece a mesma.

Exemplo 5:

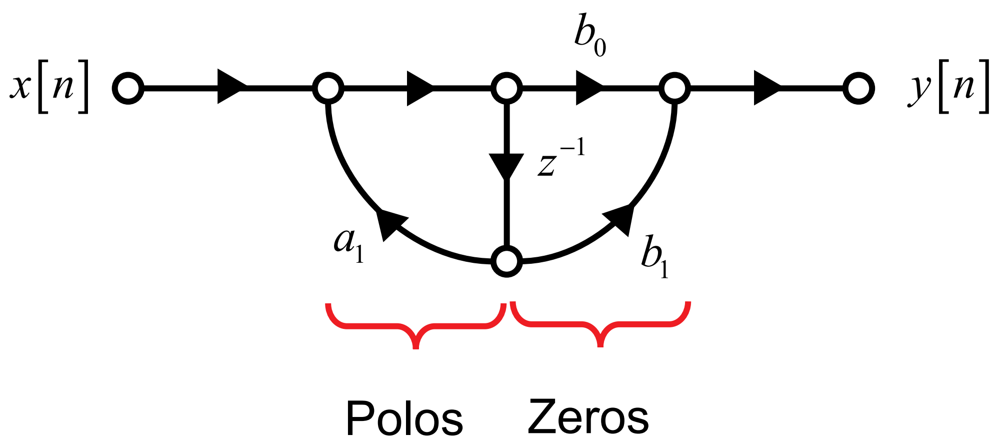


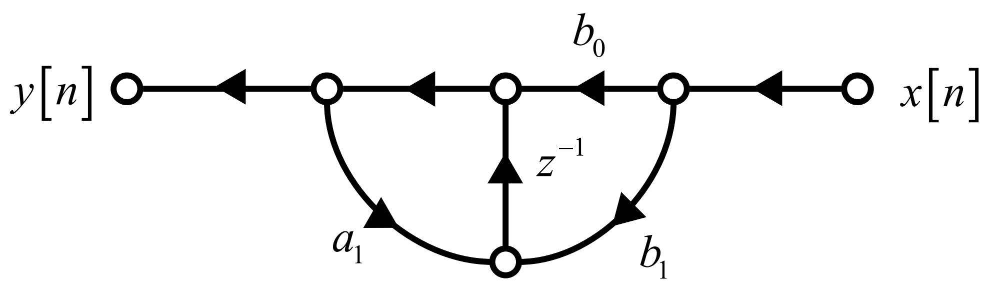


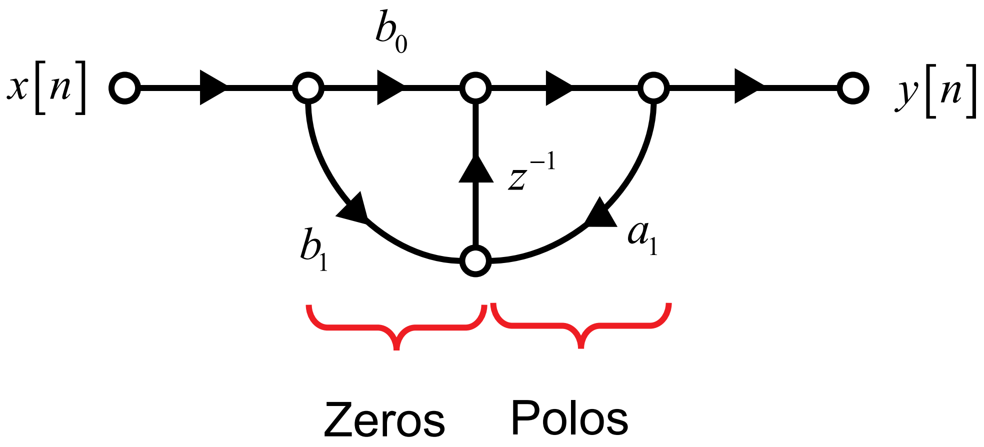


Teorema da Transposição

Exemplo 6: $H(z) = \dfrac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$ Forma direta II

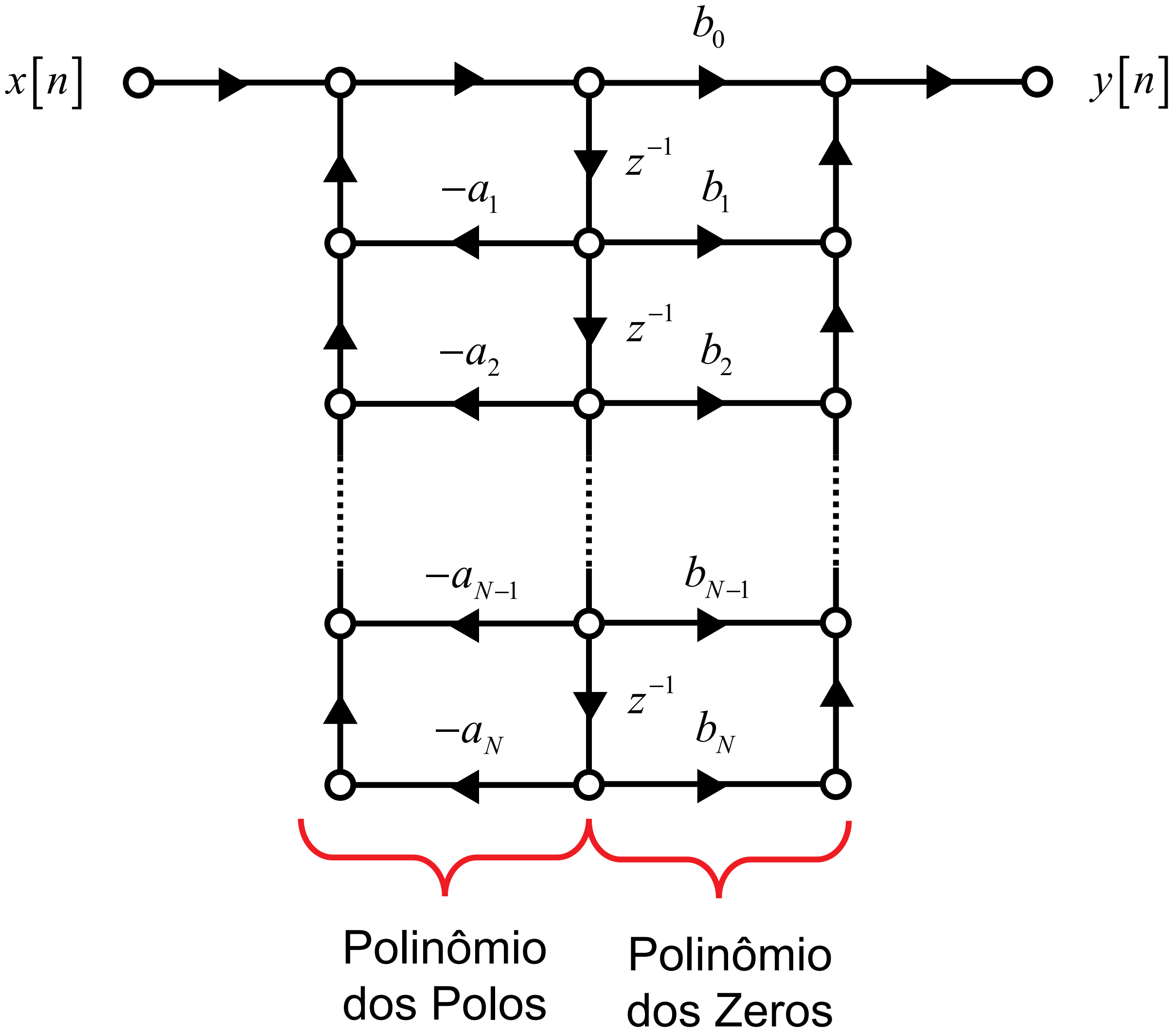






Teorema da Transposição

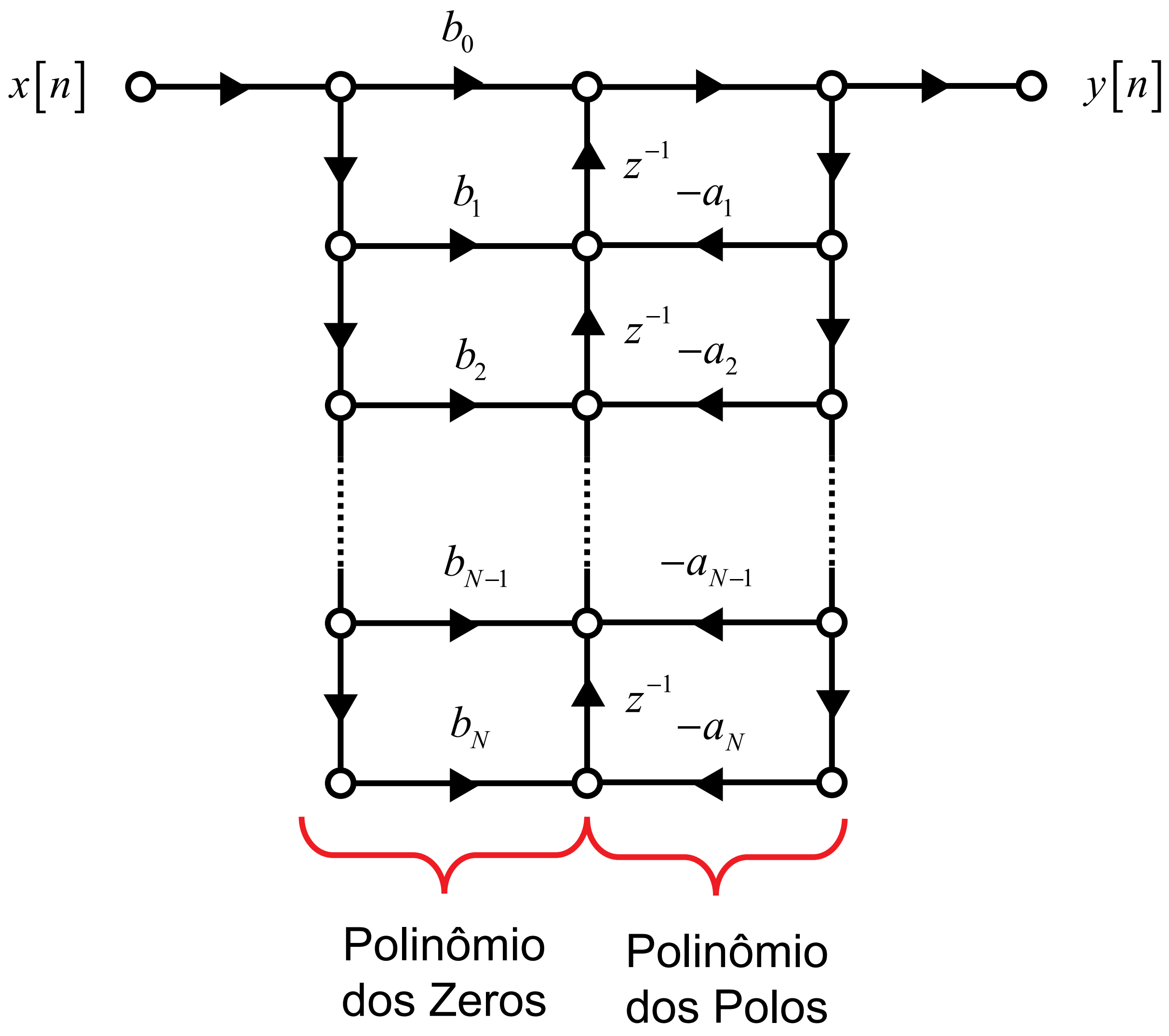
- Forma Direta II (Normal):



$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Teorema da Transposição

- Forma Direta II Transposta:



$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Ainda continua sendo uma forma canônica.

Estrutura em Cascata

- Fatoração da função transferência em fatores menores (tipicamente de 1º ou de 2º ordem);
- Vantagem: Melhora a implementação em sistemas em que é usado ponto fixo com poucos *bits*;
  - Quanto maior a ordem do polinômio, maior é o erro devido ao ponto fixo;

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{b_0+b_1 z^{-1}+\cdots+b_M z^{-M}}{1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}}=\frac{b_0\left(1+b_1/b_0\, z^{-1}+\cdots+b_M/b_0\, z^{-M}\right)}{1+a_1 z^{-1}+\cdots+a_N z^{-N}}$$

$$=b_0\frac{\left(1-d_1 z^{-1}\right)\left(1-d_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1-d_M z^{-1}\right)}{\left(1-c_1 z^{-1}\right)\left(1-c_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1-c_N z^{-1}\right)}$$

$$=b_0\frac{\prod_{k=1}^{M} 1-d_k z^{-1}}{\prod_{k=1}^{N} 1-c_k z^{-1}}$$

Estrutura em Cascata

- Os polos/zeros reais podem ser agrupados em pares;
- Os polos/zeros complexos podem ser agrupados juntamente com seus complexos conjugados; $\Longleftrightarrow$ Termos de segunda ordem

$$H(z) = b_0 \prod_{k=1}^{\lfloor (N+1)/2 \rfloor} \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}$$

$$H_k(z) = \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}} \Rightarrow H(z) = \prod_{k=1}^{\lfloor (N+1)/2 \rfloor} H_k(z)$$

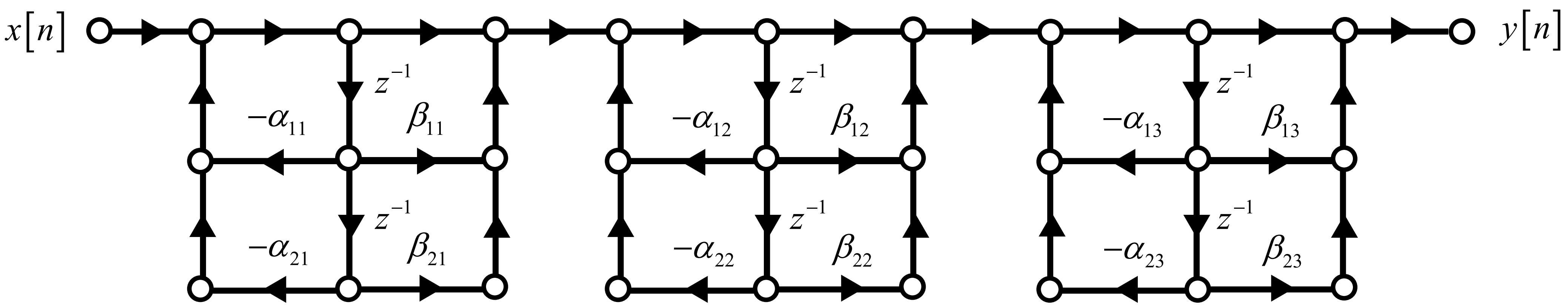
- Os termos de 2º ordem podem ser implementados com as formas diretas.

Estrutura em Cascata

Exemplo 7: Sistema de ordem 6.

$$H(z) = A\prod_{k=1}^{\lfloor (6+1)/2 \rfloor} \frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-1}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-1}} = A\prod_{k=1}^{3} \frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-1}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-1}}$$

$$H_k(z) = \frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1+\alpha_{1k}z^{-1}+\alpha_{2k}z^{-2}} \Rightarrow H(z) = \prod_{k=1}^{3} H_k(z)$$

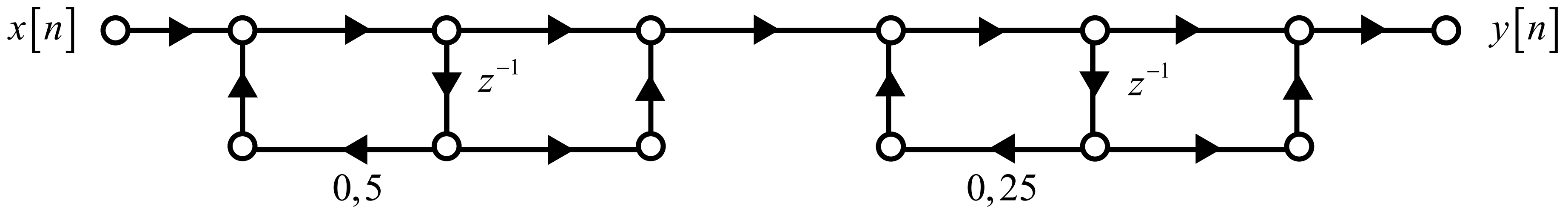


Estrutura em Cascata

Exemplo 8: $$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-0{,}75z^{-1}+0{,}125z^{-2}}=\frac{\left(1+z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-0{,}5z^{-1}\right)\left(1-0{,}25z^{-1}\right)}$$

$$=\left(\frac{1+z^{-1}}{1-0{,}5z^{-1}}\right)\left(\frac{1+z^{-1}}{1-0{,}25z^{-1}}\right)$$

Termos de primeira ordem



Estrutura Paralela

- Soma da função de sistema em fatores menores (tipicamente de 1º ou de 2º ordem);
- Vantagem: Facilita a implementação de alguns filtros digitais;

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}}}_{\text{Polos diferentes entre si}} + \underbrace{C}_{M = N \text{ se } H(z) \text{ for causal.}}$$

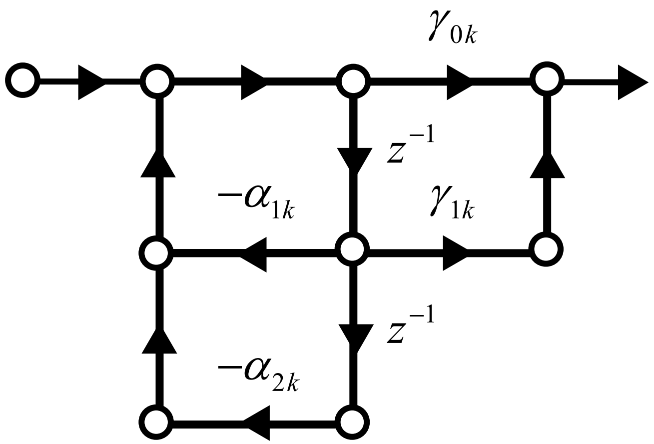
$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}}}_{\text{Polos reais}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k \left(1 - e_k z^{-1}\right)}{\left(1 - d_k z^{-1}\right)\left(1 - d_k^* z^{-1}\right)}}_{\text{Polos complexos, mas agrupados (com seu conjugado)}} + \underbrace{C}_{M = N \text{ se } H(z) \text{ for causal.}}$$

Estrutura Paralela

- Agrupando os polos reais em pares e os complexos em conjugados:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{\lfloor (N+1)/2 \rfloor} \underbrace{\frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}}_{H_k(z)} + C$$

$H_k(z)$ ➡ Forma direta II

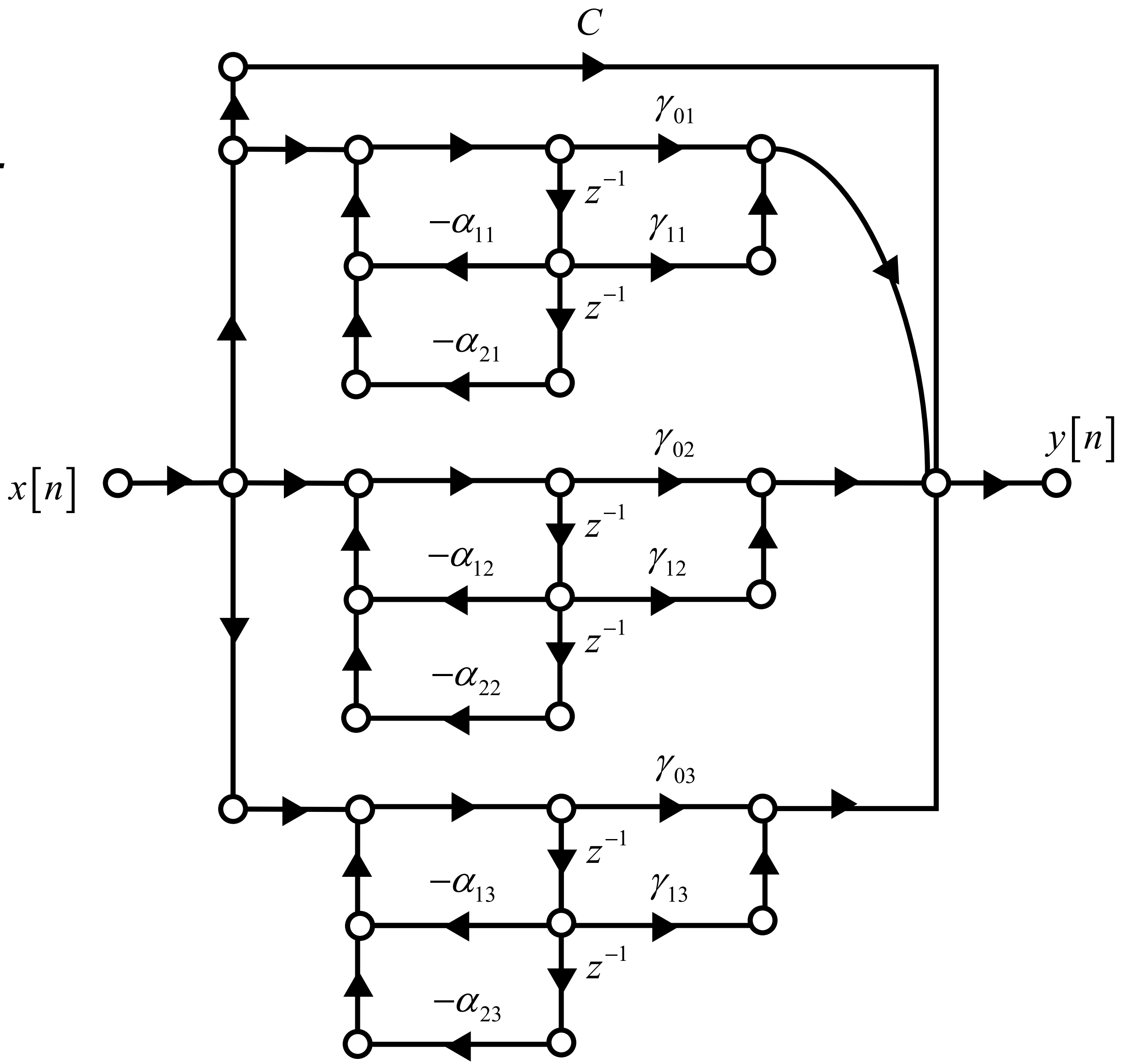


Estrutura Paralela

Exemplo 9: Sistema de ordem 6, com $M = N$.

$$H_k(z) = \frac{\gamma_{0k} + \gamma_{1k} z^{-1}}{1 + \alpha_{1k} z^{-1} + \alpha_{2k} z^{-2}}$$

$$H(z) = \sum_{k=1}^{3} H_k(z) + C$$



Representação para Sistemas FIR

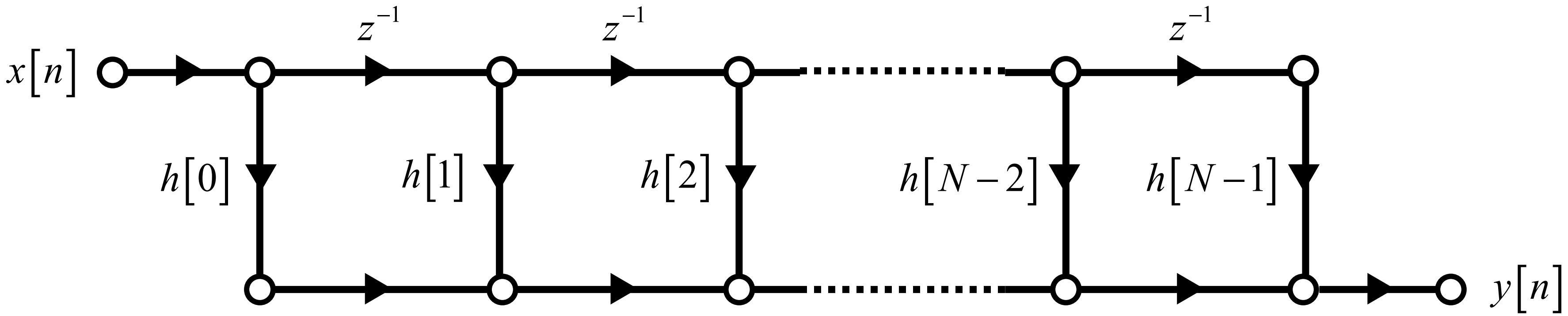
- Forma direta;
- Forma direta transposta;
- Forma em cascata;
- Estruturas para sistemas FIR com fase linear;

Forma Direta

- Sistemas FIR → Reposta ao impulso com duração finita;
- Admitindo apenas sistemas causais:

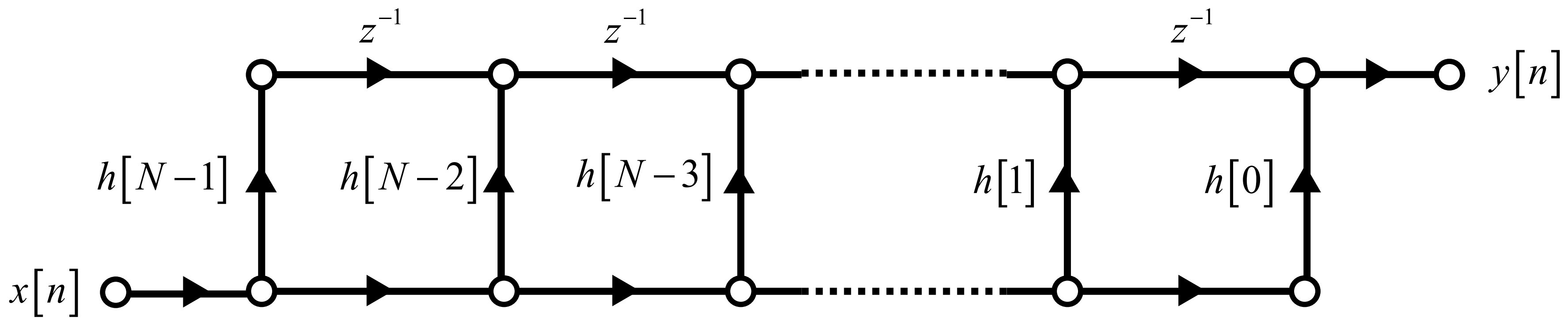
$$h[n]=0 \quad \begin{cases} n<0 \\ n>N-1 \end{cases} \Rightarrow \quad y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]=h[0]x[n]+h[1]x[n-1]+\cdots+h[N-1]x[n-N+1]$$



Forma Direta Transposta

- Aplicar o teorema da transposição na forma direta:



Forma em Cascata

- Escrever a função de sistema como um produto de termos de primeira ou segunda ordem:

$$h[n] = 0 \quad \begin{cases} n < 0 \\ n > N-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] z^{-n}$$

$$= h[0] + h[1] z^{-1} + \cdots + h[N-1] z^{-(N-1)}$$

$$= h[0] \left(1 + \frac{h[1]}{h[0]} z^{-1} + \cdots + \frac{h[N-1]}{h[0]} z^{-(N-1)} \right)$$

$$= h[0] \left[\left(1 - c_1 z^{-1}\right)\left(1 - c_2 z^{-1}\right) \cdots \left(1 - c_{N-1} z^{-1}\right) \right]$$

$$= h[0] \left[\prod_{k=1}^{N-1} \left(1 - c_k z^{-1}\right) \right]$$

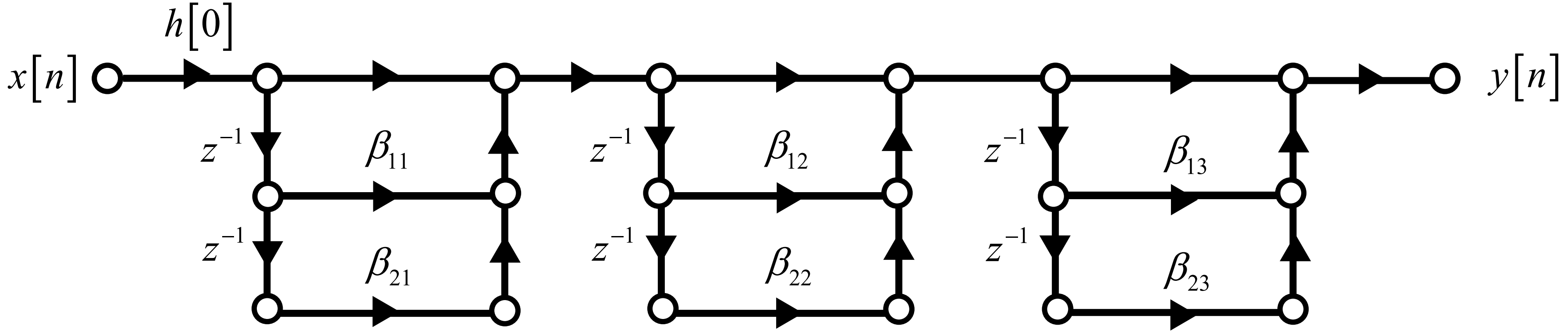
Forma em Cascata

$$H(z) = h[0]\left[\prod_{k=1}^{N-1}\left(1 - c_k z^{-1}\right)\right]$$

N impar → $H(z) = h[0]\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}\right)$

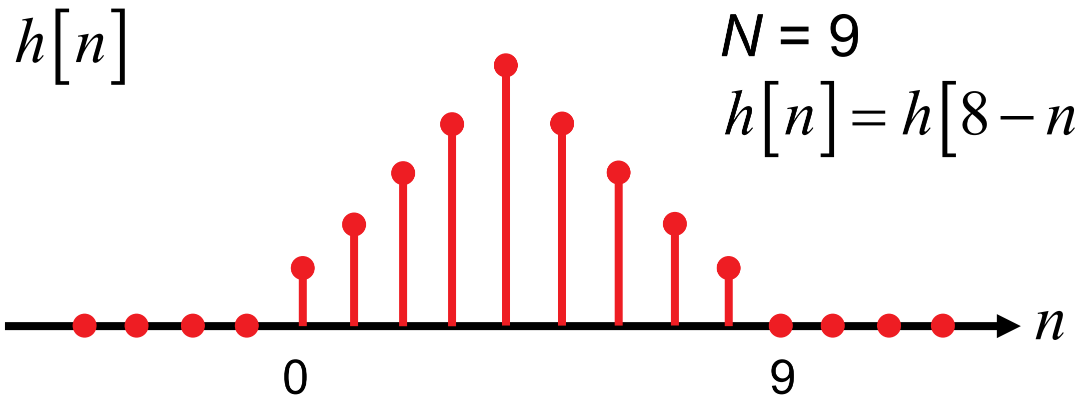
N par → $H(z) = h[0]\left(1 - \alpha z^{-1}\right)\prod_{k=1}^{(N-2)/2}\left(1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}\right)$

Exemplo 10: *N* = 7 $H(z) = h[0]\left(1 + \beta_{11} z^{-1} + \beta_{21} z^{-2}\right)\left(1 + \beta_{12} z^{-1} + \beta_{22} z^{-2}\right)\left(1 + \beta_{13} z^{-1} + \beta_{23} z^{-2}\right)$



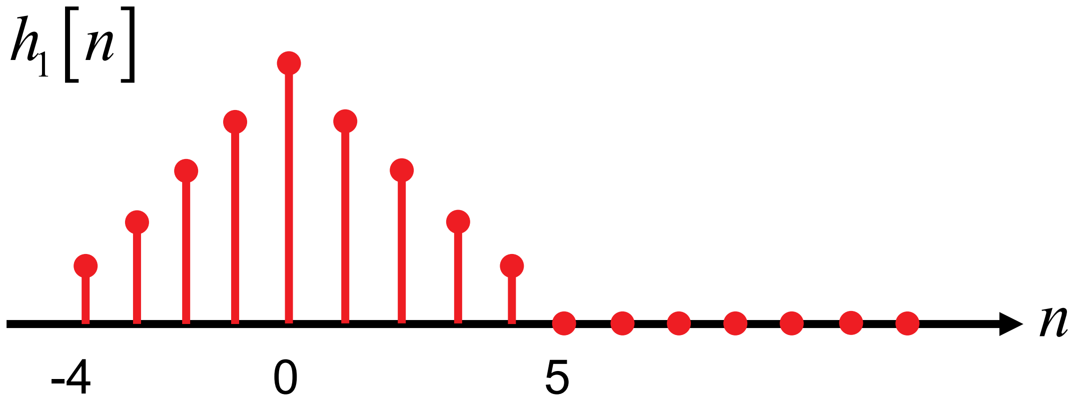
Estruturas para Filtros FIR com Fase Linear

- Filtro FIR → É possível projetar de forma a terem fase linear;
- Condição para fase linear: $h[n] = h[N-1-n]$



$N = 9$

$h[n] = h[8-n]$



$$h[n] = h_1[n-4]$$

- De forma geral:

<u>N impar</u> → $h[n] = h_1\left[n - \dfrac{N-1}{2}\right]$ ➡ $H\left(e^{j\omega}\right) = H_1\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)}$

$h_1[n]$ Par → $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ Real ➡ $\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right) = -\omega\left(\dfrac{N-1}{2}\right)$ (Linear)

Estruturas para Filtros FIR com Fase Linear

- Assumindo *N* par:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{N/2-1}h[n]z^{-n}+\underbrace{\sum_{n=N/2}^{N-1}h[n]z^{-n}}_{n=N-1-r}=\sum_{n=0}^{N/2-1}h[n]z^{-n}+\sum_{r=0}^{N/2-1}\underbrace{h[N-1-r]}_{h[r]}z^{-(N-1-r)}$$

$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}h[n]z^{-n}+\sum_{r=0}^{N/2-1}h[r]z^{-(N-1-r)}=\sum_{n=0}^{N/2-1}h[n]z^{-n}+\sum_{n=0}^{N/2-1}h[n]z^{-(N-1-n)}$$

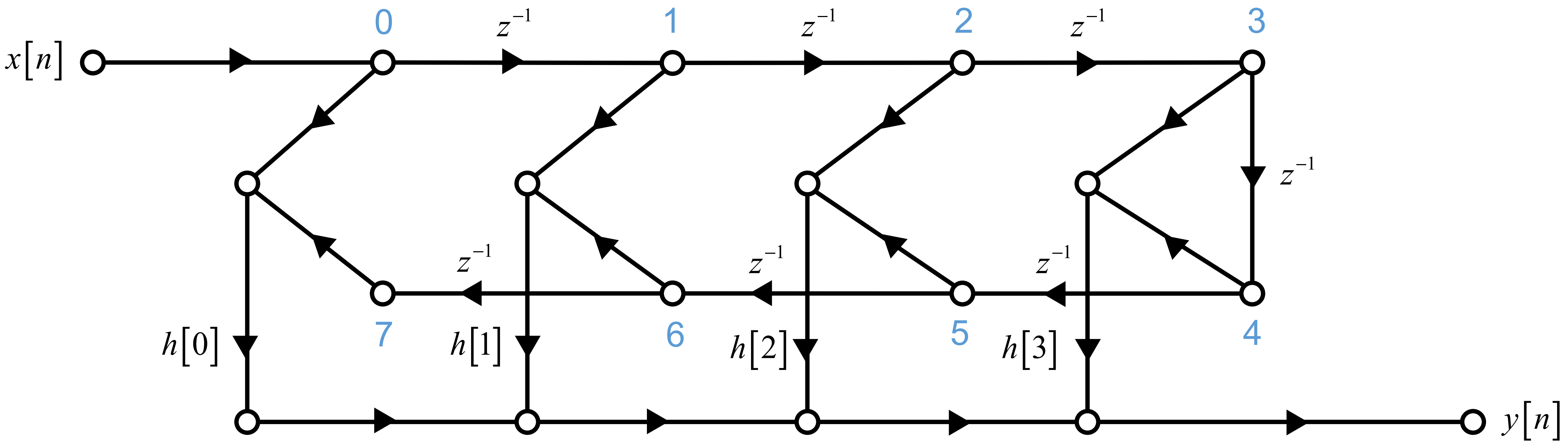
$$=\sum_{n=0}^{N/2-1}h[n]\left[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}\right]$$

Estruturas para Filtros FIR com Fase Linear

- Para *N* par: $H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h[n]\left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\right]$

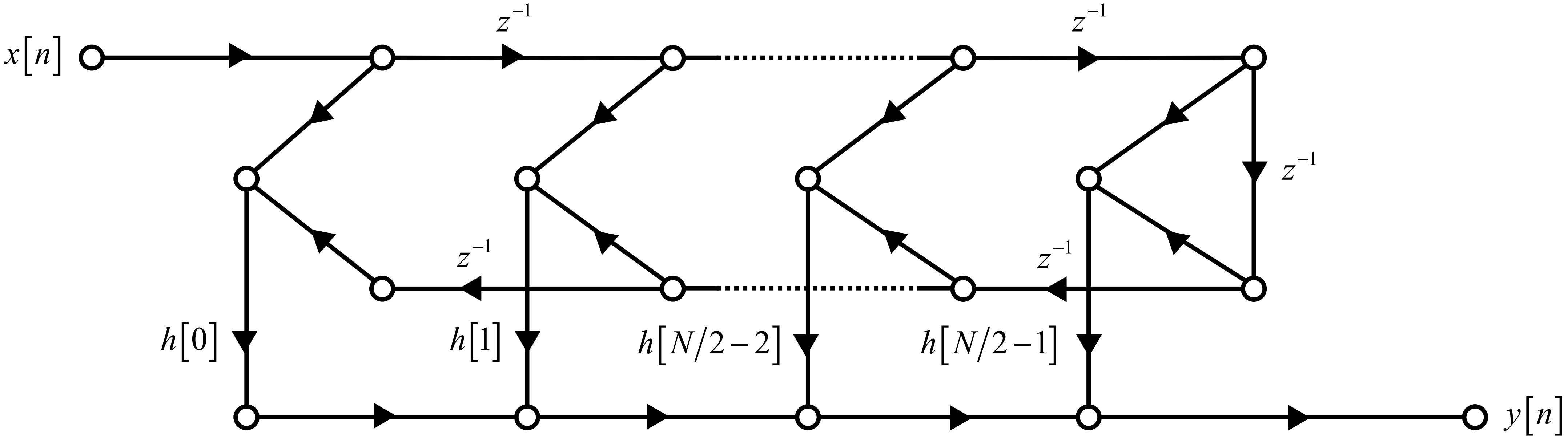
Exemplo 11: *N* = 8 $H(z) = \sum_{n=0}^{3} h[n]\left[z^{-n} + z^{-(7-n)}\right]$

$$= h[0]\left[1 + z^{-7}\right] + h[1]\left[z^{-1} + z^{-6}\right] + h[2]\left[z^{-2} + z^{-5}\right] + h[3]\left[z^{-3} + z^{-4}\right]$$



Estruturas para Filtros FIR com Fase Linear

- De forma geral, para um *N* par: $H(z)=\sum_{n=0}^{N/2-1} h[n]\left[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}\right]$



Estruturas para Filtros FIR com Fase Linear

- Assumindo *N* impar:

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1}h[n]z^{-n}+\underbrace{\sum_{n=(N-1)/2+1}^{N-1}h[n]z^{-n}}_{n=N-1-r}+h\left[\frac{N-1}{2}\right]z^{-(N-1)/2}$$

$$=\sum_{n=0}^{(N-1)/2-1}h[n]z^{-n}+\sum_{r=0}^{(N-1)/2-1}\underbrace{h[N-1-r]}_{h(r)}z^{-(N-1-r)}+h\left[\frac{N-1}{2}\right]z^{-(N-1)/2}$$

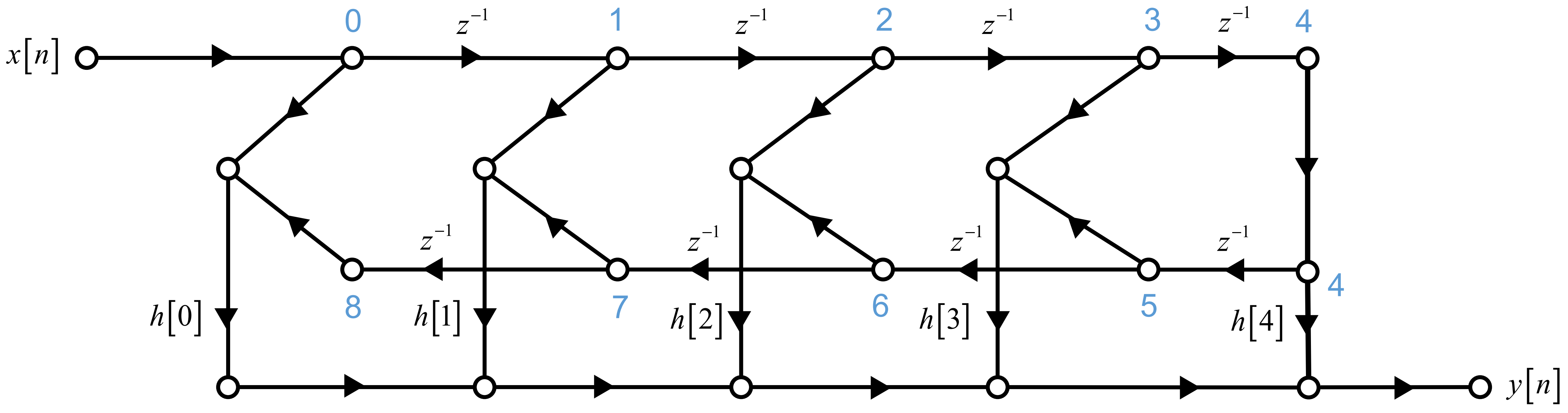
$$=\sum_{n=0}^{(N-1)/2-1}h[n]\left[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}\right]+h\left[\frac{N-1}{2}\right]z^{-(N-1)/2}$$

Estruturas para Filtros FIR com Fase Linear

- Para *N* impar: $H(z) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} h[n]\left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\right] + h\left[\frac{N-1}{2}\right] z^{-(N-1)/2}$

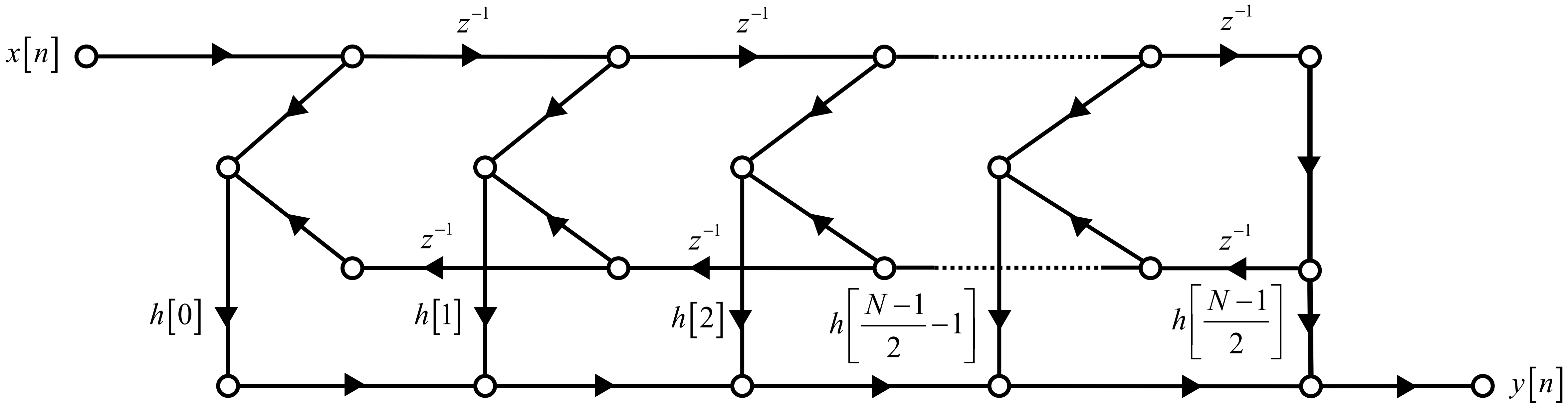
Exemplo12: *N* = 9 $H(z) = \sum_{n=0}^{3} h[n]\left[z^{-n} + z^{-(8-n)}\right] + h[4]z^{-4}$

$$= h(0)\left[1+z^{-8}\right] + h(1)\left[z^{-1}+z^{-7}\right] + h(2)\left[z^{-2}+z^{-6}\right] + h(3)\left[z^{-3}+z^{-5}\right] + h(4)z^{-4}$$



Estruturas para Filtros FIR com Fase Linear

- De forma geral, para um *N* impar: $H(z)=\sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} h(n)\left[z^{-n}+z^{-(N-1-n)}\right]+h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-(N-1)/2}$



Estruturas para Filtros FIR com Fase Linear

- Para outros tipos de Filtros FIR com fase linear:
  - Tipo I: $h[n] = h[N-1-n]$ (*N* impar)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} h[n]\left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\right] + h\left[\frac{N-1}{2}\right] z^{-(N-1)/2}$$

  - Tipo II: $h[n] = h[N-1-n]$ (*N* par)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h[n]\left[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\right]$$

  - Tipo III: $h[n] = -h[N-1-n]$ (*N* impar)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} h[n]\left[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}\right]$$

  - Tipo IV: $h[n] = -h[N-1-n]$ (*N* par)

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h[n]\left[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}\right]$$

Estruturas para Filtros FIR com Fase Linear