UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO (UFERSA)
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS (CMPF)
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS E TECNOLOGIA (DETEC)

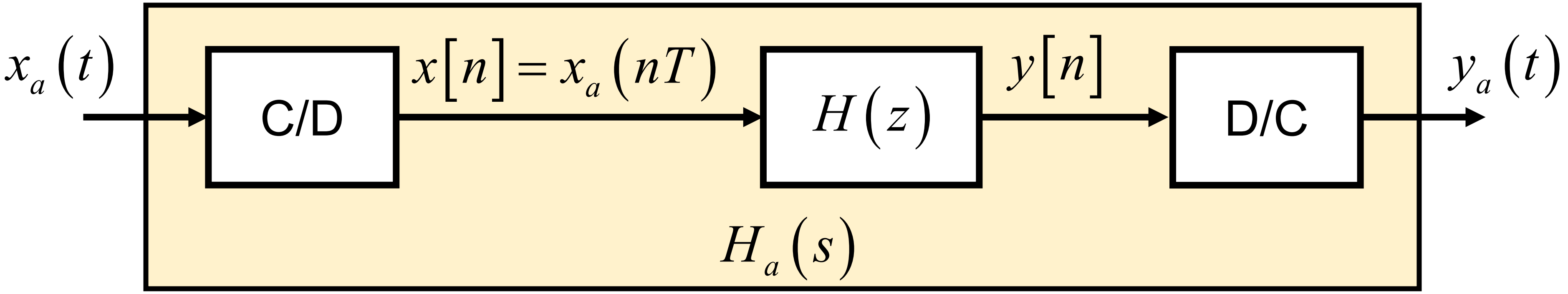
PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Discretização de Sistemas de Tempo Contínuo

Prof.: Pedro Thiago Valério de Souza
UFERSA – Campus Pau dos Ferros
pedro.souza@ufersa.edu.br

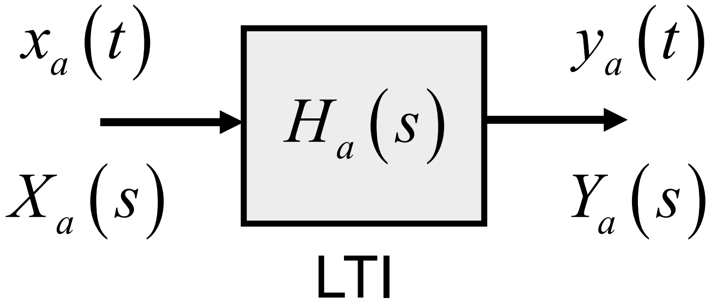
Conceitos Fundamentais

- Discretização: Converter um sistema de tempo contínuo em um sistema de tempo discreto, de forma a preservar a máxima quantidade possível de características do sistema de tempo contínuo original;
- Aplicações:
  - Simulação computacional;
  - Implementação de sistemas de tempo contínuo em tempo discreto.



Conceitos Fundamentais

Características do sistema de tempo contínuo:



$$y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(\tau) h_a(t-\tau)\, d\tau$$

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} d_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k}$$

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{N} c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k}\right\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{M} d_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k}\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} \mathcal{L}\left\{c_k \frac{d^k y_a(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} \mathcal{L}\left\{d_k \frac{d^k x_a(t)}{dt^k}\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \mathcal{L}\left\{\frac{d^k y_a(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} d_k \mathcal{L}\left\{\frac{d^k x_a(t)}{dt^k}\right\}$$

Conceitos Fundamentais

Características do sistema de tempo contínuo:

$$\sum_{k=0}^{N} c_k s^k Y_a(s) = \sum_{k=0}^{M} d_k s^k X_a(s)$$

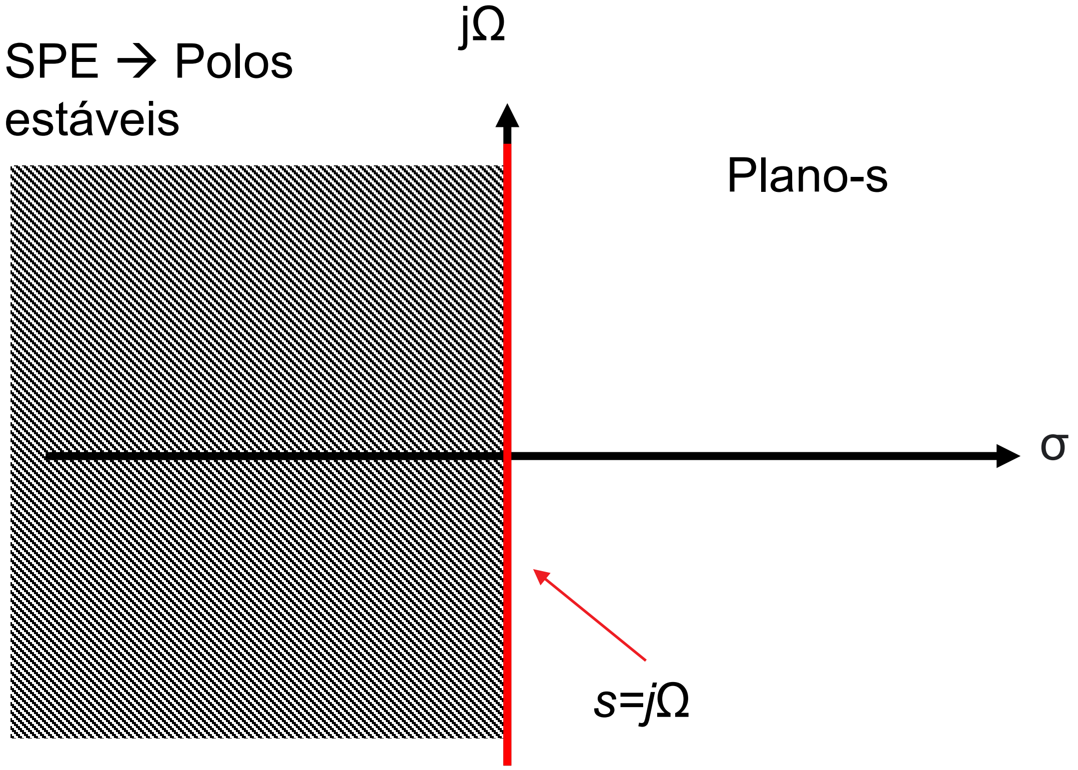
$$Y_a(s)\sum_{k=0}^{N} c_k s^k = X_a(s)\sum_{k=0}^{M} d_k s^k$$

$$\frac{Y_a(s)}{X_a(s)} = H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} d_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} c_k s^k}$$ (Função transferência)

Resposta em Frequência: $H_a(j\Omega) = H_a(s)\Big|_{s=j\Omega}$

Conceitos Fundamentais

Características do sistema de tempo contínuo:



Conceitos Fundamentais

Tempo Contínuo $\longrightarrow$ Tempo Discreto

$$H_a(s) \qquad H(z)$$

$$h_a(t) \qquad h[n]$$

Condições desejáveis (nem todas atendidas):

- Manter as características da resposta em frequência;

Eixo jΩ (Plano *s*) $\longrightarrow$ Circulo de raio unitário (Plano *z*)

- Manter a estabilidade (obrigatória):

$$H_a(s) \longrightarrow H(z)$$

Estável $\longrightarrow$ Estável

Conceitos Fundamentais

Condições desejáveis (nem todas atendidas):

- Manter as características da resposta ao impulso;
- Manter as características da resposta ao degrau (controle);

Alguns complicadores:

- Estabilidade:
  - Polos estáveis em tempo contínuo (assumindo causalidade) → polos no SPE;
  - Polos estáveis em tempo discreto (assumindo causalidade) → polos dentro da circunferência de raio unitário;

A transformação deve mapear todos os polos no SPE para dentro da circunferência de raio unitário (mesmo aqueles polos localizados em s = -∞)

Conceitos Fundamentais

Alguns complicadores:

- Manter as características da resposta em frequência:
  - Eixo $s = j\Omega$ → Comprimento infinito;
  - Circunferência de raio unitário → Comprimento finito;

A transformação deve mapear um eixo de comprimento infinito em uma circunferência de comprimento finito.

- Nem todas as características podem ser preservadas (resposta ao impulso x resposta ao degrau);

Conceitos Fundamentais

- Métodos para o mapeamento tempo contínuo → tempo discreto:
  - Aproximações numéricas:
    - Aproximação de derivadas;
      - *Backward*;
      - *Forward*;
    - Aproximação de integrais;
      - Transformação bilinear (Tustin).
  - Invariância:
    - Invariância ao impulso;
    - Invariância ao degrau (ZOH – *Zero order retentor*);
  - Mapeamento polo-zero;

Método *Forward*

- Aproximar a derivada da equação diferencial por uma diferença finita progressiva (Método de Euller).

  Caso de um sistema de primeira ordem: $\frac{dy_a(t)}{dt}+ay_a(t)=x_a(t)$

  Função de Transferência: $sY_a(s)+aY_a(s)=X_a(s) \rightarrow \frac{Y_a(s)}{X_a(s)}=H_a(s)=\frac{1}{s+a}$

  Amostragem da equação de diferenças: $t=nT \quad \rightarrow \quad \frac{dy_a(nT)}{dt}+ay_a(nT)=x_a(nT)$

$$\frac{dy_a(nT)}{dt}+ay[n]=x[n]$$

  Aproximação da derivada (*Forward*): $\frac{dy_a(nT)}{dt}\approx\frac{y_a((n+1)T)-y_a(nT)}{T}\approx\frac{y[n+1]-y[n]}{T}$

Método *Forward*

Substituindo a aproximação da derivada:

$$\frac{y[n+1]-y[n]}{T}+ay[n]=x[n]$$

$$\frac{1}{T}y[n+1]+\left(a-\frac{1}{T}\right)y[n]=x[n]$$

$$\frac{1}{T}zY(z)+\left(a-\frac{1}{T}\right)Y(z)=X(z)$$

$$\left(\frac{z-1}{T}+a\right)Y(z)=X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{\left(\frac{z-1}{T}\right)+a}$$

Método *Forward*

Por comparação com a função de transferência de tempo contínuo:

$$\left.\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{1}{s+a} \\ H(z) &= \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T}\right)+a} \end{aligned}\right\} \quad H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

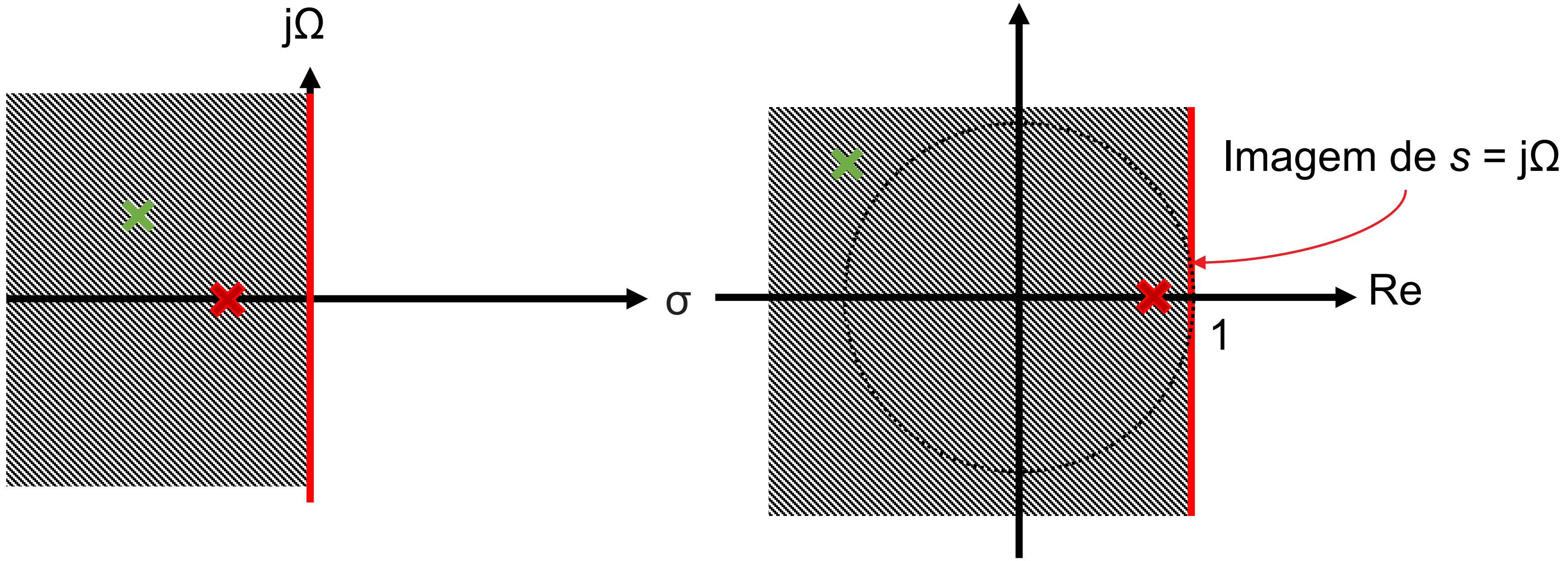
Relação entre o plano-*s* e o plano-*z*: $s = \dfrac{z-1}{T}$ $\rightarrow$ $z = sT + 1$

Comportamento do eixo $s = j\Omega$: $z = j\Omega T + 1$

Método *Forward*

Relação entre o plano s e o plano z: $z = sT + 1$

Eixo *s* = jΩ: $z = j\Omega T + 1$



- Um polo estável em *s* pode levar a um polo instável em *z;*
- Não mapeia perfeitamente o eixo de frequências.

Método *Backward*

- Aproximar a derivada da equação diferencial por uma diferença finita regressiva (Método de Euller).

Caso de um sistema de primeira ordem: $$\frac{dy_a(t)}{dt} + ay_a(t) = x_a(t)$$

Função de Transferência: $sY_a(s) + aY_a(s) = X_a(s)$ $\longrightarrow$ $\dfrac{Y_a(s)}{X_a(s)} = H_a(s) = \dfrac{1}{s+a}$

Amostragem da equação de diferenças: $t = nT \quad \rightarrow \quad \dfrac{dy_a(nT)}{dt} + ay_a(nT) = x_a(nT)$

$$\frac{dy_a(nT)}{dt} + ay[n] = x[n]$$

Aproximação da derivada (*Forward*): $\dfrac{dy_a(nT)}{dt} \approx \dfrac{y_a(nT) - y_a((n-1)T)}{T} \approx \dfrac{y[n] - y[n-1]}{T}$

Método *Backward*

Substituindo a aproximação da derivada:

$$\frac{y[n]-y[n-1]}{T}+ay[n]=x[n]$$

$$\left(\frac{1}{T}+a\right)y[n]-\frac{1}{T}y[n-1]=x[n]$$

$$\left(\frac{1}{T}+a\right)Y(z)-\frac{1}{T}z^{-1}Y(z)=X(z)$$

$$\left(\frac{1-z^{-1}}{T}+a\right)Y(z)=X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)+a}$$

Método *Backward*

Por comparação com a função de transferência de tempo contínuo:

$$\left.\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{1}{s+a} \\ H(z) &= \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)+a} \end{aligned}\right\} \quad H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

Relação entre o plano-*s* e o plano-*z*: $s = \dfrac{1-z^{-1}}{T} \rightarrow z = \dfrac{1}{1-sT}$

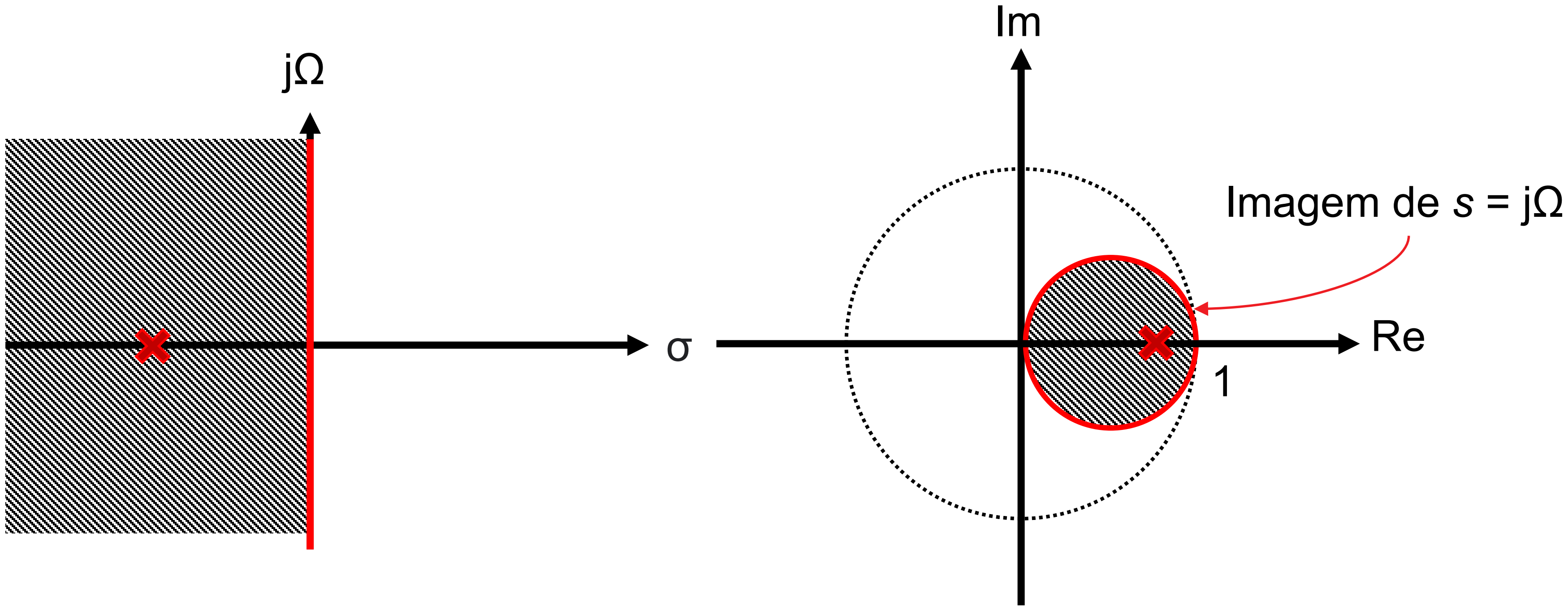
Comportamento do eixo *s* = *j*Ω: $z = \dfrac{1}{1-j\Omega T} = \dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{1+j\Omega T}{1-j\Omega T}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{\sqrt{1+\Omega^2T^2}\,e^{j\tan^{-1}(\Omega T)}}{\sqrt{1+\Omega^2T^2}\,e^{-j\tan^{-1}(\Omega T)}}\right] = \frac{1}{2}\left[1+e^{j2\tan^{-1}(\Omega T)}\right]$$

Método *Backward*

Relação entre o plano s e o plano z: $z = \dfrac{1}{1 - j\Omega T}$

Eixo *s* = jΩ: $z = \dfrac{1}{2}\left[1 + e^{j2\tan^{-1}(\Omega T)}\right]$



Método *Backward*

- Polo estável em *s* → Polo estável em *z;*
- Problemas:
  - Não mapeia perfeitamente o eixo de frequências → Não preserva as características da resposta em frequência do filtro de tempo contínuo;
  - Os polos em *z* sempre vão estar em regiões de baixa frequência → Limitado à filtros passa-baixas.
  - Diminuição de *T* → Espectro de $H_a(s)$ comprimido em torno de z = 1;

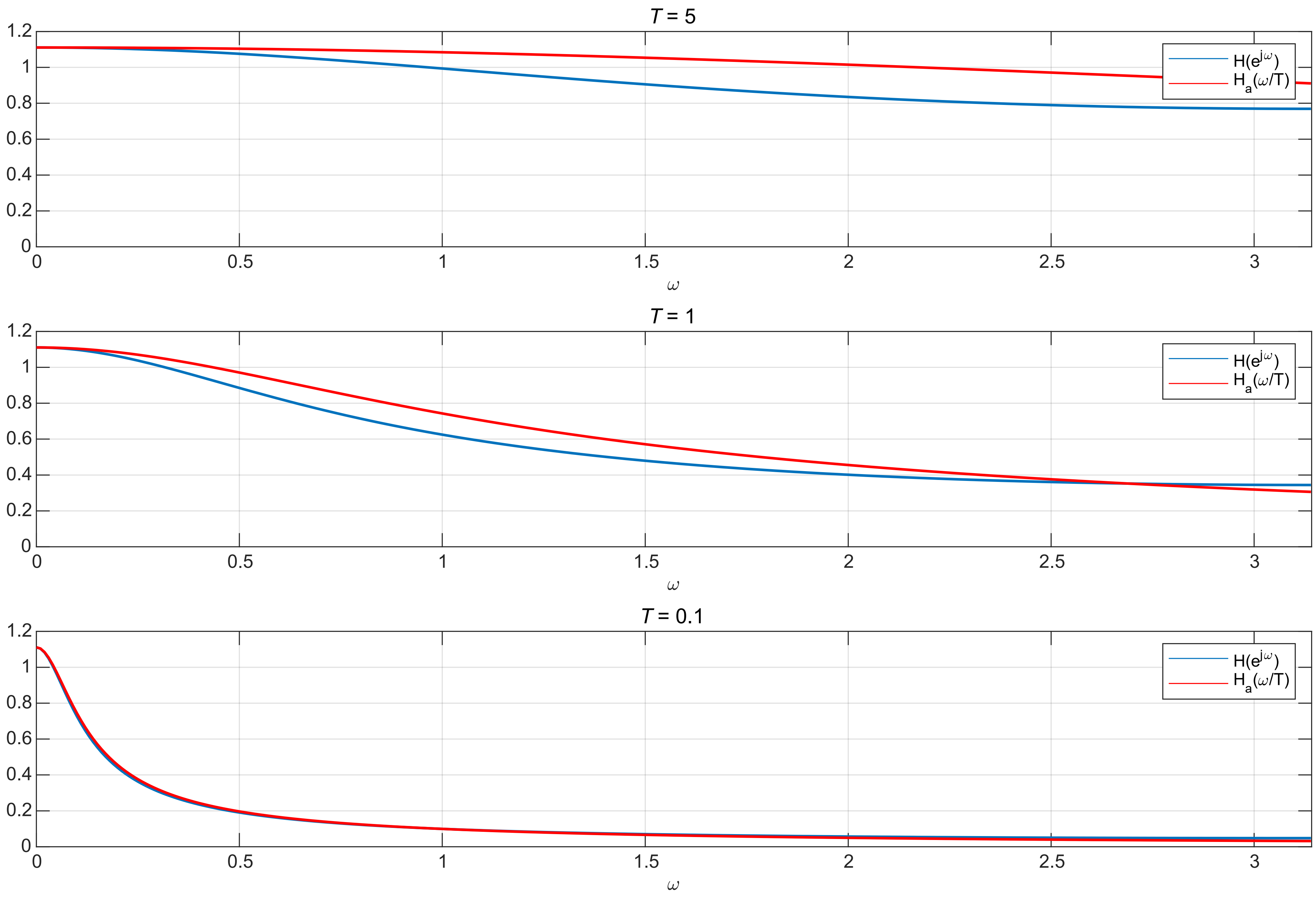
$$z = \frac{1}{1 - sT}$$

→ Diminuição de *T* → *z* fica mais próximo de 1.

Método *Backward*

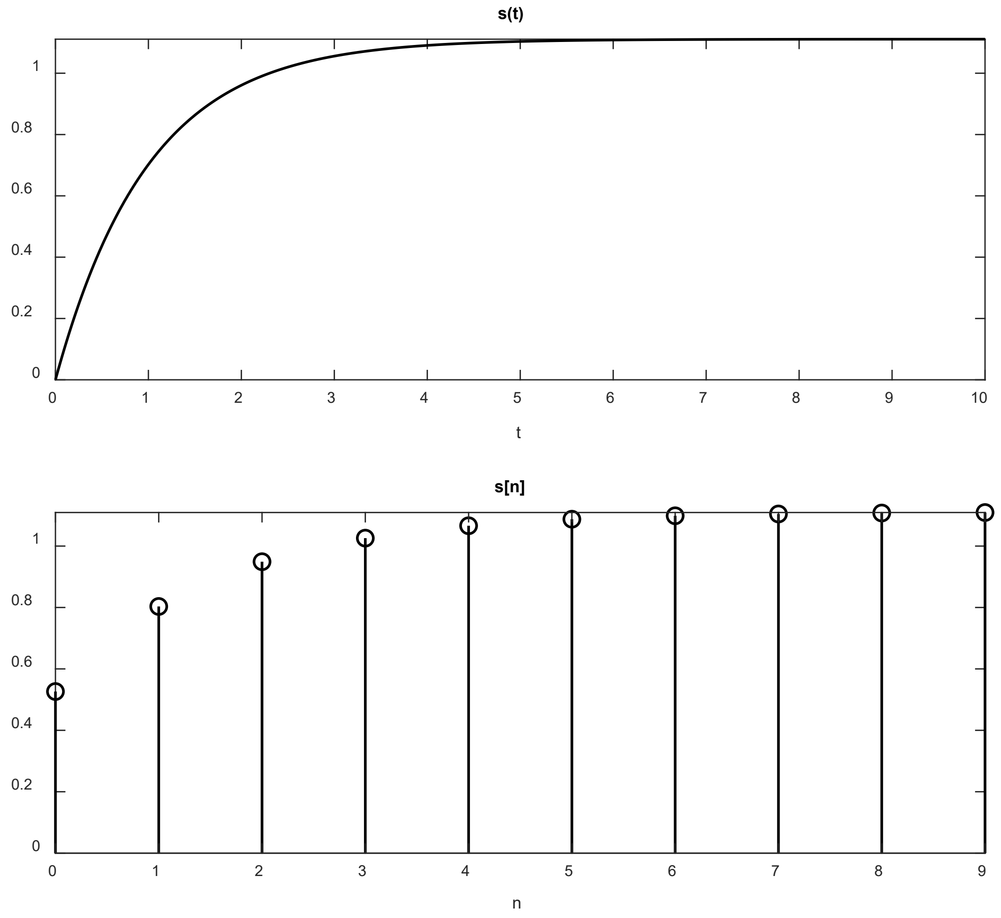
Exemplo 1: Obtenha a discretização do seguinte sistema de tempo contínuo através do método *Backward*:

$$\frac{dy_a(t)}{dt} + 0,9y_a(t) = x_a(t)$$

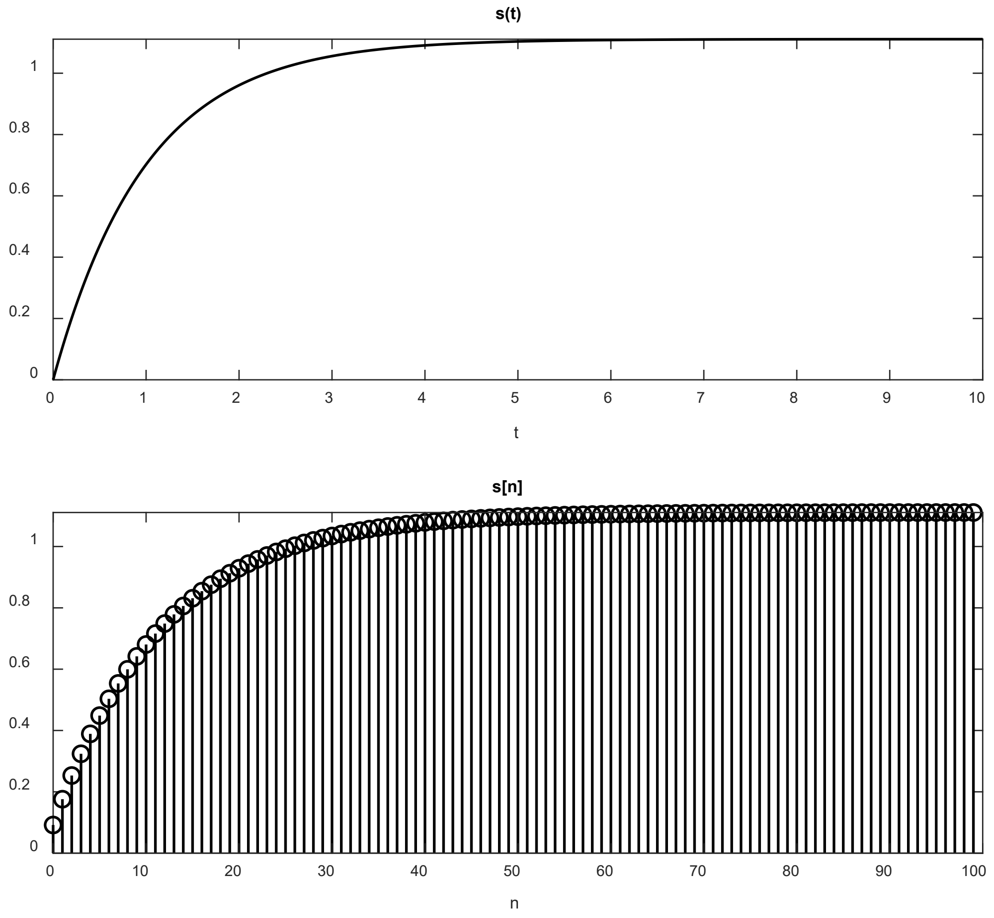


T = 5
T = 1
T = 0.1
H(e^{jω})
H_a(ω/T)
ω
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
0.5
1.5
2
2.5
3

Discretização com T = 1:



Discretização com T = 0,1:



Transformação Bilinear (Método de Tustin)

- Baseia-se na integração da equação diferencial e utilizar uma aproximação numérica para integral → regra do trapézio;

$$\frac{dy_a(t)}{dt}+ay_a(t)=x_a(t)$$

Integrando em dois instantes sucessivos de amostragem:

$$\int_{(n-1)T}^{nT}\left\{\frac{dy_a(t)}{dt}+ay_a(t)\right\}dt=\int_{(n-1)T}^{nT}x_a(t)\,dt$$

$$\int_{(n-1)T}^{nT}\frac{dy_a(t)}{dt}dt+a\int_{(n-1)T}^{nT}y_a(t)\,dt=\int_{(n-1)T}^{nT}x_a(t)\,dt$$

$$y_a(nT)-y_a\big((n-1)T\big)+a\int_{(n-1)T}^{nT}y_a(t)\,dt=\int_{(n-1)T}^{nT}x_a(t)\,dt$$

Transformação Bilinear (Método de Tustin)

Integral → aproximada pela regra do trapézio:

$$\int_{(n-1)T}^{nT} y_a(t)\,dt = \frac{y_a(nT) + y_a((n-1)T)}{2}T$$

$$\int_{(n-1)T}^{nT} x_a(t)\,dt = \frac{x_a(nT) + x_a((n-1)T)}{2}T$$

Desta maneira:

$$y_a(nT) - y_a((n-1)T) + a\left[\frac{y_a(nT) + y_a((n-1)T)}{2}T\right] = \frac{x_a(nT) + x_a((n-1)T)}{2}T$$

$$y[n] - y[n-1] + a\left(\frac{y[n] + y[n-1]}{2}T\right) = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}T$$

Transformação Bilinear (Método de Tustin)

Reorganizando:

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)y[n]-\left(1-\frac{aT}{2}\right)y[n-1]=\frac{T}{2}\left(x[n]+x[n-1]\right)$$

Aplicando a Transformada *Z*:

$$\left(1+\frac{aT}{2}\right)Y(z)-\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}Y(z)=\frac{T}{2}X(z)\left(1+z^{-1}\right)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

Transformação Bilinear (Método de Tustin)

Por comparação com a função de transferência de tempo contínuo:

$$\left.\begin{aligned} H_a(s) &= \frac{1}{s+a} \\ H(z) &= \frac{1}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a} \end{aligned}\right\} \quad H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)}$$

Relação entre o plano-*s* e o plano-*z*: $z = \dfrac{1+sT/2}{1-sT/2}$

Transformação Bilinear (Método de Tustin)

- Análise da transformação bilinear:
  - Eixo jΩ → circulo unitário?

para $z = e^{j\omega}$ → $s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\right)$

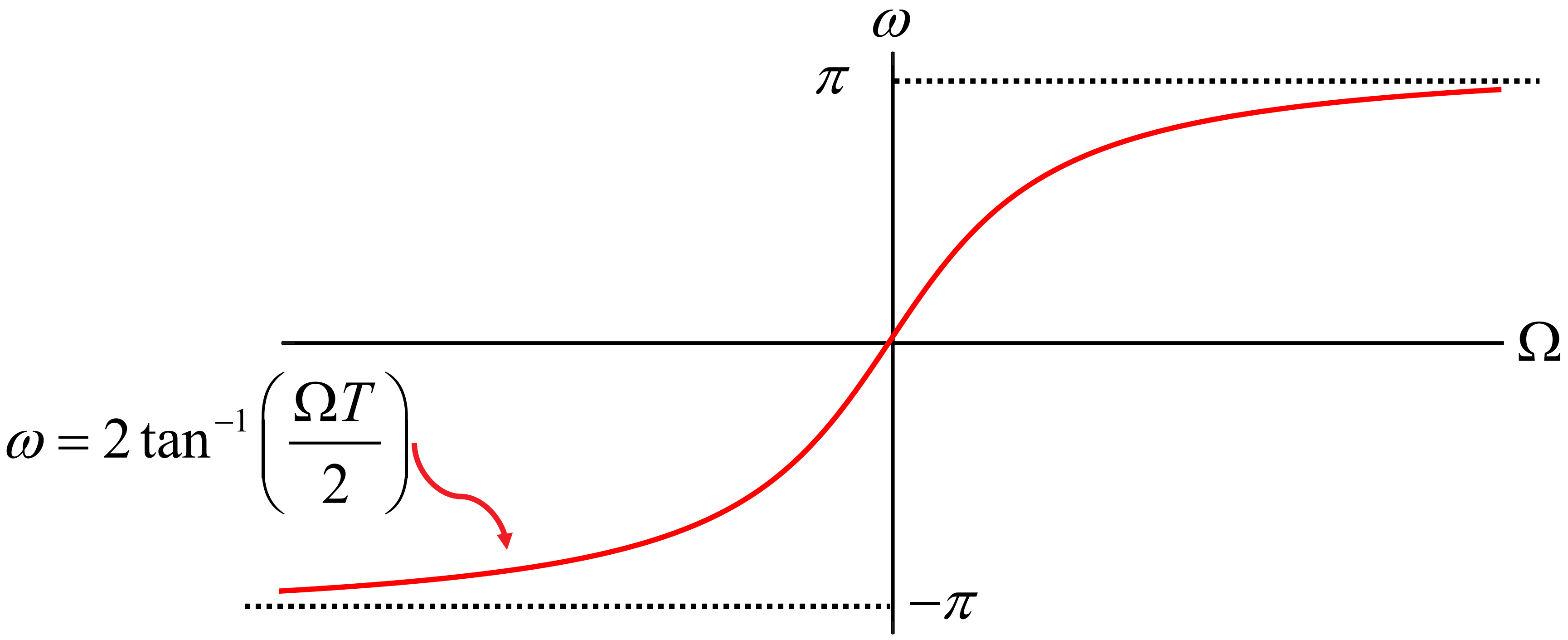
$$\begin{cases} 1-e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}\right) \\ \qquad\quad\; = e^{-j\omega/2}\,2j\sin(\omega/2) \\ 1+e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}\right) \\ \qquad\quad\; = e^{-j\omega/2}\,2\cos(\omega/2) \end{cases}$$

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{e^{-j\omega/2}\,2j\sin(\omega/2)}{e^{-j\omega/2}\,2\cos(\omega/2)}\right) = \frac{2}{T}\,j\tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = j\Omega$$

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$ (*Frequency Warping*)

$$\omega = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$

Eixo jΩ → circulo unitário



Mapeamento não-linear (compressão do eixo de frequência)

Transformação Bilinear (Método de Tustin)

- Análise da transformação bilinear:
  - Polo em *s* estável → polo *z* estável?

$$z = \frac{1+sT/2}{1-sT/2} = \frac{2+sT}{2-sT} \left.\vphantom{\frac{1}{1}}\right\} \begin{matrix} s = \sigma + j\Omega \\ T = 1 \end{matrix} \longrightarrow z = \frac{(2+\sigma)+j\Omega}{(2-\sigma)-j\Omega}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{(2+\sigma)^2+\Omega^2}}{\sqrt{(2-\sigma)^2+\Omega^2}} = \frac{\sqrt{4+\sigma^2+\Omega^2+4\sigma}}{\sqrt{4+\sigma^2+\Omega^2-4\sigma}}$$

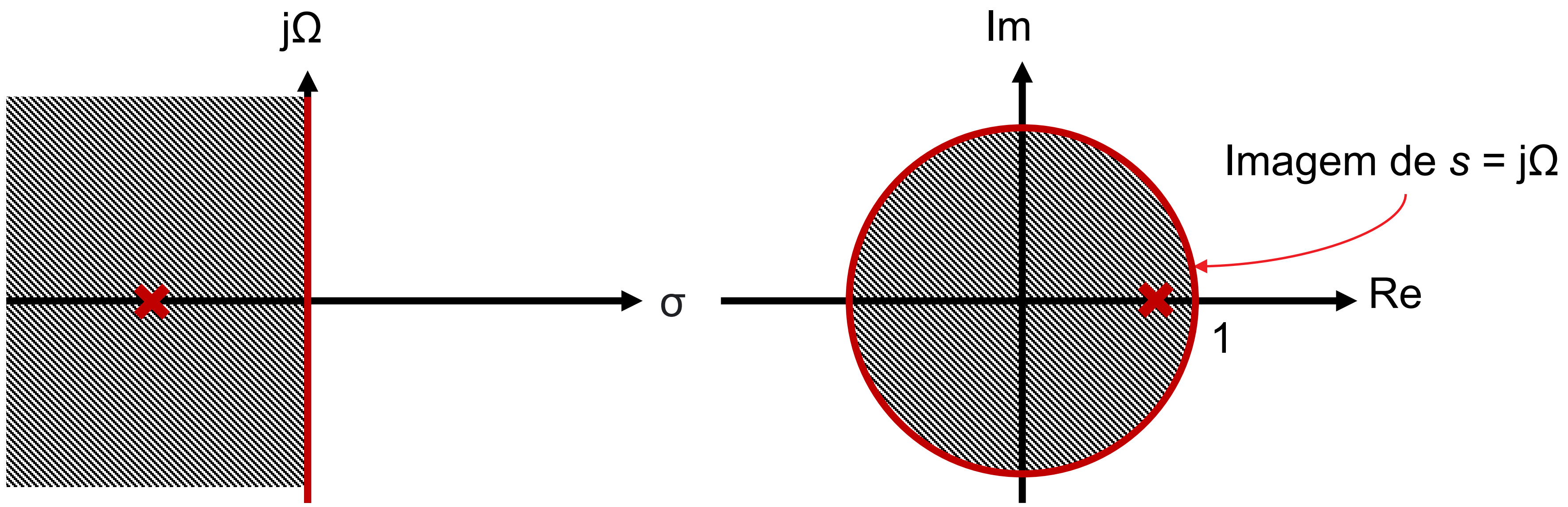
Se: $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma < 0 \longrightarrow |z| < 1$

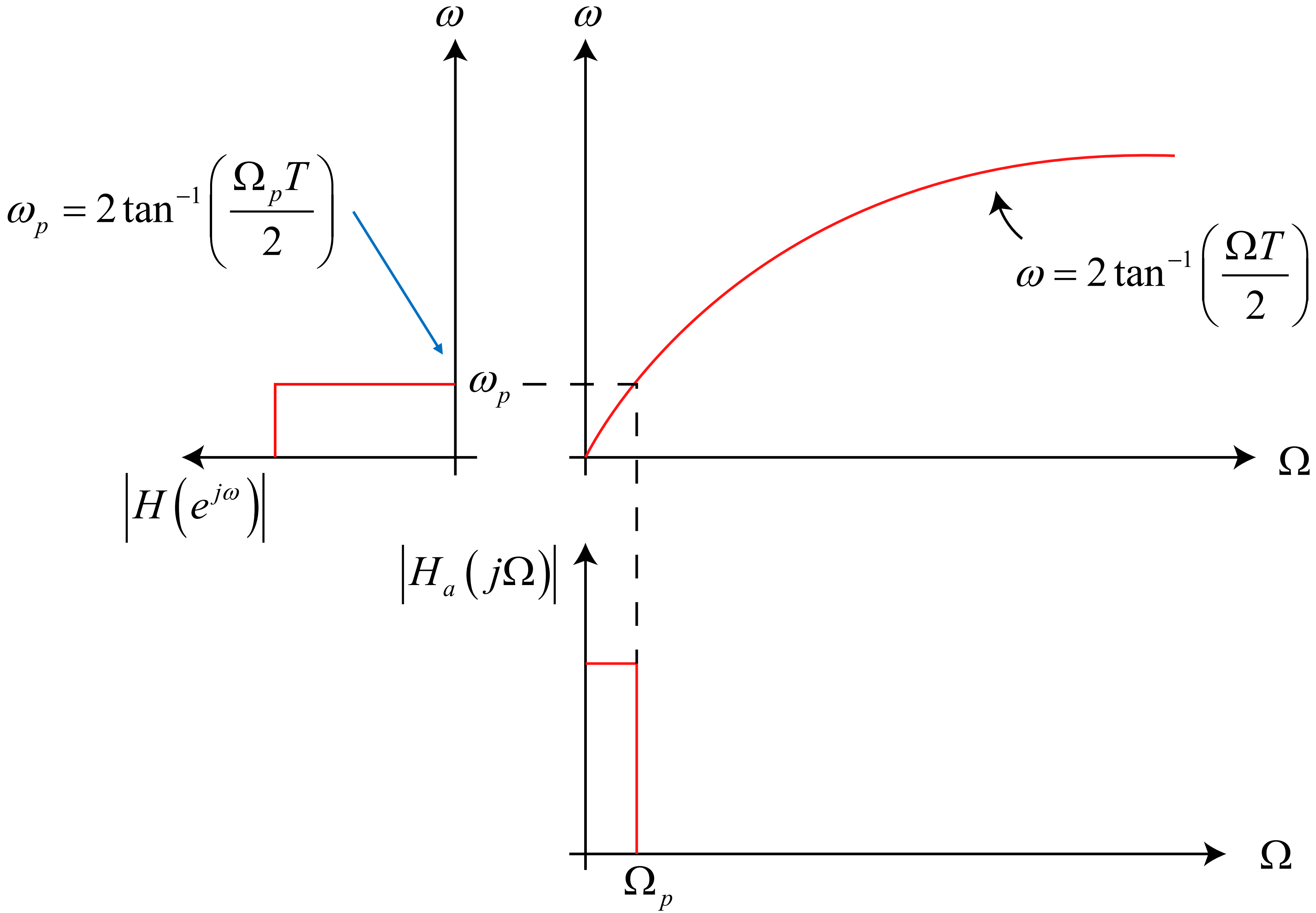
$\mathrm{Re}\{s\} = \sigma > 0 \longrightarrow |z| > 1$

Polo em *s* estável → polo *z* estável

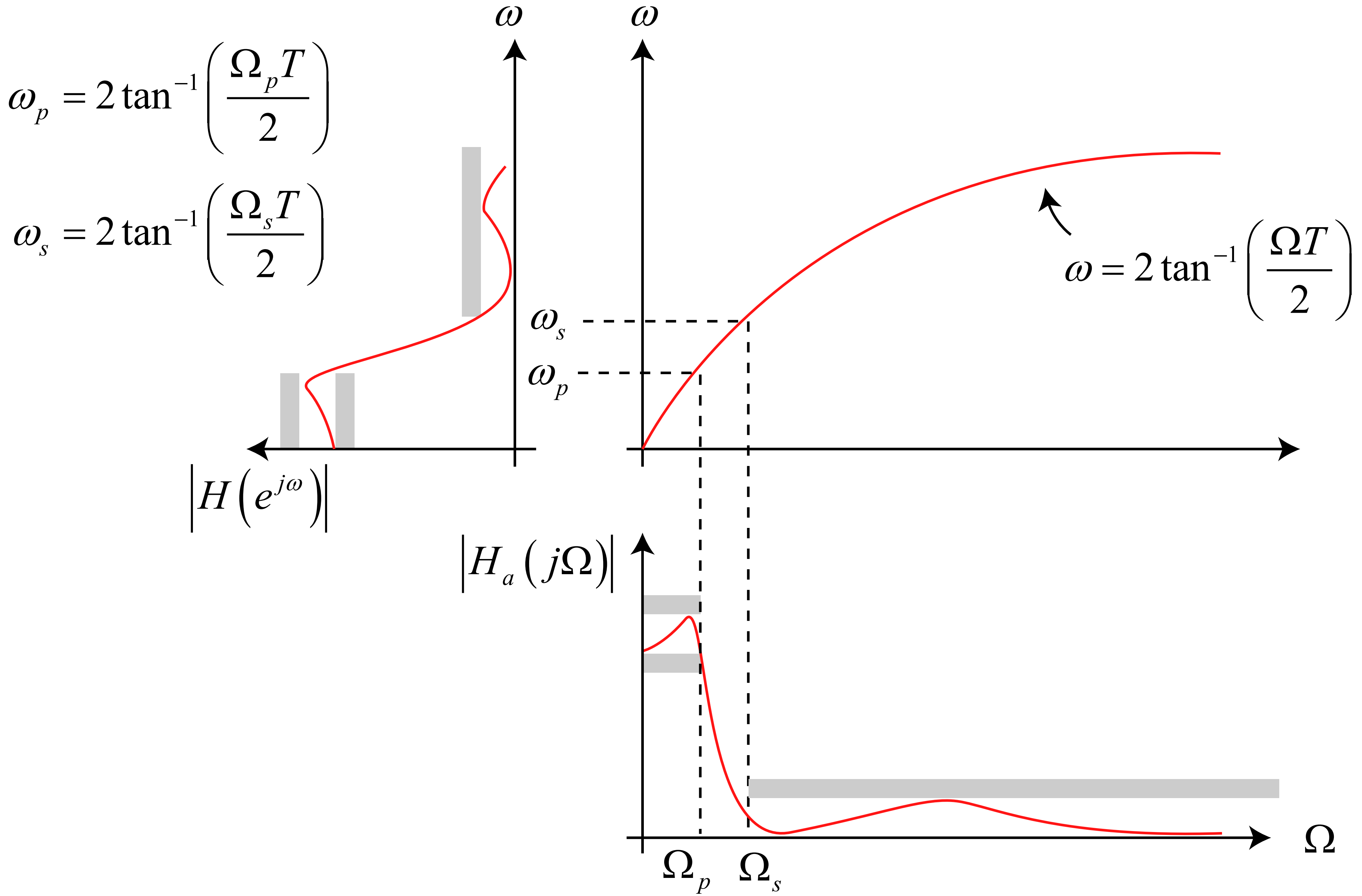
Transformação Bilinear (Método de Tustin)

- Análise da transformação bilinear:





ω
ω
$\omega_p = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_p T}{2}\right)$
$\omega = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$
ω_p
Ω
$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$
$\left|H_a\left(j\Omega\right)\right|$
Ω
Ω_p



$\omega_p = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_p T}{2}\right)$
$\omega_s = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_s T}{2}\right)$
ω
ω
$\omega = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$
ω_s
ω_p
$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$
$\left|H_a\left(j\Omega\right)\right|$
Ω
Ω_p
Ω_s

Transformação Bilinear (Método de Tustin)

- Como corrigir o *Frequency Warping* → Modificar a resposta em frequência do sistema original de forma a compensar o *Frequency Warping.*

<u>Sistema de primeira ordem passa-baixas com frequência de corte Ω = *a.*</u>

$$H(s) = \frac{a}{s+a}$$

$$\Omega_c = a$$

Amostragem (ideal): $\omega_c = \Omega_c T = aT$

Aplicando a transformação bilinear, a frequência de corte não será $\omega_c = aT$ (*Warping*)

$$\omega_c = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_c T}{2}\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{aT}{2}\right)$$

Compensação (*Pre-warping*): $H_w(s) = \dfrac{\frac{2}{T}\tan\left(\frac{aT}{2}\right)}{s + \frac{2}{T}\tan\left(\frac{aT}{2}\right)} = \dfrac{a_w}{s + a_w}$

$$\Omega_{w,c} = a_w = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{aT}{2}\right)$$

Transformação Bilinear (Método de Tustin)

Sistema de primeira ordem passa-baixas com frequência de corte $\Omega = a$.

$$H_w(s) = \frac{\frac{2}{T}\tan\left(\frac{aT}{2}\right)}{s + \frac{2}{T}\tan\left(\frac{aT}{2}\right)} = \frac{a_w}{s + a_w} \qquad \Omega_{w,c} = a_w = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{aT}{2}\right)$$

Aplicando a transformação bilinear, a frequência de corte será:

$$\omega_{w,c} = 2\tan^{-1}\left(\frac{\Omega_{w,c}T}{2}\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{2}{T}\tan\left(\frac{aT}{2}\right)\frac{T}{2}\right)$$

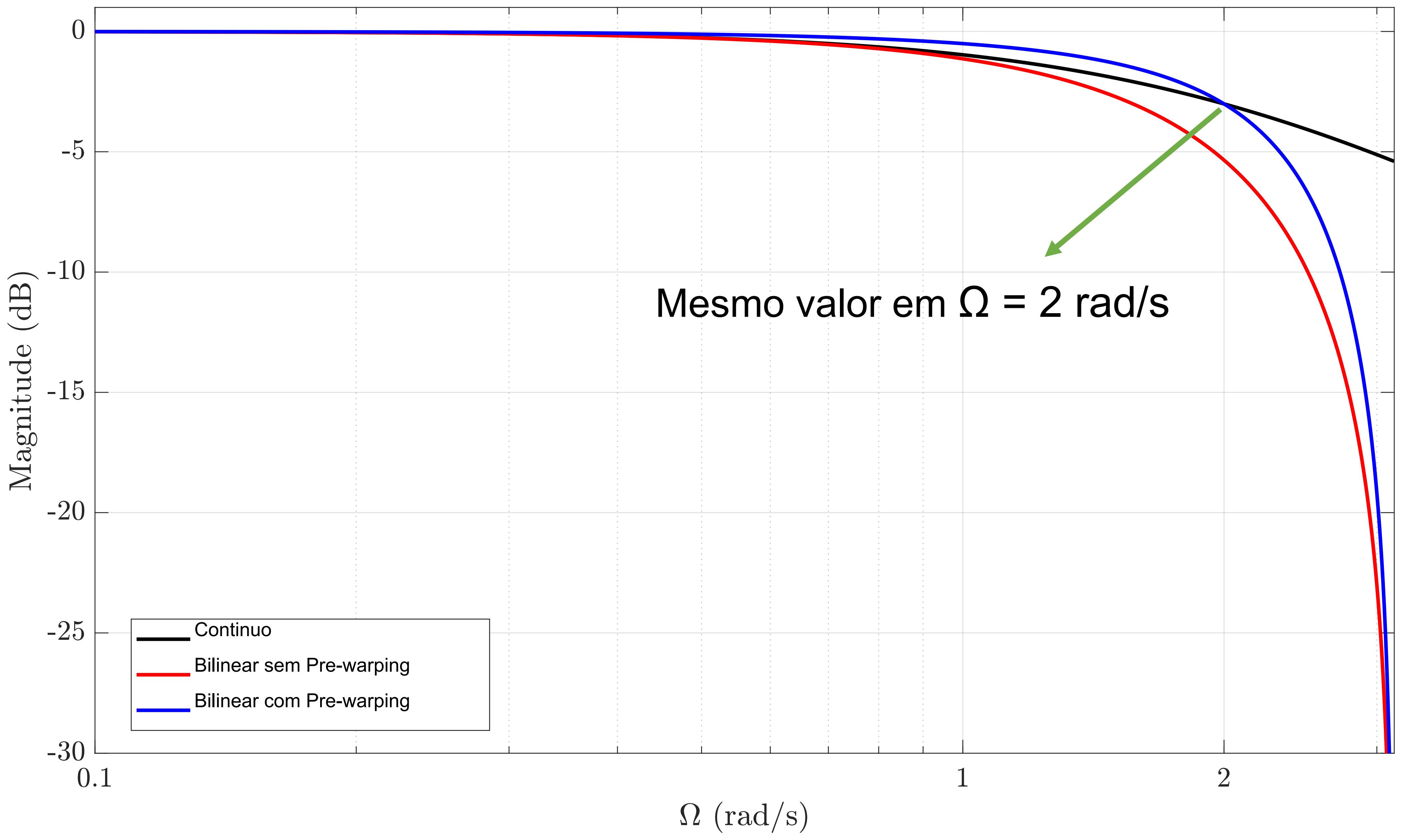
$$= 2\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{aT}{2}\right)\right) = 2\frac{aT}{2}$$

$$= aT$$ (Esperado pela amostragem ideal)

Transformação Bilinear (Método de Tustin)

Exemplo 2: Obtenha a discretização do seguinte sistema de tempo contínuo utilizando a transformação bilinear com compensação de frequência crítica de Ω_c = 2 rad/s.

$$H(s) = \frac{2}{s+2}$$



Mesmo valor em Ω = 2 rad/s
Magnitude (dB)
Ω (rad/s)
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
0.1
1
2
Continuo
Bilinear sem Pre-warping
Bilinear com Pre-warping

Invariância ao Impulso

Resposta ao impulso do filtro de tempo discreto = Amostragem da resposta ao impulso do filtro de tempo contínuo

$h[n] = h_a(nT)$ → $h[n]$ vai ter as mesmas características de $h_a(t)$

$$h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_a(s)\}$$

$$h[n] = h_a(nT) = \mathcal{L}^{-1}\{H_a(s)\}\Big|_{t=nT}$$

$$H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\} = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\{H_a(s)\}\Big|_{t=nT}\right\}$$

$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}$ (polos simples em $s = \{s_k\}$)

$$\mathcal{L}^{-1}\{H_a(s)\} = h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - s_k}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} A_k \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - s_k}\right\} = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k t} u(t) = h_a(t)$$

Invariância ao Impulso

$$h[n] = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} A_k e^{s_k nT} u(nT)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} A_k \left(e^{s_k T}\right)^n u[n]$$

$$H(z) = \mathcal{Z}\left\{\sum_{k=1}^{N} A_k \left(e^{s_k T}\right)^n u[n]\right\} = \sum_{k=1}^{N} A_k \mathcal{Z}\left\{\left(e^{s_k T}\right)^n u[n]\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

Polos: $z_k = \left\{e^{s_k T}\right\}$

Polo em $s = s_k$ → Polo em $z = e^{s_k T}$

- O mapeamento é dos polos, e não do plano *s* para o plano *z*;
- Os zeros geralmente são mapeados seguindo outra regra.

Invariância ao Impulso

Do processo de amostragem: $h[n] = h_a(nT)$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi}{T}k\right)\right)$$

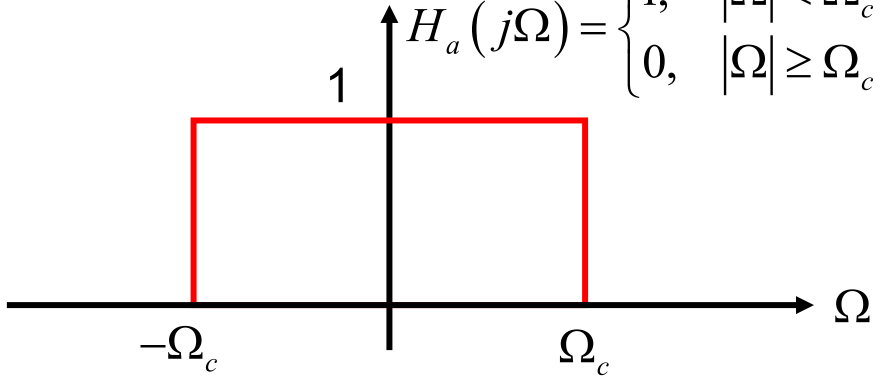
A invariância ao impulso garante que o formato da resposta em frequência permaneça a mesma, a não ser pelo fator de escala $\Omega = \omega/T$ e ao *aliasing;*

A não ser pelo *aliasing*, o filtro de tempo discreto possui o mesmo formato do filtro de tempo contínuo:

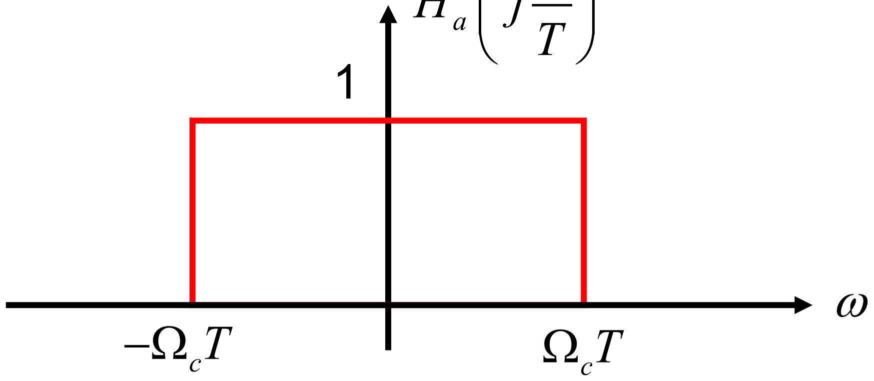
$$H\left(e^{j\omega}\right) \approx \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right) \qquad -\pi \le \omega \le \pi$$

Evitar o uso de filtros não-limitados em banda (passa-altas e rejeita-faixa);

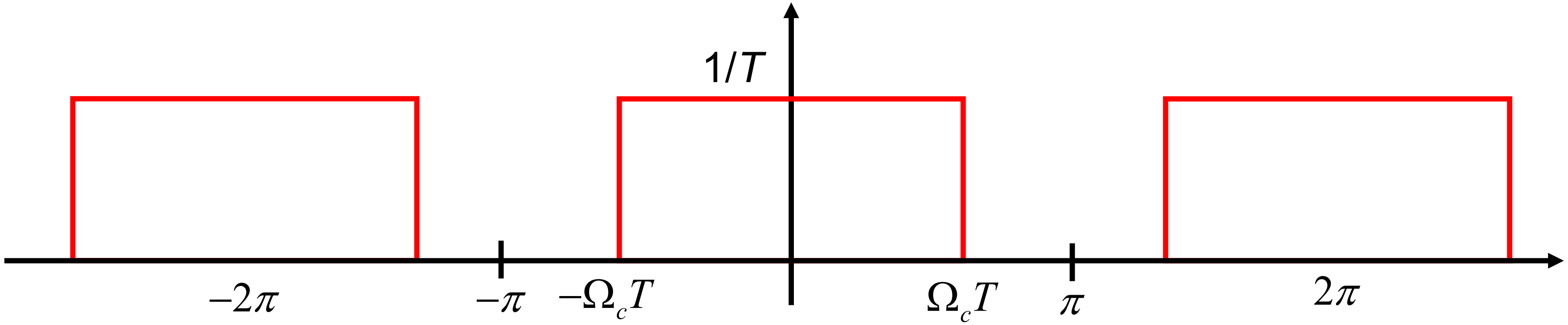
$$H_a(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$$

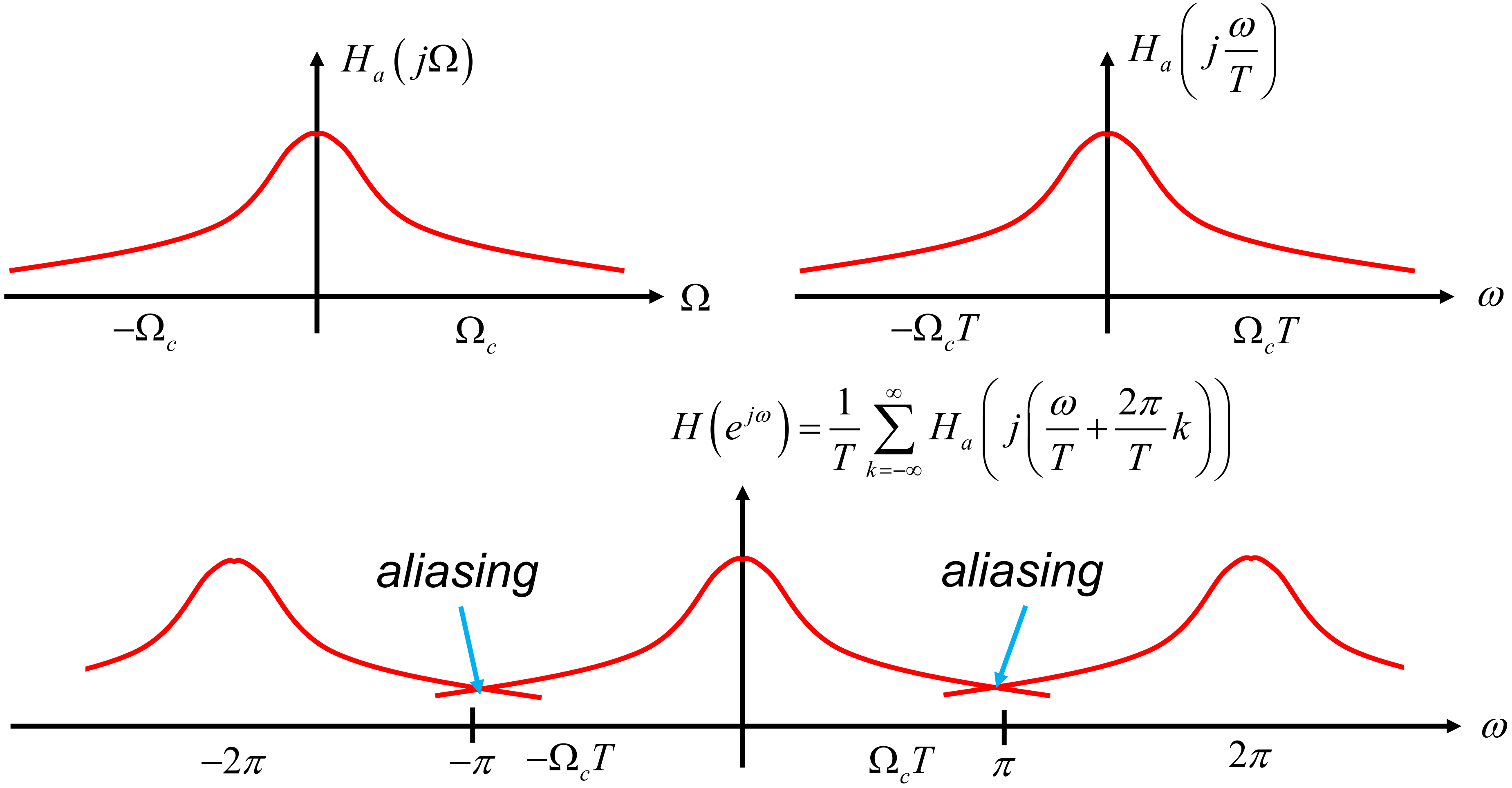


$$H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right)$$



$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(j\left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi}{T}k\right)\right)$$





Problema inerente: Haverá *aliasing*. Além disso, o parâmetro T não controla o *aliasing* neste caso.

Invariância ao Impulso

Análise de estabilidade:

Polo em $s = s_k$ $\rightarrow$ Polo em $z = e^{s_k T}$

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k \longrightarrow z = e^{(\sigma_k + j\Omega_k)T} = e^{\sigma_k T} e^{j\Omega_k T}$$

$$|z| = e^{\sigma_k T}$$

Se: $\mathrm{Re}\{s_k\} = \sigma_k < 0 \longrightarrow |z| < 1$

$\mathrm{Re}\{s_k\} = \sigma_k > 0 \longrightarrow |z| > 1$

$\longrightarrow$ Polo em *s* estável → polo *z* estável

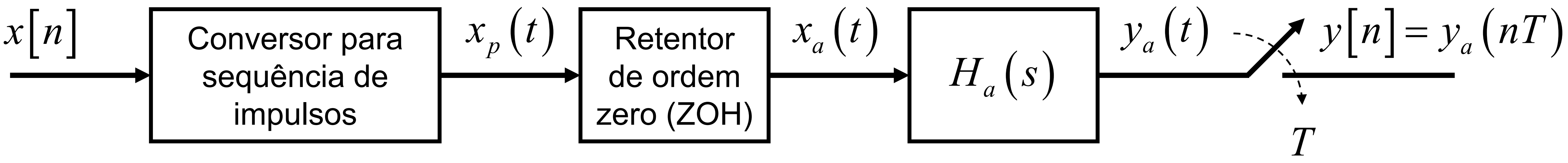
Invariância ao Impulso

Exemplo 3: Determine a discretização pela invariância ao impulso da seguinte função transferência.

$$H_a(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

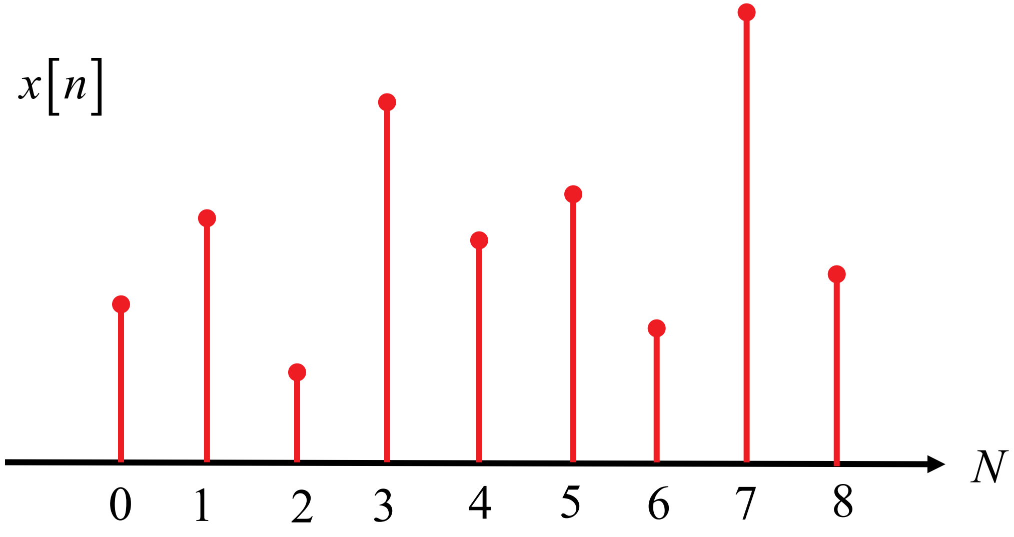
Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

- Consiste em:
  - Utilizar um retentor de ordem zero como conversor D/A de forma a converter um sinal de tempo discreto em tempo contínuo;
  - Aplicar o sinal de saída do D/A no sistema de tempo contínuo;
  - Amostrar a saída do sistema de tempo contínuo obtendo um sinal de tempo discreto.

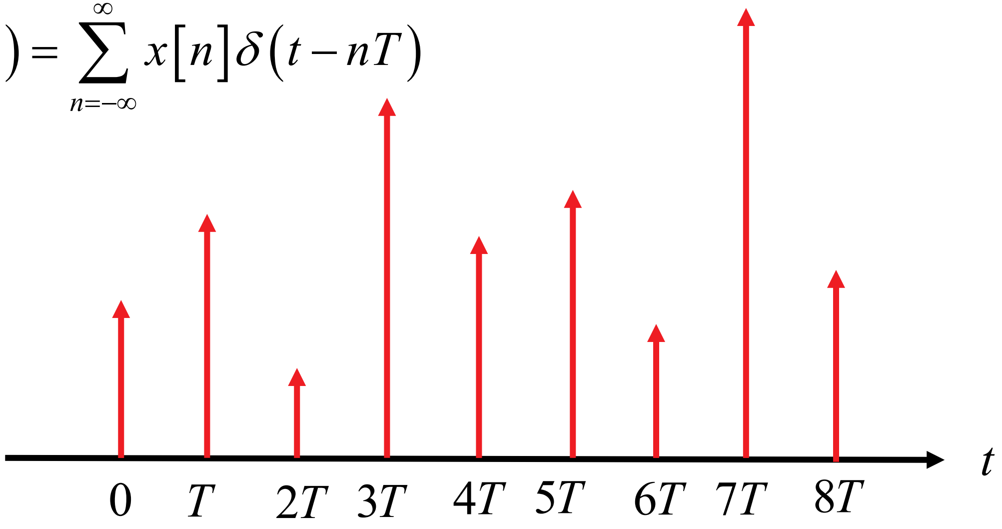


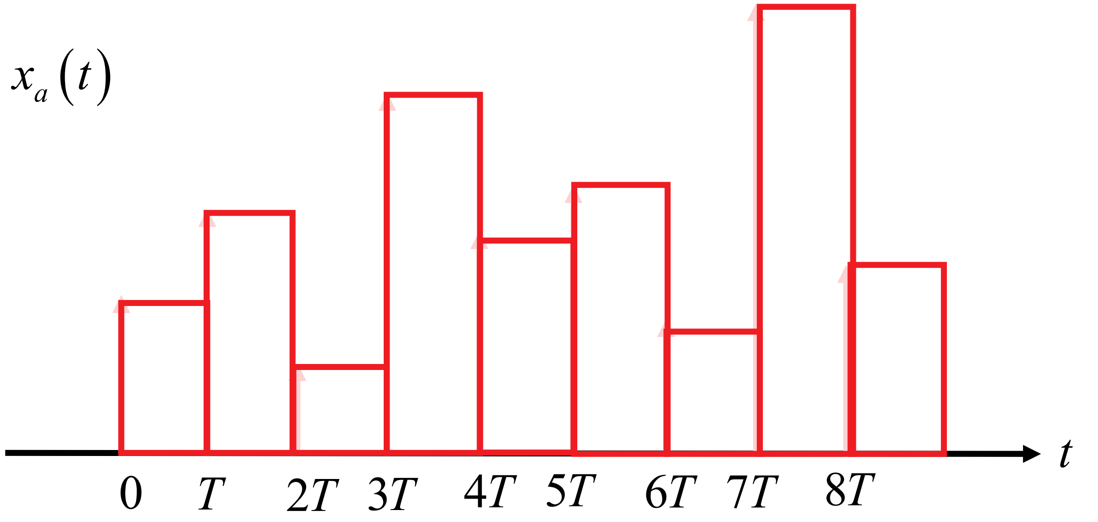
Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Retentor de ordem zero:



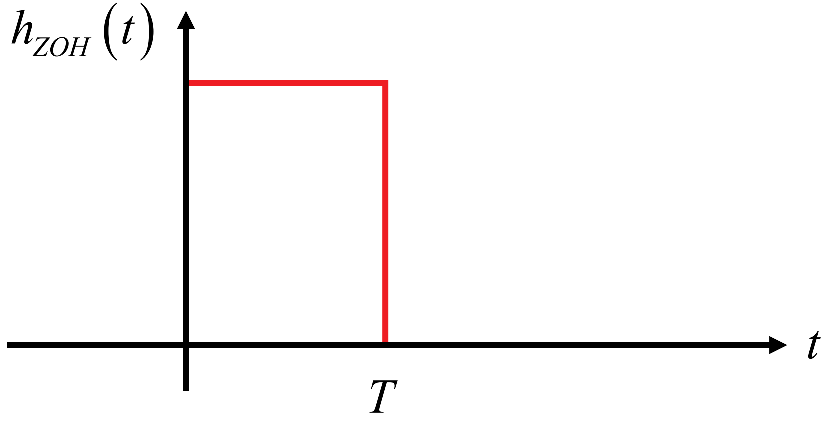
$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$





Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Função transferência da retentor de ordem zero:

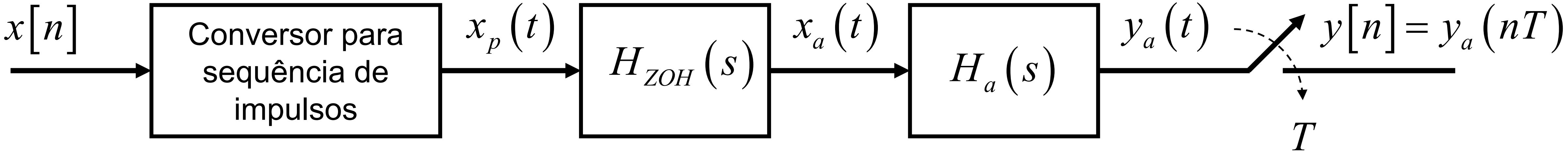


$$h_{ZOH}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$= u(t) - u(t-T)$$

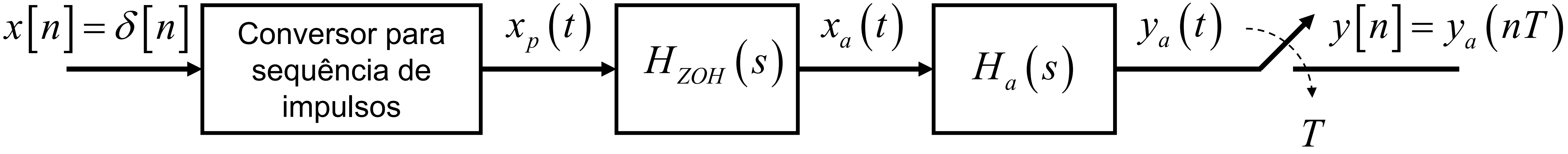
$$H_{ZOH}(s) = \mathcal{L}\{h_{ZOH}(t)\} = \mathcal{L}\{u(t) - u(t-T)\}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$



Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Função transferência do equivalente discreto:



$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]\delta(t-nT)=\delta(t)$$

$$X_p(s)=\mathcal{L}\left\{x_p(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}=1$$

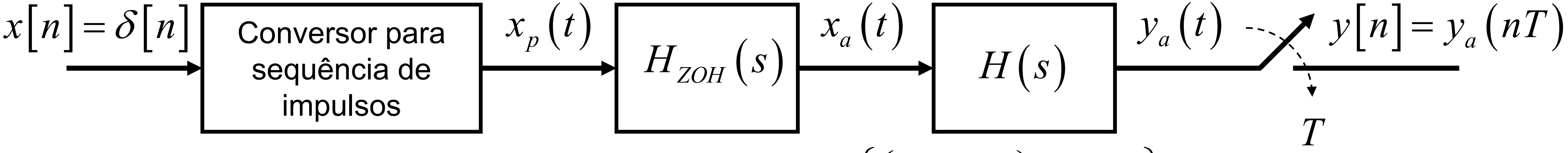
$$X_a(s)=\mathcal{L}\left\{x_a(t)\right\}=X_p(s)H_{ZOH}(s)$$

$$=H_{ZOH}(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

$$Y_a(s)=\mathcal{L}\left\{y_a(t)\right\}=X_a(s)H_a(s)=\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)H_a(s)$$

Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Função transferência do equivalente discreto:



$$y_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_a(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)H_a(s)\right\}$$

$$y[n] = y_a(nT) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)H_a(s)\right\}\Bigg|_{t=nT}$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y[n]\} = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)H_a(s)\right\}\Bigg|_{t=nT}\right\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_a(s)}{s}\right\}\Bigg|_{t=nT} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-sT}\frac{H_a(s)}{s}\right\}\Bigg|_{t=nT}\right\}$$

Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Chamando: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_a(s)}{s}\right\} = f(t)$ (Resposta ao degrau)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-sT}\frac{H_a(s)}{s}\right\} = f(t-T)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left\{\left.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_a(s)}{s}\right\}\right|_{t=nT} - \left.\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-sT}\frac{H_a(s)}{s}\right\}\right|_{t=nT}\right\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\left.f(t)\right|_{t=nT} - \left.f(t-T)\right|_{t=nT}\right\} = \mathcal{Z}\left\{f(nT) - f(nT-T)\right\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{f[n] - f[n-1]\right\}$$

$$= F(z) - z^{-1}F(z) = \left(1 - z^{-1}\right)F(z)$$

Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Mas: $F(z) = \mathcal{Z}\{f[n]\} = \mathcal{Z}\{f(nT)\}$

$$= \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{H_a(s)}{s} \right\}\Bigg|_{t=nT} \right\}$$

Portanto: $Y(z) = (1 - z^{-1}) F(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{H_a(s)}{s} \right\}\Bigg|_{t=nT} \right\}$

Por fim: $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{Y(z)}{1}$

$$= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{H_a(s)}{s} \right\}\Bigg|_{t=nT} \right\}$$

Equivalente à amostrar a resposta ao degrau

$$h[n] = f[n] - f[n-1]$$

$$H(z) = (1 - z^{-1}) F(z)$$

Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Análise de estabilidade:

$$H_a(s) = \frac{Q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}$$

$$\frac{H_a(s)}{s} = \frac{Q(s)}{s(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}$$

$$= \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_1} + \cdots + \frac{A_N}{s-p_N}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_a(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_1} + \cdots + \frac{A_N}{s-p_N}\right\}$$

$$= \left(A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots + A_N e^{p_N t}\right) u(t) = f(t)$$

Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Análise de estabilidade:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_a(s)}{s}\right\}\Bigg|_{t=nT} = f(nT) = \left(A_0 + A_1 e^{p_1 Tn} + A_2 e^{p_2 Tn} + \cdots + A_N e^{p_N Tn}\right)u(nT)$$

$$= \left(A_0 + A_1\left(e^{p_1 T}\right)^n + A_2\left(e^{p_2 T}\right)^n + \cdots + A_N\left(e^{p_N T}\right)^n\right)u[n]$$

$$\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_a(s)}{s}\right\}\Bigg|_{t=nT}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\left(A_0 + A_1\left(e^{p_1 T}\right)^n + A_2\left(e^{p_2 T}\right)^n + \cdots + A_N\left(e^{p_N T}\right)^n\right)u[n]\right\}$$

$$= \frac{A_0}{1-z^{-1}} + \frac{A_1}{1-\left(e^{p_1 T}\right)z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\left(e^{p_2 T}\right)z^{-1}} + \cdots + \frac{A_N}{1-\left(e^{p_N T}\right)z^{-1}}$$

$$= \frac{R(z)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\left(e^{p_1 T}\right)z^{-1}\right)\left(1-\left(e^{p_2 T}\right)z^{-1}\right)\cdots\left(1-\left(e^{p_N T}\right)z^{-1}\right)}$$

Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Análise de estabilidade:

$$H(z) = \left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left\{ \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{H_a(s)}{s} \right\}\Bigg|_{t=nT} \right\}$$

$$= \frac{\left(1 - z^{-1}\right) R(z)}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - \left(e^{p_1 T}\right) z^{-1}\right)\left(1 - \left(e^{p_2 T}\right) z^{-1}\right) \cdots \left(1 - \left(e^{p_N T}\right) z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{R(z)}{\left(1 - \left(e^{p_1 T}\right) z^{-1}\right)\left(1 - \left(e^{p_2 T}\right) z^{-1}\right) \cdots \left(1 - \left(e^{p_N T}\right) z^{-1}\right)}$$

Polos: $z = \left\{ e^{p_k T} \right\}\Big|_{k=1,\cdots,N}$

Se: $\mathrm{Re}\{p_k\} = \sigma_k < 0 \longrightarrow |z| < 1$

$\mathrm{Re}\{p_k\} = \sigma_k > 0 \longrightarrow |z| > 1$

$\longrightarrow$ Polo em *s* estável → polo *z* estável

Invariância ao Degrau (ZOH – *Zero Order Hold*)

Exemplo 4: Determine a discretização por ZOH da seguinte função transferência utilizando $T = 0{,}1$ s.

$$H_a(s) = \frac{1}{s+1}$$

Mapeamento Polo-Zero

Consiste em mapear os polos e zeros da função transferência através da relação $z = e^{sT}$.

$$H_a(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)} \quad \begin{cases} M \rightarrow \text{quantidade de zeros} \\ N \rightarrow \text{quantidade de polos} \end{cases}$$

Polo em $s = p_k \rightarrow z = e^{p_k T}$

Zero finito em $s = z_k \rightarrow z = e^{z_k T}$

Se $M < N$, então há $N - M - 1$ zeros em $s = \infty$, que devem ser mapeados em $z = -1$.

Deve-se ajustar o ganho de $H(z)$ de tal que seja igual ao ganho de $H(s)$ para uma frequência especifica (geralmente $s = 0$):

$$\left|H_a(s)\right|_{s=0} = \left|H(z)\right|_{z=0}$$

Mapeamento Polo-Zero

Exemplo 5: Determine a discretização por mapeamento de polo-zero da seguinte função transferência utilizando $T = 1$ s.

$$H_a(s) = \frac{2}{s+2}$$

Mapeamento Polo-Zero

Exemplo 6: Determine a discretização por mapeamento de polo-zero da seguinte função transferência utilizando $T = 1$ s.

$$H_a(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Discretização no MATLAB

```
sysd = c2d(sysc,Ts,method)
```

- *sysc* → Sistema de tempo contínuo (função de transferência utilizando a função tf ou zpk)
- *Ts* → Intervalo de amostragem
- *method* → Método de discretização
  - *'zoh'* — *Zero-order hold*
  - *'impulse'* — Invariância ao impulso
  - *'tustin'* — Bilinear (Tustin)
  - *'matched'* — Mapeamento de Polo-Zero
- *sysd* → Sistema de tempo discreto (função de transferência)

Discretização no MATLAB

Criação da função transferência:

```
h = tf(a,b)
```

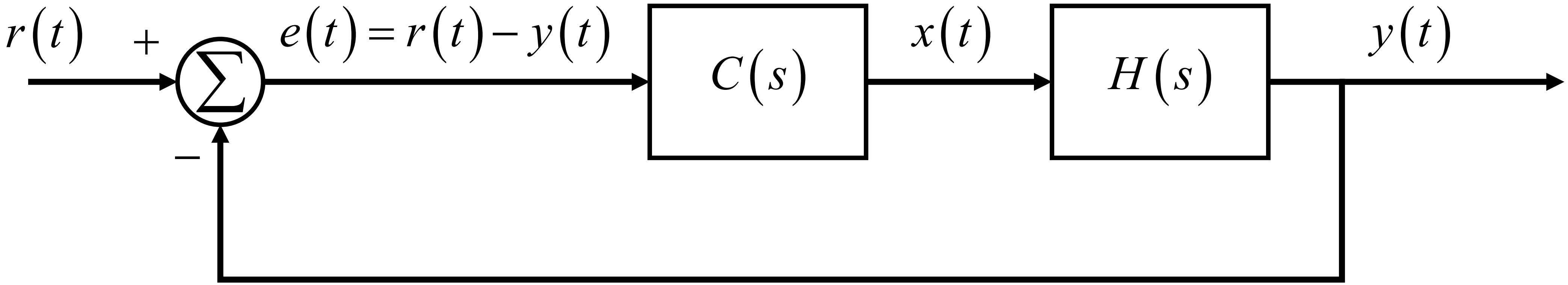
- *a* → Vetor dos coeficientes do numerador
- *b* → Vetor dos coeficientes do denominador

```
h = zpk(zeros,poles,gain)
```

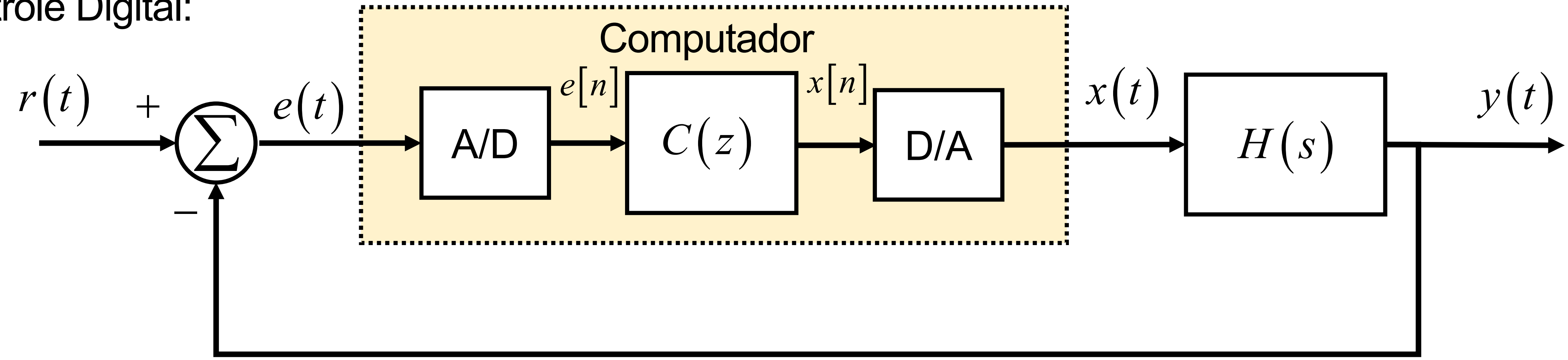
- *zeros* → Vetor dos zeros
- *poles* → Vetor dos polos
- *gain* → Vetor dos ganhos

Sistemas de Controle Digital

Controle Analógico:

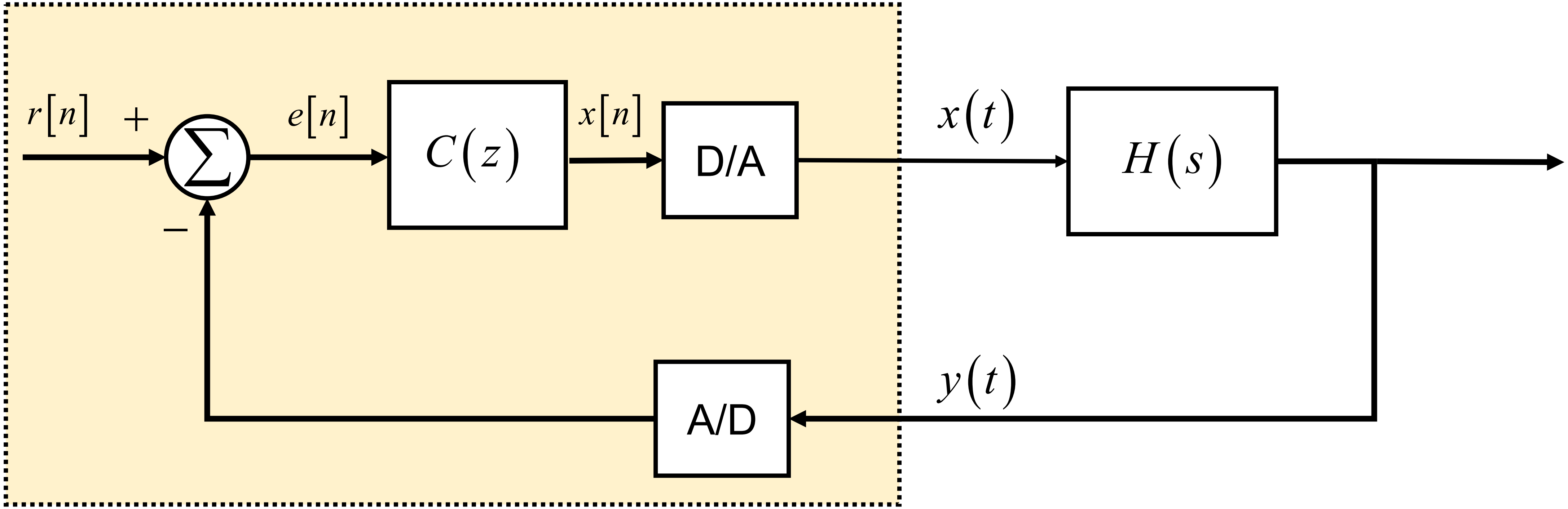


Controle Digital:



Sistemas de Controle Digital

Controle Digital (referência gerado pelo computador):



Sistemas de Controle Digital

- O controlador pode ser projetado em tempo contínuo (*root-locus*, interposição de polos, análise frequencial,...) e depois discretizado:
  - Tustin;
  - Mapeamento polo-zero;
  - Invariância ao Degrau (ZOH);
- Para simulação, recomenda-se discretizar a planta por ZOH;

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = G(z) = \frac{C(z)H(z)}{1 + C(z)H(z)}$$