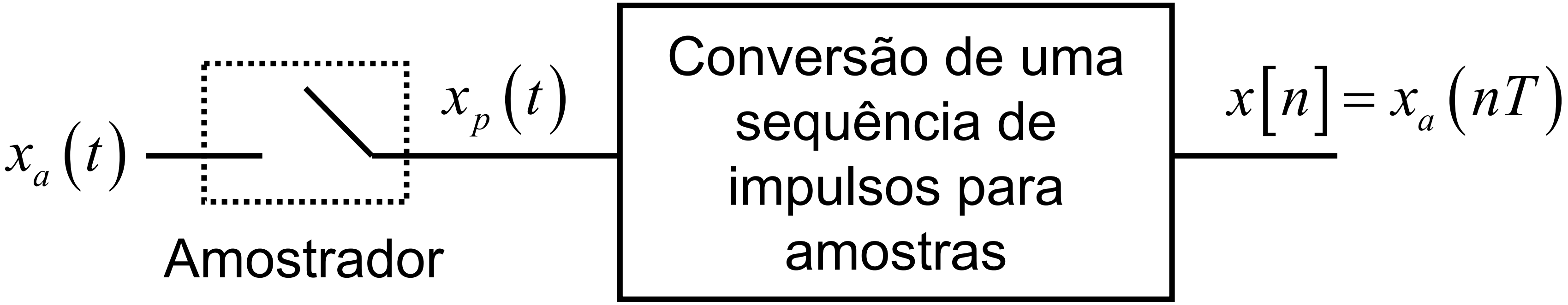
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO (UFERSA)
CENTRO MULTIDISCIPLINAR DE PAU DOS FERROS (CMPF)
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIAS E TECNOLOGIA (DETEC)

PROCESSAMENTO DIGITAL DE SINAIS

Aula 04
Amostragem

Prof.: Pedro Thiago Valério de Souza
UFERSA – Campus Pau dos Ferros
pedro.souza@ufersa.edu.br

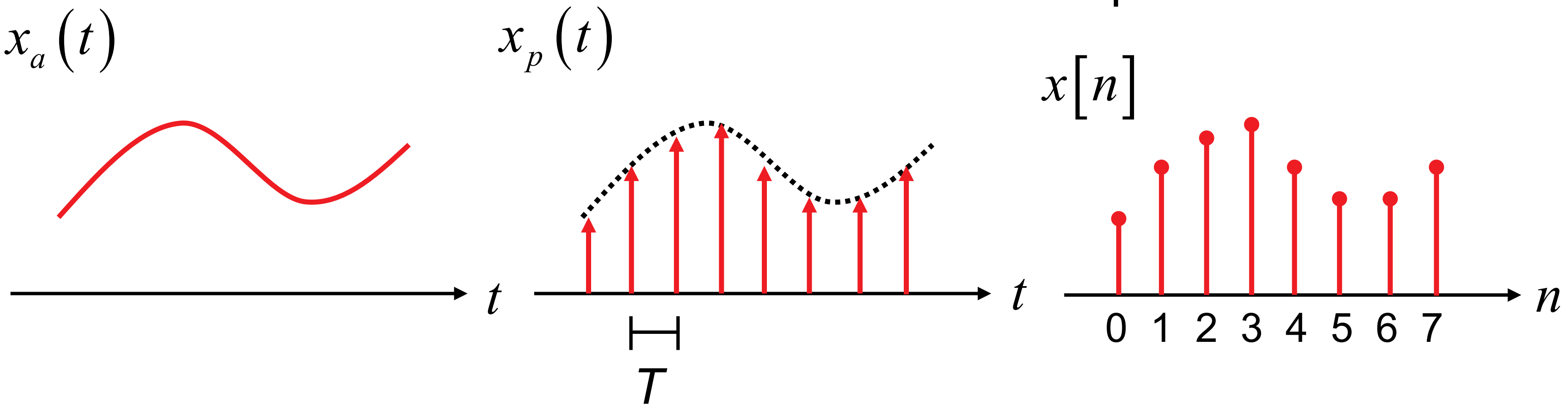
Conversão de Contínuo-Discreto



T → Intervalo de amostragem

Frequência de amostragem: $\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ [rad/s] $\quad F_s = \dfrac{1}{T}$ [Hz]

O valor das amostras é igual á área dos impulsos

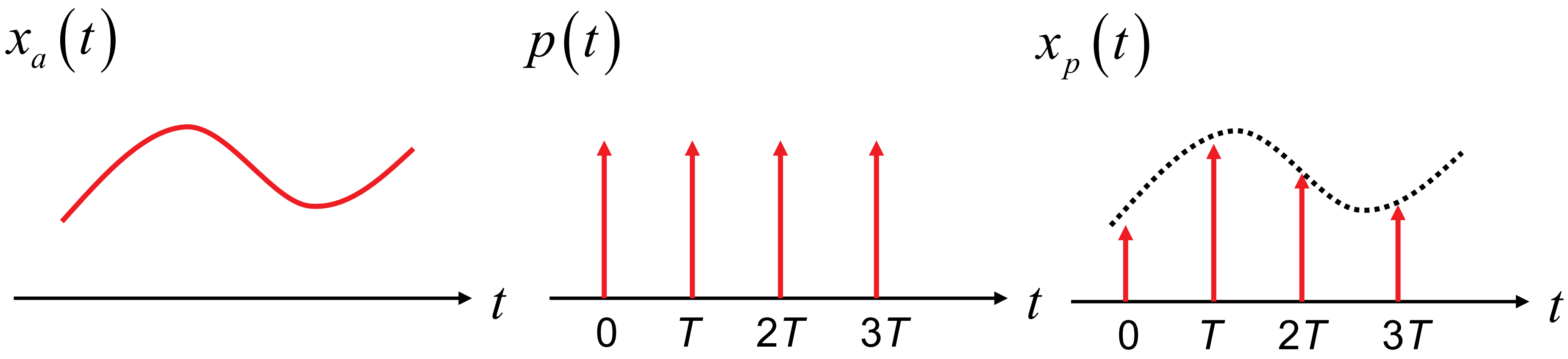


Trem de impulsos com área de cada impulso dada por $x_a(nT)$

Amostragem

Amostragem por trem de impulsos (amostragem ideal):

$$x_p(t)=x_a(t)\,p(t) \qquad p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

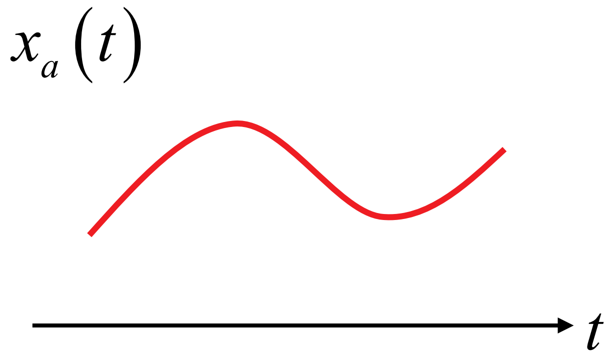


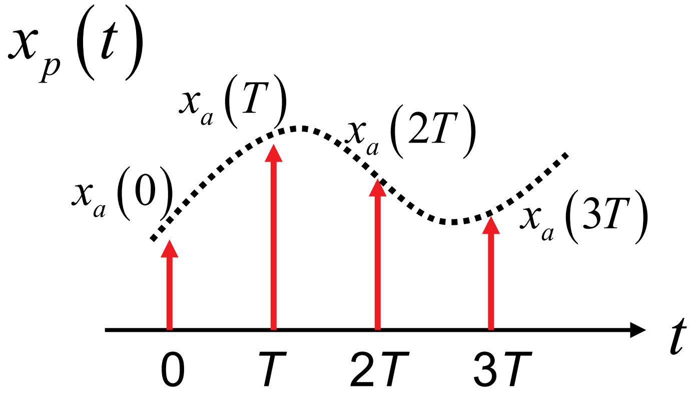
Amostragem

Amostragem por trem de impulsos (amostragem ideal):

$$x_p(t) = x_a(t)\,p(t) = x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\,\delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\,\delta(t-nT)$$





$$\left.\begin{array}{l} x_a(t) \rightleftharpoons X_a(j\Omega) \\ p(t) \rightleftharpoons P(j\Omega) \\ x_p(t) \rightleftharpoons X_p(j\Omega) \end{array}\right\}$$

$$x_p(t) = x_a(t)\,p(t)$$

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X_a(j\Omega) * P(j\Omega)\right]$$

Amostragem

Amostragem por trem de impulsos (amostragem ideal):

Transformada de Fourier de $p(t)$:

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \longrightarrow P(j\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{T}k\right)$$ (Ver o livro do Oppenheim)

$$X_p(j\Omega)=\frac{1}{2\pi}\left[X_a(j\Omega)*P(j\Omega)\right]=\frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega)*\left\{\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{T}k\right)\right\}$$

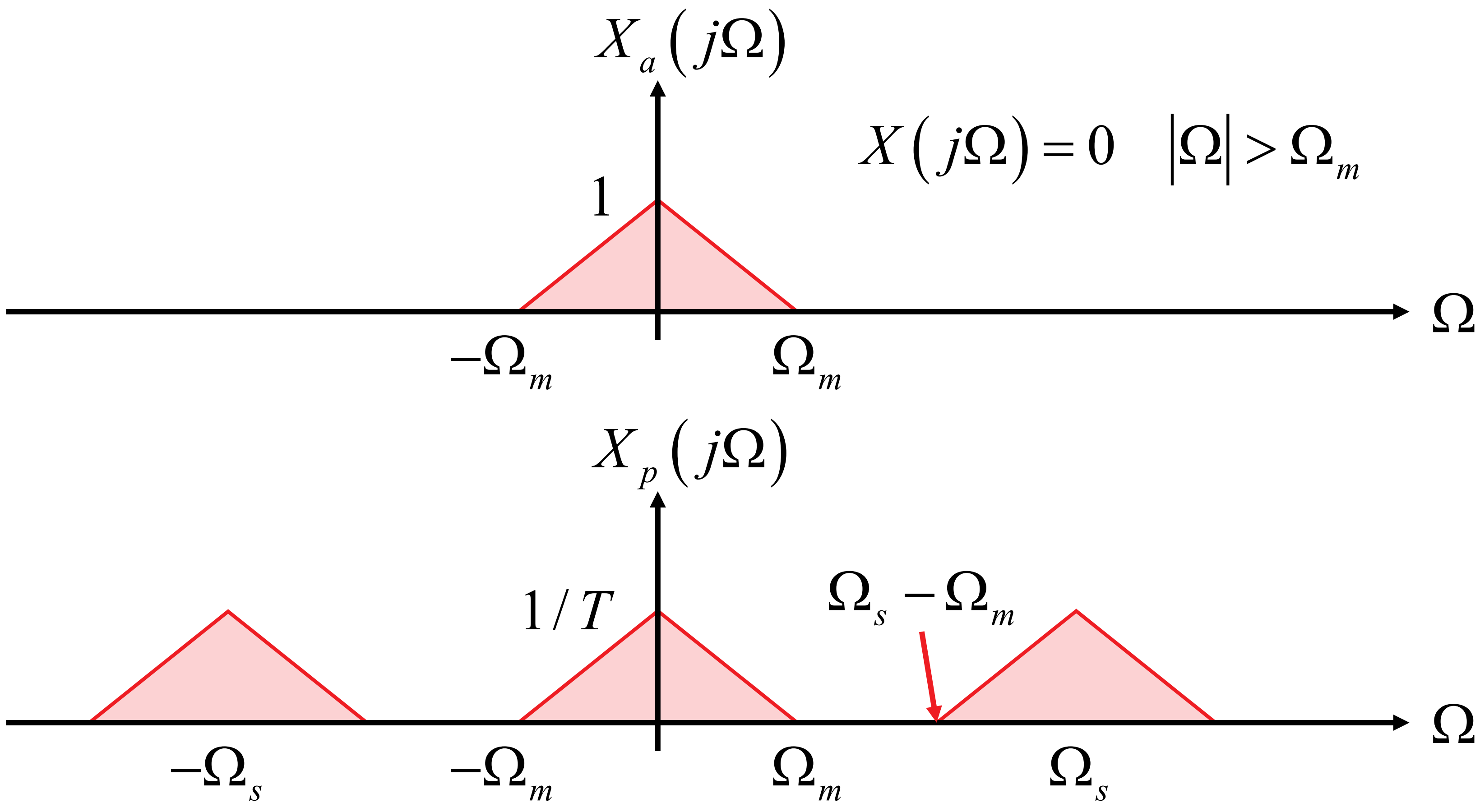
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\Omega)*\delta\left(\Omega-\frac{2\pi}{T}k\right)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(j\left[\Omega-\frac{2\pi}{T}k\right]\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a\left(j[\Omega-k\Omega_s]\right)$$

O espectro do sinal amostrado consiste em réplicas do espectro do sinal original, equiespaçadas (em frequência) de Ω_s rad/s

Amostragem

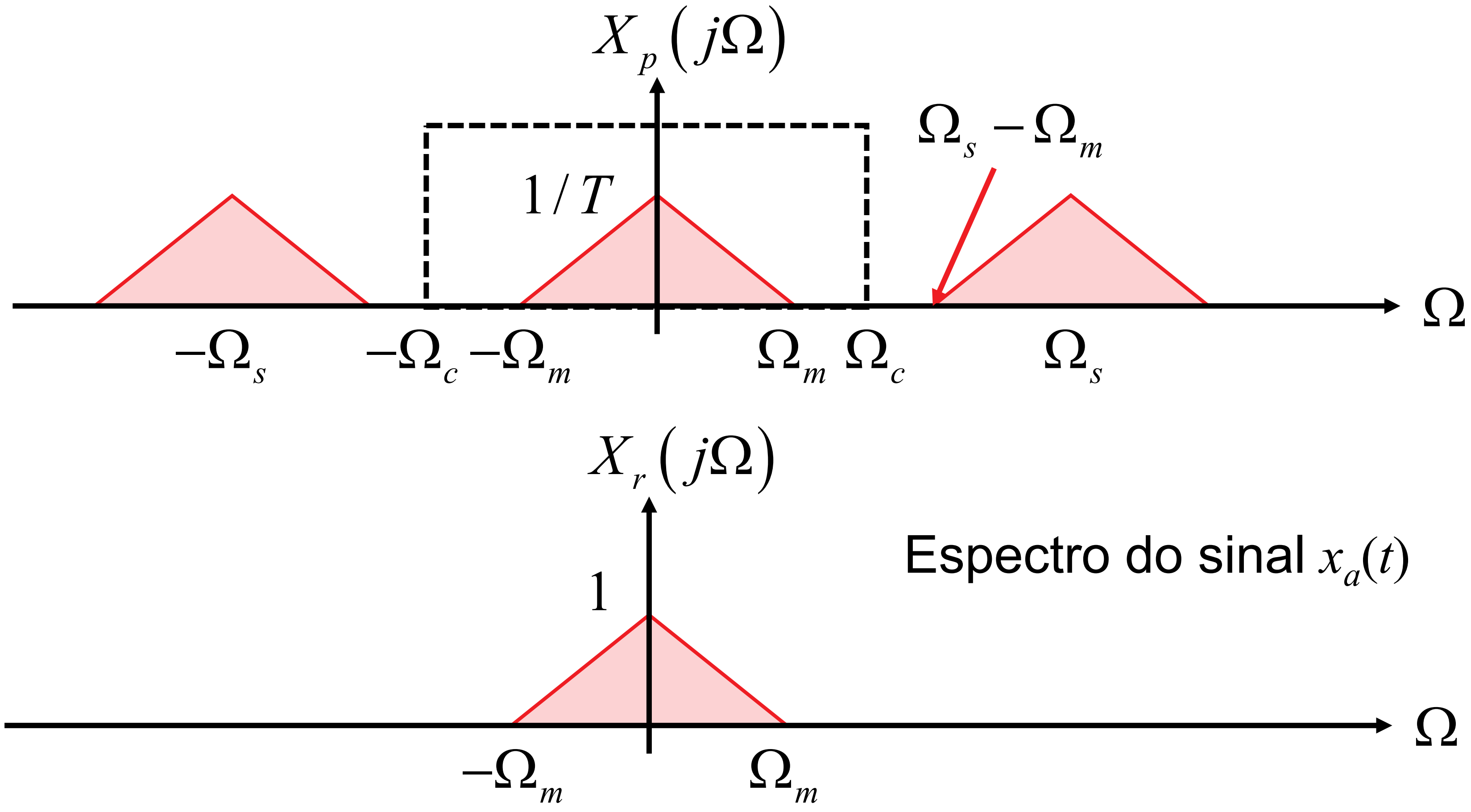
Amostragem por trem de impulsos (amostragem ideal):



Amostragem

Amostragem por trem de impulsos (amostragem ideal):

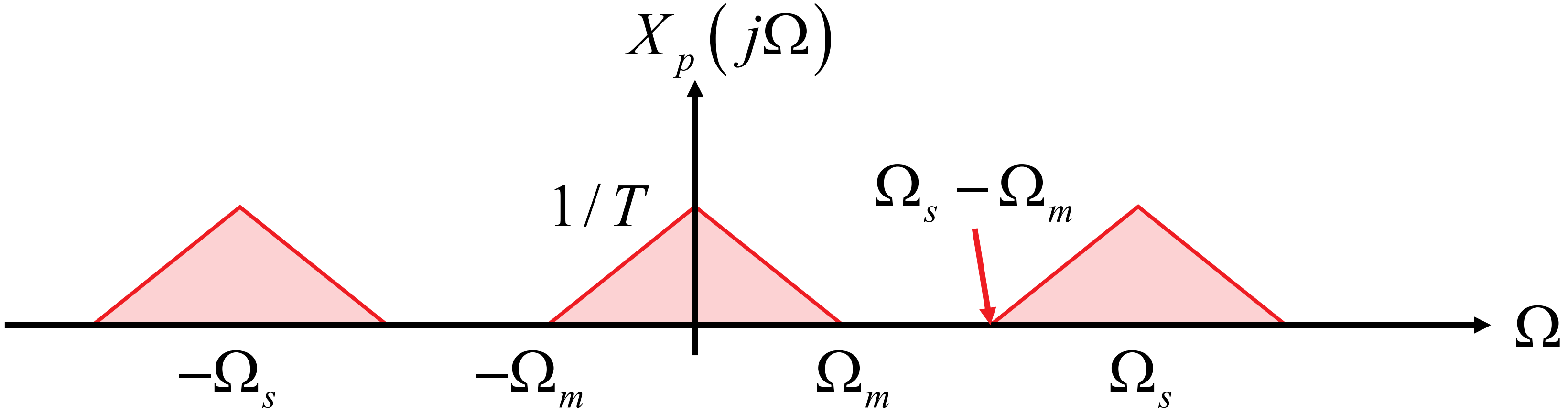
A reconstrução pode ser feita filtrando-se apenas a réplica centrada na origem e aplicar um ganho T



Amostragem

Amostragem por trem de impulsos (amostragem ideal):

Para que a reconstrução possa ser feita, as réplicas não podem se sobrepor.



$\Omega_s - \Omega_m > \Omega_m \longrightarrow \Omega_s > 2\Omega_m$ Teorema da amostragem (Teorema de Nyquist)

Amostragem

Amostragem por trem de impulsos (amostragem ideal):

Teorema da amostragem (Teorema de Nyquist):

Seja $x_a(t)$ um sinal limitado em banda, tal que $X(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_m$. O sinal $x_a(t)$ pode ser recuperado de forma única através de suas amostras $\{x_a(nT)\}$ se:

$$\Omega_s > 2\Omega_m$$

O filtro de recuperação deverá ser um filtro passa-baixas, com ganho T e frequência de corte Ω_c tal que:

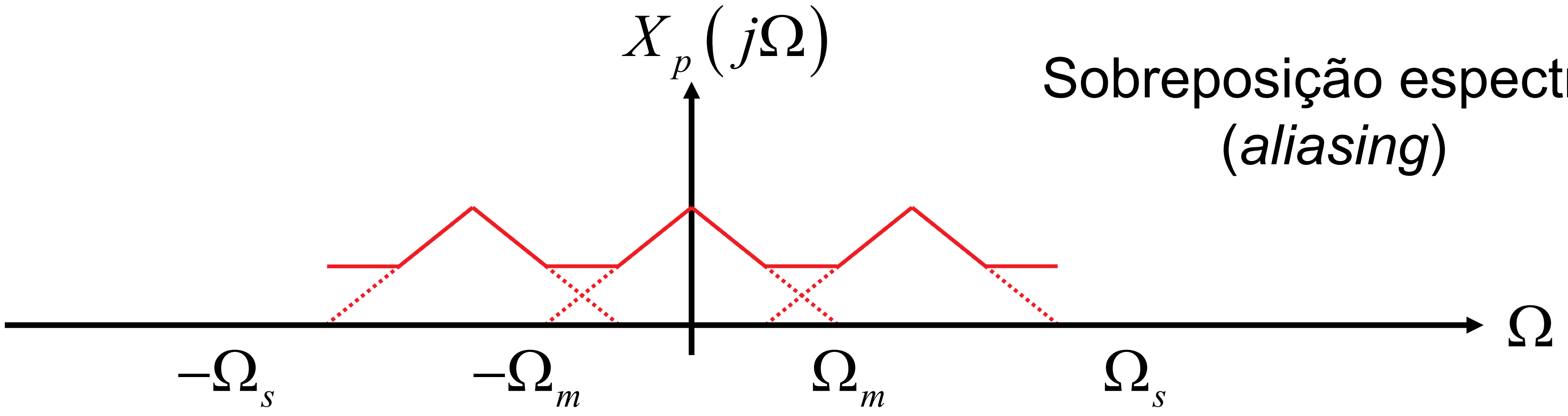
$$\Omega_m < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_m$$

A frequência no qual $\Omega_s = 2\,\Omega_m$ é denominada de frequência de Nyquist.

Amostragem

Amostragem por trem de impulsos (amostragem ideal):

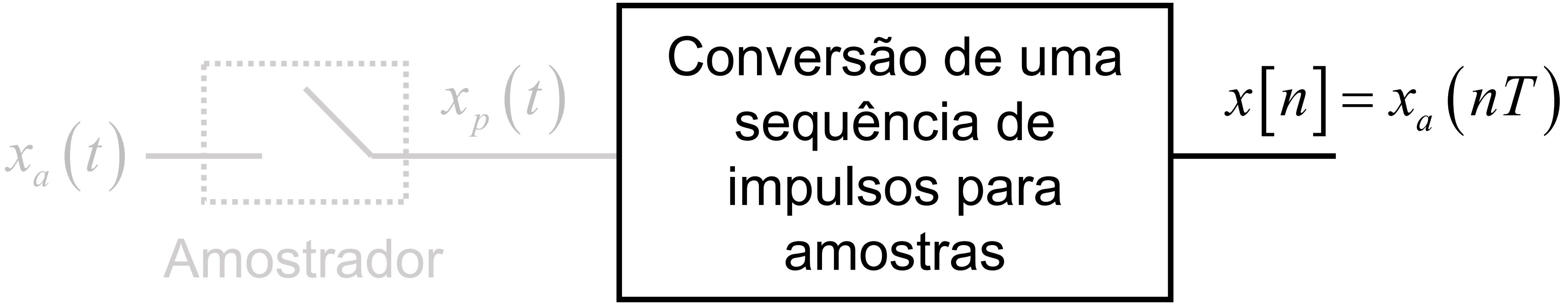
Se o teorema de Nyquist não for respeitado, acontece sobreposição das réplicas (*aliasing*):



Sobreposição espectral (*aliasing*)

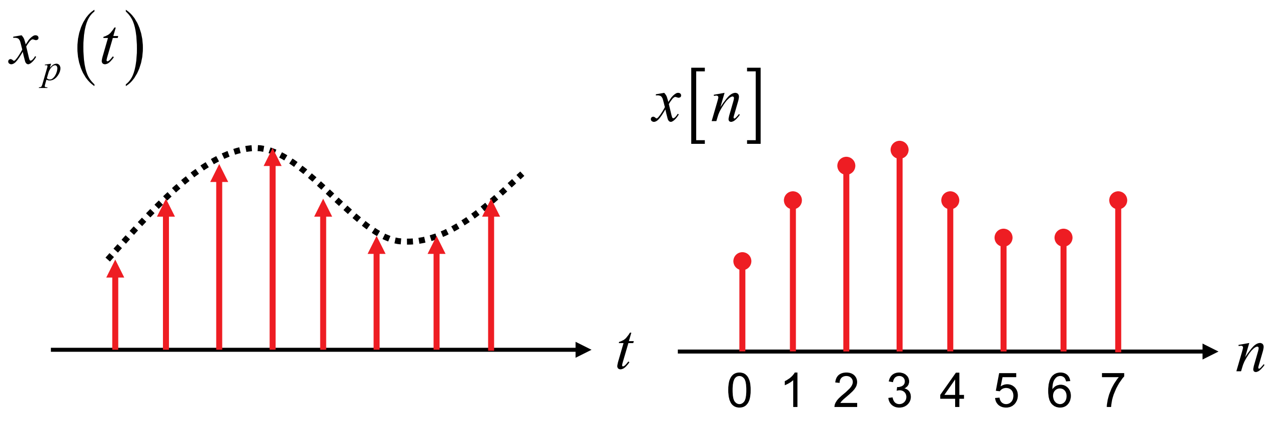
Exemplo 1: Na telefonia digital, o sinal de voz é limitado em banda à 3,4 kHz. Determine: (a) a frequência de Nyquist e (b) A taxa de amostragem, sabendo que o sinal é amostrado a uma taxa 17% superior à de Nyquist.

Conversão para uma sequência de amostras



$x_p(t)$ → Tempo contínuo

Sinal de tempo discreto gerado através da conversão da "amplitude" dos impulsos para uma sequência de valores.



Conversão para uma sequência de amostras

Análise da DTFT de $x[n]$:

$$x_p(t) = x_a(t)\,p(t) = x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t-nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)$$

$$X_p(j\Omega) = \mathcal{F}\left\{x_p(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t-nT)\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\left\{x[n]\delta(t-nT)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathcal{F}\left\{\delta(t-nT)\right\}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega Tn}$$

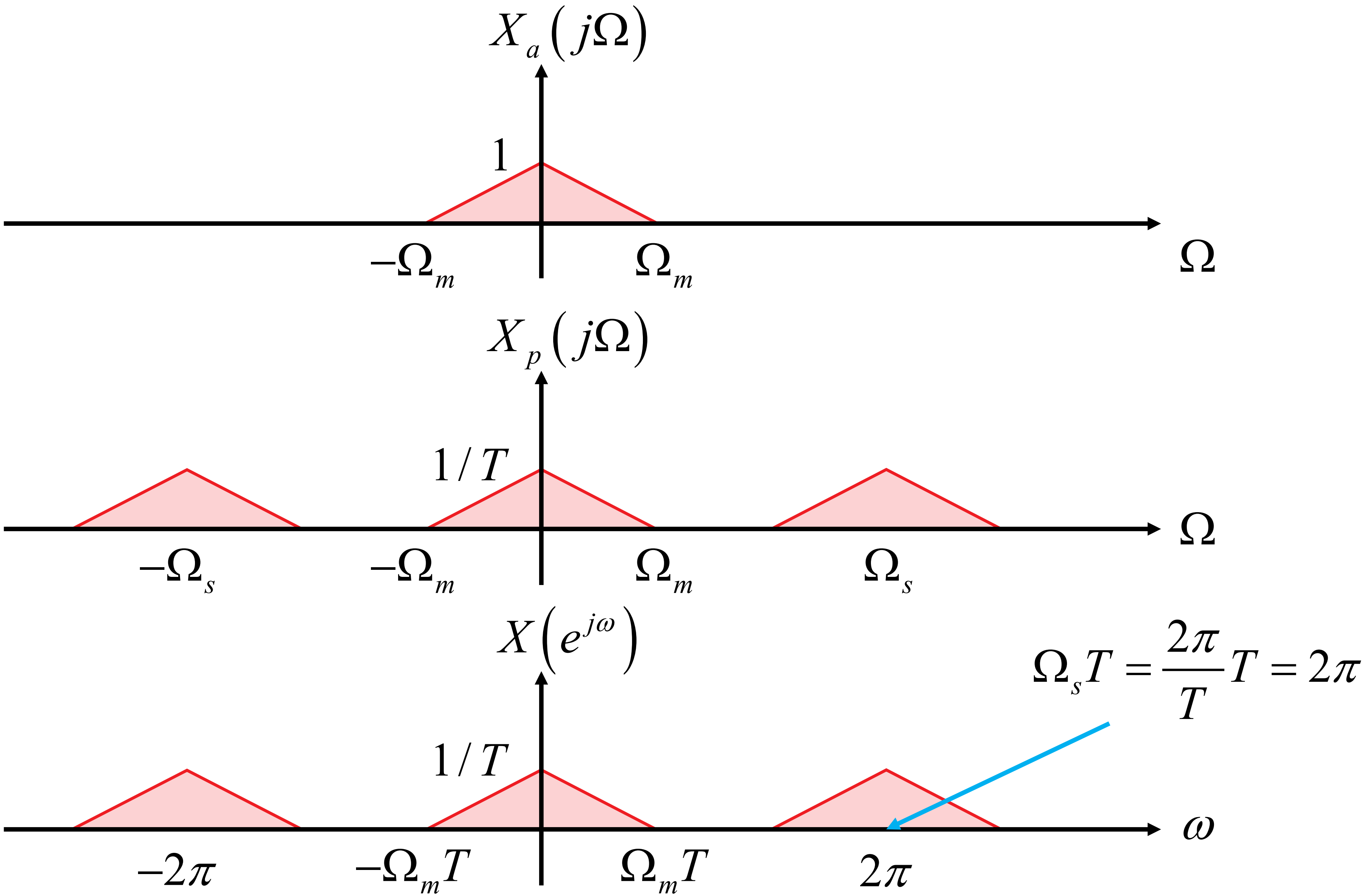
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \mathcal{F}\left\{x[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Por comparação: $X\left(e^{j\omega}\right) = X_p(j\Omega)\Big|_{\Omega=\frac{\omega}{T}}$

Conversão para uma sequência de amostras

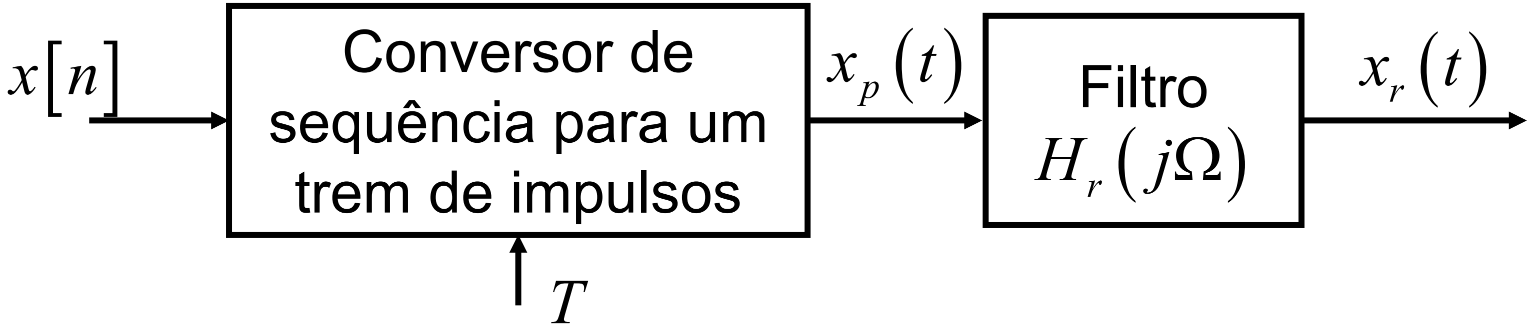
A DTFT de $x[n]$ corresponde a uma versão de $X_p(j\Omega)$, com uma mudança na escala de frequência por um fator $\Omega = \omega / T$.

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j[\Omega - \Omega_s k]\right) \longrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left[j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]$$

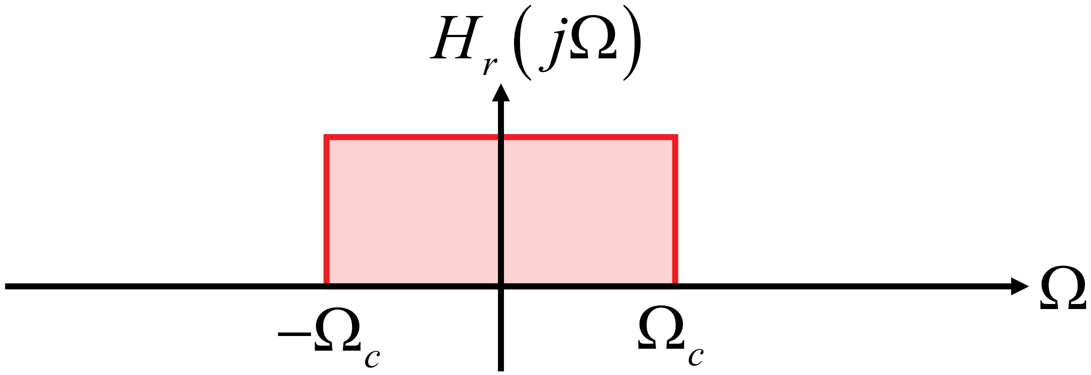

$X_a(j\Omega)$
1
$-\Omega_m$
Ω_m
Ω
$X_p(j\Omega)$
$1/T$
$-\Omega_s$
$-\Omega_m$
Ω_m
Ω_s
Ω
$X(e^{j\omega})$
$\Omega_s T = \frac{2\pi}{T} T = 2\pi$
$1/T$
ω
-2π
$-\Omega_m T$
$\Omega_m T$
2π

Reconstrução (Interpolação)

Diagrama de blocos do interpolador:



Filtro de reconstrução: passa-baixas, com ganho *T* e frequência de corte Ω_c rad/s.



$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$h_r(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_r(j\Omega)\}$$

$$= \frac{\Omega_c T \sin(\Omega_c t)}{\pi \Omega_c t}$$

Reconstrução (Interpolação)

$$x_r(t) = x_p(t) * h_r(t) = x_p(t) * \frac{\Omega_c T \sin(\Omega_c t)}{\pi \Omega_c t} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT) \right\} * \frac{\Omega_c T \sin(\Omega_c t)}{\pi \Omega_c t}$$

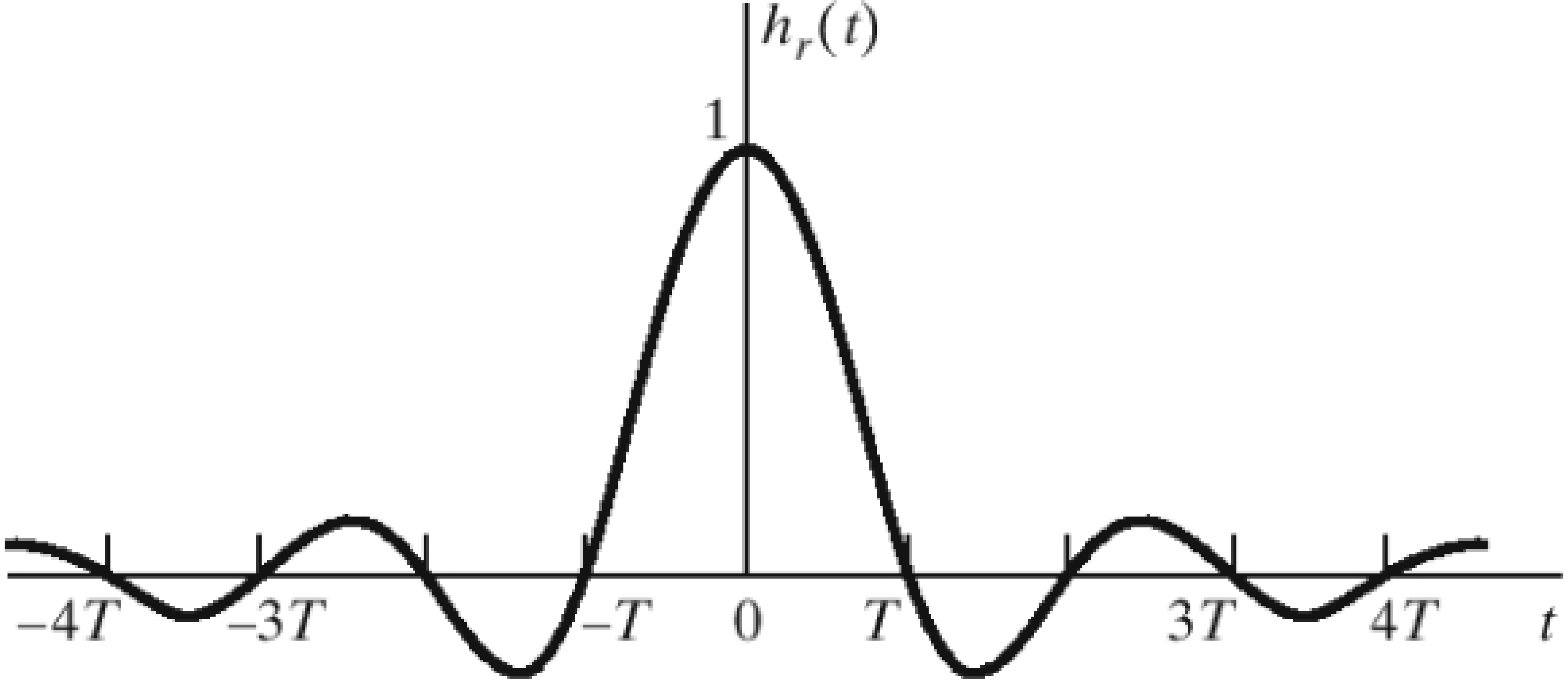
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ x[n]\delta(t - nT) \right\} * \frac{\Omega_c T \sin(\Omega_c t)}{\pi \Omega_c t}$$

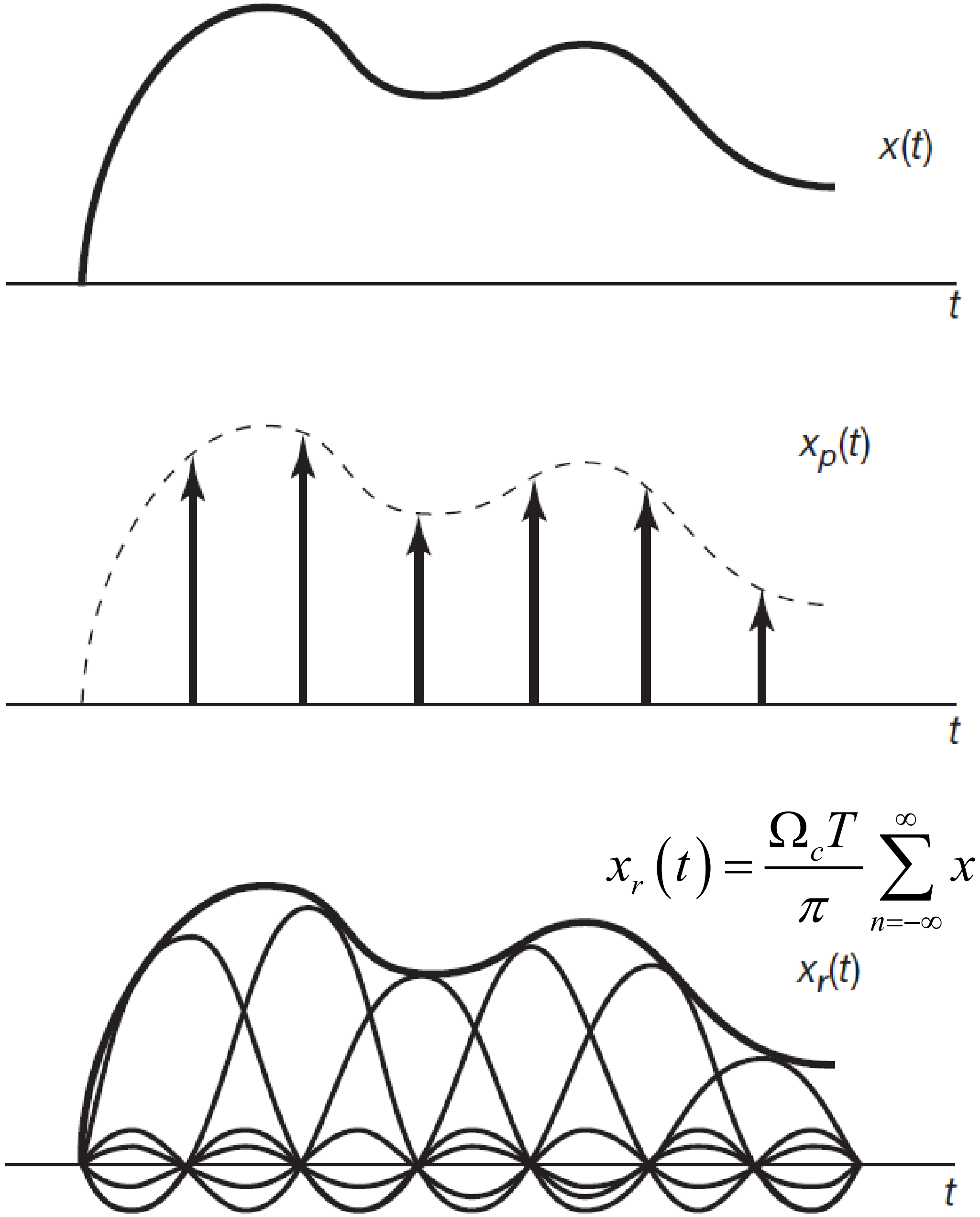
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT) * \frac{\Omega_c T \sin(\Omega_c t)}{\pi \Omega_c t}$$

$$= \frac{\Omega_c T}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin(\Omega_c (t - nT))}{\Omega_c (t - nT)}$$

Combinação linear de funções tipo “sinc”.

$$h_r(t) = \frac{\Omega_c T \sin(\Omega_c t)}{\pi \Omega_c t}$$



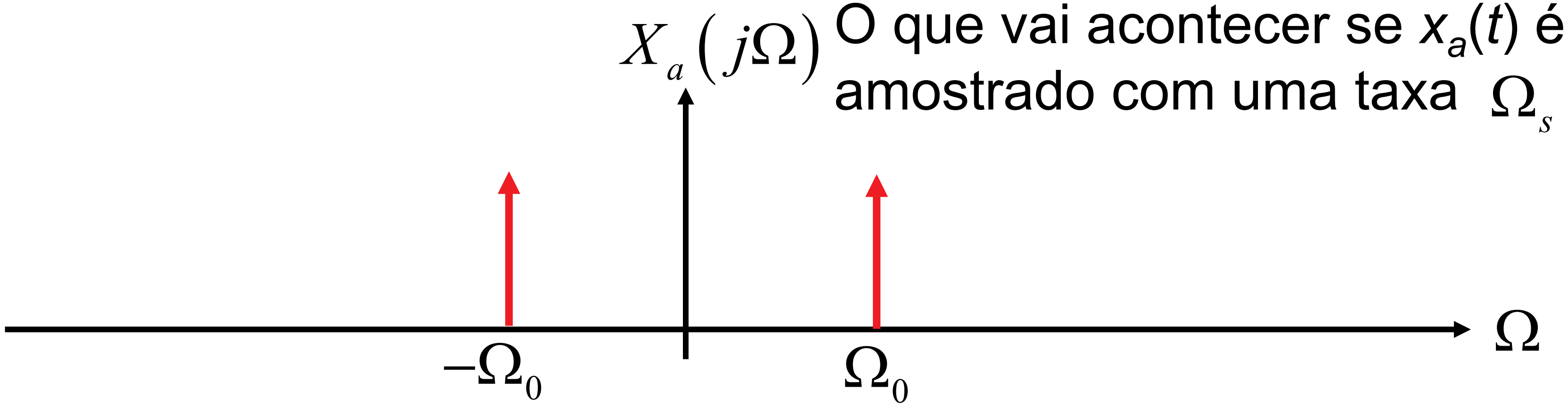


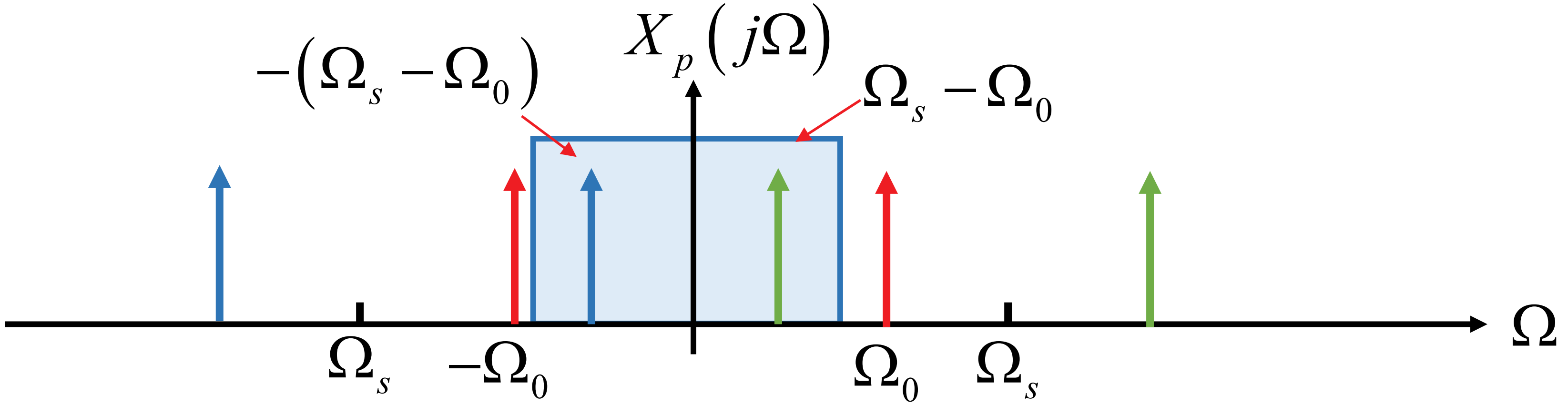
$$x_r(t) = \frac{\Omega_c T}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{\sin\left(\Omega_c\left(t - nT\right)\right)}{\Omega_c\left(t - nT\right)}$$

Efeito do *Aliasing* em sinais senoidais

$$x_a(t) = \cos(\Omega_0 t) \qquad X_a(j\Omega) = \pi\{\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)\}$$

O que vai acontecer se $x_a(t)$ é amostrado com uma taxa $\Omega_s < 2\Omega_0$?

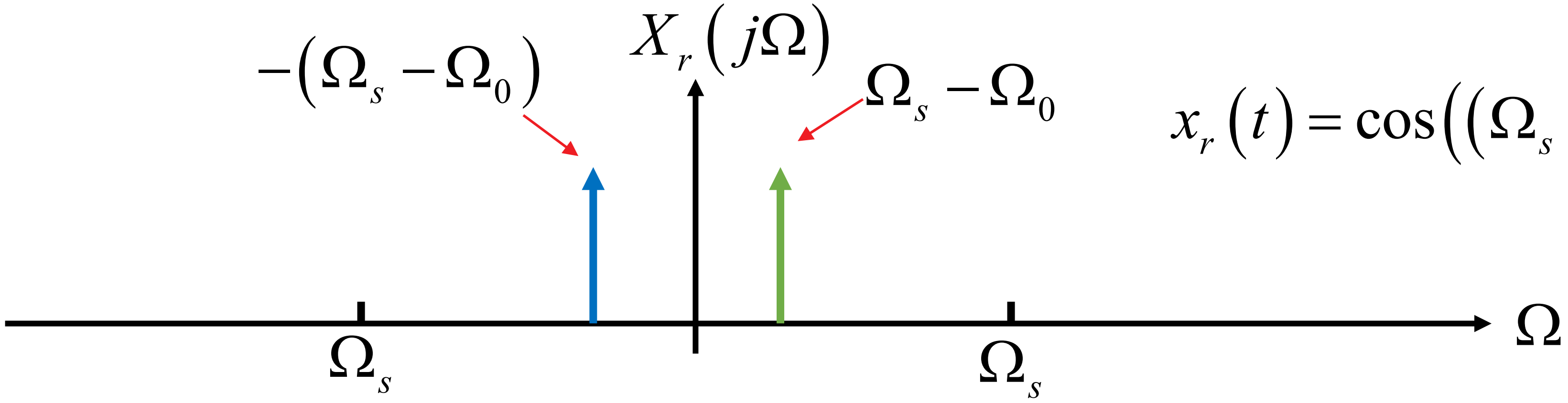




Filtro de Recuperação

Efeito do *Aliasing* em sinais senoidais

Após a recuperação:

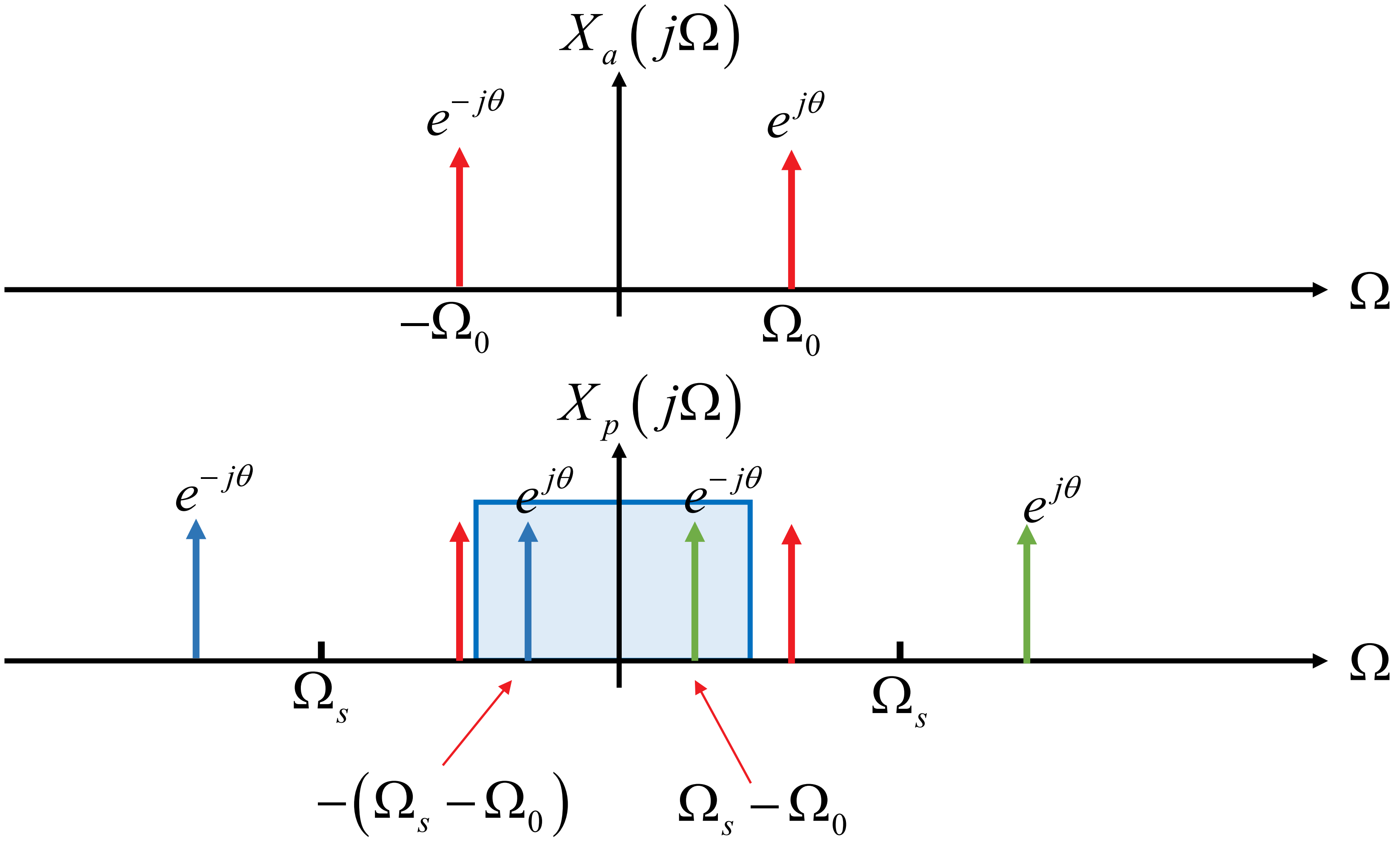


$$x_r(t) = \cos((\Omega_s - \Omega_0)t)$$

Aliasing: Efeito no qual um sinal de frequência maior se comporta como um sinal de frequência menor.

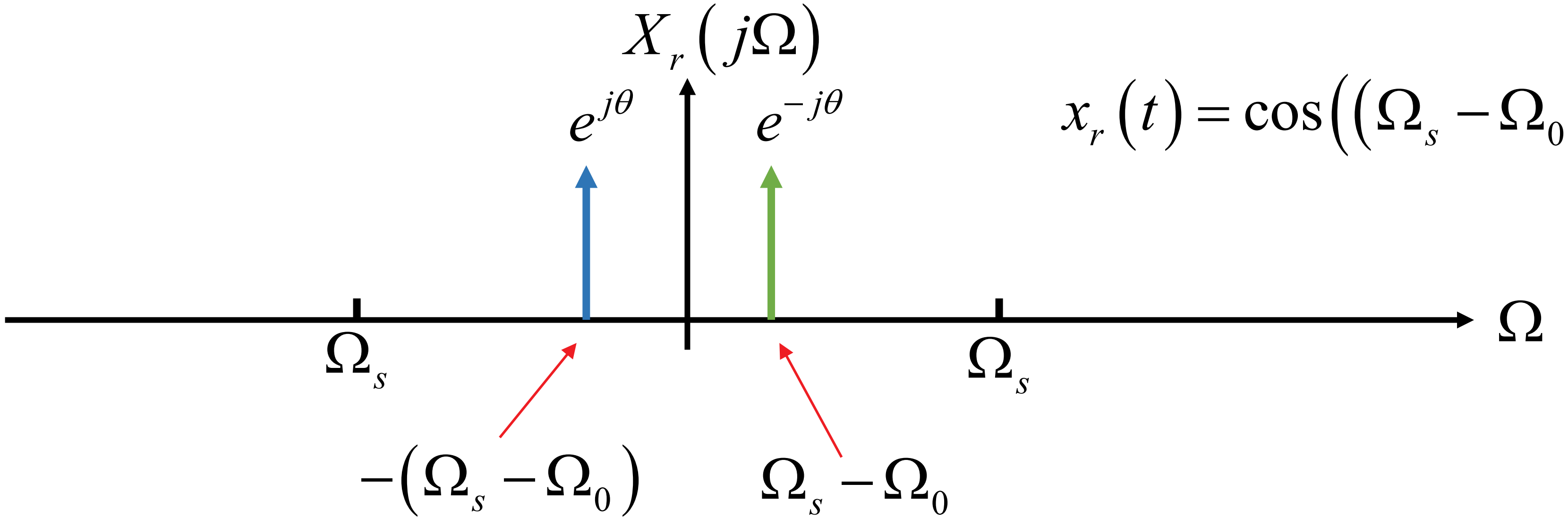
Efeito do *Aliasing* em sinais senoidais

$$x_a(t) = \cos(\Omega_0 t + \theta) \qquad X_a(\omega) = \pi\left\{e^{j\theta}\delta(\Omega - \Omega_0) + e^{-j\theta}\delta(\Omega + \Omega_0)\right\}$$



Efeito do *Aliasing* em sinais senoidais

Após a recuperação:



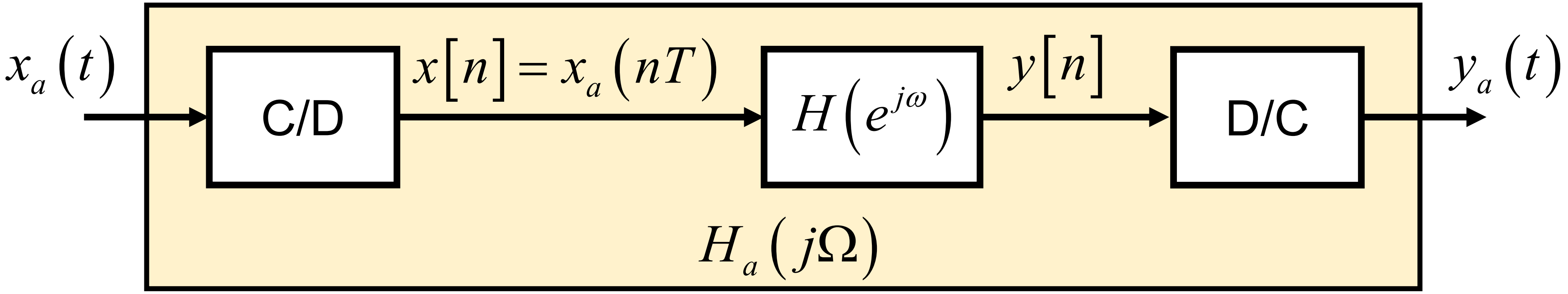
$$x_r(t) = \cos\left(\left(\Omega_s - \Omega_0\right)t - \theta\right)$$

Aliasing: Efeito no qual um sinal de frequência maior se comporta como um sinal de frequência menor, adicionalmente, uma inversão de fase.

Processamento em Tempo Discreto de Sinais de Tempo Contínuo

- Vantagens no processamento em tempo discreto de sinais:
  - São mais fáceis de projetar;
  - O armazenamento da informação é feito de forma mais simples;
  - São mais versáteis;
  - São mais robustos ao efeito do ruído;
  - Podem ser mais baratos do que sistemas completamente analógicos;
  - Permitem o uso de técnicas avançadas de processamento (criptografia, codificação, compressão,...);
- Desvantagens:
  - A maioria do sinais encontrados na natureza são de tempo contínuo.

Processamento em Tempo Discreto de Sinais de Tempo Contínuo



$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left[\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right]\right)$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left[\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right]\right)$$

Após a reconstrução do sinal:

$$Y_a(j\Omega) = H_r(j\Omega)\left[Y(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\Omega T}\right] = H_r(j\Omega)\left[H(e^{j\omega})\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left[\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right]\right)\right]\Bigg|_{\omega=\Omega T}$$

Processamento em Tempo Discreto de Sinais de Tempo Contínuo

$$Y_a(j\Omega) = \frac{1}{T} H_r(j\Omega) H\left(e^{j\Omega T}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j\left[\Omega - \Omega_s k\right]\right)$$

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T & |\Omega| \le \Omega_c \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} \qquad \Omega_m < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_m$$

O filtro elimina todas as replicas, mantendo apenas a centrada na origem.

Desta forma: $Y_a(j\Omega) = \begin{cases} H\left(e^{j\Omega T}\right) X_a(j\Omega) & |\Omega| \le \Omega_c \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Ou seja: $H_a(j\Omega) = \begin{cases} H\left(e^{j\Omega T}\right) & |\Omega| \le \Omega_c \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} = \begin{cases} H\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega = \Omega T} & |\Omega| \le \Omega_c \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Qualquer conversão de tempo discreto – tempo contínuo (usando amostragem ideal) pode ser feita através da seguinte relação: $\omega = \Omega T$

Processamento em Tempo Discreto de Sinais de Tempo Contínuo

Exemplo 2: Considere um sistema de remoção da componente de 60 Hz de um sinal de eletrocardiograma (ECG). O sistema é composto por um conversor A/D ideal, seguido de um filtro *Notch* e, por fim, um conversor D/A ideal. O filtro *Notch* é um filtro rejeita-faixas com banda de passagem muito estreita, de forma a remover uma certa componente de frequência. A frequência a ser removida é a frequência central do filtro *Notch*. Admitindo que o sinal de ECG a ser amostrado possui frequência máxima de 80 Hz, determine:

(a) A frequência de amostragem, admitindo que o sinal de ECG é amostrado com uma frequência 25% superior à de Nyquist.

(b) A frequência central do filtro *Notch* de tempo discreto de forma a remover a componente de 60 Hz, admitindo a frequência de amostragem calculada no item (a).

Filtro *Notch* de Tempo Discreto:

$$y[n]-2r\cos(\omega_0)y[n-1]+r^2y[n-2]=x[n]-2\cos(\omega_0)x[n-1]+x[n-2]$$

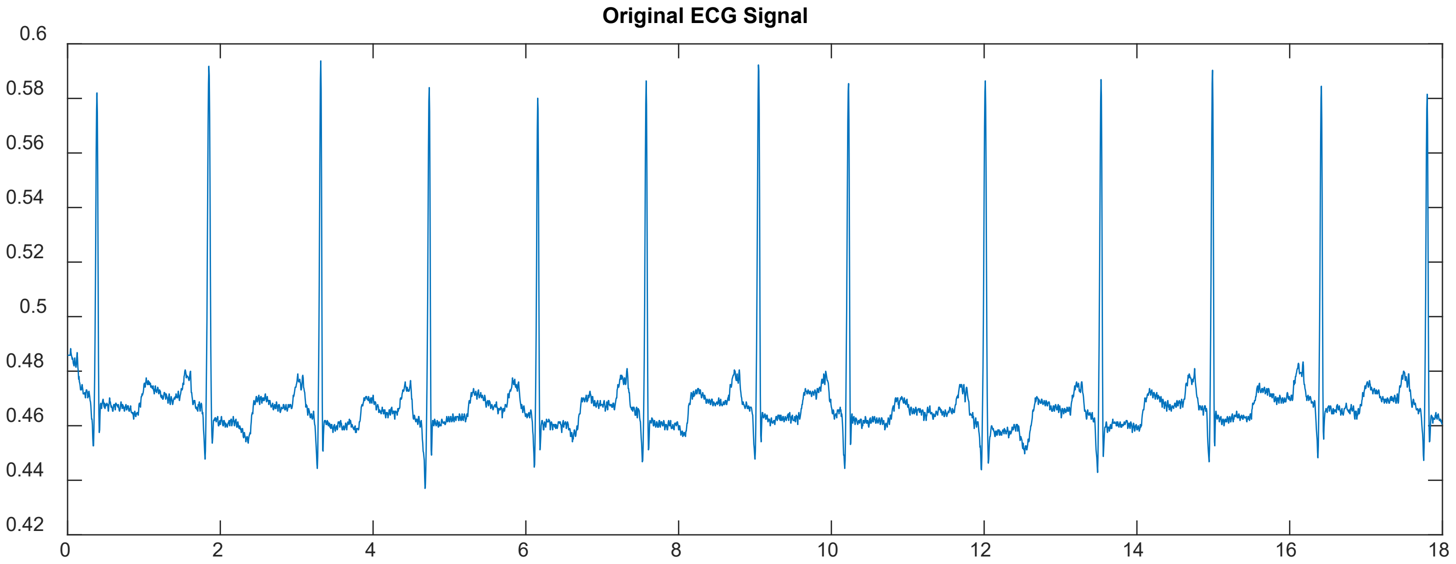
$$H(e^{j\omega})=\frac{1-2\cos(\omega_0)e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{1-2r\cos(\omega_0)e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$$

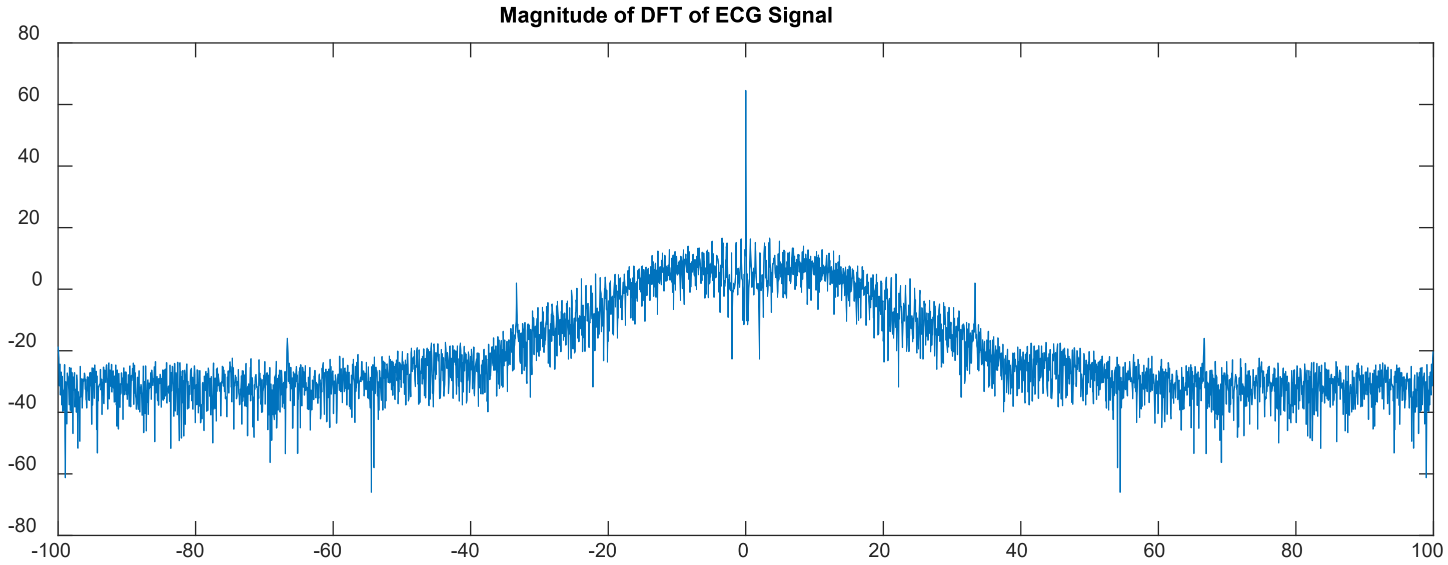
$$r=1-\left(\frac{BW}{F_s}\right)\pi \qquad \omega_0=\frac{2\pi f_0}{f_s}$$

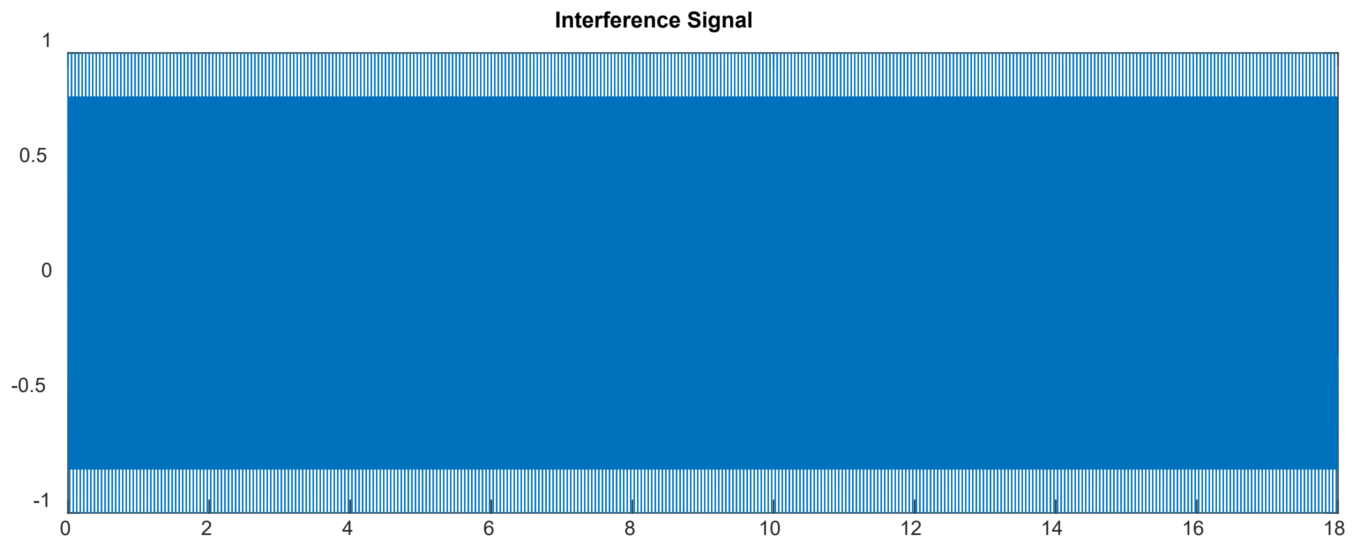
Testes considerados: $BW = 4\ \text{Hz}$

$f_0 = 60\ \text{Hz}$

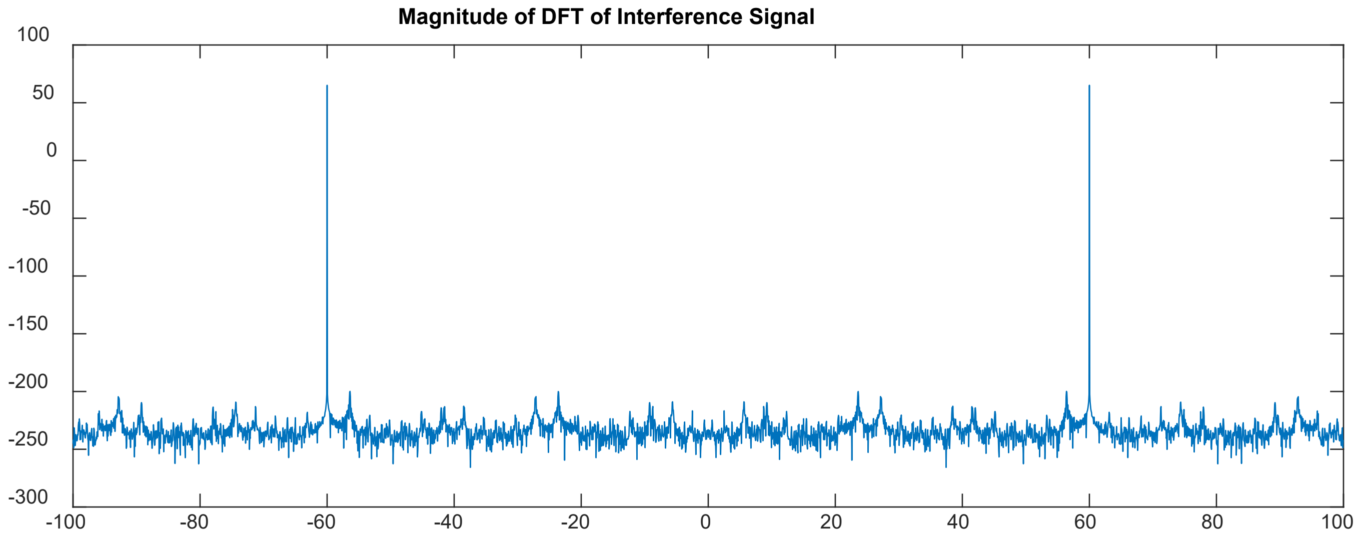
Sinal ecg100.dat do banco de arritmias do MIT contaminado com um ruído sintético de 60 Hz.


Original ECG Signal
0.6
0.58
0.56
0.54
0.52
0.5
0.48
0.46
0.44
0.42
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

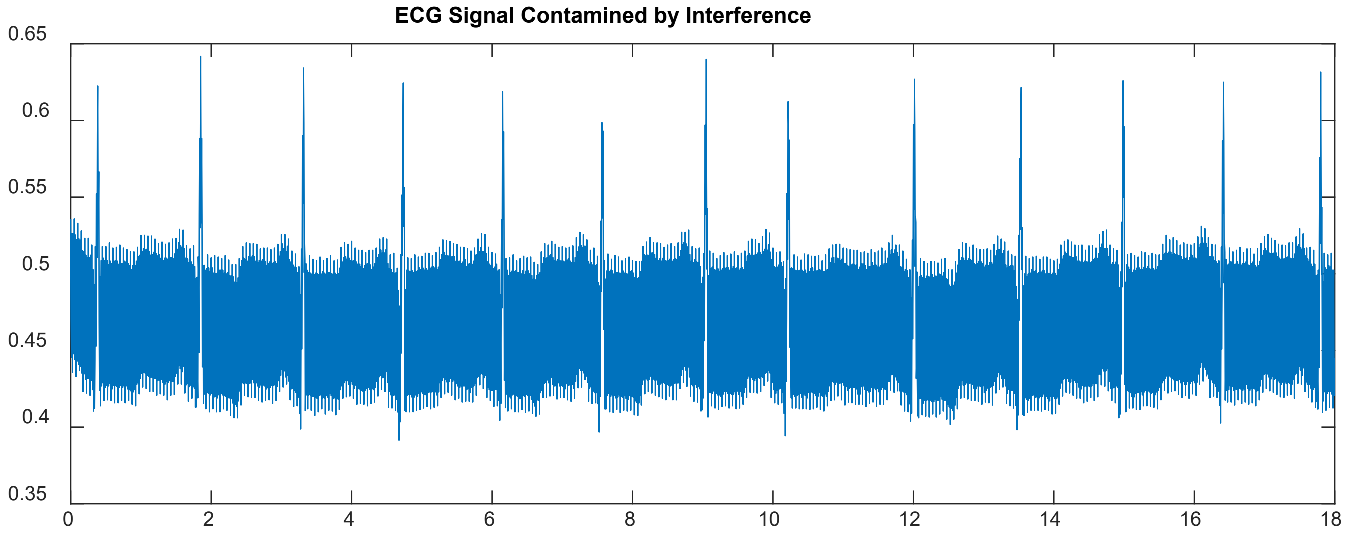

Magnitude of DFT of ECG Signal
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
100

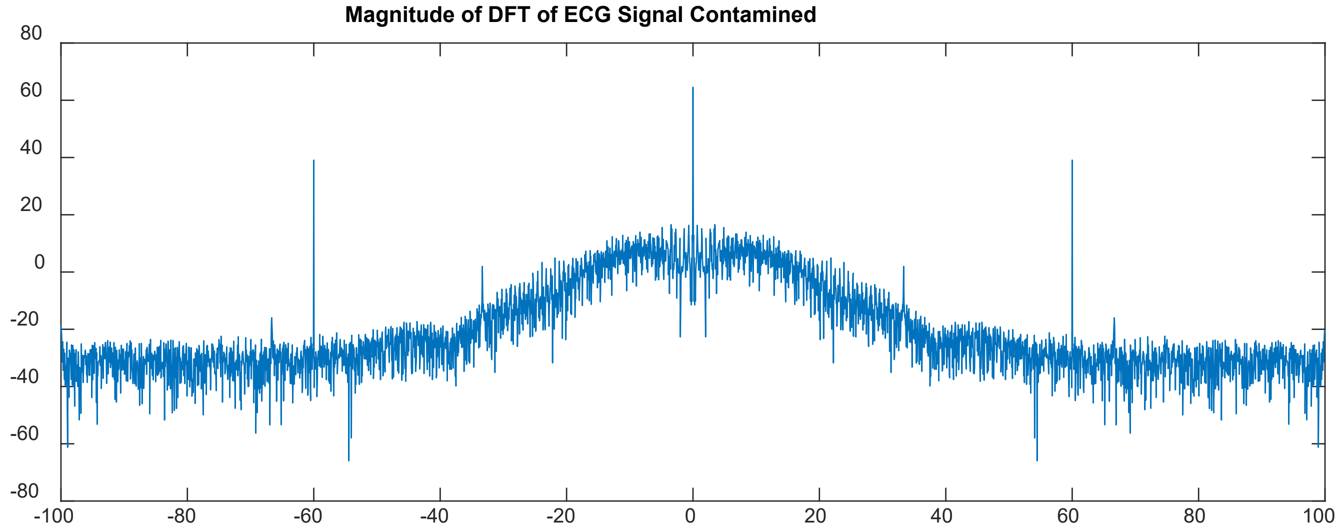


Interference Signal
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

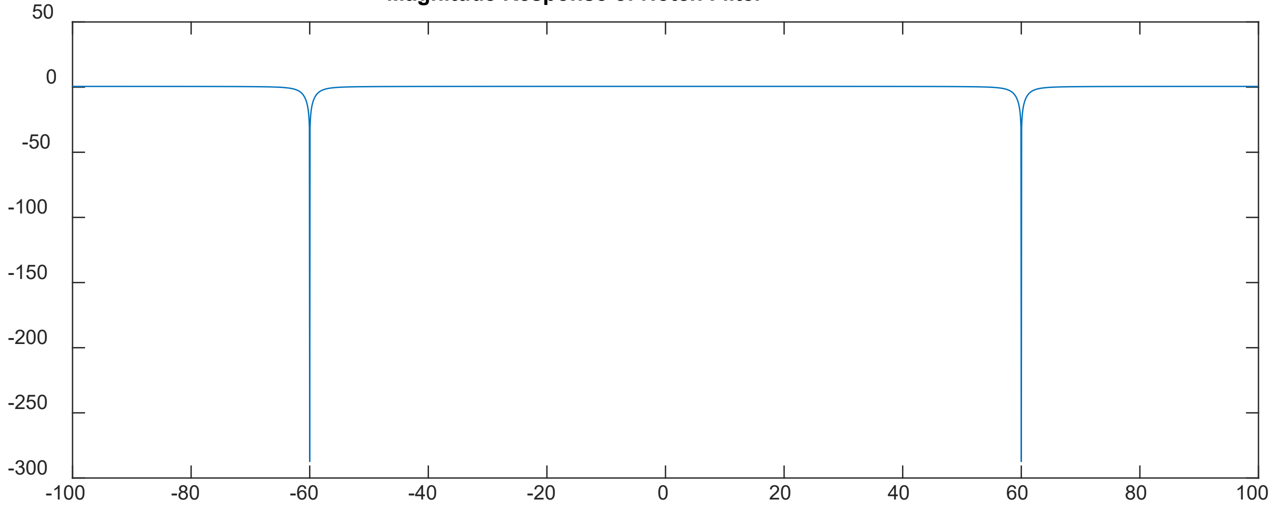


Magnitude of DFT of Interference Signal
100
50
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
-100
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
100

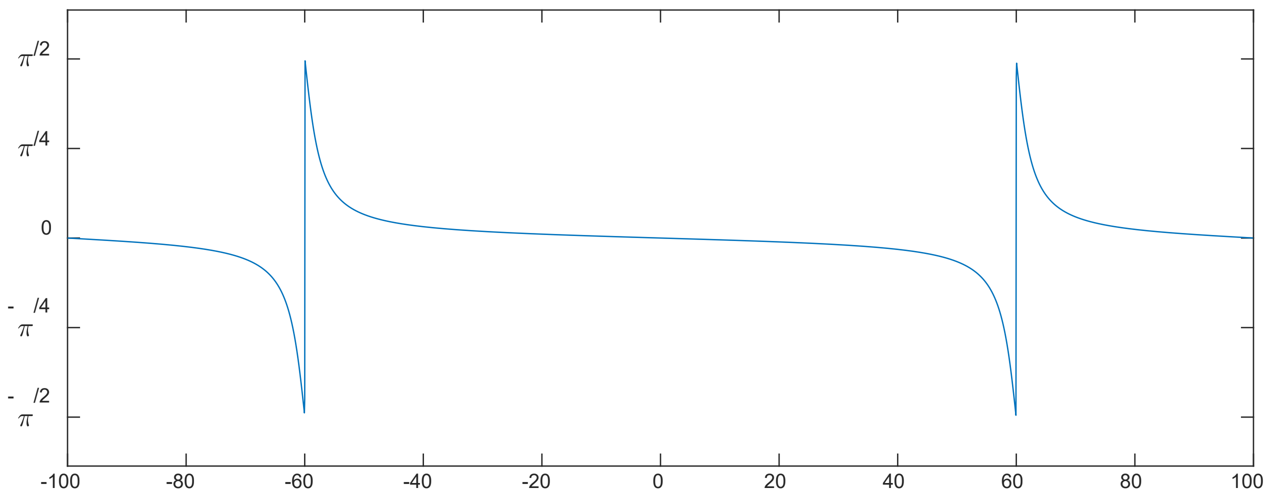

ECG Signal Contamined by Interference
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

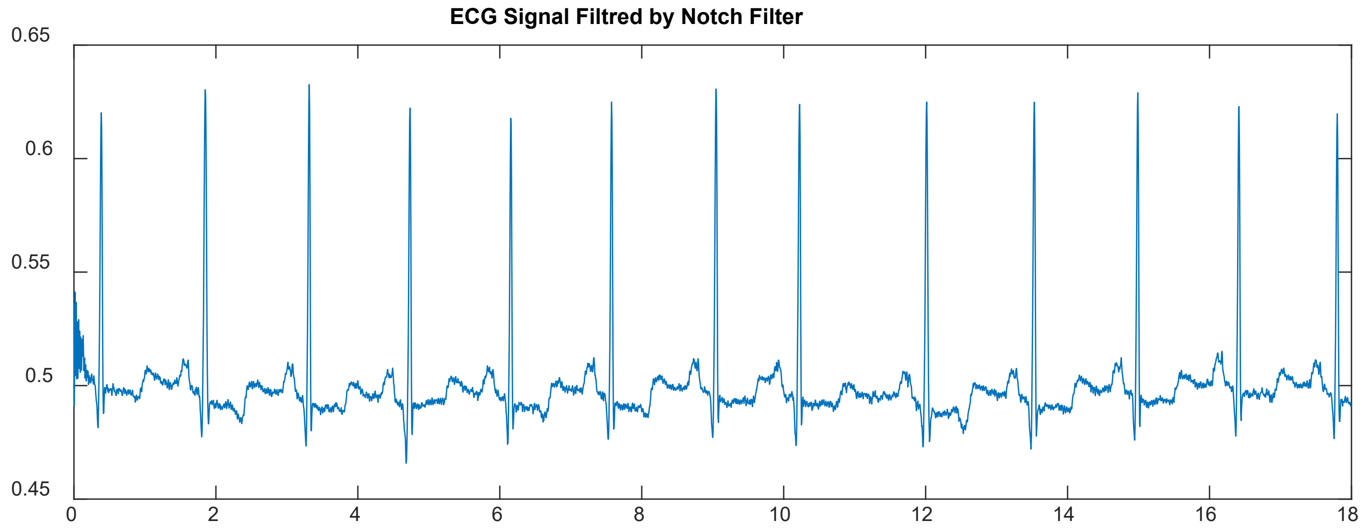

Magnitude of DFT of ECG Signal Contamined
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
100

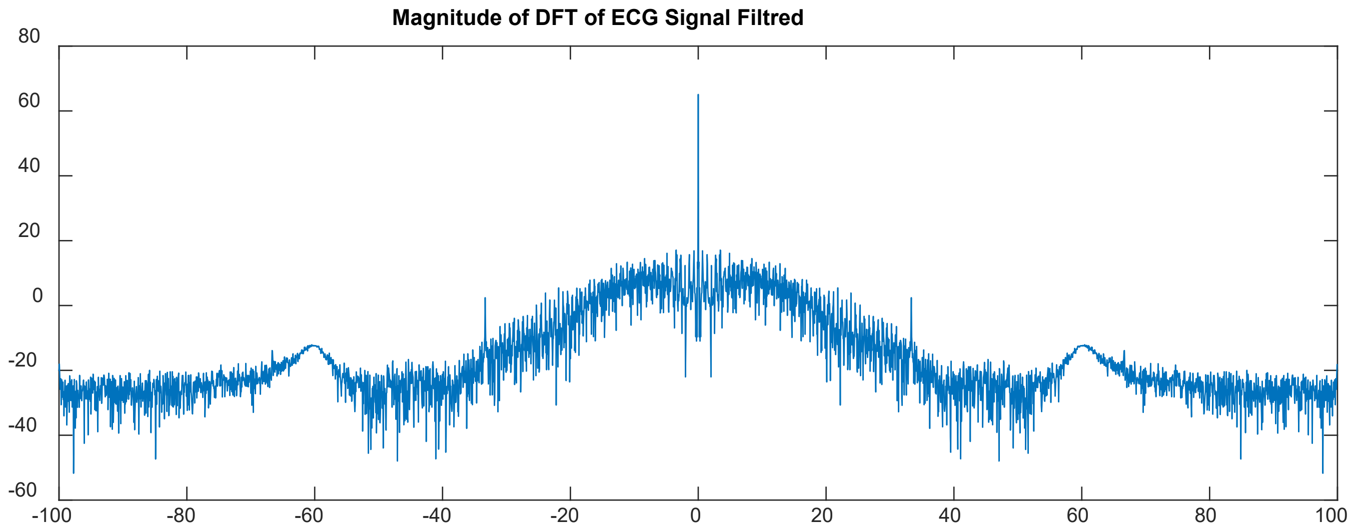
Magnitude Response of Notch Filter

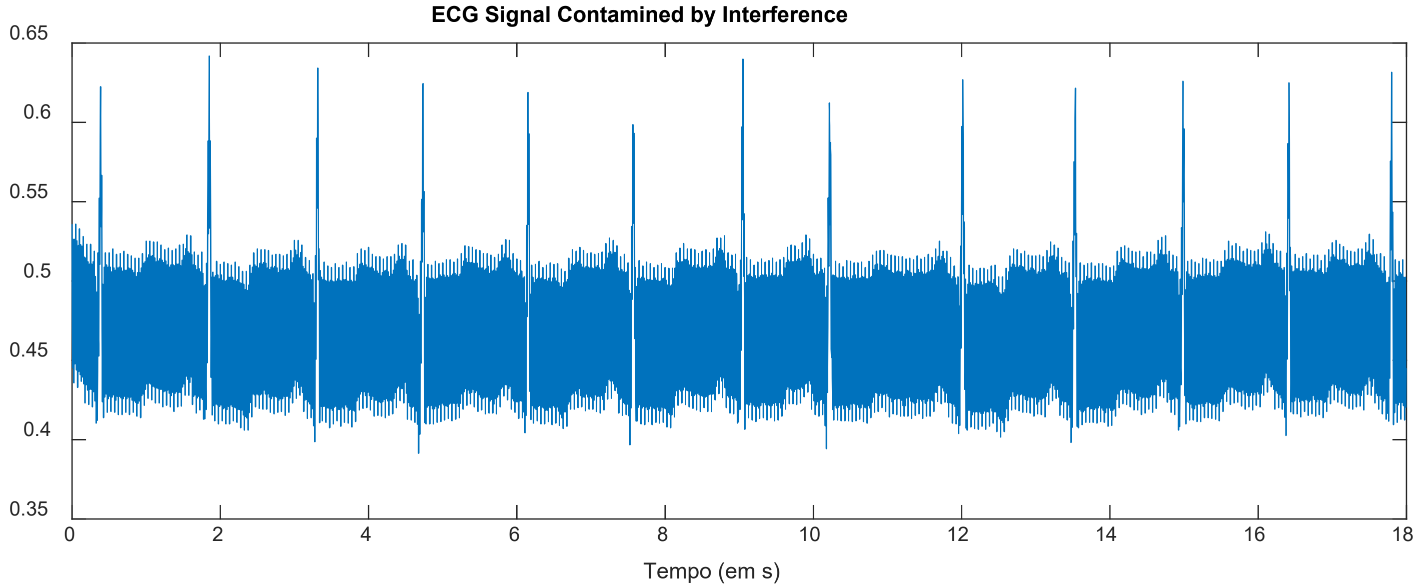


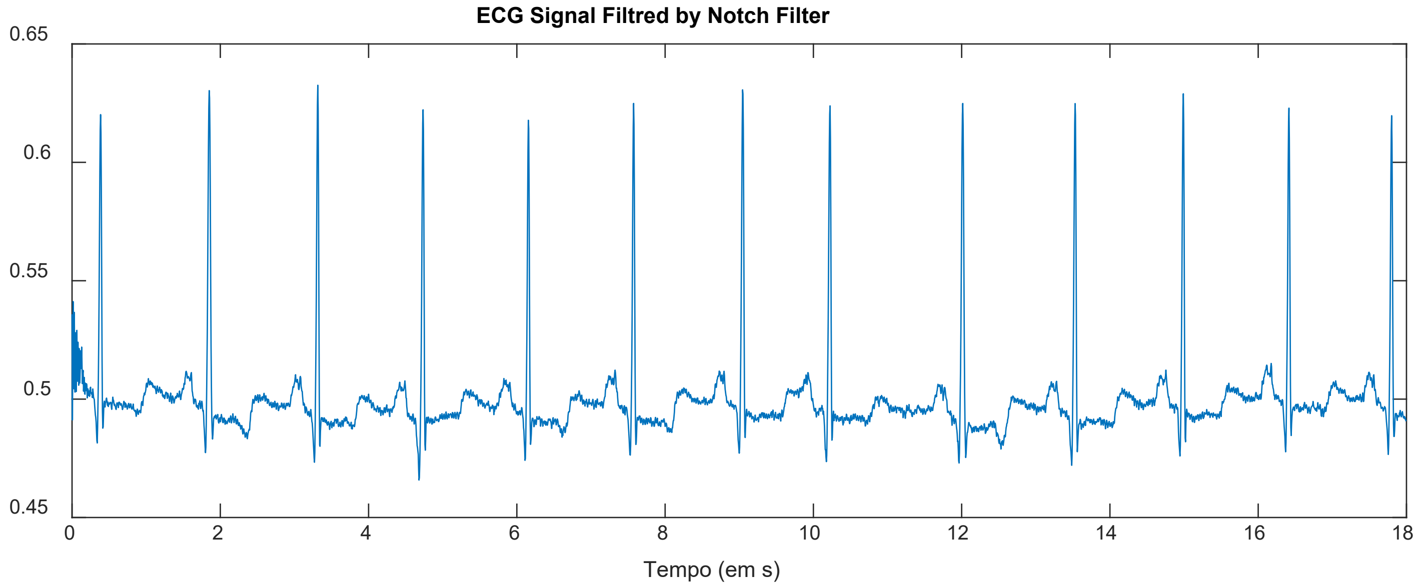
Phase Response of Notch Filter




ECG Signal Filtred by Notch Filter
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18

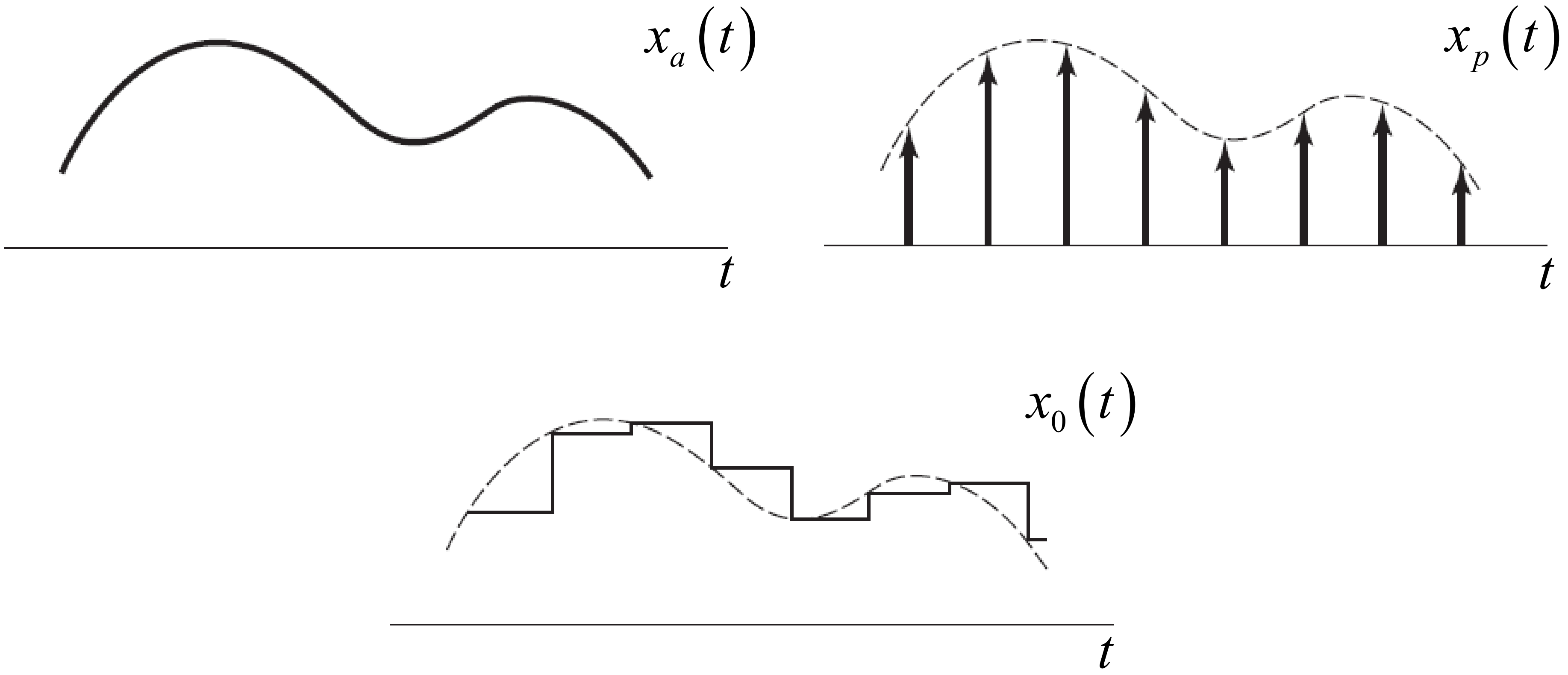

Magnitude of DFT of ECG Signal Filtred
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-100
-80
-60
-40
-20
0
20
40
60
80
100


ECG Signal Contamined by Interference
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
Tempo (em s)


ECG Signal Filtred by Notch Filter
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
Tempo (em s)

Amostragem Prática

Utiliza um retentor de ordem zero (*zero-order hold* – ZOH): “Segura” o valor da amostra até a próxima.



Amostragem Prática

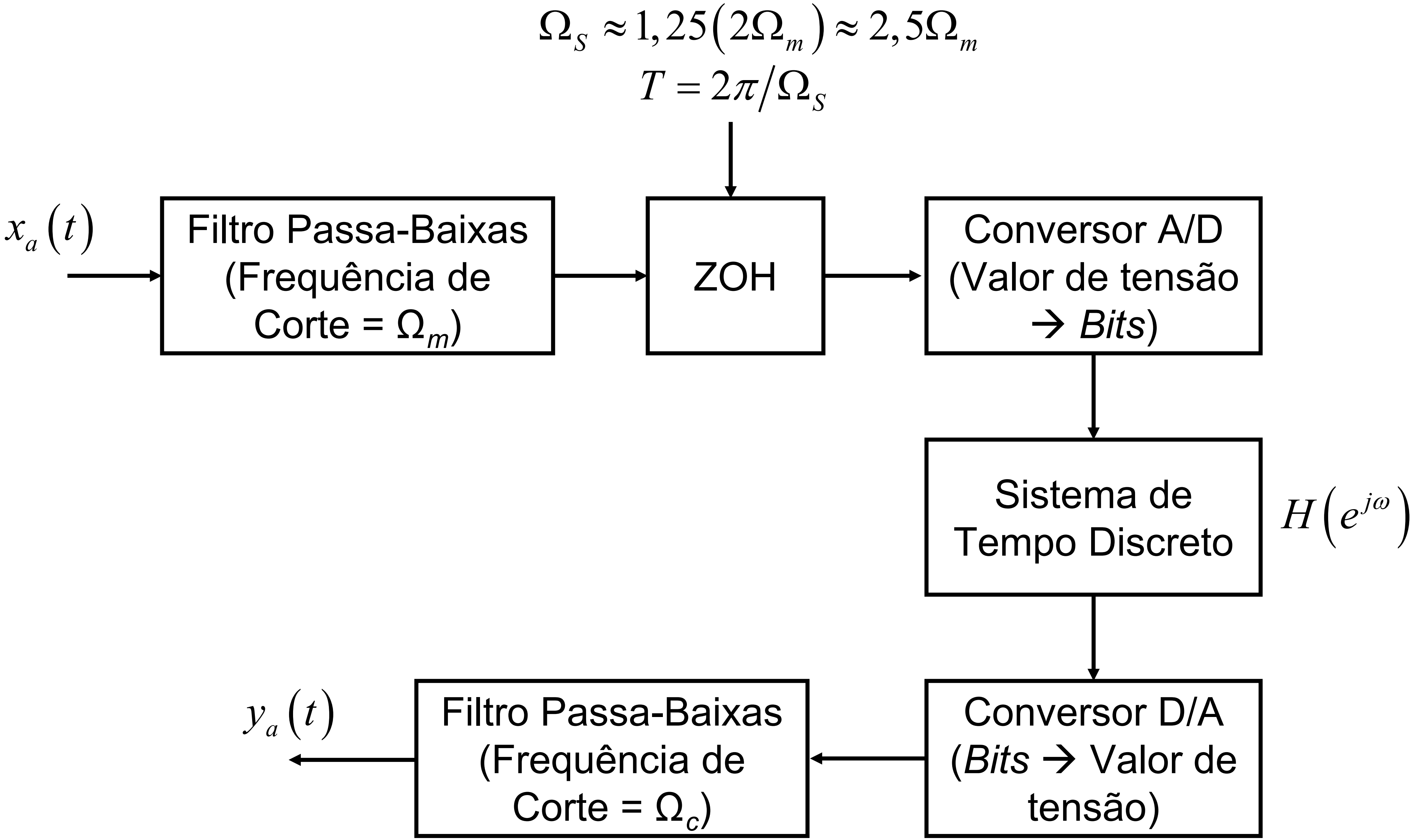
Escolha da taxa de amostragem: na natureza não existem sinais limitados em banda;

Solução:

- Aplicar um filtro passa-baixas antes da amostragem (*anti-aliasing*);
- Amostrar com uma taxa superior à de Nyquist (usualmente 25%);
    - Considerar a frequência de corte do filtro.

Resumo: Na prática:

- Aplicar um filtro passa-baixas antes da amostragem (*anti-aliasing*);
- Amostrar com uma taxa superior à de Nyquist (usualmente 25%);
- Utilizar um ZOH;
- Recuperar com um filtro passa-baixas;



Ainda é justo admitir que: $\omega = \Omega T$