Insper

Lógica da Computação - 2021/1

Aula 02/T01 - 24/Feb/2021

Maciel Calebe Vidal - macielcv@insper.edu.br

Objetivos

1. Gramáticas e Linguagens
2. Teoria dos Conjuntos

Apresentação do Curso

Apresentação PDF publicada no Blackboard.

- Objetivos de Aprendizagem
- Conteúdos
- Critérios de Avaliação
- Composição da Nota

Linguagem de Programação?

Podemos definir uma LP como um conjunto estruturado de instruções para um computador.

- Assim como uma Linguagem Natural (LN), existem regras gramaticais?
- Como é definida essa gramática?
- O que diferencia uma LP de uma LN?

Vamos aprender uma nova Linguagem

Passo I: Alfabeto

> **Definição**: O **Alfabeto** é um conjunto de símbolos (aka átomos ou tokens) que deve ser ***finito*** e ***não vazio***, normalmente representado pela letra Σ. SIGMA

Exemplo: Se $\Sigma = \{0, 1, ..., 9, +, -, if, while, def\}$, as possíveis palavras do alfabeto são:

- |0123| = 4
- |0+if| = 3
- |ifwhiledef-| = 4

Passo II: Palavras

> **Definição**: Palavras ou **Cadeias** são ***concatenações*** finitas de símbolos de um determinado alfabeto.

1. Considerando $\Sigma = \{0, 1\}$, quais são todas as cadeias desse alfabeto?

$\{\boxed{\lambda}, 0, 1, 00, 01, 10, 11, \ldots 111\} = \Sigma^*$

CONJ INFINITO

λ → CADEIA VAZIA

0, 1

Outras definições importantes:

- λ ou ϵ representa uma cadeia vazia.
- Σ^* é chamado de Fechamento Reflexivo e Transitivo, ou **Fecho de Kleene**.
- Σ^+ é chamado de Fechamento Transitivo.

  Definição: $\Sigma^* = \Sigma^+ + \lambda$

Passo III: Linguagem

Definição: Dado certo alfabeto Σ, uma **Linguagem** é um subconjunto de Σ^*, ou seja, um **conjunto de cadeias.**

Passo III.a: Revisando Teoria dos Conjuntos

Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{a, b\} = \{b, a\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$
$$C = \{\} = \phi \rightarrow \text{CONJ. VAZIO}$$

- **Conjunto** é uma coleção de elementos não indexados. Não pode haver elementos repetidos.
- ϕ representa o conjunto vazio, ou seja, sem elementos.
- O tamanho de um conjunto é dado pela quantidade de elementos:

$$|A| = 2$$
$$|B| = 3$$
$$|C| = |\phi| = 0$$

- $\in$ indica quando um elemento **pertence** a um conjunto:

ELEMENTO CONJ

$$a \in A$$
$$c \notin A$$
$$\{a\} \notin A \rightarrow \{\{a\}, b, c\}$$

- $\boxed{\subseteq}$ indica quando um conjunto está **contido ou é igual** a outro conjunto:

$\subset$ $\subseteq$

CONJ CONJ

$$A \subseteq B$$
$$\text{ELEM.} \rightarrow \cancel{c \notin B}$$
$$\{c\} \subseteq B$$
$$\{x\} \subseteq B$$

$$A = \{a, b\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$
$$C = \{\} = \phi$$
$$X = \{c\}$$

  - A está contido em B, ou ainda B contém A.
  - ϕ está contido em qualquer conjunto.

- Um conjunto é **igual** ao outro sse:

se e somente se

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \; e \; B \subseteq A$$

$$A \cup B = \{a, b, c\}$$

- A **união** de dois conjuntos é dada por:

conj tal que

$$A \cup B = \{x | x \in A \; ou \; x \in B\}$$
$$A \cup B = \{a, b, c\} = B$$

$$A = \{a, b\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$
$$C = \{\} = \phi$$

- A **intersecção** de dois conjuntos é dada por:

$$A \cap B = \{x | x \in A \; \boxed{e} \; x \in B\}$$
$$A \cap B = \{a, b\} = A$$

- A **diferença** de dois conjuntos é dada por:

$$A - B = \{x | x \in A \; e \; x \notin B\}$$
$$A - B = \boxed{\phi}$$
$$B - A = \{c\}$$

$$A - B \neq B - A$$
$$c \in B \; e \; c \notin A$$

- O **produto cartesiano** de dois conjuntos é dado por:

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$
$$A \times B = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c)\}$$
$$|A \times B| = |A||B|$$
$$A \times B \neq B \times A$$

- A **potência** de um conjunto é dada por:

$$A^0 = \phi$$
$$A^2 = A \times A$$
$$A^n = A^{n-1} \times A$$

- O **power set** de um conjunto é dado por:

$$2^A = \{Z | Z \subseteq A\}$$
$$2^A = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$$
$$|2^A| = 2^{|A|} = 4$$

$A = \{a,b\}$
$B = \{a,b,c\}$
$C = \{\} = \phi$

$2^B \Rightarrow \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{c\}, \{b,c\}\}$ $\quad |2^B| = 2^{|B|} = 2^3$

Paradoxo de Russell

$$\boxed{A} = \{B | B \text{ é um conjunto e } \boxed{B \notin B}\}$$

$\{\{\ \}$

$A = \{\ldots\ldots, A, \ldots\}$

$A \in A$?

S

N → A é um conjunto → A não pertence a A

AUTOCONTIDO

>> Ver Pag. 31 Hammack

o CONCATENAÇÃO Σ

$\{\phi\}$

Q&A:

1. Espera um pouco, cadeias são conjuntos?
   R: Não, cadeias são elementos de uma linguagem, que é um conjunto.
2. Então λ não é um conjunto vazio (ϕ)?
   R: Exato, o λ é uma cadeia vazia (elemento), já ϕ é o conjunto vazio.
3. Quais são as operações que podemos realizar com cadeias?
   R: Sejam: $s = 111$ e $t = 00$
   - Tamanho: $|s| = 3$; $|t| = 2$; $|\lambda| = 0$
   - **Concatenação**: $st = 11100 = \lambda st = st\lambda \neq ts = 00111$ $\quad st \neq ts$
   - Potência: $s = 1^3 = 11^2 = 1^3 1^0$

abab

$\Sigma = \{a, b\}$

Σ^*

λ, a, b

ab, ba, baa

Exemplos abstratos de linguagem:

- $L_1 = \{a^n b^n | n \geq 0\} = \{\lambda, ab, aabb, aaabbb, \ldots\}$ (p todo que)
- $L_2 = \{ab^i | i \geq 0\} = \{a, ab, abb, abbb, \ldots\}$
- $L_3 = \{s \in \{a,b\}^* | 0 \leq |s| \leq 2\} = \{\lambda, a, b, ba, ab, aa, bb\}$ (nota)

Concluindo: para obter uma linguagem basta misturar um alfabeto?

NÃO

$a^n b^n, n=0 \rightarrow a^0 b^0 \rightarrow \lambda\lambda = \lambda$

Passo IV: Gramática

REGRAS PROP./DERIV.

$$G = (V, \Sigma, P, S)$$

GRAMATICA

Onde:

- V é o vocabulário da linguagem, onde $V = N \cup \Sigma$ e N é o conjunto de **símbolos não terminais** usados para representar estados intermediários nas regras de produção. N é composto por letras maiúsculas.
- Σ é o alfabeto de **símbolos terminais**. São os símbolos na qual as cadeias da linguagem são construídas.
- P é o conjunto das regras de produção
- S é o símbolo não terminal inicial da gramática

Exemplo:

$$G = (V = \{X, A, B, 0, 1\}, \Sigma = \{0, 1\}, P, S = A)$$

$$P = \begin{cases} 1 \quad A \rightarrow \cancel{0}\ X \\ 2 \quad B \rightarrow 1A \\ 3 \quad B \rightarrow 0 \\ 4 \quad X \rightarrow B \end{cases}$$

$A \rightarrow X$
$B \rightarrow 1A$
$X \rightarrow B$
$B \rightarrow P0$
$P \rightarrow \lambda$

1. Quais as possíveis construções (cadeias) dessa gramática?

$A \rightarrow B \rightarrow 0$

$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} 1A \xrightarrow{1} 1B \rightarrow 10$

$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} 1A \xrightarrow{1} 1B \xrightarrow{2} 11A \xrightarrow{1} 11B \xrightarrow{3} 110$

$L = \{0, 10, 110, 1110, \ldots\}$

2. Escreva uma representação de uma linguagem definida pela gramática.

$L = \{1^m 0 \mid m \geq 0\}$

$1^0 = \lambda$

$\lambda 0 = 0 = \lambda\lambda\lambda 0 \lambda$

E o Compilador no fim das contas?

- O compilador ou interpretador reconhece uma linguagem através da análise sintática. Ele verifica se a cadeia pertence ou não a uma certa gramática.
- Ele realiza uma análise léxica para separar as cadeias da linguagem. Essas cadeias irão alimentar o analisador sintático. Essa etapa é também chamada de tokenização.
- O compilador verifica se o programa faz sentido, ou seja, apesar de impecável sintaticamente, ele pode não fazer sentido (tipo errado, variável não declarada, etc). Essa etapa é chamada de análise semântica.
- Ele traduz uma linguagem de programação para instruções de máquina (mneumônicos) ou instruções intermediárias para uma Virtual Machine (JVM, CIL.net, LLVM, etc).

Lista de Exercícios

1. Seja $\Sigma = \{+, -\}$ Escreva:

- Σ^*
- Σ^+
- Σ^0
- Σ^2

2. Seja $L(G) = \{s \in \{a, b\}^* | s = a^n b, n \geq 0\}$. Escreva uma gramática que represente L(G).
3. Seja $L(G) = \{s \in \{a, b, c\}^* | s = a^m b c^n, m \geq 0, n \leq 1\}$

- $'ab' \in L(G)$?
- $'abbc' \in L(G)$?
- Qual a menor cadeia?
- Escreva uma gramática para a linguagem.

4. (Ramos et al Pag 137) Considere o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Proponha gramáticas diferentes G_1 e G_2 que gerem linguagens sobre esse alfabeto, de tal forma que:

- $G_1 \neq G_2$
- $L_1(G_1) \subseteq \Sigma^*$
- $L_2(G_2) \subseteq \Sigma^*$
- L_1 seja infinita
- L_2 seja infinita

  Adicionalmente:

  a) $L_1 \cap L_2 = \phi$
  b) $L_1 \subseteq L_2$ e $L_1 \neq L_2$
  c) $L_1 = \Sigma^* - L_2$
  d) $L_1 = L_2 = \Sigma^*$
  e) $L_1 \cap L_2 = (ab)*$
  f) $L_1 - L_2 = \{a, ab, b\}$
  g) $L_1 \cup L_2 = \Sigma^*$ e $L_1 \cap L_2 = \phi$

Próxima aula:

- Diagrama Sintático
- Léxico: tokenização
- Embrião do Sintático

Referências:

- J. J. Neto - Pag 78-82, Pag 159