Pedro Henrique Andrade Trindade

Questão 1: Os alunos de uma universidade adoram um jogo que consiste em um tabuleiro com peças brancas e pretas. O objetivo do jogo é tornar todas as peças pretas. A única operação possível é a de selecionar uma peça, que terá a sua cor invertida. Esta operação, no entanto, inverte também as cores das peças adjacentes (acima, abaixo e aos lados – sem modificar as peças vizinhas nas diagonais).

A saída do seu programa deve ser uma matriz X, também de dimensão m × n, tal que xij = 1 se esta peça for selecionada para inversão de cores ou xij = 0 caso contrário. Teste seu programa com alguns exemplos. Este problema sempre tem solução?

Resposta:

Eu modelei o problema da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \\
\text{sujeito a} \quad & c_{i,j} = x_{i,j} + s_{i,j} + \sum_{(i',j')\in\mathcal{N}(i,j)} x_{i',j'}, \quad \forall i,j \\
& c_{i,j} - 2k_{i,j} = 0, \quad \forall i,j \\
& x_{i,j} \in \{0,1\}, \quad \forall i,j \\
& k_{i,j} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i,j \\
& c_{i,j} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i,j
\end{aligned}
$$

- $x_{i,j}$ é uma variável binária que indica se uma ação é tomada na posição (i, j)
- $s_{i,j}$ é o estado inicial na posição (i, j)
- $c_{i,j}$ é a soma cumulativa dos valores na posição (i, j) e seus vizinhos
- $k_{i,j}$ é uma variável inteira que representa metade do valor cumulativo
- $\mathcal{N}(i, j)$ denota os vizinhos válidos da posição (i, j) (acima, abaixo, esquerda e direita)

Eu procurei bastante e não consegui achar se esse problema sempre tem solução ou não, como estamos tentando satifazer um conjunto de equações lineares, podemos representar o problema todo como a multiplicação de um vetor por uma matriz em um corpo de galois de caracteristica 2 (por conta do mod 2), então descobrir se sempre há solução é uma questão dessa matriz ser invertível ou não. Não cheguei a conseguir fazer essas contas para resolver o problema, mas achei um buraco de minhoca muito interessante procurando esse assunto em sua formulação original de “lights out”. Cai em várias questões algébricas o problema generalizado, por exemplo eu gostei muito dessa referência aqui: https://peterefrancis.com/lights-out-algebra/

[28]:
```python
"""
   Código do professor
"""
import numpy as np
import random
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.cm as cm

def imprimir(_M,jogada) :
    [m,n] = _M.shape
    #C = colormap([1 1 1; 0 0 0; 0 1 0]
    fig, ax = plt.subplots()
    i = ax.imshow(_M, interpolation='nearest', cmap=cm.BuPu, vmin=0, vmax=2)
    #fig.colorbar(i)
    print("Jogada ",str(jogada))
    plt.show()

def inverter(val) :
    if val == 0 :
        return 1
    if val == 1 :
        return  0

def tabuleiro(_X,_M) :
    [m,n] = _M.shape
    iv = np.arange(0,m)
    random.shuffle(iv)
    jv = np.arange(0,n)
    random.shuffle(jv)
    jogada=0
    for i in iv  :
        for j in jv :
            if _X[i,j] == 1 :
                jogada = jogada + 1
                _M[i,j] = _M[i,j] + 2
                imprimir(_M, jogada)
                if i > 0 :
                    _M[i-1,j] = inverter(_M[i-1,j])
                if i < m-1 :
                    _M[i+1,j] = inverter(_M[i+1,j])
                if j > 0 :
                    _M[i,j-1] = inverter(_M[i,j-1])
                if j < n-1 :
                    _M[i,j+1] = inverter(_M[i,j+1])
                _M[i,j] = _M[i,j] - 2
                _M[i,j] = inverter(_M[i,j])
                imprimir(_M, jogada)
```

```
    return _M
```

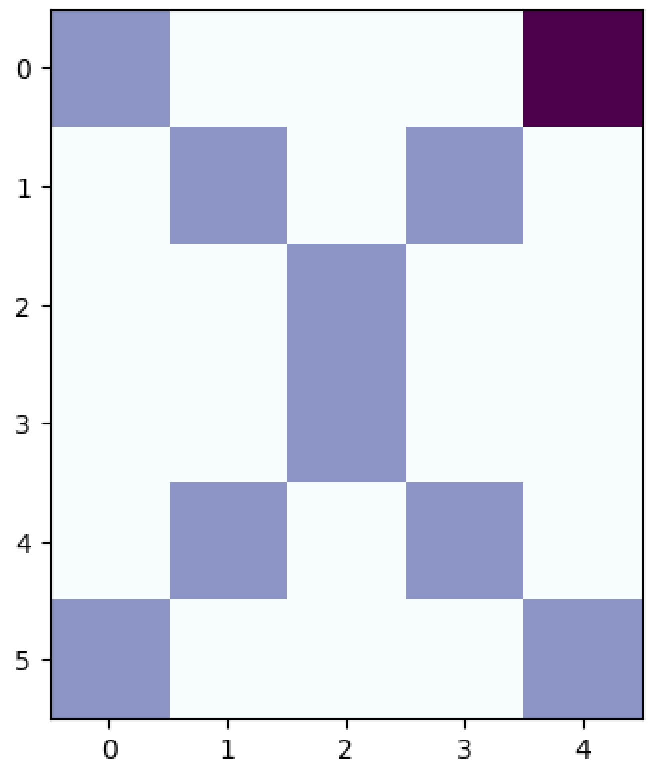
[29]:
```
import numpy as np
import cvxpy as cp

def solve_game(initial_state):
    x = cp.Variable(initial_state.shape, boolean=True, name='x')
    cummulative = cp.Variable(initial_state.shape, integer=True, name='c')
    k = cp.Variable(initial_state.shape, integer=True, name='k')
    constraints = []
    rows = initial_state.shape[0]
    columns = initial_state.shape[1]

    for i in range(rows):
        for j in range(columns):
            # Essa parte lida com a beiradinhas melhor
            top = x[i-1,j] if i-1 >= 0 else 0
            bottom = x[i+1,j] if i+1 < rows else 0
            left = x[i][j-1] if j-1 >= 0 else 0
            right = x[i][j+1] if j+1 < columns else 0

            constraints.append(cummulative[i,j] == x[i,j] + initial_state[i,j] \
                               + top + bottom \
                               + left + right)

            constraints.append(cummulative[i,j] - 2*k[i,j] == 0)

    objective = cp.Minimize(cp.sum(x))
    # Resolve o problema
    problem = cp.Problem(objective, constraints)
    problem.solve(solver=cp.SCIP)

    print(problem.status)
    print("Solução de cliques:")
    print(x.value)

    return x.value
```

0.0.1 Exemplos

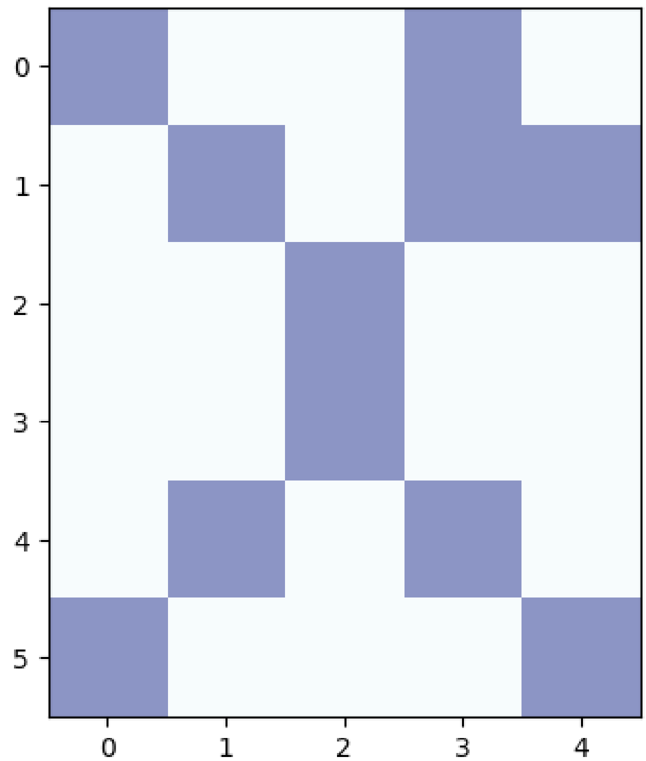
[30]:
```
if __name__ == '__main__':

    puzzle = np.array([
        [1,0,0,0,1],
        [0,1,0,1,0],
```

```python
        [0,0,1,0,0],
        [0,0,1,0,0],
        [0,1,0,1,0],
        [1,0,0,0,1]
    ])

    print("Puzzle original:")
    print(puzzle)

    solution = solve_game(puzzle)

    tabuleiro(solution, puzzle)
```

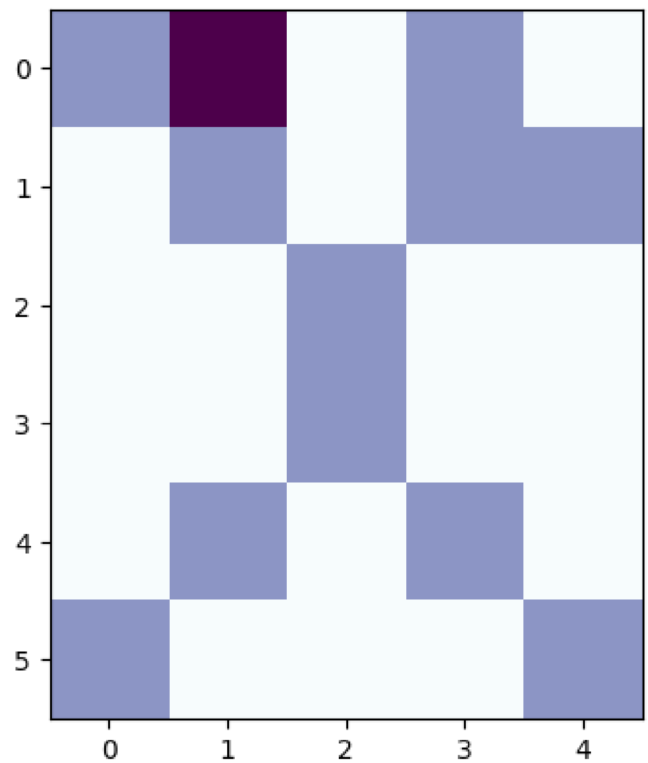
```
Puzzle original:
[[1 0 0 0 1]
 [0 1 0 1 0]
 [0 0 1 0 0]
 [0 0 1 0 0]
 [0 1 0 1 0]
 [1 0 0 0 1]]
optimal
Solução de cliques:
[[1. 1. 1. 1. 1.]
 [1. 1. 1. 1. 1.]
 [1. 1. 0. 1. 1.]
 [1. 1. 0. 1. 1.]
 [1. 1. 1. 1. 1.]
 [1. 1. 1. 1. 1.]]
Jogada  1
```



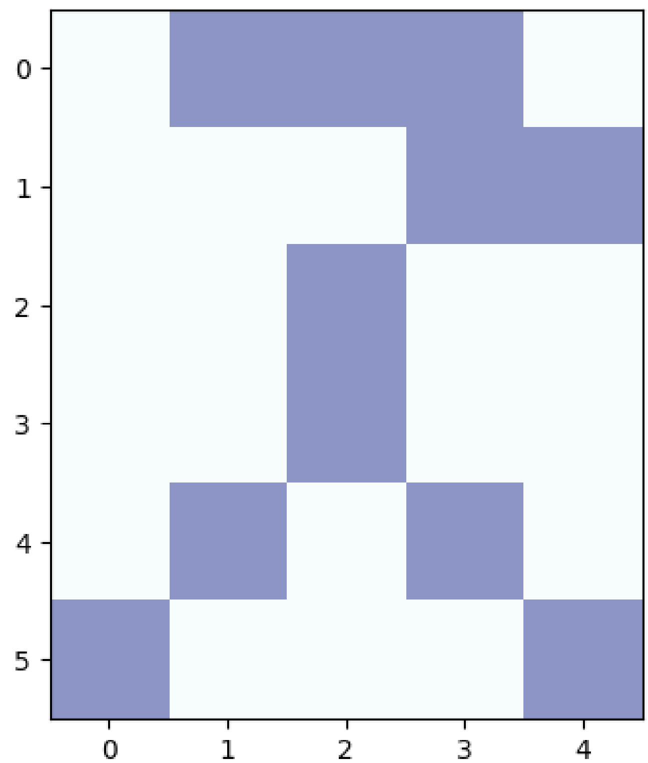
Jogada 1



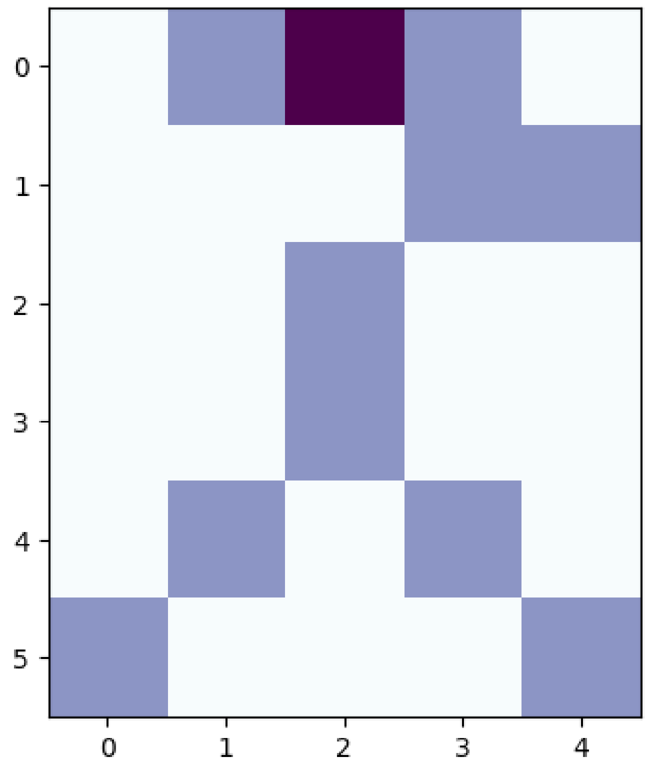

```
Jogada  2
```



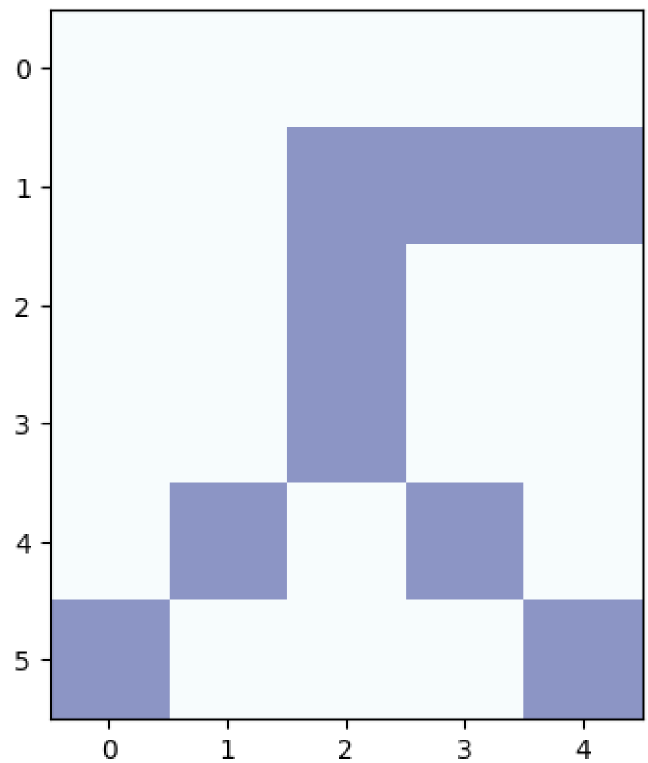
Jogada 2



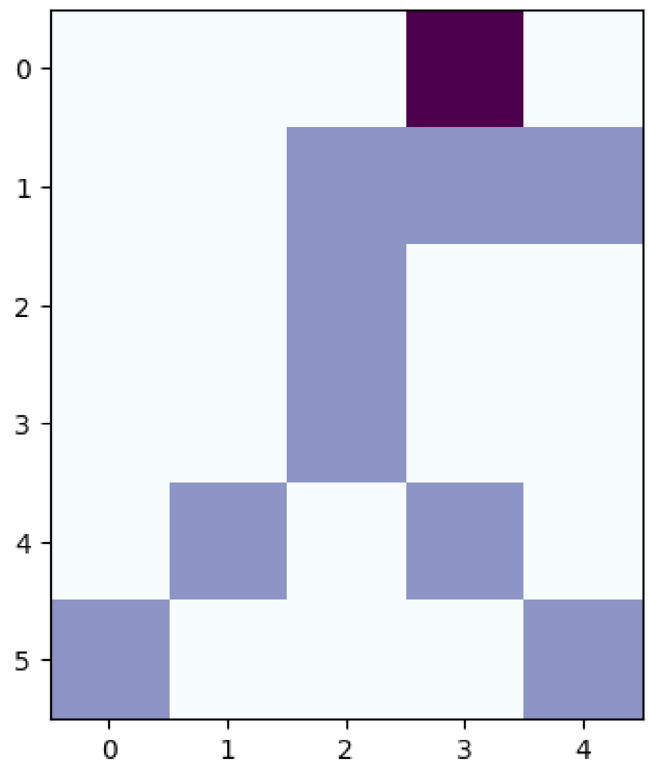

```
Jogada  3
```



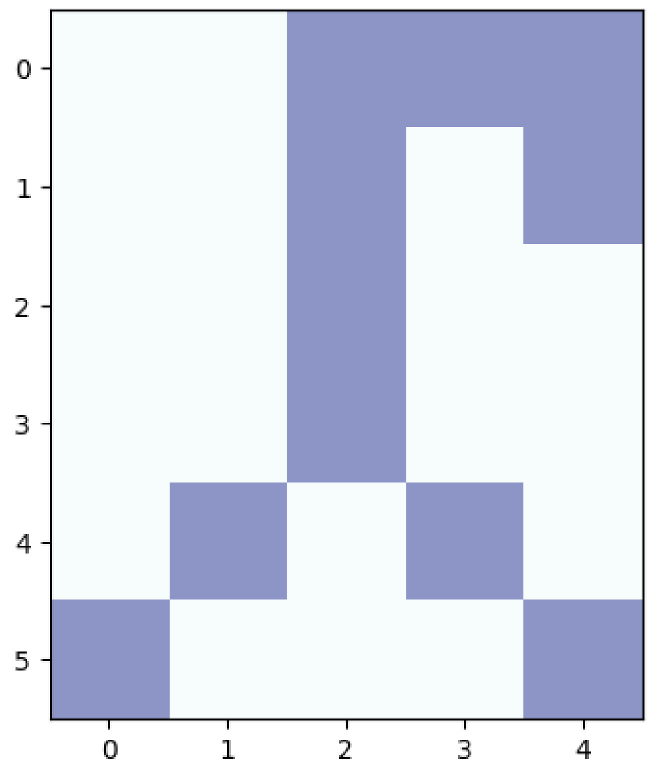
Jogada 3



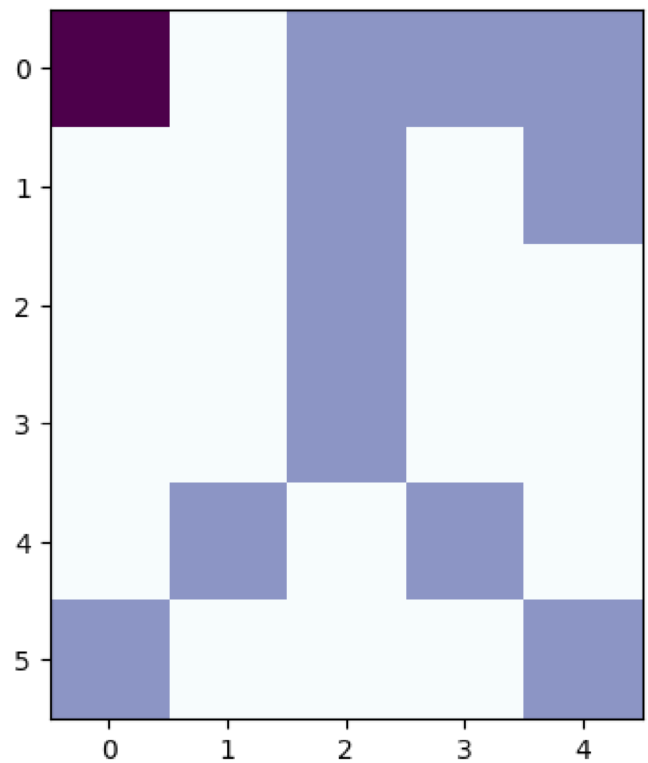

```
Jogada  4
```



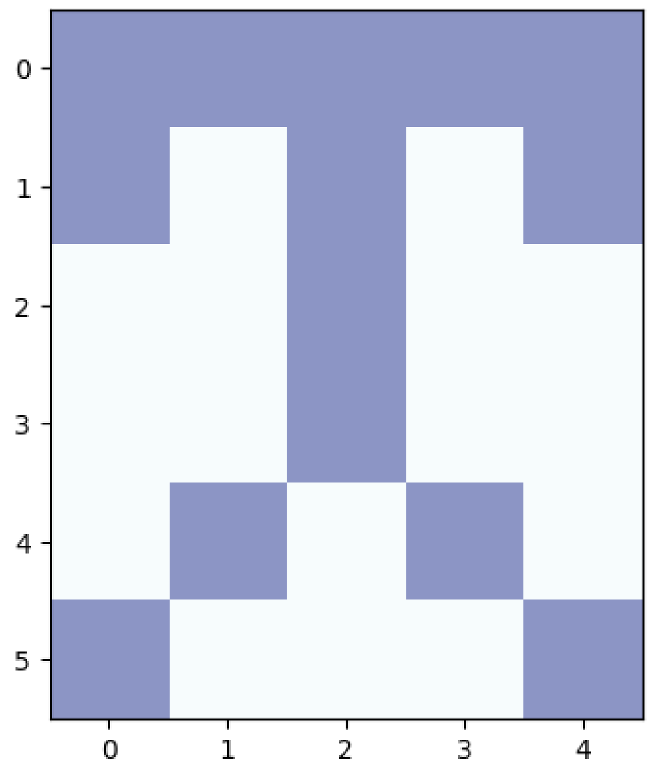
Jogada 4



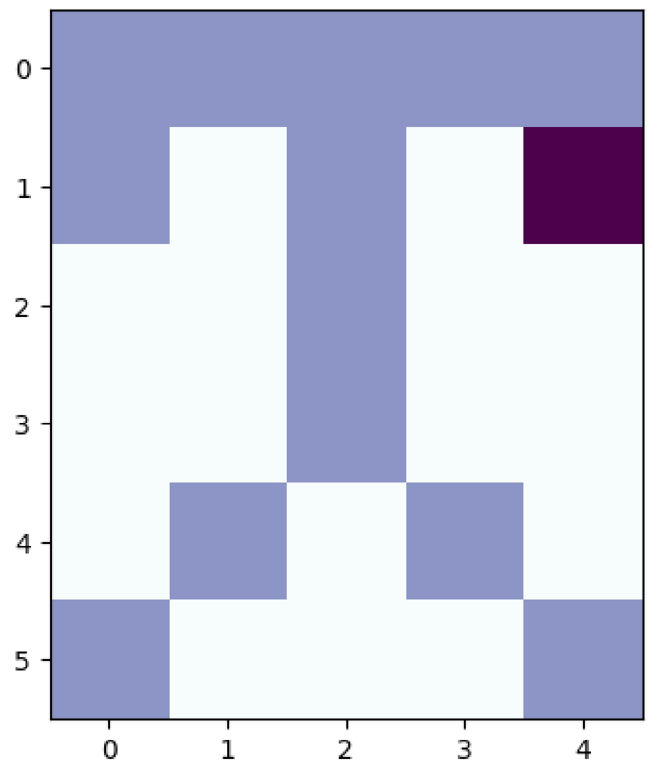
Jogada 5



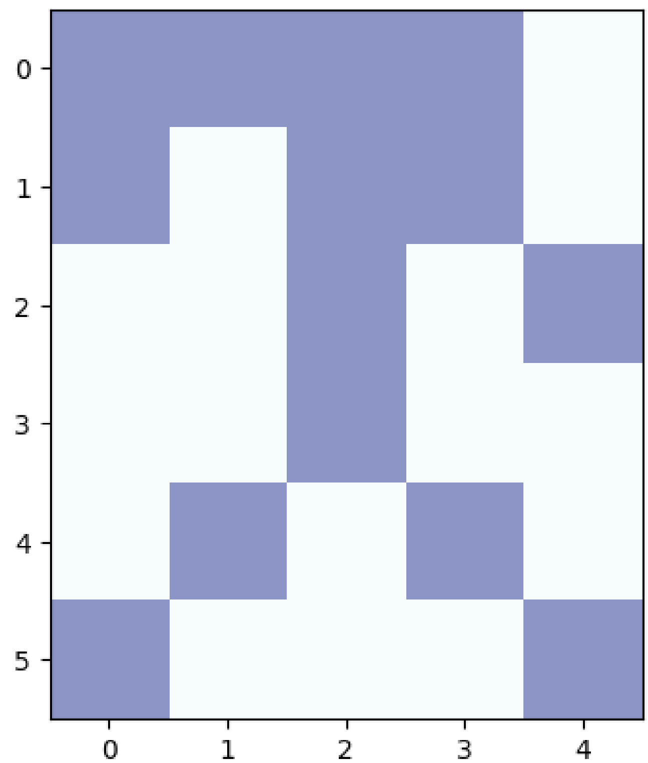
Jogada 5



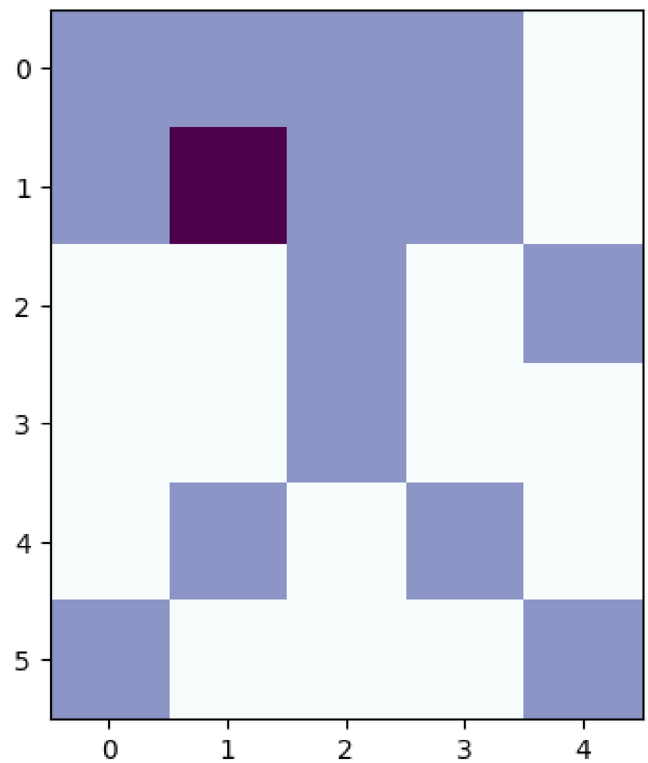
`Jogada  6`



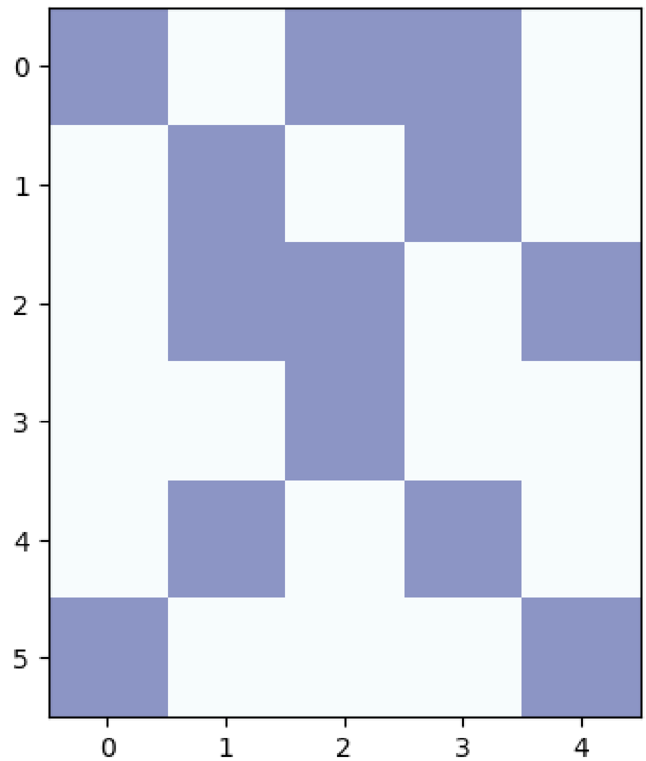
Jogada 6



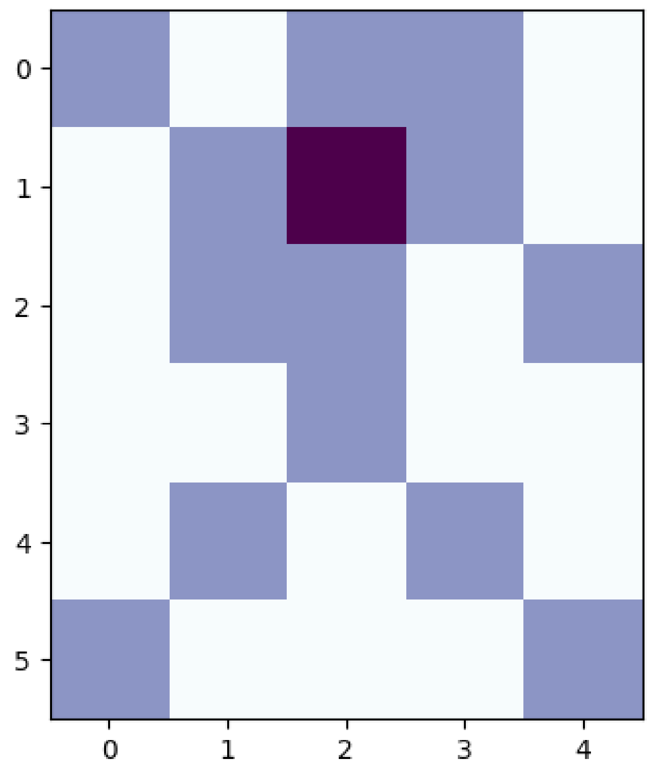
`Jogada  7`



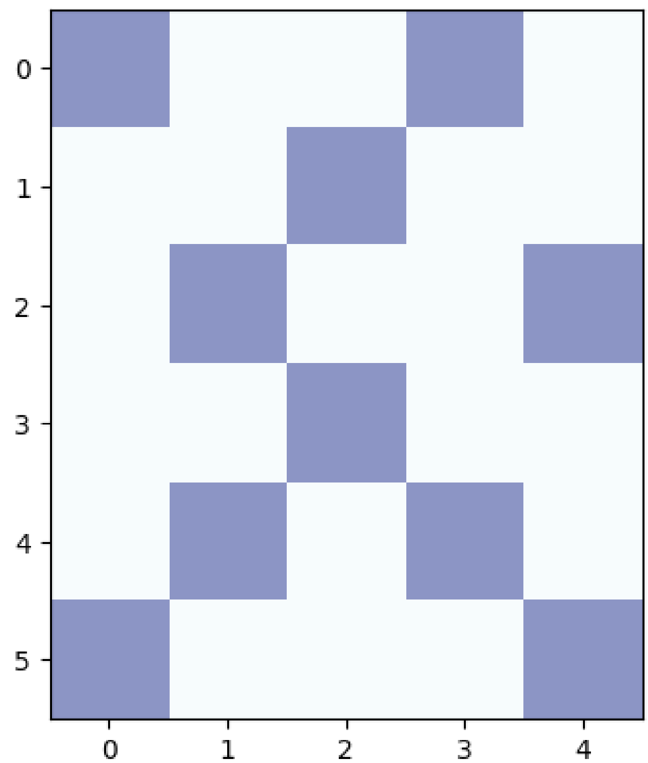
Jogada 7



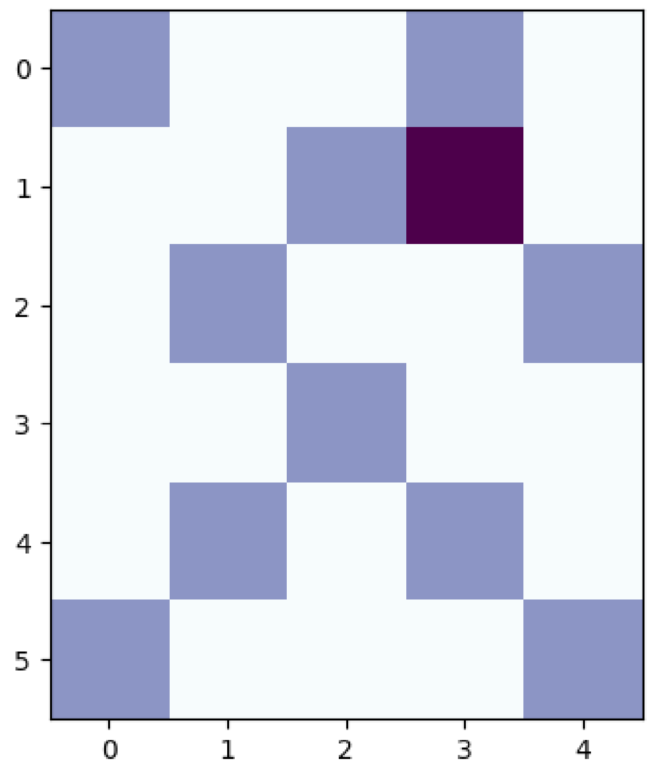

```
Jogada  8
```



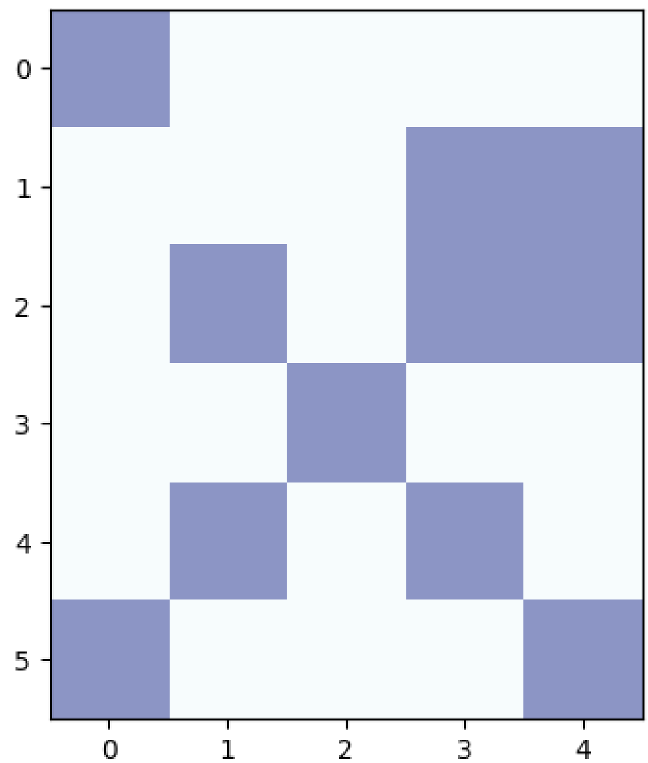
Jogada 8



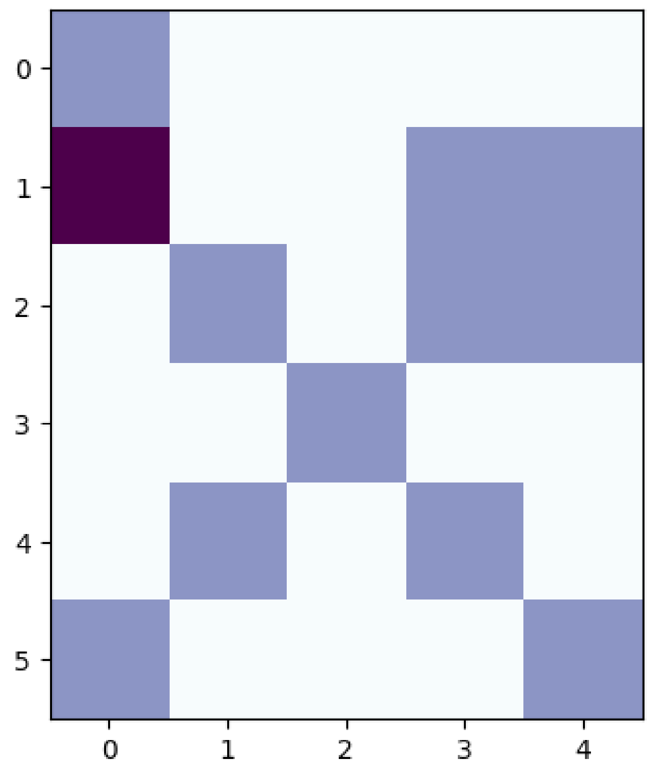
Jogada 9



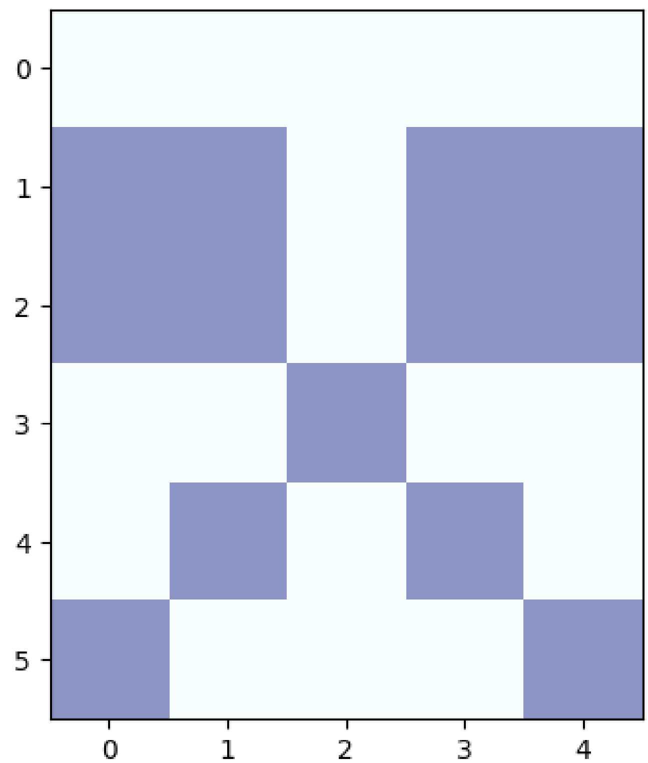
Jogada 9



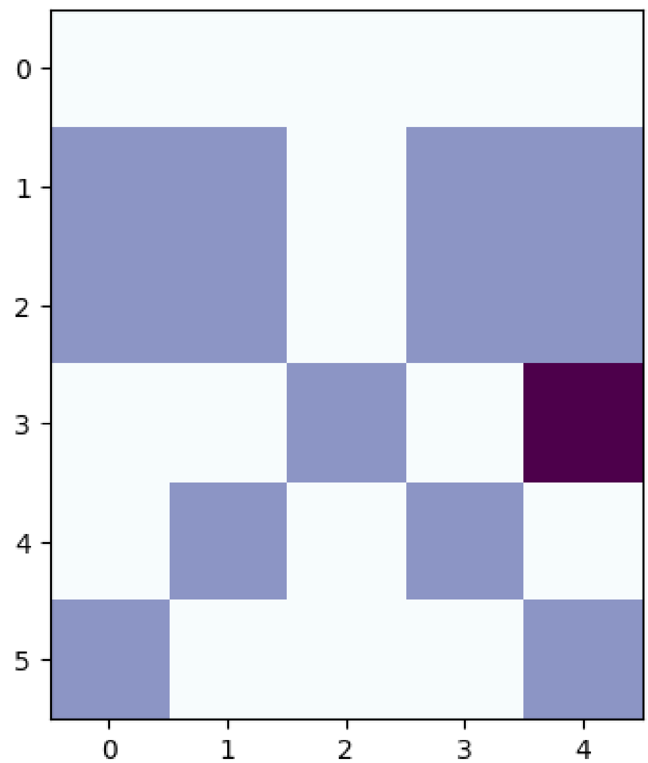
Jogada 10



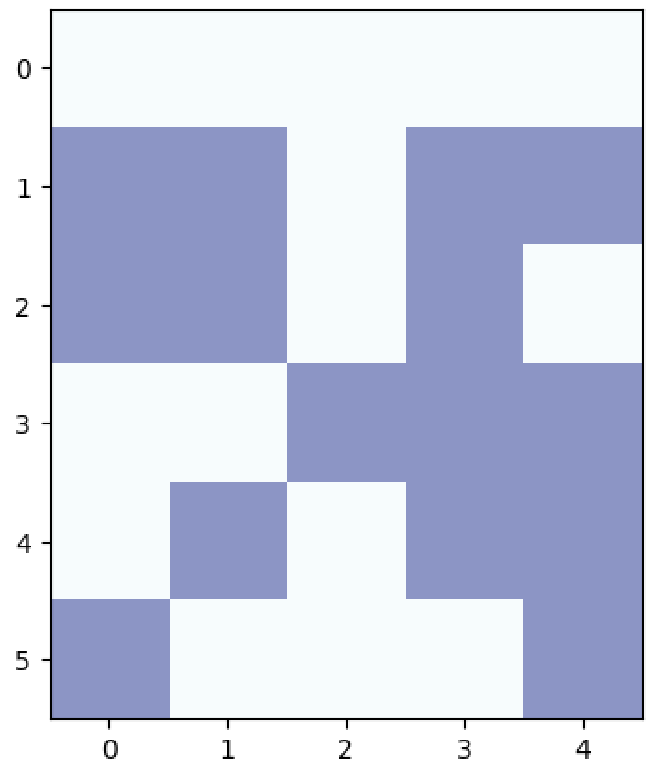
Jogada 10



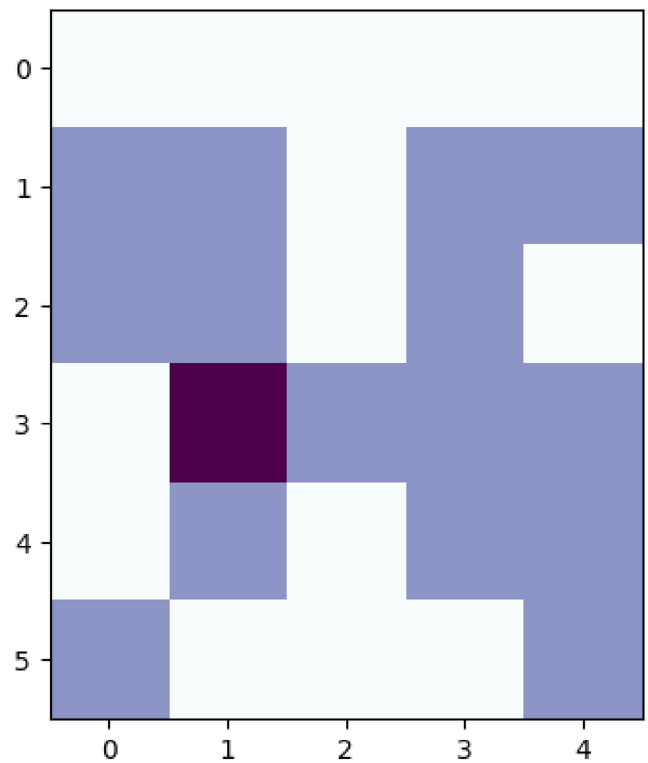
Jogada 11



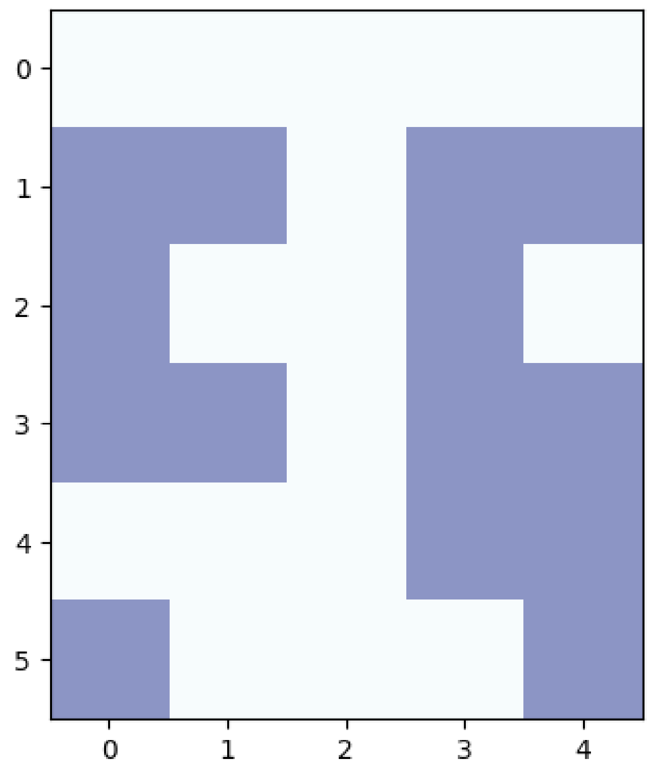
Jogada 11



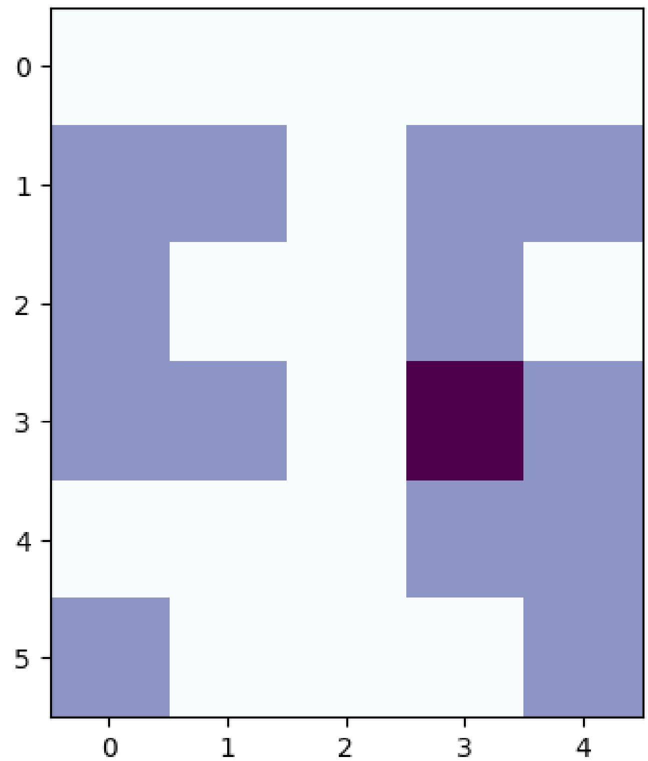

```
Jogada  12
```



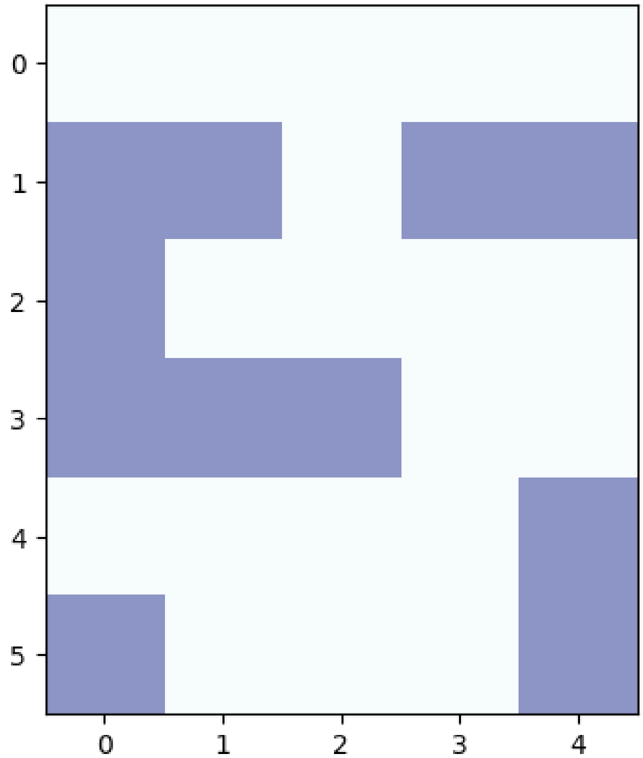
Jogada 12



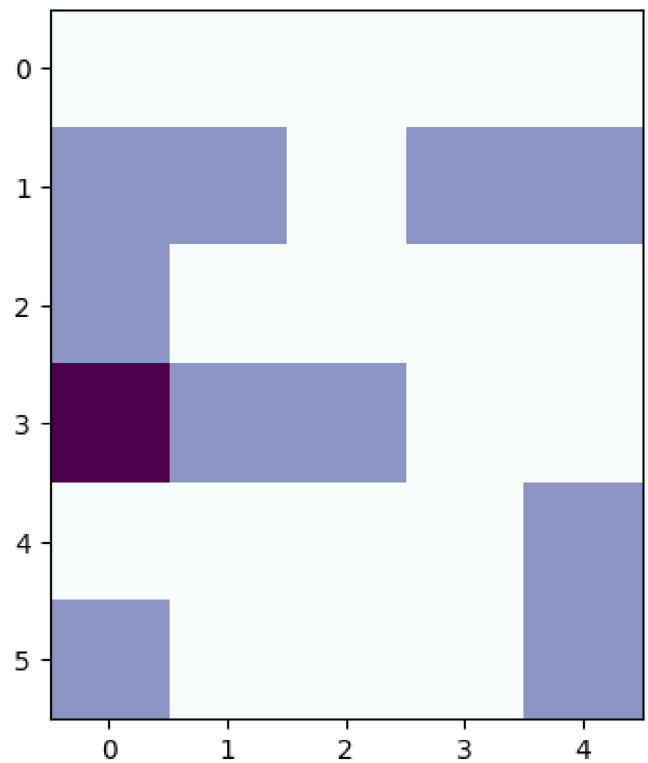
Jogada 13



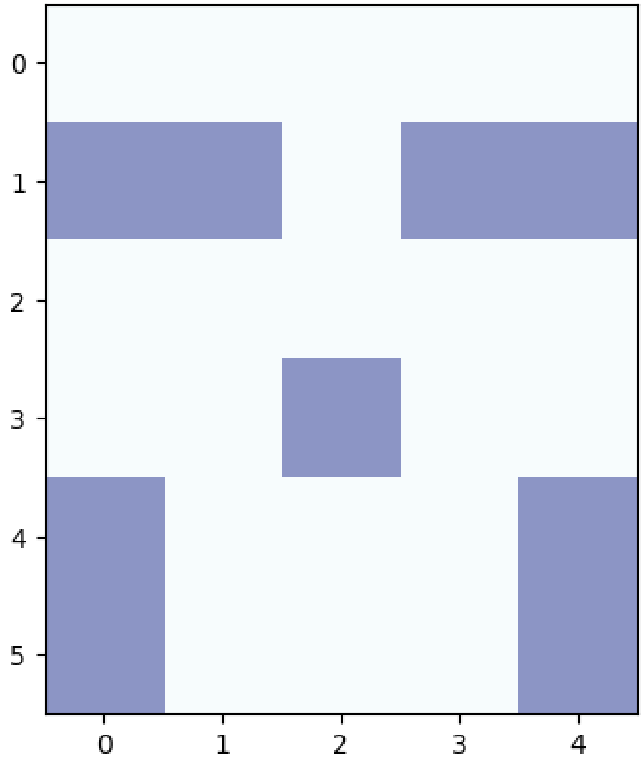
Jogada 13



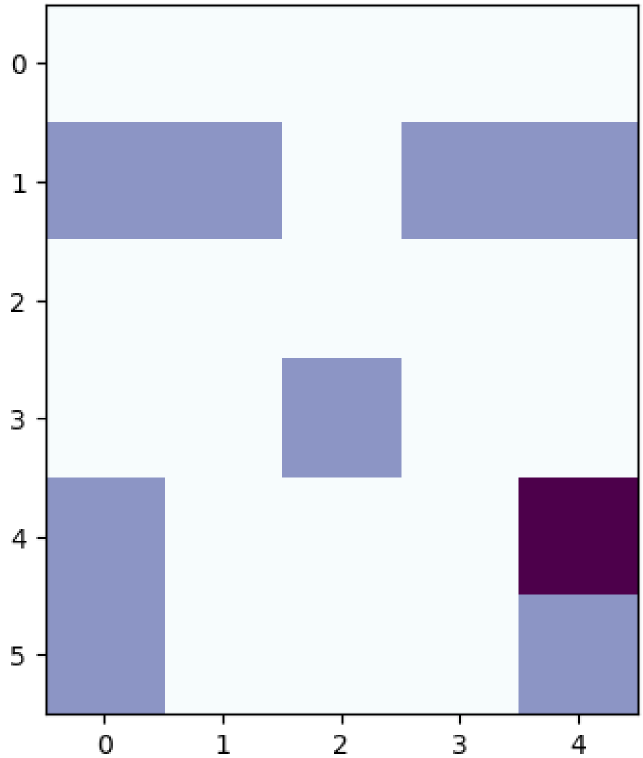

```
Jogada  14
```



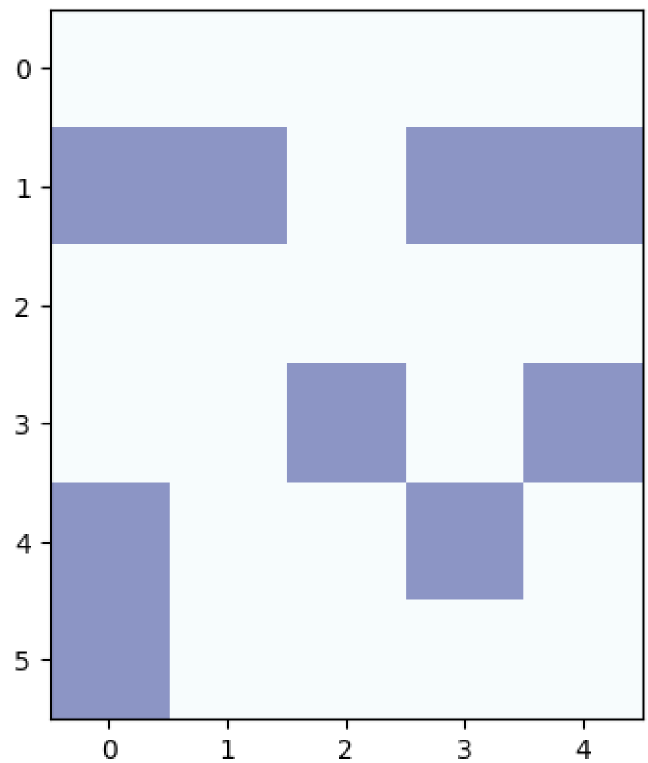
Jogada 14



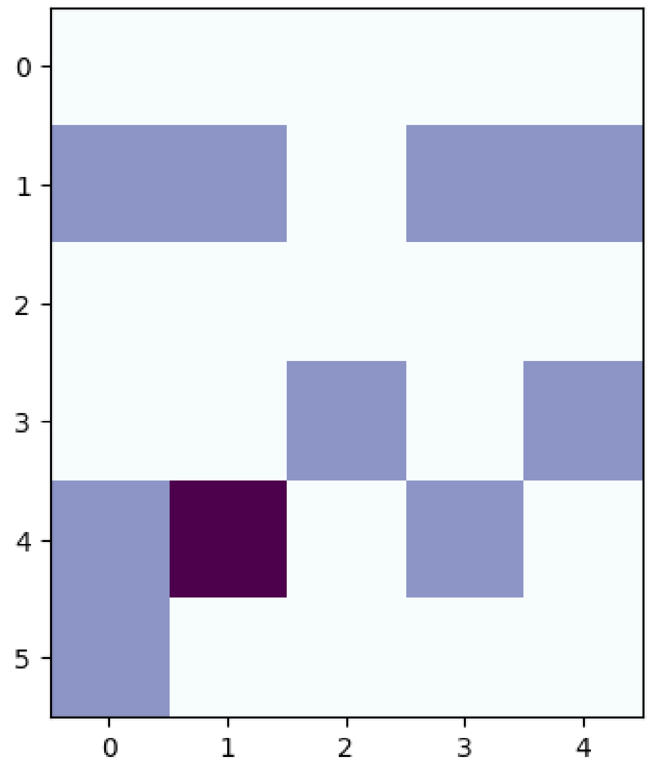
Jogada 15



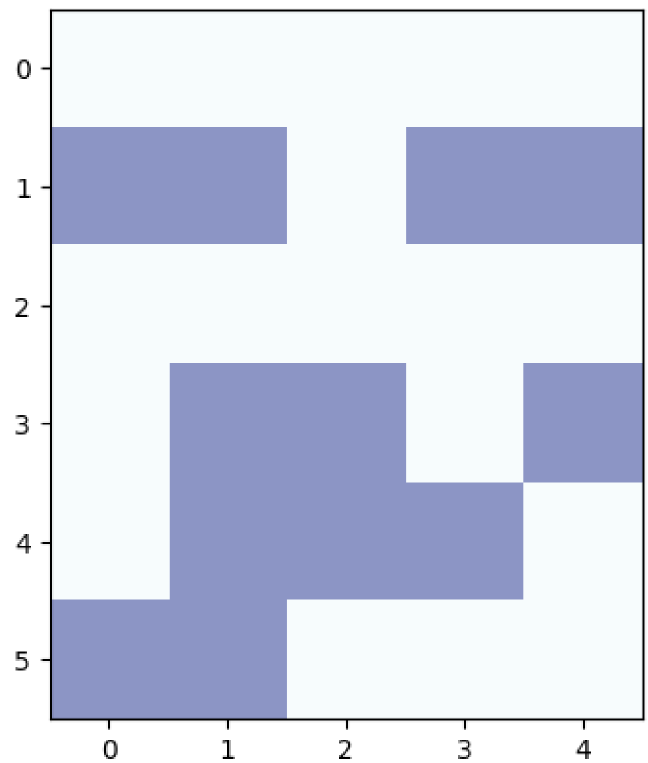
Jogada 15



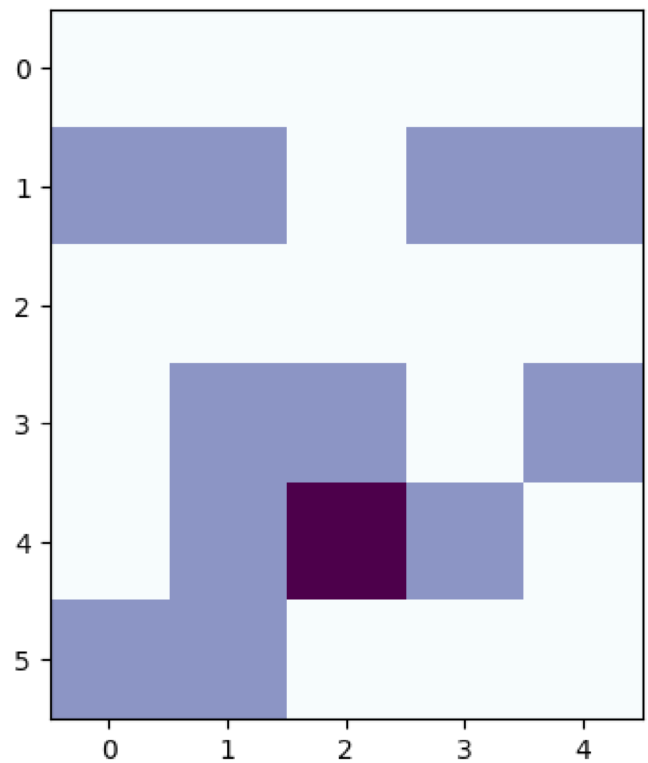
Jogada 16



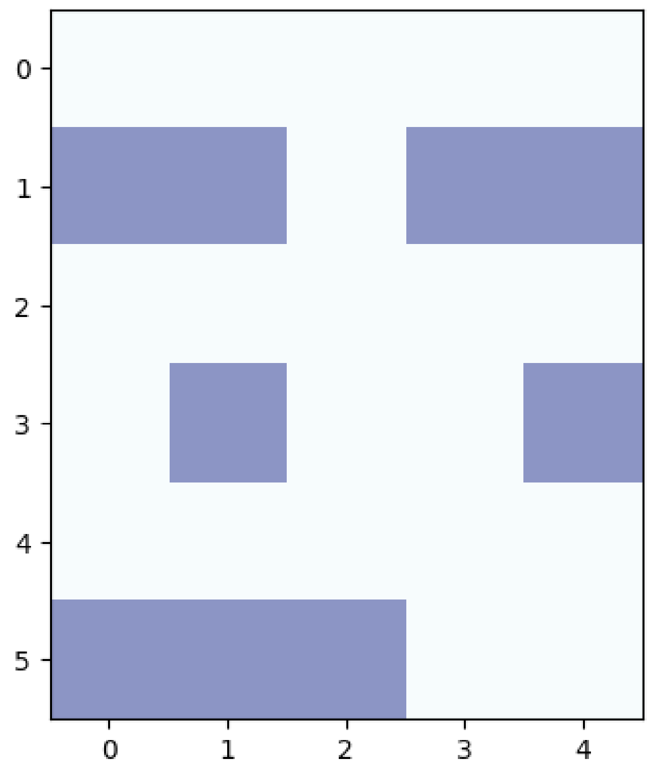
Jogada 16



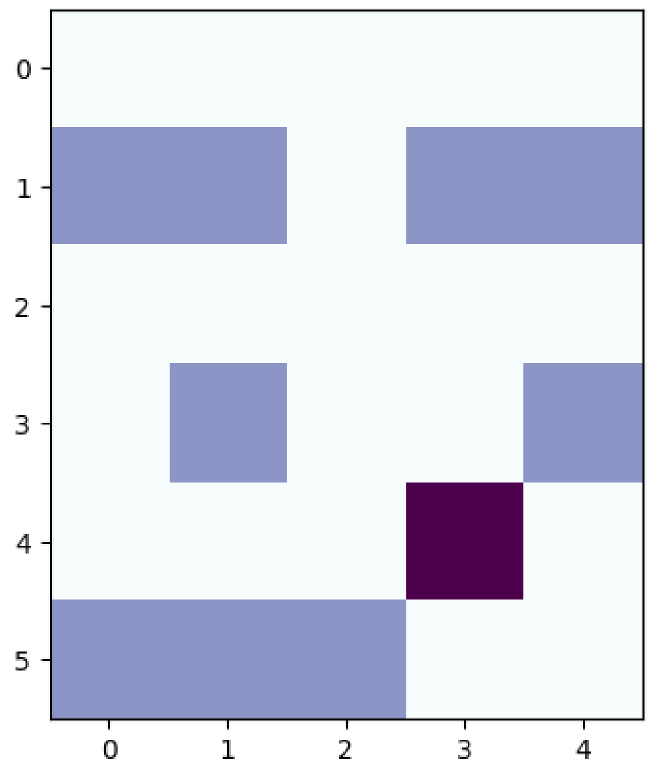

```
Jogada  17
```



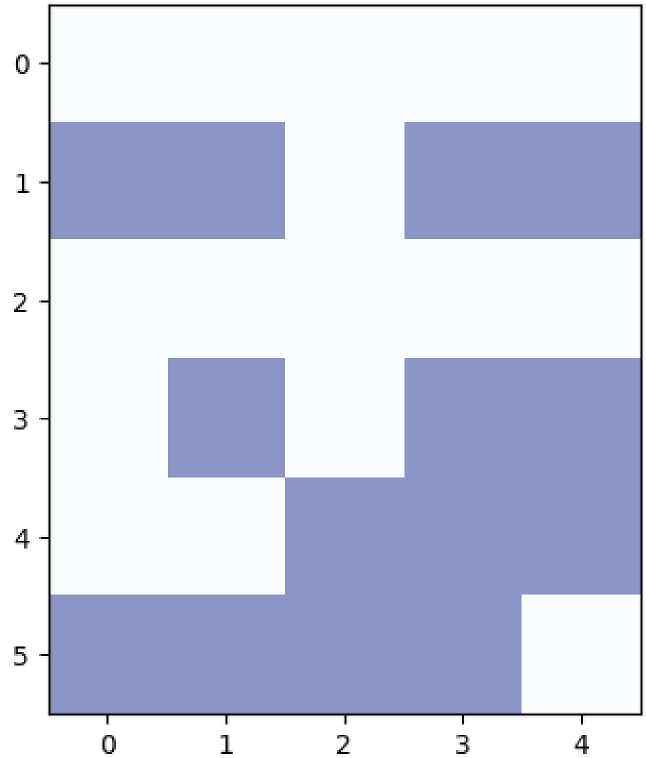
Jogada 17



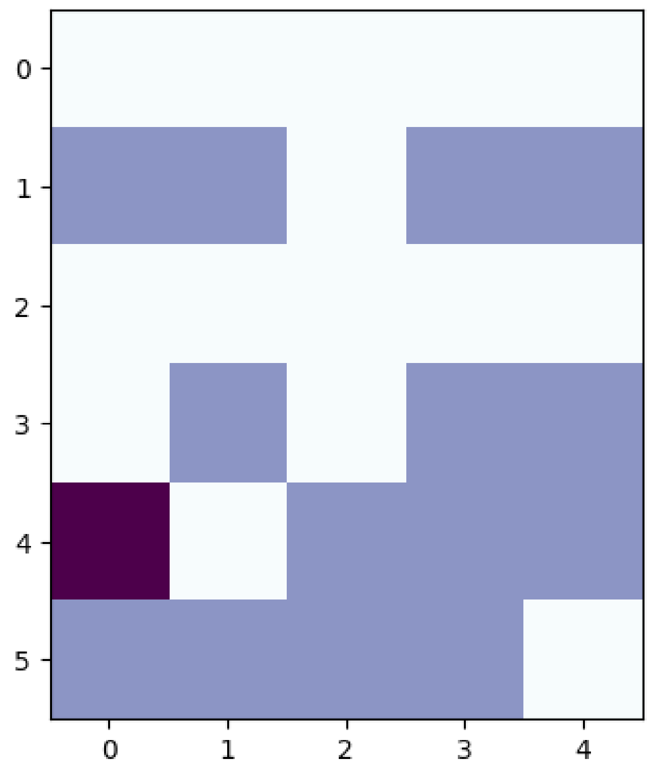

```
Jogada  18
```



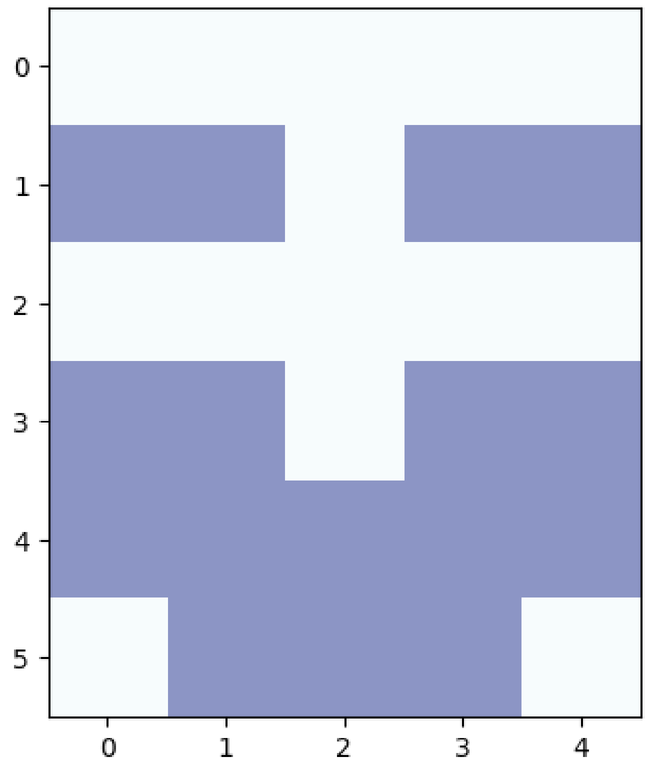
Jogada 18



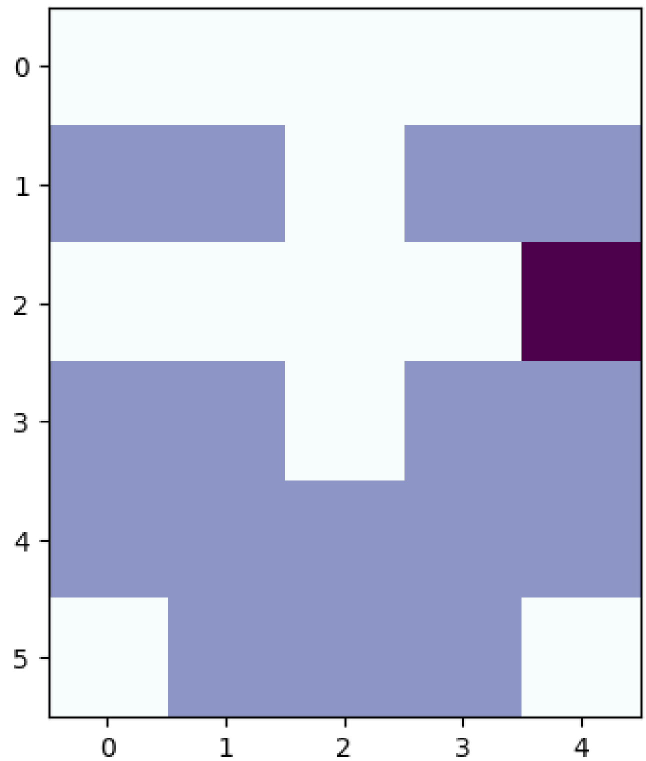
Jogada 19



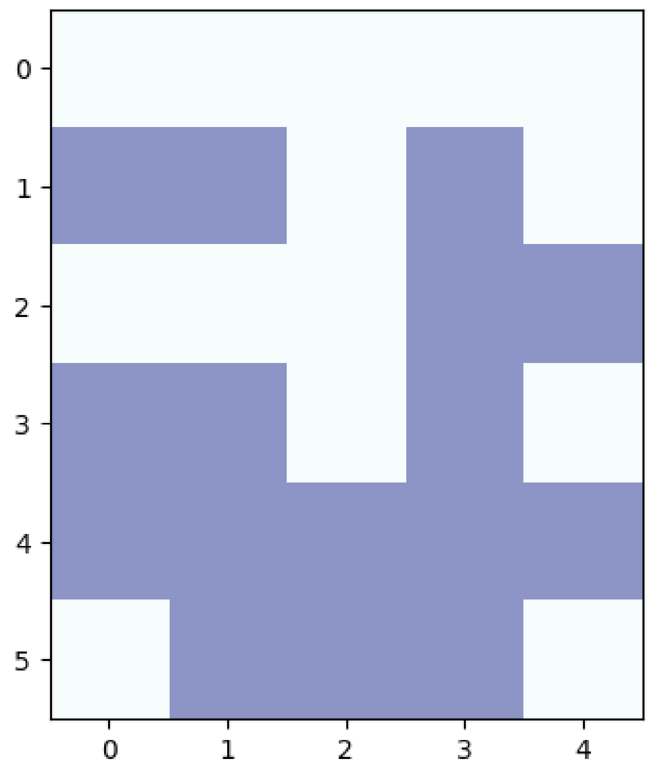
Jogada 19



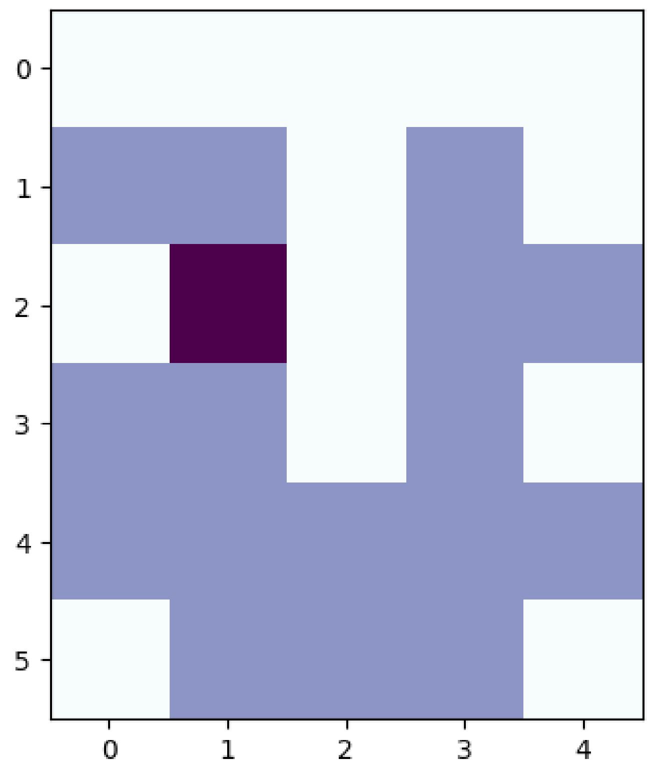
Jogada 20



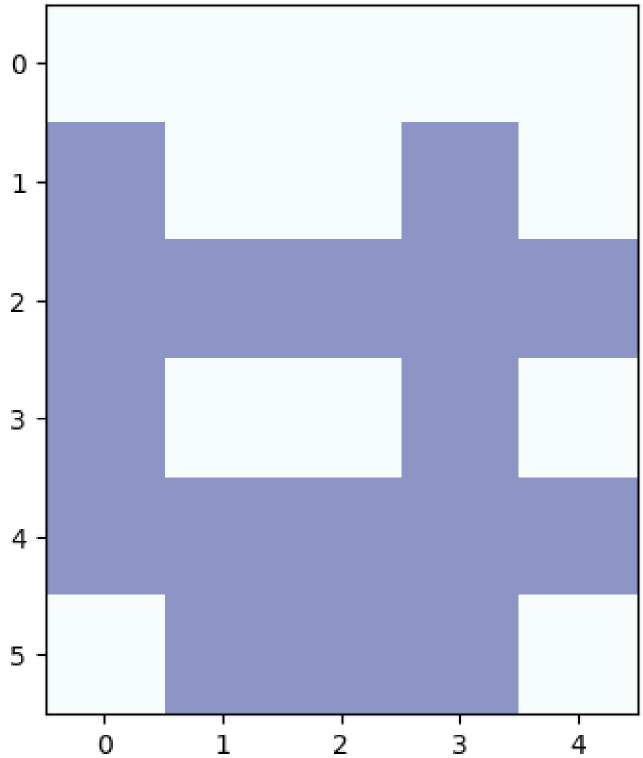
Jogada 20



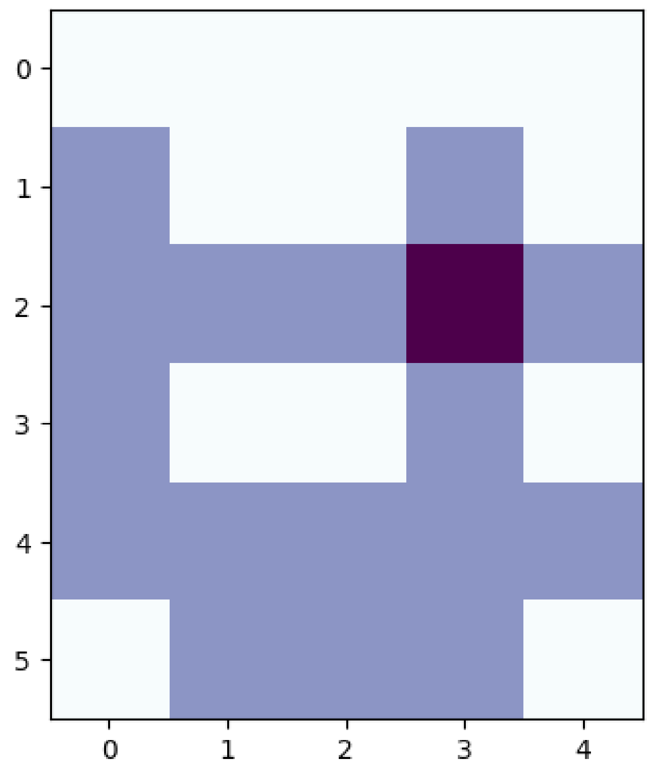
Jogada 21



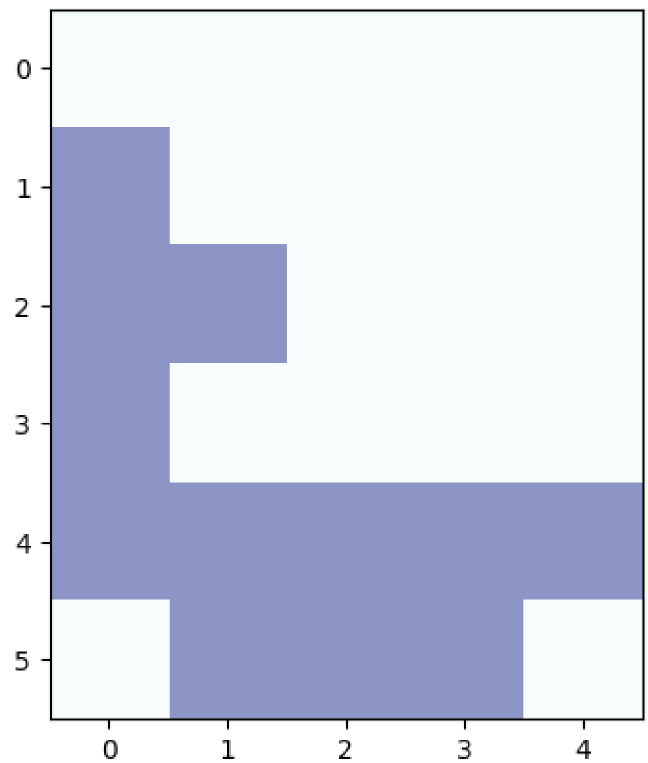
Jogada 21



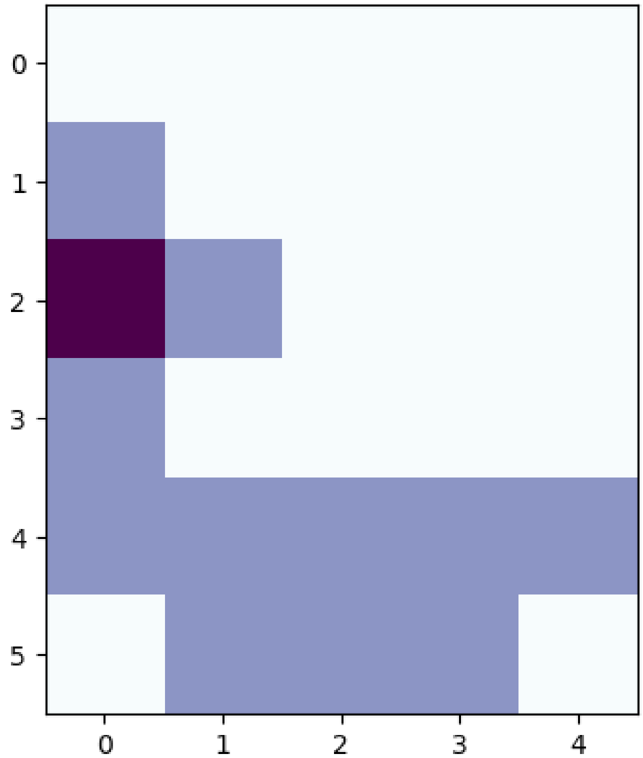
Jogada 22



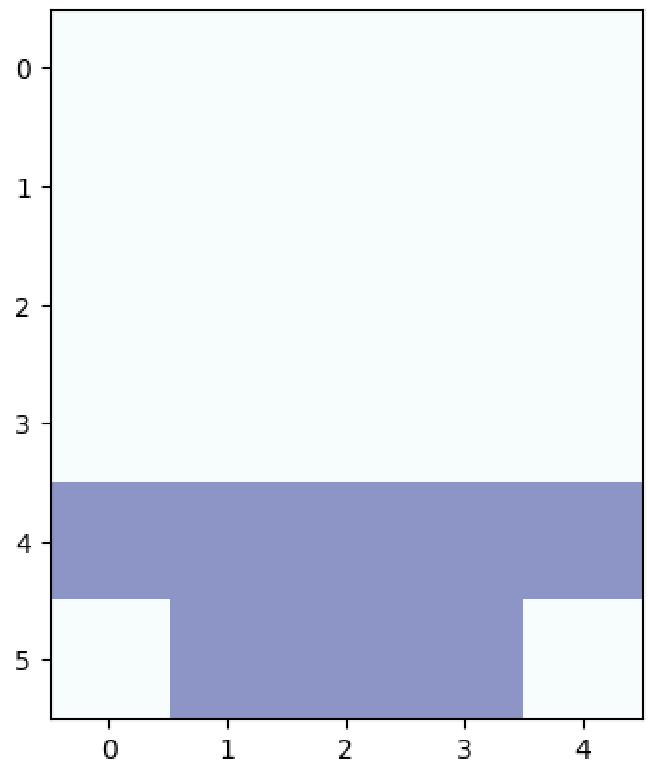
Jogada 22



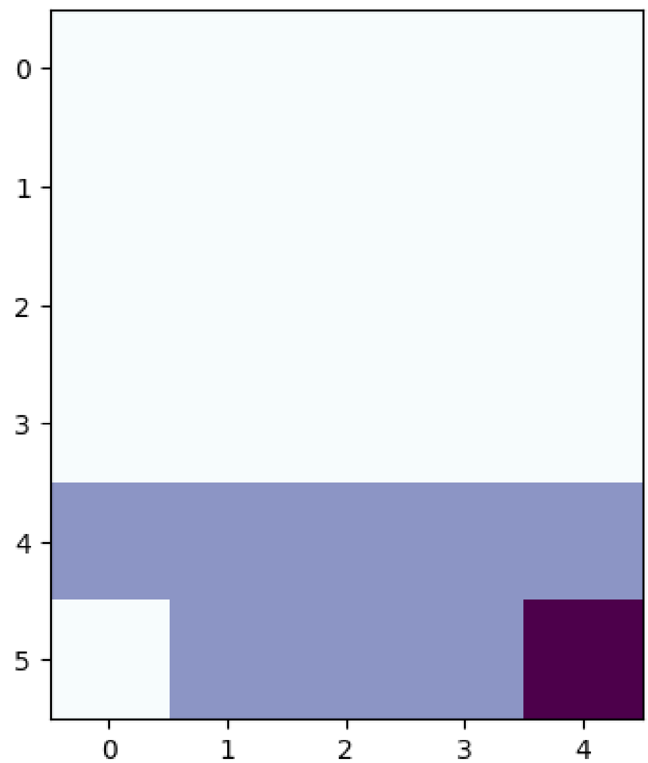
Jogada 23



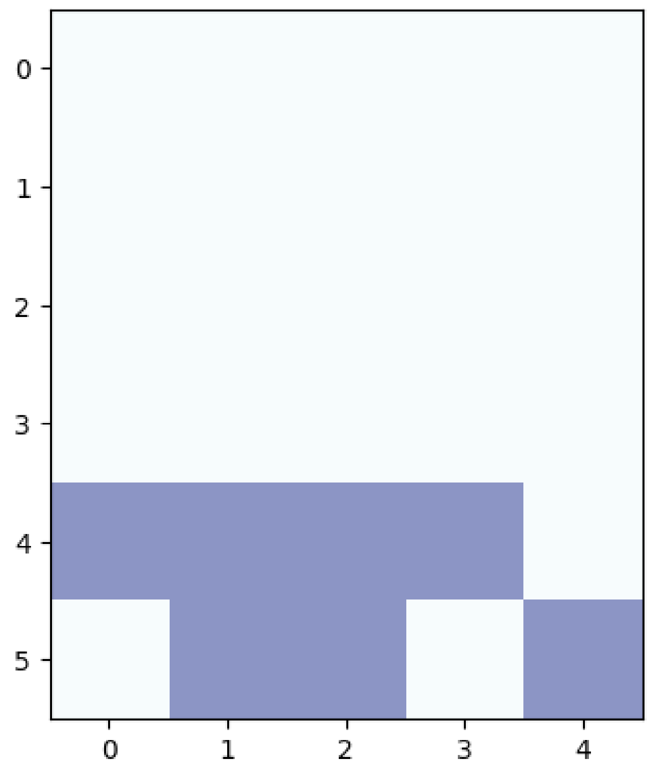
Jogada 23



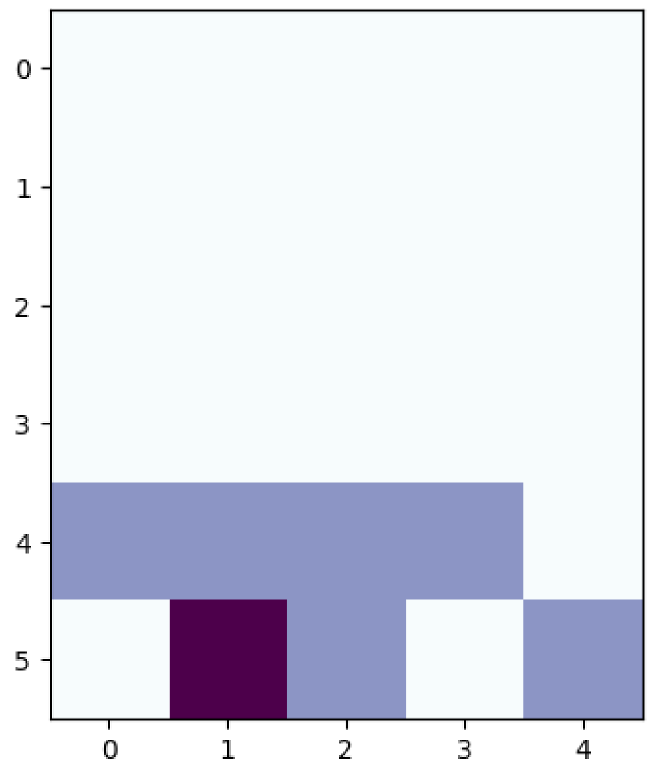
Jogada 24



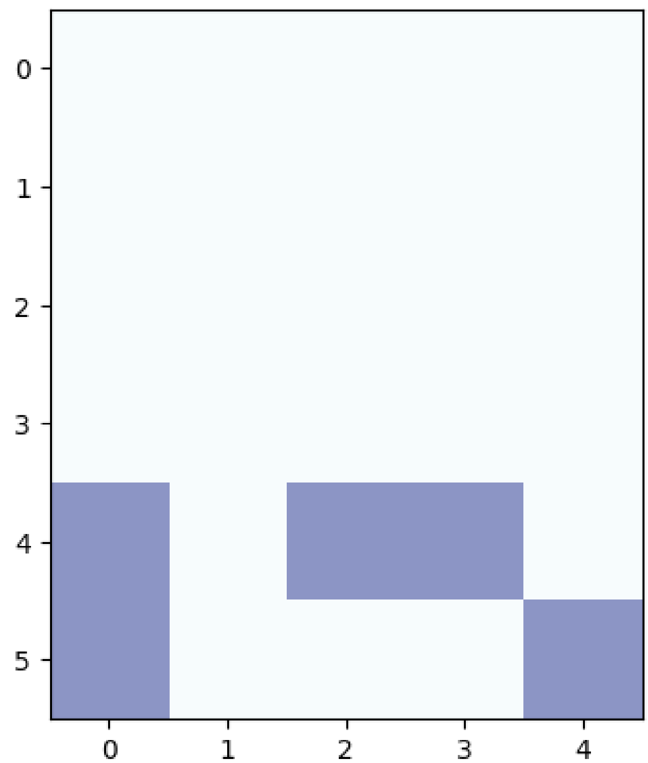
Jogada 24



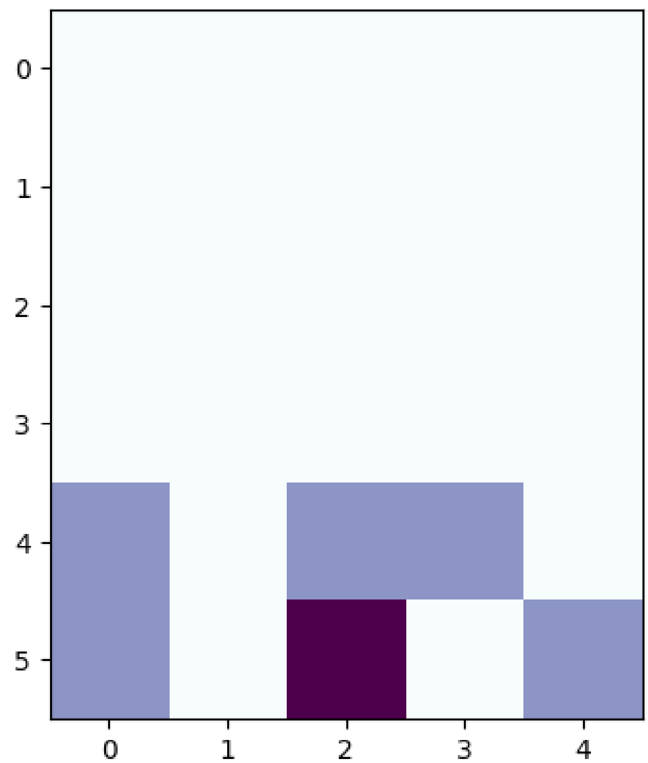
Jogada 25



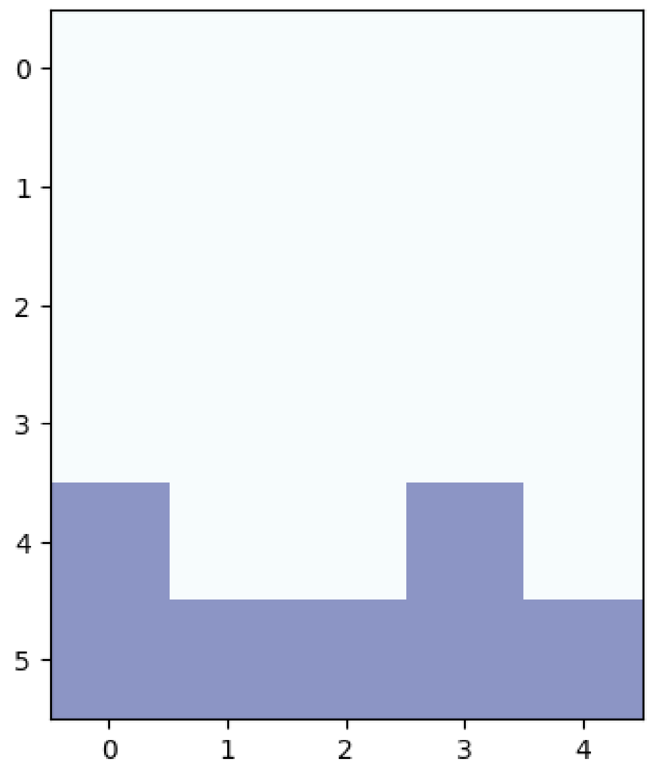
Jogada 25



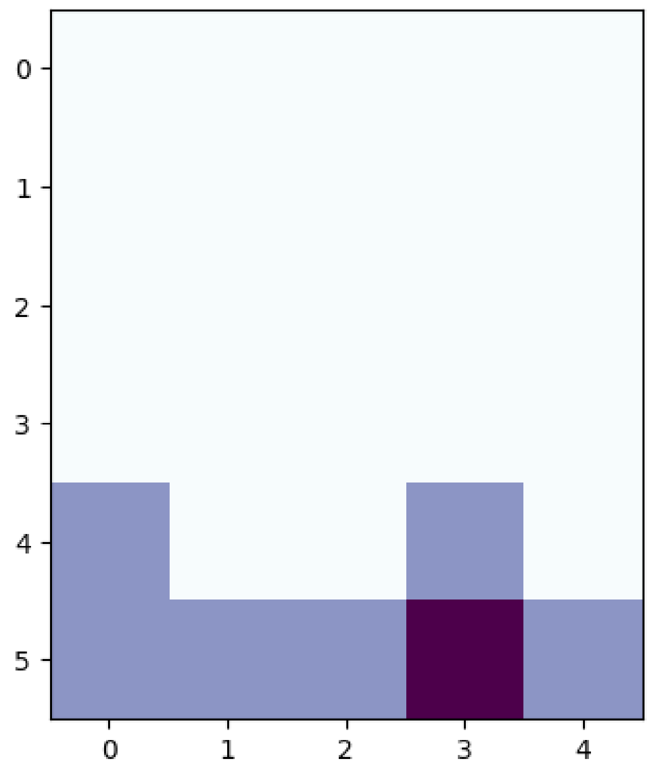
Jogada 26



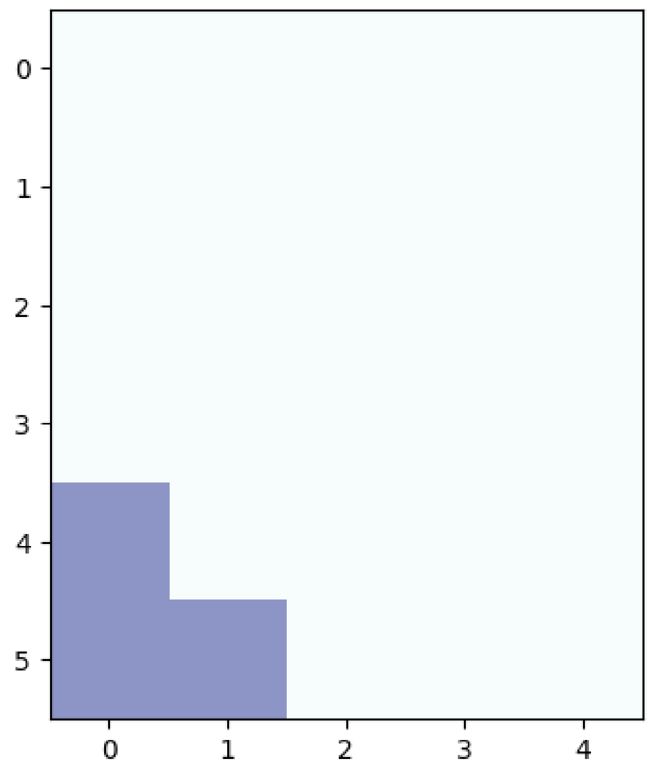
`Jogada 26`



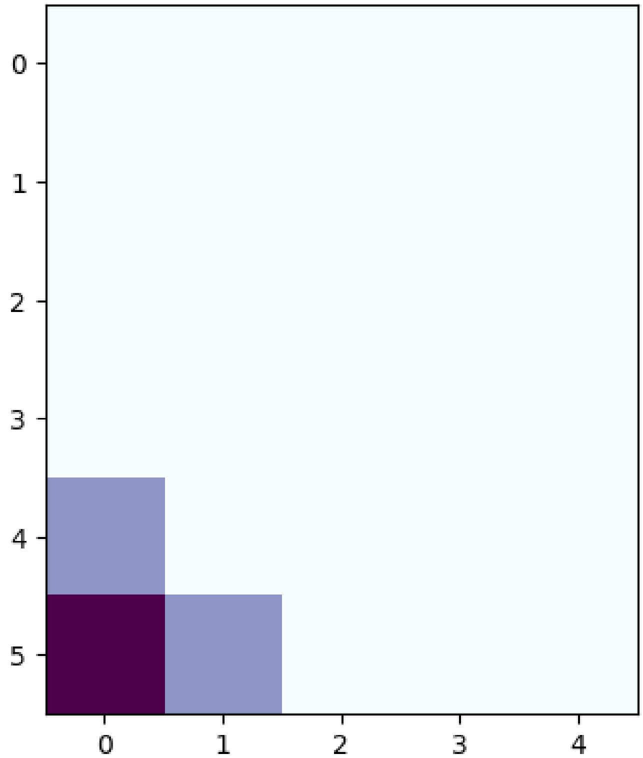
Jogada 27



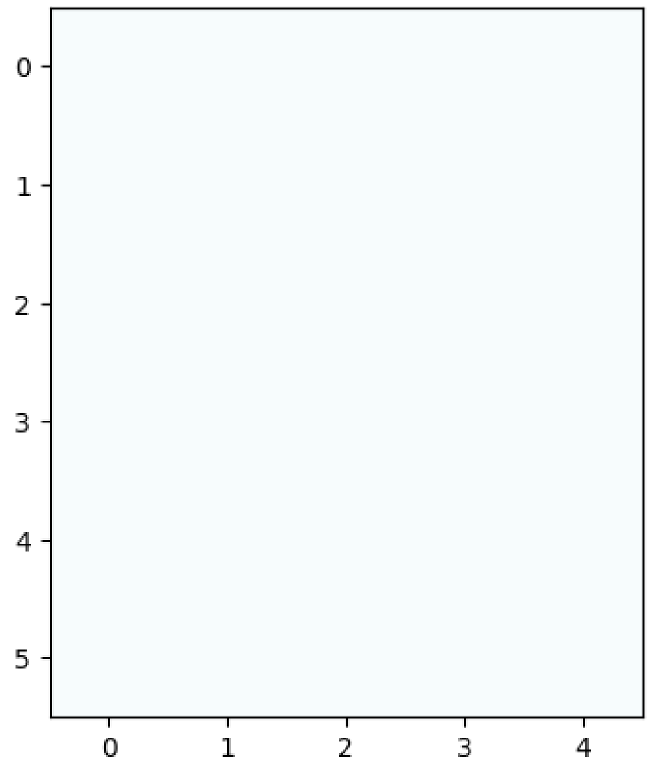
Jogada 27



Jogada 28



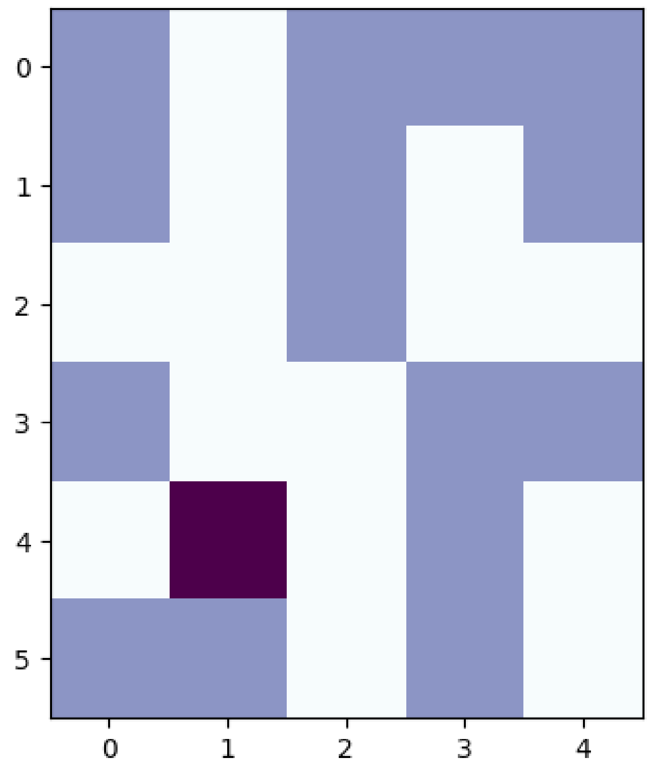
`Jogada  28`



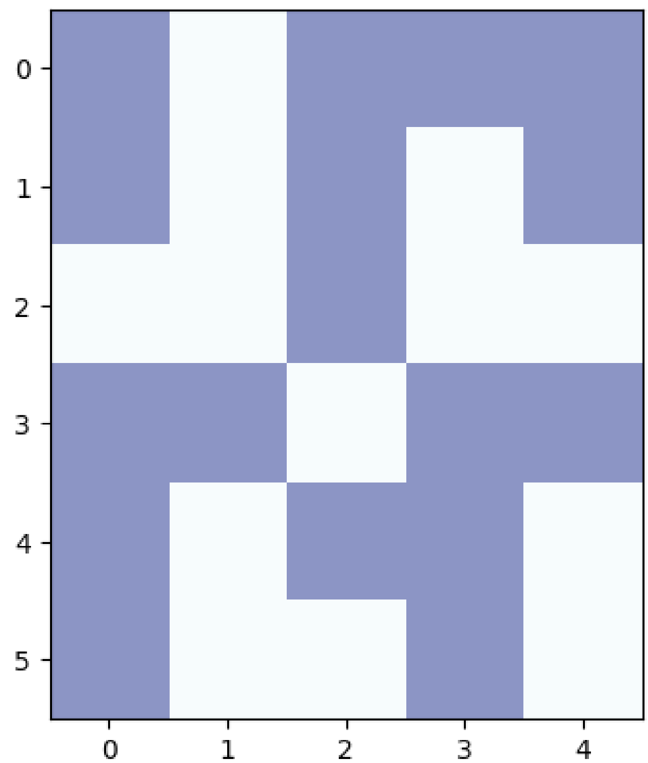
[23]:
```
if __name__ == '__main__':

    puzzle = np.array([
        [1,0,1,1,1],
        [1,0,1,0,1],
        [0,0,1,0,0],
        [1,0,0,1,1],
        [0,1,0,1,0],
        [1,1,0,1,0]
    ])

    print("Puzzle original:")
    print(puzzle)

    solution = solve_game(puzzle)

    tabuleiro(solution, puzzle)
```

```
Puzzle original:
[[1 0 1 1 1]
 [1 0 1 0 1]
 [0 0 1 0 0]
```

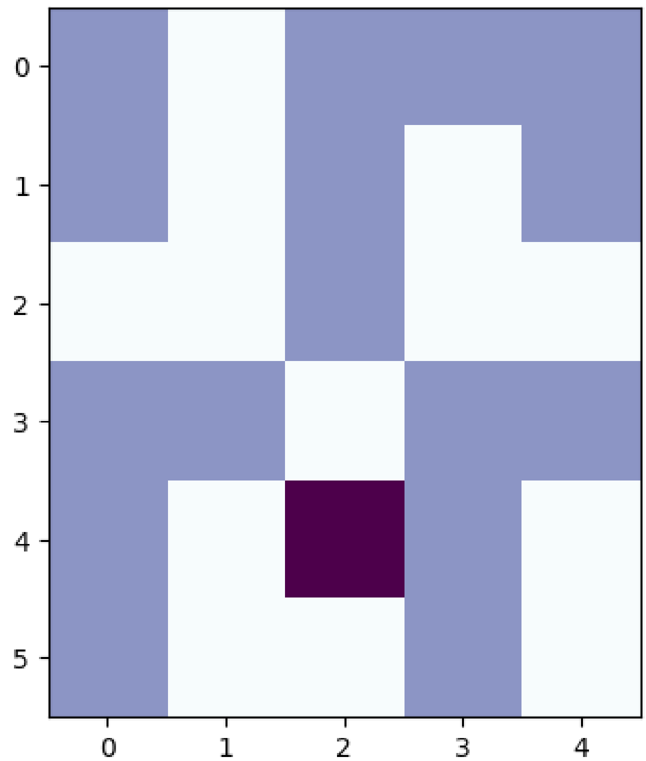
```
 [1 0 0 1 1]
 [0 1 0 1 0]
 [1 1 0 1 0]]
optimal
Solução de cliques:
[[1. 1. 1. 1. 1.]
 [1. 1. 0. 0. 1.]
 [0. 1. 1. 0. 1.]
 [0. 1. 1. 0. 0.]
 [0. 1. 1. 0. 0.]
 [1. 0. 1. 0. 0.]]
Jogada  1
```



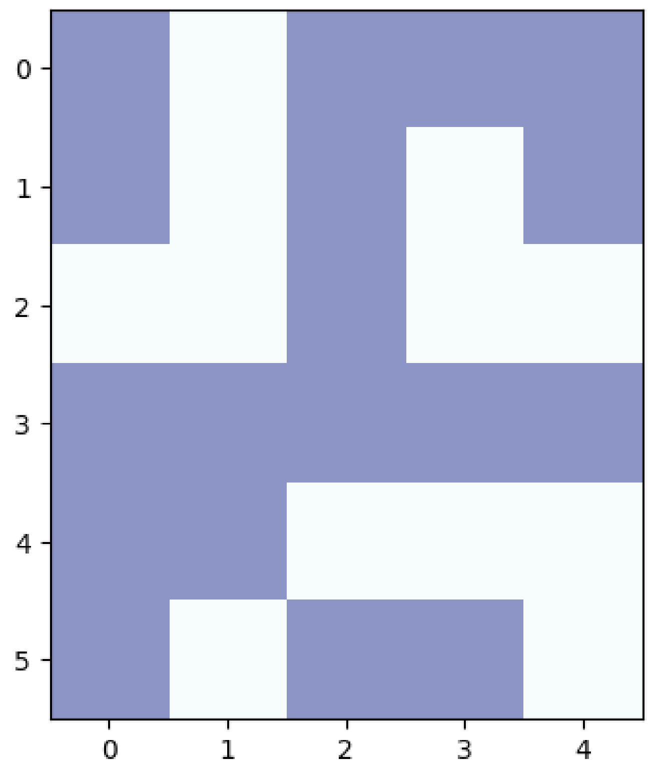

```
Jogada  1
```



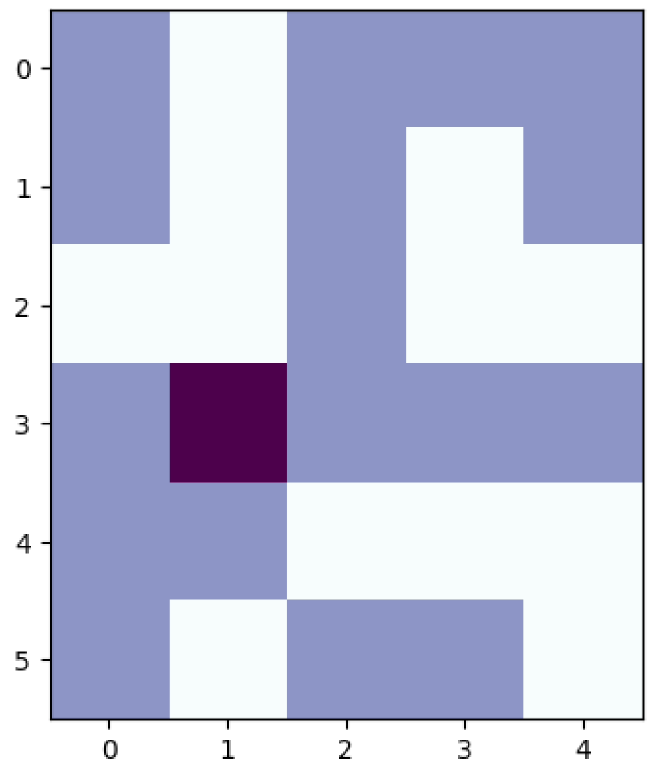
Jogada 2



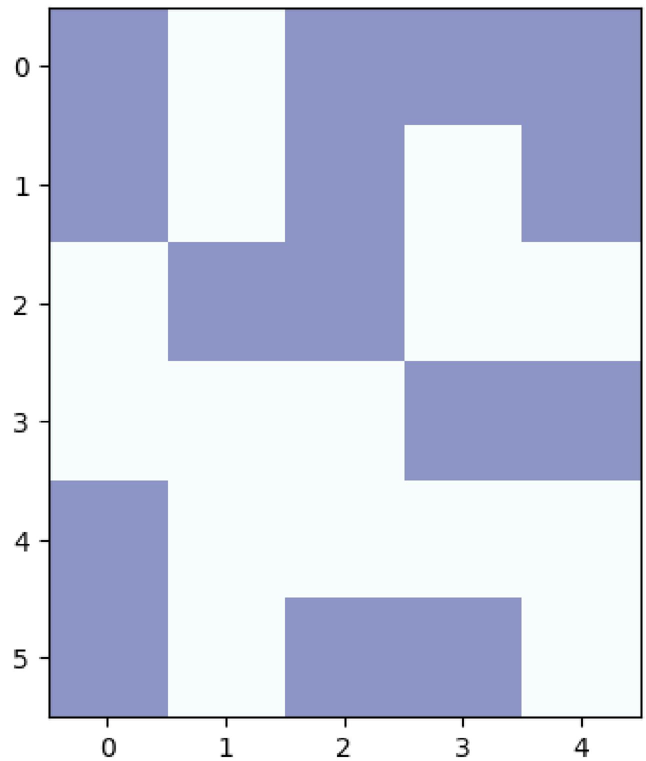
Jogada 2



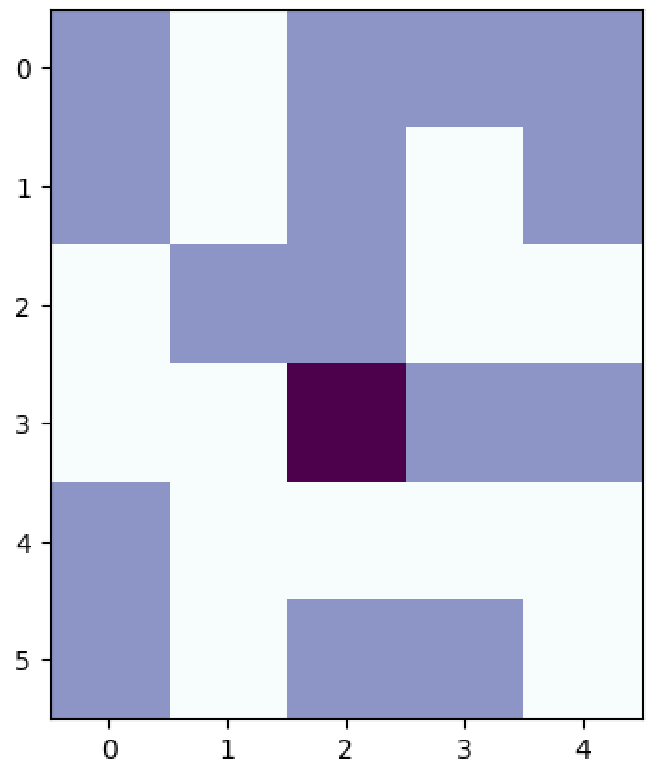
Jogada 3



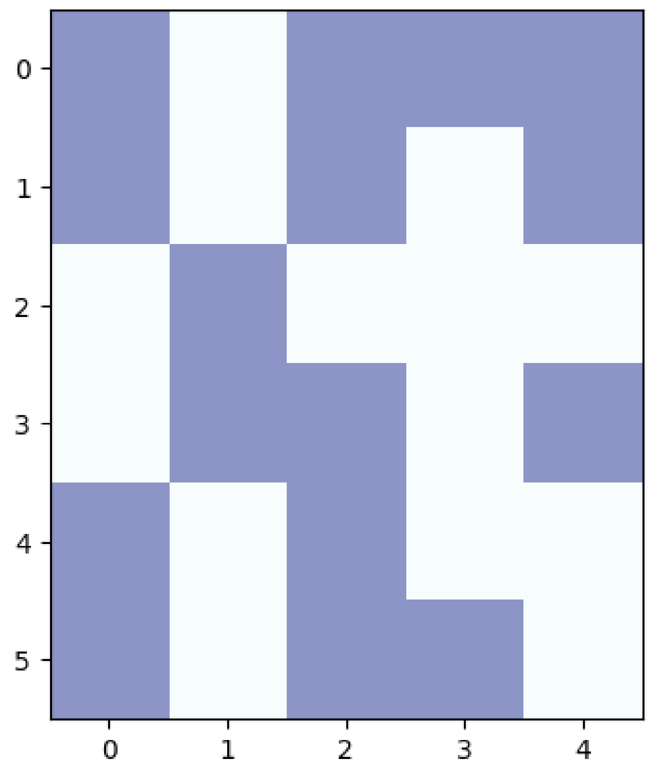
Jogada 3



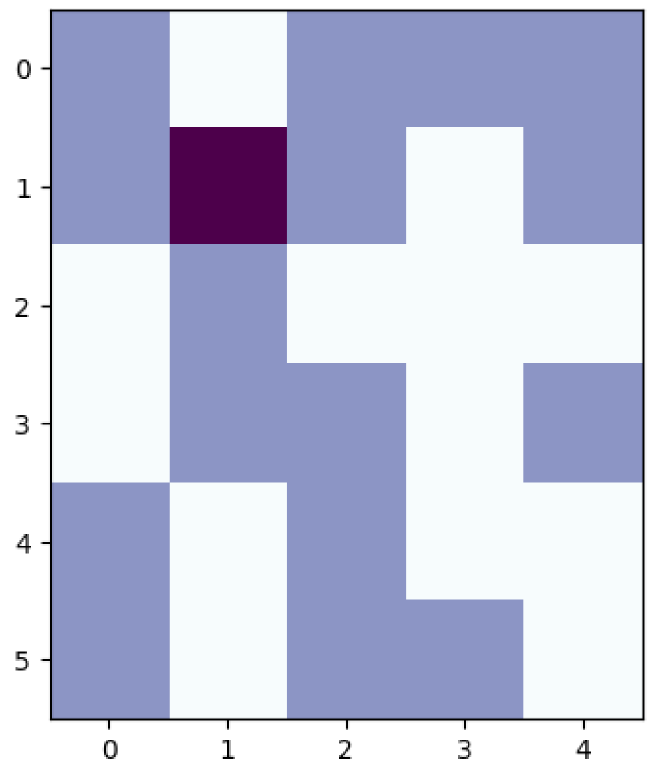

```
Jogada  4
```



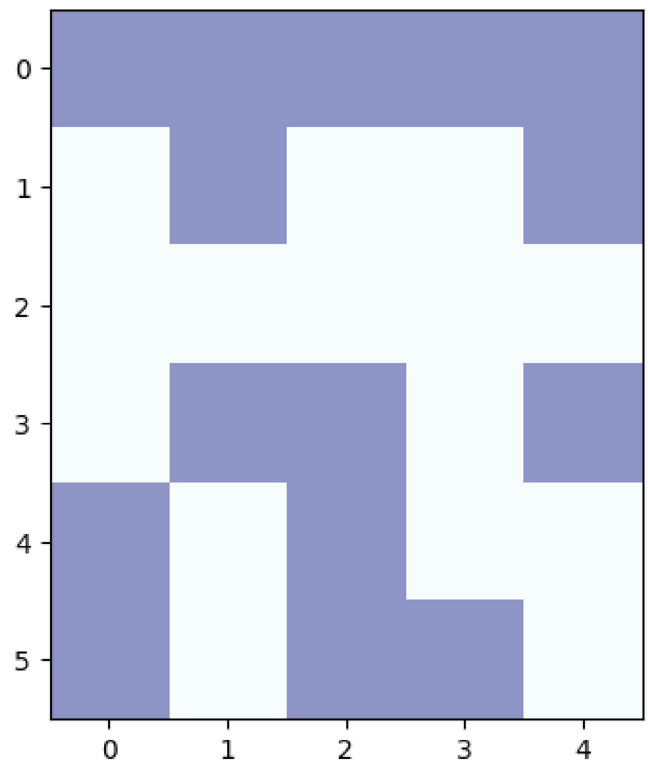
Jogada 4



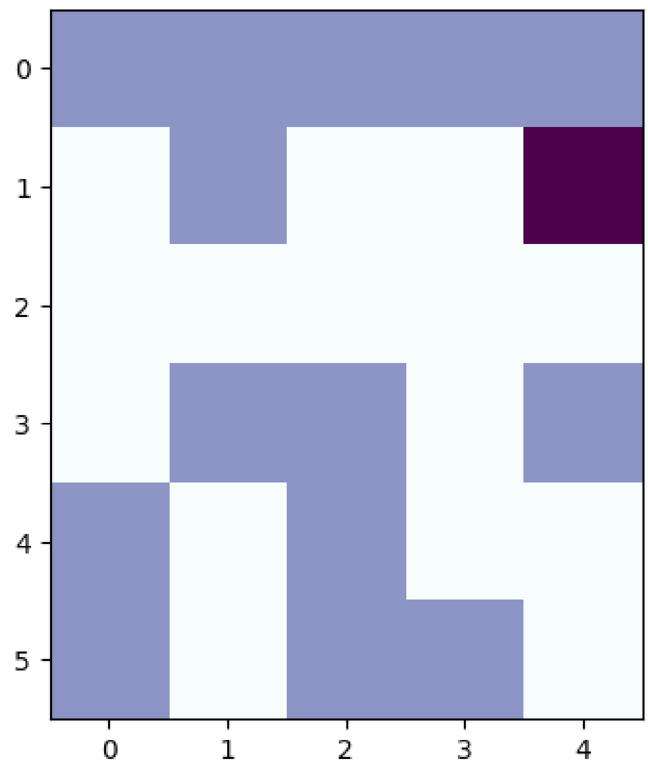

```
Jogada  5
```



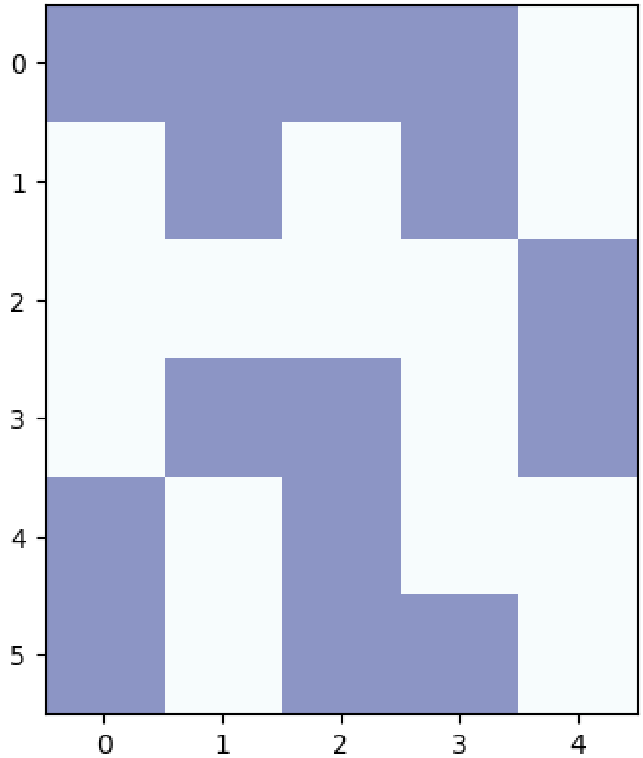
Jogada 5



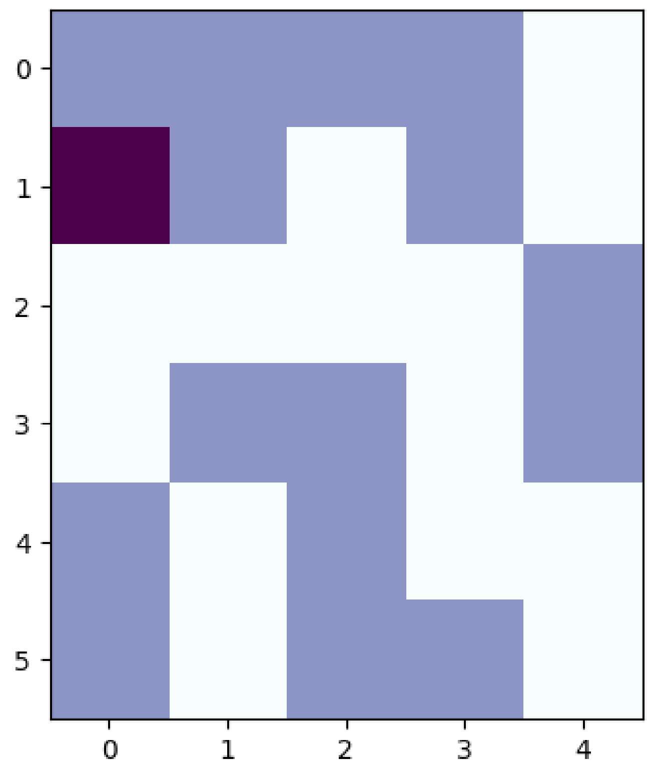
Jogada 6



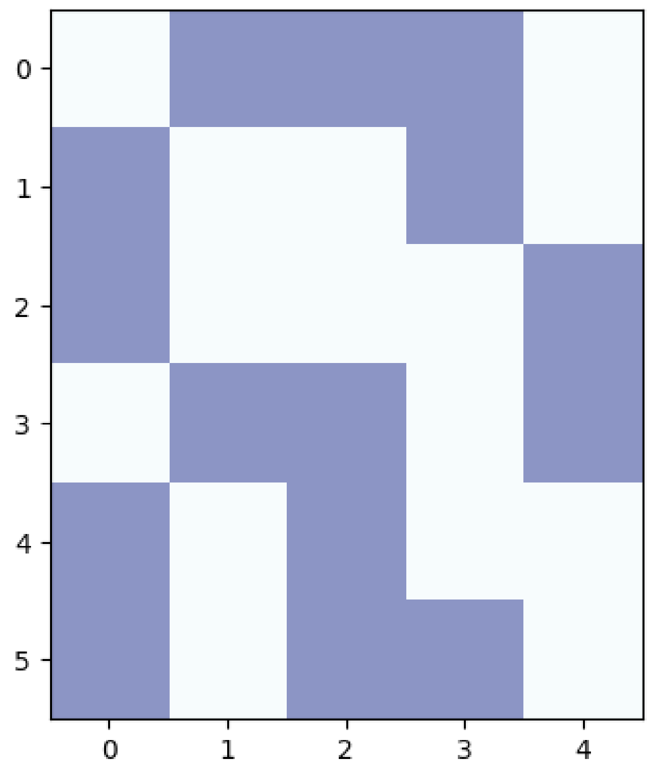
Jogada 6



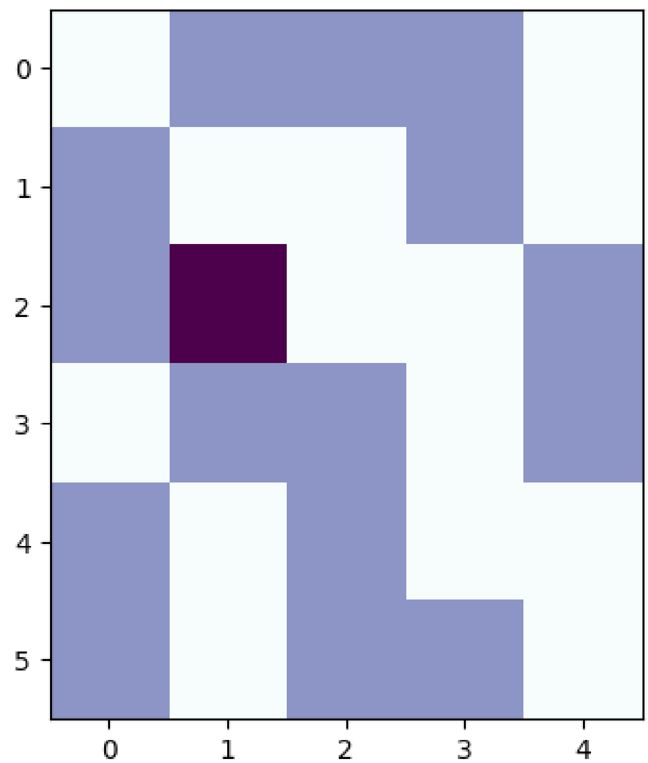
Jogada 7



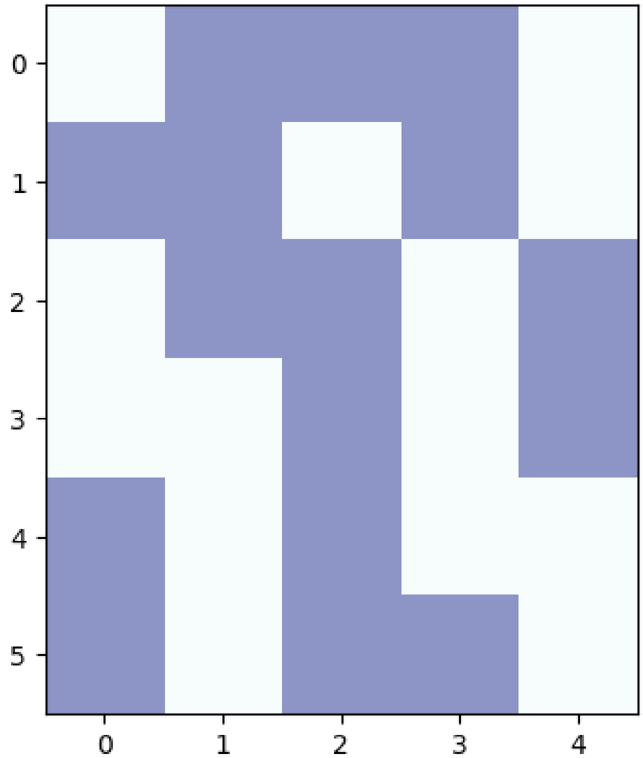
Jogada 7



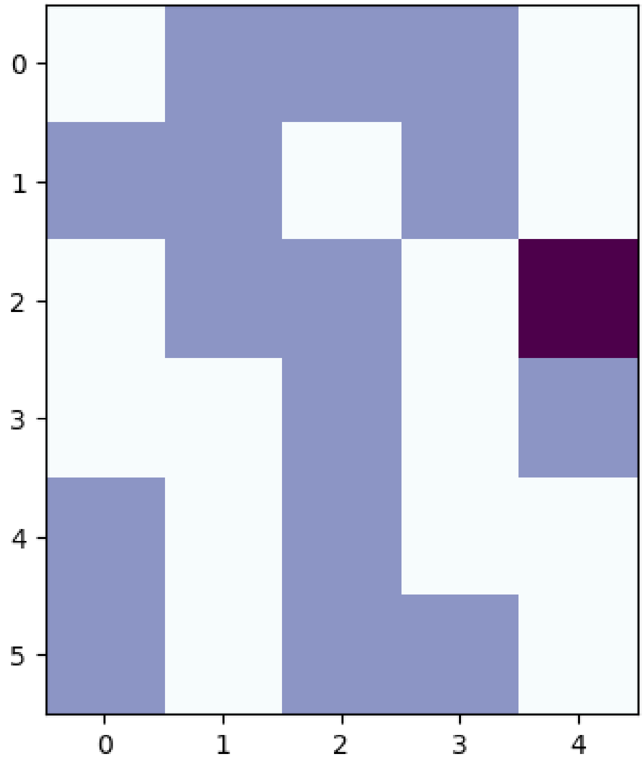
`Jogada  8`



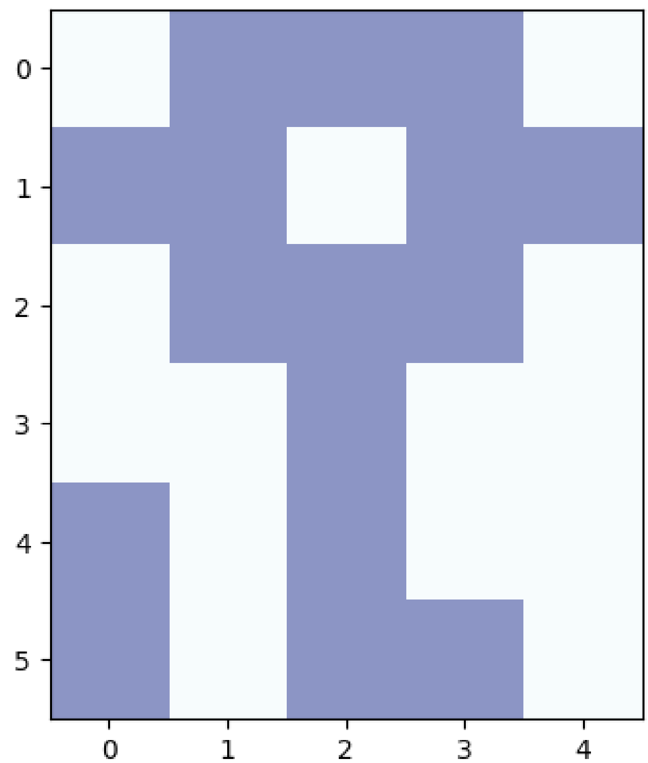
Jogada 8



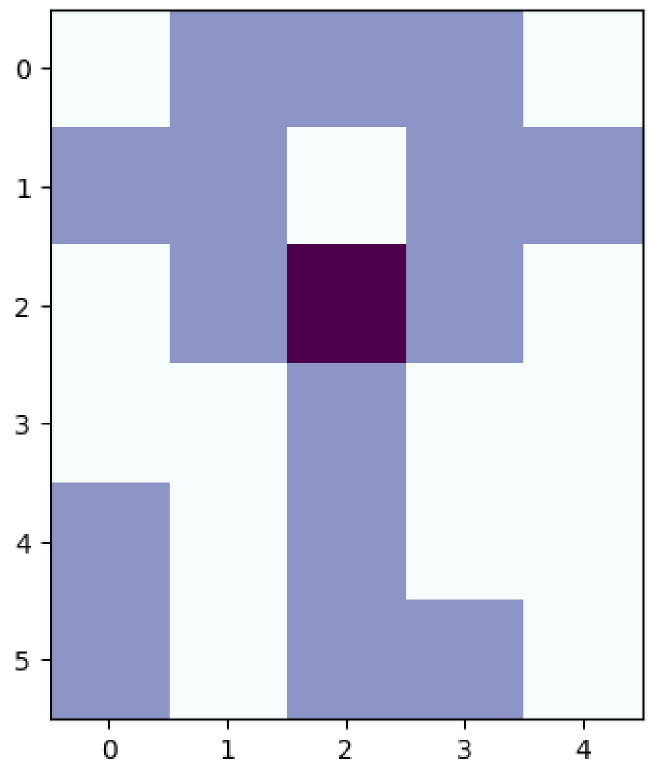
Jogada 9



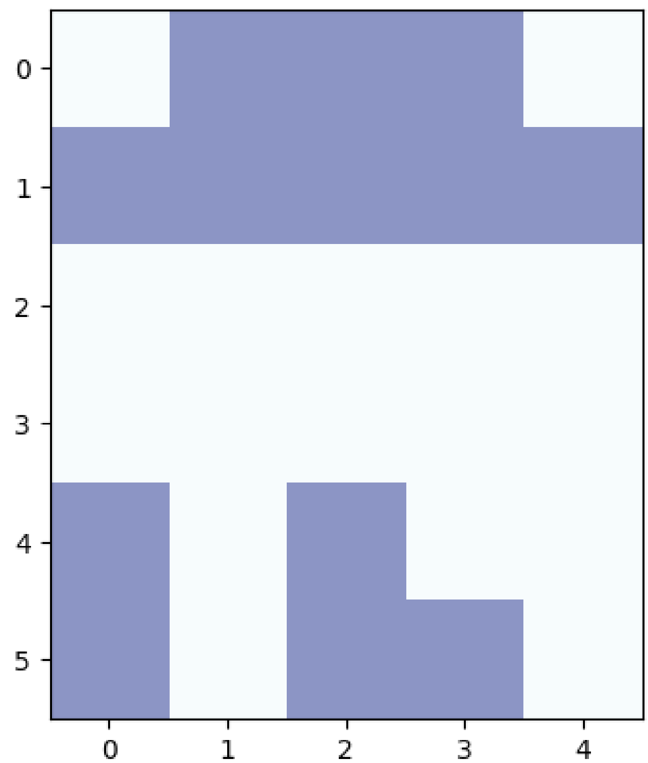
Jogada 9



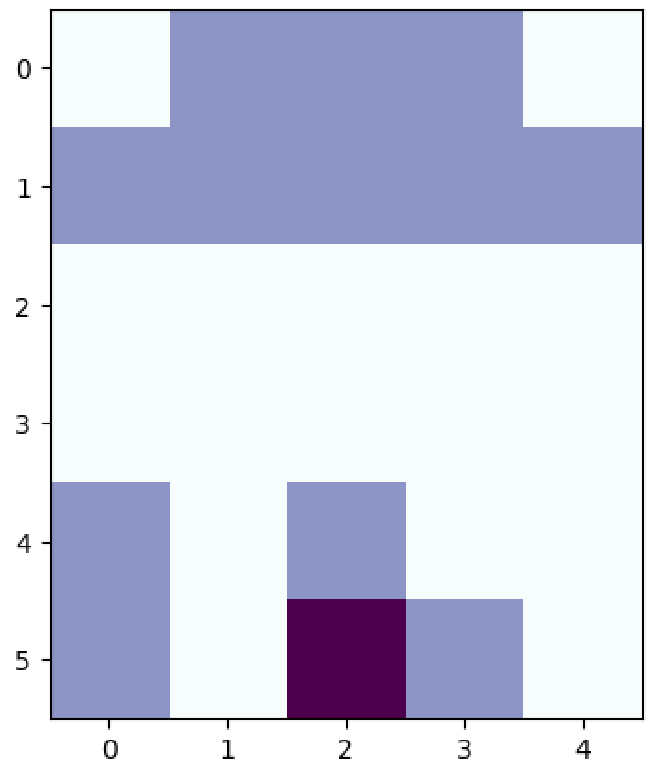
Jogada 10



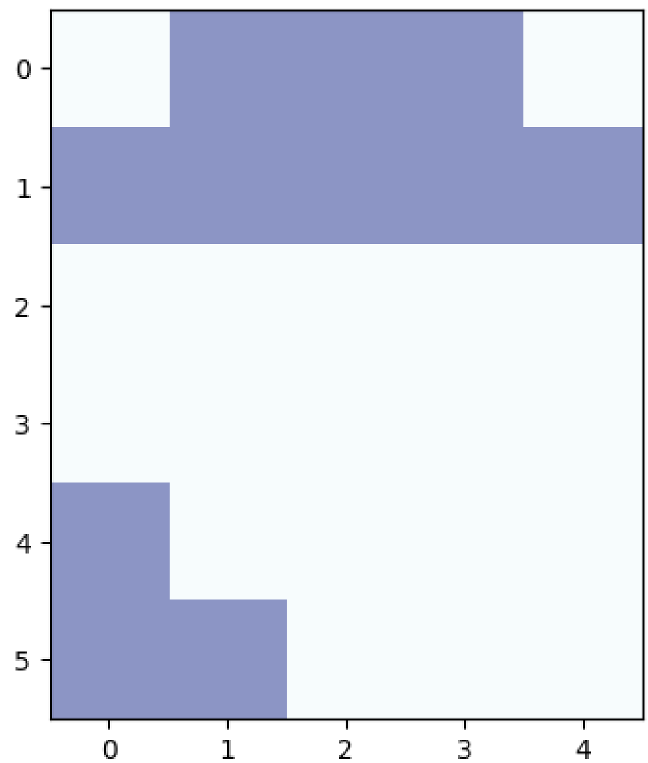
`Jogada  10`



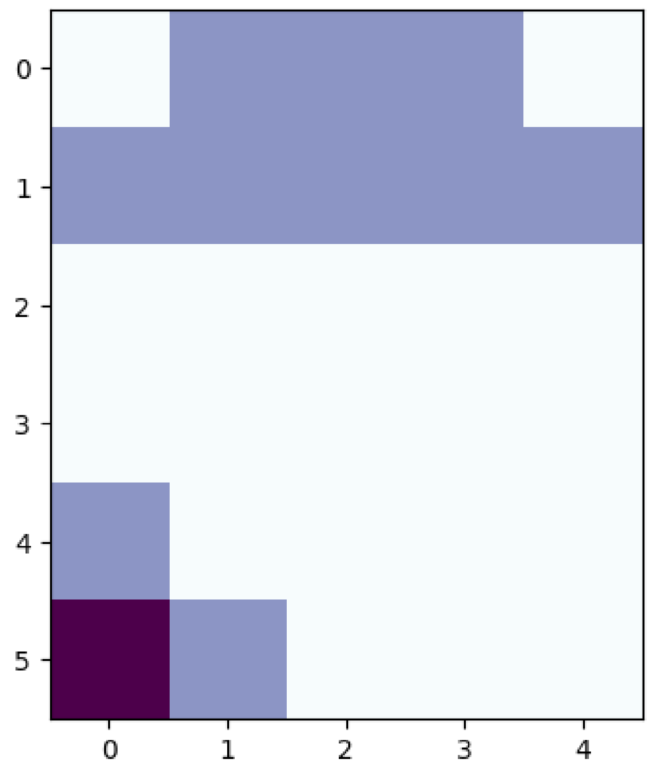
Jogada 11



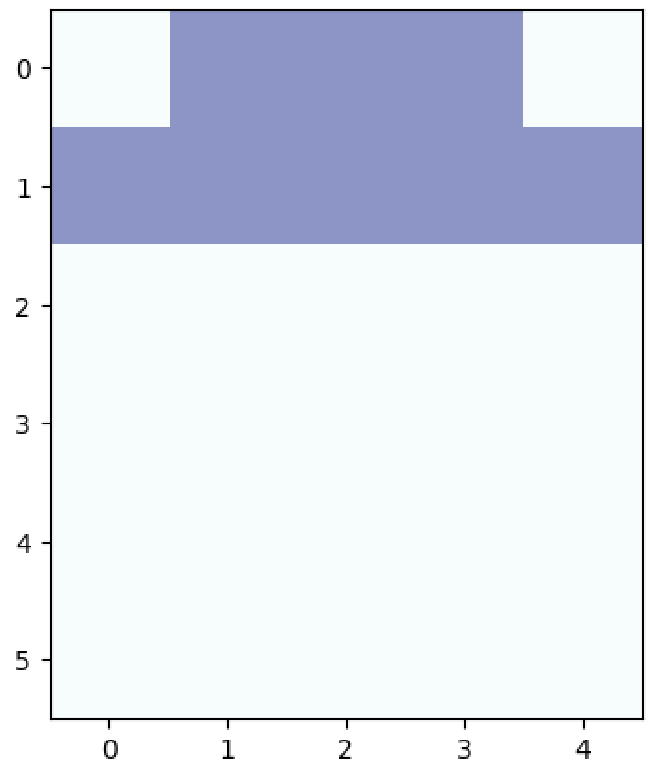
Jogada 11



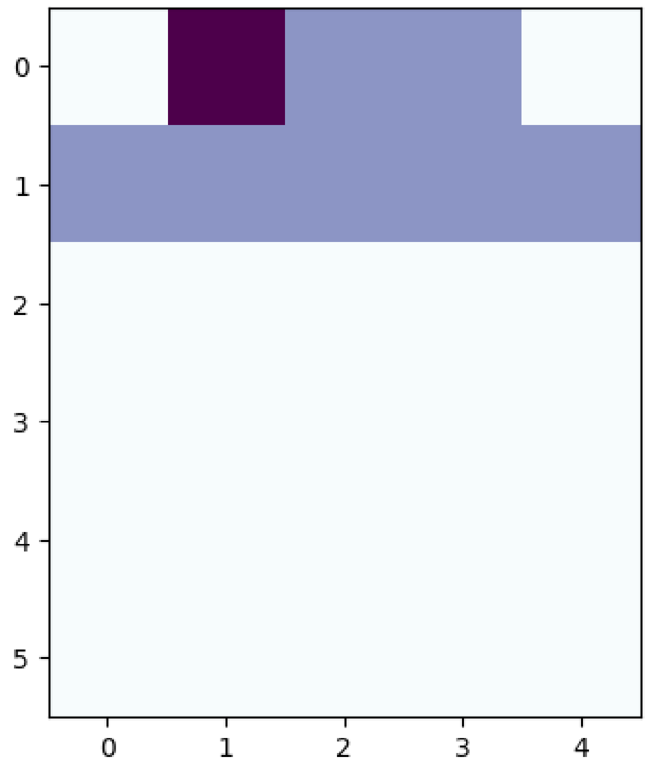

```
Jogada  12
```



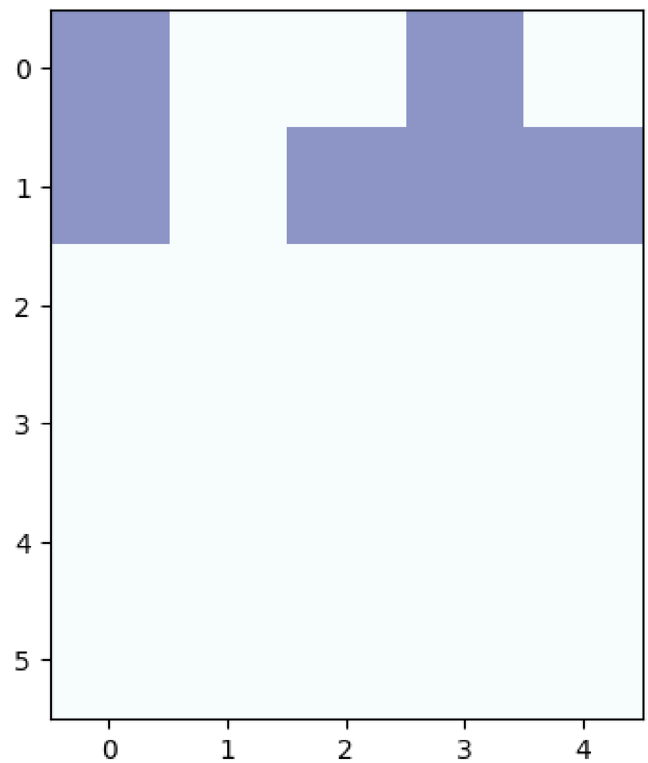
Jogada 12



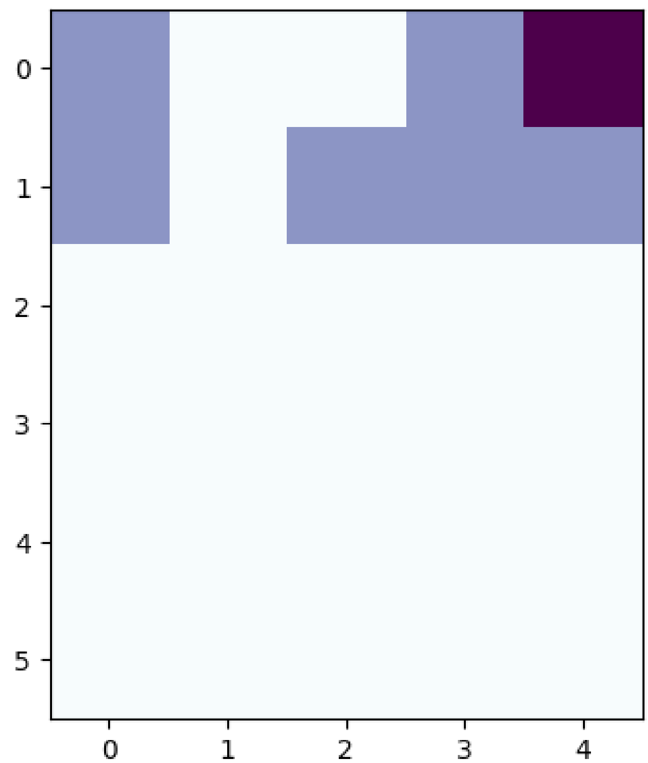
Jogada 13



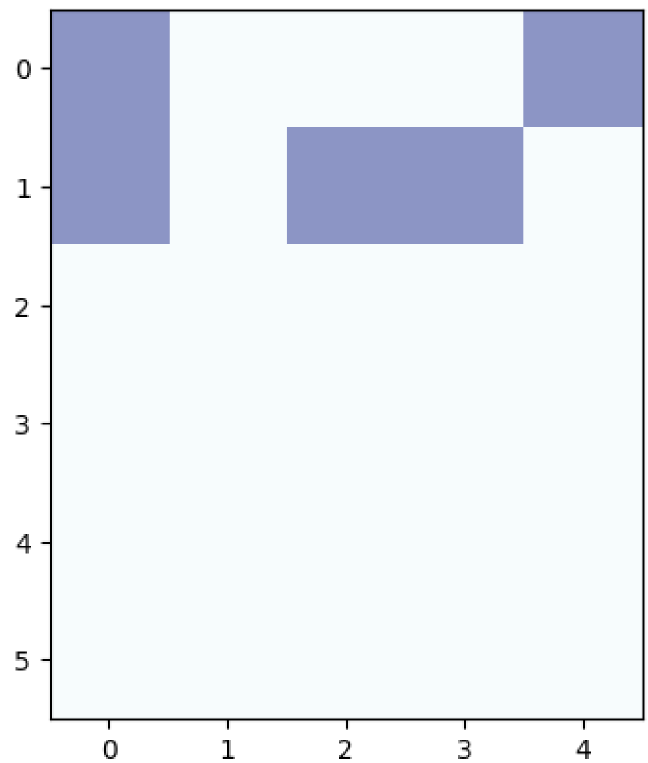
Jogada 13



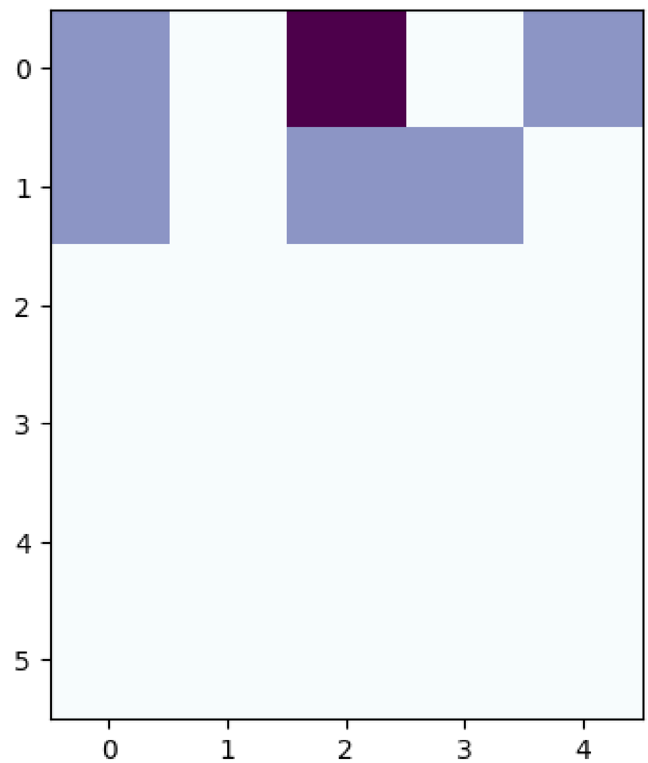
Jogada 14



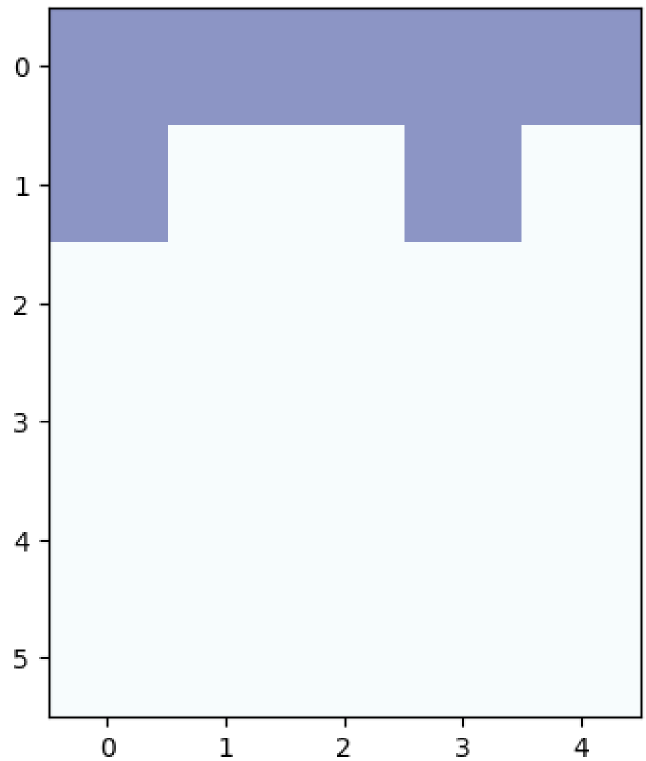
Jogada 14



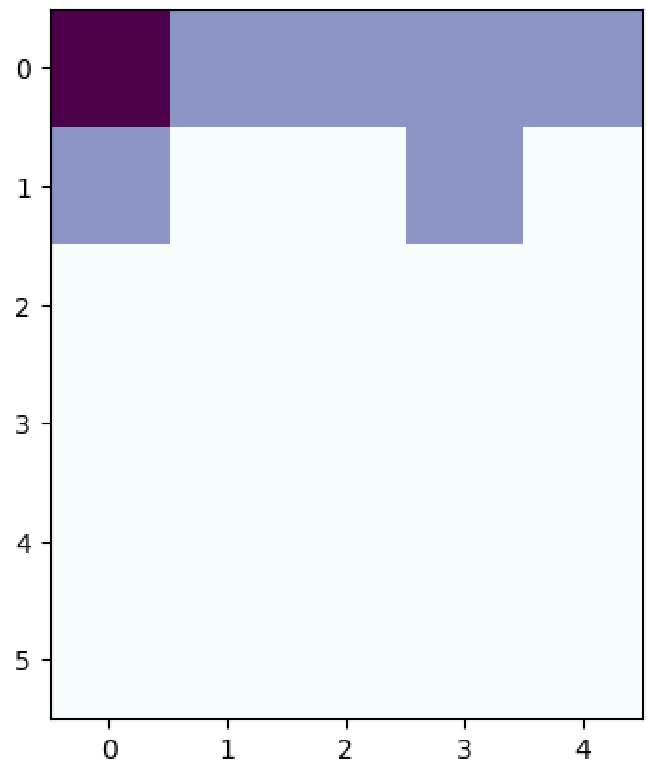

```
Jogada  15
```



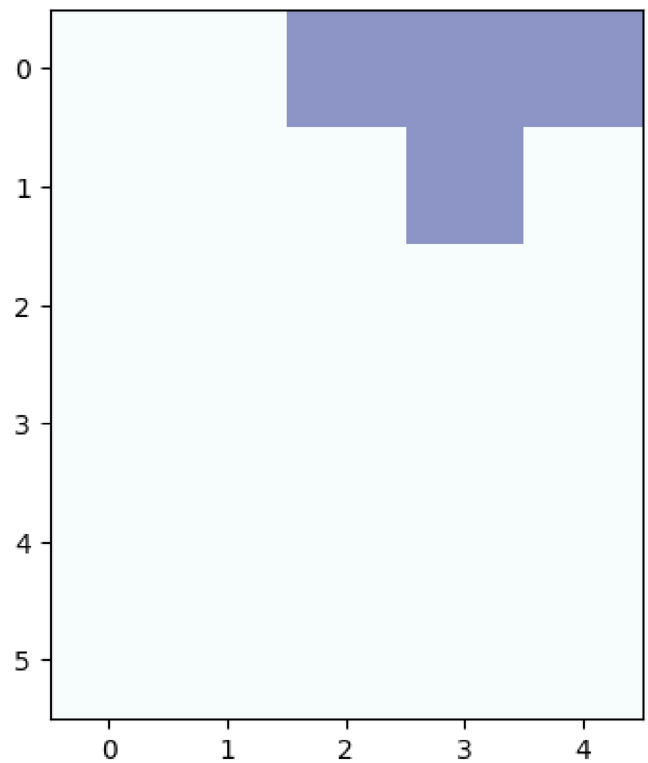

```
Jogada  15
```



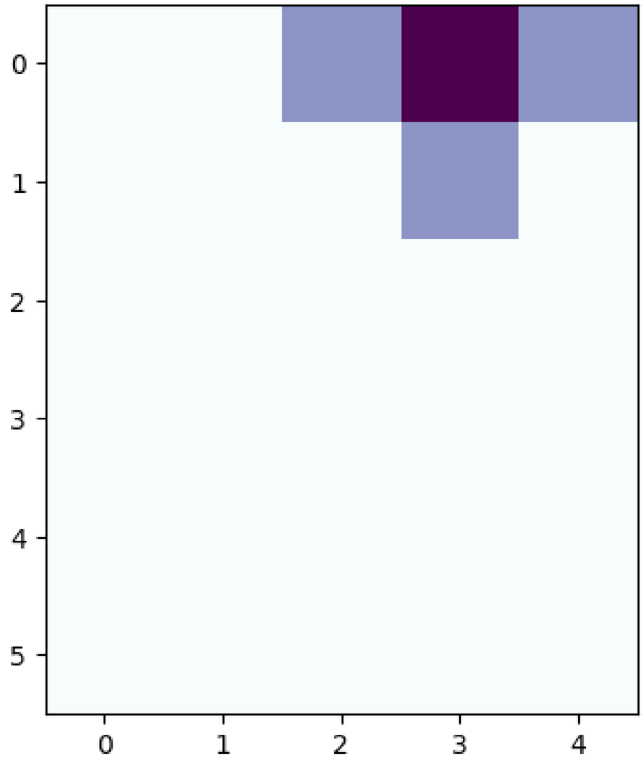

```
Jogada  16
```



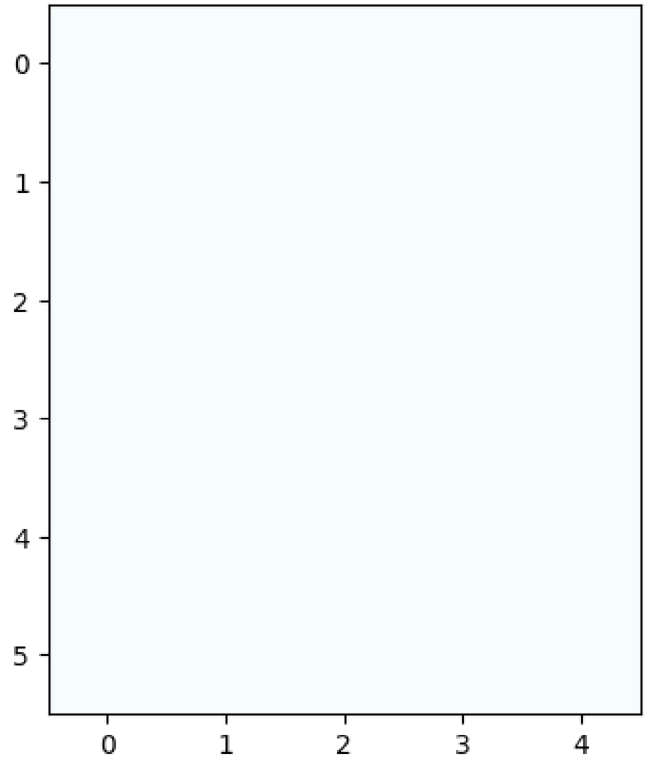
Jogada 16



Jogada 17



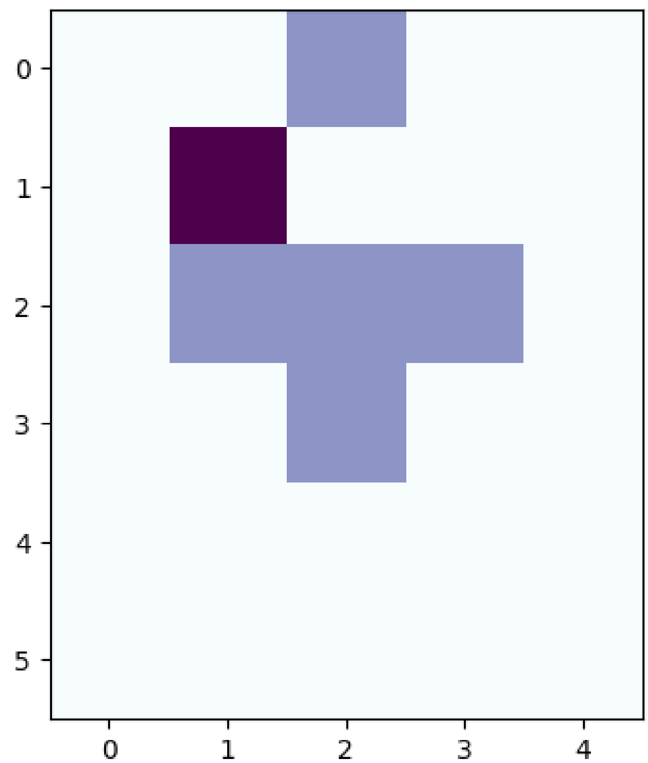
Jogada 17



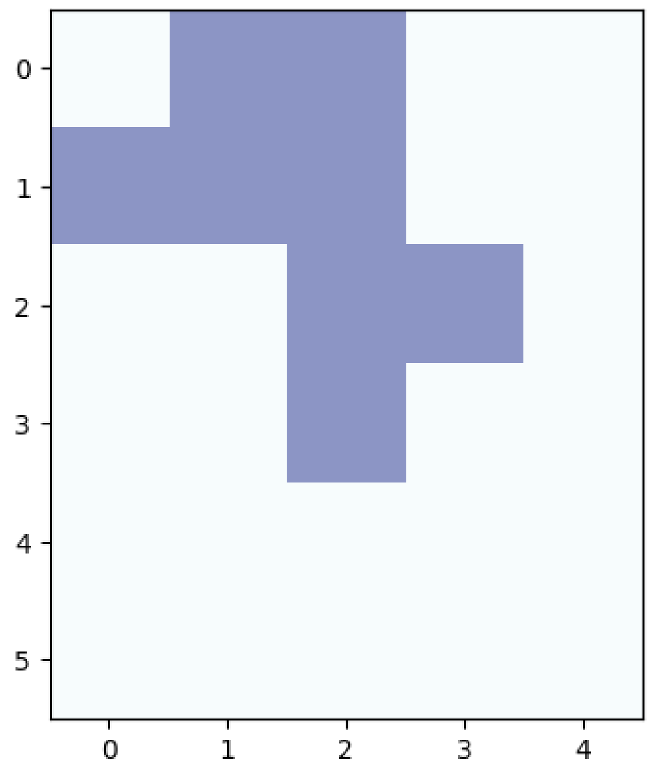
[24]:
```
if __name__ == '__main__':

    puzzle = np.array([
        [0,0,1,0,0],
        [0,0,0,0,0],
        [0,1,1,1,0],
        [0,0,1,0,0],
        [0,0,0,0,0],
        [0,0,0,0,0]
    ])

    print("Puzzle original:")
    print(puzzle)

    solution = solve_game(puzzle)

    tabuleiro(solution, puzzle)
```

```
Puzzle original:
[[0 0 1 0 0]
 [0 0 0 0 0]
 [0 1 1 1 0]
```

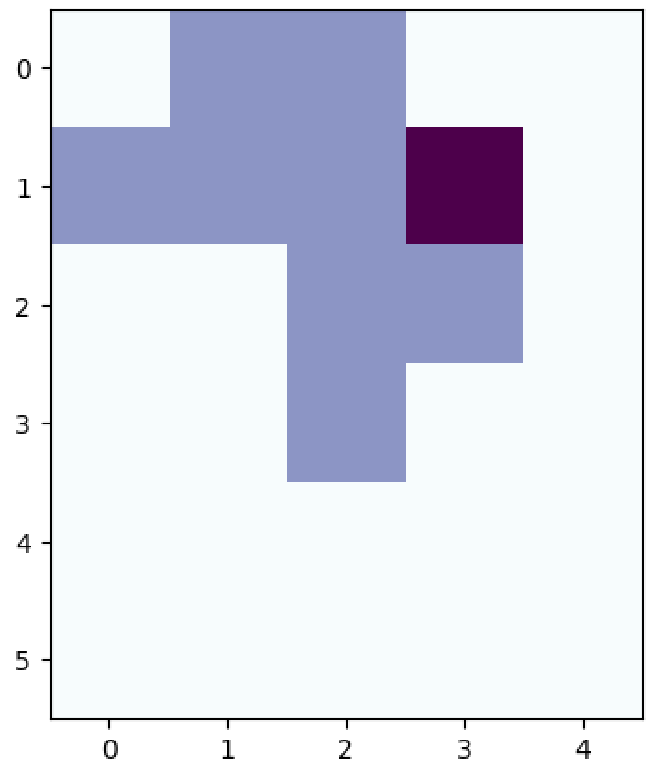
```
 [0 0 1 0 0]
 [0 0 0 0 0]
 [0 0 0 0 0]]
optimal
Solução de cliques:
[[1. 1. 1. 1. 1.]
 [0. 1. 0. 1. 0.]
 [0. 0. 1. 0. 0.]
 [0. 1. 0. 1. 0.]
 [1. 1. 0. 1. 1.]
 [0. 1. 0. 1. 0.]]
Jogada  1
```



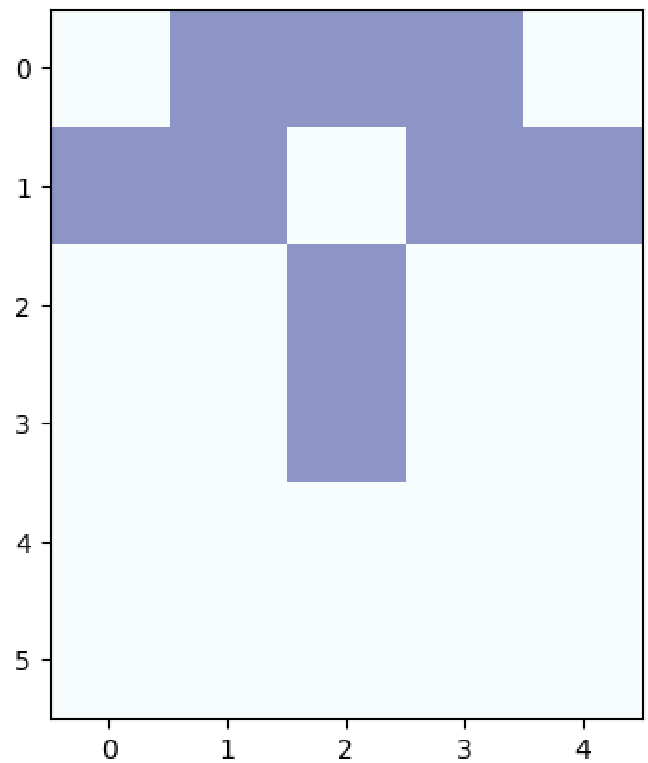

```
Jogada  1
```



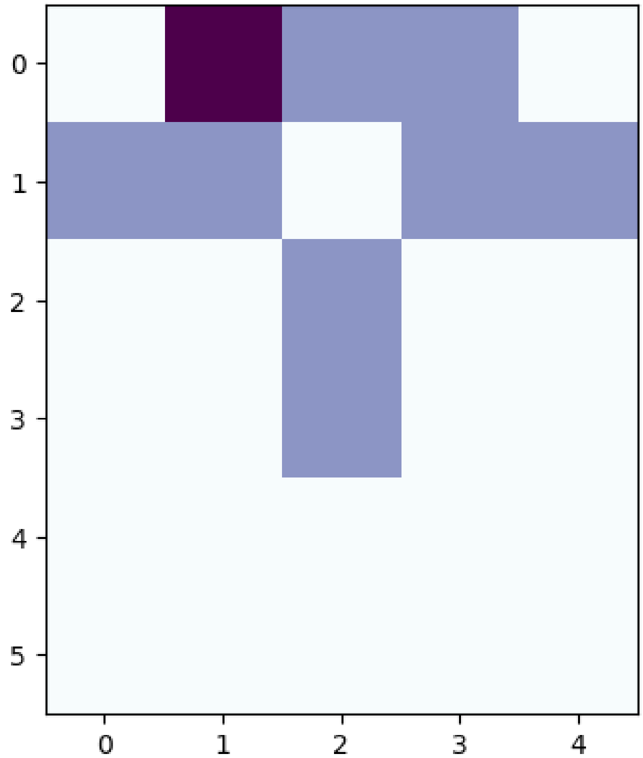
Jogada 2



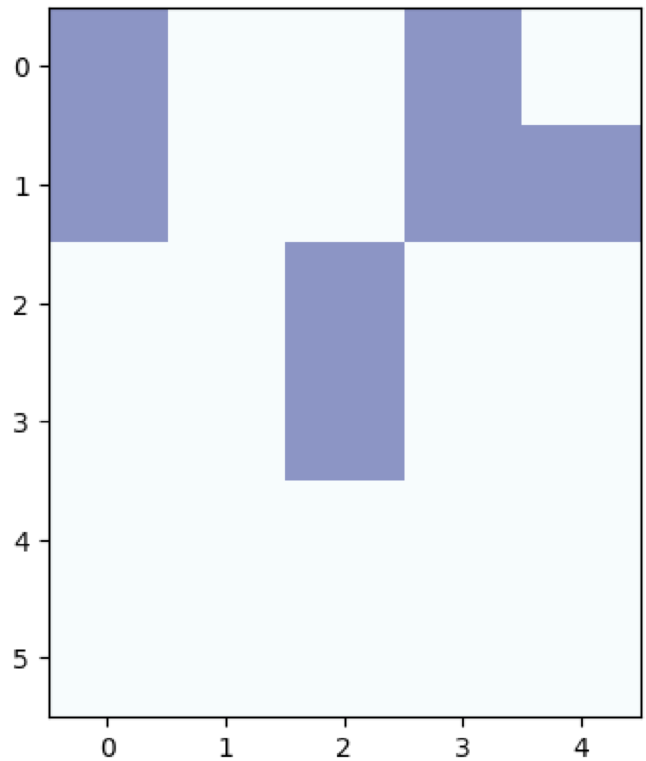
Jogada 2



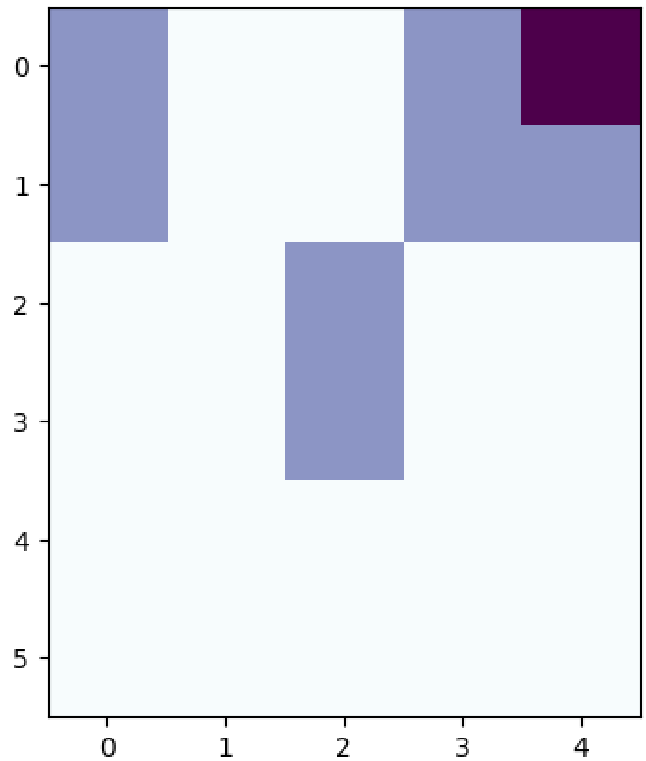

```
Jogada  3
```



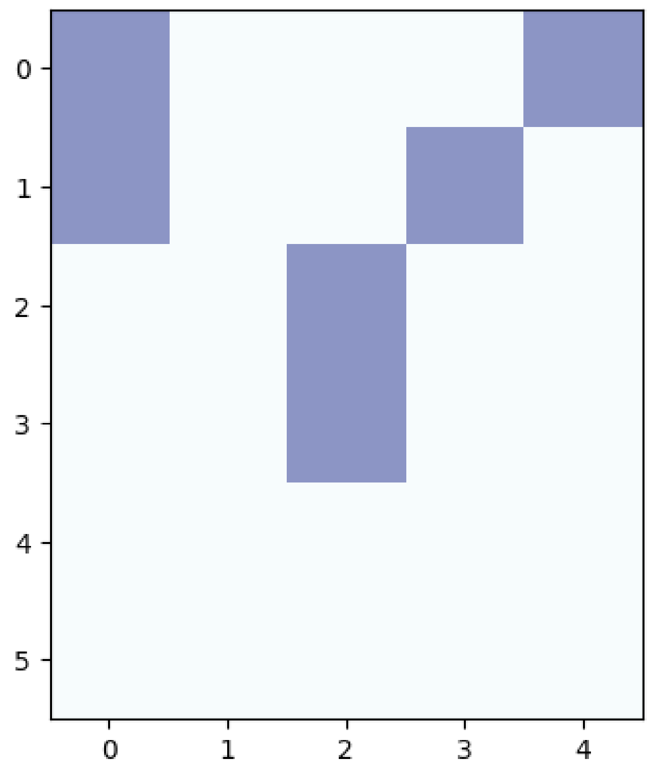
Jogada 3



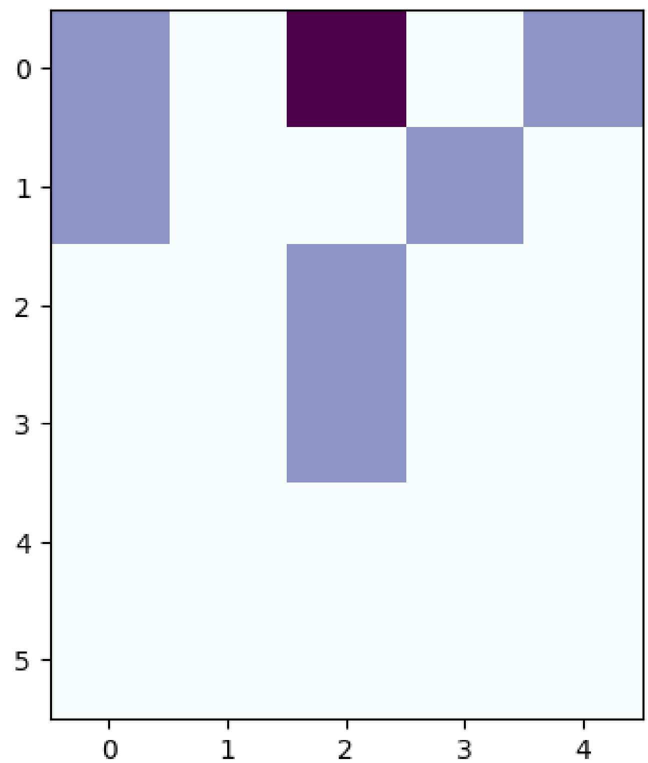
Jogada 4



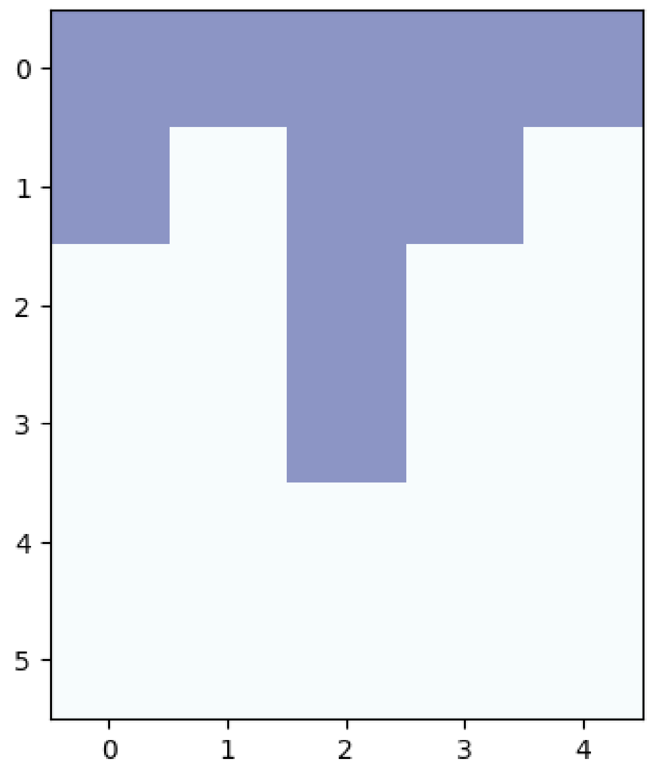
Jogada 4



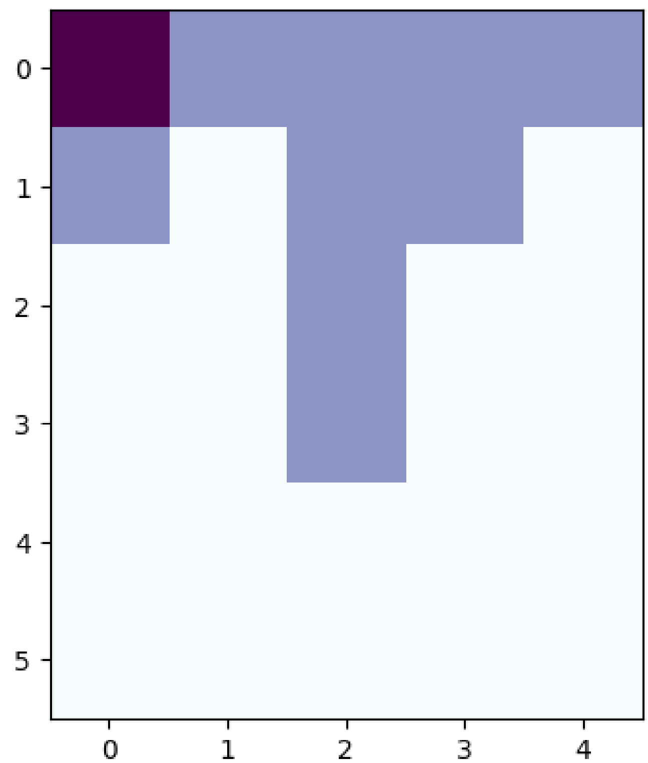
Jogada 5



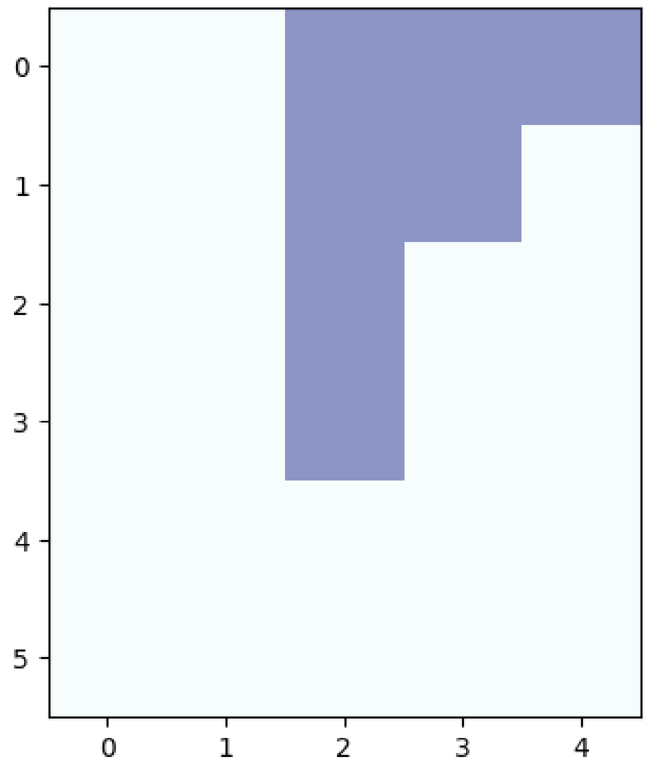

```
Jogada  5
```



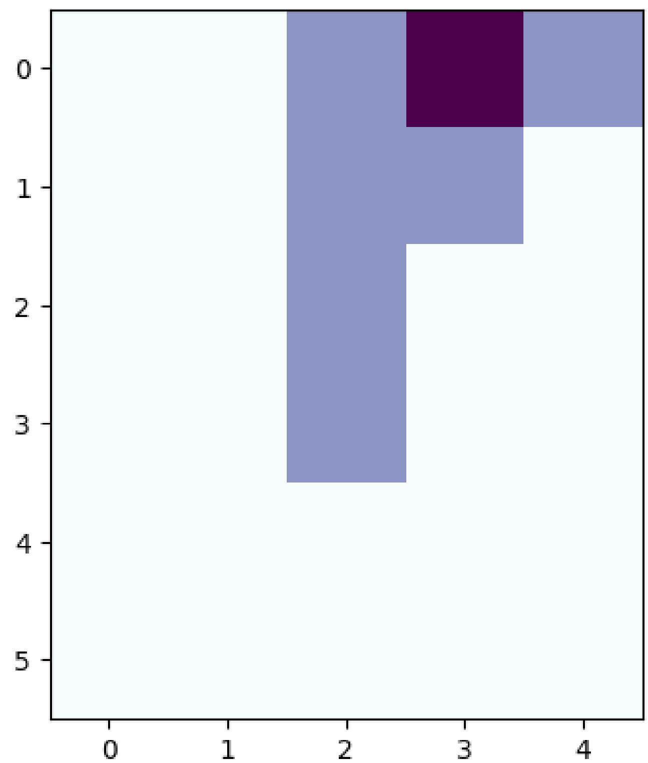
Jogada 6



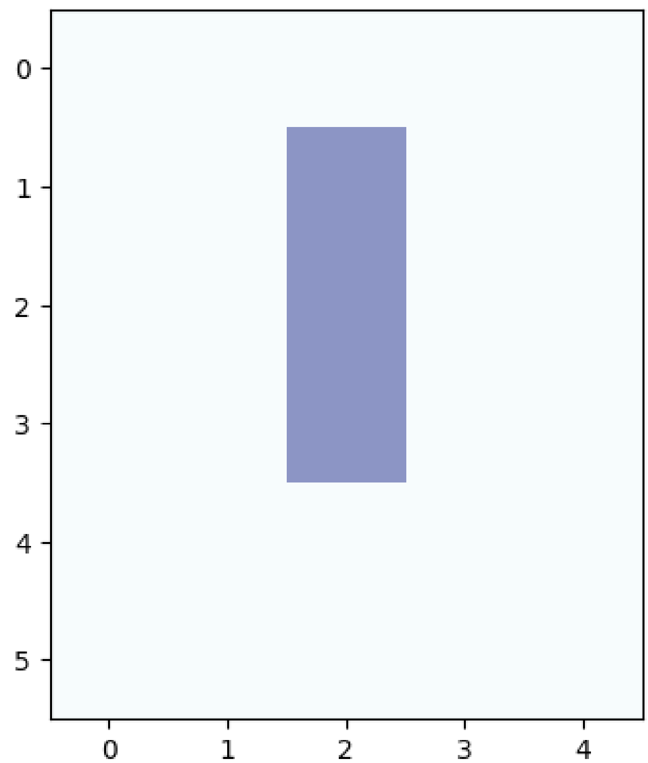

```
Jogada  6
```



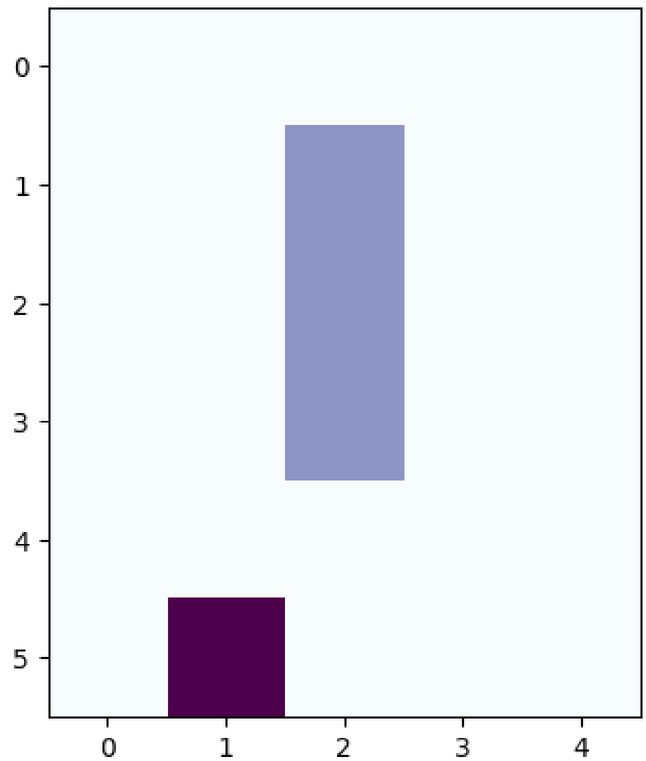
Jogada 7



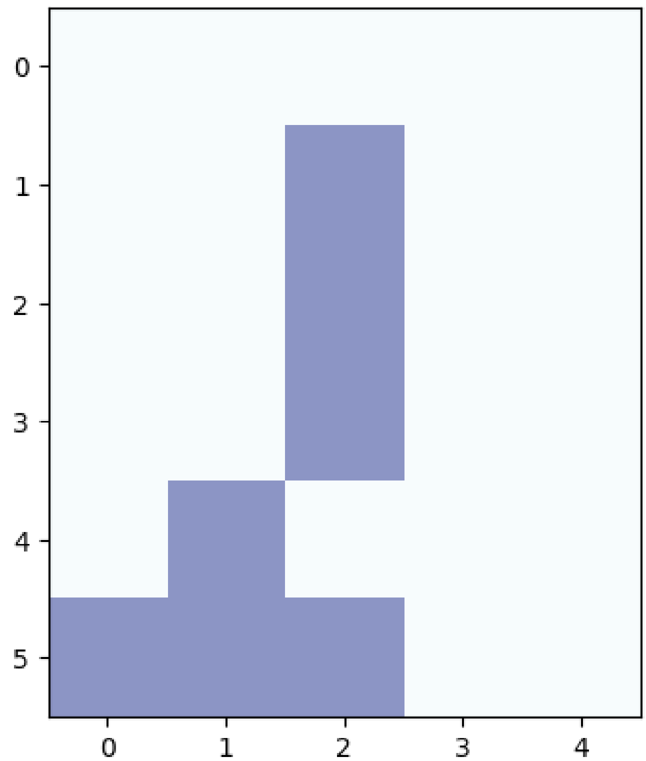
Jogada 7



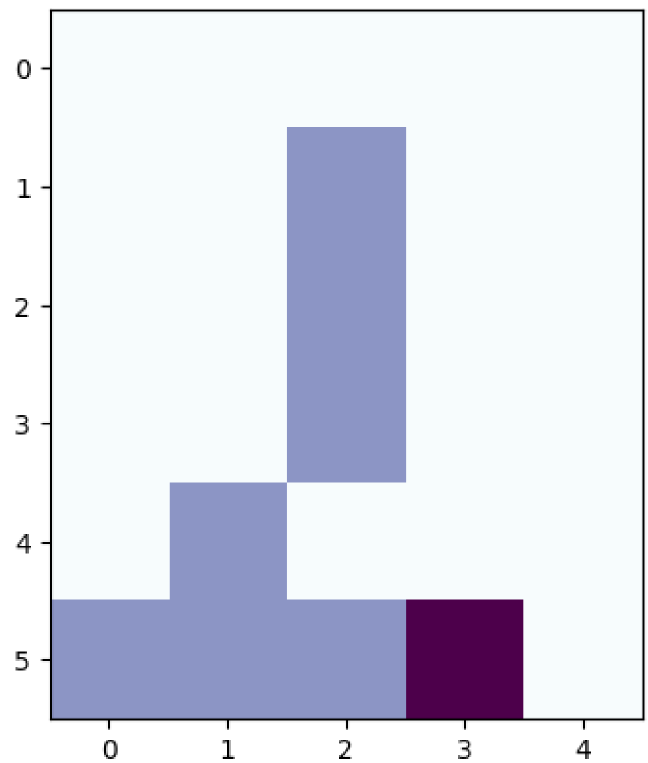
`Jogada  8`



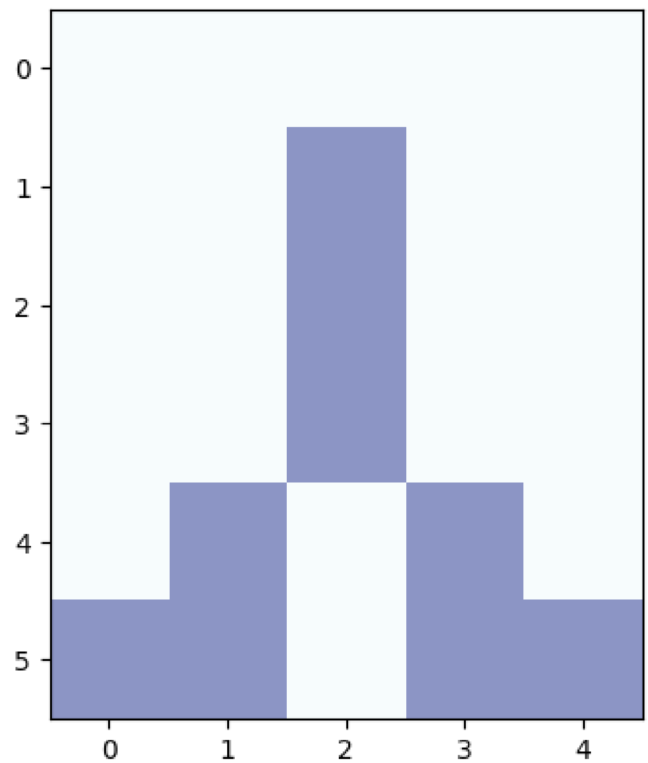
Jogada 8



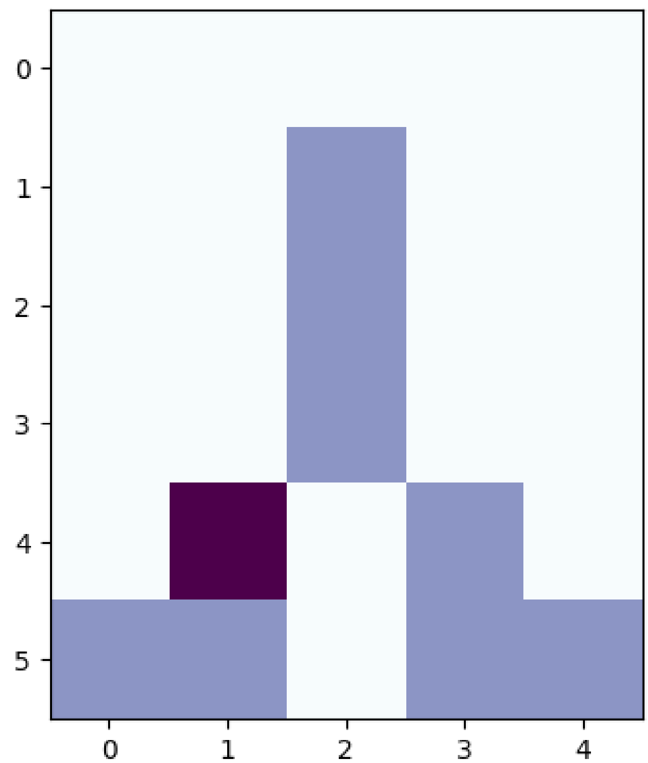
Jogada 9



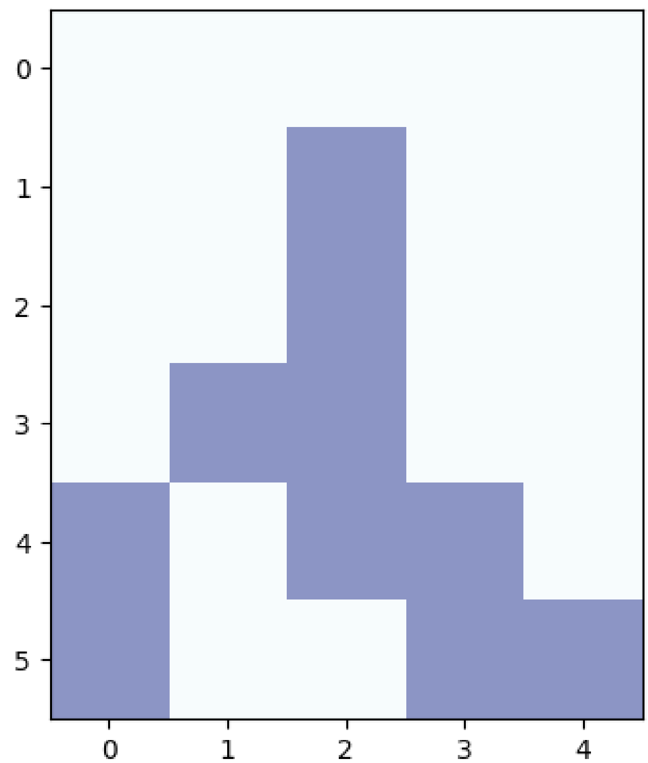
Jogada 9



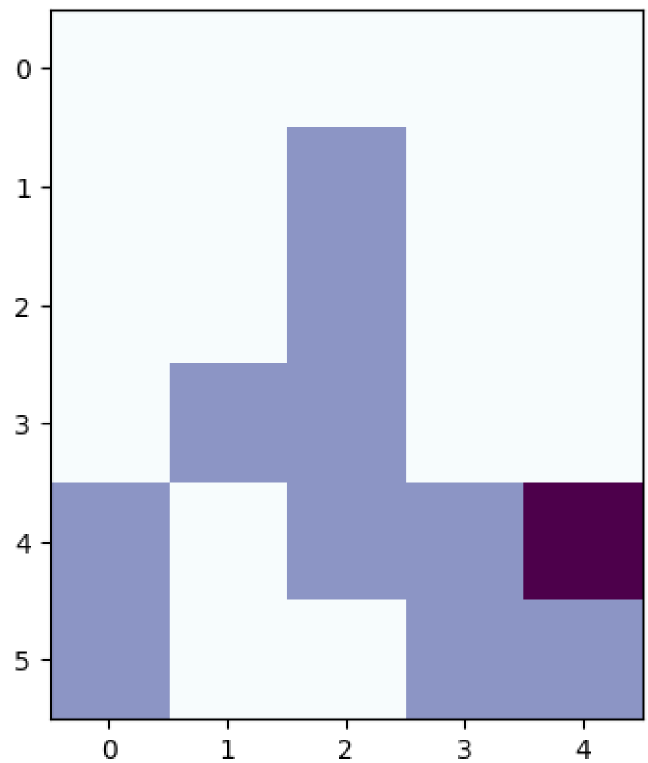
Jogada 10



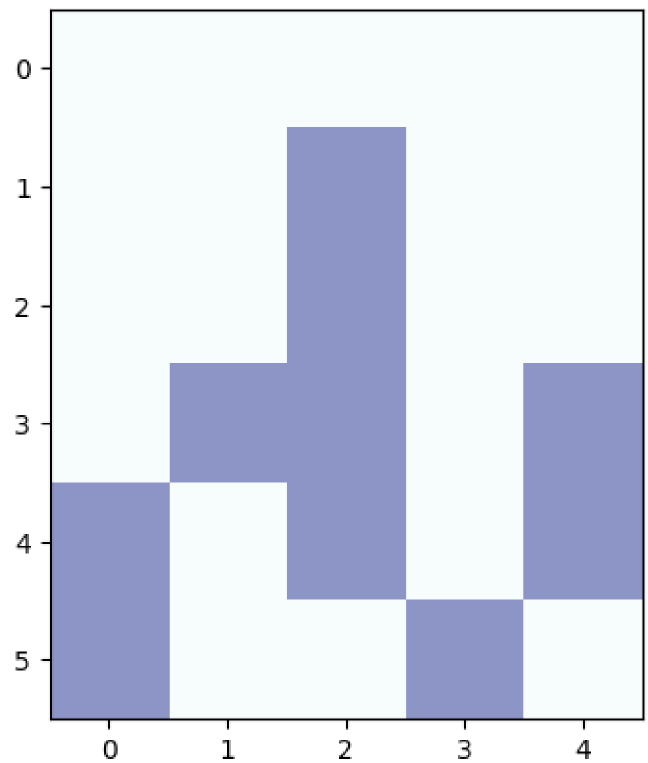

```
Jogada  10
```



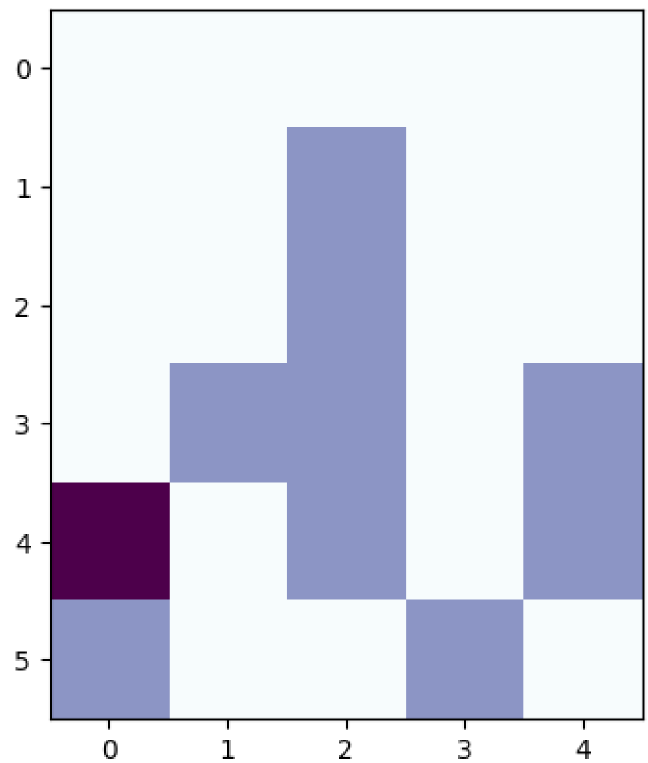
Jogada 11



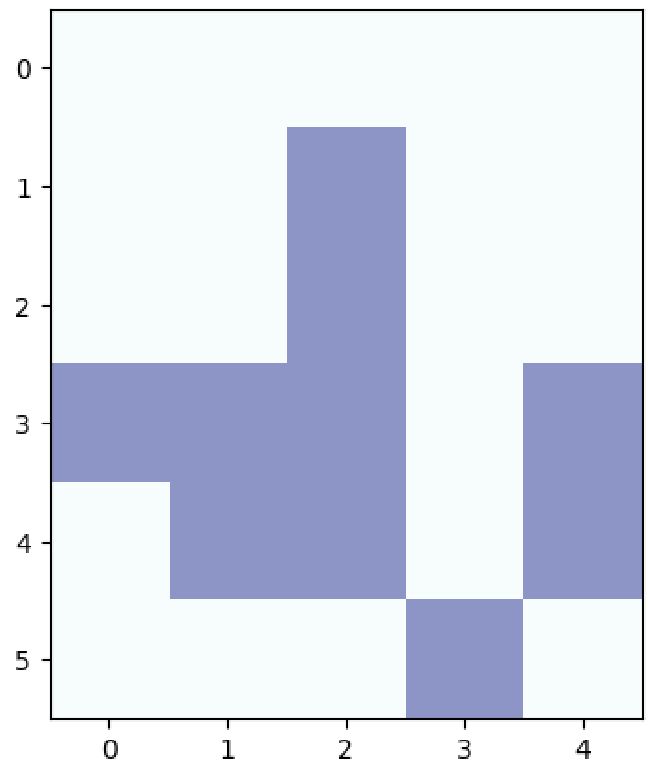
Jogada 11



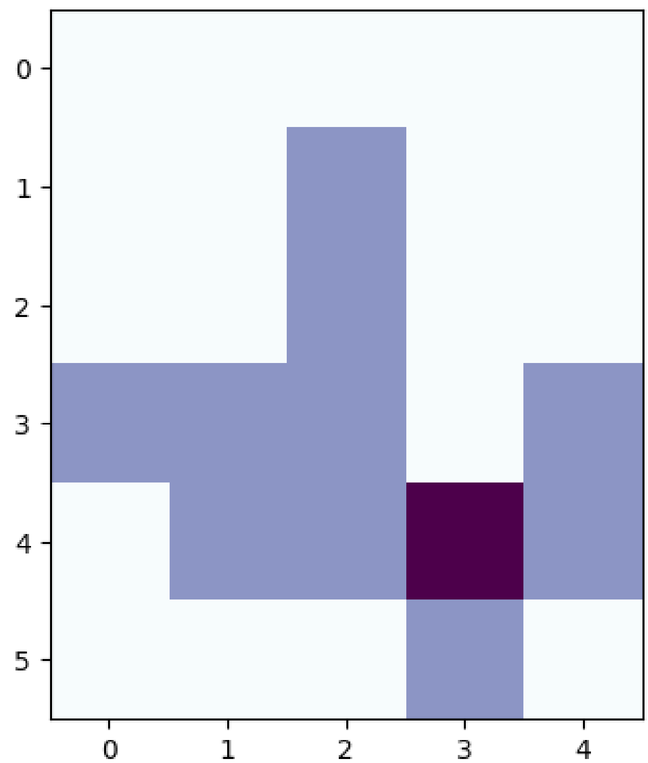
Jogada 12



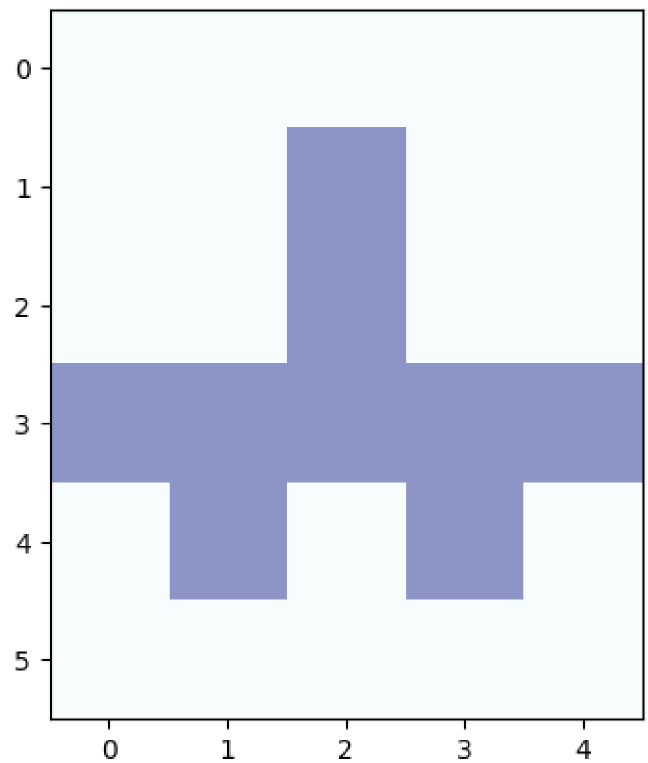
Jogada 12



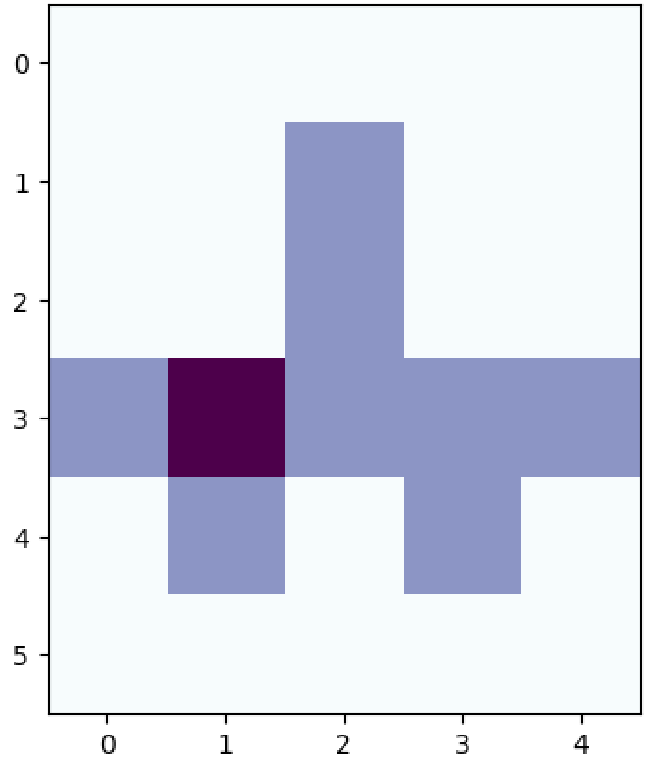
Jogada 13



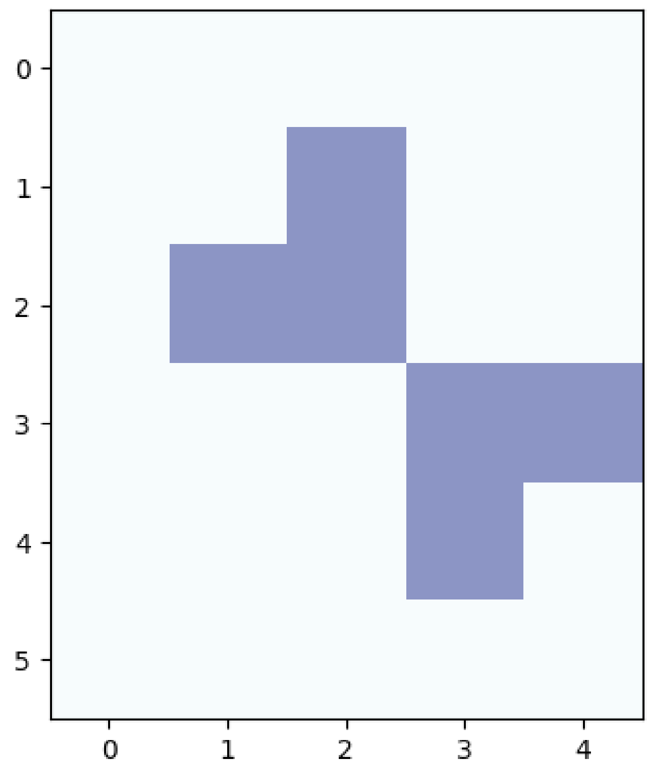
Jogada 13



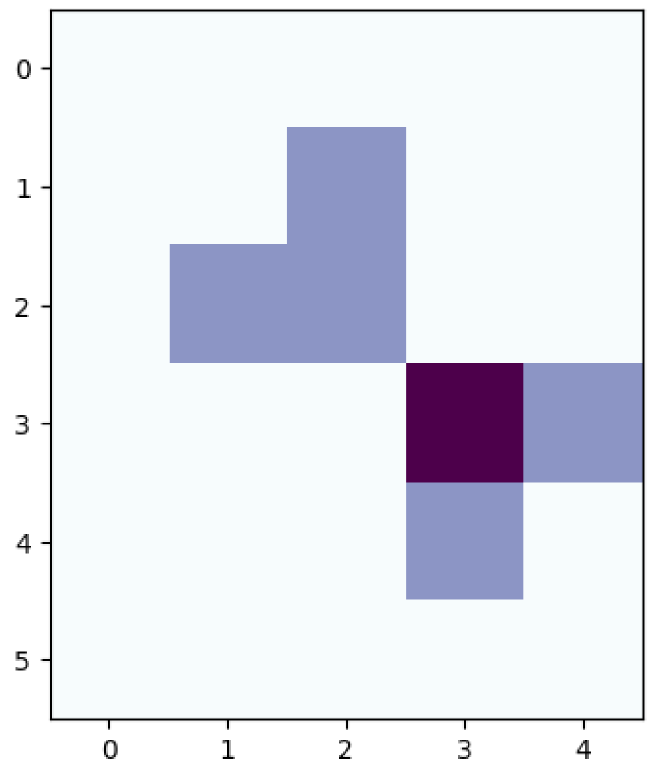
Jogada 14



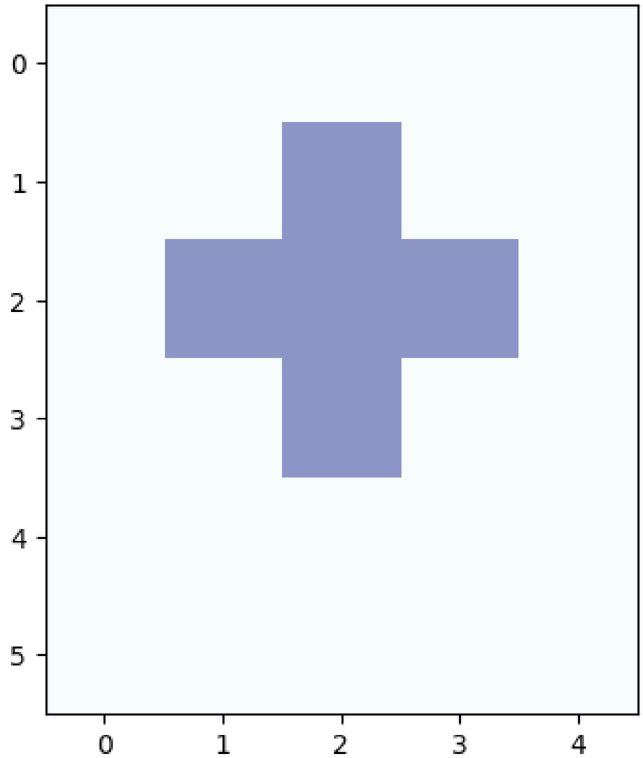

```
Jogada  14
```



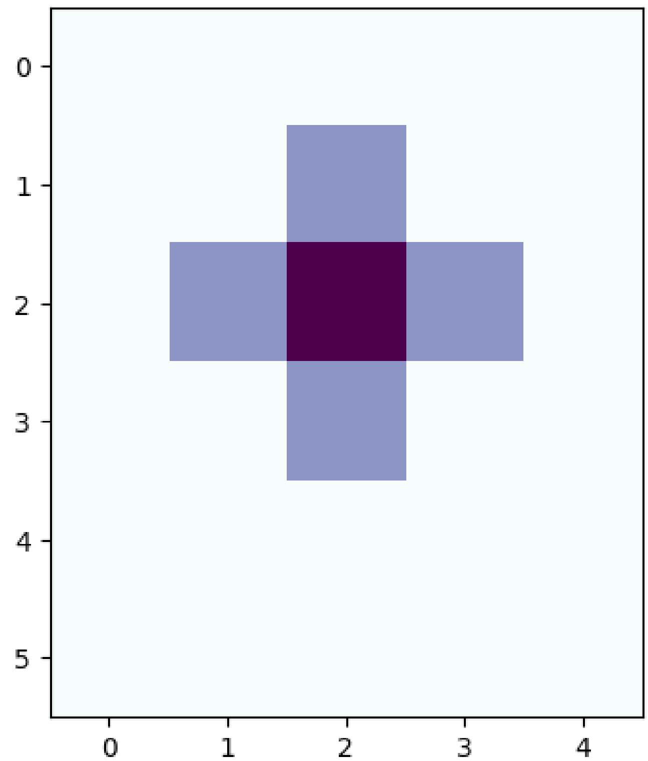
Jogada 15



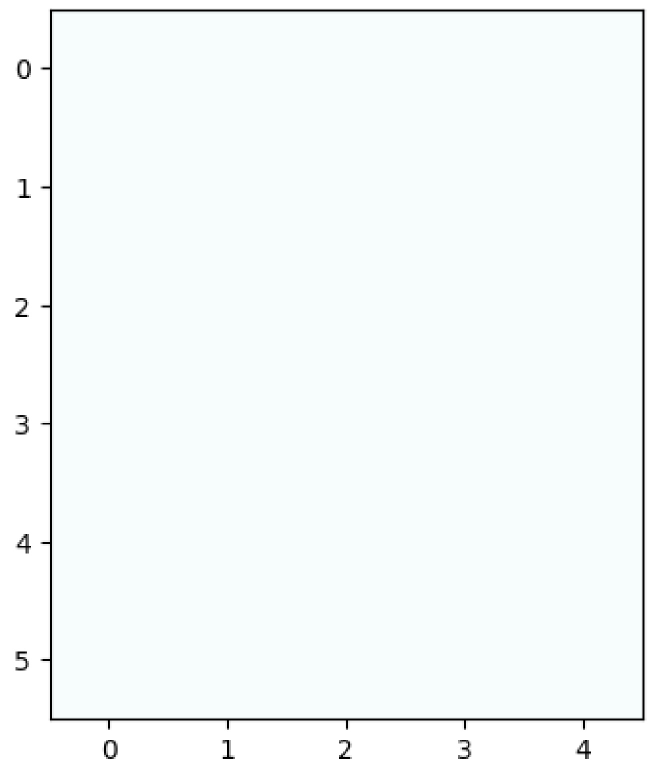
Jogada 15



Jogada 16



`Jogada  16`



Questao 2: Crie um programa baseado em otimização inteira que resolva (caso possível) qualquer instância de Sudoku. Seu programa deve receber uma matriz 9×9 de entrada, contendo as dicas iniciais do tabuleiro (e valor 0 para as posições vazias), e fornecer como saída esta matriz preenchida conforme as regras do Sudoku caso seja possível. Teste seu programa com alguns exemplos.

Resposta:

Eu modelei o problema do sudoku da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar:} \quad & 0 \\
\text{Sujeito a:} \quad & \\
& \sum_{k=0}^{8} x_{ijk} = 1, \ \forall i, j \in \{0, \dots, 8\} \quad \text{(Cada célula tem um número)} \\
& \sum_{j=0}^{8} x_{ijk} = 1, \ \forall i, k \in \{0, \dots, 8\} \quad \text{(Números únicos por linha)} \\
& \sum_{i=0}^{8} x_{ijk} = 1, \ \forall j, k \in \{0, \dots, 8\} \quad \text{(Números únicos por coluna)} \\
& \sum_{i=3b_r}^{3b_r+2} \sum_{j=3b_c}^{3b_c+2} x_{ijk} = 1, \forall k \in \{0, \dots, 8\}, b_r, b_c \in \{0, 1, 2\} \quad \text{(Números únicos por bloco)} \\
& x_{ij(p_{ij}-1)} = 1, \forall i, j : p_{ij} \neq 0 \quad \text{(Valores pré-definidos)} \\
& x_{ijk} \in \mathbb{B}, \quad \forall i, j, k \in \{0, \dots, 8\}
\end{aligned}
$$

[3]:
```
import numpy as np
import cvxpy as cp

def solve_sudoku(puzzle):
    # Cria as variáveis de decisão (9x9x9 binary cube)
    x = cp.Variable((9, 9, 9), boolean=True)

    # Define as restrições
    constraints = []

    # Cada célula precisa conter exatamente um número
    for i in range(9):
        for j in range(9):
            constraints.append(cp.sum(x[i, j, :]) == 1)

    # Cada número aparece exatamente uma vez em cada linha
    for k in range(9):
        for i in range(9):
            constraints.append(cp.sum(x[i, :, k]) == 1)

    # Cada número precisa aparecer exatamente uma vez em cada coluna
    for k in range(9):
        for j in range(9):
            constraints.append(cp.sum(x[:, j, k]) == 1)

    # Cada número aparece exatamente uma vez em cada bloco
    for k in range(9):
```

```
        for block_row in range(3):
            for block_col in range(3):
                constraints.append(
                    cp.sum(x[block_row*3:(block_row+1)*3,
                            block_col*3:(block_col+1)*3, k]) == 1
                )

    # Precisamos respeitar os valores já pré-estabelecidos
    for i in range(9):
        for j in range(9):
            if puzzle[i, j] != 0:
                k = puzzle[i, j] - 1  # Convertendo para índice 0-based
                constraints.append(x[i, j, k] == 1)

    objective = cp.Minimize(0)

    # Resolve o problema
    problem = cp.Problem(objective, constraints)
    problem.solve(solver=cp.SCIP)

    if problem.status == cp.OPTIMAL:
        # Converte a solução para uma matriz 9x9
        solution = np.zeros((9, 9), dtype=int)
        for i in range(9):
            for j in range(9):
                for k in range(9):
                    if np.isclose(x[i, j, k].value, 1.0):
                        solution[i, j] = k + 1  # muda de 1 a 9
        return solution
    else:
        return None

if __name__ == "__main__":
    puzzle = np.array([
        [9, 0, 2, 4, 1, 5, 0, 0, 0],
        [0, 0, 5, 0, 6, 0, 0, 0, 0],
        [3, 7, 0, 0, 0, 0, 0, 6, 1],
        [2, 1, 0, 3, 9, 6, 0, 0, 5],
        [4, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 2],
        [0, 0, 3, 0, 8, 0, 1, 9, 0],
        [6, 4, 9, 0, 3, 1, 0, 5, 7],
        [5, 0, 0, 6, 0, 0, 0, 0, 4],
        [8, 0, 7, 5, 0, 9, 0, 0, 0]
    ])

    print("Puzzle original:")
    print(puzzle)
```

```python
solution = solve_sudoku(puzzle)

if solution is not None:
    print("\nSolução encontrada:")
    print(solution)
else:
    print("\nNão foi encontrada solução para o puzzle.")
```

```
Puzzle original:
[[9 0 2 4 1 5 0 0 0]
 [0 0 5 0 6 0 0 0 0]
 [3 7 0 0 0 0 0 6 1]
 [2 1 0 3 9 6 0 0 5]
 [4 0 6 0 0 0 0 0 2]
 [0 0 3 0 8 0 1 9 0]
 [6 4 9 0 3 1 0 5 7]
 [5 0 0 6 0 0 0 0 4]
 [8 0 7 5 0 9 0 0 0]]

Solução encontrada:
[[9 6 2 4 1 5 3 7 8]
 [1 8 5 7 6 3 4 2 9]
 [3 7 4 9 2 8 5 6 1]
 [2 1 8 3 9 6 7 4 5]
 [4 9 6 1 5 7 8 3 2]
 [7 5 3 2 8 4 1 9 6]
 [6 4 9 8 3 1 2 5 7]
 [5 3 1 6 7 2 9 8 4]
 [8 2 7 5 4 9 6 1 3]]
```

Questão 3: (SENHA) Duas crianças brincam com o seguinte jogo: uma delas deve abrir um cadeado com uma senha de três dígitos distintos e a outra dá cinco dicas de senha suficientes para que o código seja descoberto, conforme ilus- trado na Figura 3. Tomando este exemplo como base, construa um modelo e um programa baseados em otimização inteira que resolva este problema. O que aconteceria se as dicas não forem suficientes? O que aconteceria se as dicas forem conflitantes? Crie um exemplo para cada caso e verifique como o seu programa se comporta.

Resposta:

Modelei o problema da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar:} \quad & 0 \\
\text{Sujeito a:} \quad & \\
& \sum_{j=0}^{9} x_{ij} = 1, \ \forall i \in \{0,1,2\} \quad \text{(Um dígito por posição)} \\
& \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} x_{i,t_{k,j}} = c_k, \ \forall k \in \{1,\dots,5\} \quad \text{(Dígitos corretos)} \\
& \sum_{i=0}^{2} x_{i,t_{k,i}} = p_k, \ \forall k \in \{1,\dots,5\} \quad \text{(Posições corretas)} \\
\text{Onde:} \quad & \\
& t_k = [t_{k,0}, t_{k,1}, t_{k,2}] \quad \text{(Dígitos da tentativa } k\text{)} \\
& (c_k, p_k) \quad \text{(Resposta da tentativa } k\text{)} \\
& x_{ij} = 1 \iff \text{dígito } j \text{ na posição } i \\
& x_{ij} \in \mathbb{B}, i \in \{0,1,2\}, j \in \{0,\dots,9\}
\end{aligned}
$$

A ideia aqui é que a cada tentativa vamos adicionando mais restrições, se eu tenho a dica de que existe um digito na posição correta, eu represento isso como "alguma(s) das variaveis que representam os $x_{i,j}$ daquela configuração esta correta", já no caso em que temos apenas os digitos corretos, somamos todas as possibilidades que podem estar corretas (a combinação das variáveis que representam aqueles digitos).

Para o caso em que as dicas não suficiente, ele ainda acaba encontrando algum resultado que satisfaça as equações, convergindo para algum solução possível. Já no cao em que as dicas são conflitantes, temos uma resposta "infeasible" do status do programa.

[33]:
```
import cvxpy as cp
import numpy as np

def resolver_cadeado(dicas):
    # Definindo o problema do cadeado
    digitos = 10  # dígitos de 0 a 9
    # Variáveis de decisão
    X = cp.Variable((3, digitos), boolean=True, name='x')  # X[i,j] = 1 se␣
 ↪dígito j está na posição i

    # Restrições
    constraints = []

    # Cada posição tem exatamente um dígito
    for i in range(3):
        constraints.append(cp.sum(X[i,:]) == 1)

    # Restrições das dicas
```

```python
    for tentativa, (corretos, pos_corretas) in dicas:
        # Dígitos corretos (em qualquer posição)
        corretos_any_pos = cp.sum([cp.sum(X[:,tentativa[i]]) for i in range(3)])
        constraints.append(corretos_any_pos == corretos)

        # Dígitos na posição correta
        corretos_pos = cp.sum([X[i,tentativa[i]] for i in range(3)])
        constraints.append(corretos_pos == pos_corretas)

    # Função objetivo (não há objetivo real, que nem na vida, queremos apenas␣
 ↪satisfazer as restrições)
    objective = cp.Minimize(0)
    #print([str(c) for c in constraints])
    # Resolver o problema
    problem = cp.Problem(objective, constraints)
    problem.solve(solver=cp.SCIP)

    print(f"Status da solução: {problem.status}")

    return problem, X
```

[34]:
```python
if __name__ == '__main__':
    senha = [1, 5, 3]  # senha verdadeira (exemplo)

    # Dicas fornecidas (cada dica é uma tentativa com [A,B,C] e resposta␣
 ↪(corretos, posição correta))
    dicas = [
        ([7, 9, 3], (1, 1)),
        ([7, 2, 5], (1, 0)),
        ([3, 1, 7], (2, 0)),
        ([8, 4, 9], (0, 0)),
        ([8, 9, 1], (1, 0))
    ]

    problem, X = resolver_cadeado(dicas)

    # Mostrar a solução
    if problem.status == 'optimal':
        solucao = [int(np.argmax(X[i].value)) for i in range(3)]
        print("Senha encontrada:", solucao)
    else:
        print("Não foi possível encontrar uma senha que satisfaça todas as␣
 ↪dicas.")
```

```
Status da solução: optimal
Senha encontrada: [1, 5, 3]
```

[35]:
```python
"""
   Exemplo em que as dicas são insuficientes
"""
if __name__ == '__main__':
    dicas = [
        ([7, 9, 3], (1, 1)),
    ]

    problem, X = resolver_cadeado(dicas)

    # Mostrar a solução
    if problem.status == 'optimal':
        solucao = [int(np.argmax(X[i].value)) for i in range(3)]
        print("Senha encontrada:", solucao)
    else:
        print("Não foi possível encontrar uma senha que satisfaça todas as␣
 ↪dicas.")
```

```
Status da solução: optimal
Senha encontrada: [0, 0, 3]
```

[36]:
```python
"""
   Exemplo em que as dicas são contraditórias
"""
if __name__ == '__main__':
    dicas = [
        ([7, 9, 3], (3, 3)),
        ([5, 6, 7], (3, 3)),
    ]

    problem, X = resolver_cadeado(dicas)

    # Mostrar a solução
    if problem.status == 'optimal':
        solucao = [int(np.argmax(X[i].value)) for i in range(3)]
        print("Senha encontrada:", solucao)
    else:
        print("Não foi possível encontrar uma senha que satisfaça todas as␣
 ↪dicas.")
```

```
Status da solução: infeasible
Não foi possível encontrar uma senha que satisfaça todas as dicas.
```

Questão 4: (Oito Rainhas) Construa um programa baseado em otimização interia que resolva, se possível, qualquer instância desse problema. Seu programa deve receber, como entrada, uma matriz 8x8 com elementos unitários ou nulos. Entradas iguais a 1 indicam posições previamente definidas de rainhas no tabuleiro; entradas nulas indicam posições livres. A saída do seu programa deve ser uma matriz 8x8 com valor 1 nas posições em que as rainhas foram colocadas, respeitando as condições do problema. Caso não exista solução viável, seu programa deve indicar isso. Teste seu programa com alguns exemplos. Crie exemplos em que não há solução viável e verifique o resultado do seu programa.

Resposta:

O problema das oito rainhas pode ser resolvido com a seguinte modelagem:

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar:} \quad & 0 \\
\text{Sujeito a:} \quad & \\
& x_{ij} = 1, \forall (i,j) \in P \quad \text{(Rainhas pré-definidas)} \\
& x_{ij} \leq 1, \forall (i,j) \notin P \\
& \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} x_{ij} = 8 \quad \text{(Total de rainhas)} \\
& \sum_{j=0}^{7} x_{ij} \leq 1, \ \forall i \in \{0, \ldots, 7\} \quad \text{(Restrição de linha)} \\
& \sum_{i=0}^{7} x_{ij} \leq 1, \ \forall j \in \{0, \ldots, 7\} \quad \text{(Restrição de coluna)} \\
& \sum_{(i,j) \in D_k} x_{ij} \leq 1, \ \forall k \in \{-7, \ldots, 7\} \quad \text{(Diagonais principais)} \\
& \sum_{(i,j) \in S_k} x_{ij} \leq 1, \ \forall k \in \{0, \ldots, 14\} \quad \text{(Diagonais secundárias)} \\
\text{Onde:} \quad & \\
& P = \{(i,j) \mid \text{predefined\_board}[i,j] = 1\} \quad \text{(Posições fixas)} \\
& D_k = \{(i,j) \mid j = i + k, \ 0 \leq i,j \leq 7\} \quad \text{(Diagonais principais)} \\
& S_k = \{(i,j) \mid j = k - i + 7, \ 0 \leq i,j \leq 7\} \quad \text{(Diagonais secundárias)} \\
& x_{ij} \in \mathcal{B}, \quad i,j \in \{0, \ldots, 7\}
\end{aligned}
$$

[41]:
```
import cvxpy as cp
import numpy as np

def solve_queens_puzzle(predefined_board):
    # Variável de decisão: matriz 8x8 binária (rainhas adicionais)
    queens = cp.Variable((8, 8), boolean=True)

    # Restrições
    constraints = []

    # Respeitamos as rainhas pré-definidas
    for i in range(8):
        for j in range(8):
```

```
            if predefined_board[i, j] == 1:
                constraints.append(queens[i, j] == 1)
            else:
                constraints.append(queens[i, j] <= 1)  # Pode ser 0 ou 1

    # temos que ter exatamente 8 rainhas no total
    constraints.append(cp.sum(queens) == 8)

    # e no máximo uma rainha por linha
    for i in range(8):
        constraints.append(cp.sum(queens[i, :]) <= 1)

    # assim como no máximo uma rainha por coluna
    for j in range(8):
        constraints.append(cp.sum(queens[:, j]) <= 1)

    # No máximo uma rainha por diagonal
    for k in range(-7, 8):
        # Diagonal principal
        diag_main = []
        for i in range(8):
            j = i + k
            if 0 <= j < 8:
                diag_main.append(queens[i, j])
        if diag_main:
            constraints.append(cp.sum(diag_main) <= 1)

        # Diagonal secundária
        diag_sec = []
        for i in range(8):
            j = k - i + 7
            if 0 <= j < 8:
                diag_sec.append(queens[i, j])
        if diag_sec:
            constraints.append(cp.sum(diag_sec) <= 1)

    # funcao objetivo dummy
    problem = cp.Problem(cp.Minimize(0), constraints)
    problem.solve(solver=cp.SCIP)

    if problem.status == cp.OPTIMAL:
        solution = np.round(queens.value).astype(int)
        return solution
    else:
        print("Não existe solução para o tabuleiro fornecido.")
        return None
```

```
def print_board(board):
    """Imprime o tabuleiro de forma visual."""
    for row in board:
        print(" ".join("Q" if cell == 1 else "." for cell in row))
```

[42]:
```
def check_solution_validity(solution, example_board):
    if solution is not None:
        print("\nSolução encontrada:")
        print_board(solution)

        # Verificação
        print("\nVerificando a solução...")
        valid = True

        # Verifica total de rainhas
        if np.sum(solution) != 8:
            print(f"Erro: Número incorreto de rainhas ({np.sum(solution)})")
            valid = False

        # Verifica rainhas pré-definidas
        for i in range(8):
            for j in range(8):
                if example_board[i,j] == 1 and solution[i,j] != 1:
                    print(f"Erro: Rainha fixa em ({i},{j}) foi removida")
                    valid = False

        # Verifica linhas, colunas e diagonais
        for i in range(8):
            if np.sum(solution[i,:]) > 1:
                print(f"Erro: Múltiplas rainhas na linha {i}")
                valid = False

        for j in range(8):
            if np.sum(solution[:,j]) > 1:
                print(f"Erro: Múltiplas rainhas na coluna {j}")
                valid = False

        for k in range(-7, 8):
            # Diagonal principal
            diag_main = []
            for i in range(8):
                j = i + k
                if 0 <= j < 8:
                    diag_main.append(solution[i,j])
            if sum(diag_main) > 1:
                print(f"Erro: Múltiplas rainhas na diagonal principal com␣
↪k={k}")
```

```
                valid = False

            # Diagonal secundária
            diag_sec = []
            for i in range(8):
                j = k - i + 7
                if 0 <= j < 8:
                    diag_sec.append(solution[i,j])
            if sum(diag_sec) > 1:
                print(f"Erro: Múltiplas rainhas na diagonal secundária com␣
↪k={k}")
                valid = False

        if valid:
            print("A solução é válida!")
    else:
        print("Não foi encontrada solução para o tabuleiro fornecido.")
```

[43]:
```
if __name__ == "__main__":
    # Exemplo de tabuleiro com rainhas pré-definidas
    example_board = np.array([
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],  # Rainha fixa no centro
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    ])

    print("Tabuleiro inicial (Q = rainha fixa):")
    print_board(np.where(example_board == 1, 1, 0))

    solution = solve_queens_puzzle(example_board)

    check_solution_validity(solution, example_board)
```

```
Tabuleiro inicial (Q = rainha fixa):
. . . . . . . .
. . . . . . . .
. . . . . . . .
. . . Q . . . .
. . . . . . . .
. . . . . . . .
```

```
. . . . . . . .
. . . . . . . .

Solução encontrada:
. Q . . . . . .
. . . . Q . . .
. . . . . . Q .
. . . Q . . . .
Q . . . . . . .
. . . . . . . Q
. . . . . Q . .
. . Q . . . . .

Verificando a solução…
A solução é válida!
```

[44]:
```
if __name__ == "__main__":
    # Exemplo de tabuleiro com rainhas pré-definidas
    example_board = np.array([
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],  # Rainha fixa no centro
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    ])

    print("Tabuleiro inicial (Q = rainha fixa):")
    print_board(np.where(example_board == 1, 1, 0))

    solution = solve_queens_puzzle(example_board)

    check_solution_validity(solution, example_board)
```

```
Tabuleiro inicial (Q = rainha fixa):
. . . . . . . .
. . . . . . Q .
. . . . . . . .
. . . Q . . . .
. . . . . . . .
. . . . . . . .
. . . . . Q . .
. . . . . . . .

Solução encontrada:
. . . . Q . . .
```

```
. . . . . . Q .
Q . . . . . . .
. . . Q . . . .
. Q . . . . . .
. . . . . . . Q
. . . . . Q . .
. . Q . . . . .

Verificando a solução…
A solução é válida!
```

[46]:

```python
"""
    Exemplo inconsistente
"""

if __name__ == "__main__":
    # Exemplo de tabuleiro com rainhas pré-definidas
    example_board = np.array([
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0],  # Rainha fixa no centro
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0],
        [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
    ])

    print("Tabuleiro inicial (Q = rainha fixa):")
    print_board(np.where(example_board == 1, 1, 0))

    solution = solve_queens_puzzle(example_board)

    check_solution_validity(solution, example_board)
```

```
Tabuleiro inicial (Q = rainha fixa):
. . . . . . . .
. . . . . . Q .
. . . . . . . .
. . . Q Q . . .
. . . . . . . .
. . . . . . . .
. . . . . Q . .
. . . . . . . .
Não existe solução para o tabuleiro fornecido.
Não foi encontrada solução para o tabuleiro fornecido.
```