__/__/__

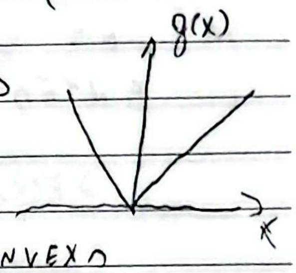
S T Q Q S S D

ALUNO: PEDRO TRINDADE

LISTA OTIMIZAÇÃO INTEIRA

SERÁ QUE PRECISAVA PROVAR?

EXERCÍCIO 1)



a) NOTE QUE $g(x) = |x|$ É CONVEXO ENTÃO $g(x-a_i)$ É CONVEXA (POIS É SÓ UM DESLOCAMENTO DO GRÁFICO)

E TAMBÉM $F(x) = \sum_{i=1} |x-a_i|$ É CONVEXO POIS É SOMATÓRIO (FINITO) DE FUNÇÕES CONVEXAS.

MINIMIZAR FUNÇÃO CONVEXA IRRESTRITA É UMA QUESTÃO DE ENCONTRAR UM PONTO CRÍTICO (QUE POR CONVEXICIDADE SERÁ ÚNICO E MINIMIZADOR GLOBAL)

TEMOS O PROBLEMA QUE $F(x)$ NÃO É DIFERENCIÁVEL EM TODO O DOMÍNIO, ENTÃO NÃO CONSEGUIMOS DIFERENCIAR E IGUALAR À ZERO. PORÉM CONSEGUIMOS APROVEITAR A IDEIA SE USARMOS O CONCEITO DE SUBDERIVADA, QUE É UM SUBESTIMADOR GLOBAL DA FUNÇÃO, QUE ASSOCIA A PONTOS NÃO-DIFERENCIÁVEIS UMA FAIXA/CONJUNTO DE VALORES AO INVÉS DE UM ÚNICO.

DADO UMA FUNÇÃO CONVEXA, SE $\partial F(x)$ É A SUBDERIVADA E EM UM PONTO x^* TEMOS $0 \in \partial F(x^*)$ ENTÃO x^* É MÍNIMO GLOBAL.

(EU SOU MEIO METÓDICO, NÉ? PODERIA SÓ DERIVAR E IGUALAR A ZERO LOGO)

ENTÃO TEMOS QUE $\partial g(x-a_i) = \begin{cases} 1, & x > a_i \\ [-1, 1], & x = a_i \\ -1, & x < a_i \end{cases}$

$= \text{SIGN}(x - a_i)$

S T Q Q S S D

___/___/___

ASSIM, $\partial F(x) = \sum_{i=1}^{n} \text{SIGN}(x - a_i)$

NOTE QUE SE n FOR ÍMPAR, O RESULTADO VAI SER A MEDIANA DOS a_is

SE $n = 2k + 1$

ENTÃO PODEMOS FAZER O SEGUINTE:

$$\partial F(x) = \sum_{i=1}^{k} \text{SIGN}(x - a_i) + \text{SIGN}(x - a_{k+1}) + \sum_{i=k+2}^{2k+1} \text{SIGN}(x - a_i)$$

SE $x < a_{k+1}$ ENTÃO $0 \notin \partial F(x)$ ASSIM COMO SE $x > a_{k+1}$, NO CASO

$x = a_{k+1}$ $\partial F(a_{k+1}) = -k + [-1, 1] + k = [-1, 1]$

↳ SE $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

ENTÃO $0 \in \partial F(a_{k+1})$

NO CASO EM QUE n É PAR QUALQUER VALOR $x \in [a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}]$ É ÓTIMO.

(ESTOU COM PREGUIÇA DE DEMONSTRAR OS CASOS DE BORDA DA IGUALDADE NÃO ESTRITA NA ORDEM DOS is, MAS TAMBÉM FUNCIONA.

spiral

S T Q Q S S D

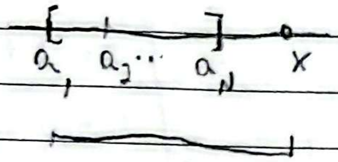
__/__/__

b) A SOLUÇÃO SERÁ O PONTO MÉDIO

$$x^* = \frac{a_1 + a_N}{2}$$

POR QUE ?

DADO 1 VALOR X EM ESPECÍFICO, O VALOR MAIS DISTANTE DELE DOS a_i'S SEMPRE ESTARÁ NAS EXTREMIDADES (a_1 OU a_N)



$$\max_i \{|x-a_i|\} = |x-a_1|$$

SENDO ASSIM, DADO A OPÇÃO DE ESCOLHER O X PARA MINIMIZAR A SOLUÇÃO

ESCOLHEMOS X QUE EQUALIZE ESSE DOIS EXTREMOS ISTO É:

$$|x-a_1| = |x-a_N|$$

QUE NOS DÁ $x^* = \frac{a_1 + a_N}{2}$

E O RESULTADO

$$\min_x \max_i \{|x-a_i|\} = \frac{a_N - a_1}{2} \quad //$$

c) AQUI PODEMOS USAR DERIVAÇÃO NORMAL.

$$F(x) = \sum_{i=1}^{N} (x-a_i)^2 \ , \quad F'(x) = 2\sum_{i=1}^{N} (x-a_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} x = N.x = \sum_{i=1}^{N} a_i \Leftrightarrow x^* = \sum_{i=1}^{N} a_i$$

QUE É A MÉDIA.

EXERCÍCIO 02)

TOME

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad \vec{b} = [1\ 3\ 6\ 10]^T$$

ENTÃO

$$A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

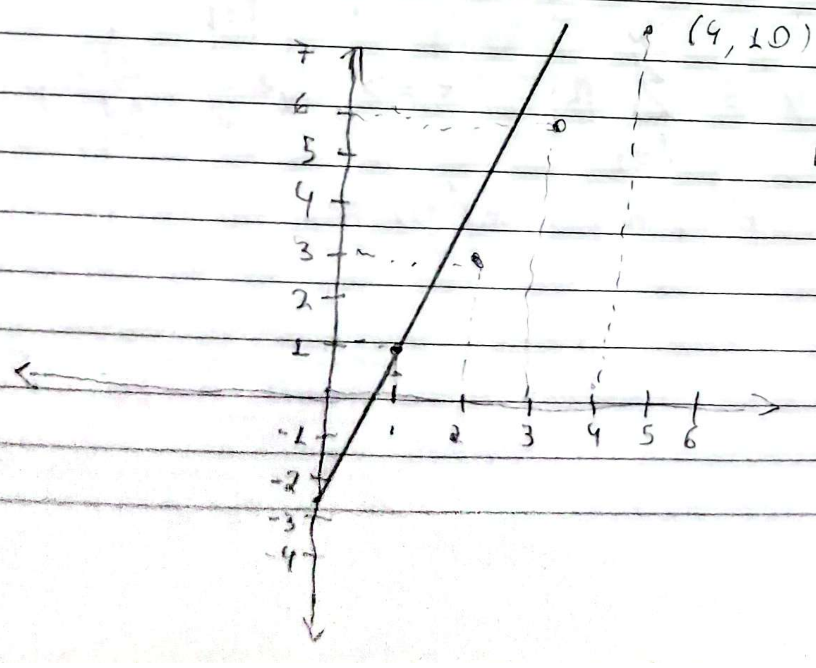
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1+3+6+10 \\ 1+6+18+40 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 20 \\ 65 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 30 & -10 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{20} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 65 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} -2,5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

REPRESENTAR GRAFICAMENTE:



EU DESENHO MUITO MAL :(

EXERCÍCIO 3) SABEMOS (PELA TEORIA) QUE $x^* = (A^TA)^{-1}A^Tb$.

PEGUE QUE

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{E}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(A^TA)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$ ENTÃO

$$x^* = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

SEJA $r^* = b - Ax^*$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle A_1, r^* \rangle &= [1\ 0\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = 0 \\ \langle A_2, r^* \rangle &= [0\ 1\ 1] \cdot \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}\right\}$$ ENTÃO ORTOGONAL ÀS COLUNAS DE A.

SE $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, ENTÃO $A^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

E $x^* = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ E $r^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

NESTE CASO, TEMOS QUE É POSSÍVEL ALCANÇAR EXATAMENTE b COM AS COLUNAS DE A, ISTO É

$$A \cdot x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \vec{b}$$

ISSO EM ALGUM NÍVEL CODIFICA A DISTÂNCIA DA SOLUÇ ATÉ b.

__/__/__ S T Q Q S S D

EXERCÍCIO 4)

PODEMOS REPRESENTAR ESTE PROBLEMA COMO:

$$\min F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\text{SUJEITO A } x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4 = 0$$

USANDO MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, TEMOS

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$$

RESOLVENDO O SISTEMA LINEAR, TEMOS $x^* = [4/9 \quad 8/9 \quad 8/9]^T$ //

EXERCÍCIO 5)

a) POR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, TEMOS:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda \nabla g(x)$$

$$2x_1 + x_2 = 2 \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

RESOLVENDO O SISTEMA LINEAR TEMOS $x^* = [4/5 \quad 2/5]^T$

b) NESTE CASO (IRRESTRITO) PODEMOS USAR O GRADIENTE E IGUALAR A ZERO

$$\nabla F(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2p(2 - 2x_1 - x_2).(-2) \\ 2x_2 + 2.p(2 - 2x_1 - x_2).(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{aligned} (2 + 8p)x_1 + 4p\,x_2 &= 8p \\ 4p\,x_1 + (2 + 2p)x_2 &= 4p \end{aligned} \iff \begin{bmatrix} \frac{1}{4p} + 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$$

$$x^*(p) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4p} + 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EXERCÍCIO 4) CONTINUAÇÃO

c)

$$X^*(P) = \begin{bmatrix} 1/_{4P} + 1 & 1/_2 \\ 1 & 1/_{2P} + 1/_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A

$$\det(A) = -\cancel{1/_2} + \frac{1}{8P^2} + \frac{1}{8P} + \frac{1}{2P} + \cancel{1/_2}$$

$$= \frac{1}{P}\left(\frac{1}{8P} + \frac{4}{8}\right)$$

$$\frac{1}{\det(A)} = \frac{8P^2}{4P+1} \qquad A^{-1} = \frac{P^2}{4P+1}\begin{bmatrix} 1/_{2P} + 1/_2 & -1/_2 \\ -1 & 1/_{4P} + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{P}{4P+1}\begin{bmatrix} P/_2 + 1/_2 & -P/_2 \\ -P & P + 1/_4 \end{bmatrix}$$

SE $P \to 0^+$ ENTÃO $A^{-1}(P) \to 0$

ENTÃO $X^* \to 0$

SE $P \to \infty$ ENTÃO

/ /

PROBLEMA 1)

SEJA $A = \begin{bmatrix} 1 & T_1 \\ \vdots & \\ 1 & T_N \end{bmatrix}$ E $b = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_N]^T$

NOSSO OBJETIVO É $\min \| A\vec{x} - b \|$,
TEMOS POR SOLUÇÕES PRÉVIAS QUE $x^* = (A^TA)^{-1}A^T$

NOTE QUE $A^TA = \begin{bmatrix} N & \sum_i T^i \\ \sum_i T^i & \sum_i (T^i)^2 \end{bmatrix}$ E $A^Tb = \begin{bmatrix} \sum_i y^i \\ \sum_i T^i y^i \end{bmatrix}$

SABENDO QUE $\det(A^TA) = N \sum_i (T^i)^2 - (\sum_i T^i)^2$

TEMOS QUE $(A^TA)^{-1} = \dfrac{1}{N \sum_i (T^i)^2 - (\sum_i T^i)^2} \begin{bmatrix} \sum_i (T^i)^2 & -\sum_i T^i \\ -\sum_i T^i & N \end{bmatrix}$

ASSIM

$$x^* = (A^TA)^{-1}A^Tb = \frac{1}{N \sum_i (T^i)^2 - (\sum_i T^i)^2} \begin{bmatrix} \sum_i (T^i)^2 \sum_i y^i - \sum_i T^i \sum_i T^i y^i \\ N \sum_i T^i y^i - \sum_i y^i \sum_i T^i \end{bmatrix}$$

COMO QUERÍAMOS DEMONSTRAR.

PROBLEMA 2)

A IDEIA É A SEGUINTE, COMO A^TA NÃO TEM POSTO COMPLETO, A SOLUÇÃO DA RESTRIÇÃO NÃO É ÚNICA, PORÉM PODEMOS PARAMETRIZAR ESSAS SOLUÇÕES COMO $x = x_0 + z$, ONDE x_0 É UMA SOLUÇÃO PARTICULAR E $z \in NUL(A)$, SE TEMOS UMA BASE PARA z, ISTO É, $z = \sum \alpha_i v_i$, ENTÃO O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO IRRESTRITO SE TORNA:

$$\min \| x_0 + \sum \alpha_i v_i \|_2^2$$

AGORA, PARA (a):

$$(a) \quad A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^Tb = [2 \; 0 \; 2]^T$$

$$A^TAx = A^Tb = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftarrow \text{REDUZINDO}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1/2 - \alpha \\ x_2 = -1/2 + \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 2)

a) CONTINUAÇÃO

ASSIM $\min \left\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2$

ENTÃO

$$0 = \frac{d}{d\alpha}\left[(1/2 - \alpha)^2 + (-1/2 + \alpha)^2 + \alpha^2 \right]$$

$$= -1 + 2\alpha - 1 + 2\alpha + 2\alpha$$

$$= 6\alpha - 2 = 0 \iff \alpha^* = 2/6$$

$$X^* = \begin{bmatrix} 1/2 - 2/6 \\ -1/2 + 2/6 \\ 2/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 2/6 \end{bmatrix} //$$

b)

$$A^T . A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 12 & 1 \\ 12 & 24 & 2 \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 1/6 - 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$$0 = \frac{d}{d\alpha}\left[(1/6 - 2\alpha)^2 + \alpha^2 \right]$$

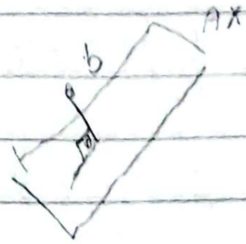
$$= -4/6 + 8\alpha + 2\alpha = 0$$

$$\iff \alpha = 1/15$$

$$X^* = \begin{bmatrix} 1/30 \\ 1/15 \end{bmatrix} //$$

PROBLEMA 3)

a) A SOLUÇÃO DE NORMA MÍNIMA É A PROJEÇÃO ORTOGONAL DA ORIGEM NO HIPERPLANO DEFINIDO POR AX.



b)

SOLUÇÃO DE NORMA MÍNIMA:

SEJA $\min \|x\|_2^2$

SUJEITO A $Ax = b$

O LAGRANGIANO FICA

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2 + \lambda^T(b - Ax)$$

ASSIM $\nabla_x L = x - A^T\lambda^T = 0 \Rightarrow x = A^T\lambda$

$\nabla_\lambda \mathcal{L} = Ax - b = 0 \Rightarrow A(A^T\lambda) = b$

AA^T TEM POSTO COMPLETO, POIS A TEM POSTO COMPLETO, PORTANTO É INVERTÍVEL.

ASSIM A SOLUÇÃO SE DÁ POR

$$x^* = A^T(AA^T)^{-1}b$$

SE TEMOS OUTRA SOLUÇÃO $x = x^* + z$ ONDE $z \in N$

ENTÃO

$$\|x^* + z\|^2 = \|x^*\|^2 + \|z\|^2 \geq \|x^*\|^2$$

PROBLEMA 3)

c) $\min_{x} \|Ax - b\|^2 + \lambda \|x\|^2$

$$0 = 2A^T(Ax-b) + 2\lambda x$$

$$\Rightarrow (A^TA + \lambda I)x = A^T b$$

$A^TA + \lambda I$ É INVERTÍVEL, ENTÃO

$$x^* = (A^TA + \lambda I)^{-1} A^T b$$

QUANDO $\lambda \to 0^+$ VEMOS QUE

$$x^* \to (A^TA)^{-1} A^T b$$

ENTÃO CONVERGE PARA A SOLUÇÃO DE QUADRADOS MÍNIMOS DE NORMA MÍNIMA