IA525/EG425 - Otimização Inteira e Combinatória

Atividade 03: Filtragem de Sinais | Prof. Matheus Souza

Instruções Gerais

- Esta atividade deve ser resolvida **individualmente**.
- Os itens teóricos devem resolvidos de forma organizada, clara e formal.
- A solução encontrada deve ser submetida, em um único arquivo PDF, no `moodle`. Certifique-se de que todas as resoluções digitalizadas estão legíveis antes de submetê-las.
- Entregas após o prazo estabelecido no `moodle` serão desconsideradas.
- É permitida a consulta a livros e outros materiais, mas a atividade apenas pode ser discutida com a equipe de ensino.
- Os algoritmos desenvolvidos nos itens práticos devem ser organizados e comentados. Todos os códigos utilizados devem ser submetidos como anexos no `moodle`.
- Qualquer tentativa de fraude, se detectada, implicará na reprovação (com nota final 0.0) de todos os envolvidos, além das penalidades disciplinares previstas no Regimento Geral da Unicamp (Arts. 226 – 237).

Apresentação

Uma aplicação clássica de otimização convexa está na recuperação, suavização e filtragem de sinais. Em problemas desta classe, tipicamente temos um sinal amostrado periodicamente, representado por um vetor $x \in \mathbb{R}^n$; cada componente x_i deste sinal representa a sua i-ésima amostra. Em muitas aplicações, os sinais são adequadamente amostrados e são suaves, ou seja, espera-se que $x_i \approx x_{i+1}$ para quase todas as amostras. Este sinal não está, no entanto, perfeitamente disponível: em aplicações típicas, este sinal sofre efeitos de um ruído aditivo, representado por $v \in \mathbb{R}^n$, e apenas a sua versão corrompida

$$x_c = x + v \in \mathbb{R}^n$$

está disponível. A principal pergunta que desejamos responder é a seguinte: como podemos recuperar uma aproximação u para o sinal original, x, a partir de x_c? Dois exemplos ilustrativos estão representados na Figura 1.

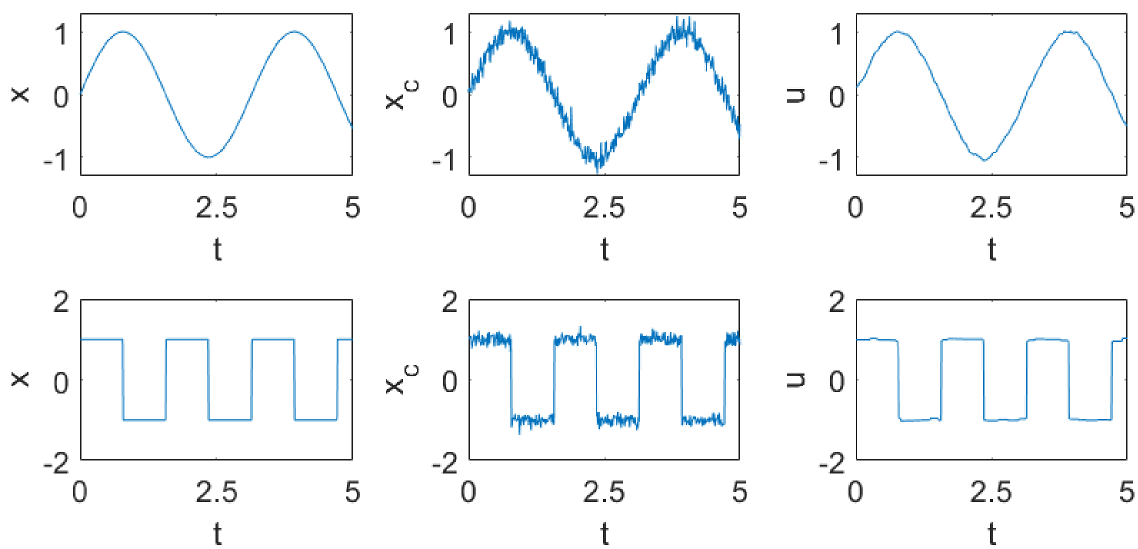

Figura 1: Dois exemplos para o problema de reconstrução e suavização de sinais: recuperação de uma onda senoidal e de uma onda quadrada, ambas corrompidas por um ruído branco.

Como discutido em aula, este procedimento pode ser resolvido por meio de um problema de otimização da forma

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \|u - x_c\|_2^2 + \delta\phi(\Delta u), \tag{1}$$

sendo δ um parâmetro de *trade-off* entre as duas parcelas da função objetivo:

- $\|u - x_c\|_2^2$ penaliza o erro quadrático entre u e x_c. Esta parcela busca assegurar que u aproxime x, pois esperamos que os efeitos do ruído sobre x não descaracterizem totalmente as propriedades do sinal original.
- ϕ é uma *função de regularização* que, juntamente com uma matriz de diferenças finitas Δ, penaliza certas escolhas para u. No caso desta aplicação, desejamos penalizar funções não-suaves, para que a escolha trivial $u = x_c$ ou outras escolhas muito ruidosas não sejam interessantes para o problema de otimização.

Para a matriz Δ, usaremos a matriz de diferença centrada (com pontas ajustadas por diferença avançada e atrasada, respectivamente):

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Duas escolhas clássicas para a função de regularização ϕ neste problema são:

- Regularização de Tikhonov: $\phi(Du) = \|Du\|_2^2$.
- LASSO: $\phi(Du) = \|Du\|_1$.

Nesta tarefa, exploraremos aspectos qualitativos relacionados a estas funções de regularização.

Questões

► **Questão 1:** Mostre que o problema de filtragem com regularização de Tikhonov pode ser formulado como um problema de quadrados mínimos. Mostre que o problema de filtragem com regularização do tipo LASSO pode ser formulado como um problema de otimização quadrática. Conclua que os dois problemas de otimização propostos são convexos.

► **Questão 2:** Implemente, com a ajuda do `cvx`, `cvxpy` ou outro parser/solver, uma função para cada uma das abordagens destacadas acima, fornecendo a solução para x_c e δ dados.

► **Questão 3:** Use as funções implementadas para recuperar sinais em ao menos dois cenários: onda quadrada e onda senoidal, como sugerido na Figura 1. Se as funções tiverem amplitude unitária, adote um ruído gaussiano de média nula e variância 0.01; escale-o conforme necessário em outros casos. Lembre-se de ajustar δ manualmente em cada cenário e em cada abordagem. Compare as melhores soluções obtidas pelas abordagens para cada cenário.