IA525/EG425 - Otimização Inteira e Combinatória

Lista de Exercícios 03 | Prof. Matheus Souza (Sala 216)
Elementos de Otimização Convexa | msouza@fee.unicamp.br

Exercícios

► **Exercício 1:** Considere os números reais $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. Encontre a solução dos seguintes problemas:

(a) $\min_x \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$;

(b) $\min_x \max_i \left\{ |x - a_i|,\ i = 1, \cdots, n \right\}$;

(c) $\min_x \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$;

Quais destes problemas têm função objetivo convexa em $x \in \mathbb{R}$?

► **Exercício 2:** Determine a solução de quadrados mínimos do sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \\ x_1 & + & 4x_2 & = & 10 \end{cases}$$

Represente graficamente as retas que definem este sistema e a solução obtida. Interprete graficamente.

► **Exercício 3:** Considere o problema de quadrados mínimos $\min \|Ax - b\|_2^2$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a solução ótima $x^\star$ deste problema. Verifique que $r^\star = b - Ax^\star$ é ortogonal às colunas de A. E se o vetor b for trocado por $\hat{b} = [1\ 3\ 4]^\mathsf{T}$, o que acontece com a solução ótima e o resíduo associado? Interprete.

► **Exercício 4:** Encontre o ponto sobre o plano $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4$ cuja distância à origem seja mínima.

► **Exercício 5:** Considere o problema de otimização

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeito a} & 2x_1 + x_2 = 2. \end{array}$$

(a) Qual é a solução ótima deste problema?

(b) Considere o problema penalizado

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} x_1^2 + x_2^2 + \rho(2 - 2x_1 - x_2)^2,$$

com $\rho > 0$. Para cada valor de ρ, obtenha a solução ótima do problema, $x^\star(\rho)$.

(c) O que acontece com $\rho \to 0^+$? O que acontece com $\rho \to \infty$? Interprete os resultados.

► **Exercício 6:** Considere o problema de programação linear

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leqslant 8, \\ & -x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{array}$$

Escreva as condições KKT para este problema e, para cada ponto extremo (encontre-os graficamente), verifique se as condições de otimalidade são satisfeitas. Encontre a solução ótima.

▶ **Exercício 7:** Considere o problema

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = x_1^4 + x_2^4 + 12x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2 - x_1 - x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + x_2 \leqslant 6, \\ & 2x_1 - x_2 \geqslant 3, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{array}$$

Escreva e resolva as condições KKT para este problema e verifique que $x^\star = [3\ 3]^\mathsf{T}$ é a única solução ótima.

▶ **Exercício 8:** Considere o problema a seguir, sendo a_i, b e c_i, constantes positivas:

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} \\ \text{sujeito a} & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \\ & x_i \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, n. \end{array}$$

Escreva as condições KKT para este problema e obtenha a sua solução ótima $x^\star$.

▶ **Exercício 9:** Considere o problema de programação quadrática

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ \text{sujeito a} & x_1 - 1 \geqslant 0. \end{array}$$

(a) Formule o problema irrestrito gerado por uma estratégia de barreira logarítmica, para algum fator de barreira $\rho > 0$ dado.

(b) Determine a solução ótima $x^\star(\rho)$ de cada subproblema em função de ρ.

(c) Mostre que $x^\star(\rho)$ tende à solução ótima $x^\star$ do problema com restrições conforme $\rho \to 0^+$.

▶ **Exercício 10:** Sejam $P, R \succ 0$ duas variáveis em um problema de otimização semidefinida. Utilizando o Complemento de Schur, obtenha restrições LMIs equivalentes às apresentadas a seguir:

(a) $A^\top P + PA + PRP \prec 0$.

(b) $A^\top PA - P + PRP \prec 0$.

(c) $A^\top P + PA - P + (PG - F)^\top R^{-1}(PG - F) \prec 0$.

Problemas

▶ **Problema 1: (Fórmulas de Regressão Linear)** Considere o problema em que um conjunto de dados $(t^{(i)}, y^{(i)})$, $i = 1, \cdots, N$, deve ser ajustado, no sentido de quadrados mínimos, por uma reta

$$\phi(t) = x_1 + x_2 t.$$

Construa o sistema normal associado a este problema e resolva-o para mostrar que os coeficientes ótimos são dados por

$$x_1^\star = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} \left(t^{(i)}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y^{(i)}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} t^{(i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} t^{(i)} y^{(i)}\right)}{N \sum_{i=1}^{N} \left(t^{(i)}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} t^{(i)}\right)^2}$$

e

$$x_2^\star = \frac{N\left(\sum_{i=1}^{N} t^{(i)} y^{(i)}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} t^{(i)}\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y^{(i)}\right)}{N \sum_{i=1}^{N} \left(t^{(i)}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} t^{(i)}\right)^2}$$

▶ **Problema 2: (Solução de Quadrados Mínimos de Norma Mínima)** Quando a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ do problema de quadrados mínimos

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2,$$

com $b \in \mathbb{R}^m$, não tiver posto completo, este problema não tem solução única. Neste caso, pode ser interessante encontrar o vetor $x^\star$ que é solução ótima deste problema e que tem norma Euclidiana mínima. Usando-se o sistema normal, podemos escrever este problema como

$$\begin{array}{rl} \min & \|x\|_2^2 \\ \text{sujeito a} & A^\mathsf{T} A x = A^\mathsf{T} b. \end{array}$$

A restrição de igualdade deste problema pode ser removida parametrizando-se o núcleo de $A^T A$; assim, obtemos um problema de otimização irrestrita.

Encontre a solução de norma Euclidiana mínima para os problemas de quadrados mínimos definidos pelas matrizes abaixo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

► **Problema 3: (Sistemas Subdeterminados: Solução de Norma Mínima e Problemas de Quadrados Mínimos com Regularização de Tikhonov)** O problema discutido acima está relacionado com o seguinte problema: dado um sistema linear $Ax = b$, com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ e $m < n$. Se este sistema for compatível, então ele admite infinitas soluções; vamos assumir que o posto de A é completo, o que assegura essa propriedade. Dentre todas estas soluções, desejamos determinar a que possui a menor norma, ou seja, desejamos resolver o problema

$$\begin{array}{rl} \min & \|x\|_2^2 \\ \text{sujeito a} & Ax = b. \end{array}$$

(a) Interprete este problema geometricamente.

(b) Mostre que a solução ótima deste problema é dada por $x^\star = A^T(AA^T)^{-1}b$; para tanto, tome outra solução arbitrária deste sistema $x = x^\star + z$, com z tal que $Az = 0$ e mostre que a norma é maior que ou igual à norma de $x^\star$.

Este problema tem uma relação interessante com o problema de quadrados mínimos com *regularização de Tikhonov*:

$$\min \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2,$$

em que $\lambda > 0$ é um parâmetro definido pelo projetista. A regularização de Tikhonov evita que os coeficientes de ajuste do problema de quadrados mínimos sejam arbitrariamente grandes, impondo um certo *trade-off* entre a norma do resíduo e a norma da solução.

(c) Use as condições de otimalidade para determinar a solução ótima deste problema. O que acontece com esta solução se $\lambda \to 0$?

► **Problema 4: (Filtragem e Quadrados Mínimos)** Volte ao problema de suavização com regularização de Tikhonov e obtenha um problema de quadrados mínimos equivalente àquela formulação. Isto é, defina A e b tais que

$$\|\hat{u} - u_c\|_2^2 + \delta \|D\hat{u}\|_2^2 = \|A\hat{u} - b\|_2^2.$$

► **Problema 5: (Variantes do Problema de Quadrados Mínimos)** Neste problema, discutiremos duas variantes do problema de quadrados mínimos original, que também são de grande importância prática.

(a) Considere o problema de *quadrados mínimos com restrição de igualdade* dado por

$$\begin{array}{rl} \min & \|Ax - b\|_2^2 \\ \text{sujeito a} & Cx = d, \end{array}$$

com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $d \in \mathbb{R}^p$. Discuta como resolver este problema (i) eliminando a restrição de igualdade ou (ii) resolvendo um problema de programação quadrática.

(b) A função objetivo do problema de quadrados mínimos original pode ser interpretada como uma soma de quadrados dos *resíduos* associados às equações de um sistema sobredeterminado:

$$\|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i^2,$$

sendo $r_i = \tilde{a}_i^\top x - b_i$, em que $\tilde{a}_i$ é a i-ésima linha de A. Considere agora o problema de *quadrados mínimos ponderados*, em que a função objetivo é levemente alterada, incluindo *pesos* aos resíduos:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 r_i^2,$$

com $w_1, \cdots, w_m > 0$ dados. Formule este problema como um problema de quadrados mínimos tradicional, obtendo matrizes $\hat{A}$ e $\hat{b}$ de forma que $f(x) = \|\hat{A}x - \hat{b}\|_2^2$.

▶ **Problema 6: (Um Problema de Quadrados Mínimos Especial)** Para m vetores em $\mathbb{R}^n$ dados, considere o problema

$$p^\star = \min_x \sum_{i=1}^m \left(|a_i^\top x| - 1\right)^2 .$$

(a) Este problema é convexo? Se for, é possível formulá-lo como um problema de quadrados mínimos tradicional? Ou um PL? Ou um QP? Ou um QCQP? Ou um SOCP? Ou não é possível enquadrá-lo em nenhuma destas classes? Justifique as suas respostas.

(b) Mostre que o valor ótimo $p^\star$ depende apenas da matriz $K = A^\top A$, sendo $A = [a_1, \cdots, a_m]$; ou seja, se $A_1 \neq A_2$ mas $A_1^\top A_1 = A_2^\top A_2$, então os valores ótimos correspondentes são os mesmos

▶ **Problema 7: (Controle Ótimo: Mínima Energia)** Um modelo simples de um veículo se movimentando em uma dimensão é dado por

$$\begin{bmatrix} s(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(k)$$

para $k = 0,\ 1,\ \ldots$. Neste modelo, $s(k)$ determina a posição do objeto e $v(k)$ sua velocidade no tempo k. Assumimos que, em $k = 0$, o objeto se encontra na origem e com velocidade nula.

Desejamos resolver o seguinte problema de controle ótimo: Para um horizonte de tempo dado N, devemos projetar as entradas $u(0),\ u(1),\ \ldots$ que minimiza o total de energia consumida

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} u(k)^2$$

de forma que o objeto, em $k = N$, se encontre na posição $s(N) = 10$ com velocidade nula $v(N) = 0$. Esta restrição deve ser alcançada com o menor gasto de energia E possível.

(a) Formule este problema como um problema de quadrados mínimos com restrição de igualdade

$$\begin{array}{rl} \text{minimo} & \|Ax - b\|_2^2 \\ \text{sujeito a} & Cx = d. \end{array}$$

Defina claramente quem é sua variável de decisão x e os dados de entrada A, b, C e d.

(b) Resolva o problema para $N = 30$. Plote o controle ótimo $u(k)$, a posição resultante $s(k)$ e a velocidade $v(k)$.

(c) Resolva o problema para $N = 2,\ 3, \ldots,\ 30$. Para cada N calcule a energia E consumida pela sequência de controle ótima. Plote $\log_{10} E$ em função de N.

(d) Suponha que é permitido que a posição final seja diferente de 10 (a velocidade final ainda deve ser nula). No entanto, se $s(N) \neq 10$, temos um custo de penalidade igual a $(s(N) - 10)^2$. Resolva o problema que encontre a sequência de controle que minimiza a energia E consumida pela entrada somada com a penalidade de posição final.

▶ **Problema 8: (Otimização Quadrática com Restrições Lineares e Método de Newton)** Considere o problema de *programação quadrática*

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) = \frac{1}{2}x^\mathsf{T}Qx + p^\mathsf{T}x \\ \text{sujeito a} & Ax = b, \end{array}$$

em que $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \succ 0$, $p \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\operatorname{rank}(A) = m < n$.

(a) Mostre que um par primal-dual estacionário (x, λ) deste problema é solução do sistema linear KKT

$$\begin{bmatrix} Q & -A^\mathsf{T} \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ b \end{bmatrix},$$

que sempre tem solução única se $Q \succ 0$, sendo esta o minimizador global do problema acima. Mostre ainda que o par ótimo $(x^\star, \lambda^\star)$ é dado por

$$x^\star = -Q^{-1}\left[p - A^\mathsf{T}(AQA^\mathsf{T})^{-1}\left(AQ^{-1}p + b\right)\right], \quad \lambda^\star = (AQA^\mathsf{T})^{-1}\left(AQ^{-1}p + b\right),$$

isto é, mostre que este par verifica o sistema KKT acima.

(b) Considere agora que seja dado um ponto inicial factível $\bar{x}$, isto é, um ponto tal que $A\bar{x} = b$. Escreva o sistema linear que deve ser resolvido para determinar a *direção de Newton*, d, para o problema dado acima, que é solução de

$$\begin{array}{rl} \min & f(d) = \frac{1}{2}(\bar{x} + d)^\mathsf{T}Q(\bar{x} + d) + p^\mathsf{T}(\bar{x} + d) \\ \text{sujeito a} & Ad = 0. \end{array}$$

(c) Estenda o raciocínio acima para propor a direção de Newton para o problema geral

$$\begin{array}{rl} \min & f(x) \\ \text{sujeito a} & Ax = b, \end{array}$$

em que f não é mais quadrática. Assuma que um ponto inicial factível seja dado.

▶ **Problema 9: (Desigualdade entre Médias)** Resolva o problema de otimização

$$\begin{array}{rl} \max & x_1 x_2 \cdots x_n \\ \text{sujeito a} & x_1 + \cdots + x_n = c, \\ & x \geqslant 0, \end{array}$$

para provar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}.$$

▶ **Problema 10: (Matrizes de Projeção e Otimização)** Uma forma de deduzir as matrizes de projeção no núcleo de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ envolve a resolução de problemas de otimização. Construiremos duas matrizes de projeção no núcleo de A, resolvendo dois problemas de otimização diferentes.

(a) Considere o *problema de projeção*

$$\begin{array}{rl} \min & \frac{1}{2}\|z - \bar{x}\|_2^2 \\ \text{sujeito a} & Az = 0, \end{array}$$

que busca o elemento $z \in \mathcal{N}(A)$ mais próximo de um vetor $\bar{x}$ dado. Supondo que $A \in R^{m\times n}$, $m < n$, tem posto completo, use as condições de otimalidade para mostrar que a solução ótima para este problema é da forma $z^\star = P_N \bar{x}$, sendo

$$P_N = I - A^T (AA^T)^{-1} A.$$

Verifique que P_N é uma matriz de projeção em $\mathcal{N}(A)$, mostrando que: (i) $P_N x = x$ para todo x em $\mathcal{N}(A)$ e (ii) $P_N y = 0$ para todo $y \in \mathcal{R}(A^T)$.

(b) Suponha agora que F seja uma matriz cujas k colunas formem uma base ortonormal para $\mathcal{N}(A)$. Neste caso, qualquer vetor do núcleo de A pode ser escrito como $x = Fz$ e, portanto, devemos resolver o problema irrestrito

$$\min_{z\in\mathbb{R}^k} \frac{1}{2}\|Fz - \bar{x}\|_2^2.$$

Discuta como k pode ser determinado. Mostre que o elemento do núcleo fornecido pela solução ótima deste problema é $x^\star = Fz^\star = \tilde{P}_N \bar{x}$, com $\tilde{P}_N = FF^T$. Verifique ainda que $\tilde{P}_N$ é uma matriz de projeção no núcleo de A.

▶ **Problema 11: (Minimização de uma Função Linear em um Elipsóide)** Um QCQP muito especial consiste em minimizar uma função linear restrita a um elipsóide:

$$\begin{array}{rl} \min_x & c^\top x \\ \text{s. a} & (x - x_0)^\top P^{-1} (x - x_0) \leqslant 1, \end{array}$$

com $c \in \mathbb{R}^n$ e $P \in \mathbb{S}^n$, $P \succ 0$.

(a) Interprete este problema geometricamente.

(b) Mostre que, se $E \succ 0$ for a *raiz quadrada* de P, ou seja, se $P = E^2$, então a mudança de variáveis

$$z = E^{-1}(x - x_0)$$

transforma o problema original em um problema na forma

$$\begin{array}{rl} \min_z & \hat{c}^\top z + d \\ \text{s. a} & z^\top z \leqslant 1. \end{array}$$

(c) O problema acima pode ser facilmente resolvido analiticamente: para qualquer z, a direção de máxima descida da função objetivo é dada por $-\hat{c}$. Assim, mostre que a solução ótima do problema acima é dada por

$$z^\star = -\frac{\hat{c}}{\|\hat{c}\|_2}.$$

Interprete geometricamente.

(d) Retorne às variáveis originais para mostrar que a solução ótima do problema original é dada por

$$x^\star = -\frac{Pc}{\sqrt{c^\top Pc}} + x_0$$

▶ **Problema 12: (Uma Equivalência Importante)** Para uma dada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, mostre que existe $P \succ 0$ tal que

$$A^\top PA - P \prec 0$$

se, e somente se, existirem matrizes $X \succ 0$ e $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$\begin{bmatrix} G + G^\top - X & G^\top A^\top \\ AG & X \end{bmatrix} \succ 0.$$