Pedro Henrique Andrade Trindade

1 Princípio da Casa dos Pombos via Otimização Inteira

(a) Formule (P) como um problema de otimização linear inteira com dois tipos de restrições:

1. (r1) aquelas que expressam a condição de que cada pombo deve ser alocado a uma casa;
2. (r2) aquelas que expressam a condição de que cada par de pombos deve estar alocado em casas diferentes. Para tanto, use as variáveis binárias:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o pombo i está alocado à casa j,} \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Resposta: Defini o primeiro tipo de restrição **(r1)** como uma igualdade, assim garantindo que cada pombo fique em exatamente uma casa:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n+1$$

Já para o segundo tipo de restrição **(r2)** expressei-a como uma desigualdade, garantindo que em uma mesma casa não haja dois pombos:

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ e } \forall i \neq k$$

Formulação completa do problema de otimização

(ps: a função objetivo sera uma constante C_0 dummy)

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & C_0 \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\} \\ & x_{ij} + x_{kj} \leq 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \text{ e } \forall i \neq k \\ & x_{ij} \in \mathbb{B}, \end{aligned}$$

1.0.1 Item (b)

Desigualdade Tripla Podemos mostrar que a desigualdade tripla é válida da seguinte forma:

pegue três valores i,k e ℓ, note que para cada dupla vale as desigualdades de **(r2)**:

$$\begin{cases} x_{ij} + x_{kj} \leq 1, \\ x_{ij} + x_{\ell j} \leq 1, \\ x_{kj} + x_{\ell j} \leq 1. \end{cases}$$

Agora, somando as três desigualdades obtemos a desigualdade

$$2(x_{ij} + x_{kj} + x_{\ell j}) \leq 3$$

que podemos manipular levando a

$$x_{ij} + x_{kj} + x_{\ell j} \leq \frac{3}{2} = 1.5$$

note que, como estamos utilizando variáveis binárias (subconjunto dos inteiros), temos que a soma a esquerda será um resultado inteiro positivo, então sabendo que o valor inteiro position mais próximo de 1.5 é 1, podemos substituí-lo na inequação sem perda de generalidade.

Assim $x_{ij} + x_{kj} + x_{\ell j} \leq 1$ é uma desigualdade válida, como queríamos demonstrar.

Desigualdade tripla => Desigualdade dupla dos pares

Já para mostrar que a partir da desigualdade tripla podemos obter as outras desigualdades em pares fazemos o seguinte: Por contradição, assuma que a desigualdade tripla seja verdadeira mas para alguma dupla (i, k) a desigualdade dupla não seja válida, isto é

$$\begin{cases} x_{ij} + x_{kj} + x_{\ell j} \leq 1, \\ x_{ij} + x_{kj} > 1, \end{cases}$$

Pela segunda inequação (e pelo fato que x_{ij} e x_{kj}) são variáveis binárias, isso acaba forçando que ambos os valores sejam 1, isto é $(x_{ij} = 1)$ e $(x_{kj} = 1)$, o que significa que a nossa primeira desigualdade se torna $x_{\ell j} \leq -1$, o que é uma contradição pois $x_{\ell j} \in 0, 1$. Portante provamos por contradição que se a desigualdade tripla for verdadeira a dupla de cada par também precisa ser.

Generalizando a solução

Nós conseguimos utilizar o mesmo truque que utilizamos para provar a inequação tripla para provar o caso geral, podemos fazer isso por indução.

Seja a base de indução o caso mostrado anteriormente, onde adesigualdade dupla implica na tripla.

passo de indução: seja a desigualdade k-ésima válida para quaisquer $k+1$ valores em $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, (sem perda de generalidade, suponha 1 até k+1) onde $(k+1) < n+1$, podemos mostrar que conseguimos chegar na desigualdade $(k+1)$-ésima.

Para isto pegue k desigualdades na seguinte ordem

$$\begin{cases} x_{1j} + x_{1j} \cdots + x_{kj} \leq 1, \\ x_{2j} + x_{3j} \cdots + x_{(k+1)j} \leq 1, \\ \vdots \\ x_{(k+1)j} + x_{1j} \cdots + x_{2j} \leq 1 \end{cases}$$

Agora some todas essas inequações, o resultado é

$$k \sum_{i=1}^{k} x_{ij} \leq k + 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} x_{ij} \leq 1 + \frac{1}{k}$$

Usando a mesma retórica do caso anterior, como $\frac{1}{k}$ não é um valor inteiro, podemos arrendondar a inequação para o inteiro mais próximo, no caso 1, resultando em

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij} \leq 1$$

Assim terminando a prova por indução e concluindo o resultado que queríamos demonstrar.

(c) Organize as variáveis de decisão em uma matriz $X = (x_{ij})$, com $(n+1)$ linhas e n colunas. Interprete as restrições (r1) e as restrições válidas construídas ao final do exercício anterior como condições sobre os elementos da matriz X. Conclua que esse conjunto de restrições é incompatível no caso inteiro.

Resposta:

Como descrito no enunciado, temos a matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(n+1)1} & \cdots & x_{(n+1)n} \end{pmatrix}$$

Temos os dois tipos de restrição descritos no enunciado anterior, que são 1. Linhas: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ (cada pombo em uma casa) 2. Colunas: $\sum_{i=1}^{n+1} x_{ij} \leq 1$ (no máximo um pombo por casa)

Podemos, com estas duas informações, chegar uma prova por absurdo do principio da casa de pombos, pois se somarmos as linhas e colunas em ordens diferentes da matriz chegamos em resultados que são incompatíveis, isto é

$$\begin{aligned} \text{Soma total por linhas} &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = n + 1 \\ \text{Soma total por colunas} &\leq \sum_{j=1}^{n} 1 = n \\ &\Rightarrow n + 1 \leq n \quad \text{(contradição)} \end{aligned}$$

Assim concluímos por absurdo que não existe solução inteira, provando o princípio.