

Modelos para a Variância Condicional e Não Condicional Multivariada: Especificação e Previsão*

Pedro Valls[†]

Sao Paulo School of Economics -FGV e CEQEF-FGV

7 de julho de 2024

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Sincronização dos dados	3
1.2	Sincronização dos dados - possível solução	4
1.3	Co-movimentos de nível	5
1.4	Construção de Modelos	6
1.5	Testando Resíduos ao Quadrado por correlação serial e correlação cruzada	8
2	Relacionando os Modelos Multivariados para as Médias Condicionais com os modelos para Matriz de Variância e Covariância Condicional	8
3	Modelo Amostral	9
4	EWMA Multivariado	10
5	Modelo VEC Diagonal	12
6	Modelos BEKK	13
6.1	Estimação do Modelo BEKK Escalar e Diagonal no OxMetrics	14
6.2	Variâncias, Covariância e Correlação estimadas para o Melhor Modelo BEKK que foi Scalar com distribuição Student-t	15
6.3	Comparação Riskmetrics e BEKK Scalar e Diagonal no OxMetrics	16
7	Modelos Baseados em GARCH Univariados - Correlação Condicional Constante	16
7.1	Estimação do CCC no Ox	17
7.2	Variância e Covariância estimadas no CCC	18
7.3	Correlação estimada no Modelo CCC no OxMetrics	19

*©-Pedro Valls (2022)

[†]EESP-FGV Rua Itapeva 474 sala 1006, 01332-000, São Paulo, SP, Brasil. E-mail:pedro.valls@fgv.br

8	Modelos de correlação condicional dinâmica (DCC)	19
8.1	DCC de Tse & Tsui	19
8.2	DCC de Engle & Sheppard	20
8.3	Estimação do DCC - TT e do DCC-ES	21
8.4	Variância e Covariância estimadas no DCC-TT	22
8.5	Correlação estimada no Modelo DCC-TT	23
8.6	Modelo de Equicorrelação Condicional - Deco	23
8.7	cDCC	23
8.8	aDCC	24
9	Previsão em Modelos GARCH Multivariados	24
10	CAPM usando DCC-Tse-Tsui	24
11	Reference	25

Lista de Figuras

1	FAC, FACP e CCF para os retornos de IBOV e PETR4	6
2	FAC, FACP e CCF para os retornos ao quadrado IBOV e PETR4	6
3	FAC, FACP e CCF para os resíduos ao quadrado do VAR(0) com variáveis IBOV e PETR4	8
4	Variâncias Condicionais para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo EWMA Multivariado com $\lambda = 0.94$ para ambos os ativos	11
5	Covariância Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo EWMA Multivariado com $\lambda = 0.94$ para ambos os ativos	11
6	Correlação Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo EWMA Multivariado com $\lambda = 0.94$ para ambos os ativos	12
7	Variâncias Condicionais para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo BEKK-Scalar com Student-t	15
8	Covariância Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo BEKK-Scalar com Student-t	15
9	Correlação Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo BEKK-Scalar com Student-t	16
10	Variâncias Condicionais para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-CCC-FIAPARCH	18
11	Covariância Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-CCC-FIAPARCH	18
12	Correlação Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-CCC-FIAPARCH	19
13	Variâncias Condicionais para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-DCC-TT-FIAPARCH	22
14	Covariância Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-DCC-TT-FIAPARCH	22
15	Correlação Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-DCC-TT-FIAPARCH	23
16	β_t e α_t para DCC-TT-FIAGARCH	25
17	Correlação Condicional para DCC-TT-FIAPARCH	25

Lista de Tabelas

1	Estimação do Modelo VAR(0) para o vetor $(DLPETR4_t, DLIBOV_t)$. . .	7
2	Estatísticas Descritivas para as variáveis usadas no VAR(0): o vetor $(DLPETR4_t, DLIBOV_t)$ e a constante	10
3	Critério de Informação para o EWMA Multivariado	12
4	Comparação entre os modelos BEKK(1,1) escalar e diagonal com distribuições Normal e Student-t	14
5	Estimação do Modelo BEKK escalar com distribuição Student-t para o vetor $(DLPETR4_t, DLIBOV_t)$	14
6	Comparação entre os modelos BEKK(1,1) escalar com distribuição Student-t e o EWMA	16
7	Comparação entre os modelos CCC usando GARCH univariados para $\sigma_{i,t}^2$ com $i = 1, 2$, com as distribuições Normal e Student-t Multivariadas . . .	17
8	Comparação entre os modelos CCC usando FIAPARCH univariados para $\sigma_{i,t}^2$ com $i = 1, 2$, com as distribuições Normal e Student-t Multivariadas .	17
9	Comparação entre os modelos DCC-ES e DCC-TT usando GARCH univariados e FIAPARCH univariados para $\sigma_{i,t}^2$ com $i = 1, 2$, com as distribuições Normal e Student-t Multivariadas	21

1 Introdução

Os fatos estilizados que caracterizam dados financeiros, foram descritos no texto de modelos de volatilidade univariados.

Alguns deles, tais como, agrupamentos de valores externos, podem ser observados através do gráfico contra o tempo dos retornos compostos de certos ativos.

Outros como correlação cruzada ou co-movimentos de volatilidade serão descritos neste texto.

Um outro mais sério é o problema de sincronização dos dados que será apresentado a seguir

1.1 Sincronização dos dados

A sincronização é uma preocupação importante ao trabalhar com dados de corte transversal de retornos de ativos, e os retornos não-sincronizados podem surgir por vários motivos (para maiores detalhes ver Sheppard (2020):

- (i) Diferenças de hora de fechamento - As diferenças de hora de fechamento dos mercados são mais importantes quando se trabalha com ativos que são negociados em diferentes mercados. A NYSE fecha às 20:00 ou 21:00 GMT. A bolsa de valores de Londres (LSE) fecha às 15:30 ou 16:30 GMT. Esta diferença significa que as mudanças nos preços das ações dos Estados Unidos que ocorrem depois que a LSE já está fechada não aparecerá nas ações da U.K até o próximo dia de negociação. Mesmo dentro da mesma região geográfica, os mercados têm horários de negociação diferentes. As principais ações do U.S. são transacionadas no período de 9:30 às 16:00 horas EDT / EST. Futuro dos títulos do governo dos EUA são negociados nos pregões viva voz ("open outcry") de 7:20 da manhã às 14:00. Futuros Petróleo são negociados entre 9:00 e 14:30 nos pregões viva voz. Todos esses ativos também são comercializados

eletronicamente; Futuro de Petróleo são negociados eletronicamente entre 18:00 - 17:15 (todos menos 45 minutos por dia) de domingo a sexta-feira.

- (ii) Fechamentos de mercado devido a feriados públicos - Diferentes mercados estão fechados em diferentes feriados que é um problema particular ao trabalhar com retornos de ativos internacionais.
- (iii) Atrasos na abertura / encerramento - Os ativos que negociam na mesma bolsa podem estar sujeitos a atrasos na abertura e no fechamento. Por exemplo, a diferença entre a primeira e a última ação a ser negociada no S&P 500 é tipicamente 15 minutos, isto não acontece aqui no Brasil porque temos vários ativos ilíquidos. O spread de fechamento é semelhante. Estas pequenas diferenças acarretam problemas na mensuração da matriz de covariância quando se utilizam retornos intra-diários.
- (iv) Pouca Liquidez/ Preços Obsoletos (Stale Prices) - Alguns ativos comercializam mais do que outros. A ação mais líquida no S&P500 tem um volume diário que normalmente é pelo menos 100 vezes maior do que o menos líquido. A iliquidez é problemática ao medir covariância usando dados intra-diários.

1.2 Sincronização dos dados - possível solução

Existem três possíveis soluções para o problema de sincronização:

- (a) O primeiro é usar longos períodos de tempo. Ao usar dados diários, os dados da NYSE e da LSE normalmente os mercados estão simultaneamente abertos durante 2 horas das 6.5 horas de abertura (30%). Se estiver usando retornos de vários dias, a falta de horário de funcionamento em comum é menos problemático, uma vez que as ações dos EUA em um dia mostrarão mudanças nos preços em Londres no dia seguinte. Por exemplo, ao usar retornos de 2 dias, é como se 8,8 dos 13 horas de negociação fossem síncrona (65%). Ao usar retornos de 5 dias é como se 28 em 32,5 horas fossem sincronizadas (86%). A desvantagem do uso de retornos agregados é a perda de dados que resulta em estimadores ineficientes, bem como dificuldades de capturar mudanças recentes.
- (b) A segunda solução é usar preços sincronizados (também conhecidos como preços de pseudo-fechamento). Os preços sincronizados são coletados quando todos os mercados estão simultaneamente abertos. Por exemplo, se usamos os preços das empresas listadas na NYSE e no LSE, um tempo de amostragem natural seria de 1 hora antes da conclusão da LSE, que normalmente corresponde às 10:30 hora do leste. Retornos diários construídos a partir desses preços devem capturar toda a covariância entre esses ativos. A desvantagem do uso de preços sincronizados é que muitos mercados não têm horários comuns, que é um problema especialmente agudo ao medir a covariância de um portfólio global.
- (c) A terceira solução é sincronizar as ações não sincronizadas usando um Vetor Média Móvel - VMA (Burns et al. (1998)). Suponha que os retornos foram ordenados de tal forma que o primeiro a fechar estava na posição 1, o segundo a fechar na posição 2, e assim por diante até o último a fechar na posição k . Com esta ordenação, retorno no dia $t + 1$ para o ativo i pode ser correlacionado com o retorno no dia t para o ativo j sempre que $j > i$, e que o retorno no dia $t + 1$ não deve ser correlacionada com o dia t retornar no activo $j \leq i$.

Por exemplo, considere retornos de ativos que são negociados na Bolsa de Valores Australiana (Universal Time (UTC) 0:00 - 6:10), London Stock Exchange (UTC 8:00 - 16:30), NYSE (UTC 14:30 - 21:30) e Bolsa de Tóquio (UTC 18:00 - 0:00 (+1 dia)). O ASX fecha antes de qualquer um dos outros abertos e, portanto, a correlação contemporânea com a LSE, NYSE e TSE deveria refletir a correlação entre as ações australianas e o resto do mundo no dia t . O LSE abre em segundo lugar e, portanto, inovações na LSE no dia t podem estar correlacionadas com mudanças no ASX no $t + 1$. As inovações semelhantes em Nova York após UTC 16:30 mostrarão no dia $t + 1$ no ASX e LSE. Finalmente, as notícias que surgiram quando o TSE estiver aberto aoarecerão no dia $t + 1$ retorno nos 3 outros mercados. Isso leva a uma estrutura triangular no VMA.

$$\begin{bmatrix} r_t^{ASX} \\ r_t^{LSE} \\ r_t^{NYSE} \\ r_t^{TSE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} \\ 0 & 0 & \theta_{23} & \theta_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{t-1}^{ASX} \\ \epsilon_{t-1}^{LSE} \\ \epsilon_{t-1}^{NYSE} \\ \epsilon_{t-1}^{TSE} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_t^{ASX} \\ \epsilon_t^{LSE} \\ \epsilon_t^{NYSE} \\ \epsilon_t^{TSE} \end{bmatrix}$$

A estrutura recursiva do sistema permite a estimação de uma forma simples uma vez que $r_t^{TSE} = \epsilon_t^{TSE}$ e portanto o modelo para r_t^{NYSE} é um $MA(1) - X$, isto é um $MA(1)$ com uma variável "exógena". Dada a estimativa de ϵ_t^{NYSE} o modelo para r_{t-1}^{LSE} também é um $MA(1) - X$ e assim por diante para todos os ativos.

O modelo em forma matricial é dado por:

$$\mathbf{r}_t = \Theta \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (1)$$

e os retornos sincronizados são dados por:

$$\tilde{\mathbf{r}}_t = (I - \Theta) \epsilon_t \quad (2)$$

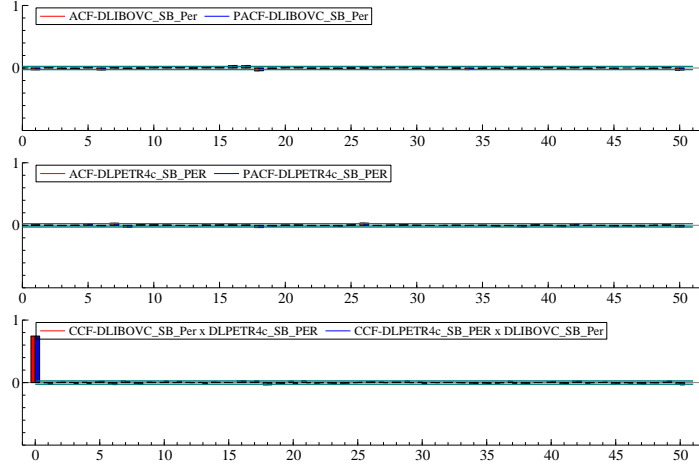
Desta forma a matriz de covariância de ϵ_t é Σ_t e portanto a matriz dos retornos sincronizados é dada por $E_{t-1}[\tilde{\mathbf{r}}_t \tilde{\mathbf{r}}_t'] = (I - \Theta) \Sigma_t (I - \Theta)$

1.3 Co-movimentos de nível

Assim como no caso univariado é possível que exista correlação serial nos retornos e também correlação cruzada entre retornos

Abaixo são apresentadas as FAC e FACP para os retornos de Petrobrás (PETR4) na Bolsa de São Paulo e do índice Bovespa (IBOV). São também apresentadas as correlações cruzadas entre estes dois retornos

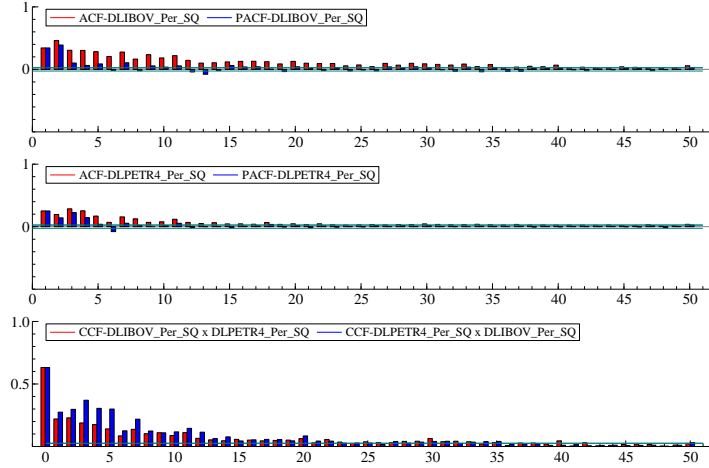
Figura 1: FAC, FACP e CCF para os retornos de IBOV e PETR4



Observe a ACF e PACF dos retornos todos estão dentro da banda assim como a CCF. Indicam que a média condicional dos retornos pode ser representada por um vetor de constantes.

Transformando os retornos usando o quadrado e fazendo a FAC, FACP dos retornos ao quadrado e as correlações cruzados, temos

Figura 2: FAC, FACP e CCF para os retornos ao quadrado IBOV e PETR4



Existe dependência temporal na variância instantânea de cada ativo assim como nas covariâncias.

1.4 Construção de Modelos

Como parece não haver estrutura na média condicional podemos modelar o vetor de retornos por um $VAR(0)$. O programa Ox-GARCH-Multivariate- $VAR(0)$ -DLPETR4-DLIBOV estima um $VAR(0)$ para o vetor $(DLPETR4_t, DLIBOV_t)$.

Temos os seguinte resultados para a estimação deste $VAR(0)$:

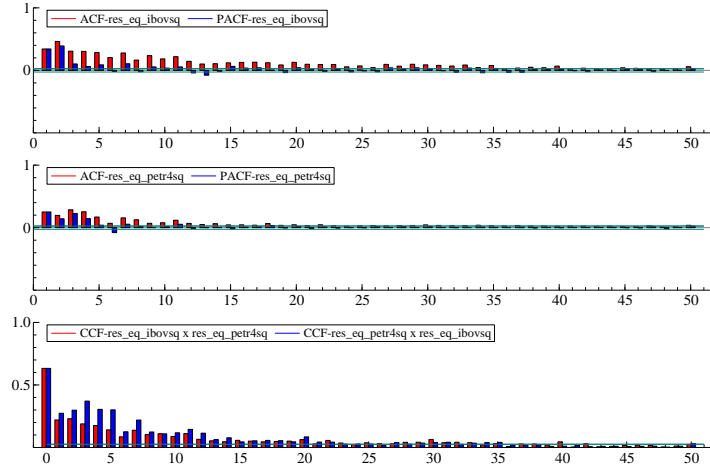
Tabela 1: Estimação do Modelo VAR(0) para o vetor ($DLPETR_4$, $DLIBOV_t$)

Estimating the system by OLS						
The estimation sample is : 2000-01-04 - 2022-07-15						
The dataset is: C:\Users\Pedro\Dropbox\Tópicos em_Financas_2022\Dados\Dados_BR.xls						
URF equation for: DLIBOV						
Constant	U	Coefficient	Std. Error	t-value	t-prob	
$\sigma =$	1.71591	RSS =	1736.91387	1.32	0.1858	
URF equation for: DLPETR4						
Constant	U	Coefficient	Std. Error	t-value	t-prob	
$\sigma =$	2.60344	RSS =	3940.47303	1.36	0.1735	
loglikelihood	-23106.1637	$-T \times \log(\Omega) =$	-6422.28438			
$ \Omega =$	8.8890665	$\log Y'Y'/T =$	2.18482204			
$R^2(LR) =$	4.44089e - 16	$R^2(LM) =$	0			
n ^o of observations	5879	n ^o of parameters:	2			
F-tests on retained regressors $F(2, 5877) =$						
Constant	U	1.03399	[0.356]			
Correlation of URF residuals (standard deviation on diagonal)						
DLIBOV		DLIBOV	DLPETR4			
		1.7159	0.74460			
DLPETR4		0.74460	2.6034			
correlation between actual and fitted						
	DLIBOV	DLPETR4				
	0.0010071	0.0017194				
Single-equation diagnostics using reduced-form residuals:						
DLIBOV	:	Portmanteau(12)	:	$N^2(12)$	=	21.057 [0.0496]*
DLIBOV	:	$AR1 - 2$ test	:	$F(2, 5876)$	=	2.6615 [0.0699]
DLIBOV	:	$ARCH1 - 1$ test	:	$F(1, 5877)$	=	782.38 [0.0000]**
DLIBOV	:	Normality test	:	$N^2(2)$	=	3658.1 [0.0000]**
DLIBOV	:	Hetero test	:	no regressors for test		
DLIBOV	:	Hetero-X test	:	no regressors for test		
DLPETR4	:	Portmanteau(12)	:	$N^2(12)$	=	19.724 [0.0725]
DLPETR4	:	$AR1 - 2$ test	:	$F(2, 5876)$	=	0.24946 [0.7792]
DLPETR4	:	$ARCH1 - 1$ test	:	$F(1, 5877)$	=	398.86 [0.0000]**
DLPETR4	:	Normality test	:	$N^2(2)$	=	6145.8 [0.0000]**
DLPETR4	:	Hetero test	:	no regressors for test		
DLPETR4	:	Hetero-X test	:	no regressors for test		
System diagnostics using reduced form residuals:						
Vector Portmanteau(12)	:	$N^2(48)$	=	85.175	[0.0008]**	
Vector $AR1 - 2$ test	:	$F(8, 11746)$	=	2.3929	[0.0142]*	
Vector Normality test	:	$N^2(4)$	=	10010.	[0.0000]**	
Vector Hetero test	:	no regressors for test				
Vector Hetero-X test	:	no regressors for test				

1.5 Testando Resíduos ao Quadrado por correlação serial e correlação cruzada

Construindo a série dos resíduos ao quadrado do VAR e fazendo a FAC e FACP e Correlações Cruzadas temos

Figura 3: FAC, FACP e CCF para os resíduos ao quadrado do VAR(0) com variáveis IBOV e PETR4



Indicando uma forte evidência de correlação serial nas variâncias e covariância

2 Relacionando os Modelos Multivariados para as Médias Condicionais com os modelos para Matriz de Variância e Covariância Condicional

Os modelos Multivariados para a Média Condicional, que são usualmente utilizados são os Vetores Autorregressivos, denotados por $VAR(p)$. Como argumentou Sims (1980) estes modelos são a forma reduzida dos Modelos de Equações Simultâneas Dinâmico, e, não impõem restrições que podem ser inválidas para as variáveis macroeconômicas ou financeiras.

Considere que o vetor \mathbf{y}_t tem dimensão $N \times 1$ e podemos definir o $VAR(1)$ como sendo a aproximação deste vetor pela sua média condicional nas informações passadas, denotadas por \mathcal{F}_{t-1} , onde os erros desta aproximação são por construção um processo $N \times 1$ de inovações. Temos então:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= E[\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1}] + \epsilon_t \\ &= \mu_t(\theta) + \epsilon_t \end{aligned} \quad (3)$$

onde $\mu_t(\theta) = \Pi \mathbf{y}_{t-1}$.

No início dos anos oitenta e primeira metade dos noventa as hipóteses de que o erro no modelo $VAR(1)$ em (3) eram uma inovação foram modificadas para permitir uma

estrutura GARCH Multivariada, para uma resenha veja Bauwens et al. (2006), que pode ser escrita como:

$$\epsilon_t = \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}(\theta)\mathbf{z}_t \quad (4)$$

onde $\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}(\theta)$ é uma matriz $N \times N$, positiva definida. Além disto assumimos que \mathbf{z}_t em (4) tem os seguintes dois primeiros momentos:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{z}_t) &= 0 \\ Var(\mathbf{z}_t) &= \mathbf{I}_N \end{aligned} \quad (5)$$

onde $\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}$ está relacionada a variância de \mathbf{y}_t condicional em \mathcal{F}_{t-1} , isto é:

$$\begin{aligned} Var(\mathbf{y}_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= Var(\epsilon_t|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} Var(\mathbf{z}_t|\mathcal{F}_{t-1}) \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{H}_t \end{aligned} \quad (6)$$

Nas seções seguintes iremos detalhar modelos para \mathbf{H}_t , iniciando com o mais simples que é o modelo amostral.

3 Modelo Amostral

Seja \mathbf{y}_t um vetor $N \times 1$ de séries temporais que iremos assumir que pode ser representado pela seguinte regressão multivariada dada por:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{c} + \epsilon_t \quad (7)$$

onde \mathbf{c} é um vetor $N \times 1$ que representa o vetor de médias da série temporal multivariada \mathbf{y}_t e ϵ_t é um vetor $N \times 1$ i.i.d. com média zero.

A matriz de covariância amostral para esta série temporal multivariada é dada por:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}})' \quad (8)$$

onde $\bar{\mathbf{y}}$ é um vetor $N \times 1$ de média.

A matriz de correlação amostral para o vetor $\mathbf{y}_t = (DLIBOV, DLPETR4)$ assim como as médias e desvios padrão são dada por:

Tabela 2: Estatísticas Descritivas para as variáveis usadas no $VAR(0)$: o vetor $(DLPETR4_t, DLIBOV_t)$ e a constante

Descriptive statistics of variables used in the model:			
Means			
	DLIBOV	DLPETR4	Constant
	0.029614	0.04622	1.0000
Standard deviations (using $T - 1$)			
	DLIBOV	DLPETR4	Constant
	1.7159	2.6034	0.0000
Correlation Matrix:			
	DLIBOV	DLPETR4	Constant
DLIBOV	1.0000	0.74460	0.0000
DLPETR4	0.74460	1.0000	0.0000
Constant	0.0000	0.0000	0.0000

4 EWMA Multivariado

Uma forma de permitir que a matriz Σ seja variante no tempo é através do uso de pesos que decaem exponencialmente, por exemplo:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_t &= \lambda \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} + \lambda^2 \epsilon_{t-2} \epsilon'_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i}\end{aligned}\tag{9}$$

com $0 < \lambda < 1$.

Como em geral os pesos somam um, podemos re-escrever (9) da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_t = (1 - \lambda) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i}\tag{10}$$

e (10) pode ser re-escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_t = (1 - \lambda) \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} + \lambda \mathbf{H}_{t-1}\tag{11}$$

que corresponde ao EWMA Multivariado.

Observe que o peso que está sendo usado é o mesmo para todas as séries.

Na prática o valor de λ deve ser estimado. Assumindo que a série temporal \mathbf{y}_t tem distribuição normal multivariada, isto é, $\mathbf{y}_t \sim \mathbf{N}_N(\mathbf{c} : \mathbf{H}_t)$ temos que o logarítmo da função de verossimilhança será dado por:

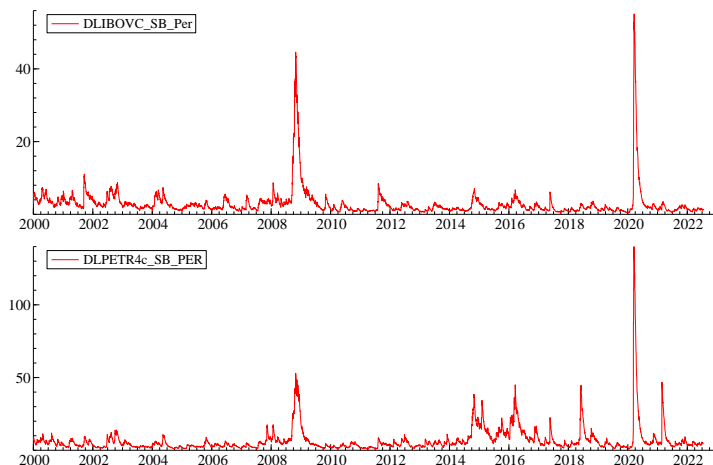
$$\log(L) = -\frac{NT}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T |\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\mathbf{y}_t - \mathbf{c})' \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \mathbf{c})\tag{12}$$

onde \mathbf{H}_t é calculada de forma recursiva usando (11)

Caso λ e Σ_1 sejam conhecidos é possível através de (11) obter as estimativas de Σ_t para todo t . O seguinte programa Ox-GARCH-Multivariado-EWMA "estima" o Riskmetrics com $\lambda = 0.94$ para ambos os ativos.

Tem-se então o seguinte gráfico (4) para as variâncias condicionais estimadas pelo EWMA Multivarido com $\lambda = 0.94$ para ambos os ativos.

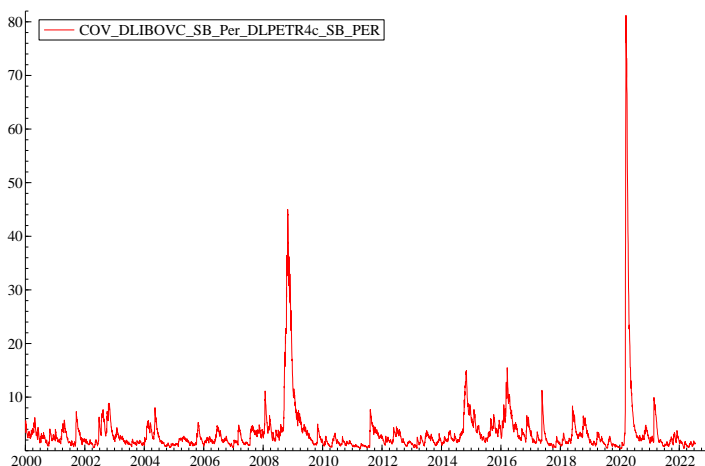
Figura 4: Variâncias Condicionais para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo EWMA Multivariado com $\lambda = 0.94$ para ambos os ativos



Observe que os dois maiores aumentos das variâncias são na crise de 2008 e na da COVID em 2020.

A seguir é apresentado o gráfico (5) da Covariância Condicional estimada pelo modelo EWMA multivariado.

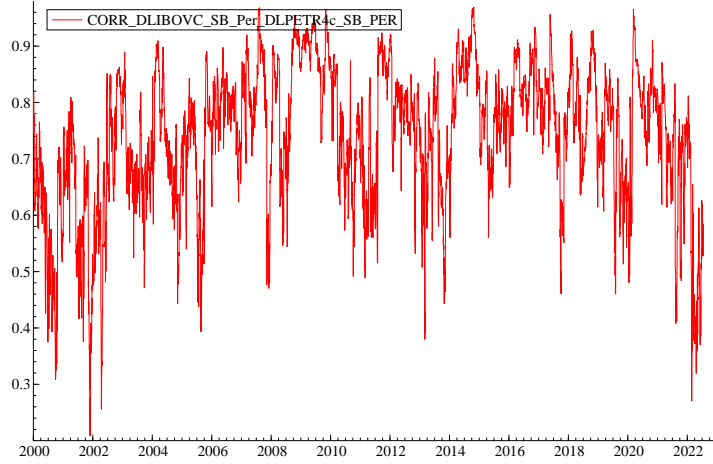
Figura 5: Covariância Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo EWMA Multivariado com $\lambda = 0.94$ para ambos os ativos



Assim como no gráfico (4), o gráfico (5) da Covariância Condicional, tem os dois maiores aumentos na covariância na crise de 2008 e na da COVID em 2020.

A seguir é apresentado o gráfico (6) da Correlação Condicional estimada pelo modelo EWMA multivariado.

Figura 6: Correlação Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo EWMA Multivariado com $\lambda = 0.94$ para ambos os ativos



Pelo gráfico (5) as menores correlações são em : 28/11/2001 (0.2086), 16/04/2002 (0.2559) e 24/02/2022 (0.2702). E as maiores acontecem nas seguintes datas: 19/08/2007 (0.9681), 02/11/2009 (0.9614), 27/10/2014 (0.9696) e 10/03/2020 (0.9651).

Para este modelo os critérios de informação são apresentados na tabela (3) abaixo

Tabela 3: Critério de Informação para o EWMA Multivariado

Progress to date							
Model	T	p		Log-Lik	SC	HQ	AIC
EWMA	5879	2	MaxSQP	-2127.075	7.3944	7.3929	7.3921

5 Modelo VEC Diagonal

A extensão do modelo EWMA é permitir que os parâmetros tanto dos componentes da variância instantânea quanto da variância condicional sejam diferentes.

Temos então o modelo GARCH Vetorial Diagonal cujo Processo Gerador de Dados é dado por:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C} + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \odot (\epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i}) + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j \odot \mathbf{H}_{t-j} \quad (13)$$

onde \odot é o produto de Hadamard que é definido para duas matrizes A e B com dimensão $m \times n$ por :

$$(A \odot B)_{ij} = (A)_{ij}(B)_{ij}.$$

Observe que este produto não está definido para matrizes de dimensões diferentes.

No caso bivariado e com $p = q = 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_t^{(1,1)} &= \mathbf{C}^{(1,1)} + \mathbf{A}_1^{(1,1)} \epsilon_{t-1}^{(1)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + \mathbf{B}_1^{(1,1)} \mathbf{H}_{t-1}^{(1,1)} \\
\mathbf{H}_t^{(2,1)} &= \mathbf{C}^{(2,1)} + \mathbf{A}_1^{(2,1)} \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(1)} + \mathbf{B}_1^{(2,1)} \mathbf{H}_{t-1}^{(2,1)} \\
\mathbf{H}_t^{(2,2)} &= \mathbf{C}^{(2,2)} + \mathbf{A}_1^{(2,2)} \epsilon_{t-1}^{(2)} \epsilon_{t-1}^{(2)} + \mathbf{B}_1^{(2,2)} \mathbf{H}_{t-1}^{(2,2)}
\end{aligned}$$

Observe que o modelo VEC Diagonal retorna uma matriz simétrica mas não necessariamente positiva definida sendo portanto um dos problemas deste modelo.

6 Modelos BEKK

Um modelo que generaliza o DVEC é o BEKK cuja equação para a variância condicional é dada por:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}'\mathbf{C} + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i'(\epsilon_{t-i}\epsilon_{t-i}')\mathbf{A}_i + \sum_{j=1}^q \mathbf{B}_j'\mathbf{H}_{t-j}\mathbf{B}_j \quad (14)$$

onde \mathbf{C} é uma matriz triangular superior, \mathbf{A}_i (para $i = 1, \dots, p$) e \mathbf{B}_j (para $j = 1, \dots, q$) são matrizes quadradas. A especificação no Ox permite que estas matrizes sejam diagonais ou escalares.

O número de parâmetros do modelo BEKK tende a crescer muito. Por exemplo, para o caso BEKK(1,1) temos $N(5N + 1)/2$ parâmetros a serem estimados, que no caso em que $N = 5$ o número de parâmetros será de 255.

Uma forma de reduzir o número de parâmetros é impor que as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} sejam diagonal ou mesmo escalares

No caso bivariado, matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} sejam diagonal e com $p = q = 1$ temos:

$$H_{1,1,t} = c_{11} + a_{11}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + b_{11}^2 H_{1,1,t-1}$$

$$H_{1,2,t} = c_{12} + a_{11}a_{22}\epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + b_{11}b_{22}H_{1,2,t-1}$$

$$H_{2,2,t} = c_{22} + a_{22}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 + b_{22}^2 H_{2,2,t-1}$$

No caso bivariado, matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} sejam escalares e com $p = q = 1$ temos:

$$H_{1,1,t} = c_{11} + a_{11}^2 \epsilon_{1,t-1}^2 + b_{11}^2 H_{1,1,t-1}$$

$$H_{1,2,t} = c_{12} + a_{11}^2 \epsilon_{1,t-1}\epsilon_{2,t-1} + b_{11}^2 H_{1,2,t-1}$$

$$H_{2,2,t} = c_{22} + a_{22}^2 \epsilon_{2,t-1}^2 + b_{22}^2 H_{2,2,t-1}$$

6.1 Estimação do Modelo BEKK Escalar e Diagonal no OxMetrics

O seguinte programa Ox-GARCH-BRKK-Scalar-Diag estima o BEKK escalar e diagonal com as distribuições normal e Student-t.

Comparando os modelos temos a tabela (4) como os critérios de informação para selecionar o melhor.

Tabela 4: Comparação entre os modelos BEKK(1,1) escalar e diagonal com distribuições Normal e Student-t

Progress to date							
Model	T	p		Log-Lik	SC	HQ	AIC
N-BEKK-Scalar	5879	7	MaxSQP	-21562.084	7.3456	7.3404	7.3377
N-BEKK-Diag	5879	9	MaxSQP	-21562.013	7.3465	7.3398	7.3363
Student-t-BEKK-Scalar	5879	8	MaxSQP	-2220.692	7.2310	7.2250	7.2219
Student-t-BEKK-Diag	5879	10	MaxSQP	-8890.6975	7.2335	7.2260	7.2221

E por todos os critérios de informação o melhor modelo é o BEKK escalar com distribuição Student-t.

A seguir as estimativas dos parâmetros do melhor modelo são apresentadas:

Tabela 5: Estimação do Modelo BEKK escalar com distribuição Student-t para o vetor ($DLPETR4_t$, $DLIBOV_t$)

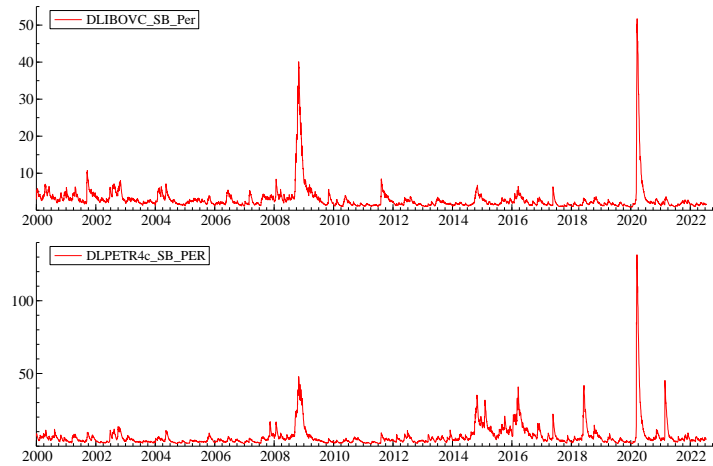
Estimating the Scalar-BEKK with Student-t distribution				
The estimation sample is : 2000-01-04 - 2022-07-15				
The dataset is: C:\Users\Pedro\Dropbox\Topicos em Financas 2022\Dados\DADOS_BR.xlsx				
Conditional Mean : ARMA(0,0) Model.				
No regressor in the conditional mean.				
Conditional Variance : Scalar - BEKK(1,1)				
No regressor in the conditional variance.				
Multivariate Student-t distribution, with 7.23301 degrees of freedom.				
Strong convergence using numerical derivatives				
Log-likelihood = -21220.7				
Robust Standard Errors (Sandwich formula)				
	Coefficient	Std.Error	t-value	t-prob
Cst1	0.073700	0.016840	4.376	0.0000
Cst2	0.094550	0.024553	3.851	0.0000
C_{11}	0.188441	0.015862	11.88	0.0000
C_{12}	0.195413	0.019495	11.31	0.0000
C_{22}	0.181136	0.016009	11.31	0.0000
b_1	0.964545	0.0034248	281.60	0.0000
a_1	0.240543	0.011579	20.77	0.0000
df	7.233010	0.48279	14.98	0.0000
n ^o of observations	5879	n ^o of parameters:	8	
n ^o Series :	2	Log Likelihood:	-21220.692	

Observe que a persistência neste caso é igual para as duas séries e é dada por: $b_1^2 + a_1^2 = 0.9882$ que é bem maior do que o parâmetro $\lambda = 0.94$ usado no modelo EWMA-Multivariado.

6.2 Variâncias, Covariância e Correlação estimadas para o Melhor Modelo BEKK que foi Scalar com distribuição Student-t

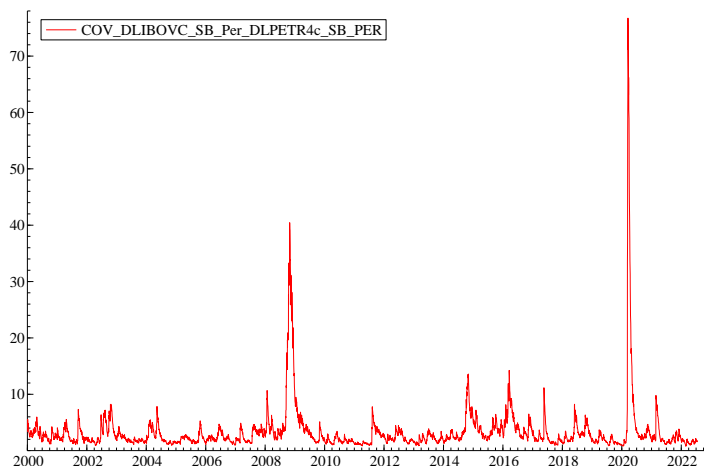
Tem-se então o seguinte gráfico (7) para as variâncias condicionais estimadas pelo BEKK-Scalar com distribuição Student-t Multivarida.

Figura 7: Variâncias Condicionais para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo BEKK-Scalar com Student-t



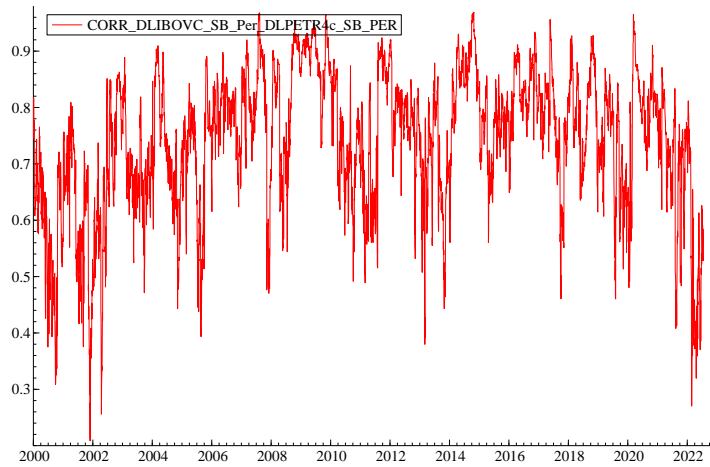
A seguir no gráfico ((8) para as covariância condicional estimada pelo BEKK-Scalar com distribuição Student-t Multivarida.

Figura 8: Covariância Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo BEKK-Scalar com Student-t



A seguir no gráfico ((9) para as correlação condicional estimada pelo BEKK-Scalar com distribuição Student-t Multivarida.

Figura 9: Correlação Condicional para DLIBOV e DLPETRA4 estimada pelo BEKK-Scalar com Student-t



Os gráficos são parecidos mas a persistência que no modelo *EWMA* era unitária, embora tenha sido usado $\lambda = 0.94$, e agora a persistência é de 0.9882.

6.3 Comparação Riskmetrics e BEKK Scalar e Diagonal no Ox-Metrics

Como os modelos são encaixados é possível comparar entre eles. Temos então:

Tabela 6: Comparação entre os modelos BEKK(1,1) escalar com distribuição Student-t e o EWMA

Progress to date							
Model	T	p		Log-Lik	SC	HQ	AIC
EWMA	5879	2	MaxSQP	-21727.075	7.3944	7.3929	7.3921
Student-t-BEKK-Scalar	5879	8	MaxSQP	-2220.692	7.2310	7.2250	7.2219

Temos então que o modelo BEKK-Scalar com distribuição Student-t é melhor.

7 Modelos Baseados em GARCH Univariados - Correlação Condicional Constante

No modelo de Correlação Condicional Constante temos que a matriz de variância-covariância é dada por:

$$\mathbf{H} = \Delta \mathbf{R} \Delta \quad (15)$$

onde \mathbf{R} é a matriz de correlação e Δ é uma matriz diagonal com os desvios padrões na diagonal.

Na formulação dada em Bollerslev (1990) têm-se:

$$\mathbf{H}_t = \Delta_t \mathbf{R} \Delta_t \quad (16)$$

Agora Δ_t é dada por:

$$\Delta_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1t} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{kt} \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde σ_{it} segue um modelo na classe XARCH univariado para $i = 1, \dots, k$.

7.1 Estimação do CCC no Ox

Temos o seguinte programa OX-GARCH-CCC que estima o CCC para estes dois ativos usando GARCH univariados para cada $\sigma_{i,t}^2$ com $i = 1, 2$. O programa permite estimar com as distribuições Normal e Studen-t Multivariadas.

A tabela (7) compara os dois CCC com as duas distribuições.

Tabela 7: Comparação entre os modelos CCC usando GARCH univariados para $\sigma_{i,t}^2$ com $i = 1, 2$, com as distribuições Normal e Studen-t Multivariadas

Progress to date							
Model	T	p		Log-Lik	SC	HQ	AIC
N-CCC	5879	1	MaxSQP	-21656.718	7.3690	7.3682	7.3678
Student-t-CCC	5879	2	MaxSQP	-21333.553	7.2605	7.2590	7.2582

O melhor modelo é o Student-t-CCC.

Mas os modelos CCC permitem utilizar todos os modelos univariados apresentados anteriormente para modelar $\sigma_{i,t}^2$ com $i = 1, 2$.

Como o melhor modelo foi um *FIAPARCH* vamos estimar este modelo, com as duas distribuições e comparar com o Student-t-CCC. A tabela (7) compara os dois CCC com as duas distribuições.

Tabela 8: Comparação entre os modelos CCC usando FIAPARCH univariados para $\sigma_{i,t}^2$ com $i = 1, 2$, com as distribuições Normal e Student-t Multivariadas

Progress to date							
Model	T	p		Log-Lik	SC	HQ	AIC
N-CCC-FIAPARCH	5879	1	MaxSQP	-21510.652	7.3193	7.3185	7.3181
Student-t-CCC-FIAPARCH	5879	2	MaxSQP	-21239.012	7.2283	7.2269	7.2261

Temos que o melhor modelo é o Student-t-CCC-FIAPARCH. Mas ao compararmos com a tabela (6) temos que para o critério SC o melhor modelo é Student-t-CCC-FIAPARCH, mas pelos critérios AIC e HQ o melhor modelo passa a ser Student-t-BEKK-Scalar.

7.2 Variância e Covariância estimadas no CCC

Figura 10: Variâncias Condicionais para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-CCC-FIAPARCH

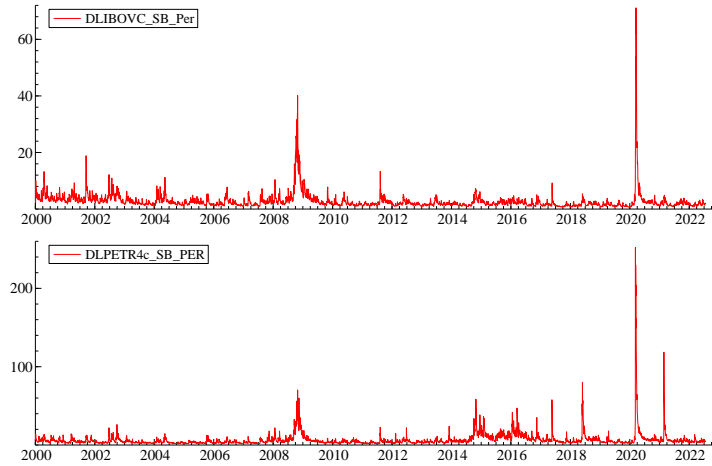
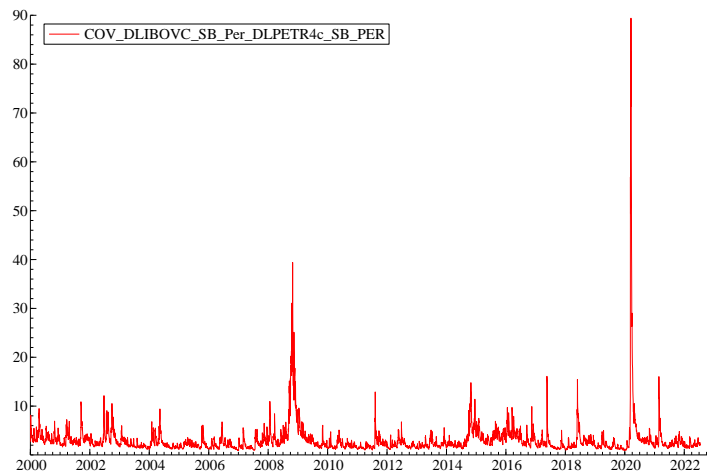
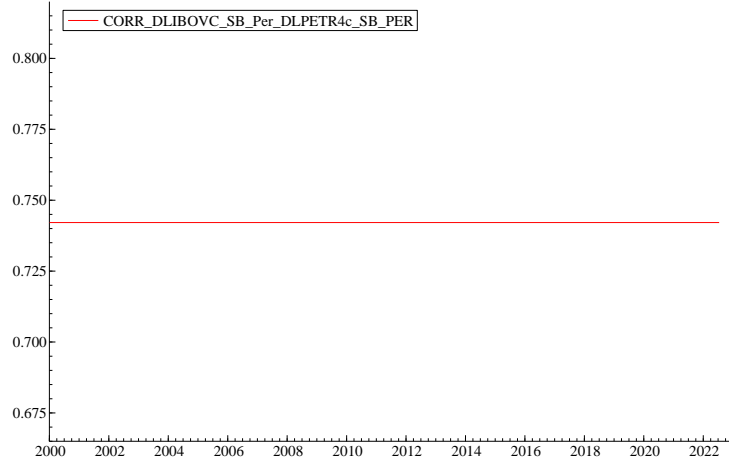


Figura 11: Covariância Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-CCC-FIAPARCH



7.3 Correlação estimada no Modelo CCC no OxMetrics

Figura 12: Correlação Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-CCC-FIAPARCH



8 Modelos de correlação condicional dinâmica (DCC)

A grande restrição do modelo de correlação constante reside no fato da matriz correlação temporal dos ativos serem constantes ao longo do tempo.

Dois trabalhos recentes na literatura tentam relaxar a hipótese de correlação constante – dando generalidade aos mesmos - mas sem perda a simplicidade na estimação. São eles os modelos de Tse and Tsui (2002) e Engle and Sheppard (2001).

8.1 DCC de Tse & Tsui

O Modelo de correlação condicional dinâmica (DCC) de Tse and Tsui (2002) – DCC-TT – pode ser definido da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_t = \Delta_t \mathbf{R}_t \Delta_t \quad (18)$$

na qual Δ_t pode ser definida como sendo uma matriz diagonal com GARCH univariados enquanto \mathbf{R}_t é uma matriz de correlação dos resíduos padronizados cuja dinâmica é dada por:

$$\mathbf{R}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) \mathbf{R} + \theta_1 \Psi_{t-1} + \theta_2 \mathbf{R}_{t-1} \quad (19)$$

$$\Psi_{i,j,t-1} = \frac{\sum_{m=1}^M u_{it-m} u_{jt-m}}{\sqrt{\left(\sum_{m=1}^M u_{it-m}^2 \right) \left(\sum_{m=1}^M u_{jt-m}^2 \right)}}, \quad i \leq i < j \leq N \quad (20)$$

onde $u_{it} = \epsilon_{it} / \sigma_{it}$.

A matriz Ψ_{t-1} é a matriz de correlação amostral de $(u_{t-1}, \dots, u_{t-M})$. Usando a notação de Tse and Tsui (2002), definindo E_{t-1} como uma matriz $N \times M$ dada por

$E_{t-1} = (u_{t-1}, \dots, u_{t-M})$ e B_{t-1} uma matriz $N \times N$ diagonal onde o i -ésimo elemento da diagonal é $\sum_{m=1}^M u_{it-m}^2$ para $i = 1, \dots, N$, temos:

$$\Psi_{t-1} = B_{t-1}^{-1} E_{t-1} E_{t-1}' B_{t-1}^{-1}. \quad (21)$$

Observe que se $M = 1$ a matriz Ψ_{t-1} é uma matriz em que todas as entradas são iguais a um. Deste modo a atualização da matriz de variância-covariância por uma matriz de uns não faz sentido.

Temos que $M \geq N$ é uma condição necessária para que Ψ_{t-1} seja positiva-definida. No artigo de Tse and Tsui (2002), eles assumem que $M = N$.

Assumindo normalidade temos que $\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(0, \Delta_t \mathbf{R}_t \Delta_t)$ e log-verossimilhança, ℓ_t da observação \mathbf{y}_t é dada por:

$$\begin{aligned} \ell_t &= -\frac{1}{2} \ln |\Delta_t \mathbf{R}_t \Delta_t| - \frac{1}{2} \mathbf{y}_t' \Delta_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1} \Delta_t^{-1} \mathbf{y}_t \\ &= -\frac{1}{2} \ln |\mathbf{R}_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \ln \sigma_{it}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{y}_t' \Delta_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1} \Delta_t^{-1} \mathbf{y}_t \end{aligned} \quad (22)$$

onde a função de log-verossimilhança da amostra será dada por $\ell = \sum_{t=1}^T \ell_t$. Maximizando esta função condicional em \mathbf{R}_0 , Ψ_0 e \mathbf{y}_0 serem fixos, obtemos os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros que tem as propriedades usuais destes estimadores.

Como observa por Tse and Tsui (2002) em (19) precisamos das condições $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$, e $\theta_1 + \theta_2 \leq 1$ para que a matriz de correlação faça sentido. Como em geral a otimização é feita sem restrição nos parâmetros uma forma de impor estas restrições e maximizar a função de log-verossimilhança irrestrita usando a seguinte transformação $\theta_i = \lambda_i^2 / (1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2)$ para $i = 1, 2$, onde λ_1 e λ_2 são irrestritos e a maximização usa os λ 's em vez dos θ 's.

8.2 DCC de Engle & Sheppard

O Modelo de correlação condicional dinâmica (DCC) de Engle & Shepphard (DCC-ES) utiliza o mesmo modelo que DCC-TT para a correlação condicional dinâmica dada por (18).

Assim como Tse and Tsui (2002), Engle and Sheppard (2001) assumem normalidade temos que $\mathbf{y}_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(0, \mathbf{H}_t)$ e log-verossimilhança, ℓ_t da observação \mathbf{y}_t é dada por:

$$\begin{aligned} \ell_t &\sim -\frac{1}{2} \ln |\mathbf{H}_t| - \frac{1}{2} \mathbf{y}_t' \mathbf{H}_t^{-1} \mathbf{y}_t \\ &= -\frac{1}{2} \ln |\mathbf{R}_t| - \frac{1}{2} \ln |\Delta_t| - \frac{1}{2} \mathbf{y}_t' \Delta_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1} \Delta_t^{-1} \mathbf{y}_t \\ &= -\frac{1}{2} \ln |\mathbf{R}_t| - \ln |\Delta_t| - \frac{1}{2} \varepsilon_t' \mathbf{R}_t^{-1} \varepsilon_t \end{aligned} \quad (23)$$

onde $\varepsilon \sim N(0, \mathbf{R}_t)$ são os resíduos padronizados pelos elementos da diagonal de Δ_t .

Engle and Sheppard (2001) propõe a maximização em duas etapas:

1. No primeiro estágio estime os modelos univariados para as volatilidades de cada componentes \mathbf{y}_t ;

2. Defina $\varepsilon = \Delta_t^{-1} \mathbf{y}_t$ que são as observações (ou resíduos caso os modelo univariados para os retornos tenham estrutura na média condicional) padronizados pelas respectivos desvios padrões condicionais.
3. Agora a log-verossimilhança em (22) depende só dos parâmetros da matriz \mathbf{R}_t , que corresponde ao segundo estágio desta otimização.

Mas, agora a matriz de \mathbf{R}_t é uma matriz de correlação dos resíduos padronizados cuja dinâmica é dada por:

$$\mathbf{Q}_t = \left(1 - \sum_{l=1}^l \alpha_l - \sum_{s=1}^S \beta_s \right) \bar{\mathbf{Q}} + \sum_{l=1}^l \alpha_l \mathbf{u}_{t-1} \mathbf{u}_{t-1}' + \sum_{s=1}^S \beta_s \mathbf{Q}_{t-s} \quad (24)$$

$$\mathbf{R}_t = \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2} \mathbf{Q}_t \text{diag}(\mathbf{Q}_t)^{-1/2} \quad (25)$$

onde $\bar{\mathbf{Q}}$ é a matriz de covariância não condicional dos resíduos padronizados do primeiro estágio da otimização.

8.3 Estimação do DCC - TT e do DCC-ES

Os programas DCC-TT e DCC-ES estimam os modelos DCC-TT e o DCC-ES com modelos univariados GARCH e FIAPARCH para cada componente e com distribuições Normal e Student-t.

Temos a tabela (9) que compara estes modelos.

Tabela 9: Comparação entre os modelos DCC-ES e DCC-TT usando GARCH univariados e FIAPARCH univariados para $\sigma_{i,t}^2$ com $i = 1, 2$, com as distribuições Normal e Student-t Multivariadas

Progress to date							
Model	T	p		Log-Lik	SC	HQ	AIC
N-GARCH-DCC-ES	5879	3	MaxSQP	-21569.120	7.3421	7.3399	7.3387
Student-t-GARCH-DCC-ES	5879	4	MaxSQP	-21263.629	7.2397	7.2367	7.2351
N-FIAPARCH-DCC-ES	5879	3	MaxSQP	-21444.021	7.2996	7.2973	7.2961
t-FIAPARCH-ES	5879	4	MaxSQP	-21180.292	7.2113	7.2083	7.2068
N-GARCH-TT	5879	3	MaxSQP	-21511.810	7.3226	7.3204	7.3192
t-GARCH-TT	5879	4	MaxSQP	-21220.469	7.2250	7.2220	7.2204
N-FIAPARCH-TT	5879	3	MaxSQP	-21404.070	7.2860	7.2837	7.2826
t-FIAPARCH-TT	5879	4	MaxSQP	-21146.798	7.1999	7.1970	7.1954

Pelo resultado da tabela (9) temos que o melhor modelo é Student-t DCC-TT com FIAPARCH modelos para as volatilidades dos componentes de DLIBOV e DLPETR4.

8.4 Variância e Covariância estimadas no DCC-TT

Figura 13: Variâncias Condicionais para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-DCC-TT-FIAPARCH

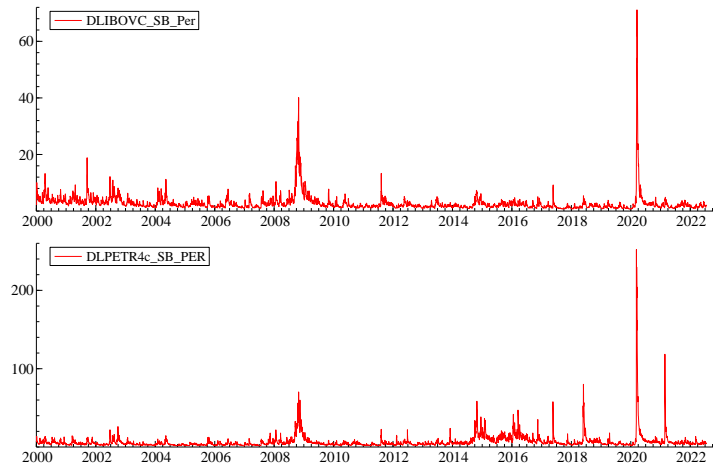
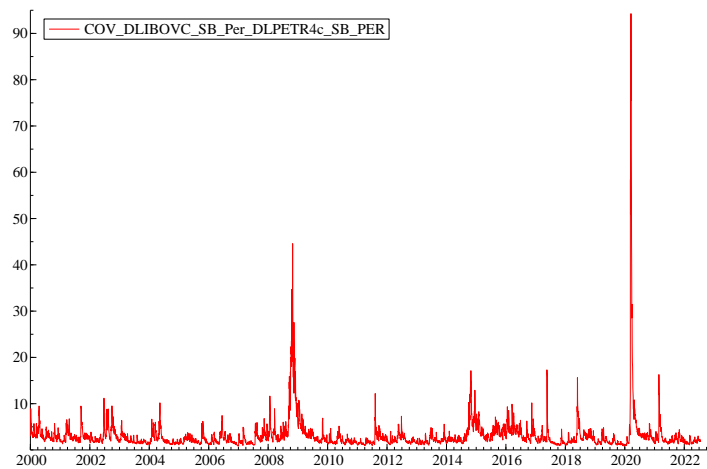
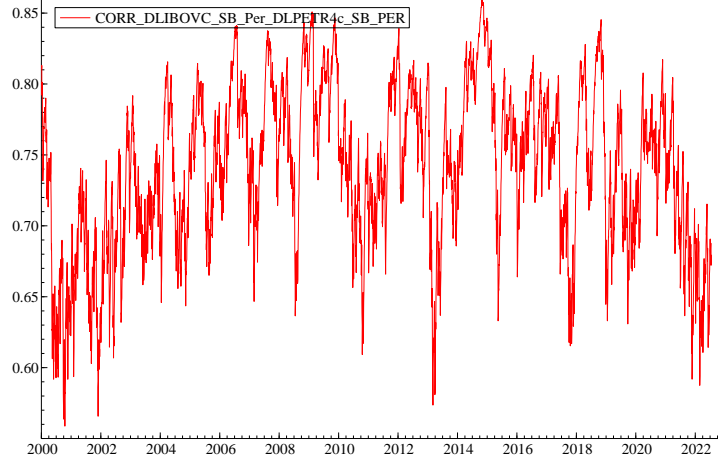


Figura 14: Covariância Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-DCC-TT-FIAPARCH



8.5 Correlação estimada no Modelo DCC-TT

Figura 15: Correlação Condicional para DLIBOV e DLPETR4 estimada pelo Student-t-DCC-TT-FIAPARCH



8.6 Modelo de Equicorrelação Condicional - Deco

O Modelo de equicorrelação dinâmica (Deco) de Engle and Kelly (2012) utiliza o mesmo modelo que DCC-TT para a correlação condicional dinâmica dada por (18), mas agora a matriz \mathbf{R}_t agora é definida por:

$$\mathbf{R}_t = (1 - \rho_t)\mathbf{I}_N + \rho_t\mathbf{J}_N \quad (26)$$

onde ρ_t é a equicorrelação, \mathbf{I}_N é a matriz identidade de dimensão N , e \mathbf{J}_N é uma matriz $N \times N$ de uns.

O Lema 2.1 de Engle and Kelly (2012) apresentam a inversa e o determinante da matriz \mathbf{R}_t dada em (26) que são dadas por:

$$\mathbf{R}_t^{-1} = \frac{1}{1 - \rho_t}\mathbf{I}_N - \frac{\rho_t}{(1 - \rho_t)(1 + (n - 1)\rho_t)} \quad (27)$$

e

$$\det(\mathbf{R}_t) = (1 - \rho_t)^{n-1}(1 + (n - 1)\rho_t) \quad (28)$$

E mostram também que a inversa existe se e só, emte se $\rho_t \neq 1$ e $\rho_t \neq \frac{-1}{n-1}$ e será positiva definida se $\rho_t \in (\frac{-1}{n-1}, 1)$.

Desta forma podemos, assumindo normalidade, temos que \mathbf{y}_t segue um modelo DECO se $\mathbf{y}_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim N_N(0, \mathbf{H}_t)$ onde \mathbf{H}_t é dado por (18) e \mathbf{R}_t por (27) e ρ_t é a equicorrelação dinâmica.

A log-verossimilhança neste caso é semelhante a (23) e a maximização também é feita em dois estágios.

8.7 cDCC

Aielli (2013)

8.8 aDCC

9 Previsão em Modelos GARCH Multivariados

Previsão para Modelos GARCH Multivariados é obtida de forma análoga as previsões que são feitas para a modelos VAR para a média.

Por exemplo assumindo que o modelo estimado é do tipo DVEC(1,1), isto é,

$$\mathbf{H}_t = \Omega + \mathbf{A}_1 \otimes (\epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1}) + \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{H}_{t-1} \quad (29)$$

onde (29) foi estimado usando as observações $t = 1, \dots, T$

Desejamos fazer previsões l passos a frente, isto é, desejamos obter $E_T(\mathbf{H}_{T+l})$ para $l = 1, 2, \dots$. Para o caso em que $l = 1$, temos:

$$\begin{aligned} E_T(\mathbf{H}_{T+1}) &= \Omega + \mathbf{A}_1 \otimes E_T(\epsilon_T \epsilon'_T) + \mathbf{B}_1 \otimes E_T(\mathbf{H}_T) \\ &= \Omega + \mathbf{A}_1 \otimes \epsilon_T \epsilon'_T + \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{H}_T \end{aligned} \quad (30)$$

e para $l = 2$, temos:

$$\begin{aligned} E_T(\mathbf{H}_{T+2}) &= \Omega + \mathbf{A}_1 \otimes E_T(\epsilon_{T+1} \epsilon'_{T+1}) + \mathbf{B}_1 \otimes E_T(\mathbf{H}_{T+1}) \\ &= \Omega + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1) \otimes E_T(\mathbf{H}_{T+1}) \end{aligned} \quad (31)$$

10 CAPM usando DCC-Tse-Tsui

Uma forma alternativa de estimar o beta do CAPM é através de modelo GARCH multivariado uma vez que sabemos que

$$\beta_t = \frac{\text{cov}(r_i, r_m | \mathcal{F}_{t-1})}{\text{var}(r_m | \mathcal{F}_{t-1})} \quad (32)$$

onde tanto a covariância quanto a variância podem ser estimadas usando um modelo multivariado de volatilidade.

E o α_t será definido por:

$$\alpha_t = \bar{r}_i - \beta_t \times \bar{r}_m \quad (33)$$

Usamos um modelo DCC-Tse-Tsui para os excessos de retorno da PETR4 contra o excesso de retorno do mercado (IBOV).

Abaixo são apresentados a correlação condicional entre estes dois ativos e o beta condicional estimado.

Figura 16: β_t e α_t para DCC-TT-FIAGARCH

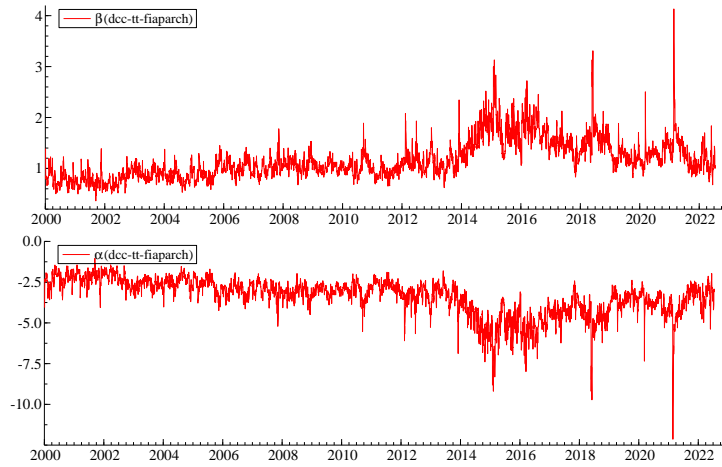
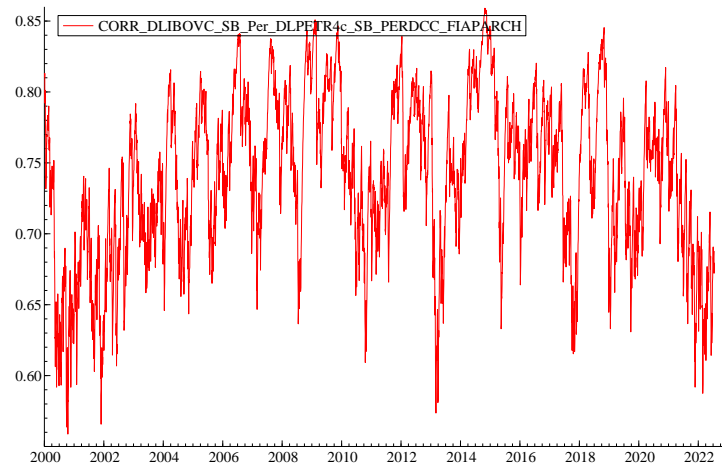


Figura 17: Correlação Condicional para DCC-TT-FIAPARCH



11 Reference

Referências

- Aielli, G. P. (2013). Dynamic conditional correlation: On properties and estimation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 31(3):282–299.
- Bauwens, L., Laurent, S., and Rombouts, J. V. K. (2006). Multivariate GARCH models: a survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21(1):79–109.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized arch model. *The Review of Economics and Statistics*, 72(3):498–505.

- Burns, P., Engle, R. F., and Mezrich, J. J. (1998). Correlations and volatilities of asynchronous data. *The Journal of Derivatives*, 5(4):7–18.
- Engle, R. and Kelly, B. (2012). Dynamic equicorrelation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 30(2):212–228.
- Engle, R. and Sheppard, R. (2001). Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH. Technical report, UCSD.
- Sheppard, K. (2020). Financial econometrics notes.
- Sims, C. A. (1980). Macroeconomics and reality. *Econometrica*, 48(1):1–48.
- Tse, Y. K. and Tsui, A. K. C. (2002). A multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3):351–362.