Testes de Raízes Unitárias

Pedro Valls*
CEQEF e EESP-FGV

Sumário

1 Introdução **5**
1.1 Inspeção Gráfica - Gráfico contra o tempo versus FAC e FACP 5

2 Diferença Estacionária X Tendência Estacionária **12**
2.1 Destrendando x4 13
2.2 Diferenciando a série x2 13
2.3 Diferenciando a série x4 14

2.3.1 Exercícios 18

3 Variáveis Integradas e Testes de Raízes Unitárias **19**
3.1 Introdução 19
3.2 Estimadores de MQO para (5) e suas propriedades 20
3.2.1 Exercícios 21
3.3 Estimadores de MQO para (4) e suas propriedades 21

3.4 Testes de Raízes Unitárias de Dickey & Fuller 24
3.4.1 Programa no R para simular a distribuição do teste de raíz unitária 26
3.4.2 Exercícios 28
3.5 Testes de Raíz Unitária de Phillips & Perron 28
3.6 Teste para Múltiplas Raízes Unitárias. 30

*CEQEF e EESP-FGV, Rua Doutor Plínio Barreto 365, s.1319, 01313-905 São Paulo, S.P., Brasil, E-mail: pedro.valls@fgv.br.

3.7 Teste Dickey & Fuller com Dados Destrendado por GLS (DF-GLS) 31
3.8 Teste Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin (KPSS) 32

4 Testando Raízes Unitárias no R 32
4.1 Teste para as séries geradas 33
4.2 Teste ADF de Raíz Unitária para Log do Fechamento do Bovespa 34
4.3 Teste Phillips-Perron de Raíz Unitária para Log do Fechamento do Bovespa 39
4.4 Teste Elliot, Rothemberg & Stock (DFGLS) de Raíz Unitária para Log do Fechamento do Bovespa 43
4.5 Teste KPSS de Raíz Unitária para Log do Fechamento do Bovespa 45
4.5.1 Exercícios 46

Lista de Tabelas

1 Teste ADF ($I(1) \times I(0)$) com tendêncai determinística para $X1$ 33
2 Teste ADF ($I(1) \times I(0)$) sem constante e tendência determinística para $X3$ 34
3 Teste ADF ($I(3) \times I(2)$) com tendência determinística para $LIBOV$ 35
4 Teste ADF ($I(3) \times I(2)$) sem tendência determinística, mas com constante para $LIBOV$ 35
5 Teste ADF ($I(3) \times I(2)$) sem tendência determinística e constante para $LIBOV$ 36
6 Teste ADF ($I(2) \times I(1)$) com tendência determinística para $LIBOV$ 37
7 Teste ADF ($I(2) \times I(1)$) sem tendência determinística, mas com constante para $LIBOV$ 37
8 Teste ADF ($I(2) \times I(1)$) sem tendência determinística e constante para $LIBOV$ 38
9 Teste ADF ($I(1) \times I(0)$) com tendência determinística para $LIBOV$ 39
10 Teste PP ($I(3) \times I(2)$) com tendência determinística para $LIBOV$ 40

11	Teste PP ($I(3) \times I(2)$) sem tendência determinística mas com constante para $LIBOV$	40
12	Teste PP ($I(2) \times I(1)$) com tendência determinística para $LIBOV$	41
13	Teste PP ($I(2) \times I(1)$) sem tendência determinística, mas com constante para $LIBOV$	42
14	Teste PP ($I(1) \times I(0)$) com tendência determinística para $LIBOV$	42
15	Teste DFGLS ($I(3) \times I(2)$) com tendência determinística para $LIBOV$	43
16	Teste DFGLS ($I(2) \times I(1)$) com tendência determinística para $LIBOV$	44
17	Teste DFGLS ($I(1) \times I(0)$) com tendência determinística para $LIBOV$	44
18	Teste KPSS ($I(0) \times I(1)$) com tendência determinística para $LIBOV$	45
19	Teste KPSS ($I(0) \times I(1)$) com tendência determinística para $DLIBOV$	46

Lista de Figuras

1	Série $x1$: $x1_t = m + 0.95 * (x1_{t-1} - m) + u_t$	6
2	Série $x2$: $x2_t = m + 1.0 * (x2_{t-1} - m) + u_t$	7
3	Série $x3$: $x3_t = m + 1.05 * (x3_{t-1} - m) + u_t$	7
4	ACF e PACF para Séries $x2$ e $x2$	8
5	Série $x4$: $x4_t = (10 + 0.5 * t) + 0.5 * (x4_{t-1} - 10 - 0.5 * (t-1)) + u_t$	9
6	ACF e PACF para Séries $x4$	10
7	Série $x5$: $x5_t = (10 + 0.5 * t) + 1.0 * x5_{t-1} + u_t$	10
8	ACF e PACF para Séries $x5$	11
9	Série $x51$: $x51_t = (10 + 0.5 * t) + 1.0 * (x51_{t-1} - 10 - 0.5 * (t-1)) + u_t$	11
10	ACF e PACF para Séries $x51$	12
11	Série $x4hat$	13
12	Série $dx2$	14
13	Série $dx4$ e $x4hat$	15
14	ACF e PACF para Séries $dx41$ e $x4hat$	16
15	Gráfico da séries $x2hat$	17
16	ACF e PACF para Séries $dx2$, $x2hat$ e $x2$	17

17 S_T e $R_T(r)$ 22
18 Distribuição de ϕ_a 27
19 Distribuição da estatística t_{θ_a} 27

1 Introdução

Como processos não estacionário tem tendência na média e/ou na variância, podemos detectar através do gráfico contra o tempo ou através do correlograma (se decair lentamente começando com a primeira autocorrelação próxima de um) a possível fonte de não estacionaridade.

Uma outra forma, mais formal, é testar a existência de raíz unitária na representação AR do processo. Os testes mais usados na literatura são: ADF de Dickey and Fuller (1979), PP de Phillips and Perron (1988) , KPSS de KKwiatkowski et al. (1992) e DFGLS de Elliott et al. (1996).

Inicialmente vamos apresentar através da inspeção gráfica alguns exemplos que nos permitem ter um pouco da sensibilidade sobre as possíveis fontes de não estacionaridade.

1.1 Inspeção Gráfica - Gráfico contra o tempo versus FAC e FACP

[1]

O seguinte programa gerar processos que são estacionário e não estacionários, onde as fontes de não estacionaridade são na média e/ou na variância. Através do gráfico contra o tempo é possível verificar se a fonte de não estacionaridade é na média e/ou na variância, embora para esta última esta verificação nem sempre é clara.

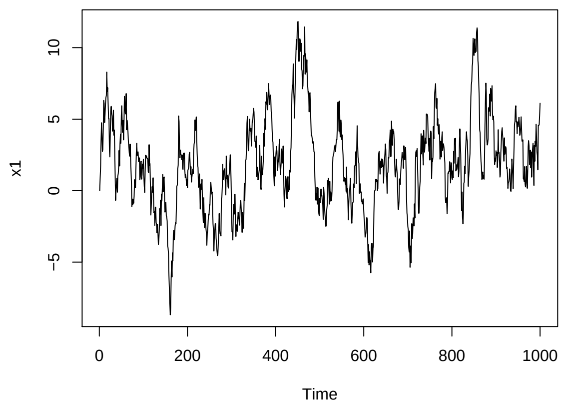
Raíz Unitária - Inspeção Gráfica[2]

O gráfico da variável $x1$ é apresentado abaixo,

[1] As idéias de Johnston and DiNardo (1996) sessão 7.3.1 são usadas nestas sessão, mas com adaptações.

[2] Esta forma de definir $x5$ faz com que a média não condicional seja uma função quadrática do tempo. Uma outra forma de definir $x5$ forçando que a média condicional seja linear é usar expressão `x5=delta0+delta1*@trend +psi2*(x5(-1)-delta0-delta1*(@trend-1))+u` que no programa foi denotado por $x51$.

Figura 1: Série $x1$: $x1_t = m + 0.95 * (x1_{t-1} - m) + u_t$

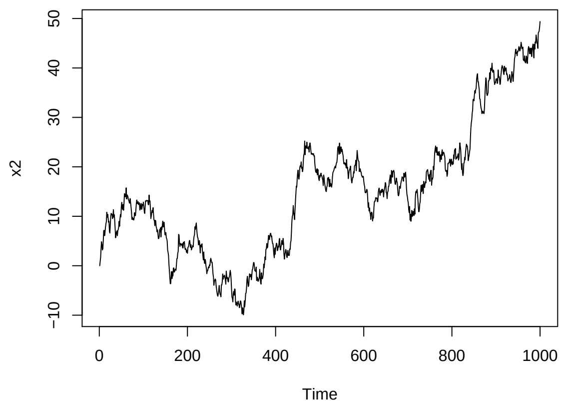


Observe que esta variável cruza frequentemente a sua média, que neste caso é $m = 1$ e portanto deve ser estacionária. Observe como geramos a série sabemos que o coeficiente do $AR(1)$ é $0,95$ e, embora próximo de 1, a série se mantém no intervalo $[-5,4 : 7,4]$.[3] O fato do coeficiente ser próximo de 1 faz com que a série se mantenha fora do intervalo por algum tempo mas volta para dentro do mesmo após um intervalo de tempo finito.

O gráfico abaixo da série $x2$ dá uma idéia de uma série não estacionária na variância, um passeio aleatório, uma vez que a média da série não cresce com o tempo mas a variabilidade sim.

[3]Como variância da série é dada por $\sigma^2/(1-\phi^2)$ e este valor é aproximamente igual a 10, temos que um intervalo de confiança em torno da média será $[m - 2 * (\sqrt{\sigma^2/(1-\phi^2)}) : m + 2 * (\sqrt{\sigma^2/(1-\phi^2)})]$ que dá o intervalo $[-5,4 : 7,4]$.

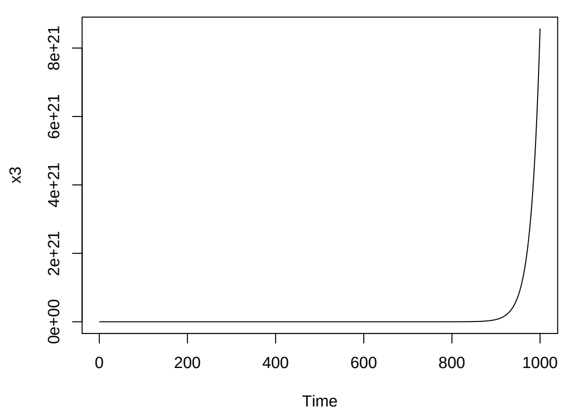
Figura 2: Série $x2$: $x2_t = m + 1.0 * (x2_{t-1} - m) + u_t$



Observe que a série não cruza frequentemente a sua média. Diferente do caso anterior que podiamos definir um intervalo de confiança para a média, neste caso não podemos fazer uma vez que variância do processo é $t\sigma^2$.

A seguir é apresentado o gráfico para a série $x3$.

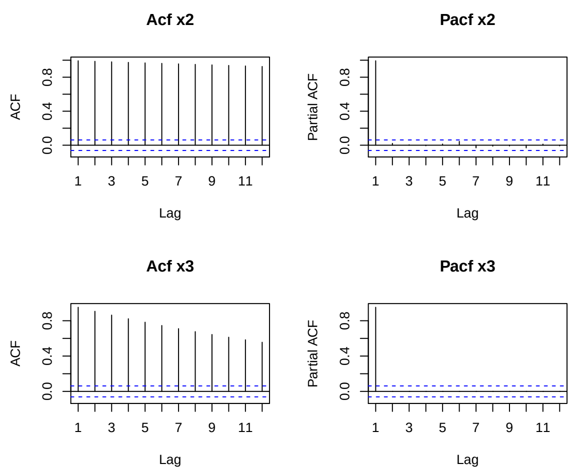
Figura 3: Série $x3$: $x3_t = m + 1.05 * (x3_{t-1} - m) + u_t$



Observe que esta série tem um comportamento explosivo, bem diferente da série $x2$ que era não estacionária na variância.

Por outro lado se fizermos as FAC e FACP para $x2$ e $x3$, gráficos abaixo, ambas as séries parecem não estacionárias na variância, ou passeios aleatórios.

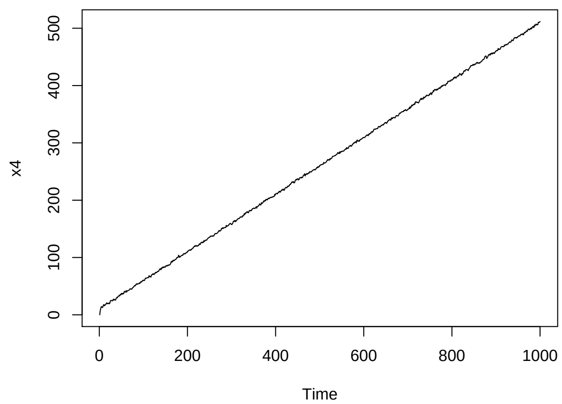
Figura 4: ACF e PACF para Séries $x2$ e $x2$



Observe que ambas as FAC tem primeira autocorrelação próxima de 1, mas para $x3$ as próximas autocorrelações decaem mais rápido do que para a série $x2$.

A seguir é apresentado o gráfico de $x4$.

Figura 5: Série $x4$: $x4_t = (10 + 0.5 * t) + 0.5 * (x4_{t-1} - 10 - 0.5 * (t-1)) + u_t$

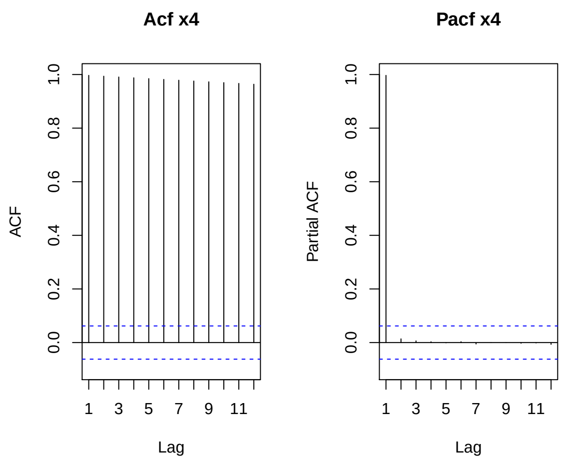


Observe que esta série parece ser uma tendência determinística porque a parte estacionária , $AR(1)$ com coeficiente $0,5$, é dominado pela tendência determinística.

Por outro lado se considerarmos a FAC[4] e FACP para esta série, gráfico abaixo, ela para indistinguível da série $x2$, mostrando que em termos de função de autocorrelação uma série com tendência determinística, também chamada de tendência estacionária, não é diferente de uma série com tendência estocástica, também chamada de diferença estacionária.

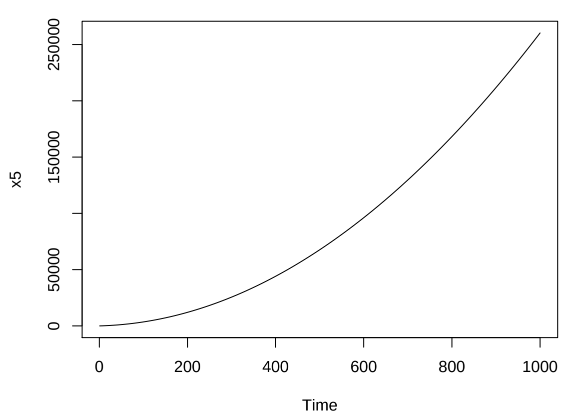
[4]No cálculo da FAC é usada a média global da série, que não é adequado quando a média tem uma tendência. O correto seria usar uma média com a amostra crescente.

Figura 6: ACF e PACF para Séries $x4$



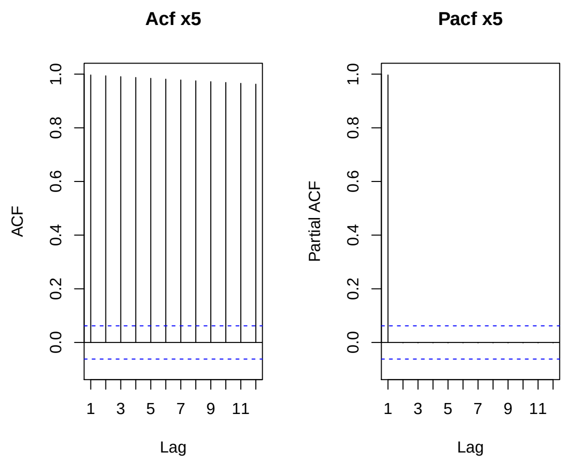
Abaixo é apresentado o gráfico para a série $x5$

Figura 7: Série $x5$: $x5_t = (10 + 0.5 * t) + 1.0 * x5_{t-1} + u_t$



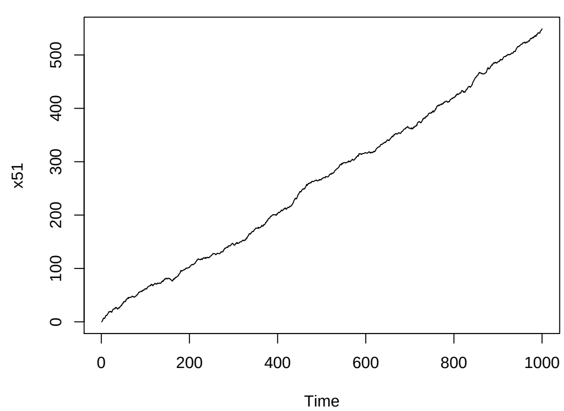
Observe que esta série parece ter um crescimento quadrático. Por outro lado pela FAC e FACP, gráficos abaixo, esta série é indistinguível das séries $x2$ e $x4$. Portanto séries que são tendência estocástica ($x2$) ou são estacionária mas com uma tendência determinística na média ($x4$) ou são tendência estocástica com uma tendência determinística na média ($x5$) tem o mesmo padrão das FAC e FACP. Mas os gráficos contra o tempo destas séries nos permitem distinguí-las.

Figura 8: ACF e PACF para Séries $x5$



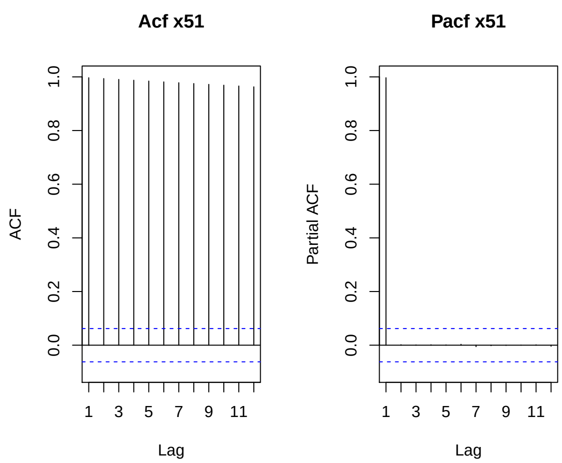
Abaixo é apresentado o gráfico para a série $x51$

Figura 9: Série $x51$: $x51_t = (10+0.5*t)+1.0*(x51_{t-1}-10-0.5*(t-1))+u_t$



Observe que esta série agora não tem um crescimento quadrático, como a série $x5$. Por outro lado pela FAC e FACP, gráficos abaixo, esta série é indistinguível das séries $x2$ e $x4$. Portanto séries que são tendência estocástica ($x2$) ou são estacionária mas com uma tendência determinística na média ($x4$) ou são tendência estocástica com uma tendência determinística na média ($x5$) ou são estacionária sobre uma tendência determinística na média ($x51$)tem o mesmo padrão das FAC e FACP. Mas os gráficos contra o tempo destas séries nos permitem distinguí-las.

Figura 10: ACF e PACF para Séries $x51$



2 Diferença Estacionária X Tendência Estacionária

Observe que $x2$ e $x4$ eram não estacionárias, mas o tipo de não estacionaridade era diferente.

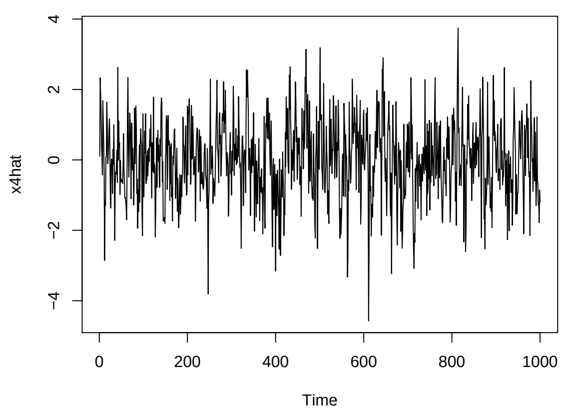
Observe que ao se tomar primeira diferença na série $x2$ obtém-se uma série estacionária – diferença estacionária.

Para a série $x4$ a não estacionaridade é na média uma vez que $E(x4) = \delta_0 + \delta_1 t$, $Var(x4) = \sigma^2$ que é constante e as autocorrelações teóricas de $x4$ tem um comportamento de um $AR(1)$ estacionário, embora a FAC estimada não tenha este padrão devido ao efeito de estimação da média. Portanto se retirarmos a tendência determinística a série será estacionária – tendência estacionária.

2.1 Destrendando x4

O gráfico abaixo apresenta o resíduo da regressão de $x4$ numa tendência determinística. A série $x4hat$ é claramente estacionária

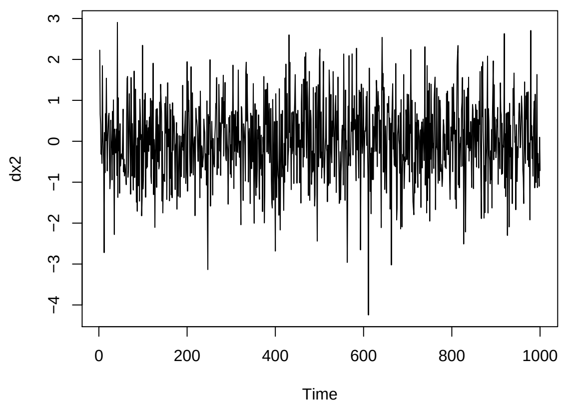
Figura 11: Série $x4hat$



2.2 Diferenciando a série x2

O gráfico abaixo apresenta a primeira diferença de $x2$. A série $Dx2$ é claramente estacionária

Figura 12: Série $dx2$

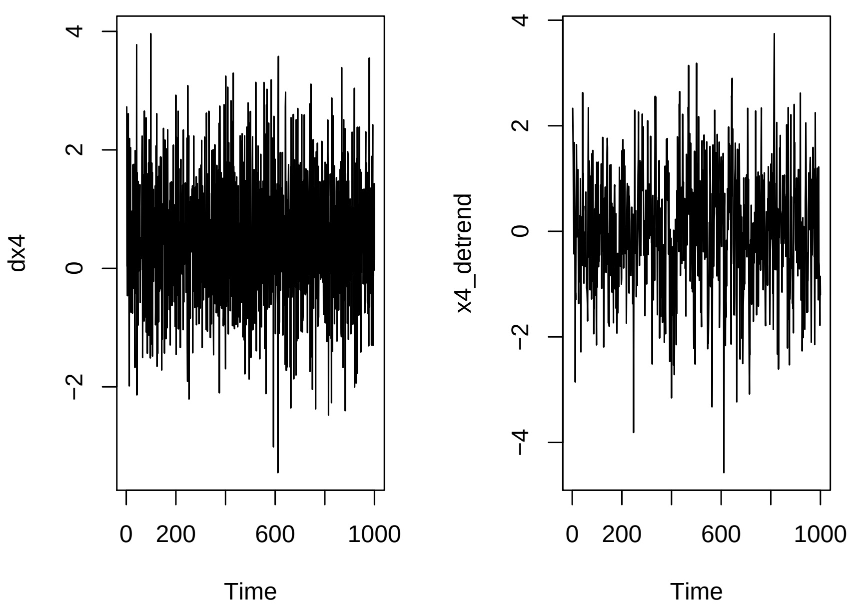


2.3 Diferenciando a série x4

Como as FAC e FACP de $x4$ são indistinguíveis de uma série com tendência estocástica, ao se diferenciar a série $x4$, deveriamos ter uma série estacionária.

O gráfico abaixo apresenta tanto a série $Dx4$, que corresponde a primeira diferença da série $x4$, quanto a série $x4hat$.

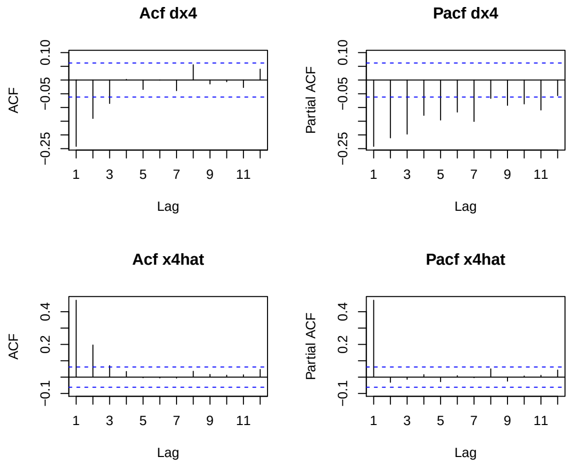
Figura 13: Série $dx4$ e $x4hat$



Observe pelos gráficos acima que $Dx4$ tem um intervalo de variação maior do que $x4hat$. Por outro lado como a série $Dx4$ oscila mais, a estrutura de autocorrelação é maior do que da série $x4hat$, isto é a transformação primeira diferença aumentou não só a variabilidade dos dados mais também a estrutura de autocorrelação, sendo uma indicação de que esta transformação é inadequada para os dados.

Abaixo são apresentadas as FAC e FACP para as duas séries e podemos observar que a FACP para a série $Dx4$ indica um aumento na estrutura de autocorrelação do processo.

Figura 14: ACF e PACF para Séries $dx41$ e $x4hat$



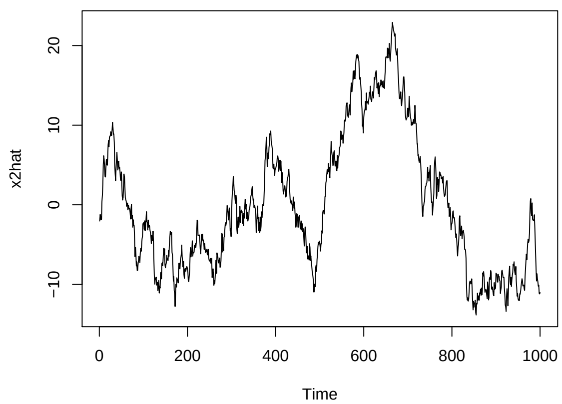
Observe que a séries $x4hat$ é um $AR(1)$ com $\phi = 0,5$, logo é esperado que a FAC decaem exponencialmente e a FACP tenha só a primeira autocorrelação parcial diferente de zero, o que observado no gráfico (14). Quando dizemos que a série $Dx4$ teve um aumento na estrutura de autocorrelação, em comparação com $x4hat$ estamos nos referindo a sua $FACP$ que decae muito mais lentamente do que a da outra série uma vez que se introduz uma estrutura $MA(1)$ nos erros.

Programa no R para "destrendar "a série $x4$, criar as séries $x4hat$ e $Dx4$, fazer o gráfico contra o tempo das duas séries assim como as FAC e FACP é apresentado abaixo:

Programa para criar $x4hat$ e $dx4$

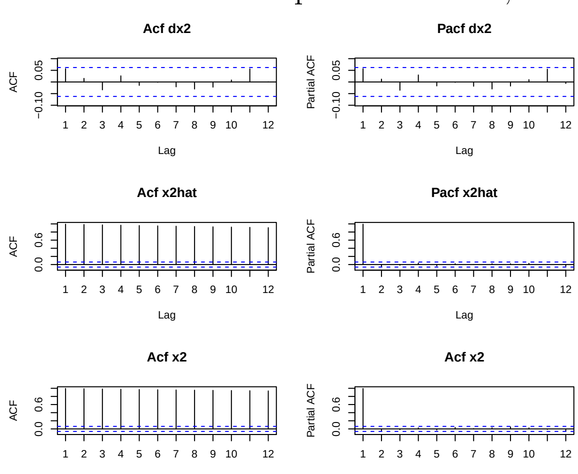
Suponha que em vez de diferenciar a série $x2$, que é a transformação adequada para tornar a série estacionária, a tendência determinística é retirada desta série através de uma regressão. Abaixo é apresentado o gráfico de $x2hat$ que corresponde ao resíduo da regressão de $x2$ numa tendência determinística.

Figura 15: Gráfico da séries $x2hat$



Comparando-se este gráfico com a Figura 2, observamos que a série continua tendo tendência, logo "destrendar "a série não resolveu o problema e portanto a tendência deve ser estocástica. Isto pode ser observado pelo gráfico abaixo das FAC e FACP da série $x2hat$ que apresenta o mesmo padrão da série $x2$.

Figura 16: ACF e PACF para Séries $dx2$, $x2hat$ e $x2$



Programa no R para destrendar a série $x2$, criar as séries $x2hat$ e $Dx2$, fazer o gráfico contra o tempo das duas séries assim como as FAC e FACP é apresentado abaixo:

Programa para criar $x2hat$ e $dx2$

2.3.1 Exercícios

1. Considere o seguinte processo gerador de dados

$$x_t = 0.5 + 2 * t + x_{t-1} + u_t \tag{1}$$

com $u_t \sim NI(0,1)$ e assumindo que x_0 é fixo e diferente de zero.

Mostre que a média de x_t é uma função quadrática do tempo, isto é, $E(x_t) = x_0 + 1.5 * t + t^2$.

Assumindo que o tamanho da amostra é 1000, faça um programa para gerar o modelo acima e faça o gráfico contra o tempo e comente. Faça as FAC e FACP e comente.

2. Compare as semelhanças e dessemelhanças entre o modelo gerado em (1) e $x5$ do texto.

3. Considere o seguinte processo gerador de dados

$$x_t = 0.5 + 2 * t + (x_{t-1} - 0.5 - 2 * (t-1)) + u_t \tag{2}$$

com $u_t \sim NI(0,1)$ e assumindo que x_0 é fixo e diferente de zero.

Obtenha a média não condicional de x_t. Qual a diferença em relação ao Exercício 1 e porque?

Assumindo que o tamanho da amostra é 1000, faça um programa para gerar o modelo acima e faça o gráfico contra o tempo e comente. Faça as FAC e FACP e comente.

3 Variáveis Integradas e Testes de Raízes Unitárias

3.1 Introdução

Considere o modelo de passeio aleatório com "drift", isto é:

$$\Delta X_t = \alpha + u_t \quad \text{com} \quad u_t \sim IID(0, \sigma_u^2) \quad \text{para} \quad t = 1, ..., T \tag{3}$$

que pode ser escrito da seguinte forma:

$$X_t = X_0 + \alpha \; t + \sum_{j=0}^{t-1} u_{t-j} \tag{4}$$

Para as representações (3) e (4), temos as seguintes propriedades:

Passeio aleatório com drift - (3)	Integração do Passeio Aleatório com drift-(4)
$E(\Delta X_t) = \alpha$	$E(X_t) = X_0 + \alpha \; t$
$E(\Delta X_t - \alpha)^2 = Var(u_t) = \sigma_u^2$	$E(X_t - X_0 - \alpha \; t)^2 = Var\left(\sum_{j=0}^{t-1} u_{t-j}\right) = t\sigma_u^2$
$Cov(\Delta X_t : \Delta X_s) = 0$	$Cov(X_t : X_s) = s\sigma_u^2$

observe que (3) é estacionário enquanto que (4) viola as três condições de estacionaridade.

O modelo de tendência determinística é dado por:

$$X_t = \mu_0 + \alpha_0 \; t + u_t \quad \text{com} \quad u_t \sim IID(0, \sigma_u^2) \quad \text{para} \; t = 1, ..., T \tag{5}$$

que tem as seguintes propriedades:

Tendência Determinística - (5)
$E(X_t) = \mu_0 + \alpha_0 \; t$
$E(X_t - \mu_0 - \alpha_0 \; t)^2 = Var(u_t) = \sigma_u^2$
$Cov(X_t : X_s) = 0$

Desejamos obter os estimadores de mínimos quadrados ordinários para os parâmetros de (4) e (5), assim como as suas respectivas propriedades.

3.2 Estimadores de MQO para (5) e suas propriedades

Seja $\theta = (\mu_0 : \alpha_0)'$ temos que a distribuição dos EMQO destes parâmetros é dada por:[5]

$$T_T(\widehat{\theta} - \theta) = V_T^{-1} \varphi_T \tag{6}$$

onde

$$T_T = diag\{T^{1/2} : T^{3/2}\} \tag{7}$$

$$V_T = T_T^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} z_t \; z_t' \right) T_T^{-1} \tag{8}$$

$$z_t = (1 : t)' \tag{9}$$

$$\sum_{t=1}^{T} z_t \; z_t' = \begin{pmatrix} T & \sum\limits_{t=1}^{T} t \\ \sum\limits_{t=1}^{T} t & \sum\limits_{t=1}^{T} t^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

e observe que

$$\sum_{t=1}^{T} t = T(T+1)/2 = O(T^2) \tag{11}$$

$$\sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{1}{6} T(T+1)(2T+1) = O(T^3) \tag{12}$$

$$\varphi_T = T_T^{-1} \sum_{t=1}^{T} z_t \; u_t' \tag{13}$$

então

$$V_T \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{14}$$

[5]Para um formulação geral veja Mann and Wald (1943) ou Hendry (1995)

$$\varphi_T = \begin{bmatrix} T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T} u_t \\ T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T} t\ u_t \end{bmatrix} \underrightarrow{D} \begin{bmatrix} N(0,\sigma_u^2) \\ N(0,\frac{\sigma_u^2}{3}) \end{bmatrix} \tag{15}$$

então

$$T_T(\widehat{\theta}-\theta)\underrightarrow{D} \begin{bmatrix} N(0,\sigma_u^2) \\ N(0,3\sigma_u^2) \end{bmatrix} \tag{16}$$

Deste modo a teoria assintótica usual vale, embora a taxa de convergência da tendência , $T^{3/2}$, seja diferente da usual, $T^{1/2}$.

3.2.1 Exercícios

1. Construa um experimento de Monte Carlo para ilustrar as distribuições assintótica dos estimadores de MQO do modelo (5).

2. Construa um experimento de Monte Carlo para ilustrar as distribuições assintótica dos estimadores de MQO do modelo (5), mas com $\alpha_0 = 0$, e compare com o exercício anterior.

3.3 Estimadores de MQO para (4) e suas propriedades

Considere o modelo (4) com $\alpha = 0$, $X_0 = 0$ e $\sigma_u^2 = 1$, isto é

$$X_t = \sum_{j=0}^{t-1} u_{t-j} = S_t \tag{17}$$

temos então as seguintes propriedades

(i) $S_0 = X_0 = 0$

(ii) $\overline{u} = \frac{1}{T} S_T$

(iii) $0 \leq k < \tau < T$; $E[S_T - S_k] = 0$

(iv) $0 \leq k < \tau < T$; $E[S_T - S_k]^2 = (T-k)$

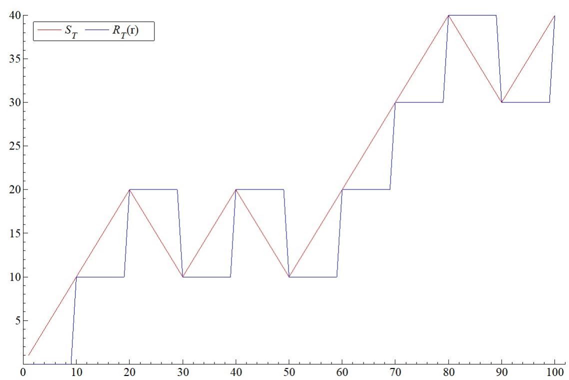
(v) $0 \leq k < \tau < T$; $E[(S_T - S_\tau)(S_{\tau-1} - S_k)] = 0$

Observe que estas propriedades implicam que $S_T \sim N(0, T)$ e que $S_t = S_{t-1} + X_t$. Observe que os incrementos de S_T são independentes e limitados, embora a própria série S_T seja uma passeio aleatório.

Seja $[rT]$ e defina $R_T(r) = \frac{S_{[rT]}}{\sqrt{T}}$ para $r \in [0, 1]$ que é uma função contínua entre os saltos. Quando $t \longrightarrow \infty$ temos que $R_T(r)$ é densa no $[0, 1]$ sendo que o eixo horizontal permanece fixo e o eixo vertical aumenta sem limites.

O gráfico abaixo apresenta uma realização de S_T e $R_T(r)$ para $T = 10$.

Figura 17: S_T e $R_T(r)$



Observe que $R_T(r)$ é definido da seguinte forma:

$$R_T(r) = \frac{S_{[rT]}}{\sqrt{T}} = \frac{S_{t-1}}{\sqrt{T}} \text{ para } \frac{t-1}{T} \leq r < \frac{t}{T} \text{ e } t = 1, ..., T \tag{18}$$

o que implica em $R_T(r) \Rightarrow W(r)$, isto é $R_T(r)$ converge em distribuição a $W(r)$ que é um passeio aleatório a tempo contínuo definido em $[0, 1]$ este resultado é conhecido como o Teorema de Donsker [ver Billingsley (1999)].

Observe que o modelo (3), quando $\alpha = 0$ e $\sigma_u^2 = 1$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$X_t = X_{t-1} + u_t \tag{19}$$

e temos que o estimador de MQO de $\phi = 1$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi} &= \frac{\sum\limits_{t=1}^{t} X_t \ X_{t-1}}{\sum\limits_{t=1}^{t} X_{t-1}^2} = 1 + \frac{\sum\limits_{t=1}^{t} u_t \ X_{t-1}}{\sum\limits_{t=1}^{t} X_{t-1}^2} \\
\widehat{\phi} - 1 &= \frac{\sum\limits_{t=1}^{t} u_t \ X_{t-1}}{\sum\limits_{t=1}^{t} X_{t-1}^2} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{t} u_t \ S_{t-1}}{\sum\limits_{t=1}^{t} S_{t-1}^2} \qquad (20)
\end{aligned}$$

Temos as seguintes propriedades para S_t:[6]

$$T^{-3/2} \sum_{t=1}^{T} S_t \implies \int_0^1 W(r) \ dr \qquad (21)$$

$$T^{-2} \sum_{t=1}^{T} S_t^2 \implies \int_0^1 [W(r)]^2 \ dr \qquad (22)$$

$$T^{-1} \sum_{t=1}^{T} S_{t-1} u_t \implies \frac{1}{2}(W^2(1) - 1) \qquad (23)$$

Agora (20) pode ser re-escrito da seguinte forma:

$$T(\widehat{\phi} - 1) = \frac{T^{-1} \sum\limits_{t=1}^{t} u_t \ S_{t-1}}{T^{-2} \sum\limits_{t=1}^{t} S_{t-1}^2} \qquad (24)$$

e substituindo-se (22) e (23) em (24) temos:

$$T(\widehat{\phi} - 1) \implies \frac{\frac{1}{2}(W^2(1) - 1)}{\int_0^1 [W(r)]^2 \ dr} \qquad (25)$$

[6]Estes resultados estão em Phillips (1987) e também de uma forma mais didática em Banerjee et al. (1993).

Observe que a distribuição assintotica deste estimador não é normal, como no caso em que $\phi \in (-1,1)$. É uma função de $W(.)$ que é também chamado de Movimento Browniano. Além disto a taxa de convergência do estimador é T em vez de $T^{1/2}$, isto é, o estimador converge mais rapidamente para o parâmetro verdadeiro.

Podemos também obter a distribuição da estatística $t = \frac{(\widehat{\phi}-1)}{dp(\widehat{\phi})}$ que seria o correspondente a estatística $t - Student$ para testar a hipótese de que $\phi = 1$.

Observe que

$$dp(\widehat{\phi}) = \left\{ \frac{s_T^2}{\sum_{t=1}^{T} S_t^2} \right\}^{1/2} \tag{26}$$

e como $s_T^2 = \sum_{t=1}^{T} (X_t - \widehat{\phi} X_{t-1})^2/(T-1)$ é um estimador consistente da variância e o denominador de (26) quando dividido por T^2 converge por (22) temos que (26) vai convergir para

$$T dp(\widehat{\phi}) \Longrightarrow \left(\int_0^1 [W(r)]^2 \, dr \right)^{-1/2}$$

Temos então a seguinte distribuição

$$\frac{(\widehat{\phi}-1)}{dp(\widehat{\phi})} = \frac{T(\widehat{\phi}-1)}{T dp(\widehat{\phi})} \Longrightarrow \frac{\frac{1}{2}(W^2(1)-1)}{\int_0^1 [W(r)]^2 \, dr} \left(\int_0^1 [W(r)]^2 \, dr \right)^{1/2} = \frac{\frac{1}{2}(W^2(1)-1)}{\left[\int_0^1 [W(r)]^2 \, dr \right]^{1/2}} \tag{27}$$

3.4 Testes de Raízes Unitárias de Dickey & Fuller

Para se testar hipóteses para um subconjunto dos parâmetros num modelo de regressão multipla, usamos o procedimento de testes de restrições lineares. Os outros parâmetros são tratados como parâmetros de pertubação e não afetam a distribuição da estatística de teste.

Este não é o caso quando se deseja testar se $\phi = 1$ em (19), veja Dickey and Fuller (1979), uma vez que a estatística de teste se modifica caso seja incluida só uma constante ou uma tendência determinística. Temos então três possíveis processos gerados,

$$X_t = \phi_a \ X_{t-1} + u_t \tag{28}$$

$$X_t = \mu_b + \phi_b \ X_{t-1} + u_t \tag{29}$$

$$X_t = \mu_c + \gamma_c * t + \phi_c \ X_{t-1} + u_t \tag{30}$$

e as hipóteses nulas e alternativas são dadas por:

$$H_0 : \phi_i = 1 \qquad \text{versus} \qquad H_a : \phi_i < 1 \tag{31}$$

onde $i = a, b, c$.

Para o caso de $i = a$ a estatística do tipo "$t - Student$ "é dada por (27) e os valores críticos foram tabulados por Dickey and Fuller (1979). Por exemplo para se testar $\phi_a = 1$ o valor crítico a 5% para uma amostra de tamanho 1000 é de -1.94 que é próximo do valor $-1,64$ para a distribuição $t - Student$. Mas quando se testa $\phi_b = 1$ este valor crítico passa para $-2,86$ e quando se testa $\phi_c = 1$ para $-3,41$.

Observe que este teste é monocaudal e que a hipótese fundamental para se obter a distribuição da estatística de teste é que $u_t \sim NI(0,1)$.

Uma forma alternativa de apresentar este teste é dada quando (28) é re-escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= (\phi_a - 1) \ X_{t-1} + u_t \\ \Delta X_t &= \theta_a \ X_{t-1} + u_t \end{aligned} \tag{32}$$

e as hipóteses nula e alternativa, neste caso, são dadas por:[7]

$$H_0 : \theta_i = 0 \qquad \text{versus} \qquad H_a : \theta_i < 0 \tag{33}$$

Em muitas situações um modelo só com uma defasagem não capta toda a dinâmica da série. É preciso portanto introduzir mais defasagens no modelo

[7]Neste caso, sob H_0 a variável dependente é estacionária embora não tenhamos nenhum regressor.

para controlar a correlação serial da série. Neste caso (32) será escrito da seguinte forma:[8]

$$\Delta X_t = \theta_a \ X_{t-1} + \sum_{j=1}^{m} \delta_j \ \Delta X_{t-j} + u_t \qquad (34)$$

onde m é escolhido usando alguns critério de informação.[9]

Dickey and Fuller (1981) mostram que os valores críticos para testa a hipótese (33) se mantém inalterados e que a distribuição dos estimadores dos parâmetros δ_j são as usuais, isto é, estes tem distribuição normal.

Observe que como o modelo geral é aquele que contém tendência determinística devemos começar com o modelo mais geral, com tendência, e usando testes de significância usuais para a constante e para a tendência simplificar o modelo caso seja necessário.

3.4.1 Programa no R para simular a distribuição do teste de raíz unitária

O programa abaixo apresenta um estudo de Monte Carlo para a distribuição do teste de raíz unitária para os casos sem constante, com constante e com tendência determinística.

Simulação da distribuição do teste de Dickey & Fuller

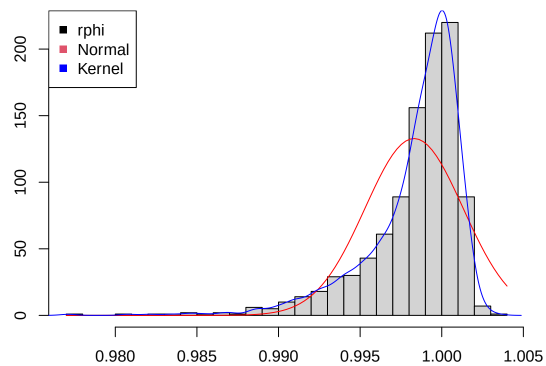
Para o primeiro caso temos o seguinte histograma para ϕ_a

---

[8]Neste caso, sob H_0 a variável dependente e as m variáveis independtes são todas estacionária valendo a inferência usaual para os parâmetros δ_j.

[9]Os critérios de informações mais usados são o de Akaike e de Schwarz que foram definidos noa apêndice XXX do capítulo YYY.

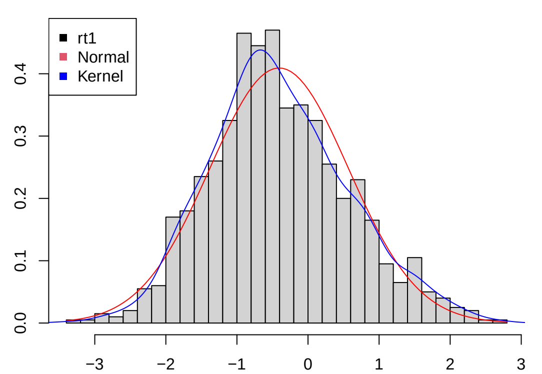
Figura 18: Distribuição de ϕ_a



observe que esta distribuição é bem diferente da distribuição usual quando $|\phi| < 1$.

A seguir apresentamos o histograma para a estatística t_{θ_a}

Figura 19: Distribuição da estatística t_{θ_a}



que tem caudas mais pesadas que a distribuição usual. Através da Função de Distribuição Acumulada Empírica podemos obter o valor crítico a 5% que é $-1,91$ próximo do valor verdadeiro que é $-1,94$.[10]

3.4.2 Exercícios

1. Modifique o programa acima para o caso em que o P.D.G. é um passeio aleatório sem constante e é estimado com constante. Comente seus resultados
2. Modifique o programa acima para o caso em que o P.D.G. é um passeio aleatório sem constante e é estimado com tendência determinística. Comente seus resultados.
3. Modifique o programa acima para o caso em que o P.D.G. é um passeio aleatório com constante e é estimado sem constante. Comente seus resultados.
4. Modifique o programa acima para o caso em que o P.D.G. é um passeio aleatório com constante e é estimado com tendência determinística. Comente seus resultados.
5. Modifique o programa acima para o caso em que o P.D.G. é um passeio aleatório com tendência determinística e é estimado sem constante. Comente seus resultados.
6. Modifique o programa acima para o caso em que o P.D.G. é um passeio aleatório com tendência determinística e é estimado sem constante. Comente seus resultados.

3.5 Testes de Raíz Unitária de Phillips & Perron

O teste DF deixa de ser válido se os erros tiverem correlação serial ou não normalidade ou não constância de variância.

Phillips and Perron (1988) propuseram um modificação na estatística de teste para controlar a possível memória do processo assim como a possível heterogeneidade temporal e sensibilidade a pontos extremos.

A idéia é usar dois possíveis estimadores para a variância de u_t, a saber:

$$\sigma^2 = \lim E\left[\frac{1}{T}S_T^2\right] \tag{35}$$

[10]Usando como semente aleatória 1234 o valor crítico passa a ser $-1,97$.

$$\sigma_u^2 = \lim \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E(u_t^2) \tag{36}$$

e observe que quando u_t for próximo de $i.i.d.$ teremos $\sigma^2 \approx \sigma_u^2$.

A modificação de PP é dada por

$$z(\widehat{\phi}_a) = T(\widehat{\phi}_a - 1) - \frac{1}{2}(s_{Tl}^2 - s_u^2)\left(T^{-2}\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2\right)^{-1} \tag{37}$$

onde s_{Tl}^2 e s_u^2 são estimadores, consistentes, de σ^2 e σ_u^2, respectivamente.

Estudos de Monte Carlo mostram que a potência deste teste é pior do que a do ADF.

Tanto o teste ADF quando o PP são sensíveis a mudanças estruturais. Perron (1989) propõe um teste para os casos em que a tendência determinística é segmentada ou o caso em que a mudanças estuturais no P.D.G.[11]

Os P.D.G. são dados por:

$$X_t = \mu + X_{t-1} + \delta D(T_B)_t + u_t \tag{38}$$

$$X_t = \mu_1 + X_{t-1} + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + u_t \tag{39}$$

$$X_t = \mu_1 + X_{t-1} + \delta D(T_B)_t + (\mu_2 - \mu_1)DU_t + u_t \tag{40}$$

onde

$$D(T_B)_t = \begin{cases} 1 \text{ se } t = T_B + 1 \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

$$DU_t = \begin{cases} 1 \text{ se } t > T_B \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Observe que (38) corresponde a uma modificação temporário no nível, dummy de impulso; que (39) corresponde a uma modificação na taxa de crescimento, dummy de escada; e (40) corresponde a uma mudança estrutural.

[11]Para o caso de multiplas regras veja Bai and Perron (1998).

3.6 Teste para Múltiplas Raízes Unitárias.

Em geral não sabemos se o processo tem uma ou mais raízes unitárias. Se o processo tiver mais do que uma raíz não podemos começar o procedimento de teste de uma raíz contra nenhuma.

Podemos usar o procedimento de Dickey and Pantula (1987) que consiste em testar duas raízes unitárias contra a alternativa de nenhuma raíz unitária. Neste caso o processo gerador de dados é dado por

$$(1-\phi_1 L)(1-\phi_2 L)X_t = u_t \tag{41}$$

$$X_t = (\phi_1+\phi_2)X_{t-1} - \phi_1\phi_2 X_{t-1} + u_t$$

que pode ser re-escrito como

$$\Delta\Delta X_t = (\phi_1\phi_2 - 1)\Delta X_{t-1} - (1-\phi_1)(1-\phi_2)X_{t-1} + u_t$$

e definindo $\theta_1 = \phi_1\phi_2 - 1$ e $\theta_2 = -(1-\phi_1)(1-\phi_2)$ o P.G.D. pode ser escrito da seguinte forma:

$$\Delta\Delta X_t = \theta_1 \Delta X_{t-1} + \theta_2 X_{t-1} + u_t \tag{42}$$

e testar duas raízes unitárias em (41), isto é, que $\phi_1 = 1$ e $\phi_2 = 1$ é equivalente a testar em (42) que $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 0$ e hipóptese alternativa é $\theta_1 < 0$ e $\theta_2 < 0$. Mas se a hipótese alternativa for de uma raíz unitária $\theta_2 = 0$ então (42) se reduz a:

$$\Delta\Delta X_t = \theta_1 \Delta X_{t-1} + u_t \tag{43}$$

que é equivalente a modificar o teste de Dickey & Fuller para se testar

$$H_0 : I(d) \quad \text{versus} \quad H_a : I(d-1)$$

e quando $d = 2$ desejarmos testar $I(2)$ contra $I(1)$ e o P.D.G. na nula será dado por (43) e caso a nula seja rejeitada testamos $I(1)$ contra $I(0)$.

Em geral para série econômicas ou financeiras basta começar com $I(3)$ contra $I(2)$.

Observe que devemos começar com o modelo mais geral, aquele que contempla uma tendência determinística, isto é, o P.G.D. para se testar $I(3)$ contra $I(2)$ será dado por:

$$\Delta\Delta\Delta X_t = \mu_c + \gamma_c * t + \theta_1 \Delta\Delta X_{t-1} + u_t$$

3.7 Teste Dickey & Fuller com Dados Destrendado por GLS (DFGLS)

Elliott et al. (1996) propõem uma modificação do teste ADF no qual os dados são destrendados, isto é, as variávies explicativas determinísticas, constante ou tendência linear determinística são retiradas dos dados antes de fazer o teste de raíz unitária.

Eles definem a quase-diferença de X_t, que depende do valor de k que representa uma hipótese alternativa local contra a qual desejamos testar a hipótese nula de raíz unitária:

$$d(X_t|k) = \begin{cases} X_t & \text{se } t = 1 \\ X_t - kX_{t-1} & \text{se } t > 1 \end{cases} \tag{44}$$

Considere a regressão, estimada por M.Q.O, da quase-diferença $d(X_t|k)$ na quase-diferença $d(w_t|k)$ onde w_t contém uma constante ou um constante e uma tendência:

$$d(X_t|k) = d(w_t|k)\delta(k) + u_t \tag{45}$$

e seja $\widehat{\delta}(k)$ o estimador de M.Q.O. da regressão acima.

O valor de k sugerido pelos autores é $k = \overline{k}$, onde

$$\overline{k} = \begin{cases} 1 - \frac{7}{T} & \text{se } w_t = \{1\} \\ \\ 1 - \frac{13.5}{T} & \text{se } w_t = \{1, t\} \end{cases} \tag{46}$$

Os dados destrendados por GLS, X_t^d, usando o valor de $\overline{k}$ definido em (46) tem a seguinte expressão

$$X_t^d = X_t - w_t\widehat{\delta}(\overline{k}) \tag{47}$$

O teste DFGLS estima (34) substituindo X_t por X_t^d, isto é,

$$\Delta X_t^d = \theta_a \; X_{t-1}^d + \sum_{j=1}^{m} \delta_j \; \Delta X_{t-j}^d + u_t \tag{48}$$

como X_t^d foi destrendado não se inclua constante ou constante e tendência na equação acima

Como no caso ADF o teste consiste na estatística t para $\widehat{\theta}_a$

Os valores críticos são os mesmos somente para o caso em que $x_t = \{1\}$ e para o caso em que $x_t = \{1, t\}$ foram obtidos por Elliott et al. (1996).

3.8 Teste Kwiatkowski, Phillips, Schmidt e Shin (KPSS)

O teste Kwiatkowski et al. (1992) difere dos outros testes porque o processo gerador de X_t na nula é estacionário (tendência).

A estatística de KPSS é baseada nos resíduos de M.Q.O. da regressão de X_t nas variáveis determinísticas $w_t = \{1, t\}$

$$X_t = w_t \delta + u_t \tag{49}$$

A estatística LM é dada por:

$$LM = \sum_t S_t^2 / (T^2 \widehat{f}_0) \tag{50}$$

onde

$$S_t = \sum_{r=1}^{t} \widehat{u}_r \tag{51}$$

$$\widehat{f}_0 = \sum_{j=-(T-1)}^{T-1} \widehat{\gamma}_j \; K(j/l) \tag{52}$$

$\widehat{\gamma}_j$ é a j-ésima autocovariância de $\widehat{u}_t$, K é uma função núcleo e l largura da banda usada na truncagem.

Os valores críticos são apresentados na tabela 1 de Kwiatkowski et al. (1992).

4 Testando Raízes Unitárias no R

Vamos apresentar testes de raízes unitárias para séries simuladas e também para séries reais. Neste último caso, vamos usar todos os testes que foram apresentados acima.

4.1 Teste para as séries geradas

Vamos testar raíz unitária para a série $X1$. O comando no R para o teste ADF é dado por, quando se usar o pacote urca:

```
ur.df(x1, type = c("none", "drift", "trend"), lags = n, selectlags
= c("Fixed", "AIC", "BIC"))
```

onde o valor de `type` representa o modelo sem constante ("none"), o modelo só com constante ("drift") e o modelo com constante e tendência determinística ("trend"), `lags = n` é o número de defasagens ("n") da variável endógena e `selectlags` é o critério para escolher as defasagens que pode ser "Fixed"fixada ou escolhida usando critérios de informação (AIC ou BIC).

Tem-se o seguinte resultado

Tabela 1: Teste ADF ($I(1) \times I(0)$) com tendêncai determinística para $X1$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	0.0988379	0.0651242	1.518	0.129
z.lag.1	-0.0498877	0.0099337	-5.022	$6.05e-07$
trend	-0.0000785	0.0001093	-0.718	0.473
$\widehat{\sigma} = 0.9925$				
$R^2 = 0.0248$		$\overline{R}^2 = 0.0228$		
$F(2, 996) = 12.65$	$p - value = 3.743e - 06$			
Value of test-statistic is:	-5.0221	8.4385	12.6537	
Critical values for test statistics:	1%	5%	10%	
τ_3	-3.96	-3.41	-3.12	
ϕ_2	6.09	4.68	4.03	
ϕ_3	8.27	6.25	5.34	

E como o p-valor da estatística $t - Student$ para o teste ADF é $0,0000$, logo rejeita-se a hipótese nula de uma raíz unitária, como já era esperado uma vez que o processo gerador dos dados de $X1$ é um $AR(1)$ com $\phi = 0,95$.

Observe que caso fosse usada a série $X3$ teriamos o seguinte resultado:

Tabela 2: Teste ADF ($I(1) \times I(0)$) sem constante e tendência determinística para $X3$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
z.lag.1	$5.000e-02$	$2.146e-18$	$2.33e+16$	$< 2e-16$
$\widehat{\sigma} = 47100$				
$R^2 = 1.0000$		$\overline{R}^2 = 1.0000$		
$F(1,998) = 5.427e+32$	$p-value =< 2.2e-16$			
Value of test-statistic is:	-5.0221	8.4385	12.6537	
Critical values for test statistics:	1%	5%	10%	
τ_1	-2.58	-1.95	-1.62	

Observe que o valor da estatística t-Student é positivo indicando que o coeficiente da representação $AR(1)$ é maior do que um, isto é, um modelo explosivo.

Neste caso o teste de D&F não tem potência e o resultado do teste não pode ser conclusivo.

4.2 Teste ADF de Raíz Unitária para Log do Fechamento do Bovespa

Vamos testar raíz unitária para a série Logaritmo do Fechamento do Indice Bovespa, $LIBOV$ do arquivo bolsa.xls. O comando no R para o teste ADF é dado por

```
ur.df(LIBOV, type = c("none", "drift", "trend"), lags = n, selectlags
= c("Fixed", "AIC", "BIC"))
```

Como temos que começar com o modelo mais geral, devemos testar primeiro $I(3)$ versus $I(2)$ com tendência determinística.

Tem-se o seguinte comando:

```
libovI3t=ur.df(d2libov,type=c("trend"), lags=0, selectlags=c("BIC"))
```

e os resultados

Tabela 3: Teste ADF ($I(3) \times I(2)$) com tendência determinística para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	$3.203e-06$	$1.042e-03$	0.003	0.998
z.lag.1	$-1.474e+00$	$1.804e-02$	-81.678	$< 2e-16$
trend	$3.847e-09$	$7.609e-07$	0.005	0.996
$\widehat{\sigma} = 0.02537$				
$R^2 = 0.738$		$\overline{R}^2 = 0.7377$		
$F(2, 2369) = 3336$	$p-value =< 2e-16$			
Value of test-statistic is:	-81.6782	2223.781	3335.668	
Critical values for test statistics:	1%	5%	10%	
τ_3	-3.96	-3.41	-3.12	
ϕ_2	6.09	4.68	4.03	
ϕ_3	8.27	6.25	5.34	

Observe que a tendência determinística não é significativa e portanto podemos simplificar o modelo para aquele sem tendência determinística, mas com constante

Usando o seguinte comando

```
libovI3d=ur.df(d2libov,type=c("drift"), lags=0, selectlags=c("BIC"))
```

Temos os seguintes resultados.

Tabela 4: Teste ADF ($I(3) \times I(2)$) sem tendência determinística, mas com constante para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	$7.767e-06$	$5.209e-04$	0.015	0.988
z.lag.1	$-1.474e+00$	$1.804e-02$	-81.695	$< 2e-16$
$\widehat{\sigma} = 0.02537$				
$R^2 = 0.738$		$\overline{R}^2 = 0.7378$		
$F(1, 2370) = 6674$	$p-value =< 2.2e-16$			
Value of test-statistic is:	-81.6782	3337.079		
Critical values for test statistics:	1%	5%	10%	
τ_2	-3.43	-2.86	-2.57	
ϕ_1	6.43	4.59	3.78	

Observe que o p-valor da estatística $t-Student$ para o teste ADF é $0,0000$, logo rejeita-se a hipótese nula de três raízes unitárias.

O passo seguinte é testar $I(3)$ versus $I(2)$ sem constante e tendência determinística.

Usando o seguinte comando

```
libovI3n=ur.df(d1libov,type=c("none"), lags=0, selectlags=c("BIC"))
```

Temos os seguintes resultados

Tabela 5: Teste ADF ($I(3) \times I(2)$) sem tendência determinística e constante para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
z.lag.1	$--0.9885$	0.0205	-48.25	$< 2e-16$
$\widehat{\sigma} = 0.0205$				
$R^2 = 0.4953$		$\overline{R}^2 = 0.4951$		
$F(1, 2372) = 2328$	$p-value =< 2.2e-16$			
Value of test-statistic is:	-482497			
Critical values for test statistics:	1%	5%	10%	
τ_1	-2.58	-1.95	-1.62	

O passo seguinte é testar $I(2)$ versus $I(1)$ usando o modelo mais geral, isto é, com tendência determinística.

Observe que a tendência determinística não é significativa e portanto podemos simplificar o modelo para aquele sem tendência determinística.

Usando o seguinte comando

```
libovI2t=ur.df(d1libov,type=c("trend"), lags=0, selectlags=c("BIC"))
```

Temos os seguintes resultados.

Tabela 6: Teste ADF ($I(2) \times I(1)$) com tendência determinística para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	$6.885e-05$	$8.424e-04$	0.082	0.935
z.lag.1	$-9.893e-01$	$2.050e-02$	-48.268	$< 2e-16$
trend	$3.777e-07$	$6.147e-07$	0.614	0.539
$\widehat{\sigma} = 0.02051$				
$R^2 = 0.4957$		$\overline{R}^2 = 0.4953$		
$F(2, 2370) = 1165$	$p - value =< 2e-16$			
Value of test-statistic is:	-48.2679	776.6025	1164.901	
Critical values for test statistics:	1%	5%	10%	
τ_3	-3.96	-3.41	-3.12	
ϕ_2	6.09	4.68	4.03	
ϕ_3	8.27	6.25	5.34	

Observe que o p-valor da estatística $t - Student$ para o teste ADF é $0,0000$, logo rejeita-se a hipótese nula de duas raízes unitárias com tendência determinística. Observe que a tendência não é significativa, podemos simplificar para um modelo só com constante

Usando o seguinte comando

```
libovI2d=ur.df(d1libov,type=c("drift"), lags=0, selectlags=c("BIC"))
```

Temos os seguintes resultados

Tabela 7: Teste ADF ($I(2) \times I(1)$) sem tendência determinística, mas com constante para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	0.0005	0.0004	1.228	0.22
z.lag.1	-0.9891	0.0205	-48.270	$< 2e-16$
$\widehat{\sigma} = 0.02051$				
$R^2 = 0.4956$		$\overline{R}^2 = 0.4954$		
$F(1, 2371) = 2330$	$p - value =< 2.2e-16$			
Value of test-statistic is:	-48.2705	1165.021		
Critical values for test statistics:	1%	5%	10%	
τ_2	-3.43	-2.86	-2.57	
ϕ_1	6.43	4.59	3.78	

Observe que o coeficiente da constante não é significativo. Portanto podemos simplificar o modelo sem constante e tendência determinística.

Usando o seguinte comando

```
libovI2n=ur.df(d1libov,type=c("none"), lags=0, selectlags=c("BIC"))
```

Temos os seguintes resultados

Tabela 8: Teste ADF ($I(2) \times I(1)$) sem tendência determinística e constante para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
z.lag.1	-0.9885	0.0205	-48.25	$< 2e-16$
$\widehat{\sigma} = 0.0205$				
$R^2 = 0.4953$		$\overline{R}^2 = 0.4951$		
$F(1, 2372) = 2328$	$p - value =< 2.2e-16$			
Value of test-statistic is:	-482497			
Critical values for test statistics:	1%	5%	10%	
τ_1	-2.58	-1.95	-1.62	

O passo seguinte é testar $I(1)$ versus $I(0)$ usando o modelo mais geral, isto é, com tendência determinística.

Usando o seguinte comando

```
libovI1t=ur.df(libov,type=c("trend"), lags=0, selectlags=c("BIC"))
```

Temos os seguintes resultados

Tabela 9: Teste ADF ($I(1) \times I(0)$) com tendência determinística para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	$3.286e-01$	$1.429e-02$	2.300	0.0215
z.lag.1	$-3.568e-03$	$1.546e-03$	-2.307	0.0211
trend	$3.121e-06$	$1.310e-06$	2.383	0.0173
$\widehat{\sigma} = 0.02053$				
$R^2 = 0.002467$		$\overline{R}^2 = 0.001626$		
$F(2, 2370) = 1165$	$p-value =< 2e-16$			
Value of test-statistic is:	-2.307	2.4139	2.9322	
Critical values for test statistics:	1%	5%	10%	
τ_3	-3.96	-3.41	-3.12	
ϕ_2	6.09	4.68	4.03	
ϕ_3	8.27	6.25	5.34	

Como neste caso a tendência determinística é significativa, não podemos simplificar o modelo e portanto como o p-valor da estatística $t-Student$ para o teste ADF é $0,0211$, logo não se rejeita a hipótese nula de uma raíz unitária.

4.3 Teste Phillips-Perron de Raíz Unitária para Log do Fechamento do Bovespa

A seguir vamos fazer o teste de raíz unitária de Phillips-Perron (PP).

Vamos começar testando $I(3)$ contra $I(2)$ usando uma tendência determinística.

Usando o seguinte comando

```
ur.pp(x, type = c("Z-alpha", "Z-tau"), model = c("constant", "trend"),
lags = c("short", "long"), use.lag = NULL)
```

Onde `type` pode ser `"Z-alpha"` ou `"Z-tau"`, `model` pode incluir no modelo só constante quando usar `"constant"` ou uma tendência determinística quando usar `"trend"`. Agora `lags` são as defasagens usadas no truncamento da estimador s^2_{Tl} da variância, podendo ser `"short"` ou `"long"`. O argumento `use.lag` pode usar um número diferente de defasagens especificado pelo usário.

Usando o seguinte comando:

```
libovI3tPPtautrend=ur.pp(d2libov,type="Z-alpha", model="trend",
lags="short", use.lag = NULL)
```

Obtém-se o seguinte resultado:

Tabela 10: Teste PP ($I(3) \times I(2)$) com tendência determinística para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	$7.765e-06$	$5.210e-04$	0.015	0.988
z.lag.1	$-4.739e-01$	$1.804e-02$	-26.260	$< 2e-16$
trend	$3.847e-09$	$7.609e-07$	0.005	0.996
$\widehat{\sigma} = 0.02537$				
$R^2 = 0.255$		$\overline{R}^2 = 0.2248$		
$F(2, 2369) = 344.8$	$p-value =< 2e-16$			
Value of test-statistic type: Z-tau is	-151.9129			
Critical values for Z statistics:	1%	5%	10%	
$Z-tau$	-3.967	-3.414444	-3.129	

Observe que a tendência determinística não é significativa e portanto podemos simplificar o modelo para aquele sem tendência determinística, mas com cosntante

Usando o seguinte comando

```
libovI3tPPtauconst=ur.pp(d2libov,type="Z-tau", model="constant",
lags="short")
```

Temos os seguintes resultados.

Tabela 11: Teste PP ($I(3) \times I(2)$) sem tendência determinística mas com constante para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	$7.765e-06$	$5.209e-04$	0.015	0.988
z.lag.1	$-4.739e-01$	$1.804e-02$	-26.266	$< 2e-16$
$\widehat{\sigma} = 0.02537$				
$R^2 = 0.255$		$\overline{R}^2 = 0.22518$		
$F(1, 23670) = 689.9$	$p-value =< 2e-16$			
Value of test-statistic type: Z-tau is	-151.9539			
Critical values for Z statistics:	1%	5%	10%	
$Z-tau$	-3.4360	-2.8632	-2.5677	

Observe que o p-valor da estatística $t - Student$ para o teste PP é menor do que 10^{-4}, logo rejeita-se a hipótese nula de três raízes unitárias.

O passo seguinte é testar $I(2)$ versus $I(1)$ usando o modelo mais geral, isto é, com tendência determinística.

Usando o seguinte comando

```
libovI2tPPtautrend=ur.pp(d1libov,type="Z-tau", model="trend",
lags="short")
```

Temos os seguintes resultados:

Tabela 12: Teste PP $(I(2) \times I(1))$ com tendência determinística para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	$5.170e-04$	$4.212e-04$	1.227	0.220
z.lag.1	$1.072e-02$	$2.050e-02$	0.523	0.601
trend	$3.777e-07$	$6.147e-07$	0.614	0.539
$\widehat{\sigma} = 0.02051$				
$R^2 = 0.0002787$		$\overline{R}^2 = -0.000565$		
$F(2, 2370) = 0.3303$	$p - value = 0.7187$			
Value of test-statistic type: Z-tau is	-48.4089			
Critical values for Z statistics:	1%	5%	10%	
$Z - tau$	-3.967	-3.414444	-3.129	

Observe que a tendência determinística não é significativa e portanto podemos simplificar o modelo para aquele sem tendência determinística, mas com cosntante

Usando o seguinte comando

```
libovI2tPPtauconst=ur.pp(d1libov,type="Z-tau", model="constant",
lags="short")
```

Temos os seguintes resultados.

Tabela 13: Teste PP ($I(2) \times I(1)$) sem tendência determinística, mas com constante para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	0.0005171	0.0004211	1.228	0.220
z.lag.1	0.0109	0.02049	0.532	0.595
$\widehat{\sigma} = 0.02051$				
$R^2 = 0.0001194$		$\overline{R}^2 = -0.0003023$		
$F(1, 2371) = 0.2832$	$p - value = 0.5946$			
Value of test-statistic type: Z-tau is	-48.4092			
Critical values for Z statistics:	1%	5%	10%	
$Z - tau$	-3.4360	-2.8632	-2.5677	

Observe que o p-valor da estatística $t - Student$ para o teste PP é menor do que 10^{-4}, logo rejeita-se a hipótese nula de duas raízes unitárias.

O passo seguinte é testar $I(1)$ versus $I(0)$ usando o modelo mais geral, isto é, com tendência determinística.

Usando o seguinte comando

```
libovI1tPPtautrend=ur.pp(libov,type="Z-tau", model="trend", lags="short")
```

Temos os seguintes resultados:

Tabela 14: Teste PP ($I(1) \times I(0)$) com tendência determinística para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
Intercept	$3.657e - 02$	$1.564e - 02$	2.338	0.0195
z.lag.1	$9.964e - 01$	$1.546e - 03$	644.318	$< 2e - 16$
trend	$3.121e - 06$	$1.310e - 06$	2.383	0.0173
$\widehat{\sigma} = 0.02053$				
$R^2 = 0.9988$		$\overline{R}^2 = -0.9988$		
$F(2, 2371) = 9.482e + 05$	$p - value =< 2.2e - 16$			
Value of test-statistic type: Z-tau is	-2.2127			
Critical values for Z statistics:	1%	5%	10%	
$Z - tau$	-3.967	-3.414444	-3.129	

Como neste caso a tendência determinística é significativa, não podemos simplificar o modelo e portanto como o p-valor da estatística $t - Student$

para o teste ADF é $0,4663$, logo não se rejeita a hipótese nula de uma raíz unitária.

4.4 Teste Elliot, Rothemberg & Stock (DFGLS) de Raíz Unitária para Log do Fechamento do Bovespa

A seguir vamos fazer o teste de raíz unitária de Elliot, Rothemberg & Stock (DFGLS).

Comando no R para este teste é

```
libovI3tDFGLStrend=ur.ers(d2libov,type="DF-GLS", model="trend",
lag.max= 0)
```

onde `trend` indica que $w_t = \{1, t\}$ e a `lag.max` é a defasagem máxima escolhida pelo usuário e estamos testando $I(3)$ versus $I(2)$.

Temos os seguintes resultados:

Tabela 15: Teste DFGLS ($I(3) \times I(2)$) com tendência determinística para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
yd.lag	-0.4368	0.01697	-25.74	$< 2e-16$
$\widehat{\sigma} = 0.0438$				
$R^2 = 0.2184$		$\overline{R}^2 = -0.218$		
$F(1, 2371) = 662.4$	$p-value =< 2.2e-16$			
Value of test-statistic is:	-25.7363			
Critical values of DF-GLS are:	1%	5%	10%	
	-3.48	-2.89	-2.57	

Observe que a estatística $t-Student$ para o teste DFGLS está abaixo dos valores críticos, logo rejeita-se a hipótese nula de três raízes unitárias.

O passo seguinte é testar $I(2)$ versus $I(1)$ usando o modelo mais geral, isto é, com tendência determinística.

Usando o seguinte comando

```
libovI2tDFGLStrend=ur.ers(d1libov,type="DF-GLS", model="trend",
lag.max= 0)
```

Temos os seguintes resultados:

Tabela 16: Teste DFGLS ($I(2) \times I(1)$) com tendência determinística para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
yd.lag	-0.2893	0.0143	-19.77	$< 2e-16$
$\widehat{\sigma} = 0.02675$				
$R^2 = 0.1414$		$\overline{R}^2 = -0.1411$		
$F(1, 2372) = 390.7$	$p - value =< 2.2e-16$			
Value of test-statistic is:	-19.7667			
Critical values of DF-GLS are:	1%	5%	10%	
	-3.48	-2.89	-2.57	

Observe que a estatística $t - Student$ para o teste DFGLS está abaixo dos valores críticos, indicando que serejeita a hipótese nula de duas raízes unitárias.

O passo seguinte é testar $I(1)$ versus $I(0)$ usando o modelo mais geral, isto é, com tendência determinística.

Usando o seguinte comando

```
libovI1tDFGLStrend=ur.ers(libov,type="DF-GLS", model="trend",
lag.max= 0)
```

Temos os seguintes resultados:

Tabela 17: Teste DFGLS ($I(1) \times I(0)$) com tendência determinística para $LIBOV$

Coefficients	Estimate	Std Error	t-value	$Pr(>\|t\|)$
yd.lag	-0.001504	0.001135	-1.325	0.1845
$\widehat{\sigma} = 0.02054$				
$R^2 = 0.00074$		$\overline{R}^2 = 0.00032$		
$F(1, 2373) = 1.755$	$p - value = 0.1854$			
Value of test-statistic is:	-1.3248			
Critical values of DF-GLS are:	1%	5%	10%	
	-3.48	-2.89	-2.57	

Pelo valor da estatística de teste não se rejeita a nula de uma raíz unitária.

4.5 Teste KPSS de Raíz Unitária para Log do Fechamento do Bovespa

O último teste é o KPSS, que diferente dos anteriores a hipótese mula é estacionaridade.

O seguinte comando no R é usado para se usar o teste KPSS

```
ur.kpss(libov, type = c("mu", "tau"), lags = c("short", "long",
"nil"), use.lag = NULL)
```

No teste `type` corresponde a `"mu"` se $w_t = \{1\}$ ou a `"tau"` se $w_t = \{1, t\}$.

O argumento `lags` pode ser `"short"`, que neste caso e o número de defasagens é igual a $\sqrt[4]{4 \times (n/100)}$ ou pode ser `"log"`, que meste caso o número de defasagens é igual a $\sqrt[4]{12 \times (n/100)}$, ou `"nil"`, que neste caso o número de defasagens é igual a zero. Este parâmetro controla a janela de truncamento, l em (52), para calcular o estimador consistente de variância denotada por $\widehat{f}_0$ também em (52).

O argumento `use.lag` permite que o usuário especfique o número de defasagens

Inicialmente vamos testar para a série em nível e depois a série em primeira diferença, que seria o correto para corroborar com os resultados do ADF, PP e DF-GLS.

O comnado a ser usado é:

```
ur.kpss(libov, type = "tau", lags = "long", use.lag = NULL)
```

Temos os seguintes resultados

Tabela 18: Teste KPSS ($I(0) \times I(1)$) com tendência determinística para $LIBOV$

Value of test-statistic is:	0.9578			
Critical values of KPSS are:	1%	2.5%	5%	10%
	0.216	0.176	0.146	0.119

Como o valor da estatística de teste é $0,9578$ que é superior as valores críticos, rejeitamos a nula de estacionaridade.

Mas para corroborar sos resultados dos testes ADF, PP e DF-GLS, devemos fazer o teste para $DLIBOV$.

O comnado a ser usado é:

```
ur.kpss(d1libov, type = "tau", lags = "long", use.lag = NULL)
```

Temos os seguintes resultados

Tabela 19: Teste KPSS ($I(0) \times I(1)$) com tendência determinística para $DLIBOV$

Value of test-statistic is:	0.1053			
Critical values of KPSS are:	1%	2.5%	5%	10%
	0.216	0.176	0.146	0.119

Como o valor da estatística de teste é $0,1053$ que é menor do que os valores críticos, não rejeitamos a nula de estacionaridade.

Todos estes resultados estão no programa:

Teste de Raíz Unitária para LIBOV

4.5.1 Exercícios

1. Usando os dados de fechamento do IBRX que está no arquivo bolsa.xls, obtenha a ordem de integração pelo teste ADF, após transformar os dados usando a transformação logarítmica.

2. Usando o teste DFGLS os resultados se mantém?

3. Refaça os exercícios anteriores usando os dados de fechamento do S&P500.

4. Para os dados de taxa de câmbio, refaça os exercícios anteriores, após a transformação logarítmica e sem a transformação. Os resultados se mantém? Comente.

Referências

J. Bai and P. Perron. Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica*, 66(1):47–78, jan 1998. doi: 10.2307/2998540.

A. Banerjee, J. J. Dolado, J. W. Galbraith, and D. F. Hendry. *Co-integration, Error Correction, and the Econometric Analysis of Non-Stationary Data*. Oxford University Press, may 1993. doi: 10.1093/0198288107.001.0001.

P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley & Sons, 1999. ISBN 0471197459. URL `https://www.ebook.de/de/product/3607037/billingsley_convergence_of_probability_mea.html`.

D. A. Dickey and W. A. Fuller. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366):427–431, jun 1979. doi: 10.2307/2286348.

D. A. Dickey and W. A. Fuller. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. *Econometrica*, 49(4):1057–1072, jul 1981. doi: 10.2307/1912517.

D. A. Dickey and S. G. Pantula. Determining the order of differencing in autoregressive processes. *Journal of Business & Economic Statistics*, 5(4):455–461, oct 1987. doi: 10.2307/1391997.

G. Elliott, T. J. Rothenberg, and J. H. Stock. Efficient tests for an autoregressive unit root. *Econometrica*, 64(4):813–836, jul 1996. doi: 10.2307/2171846.

D. Hendry. *Dynamic Econometrics*. Oxford University Press, 1995. ISBN 0198283164. URL `https://www.ebook.de/de/product/3257383/david_hendry_dynamic_econometrics.html`.

J. Johnston and J. DiNardo. *Econometric Methods*. McGraw-Hill/Irwin, 1996. ISBN 978-0079131218. URL `https://www.amazon.com/Econometric-Methods-Jack-Johnston/dp/0079131212?SubscriptionId=AKIAIOBINVZYXZQZ2U3A&tag=chimbori05-20&linkCode=xm2&camp=2025&creative=165953&creativeASIN=0079131212`.

D. Kwiatkowski, P. C. Phillips, P. Schmidt, and Y. Shin. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54(1-3):159–178, oct 1992. doi: 10.1016/0304-4076(92)90104-y.

H. B. Mann and A. Wald. On the statistical treatment of linear stochastic difference equations. *Econometrica*, 11(3/4):173, July 1943. ISSN 0012-9682. doi: 10.2307/1905674.

P. Perron. The great crash, the oil price shock, and the unit root hypothesis. *Econometrica*, 57(6):1361–1401, nov 1989. doi: 10.2307/1913712.

P. C. Phillips. Time series regression with a unit root. *Econometrica*, 55(2):277–301, mar 1987. doi: 10.2307/1913237.

P. C. B. Phillips and P. Perron. Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75(2):335–346, 1988. doi: 10.1093/biomet/75.2.335.