Minimização de Valores de Arestas em um Grafo

Pedro Vanzella

19 de novembro de 2015

Resumo

Uma solução para o problema de minimização do valor de imposto pago sobre transferências bancárias é apresentado. Utiliza-se um grafo para representar o conjunto de transferências, e minimiza-se o valor das arestas, através da busca por transitividades.

1 Introdução

Uma recente mudança na regulamentação de impostos reativou uma antiga taxa sobre operações financeiras. Esta taxa, chamada de CPMF, incide em 1% sobre toda e qualquer transação bancária.

Um banco teve a idéia de minimizar o valor total pago deste imposto através de atalhos em transferências realizadas internamente.

Por exemplo, digamos que haja cinco correntistas, 1, 2, 3, 4 e 5, e haja as seguintes transferências entre eles:

1 transfere \$500 para 2.

2 transfere \$230 para 3.

3 transfere \$120 para 4.

1 transfere \$120 para 4.

2 transfere \$200 para 5.

É possível fazer quatro transferências, respeitando os valores iniciais e finais de saldo das contas destes cinco correntistas, mas minimizando o valor de cada transferência, de modo a pagar menos imposto:

1 transfere $70 para 2

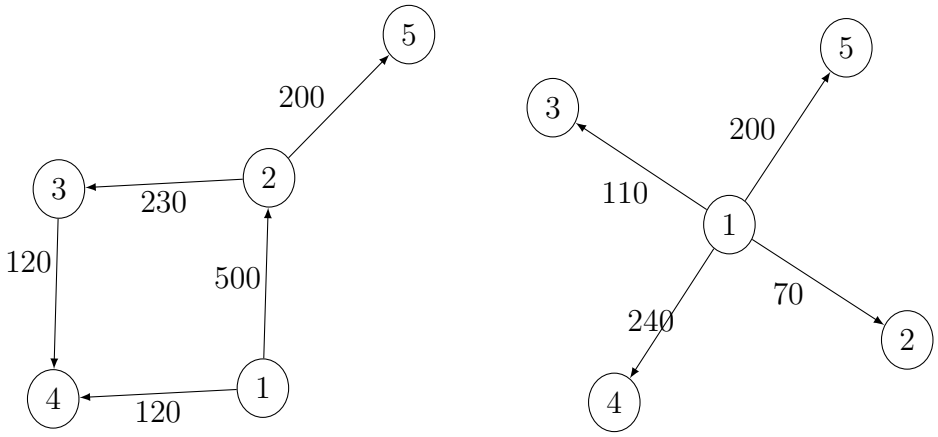
1 transfere $110 para 3

1 transfere $240 para 4

1 transfere $200 para 5

Podemos ver que, em ambos os casos, o total enviado e o total recebido não foi alterado - apenas os valores parciais mudaram e, com eles, o valor pago em impostos.

Do ponto de vista dos correntistas, nada mudou - *e.g.* o extrato do correntista 1 ainda mostrará duas transferências, uma de $500 para o correntista 2 e uma de $120 para o correntista 4 - , mas internamente as transferências realizadas foram bastante diferentes. Podemos ver uma representação gráfica disto na Figura 1.



(a) Entrada (b) Saída

Figura 1: Representação da entrada e da saída como grafos

2 Entrada

O arquivo de entrada está no formato mostrado na Figura 2. A primeira linha tem dois valores: a quantidade de correntistas e a quantidade de transações descritas no arquivo. Como veremos na Seção 3, estas informações não serão necessárias.

As linhas seguintes têm três valores cada: o correntista que originou a transação, o correntista de destino da transação, e o valor da transação. Por exemplo, na linha 2 da Figura 2, lemos "*Uma transferência de 500 da conta do correntista 1 para a conta do correntista 2.*".

Este arquivo de entrada representa o exemplo da Seção 1 e da Figura 1a.

```
1  5 5
2  1 2 500
3  2 3 230
4  3 4 120
5  1 4 120
6  2 5 200
7
```

Figura 2: Arquivo de entrada

3 Estrutura de Dados

A estrutura escolhida para representar o grafo foi a de Lista de Adjacências, como mostrado na Figura 3.

Outras alternativas, como a representação em Matriz de Adjacências também são possíveis, acarretando custos diferentes para acessos e remoções. No entanto, o acesso aos adjacentes de um nodo por Lista de Adjacentes se dá em $O(adj)$, enquanto por Matriz de Adjacências se dá em $O(n)$, onde n é o número de nodos do grafo. Como espera-se que haja menos arestas em um nodo do que nodos no grafo, a performance da Lista de Adjacências tende a ser ligeiramente melhor para esta aplicação.

No entanto, o fator principal para a escolha da representação por Lista de Adjacências foi a facilidade de se trabalhar com ela.

```
class Graph:
    public list<Node> nodes

    class Node:
        public int val
        public list<Edge> edges

    class Edge:
        public Node from
        public Node to
        public int val

```

Figura 3: Representação das classes do grafo

Para ler o arquivo de entrada e criar os nodos e arestas, utilizamos o Algoritmo 1. Veja que ele está na classe **Mardita**, que contém uma instância do grafo.

Algoritmo 1: Criação de Nodos e Arestas

Classe: Mardita
Entrada: Arquivo como o da Figura 2
Saída: Instância da classe **Graph**
para cada *linha l no arquivo, exceto a primeira* **faça**

```
partes ← l.separa(' ') ;       /* Separa a linha nos espaços */
nodo_a ← self.graph.add_node(partes[0])
nodo_b ← self.graph.add_node(partes[1])
nodo_a.add_edge(nodo_b, partes[2]) ;    /* Liga A com B, com
 valor partes[2] */
```

Onde add_node está descrito no Algoritmo 2 e add_edge está descrito no Algoritmo 3.

Algoritmo 2: Criação de Nodos

```
Classe: Graph
Entrada: val: Inteiro, representando o nome do Nodo
Saída: Instância da classe Node
para todo n em self.nodes faça
    se n.val = val então
        retorna n ;      /* Se o nodo já existe, retorna ele */
    n ← Graph.Node(val) ;      /* Chama o construtor de Node */
    self.nodes.add(n) ;          /* Adiciona à lista de nodos */
    retorna n
```

O Algoritmo 2, que pertence à classe **Graph**, primeiro verifica se já há um nodo com este nome em sua coleção de nodos. Caso haja, retorna ele. Se não houver, chama o construtor da classe **Node** para criar um novo nodo, adiciona à sua coleção e então retorna o nodo criado.

A primeira vista, poderíamos ter utilizado um *set* em vez de uma lista para armazenar a coleção de nodos, dado que não queremos dois nodos iguais nela. No entanto, a unicidade garantida seria do objeto nodo, quando queremos na verdade a unicidade do nome do nodo.

Algoritmo 3: Criação de Arestas

```
Classe: Node
Entrada: to: Nodo de origem; val: Inteiro, representando o valor da
         aresta
Saída: Instancia da classe Edge
para cada e em self.edges faça
    se e.to = to então
        retorna e.update(val) ;          /* Se a aresta já existe,
         aumenta seu valor */
    e ← Graph.Edge(self, to, val) ;            /* Cria nova Edge */
    self.edges.add(e) ;       /* Adiciona à coleção de arestas */
    retorna e
```

O Algoritmo 3 é parecido com o Algoritmo 2, pois ele verifica a unicidade da aresta. A diferença é que arestas são consideradas iguais, neste problema caso suas origens e destinos sejam iguais. Como estamos verificando todas as arestas que partem de um nodo, basta comparar o destino.

O construtor da aresta recebe três parâmetros: *de onde*, *para onde* e o *valor* da aresta.

Caso a aresta já exista, soma-se o valor das transações, de modo a criar apenas uma aresta entre dois nodos. Um exemplo disto pode ser visto na Figura 4. O grafo da Figura 4a representa duas transações, com a mesma origem e o mesmo destino. Ao somar-se o valor de suas arestas, temos o grafo da Figura 4b. Este é o que é utilizado pelo algoritmo.

(a) Entrada (b) Saída

Figura 4: Consolidação de arestas com mesma origem e destino

4 Algoritmo

Há duas coisas a serem feitas para resolver o problema: precisamos calcular quanto imposto é pago (Seção 4.1) e reduzir o número de arestas no grafo, bem como seus valores (Seção 4.2).

4.1 Cálculo de Total de Imposto Pago

Este algoritmo é executado duas vezes - uma antes de reduzir-se as arestas, e uma após, de modo a sabermos qual foi a economia.

Algoritmo 4: Cálculo de Imposto Pago

Classe: Mardita
Entrada: Todas as arestas do grafo
Saída: Total de imposto pago
total $\leftarrow$ 0
para todo *e em self.graph.edges* **faça**
  total $\leftarrow$ total + e.valor
retorna *total* $\times$ 0.01

No Algoritmo 4 vemos como o total de imposto é calculado. Apenas acumula-se o valor de todas as arestas e multiplica-se por 0.01, que é o percentual do imposto.

Nota-se que está acessando-se a propriedade edges da classe **Graph**, mas a mesma não parecia ter acesso às arestas, conforme visto na Figura 3.

De fato, a lista de arestas está na classe **Node**. Para termos acesso a elas, basta termos um método na classe **Graph** que itera por todos os nodos, coletando todas as arestas. A unicidade das arestas é garantida no momento de inserção, então pode-se fazer como é visto no Algoritmo 5.

Algoritmo 5: Coleção de todas as arestas

```
Classe: Graph
Entrada: Uma instância da classe textbfGraph
Saída: Uma lista de instâncias da classe Edge
inicializa edges como uma lista vazia
para todo n em self.nodes faça
    para todo e em n.edges faça
        adiciona e em edges
retorna edges
```

4.2 Redução das Arestas

Este é o algoritmo principal, onde o problema é de fato solucionado. O pseudocódigo pode ser visto no Algoritmo 6.

Algoritmo 6: Redução de Arestas

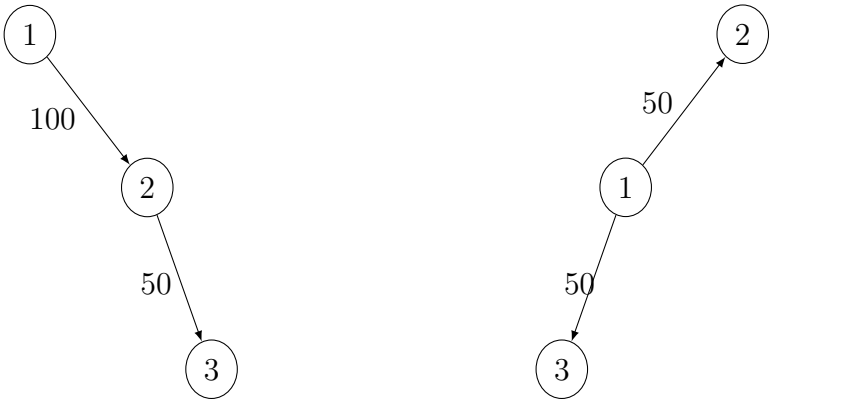
```
Classe: Mardita
para todo u em self.graph.nodes faça
    vs ← adjacentes de u
    enquanto vs não estiver vazia faça
        v ← vs.pop() ;                    /* Remove um elemento de vs */
        para todo a adjacente a v faça
            se valor de <v, a> < valor de <u, v> então
                tmp ← valor de <v,a>; remove <v, a>; valor de <u,v>
                 ← diminui de tmp; cria aresta <u, a> com valor tmp;
            senão
                se v está em vs então
                    remove v de vs ;   /* v pode ter sido conectado
                     novamente graças a um ciclo */
                tmp ← valor de <u,v>; remove <u,v>; valor de <v,a>
                 ← diminui de tmp; cria aresta <u,a> com valor tmp;
                 vs ← a ; /* Nodo a é agora é adjacentes de u */
                ;
```

A idéia do Algoritmo 6 é encontrar transitividade entre os nodos - isto é, para um grafo $G = \{n, e\}$ com $n = \{A, B, C\}$ e $e = \{(A, B, x), (B, C, y)\}$, gerar uma nova aresta $(A, C, x - y)$, remover a aresta (B, C, x) e alterar o valor da aresta (A, B) para $y - x$.

Há dois casos possíveis: o valor da primeira aresta pode ser maior que o da segunda (Figura 5a) ou o valor da primeira aresta pode ser menor ou igual ao da segunda (Figura 6a).

Na Figura 5 vemos o primeiro caso. Aqui pega-se o valor da aresta $(2, 3)$, diminui-se ela da aresta $(1, 2)$, remove-se $(2, 3)$ e cria-se $(1, 3)$, com o valor que se tinha em $(1, 2)$. O resultado disto, aplicado à Figura 5a pode ser visto na Figura 5b.

Caso já exista uma aresta $(1, 3)$, isto não é um problema, já que o Algoritmo 3 cuida para que, ao adicionar uma aresta já existente, o valor da aresta seja apenas aumentado.



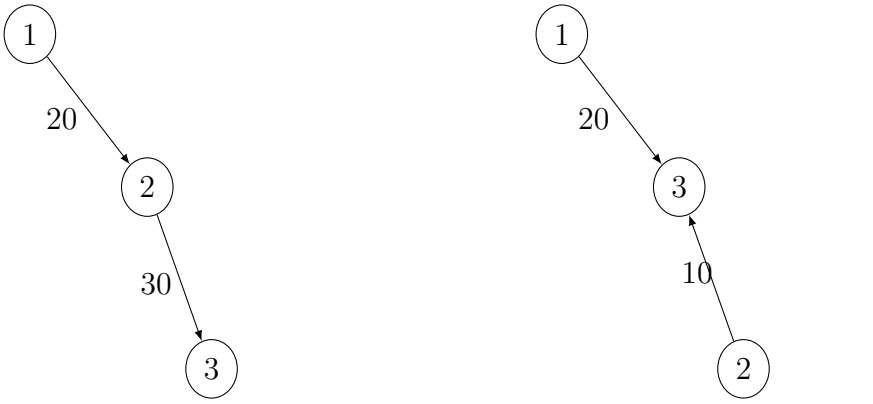
(a) Entrada (b) Saída

Figura 5: Redução aplicada a um grafo simples.

Na Figura 6 vemos o segundo caso. A entrada (Figura 6a) tem uma aresta $(1, 2)$ com valor inferior à aresta $(2, 3)$. Neste caso, pegamos o valor de $(1, 2)$ e removemos esta aresta. Então, subtraímos este valor da aresta $(2, 3)$ e criamos a aresta $(1, 3)$ com este mesmo valor. Isto gera o resultado visto na Figura 6b.

Novamente não precisamos nos preocupar ao adicionar uma aresta com o caso da mesma já existir, já que o Algoritmo 3 já cuida disto.

Há ainda um outro detalhe neste segundo caso: é possível que a aresta intermediária (no caso da Figura 6, a aresta 2), ter sido adicionada novamente à lista de adjacentes da primeira aresta (pelo `senão` do primeiro caso). Neste caso, é importante verificarmos a existência dela e removê-la da lista, para evitarmos acessar um ponteiro inválido ao tentar encontrar uma aresta entre `u` e `v` numa iteração futura do laço `enquanto`.



(a) Entrada (b) Entrada

Figura 6: Redução aplicada a um grafo onde o valor de <v,a> é superior ao de <u,v>

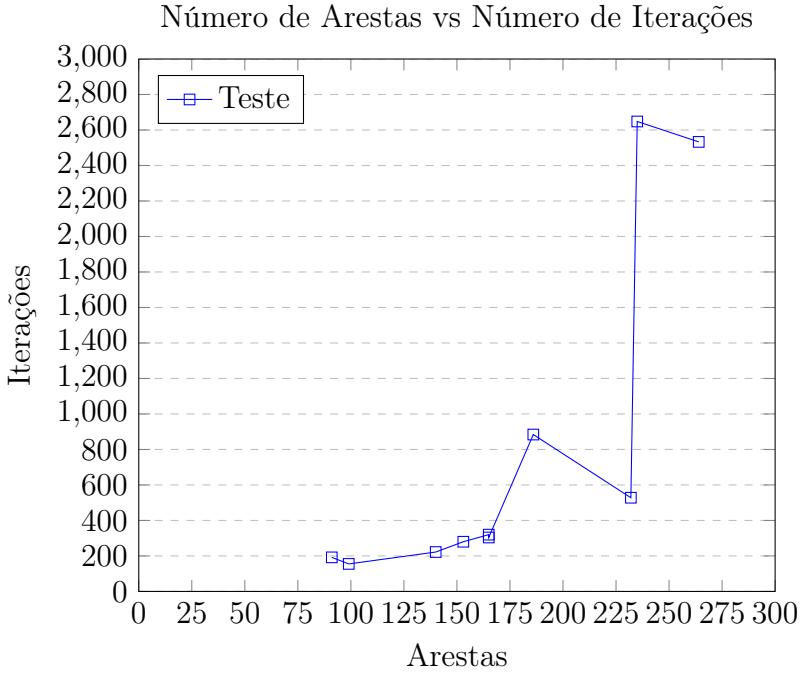
Pode-se facilmente validar o algoritmo com um teste de mesa na Figura 5, na Figura 6, ou mesmo na Figura 1.

Olhando-se para a Figura 5, vemos que os saldos dos correntistas são os mesmos (*i.e.*, o correntista 1 teve uma redução de 100 em seu saldo, o correntista 2 teve um aumento de 50, bem como o correntista 3). A única coisa que mudou entre a Figura 5a e a Figura 5b foram os valores e os destinos das transferências. Somando-se e multiplicando pelo valor do imposto, vemos que na Figura 5a pagaríamos 1.50 de imposto (*i.e.*, 1% de 150), enquanto na Figura 5b pagaríamos 1.00 de impost (*i.e.*, 1% de 100), o que representa uma economia de 0.50.

5 Resultados

Teste	Economia	Transações	Iterações
1	5321.10	264	2533
2	4077.60	235	2648
3	2478.32	165	304
4	2225.54	140	222
5	1462.09	99	155
6	2921.33	186	884
7	1033.03	91	162
8	4124.53	232	528
9	2791.65	165	320
10	2428.67	153	280

Tabela 1: Resultados dos testes da Turma 128



É possível ver na Tabela 1 que há uma economia significativa em cada um dos casos de teste, e o processamento ocorre em um tempo bem aceitável.

Vemos também que o tempo de processamento é proporcional ao número

de transações. Isto faz sentido, dado que cada transação é uma aresta no grafo.

De fato, o algoritmo passará por cada aresta uma vez, e apenas uma vez. Isto daria uma complexidade de $O(e)$, onde e é o número de arestas. No entanto, novas arestas são criadas, e estas devem ser verificadas por transitividade, de modo a otimizar ao máximo as transações. Como cada par de arestas pode gerar uma nova aresta, a complexidade fica $O(e + \frac{e}{2})$. No entanto, a notação O despresa os termos constantes, e ficamos novamente com $O(e)$.

6 Conclusão

Há, possivelmente, a possibilidade de reduzir mais ainda algumas arestas. Esta é apenas uma solução possível, e não necessariamente a melhor.