

Minimização de Valores de Arestas em um Grafo

Pedro Vanzella

19 de novembro de 2015

Resumo

Uma solução para o problema de minimização do valor de imposto pago sobre transferências bancárias é apresentado. Utiliza-se um grafo para representar o conjunto de transferências, e minimiza-se o valor das arestas, através da busca por transitividades.

1 Introdução

Uma recente mudança na regulamentação de impostos reativou uma antiga taxa sobre operações financeiras. Esta taxa, chamada de CPMF, incide em % sobre toda e qualquer transação bancária.

Um banco teve a idéia de minimizar o valor total pago deste imposto através de atalhos em transferências realizadas internamente.

Por exemplo, digamos que haja cinco correntistas, 1, 2, 3, 4 e 5, e haja as seguintes transferências entre eles:

1 transfere \$500 para 2.

2 transfere \$230 para 3.

3 transfere \$120 para 4.

1 transfere \$120 para 4.

2 transfere \$200 para 5.

É possível fazer quatro transferências, respeitando os valores iniciais e finais de saldo das contas destes cinco correntistas, mas minimizando o valor de cada transferência, de modo a pagar menos imposto:

1 transfere \$70 para 2

1 transfere \$110 para 3

1 transfere \$240 para 4

1 transfere \$200 para 5

Podemos ver que, em ambos os casos, o total enviado e o total recebido não foi alterado - apenas os valores parciais mudaram e, com eles, o valor pago em impostos.

Do ponto de vista dos correntistas, nada mudou - *e.g.* o extrato do correntista 1 ainda mostrará duas transferências, uma de \$500 para o correntista 2 e uma de \$120 para o correntista 4 - , mas internamente as transferências realizadas foram bastante diferentes.

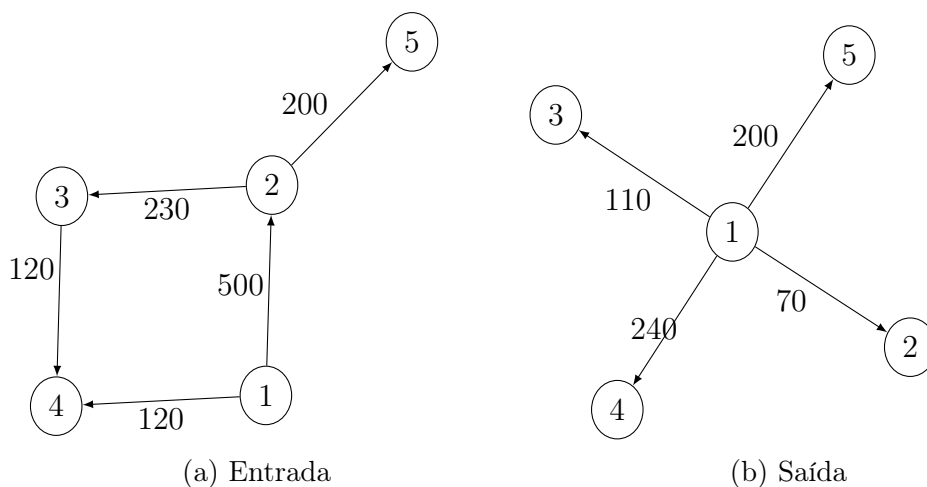


Figura 1: Representação da entrada e da saída como grafos

2 Entrada

O arquivo de entrada é algo no formato mostrado na Figura 2. A primeira linha tem dois valores: a quantidade de correntistas e a quantidade de transações³ descritas no arquivo. Como veremos na Sessão 3,⁵ estas informações não serão necessárias.

```
5 5
1 2 500
2 3 230
3 4 120
1 4 120
2 5 200
```

As linhas seguintes têm três valores cada: o correntista que originou a transação, o correntista de destino da transação, e o valor da transação. Por exemplo, na linha 2 da Figura 2, lemos “*Uma transferência de 500 da conta do correntista 1 para a conta do correntista 2.*”.

Figura 2: Arquivo de entrada

3 Estrutura de Dados

Inicialmente, pensou-se em utilizar *hashes* um de nodos e um de arestas. O problema com isto é que, ao iterar por um *hash*, não se pode alterar seu tamanho.

Resolveu-se então utilizar-se listas de adjacência, com a estrutura mostrada na Figura 3.

```
class Graph:
2     public list<Node> nodes

4     class Node:
        public int val
6         public list<Edge> edges

8     class Edge:
        public Node from
10        public Node to
        public int val
12
```

Figura 3: Representação das classes do grafo

Para ler o arquivo de entrada e criar os nodos e arestas, utilizamos o Algoritmo ???. Veja que ele está na classe **Mardita**, que contém uma instância do grafo.

Algoritmo 1: Criação de Nós e Arestas

Classe: `Mardita`

Entrada: Arquivo como o da Figura 2

Saída: Instância da classe **Graph**

para cada linha l no arquivo, exceto a primeira **faça**

```
    partes ← l.separa(' ');      /* Separa a linha nos espaços */
    nodo_a ← self.graph.add_node(partes[0])
    nodo_b ← self.graph.add_node(partes[1])
    nodo_a.add_edge(nodo_b, partes[2]); /* Liga A com B, com
    valor partes[2] */
```

Onde `add_node` está descrito na Figura ?? e `add_edge` está descrito na Figura ??.

Algoritmo 2: Criação de Nós

Classe: `Graph`

Entrada: `val`: Inteiro, representando o nome do Nó

Saída: Instância da classe **Node**

para todo n em `self.nodes` **faça**

```
    se  $n.val = val$  então
        retorna  $n$ ;      /* Se o nó já existe, retorna ele */
     $n \leftarrow \text{Graph.Node}(val)$ ; /* Chama o construtor de Node */
    self.nodes.add( $n$ );      /* Adiciona à lista de nós */
    retorna  $n$ 
```

O Algoritmo 2, que pertence à classe **Graph**, primeiro verifica se já há um nó com este nome em sua coleção de nós. Caso haja, retorna ele. Se não houver, chama o construtor da classe **Node** para criar um novo nó, adiciona à sua coleção e então retorna o nó criado.

A primeira vista, poderíamos ter utilizado um *set* em vez de uma lista para armazenar a coleção de nós, dado que não queremos dois nós iguais nela. No entanto, a unicidade garantida seria do objeto nó, quando queremos na verdade a unicidade do nome do nó.

Caso a implementação tivesse sido feita com um hash, o algoritmo seria como o descrito no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Criação de Nodo, caso a classe seja implementada com um Hash

Classe: Graph

Entrada: val: Inteiro, representando o nome do Nodo
self.nodes[val] = True

Veja que esta versão de `add_node` não precisa verificar a existência do nodo. No entanto, também não há uma classe **Node**, e não retornamos nada. O modo de acesso seria ligeiramente diferente.

Algoritmo 4: Criação de Arestas

Classe: Node

Entrada: to: Nodo de origem; val: Inteiro, representando o valor da aresta

Saída: Instancia da classe **Edge**

para cada e **em** $self.edges$ **faça**

se $e.to = to$ **então**

retorna $e.update(val)$; /* Se a aresta já existe,
 aumenta seu valor */

$e \leftarrow \text{Graph.Edge}(self, to, val)$; /* Cria nova Edge */
 self.edges.add(e) ; /* Adiciona à coleção de arestas */

retorna e

O Algoritmo 4 é parecido com o Algoritmo 2, pois ele verifica a unicidade da aresta. A diferença é que arestas são consideradas iguais caso suas origens e destinos sejam iguais, para este problema. Como estamos verificando todas as arestas que partem de um nodo, basta comparar o destino.

O construtor da aresta recebe três parâmetros: *de onde*, *para onde* e o *valor* da aresta.

4 Algoritmo

Há duas coisas a serem feitas para resolver o problema: precisamos calcular quanto imposto é pago (Sessão 4.1) e reduzir o número de arestas do grafo (Sessão 4.2).

4.1 Cálculo de Total de Imposto Pago

Este algoritmo é executado duas vezes - uma antes de reduzir-se as arestas, e uma após, de modo a sabermos qual foi a economia.

Algoritmo 5: Cálculo de Imposto Pago

Classe: `Mardita`
Entrada: Todas as arestas do grafo
Saída: Total de imposto pago
 $total \leftarrow 0$
para todo e **em** $self.graph.edges$ **faça**
 $total \leftarrow total + e.valor$
retorna $total \times 0.01$

No Algoritmo 5 vemos como o total de imposto é calculado. Apenas soma-se o valor de todas as arestas e multiplica-se por 0.01, que é o valor do imposto.

Nota-se que está acessando-se a propriedade `edges` da classe **Graph**, mas a mesma não parecia ter acesso às arestas, conforme visto na Figura 3.

De fato, a lista de arestas está na classe **Node**. Para termos acesso a elas, basta termos um método na classe **Graph** que itera por todos os nodos, coletando todas as arestas. A unicidade das arestas é garantida no momento de inserção, então pode-se fazer como é visto no Algoritmo 6.

Algoritmo 6: Coleção de todas as arestas

Classe: `Node`
Entrada: Uma instância da classe `textbfGraph`
Saída: Uma lista de instâncias da classe **Edge**
inicializa `edges` como uma lista vazia
para todo n **em** $self.nodes$ **faça**
 para todo e **em** $n.edges$ **faça**
 adiciona e em `edges`
retorna `edges`

4.2 Redução das Arestas

Este é o algoritmo principal, onde o problema é de fato solucionado. O pseudocódigo pode ser visto na Figura ??.

Algoritmo 7: Redução de Arestas

Classe: Mardita

para todo u em $self.graph.nodes$ **faça**

$vs \leftarrow$ adjacentes de u

enquanto vs não estiver vazia **faça**

$v \leftarrow vs.pop()$; /* Remove um elemento de vs */

para todo a adjacente a v **faça**

se valor de $\langle v, a \rangle <$ valor de $\langle u, v \rangle$ **então**

$tmp \leftarrow$ valor de $\langle v, a \rangle$

 remove $\langle v, a \rangle$

 valor de $\langle u, v \rangle \leftarrow$ diminui de tmp

se já existe aresta entre u e a **então**

\lfloor valor de $\langle u, a \rangle \leftarrow$ aumenta de tmp

senão

 cria aresta $\langle u, a \rangle$ com valor tmp

$vs \leftarrow a$; /* Nodo a agora é adjacente de u */

senão

se v está em vs **então**

\lfloor remove v de vs ; /* v pode ter sido conectado
 novamente graças a um ciclo */

$tmp \leftarrow$ valor de $\langle u, v \rangle$

 remove $\langle u, v \rangle$

 valor de $\langle v, a \rangle \leftarrow$ diminui de tmp

 cria aresta $\langle u, a \rangle$ com valor tmp

$vs \leftarrow a$; /* Nodo a é agora é adjacentes de u */

A idéia do Algoritmo 7 é encontrar transitividade entre os nodos - isto é, para um grafo $G = n, e$ com $n = A, B, C$ e $e = (A, B, x), (B, C, y)$, gerar uma nova aresta $(A, C, x - y)$, remover a aresta (B, C, x) e alterar o valor da aresta (A, B) para $y - x$.

Para isto, encontra-se os “amigos dos amigos” de cada nodo no grafo (linhas 2-4 da Figura ??). A verificação da linha 5 é importante para que não criemos uma transação de valor negativo.

Caso a verificação da linha 5 seja positiva, podemos atualizar o valor da primeira aresta (u, v) , subtraindo o valor da aresta (v, a) . Também removemos a aresta (v, a) do grafo.

O próximo passo é criar a aresta (u, a) . Há um porém: a aresta (u, a) pode já existir. Neste caso, apenas soma-se o valor da aresta (v, a) . Caso a aresta não exista, cria-se uma aresta (u, a) com o valor da aresta (v, a) .

Um exemplo mínimo disto pode ser visto na Figura 4.

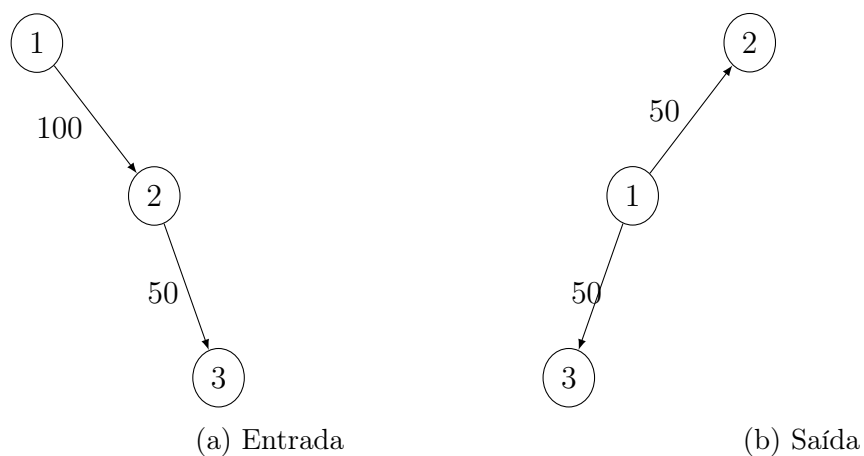


Figura 4: Redução aplicada a um grafo simples.

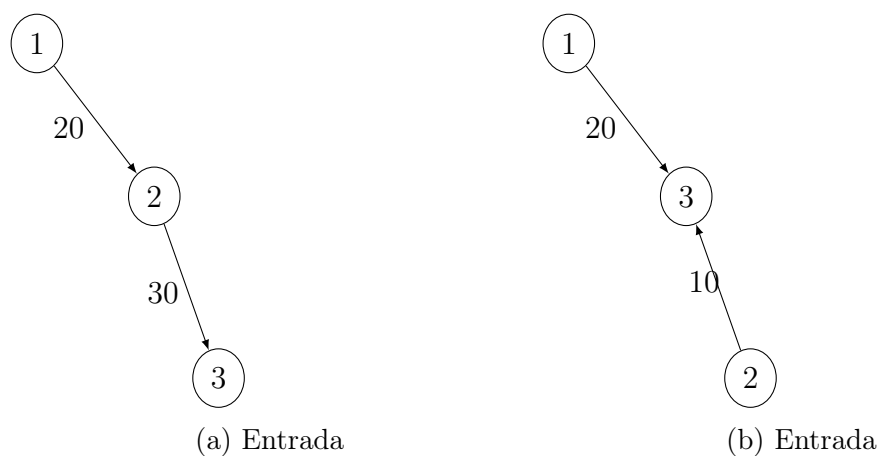


Figura 5: Redução aplicada a um grafo onde o valor de $\langle v, a \rangle$ é superior ao de $\langle u, v \rangle$

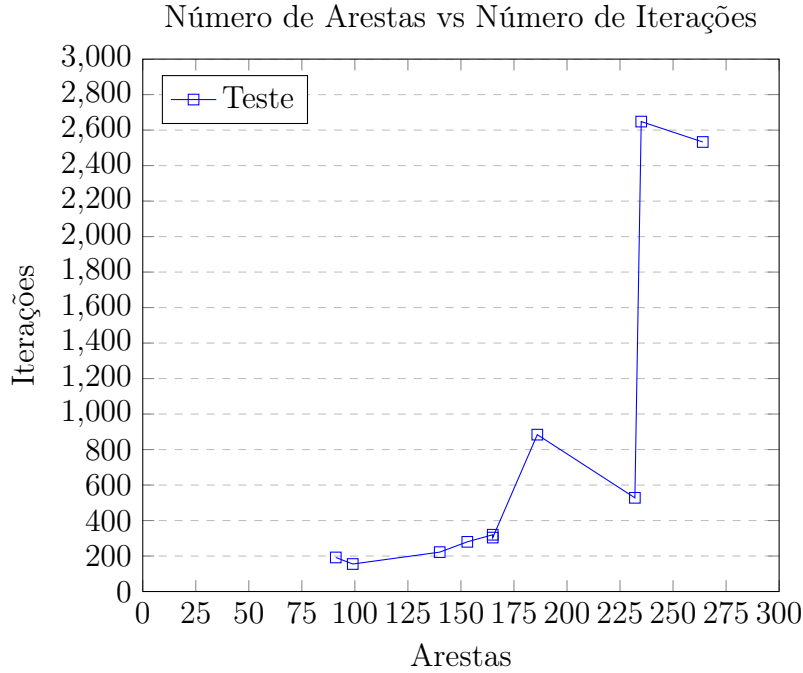
Pode-se facilmente validar o algoritmo com um teste de mesa na Figura 4, ou mesmo na Figura 1.

Olhando-se para a Figura 4, vemos que os saldos dos correntistas são os mesmos (*i.e.*, o correntista 1 teve uma redução de 100 em seu saldo, o correntista 2 teve um aumento de 50, bem como o correntista 3). A única coisa que mudou entre a Figura 4a e a Figura 4b foram os valores e os destinos das transferências. Somando-se e multiplicando pelo valor do imposto, vemos que na Figura 4a pagaríamos 1.50 de imposto (*i.e.*, 1% de 150), enquanto na Figura 4b pagaríamos 1.00 de imposto (*i.e.*, 1% de 100).

5 Resultados

Teste	Economia	Transações	Iterações
1	5321.10	264	2533
2	4077.60	235	2648
3	2478.32	165	304
4	2225.54	140	222
5	1462.09	99	155
6	2921.33	186	884
7	1033.03	91	162
8	4124.53	232	528
9	2791.65	165	320
10	2428.67	153	280

Tabela 1: Resultados dos testes da Turma 128



É possível ver na Tabela 1 que há uma economia significativa em cada um dos casos de teste, e o processamento ocorre em um tempo bem aceitável.

Vemos também que o tempo de processamento é proporcional ao número de transações. Isto faz sentido, dado que cada transação é uma aresta no grafo.

De fato, o algoritmo passará por cada aresta uma vez, e apenas uma vez. Isto daria uma complexidade de $O(e)$, onde e é o número de arestas. No entanto, novas arestas são criadas, e estas devem ser verificadas por transitividade, de modo a otimizar ao máximo as transações. Como cada par de arestas pode gerar uma nova aresta, a complexidade fica $O(e + \frac{e}{2})$. No entanto, a notação O despreza os termos constantes, e ficamos novamente com $O(e)$.

6 Conclusão

Há, possivelmente, a possibilidade de reduzir mais ainda algumas arestas. Esta é apenas uma solução possível, e não necessariamente a melhor.