

Minimização de Valores de Arestas em um Grafo

Pedro Vanzella

19 de novembro de 2015

Resumo

Uma solução para o problema de minimização do valor de imposto pago sobre transferências bancárias é apresentado. Utiliza-se um grafo para representar o conjunto de transferências, e minimiza-se o valor das arestas, através da busca por transitividades.

1 Introdução

Uma recente mudança na regulamentação de impostos reativou uma antiga taxa sobre operações financeiras. Esta taxa, chamada de CPMF, incide em 1% sobre toda e qualquer transação bancária.

Um banco teve a idéia de minimizar o valor total pago deste imposto através de atalhos em transferências realizadas internamente.

Por exemplo, digamos que haja cinco correntistas, 1, 2, 3, 4 e 5, e haja as seguintes transferências entre eles:

1 transfere \$500 para 2.

2 transfere \$230 para 3.

3 transfere \$120 para 4.

1 transfere \$120 para 4.

2 transfere \$200 para 5.

É possível fazer quatro transferências, respeitando os valores iniciais e finais de saldo das contas destes cinco correntistas, mas minimizando o valor de cada transferência, de modo a pagar menos imposto:

- 1 transfere \$70 para 2
- 1 transfere \$110 para 3
- 1 transfere \$240 para 4
- 1 transfere \$200 para 5

Podemos ver que, em ambos os casos, o total enviado e o total recebido não foi alterado - apenas os valores parciais mudaram e, com eles, o valor pago em impostos.

Do ponto de vista dos correntistas, nada mudou - *e.g.* o extrato do correntista 1 ainda mostrará duas transferências, uma de \$500 para o correntista 2 e uma de \$120 para o correntista 4 - , mas internamente as transferências realizadas foram bastante diferentes. Podemos ver uma representação gráfica disto na Figura 1.

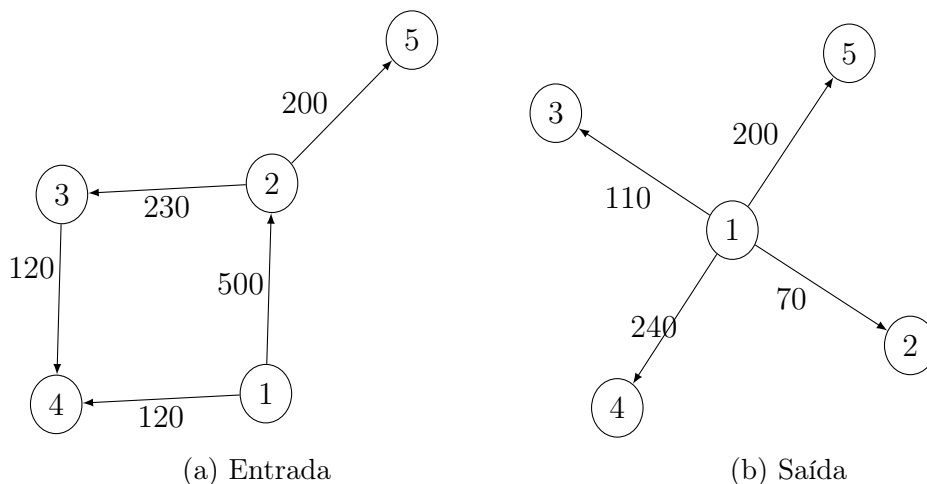


Figura 1: Representação da entrada e da saída como grafos

2 Entrada

O arquivo de entrada está no formato mostrado na Figura 2. A primeira linha tem dois valores: a quantidade de correntistas e a quantidade de transações descritas no arquivo. Como veremos na Seção 3, estas informações não serão necessárias.

5	5
1	2 500
2	3 230
3	4 120
1	4 120
2	5 200

As linhas seguintes têm três valores cada: o correntista que originou a transação, o correntista de destino da transação, e o valor da transação. Por exemplo, na linha 2 da Figura 2, lemos “*Uma transferência de 500 da conta do correntista 1 para a conta do correntista 2.*”.

Figura 2: Arquivo de entrada

Este arquivo de entrada representa o exemplo da Seção 1 e da Figura 1a.

3 Estrutura de Dados

A estrutura escolhida para representar o grafo foi a de Lista de Adjacências, como mostrado na Figura 3.

Outras alternativas, como a representação em Matriz de Adjacências também são possíveis, acarretando custos diferentes para acessos e remoções. No entanto, o acesso aos adjacentes de um nodo por Lista de Adjacentes se dá em $O(adj)$, enquanto por Matriz de Adjacências se dá em $O(n)$, onde n é o número de nodos do grafo. Como espera-se que haja menos arestas em um nodo do que nodos no grafo, a performance da Lista de Adjacências tende a ser ligeiramente melhor para esta aplicação.

No entanto, o fator principal para a escolha da representação por Lista de Adjacências foi a facilidade de se trabalhar com ela.

```

class Graph:
2   public list <Node> nodes

4   class Node:
        public int val
6        public list <Edge> edges

8   class Edge:
        public Node from
10        public Node to
        public int val
12

```

Figura 3: Representação das classes do grafo

Para ler o arquivo de entrada e criar os nodos e arestas, utilizamos o Algoritmo 1. Veja que ele está na classe **Mardita**, que contém uma instância do grafo.

Algoritmo 1: Criação de Nodos e Arestas

Classe: Mardita

Entrada: Arquivo como o da Figura 2

Saída: Instância da classe **Graph**

para cada linha l no arquivo, exceto a primeira **faça**

```

    partes ← l.separa(' ');    /* Separa a linha nos espaços */
    nodo_a ← self.graph.add_node(partes[0])
    nodo_b ← self.graph.add_node(partes[1])
    nodo_a.add_edge(nodo_b, partes[2]); /* Liga A com B, com
    valor partes[2] */

```

Onde `add_node` está descrito no Algoritmo 2 e `add_edge` está descrito no Algoritmo 3.

Algoritmo 2: Criação de Nós

Classe: Graph

Entrada: val: Inteiro, representando o nome do Nó

Saída: Instância da classe **Node**

para todo n **em** $self.nodes$ **faça**

se $n.val = val$ **então**

retorna n ; /* Se o nó já existe, retorna ele */

$n \leftarrow \text{Graph.Node}(val)$; /* Chama o construtor de Node */

$self.nodes.add(n)$; /* Adiciona à lista de nós */

retorna n

O Algoritmo 2, que pertence à classe **Graph**, primeiro verifica se já há um nó com este nome em sua coleção de nós. Caso haja, retorna ele. Se não houver, chama o construtor da classe **Node** para criar um novo nó, adiciona à sua coleção e então retorna o nó criado.

A primeira vista, poderíamos ter utilizado um *set* em vez de uma lista para armazenar a coleção de nós, dado que não queremos dois nós iguais nela. No entanto, a unicidade garantida seria do objeto nó, quando queremos na verdade a unicidade do nome do nó.

Algoritmo 3: Criação de Arestas

Classe: Node

Entrada: to: Nó de origem; val: Inteiro, representando o valor da aresta

Saída: Instância da classe **Edge**

para cada e **em** $self.edges$ **faça**

se $e.to = to$ **então**

retorna $e.update(val)$; /* Se a aresta já existe,
 aumenta seu valor */

$e \leftarrow \text{Graph.Edge}(self, to, val)$; /* Cria nova Edge */

$self.edges.add(e)$; /* Adiciona à coleção de arestas */

retorna e

O Algoritmo 3 é parecido com o Algoritmo 2, pois ele verifica a unicidade da aresta. A diferença é que arestas são consideradas iguais, neste problema caso suas origens e destinos sejam iguais. Como estamos verificando todas as arestas que partem de um nó, basta comparar o destino.

O construtor da aresta recebe três parâmetros: *de onde*, *para onde* e o *valor* da aresta.

Caso a aresta já exista, soma-se o valor das transações, de modo a criar apenas uma aresta entre dois nodos. Um exemplo disto pode ser visto na Figura 4. O grafo da Figura 4a representa duas transações, com a mesma origem e o mesmo destino. Ao somar-se o valor de suas arestas, temos o grafo da Figura 4b. Este é o que é utilizado pelo algoritmo.



Figura 4: Consolidação de arestas com mesma origem e destino

4 Algoritmo

Há duas coisas a serem feitas para resolver o problema: precisamos calcular quanto imposto é pago (Seção 4.1) e reduzir o número de arestas do grafo (Seção 4.2).

4.1 Cálculo de Total de Imposto Pago

Este algoritmo é executado duas vezes - uma antes de reduzir-se as arestas, e uma após, de modo a sabermos qual foi a economia.

Algoritmo 4: Cálculo de Imposto Pago

Classe: Mardita

Entrada: Todas as arestas do grafo

Saída: Total de imposto pago

$total \leftarrow 0$

para todo e *em* $self.graph.edges$ **faça**

$total \leftarrow total + e.valor$

retorna $total \times 0.01$

No Algoritmo 4 vemos como o total de imposto é calculado. Apenas soma-se o valor de todas as arestas e multiplica-se por 0.01, que é o valor do imposto.

Nota-se que está acessando-se a propriedade `edges` da classe **Graph**, mas a mesma não parecia ter acesso às arestas, conforme visto na Figura 3.

De fato, a lista de arestas está na classe **Node**. Para termos acesso a elas, basta termos um método na classe **Graph** que itera por todos os nodos, coletando todas as arestas. A unicidade das arestas é garantida no momento de inserção, então pode-se fazer como é visto no Algoritmo 5.

Algoritmo 5: Coleção de todas as arestas

Classe: Node

Entrada: Uma instância da classe **textbfGraph**

Saída: Uma lista de instâncias da classe **Edge**

inicializa *edges* como uma lista vazia

para todo *n* em *self.nodes* **faça**

para todo *e* em *n.edges* **faça**

 └ adiciona *e* em *edges*

retorna *edges*

4.2 Redução das Arestas

Este é o algoritmo principal, onde o problema é de fato solucionado. O pseudocódigo pode ser visto na Figura ??.

Algoritmo 6: Redução de Arestas

Classe: Mardita

para todo u em $self.graph.nodes$ **faça**

$vs \leftarrow$ adjacentes de u

enquanto vs não estiver vazia **faça**

$v \leftarrow vs.pop()$; /* Remove um elemento de vs */

para todo a adjacente a v **faça**

se valor de $\langle v, a \rangle <$ valor de $\langle u, v \rangle$ **então**

$tmp \leftarrow$ valor de $\langle v, a \rangle$

 remove $\langle v, a \rangle$

 valor de $\langle u, v \rangle \leftarrow$ diminui de tmp

se já existe aresta entre u e a **então**

\lfloor valor de $\langle u, a \rangle \leftarrow$ aumenta de tmp

senão

\lfloor cria aresta $\langle u, a \rangle$ com valor tmp

\lfloor $vs \leftarrow a$; /* Nodo a agora é adjacente de u */

senão

se v está em vs **então**

\lfloor remove v de vs ; /* v pode ter sido conectado

\lfloor novamente graças a um ciclo */

$tmp \leftarrow$ valor de $\langle u, v \rangle$

 remove $\langle u, v \rangle$

 valor de $\langle v, a \rangle \leftarrow$ diminui de tmp

 cria aresta $\langle u, a \rangle$ com valor tmp

$vs \leftarrow a$; /* Nodo a é agora é adjacentes de u */

A idéia do Algoritmo 6 é encontrar transitividade entre os nodos - isto é, para um grafo $G = n, e$ com $n = A, B, C$ e $e = (A, B, x), (B, C, y)$, gerar uma nova aresta $(A, C, x - y)$, remover a aresta (B, C, x) e alterar o valor da aresta (A, B) para $y - x$.

Para isto, encontra-se os “amigos dos amigos” de cada nodo no grafo (linhas 2-4 da Figura ??). A verificação da linha 5 é importante para que não criemos uma transação de valor negativo.

Caso a verificação da linha 5 seja positiva, podemos atualizar o valor da primeira aresta (u, v) , subtraindo o valor da aresta (v, a) . Também removemos a aresta (v, a) do grafo.

O próximo passo é criar a aresta (u, a) . Há um porém: a aresta (u, a) pode já existir. Neste caso, apenas soma-se o valor da aresta (v, a) . Caso a aresta não exista, cria-se uma aresta (u, a) com o valor da aresta (v, a) .

Um exemplo mínimo disto pode ser visto na Figura 5.

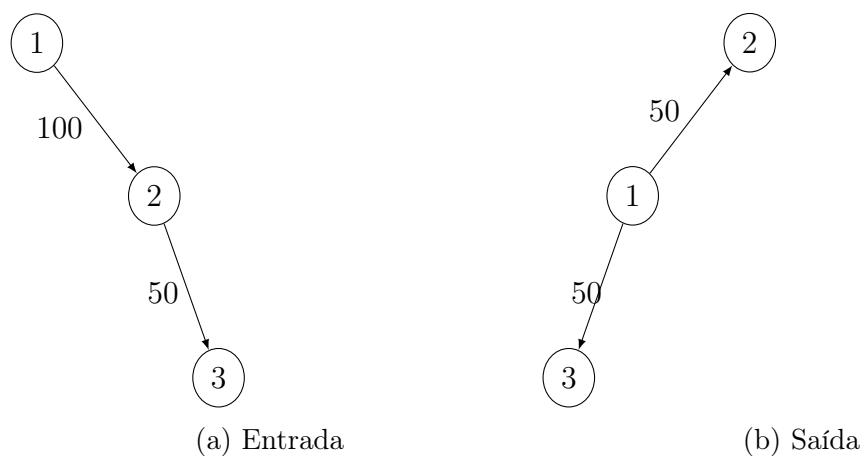


Figura 5: Redução aplicada a um grafo simples.

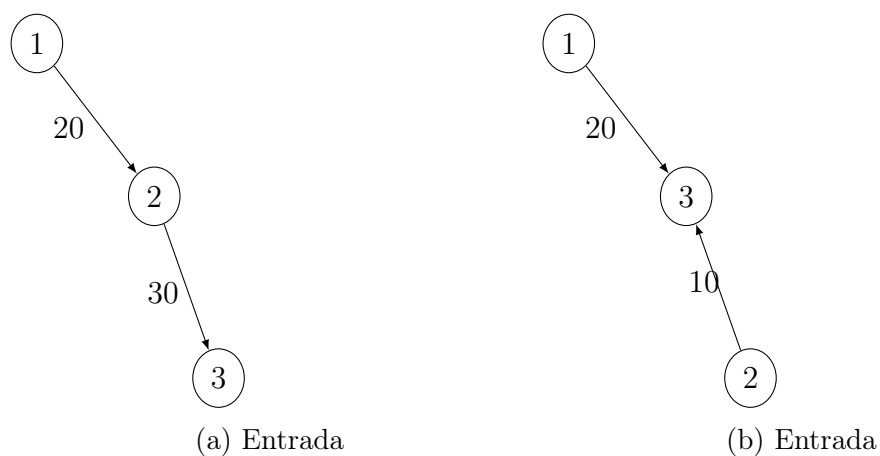


Figura 6: Redução aplicada a um grafo onde o valor de $\langle v, a \rangle$ é superior ao de $\langle u, v \rangle$

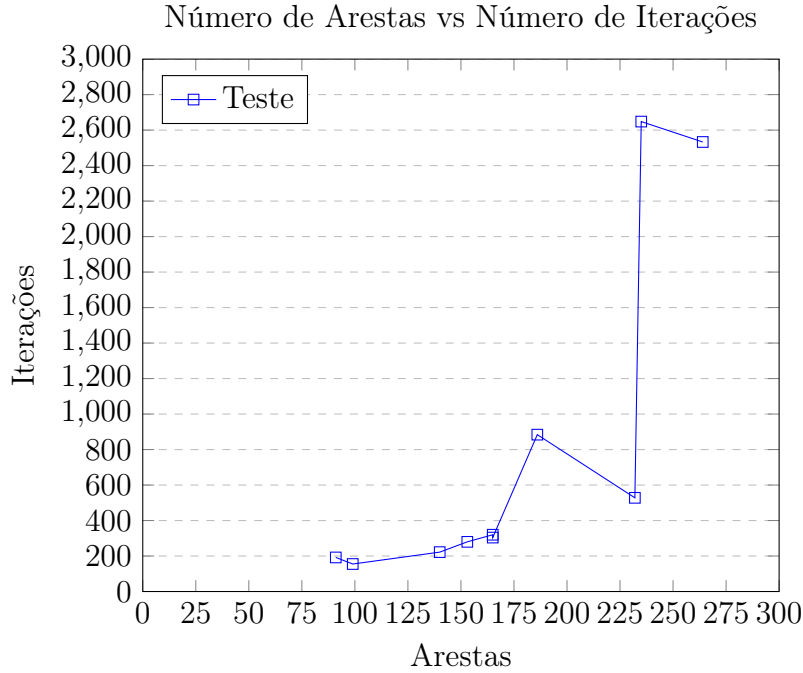
Pode-se facilmente validar o algoritmo com um teste de mesa na Figura 5, ou mesmo na Figura 1.

Olhando-se para a Figura 5, vemos que os saldos dos correntistas são os mesmos (*i.e.*, o correntista 1 teve uma redução de 100 em seu saldo, o correntista 2 teve um aumento de 50, bem como o correntista 3). A única coisa que mudou entre a Figura 5a e a Figura 5b foram os valores e os destinos das transferências. Somando-se e multiplicando pelo valor do imposto, vemos que na Figura 5a pagaríamos 1.50 de imposto (*i.e.*, 1% de 150), enquanto na Figura 5b pagaríamos 1.00 de imposto (*i.e.*, 1% de 100).

5 Resultados

Teste	Economia	Transações	Iterações
1	5321.10	264	2533
2	4077.60	235	2648
3	2478.32	165	304
4	2225.54	140	222
5	1462.09	99	155
6	2921.33	186	884
7	1033.03	91	162
8	4124.53	232	528
9	2791.65	165	320
10	2428.67	153	280

Tabela 1: Resultados dos testes da Turma 128



É possível ver na Tabela 1 que há uma economia significativa em cada um dos casos de teste, e o processamento ocorre em um tempo bem aceitável.

Vemos também que o tempo de processamento é proporcional ao número de transações. Isto faz sentido, dado que cada transação é uma aresta no grafo.

De fato, o algoritmo passará por cada aresta uma vez, e apenas uma vez. Isto daria uma complexidade de $O(e)$, onde e é o número de arestas. No entanto, novas arestas são criadas, e estas devem ser verificadas por transitividade, de modo a otimizar ao máximo as transações. Como cada par de arestas pode gerar uma nova aresta, a complexidade fica $O(e + \frac{e}{2})$. No entanto, a notação O despreza os termos constantes, e ficamos novamente com $O(e)$.

6 Conclusão

Há, possivelmente, a possibilidade de reduzir mais ainda algumas arestas. Esta é apenas uma solução possível, e não necessariamente a melhor.