Minimização de Valores de Arestas em um Grafo

Pedro Vanzella

17 de novembro de 2015

1 Introdução

Uma recente mudança na regulamentação de impostos reativou uma antiga taxa sobre operações financeiras. Esta taxa, chamada de CPMF, incide em % sobre toda e qualquer transação bancária.

Um banco teve a idéia de minimizar o valor total pago deste imposto através de atalhos em transferências realizadas internamente.

Por exemplo, digamos que haja cinco correntistas, 1, 2, 3, 4 e 5, e haja as seguintes transferências entre eles:

1 transfere $500 para 2.

2 transfere $230 para 3.

3 transfere $120 para 4.

1 transfere $120 para 4.

2 transfere $200 para 5.

É possível fazer quatro transferências, respeitando os valores iniciais e finais de saldo das contas destes cinco correntistas, mas minimizando o valor de cada transferência, de modo a pagar menos imposto:

1 transfere $70 para 2

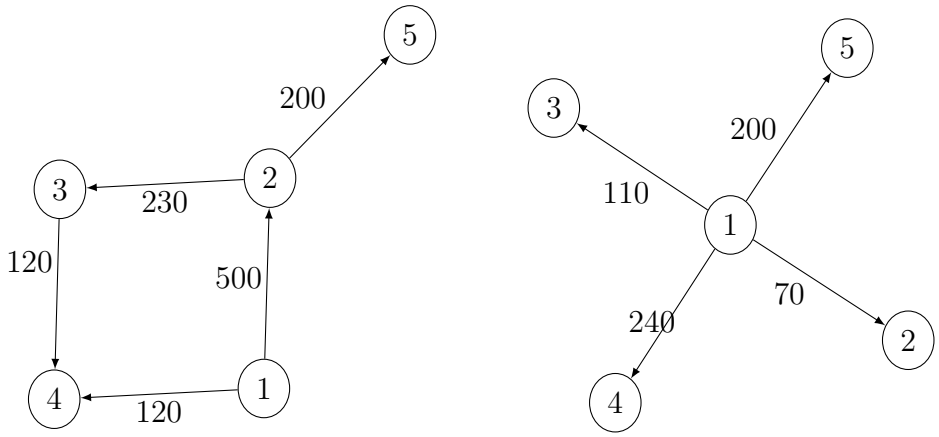
1 transfere $110 para 3

1 transfere $240 para 4

1 transfere $200 para 5

Podemos ver que, em ambos os casos, o total enviado e o total recebido não foi alterado - apenas os valores parciais mudaram e, com eles, o valor pago em impostos.

Do ponto de vista dos correntistas, nada mudou - *e.g.* o extrato do correntista 1 ainda mostrará duas transferências, uma de $500 para o correntista 2 e uma de $120 para o correntista 4 - , mas internamente as transferências realizadas foram bastante diferentes.



(a) Entrada (b) Saída

Figura 1: Representação da entrada e da saída como grafos

2 Entrada

O arquivo de entrada é algo no formato mostrado na Figura 2. A primeira linha tem dois valores: a quantidade de correntistas e a quantidade de transações descritas no arquivo. Como veremos na Sessão 3, estas informações não serão necessárias.

As linhas seguintes têm três valores cada: o correntista que originou a transação, o correntista de destino da transação, e o valor da transação. Por

```
1  5 5
2  1 2 500
3  2 3 230
4  3 4 120
5  1 4 120
6  2 5 200
7
```

Figura 2: Arquivo de entrada

exemplo, na linha 2 da Figura 2, lemos "*Uma transferência de 500 da conta do correntista 1 para a conta do correntista 2.*".

3 Estrutura de Dados

Inicialmente, pensou-se em utilizar *hashes* um de nodos e um de arestas. O problema com isto é que, ao iterar por um *hash*, não se pode alterar seu tamanho.

Resolveu-se então utilizar-se listas de adjacência, com a estrutura mostrada na Figura 3.

```
class Graph:
    public list<Node> nodes

    class Node:
        public int val
        public list<Edge> edges

    class Edge:
        public Node from
        public Node to
        public int val

```

Figura 3: Representação das classes do grafo

Para ler o arquivo de entrada e criar os nodos e arestas, utilizamos o Algoritmo **??**. Veja que ele está na classe **Mardita**, que contém uma instância do grafo.

Algoritmo 1: Criação de Nodos e Arestas

Classe: Mardita
Entrada: Arquivo como o da Figura 2
Saída: Instância da classe **Graph**
para cada *linha l no arquivo, exceto a primeira* **faça**
    partes ← l.separa(' ') ; `/* Separa a linha nos espaços */`
    nodo_a ← self.graph.add_node(partes[0])
    nodo_b ← self.graph.add_node(partes[1])
    nodo_a.add_edge(nodo_b, partes[2]) ; `/* Liga A com B, com valor partes[2] */`

Onde `add_node` está descrito na Figura **??** e `add_edge` está descrito na Figura **??**.

Algoritmo 2: Criação de Nodos

Classe: Graph
Entrada: val: Inteiro, representando o nome do Nodo
Saída: Instância da classe **Node**
para todo *n em self.nodes* **faça**
    se *n.val* = *val* **então**
        retorna *n* ; `/* Se o nodo já existe, retorna ele */`
    n ← Graph.Node(val) ; `/* Chama o construtor de Node */`
    self.nodes.add(n) ; `/* Adiciona à lista de nodos */`
    retorna *n*

O Algoritmo 2, que pertence à classe **Graph**, primeiro verifica se já há um nodo com este nome em sua coleção de nodos. Caso haja, retorna ele. Se não houver, chama o construtor da classe **Node** para criar um novo nodo, adiciona à sua coleção e então retorna o nodo criado.

A primeira vista, poderíamos ter utilizado um *set* em vez de uma lista para armazenar a coleção de nodos, dado que não queremos dois nodos iguais nela. No entanto, a unicidade garantida seria do objeto nodo, quando queremos na verdade a unicidade do nome do nodo.

Caso a implementação tivesse sido feita com um hash, o algoritmo seria como o descrito no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Criação de Nodo, caso a classe seja implementada com um Hash

Classe: Graph
Entrada: val: Inteiro, representando o nome do Nodo
self.nodes[val] = True

Veja que esta versão de `add_node` não precisa verificar a existência do nodo. No entanto, também não há uma classe **Node**, e não retornamos nada. O modo de acesso seria ligeiramente diferente.

Algoritmo 4: Criação de Arestas

Classe: Node
Entrada: to: Nodo de origem; val: Inteiro, representando o valor da aresta
Saída: Instancia da classe **Edge**

```
para cada e em self.edges faça
    se e.to = to então
        retorna e.update(val) ;          /* Se a aresta já existe,
         aumenta seu valor */
    e ← Graph.Edge(self, to, val) ;          /* Cria nova Edge */
    self.edges.add(e) ;       /* Adiciona à coleção de arestas */
    retorna e
```

O Algoritmo 4 é parecido com o Algoritmo 2, pois ele verifica a unicidade da aresta. A diferença é que arestas são consideradas iguais caso suas origens e destinos sejam iguais, para este problema. Como estamos verificando todas as arestas que partem de um nodo, basta comparar o destino.

O construtor da aresta recebe três parâmetros: *de onde*, *para onde* e o *valor* da aresta.

4 Algoritmo

Há duas coisas a serem feitas para resolver o problema: precisamos calcular quanto imposto é pago (Sessão 4.1) e reduzir o número de arestas do grafo (Sessão 4.2).

4.1 Cálculo de Total de Imposto Pago

Este algoritmo é executado duas vezes - uma antes de reduzir-se as arestas, e uma após, de modo a sabermos qual foi a economia.

Algoritmo 5: Cálculo de Imposto Pago

```
Classe: Mardita
Entrada: Todas as arestas do grafo
Saída: Total de imposto pago
total ← 0
para todo e em self.graph.edges faça
    total ← total + e.valor
retorna total × 0.01
```

No Algoritmo 5 vemos como o total de imposto é calculado. Apenas soma-se o valor de todas as arestas e multiplica-se por 0.01, que é o valor do imposto.

Nota-se que está acessando-se a propriedade edges da classe **Graph**, mas a mesma não parecia ter acesso às arestas, conforme visto na Figura 3.

De fato, a lista de arestas está na classe **Node**. Para termos acesso a elas, basta termos um método na classe **Graph** que itera por todos os nodos, coletando todas as arestas. A unicidade das arestas é garantida no momento de inserção, então pode-se fazer como é visto no Algoritmo 6.

Algoritmo 6: Coleção de todas as arestas

```
Classe: Node
Entrada: Uma instância da classe textbfGraph
Saída: Uma lista de instâncias da classe Edge
inicializa edges como uma lista vazia
para todo n em self.nodes faça
    para todo e em n.edges faça
        adiciona e em edges
retorna edges
```

4.2 Redução das Arestas

Este é o algoritmo principal, onde o problema é de fato solucionado. O pseudocódigo pode ser visto na Figura **??**.

Algoritmo 7: Redução de Arestas

```
Classe: Mardita
para todo u em self.graph.nodes faça
    vs ← adjacentes de u
    enquanto vs não estiver vazia faça
        v ← vs.pop() ;              /* Remove um elemento de vs */
        para todo a adjacente a v faça
            se valor de <v, a> < valor de <u, v> então
                tmp ← valor de <v,a>
                remove <v, a>
                valor de <u,v> ← diminui de tmp
                se já existe aresta entre u e a então
                    valor de <u, a> ← aumenta de tmp
                senão
                    cria aresta <u, a> com valor tmp
                    vs ← a ;  /* Nodo a agora é adjacente de u */
            senão
                se v está em vs então
                    remove v de vs ;   /* v pode ter sido conectado
                     novamente graças a um ciclo */
                tmp ← valor de <u,v>
                remove <u,v>
                valor de <v,a> ← diminui de tmp
                cria aresta <u,a> com valor tmp
                vs ← a ;  /* Nodo a é agora é adjacentes de u */
```

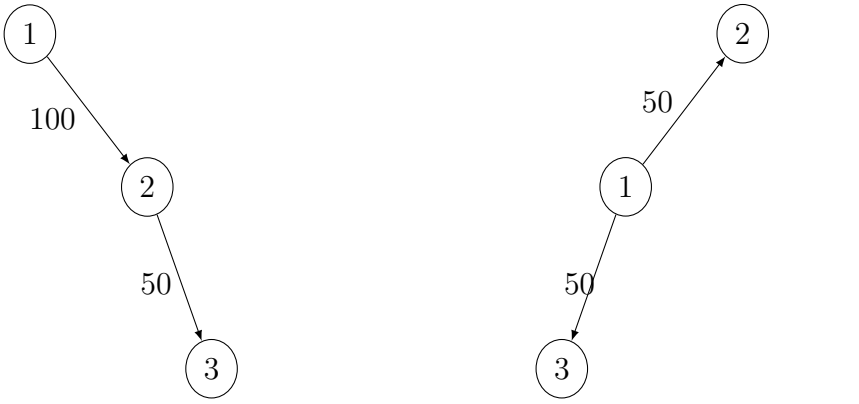
A idéia do Algoritmo 7 é encontrar transitividade entre os nodos - isto é, para um grafo $G = n, e$ com $n = A, B, C$ e $e = (A, B, x), (B, C, y)$, gerar uma nova aresta $(A, C, x - y)$, remover a aresta (B, C, x) e alterar o valor da aresta (A, B) para $y - x$.

Para isto, encontra-se os "amigos dos amigos" de cada nodo no grafo (linhas 2-4 da Figura **??**). A verificação da linha 5 é importante para que não criemos uma transação de valor negativo.

Caso a verificação da linha 5 seja positiva, podemos atualizar o valor da primeira aresta (u, v), subtraindo o valor da aresta (v, a). Também removemos a aresta (v, a) do grafo.

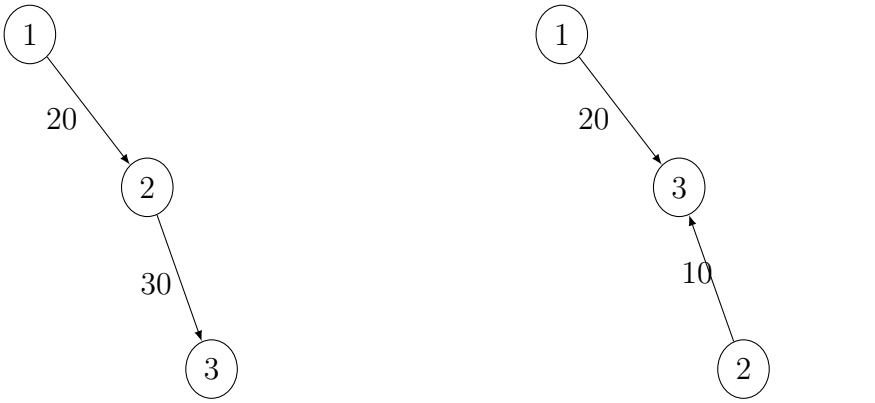
O próximo passo é criar a aresta (u, a). Há um porém: a aresta (u, a) pode já existir. Neste caso, apenas soma-se o valor da aresta (v, a). Caso a aresta não exista, cria-se uma aresta (u, a) com o valor da aresta (v, a).

Um exemplo mínimo disto pode ser visto na Figura 4.



(a) Entrada (b) Saída

Figura 4: Redução aplicada a um grafo simples.



(a) Entrada (b) Entrada

Figura 5: Redução aplicada a um grafo onde o valor de <v,a> é superior ao de <u,v>

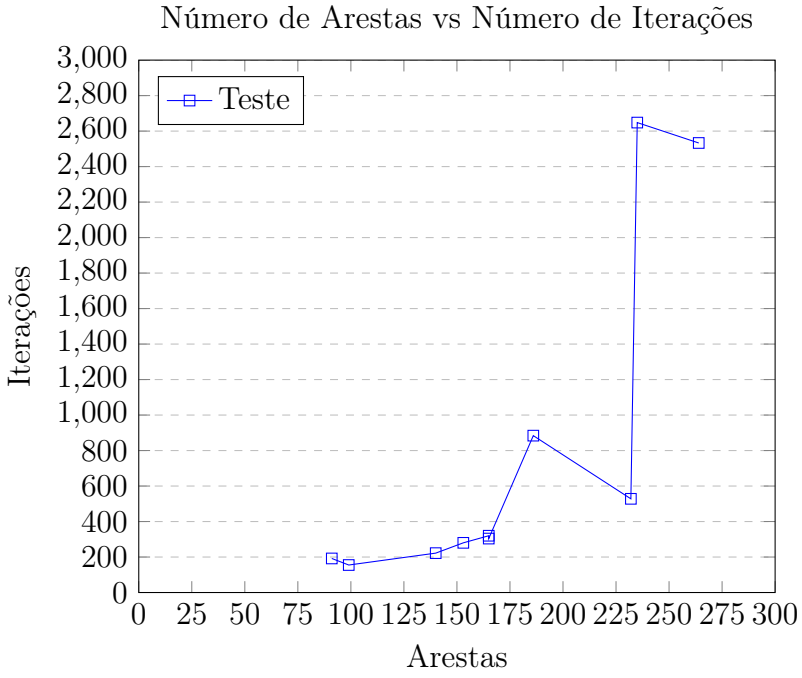
Pode-se facilmente validar o algoritmo com um teste de mesa na Figura 4, ou mesmo na Figura 1.

Olhando-se para a Figura 4, vemos que os saldos dos correntistas são os mesmos (*i.e.*, o correntista 1 teve uma redução de 100 em seu saldo, o correntista 2 teve um aumento de 50, bem como o correntista 3). A única coisa que mudou entre a Figura 4a e a Figura 4b foram os valores e os destinos das transferências. Somando-se e multiplicando pelo valor do imposto, vemos que na Figura 4a pagaríamos 1.50 de imposto (*i.e.*, 1% de 150), enquanto na Figura 4b pagaríamos 1.00 de impost (*i.e.*, 1% de 100).

5 Resultados

Teste	Economia	Transações	Iterações
1	5321.10	264	2533
2	4077.60	235	2648
3	2478.32	165	304
4	2225.54	140	222
5	1462.09	99	155
6	2921.33	186	884
7	1033.03	91	162
8	4124.53	232	528
9	2791.65	165	320
10	2428.67	153	280

Tabela 1: Resultados dos testes da Turma 128



É possível ver na Tabela 1 que há uma economia significativa em cada um dos casos de teste, e o processamento ocorre em um tempo bem aceitável.

Vemos também que o tempo de processamento é proporcional ao número de transações. Isto faz sentido, dado que cada transação é uma aresta no grafo.

De fato, o algoritmo passará por cada aresta uma vez, e apenas uma vez. Isto daria uma complexidade de $O(e)$, onde e é o número de arestas. No entanto, novas arestas são criadas, e estas devem ser verificadas por transitividade, de modo a otimizar ao máximo as transações. Como cada par de arestas pode gerar uma nova aresta, a complexidade fica $O(e + \frac{e}{2})$. No entanto, a notação O despresa os termos constantes, e ficamos novamente com $O(e)$.

6 Conclusão

Há, possivelmente, a possibilidade de reduzir mais ainda algumas arestas. Esta é apenas uma solução possível, e não necessariamente a melhor.