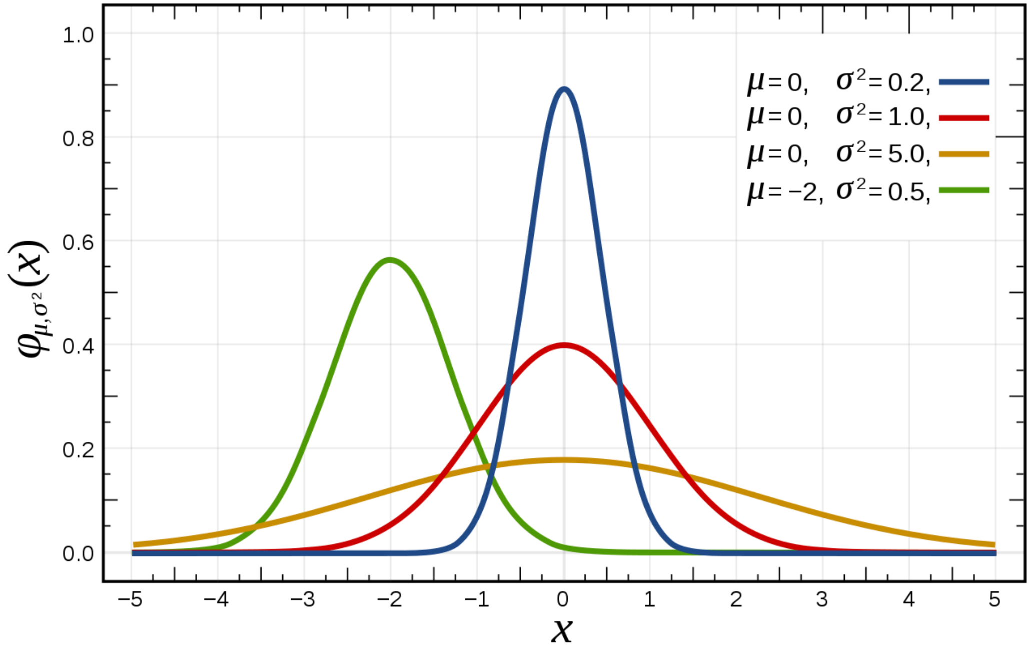
Distribuciones notables



Definición

Diremos que dos variables aleatorias X, Y son equivalentes si tienen la misma función de densidad *en casi todo punto*. Lo denotaremos por $X \sim Y$.

Definición

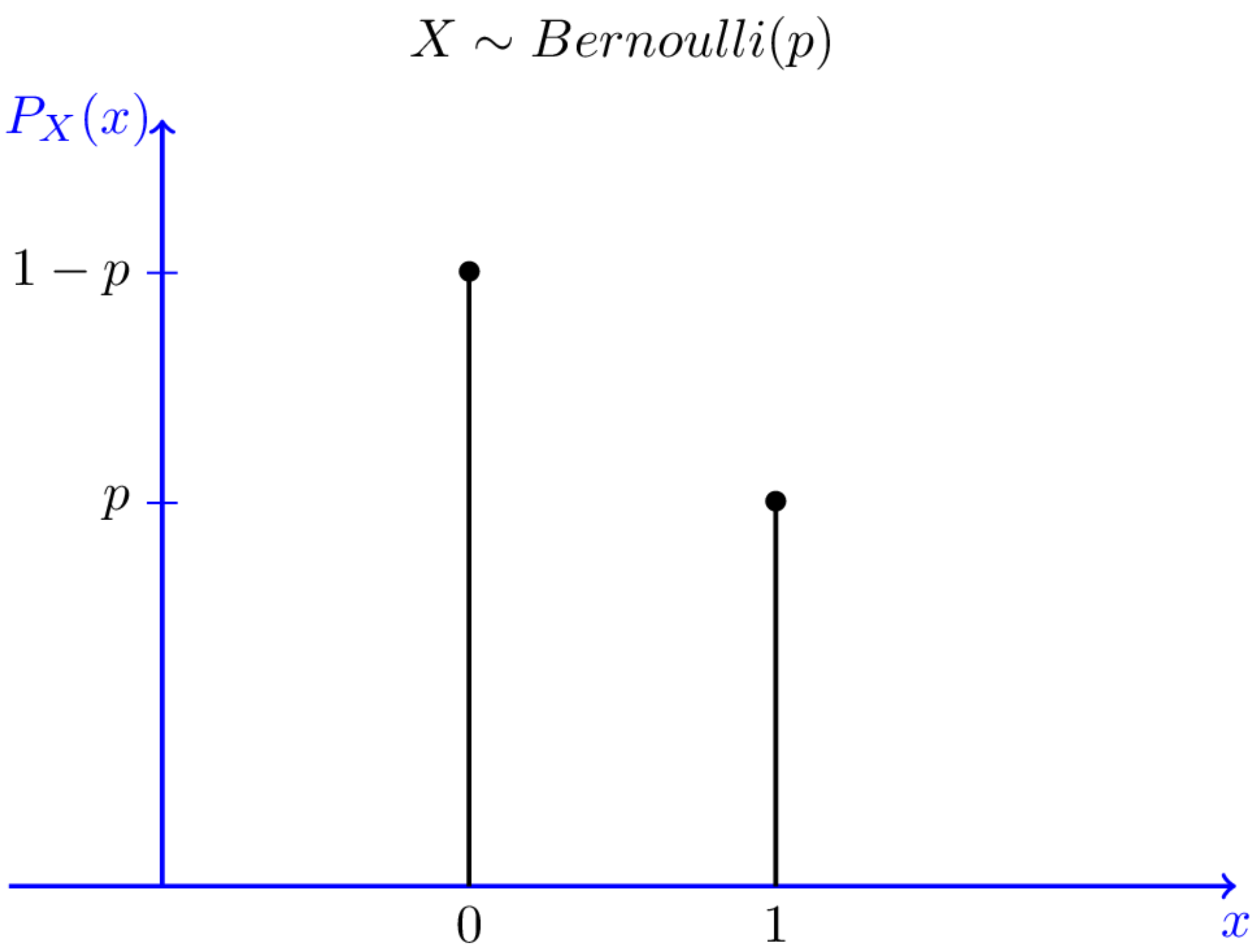
Sea $p \in [0,1]$. Si $X \sim Ber(p)$ su densidad es:

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1-p, & x = 0 \end{cases}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = p$$

$$\sigma^2 = (1-p)p$$



Definición

Sea $p \in [0,1]$. Si $X \sim Ber(p)$ su densidad es:

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} p, & x = 1 \\ 1 - p, & x = 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Se lanza al aire una moneda con probabilidad de cara p. Si consideramos la variable aleatoria $X =$ "número de caras obtenidas", entonces $X \sim Ber(p)$.

Esperanza y varianza

$$\mu = p$$

$$\sigma^2 = (1 - p)p$$

EXPERIMENTO

ÉXITO ← p

FRACASO ← $1 - p$

Definición

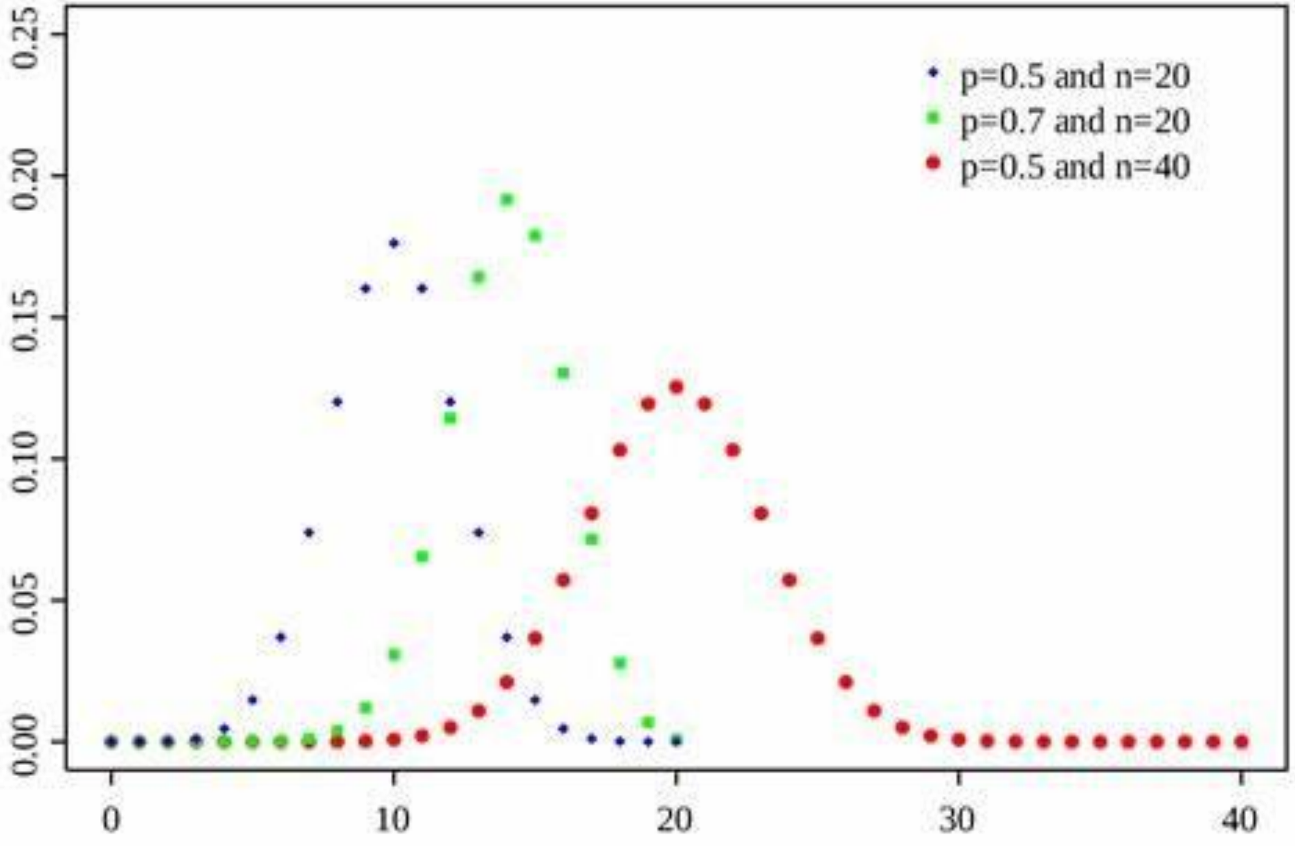
Sea $p \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $X \sim Bin(n,p)$ su densidad es:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
$$x \in \{0,1,\ldots,n\}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = n(1-p)p$$



Definición

Sea $p \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $X \sim Bin(n,p)$ su densidad es:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$x \in \{0,1,\dots,n\}$$

Ejemplo

Se lanza al aire n monedas con probabilidad de cara p. Si consideramos la variable aleatoria $X =$ "número de caras obtenidas", entonces $X \sim Bin(n,p)$.

Esperanza y varianza

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = n(1-p)p$$

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

$$X_i \sim Ber(p)$$

Definición

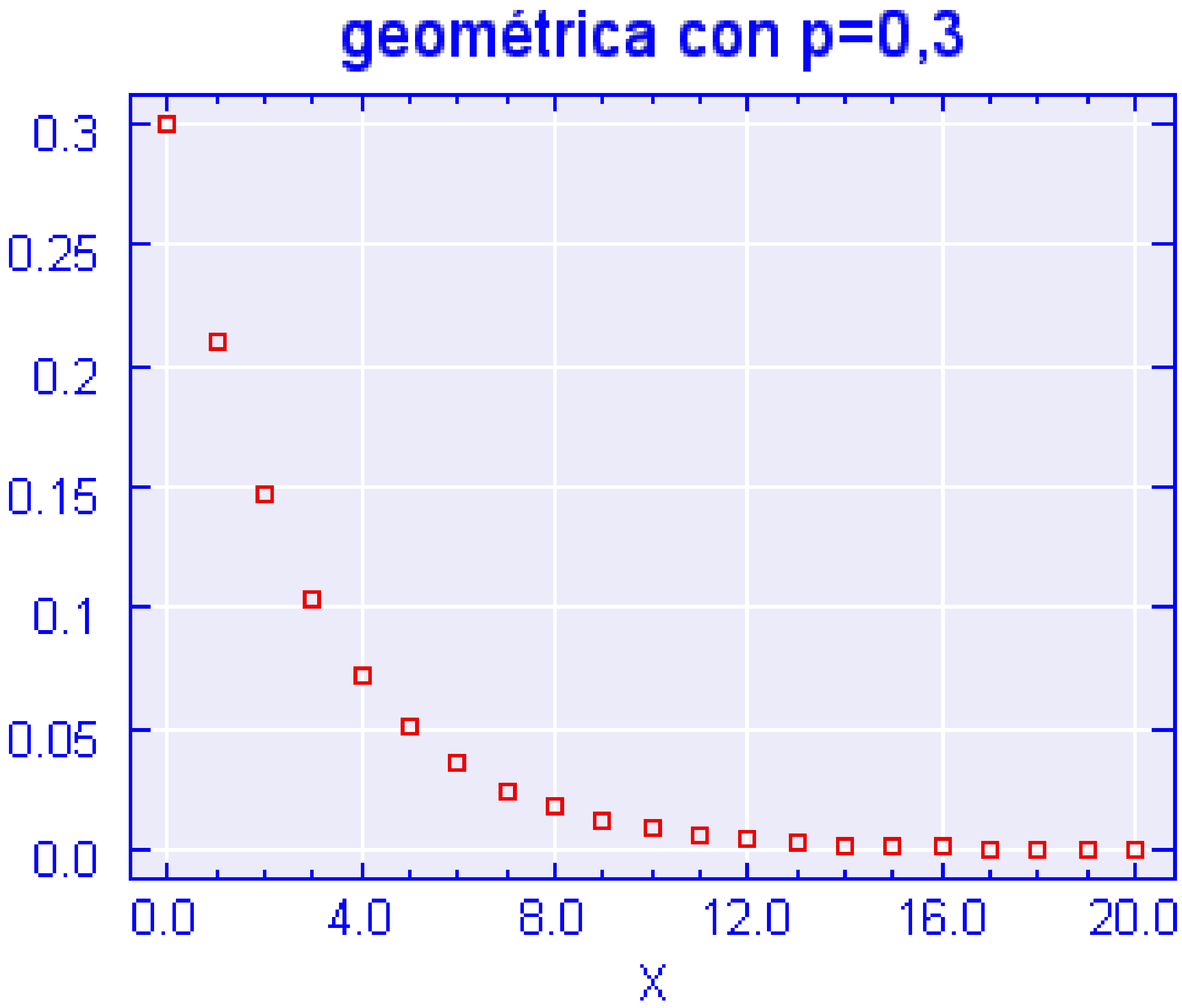
Sea $p \in [0,1]$. Si $X \sim Geom(p)$, su densidad es:

$$f(x) = (1-p)^x p$$
$$x \in \{0,1,\dots\}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{1-p}{p}$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$



Definición

Sea $p \in [0,1]$. Si $X \sim Geom(p)$, su densidad es:

$$f(x) = (1-p)^x p$$
$$x \in \{0,1,\dots\}$$

Ejemplo

Se lanza al aire una moneda con probabilidad de cara p de manera indefinida hasta obtener una cara. Si consideramos la variable aleatoria $X =$ "número de cruces obtenidas", entonces $X \sim Bin(n,p)$.

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{1-p}{p}$$
$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

X cuenta el número de fracasos antes de obtener un éxito al repetir indefinidamente un experimento de Bernoulli.

CEU Universidad San Pablo

Definición

Sea $p \in [0,1]$ y $r \in \mathbb{N}$. Si $X \sim NegBin(r,p)$, su densidad es:

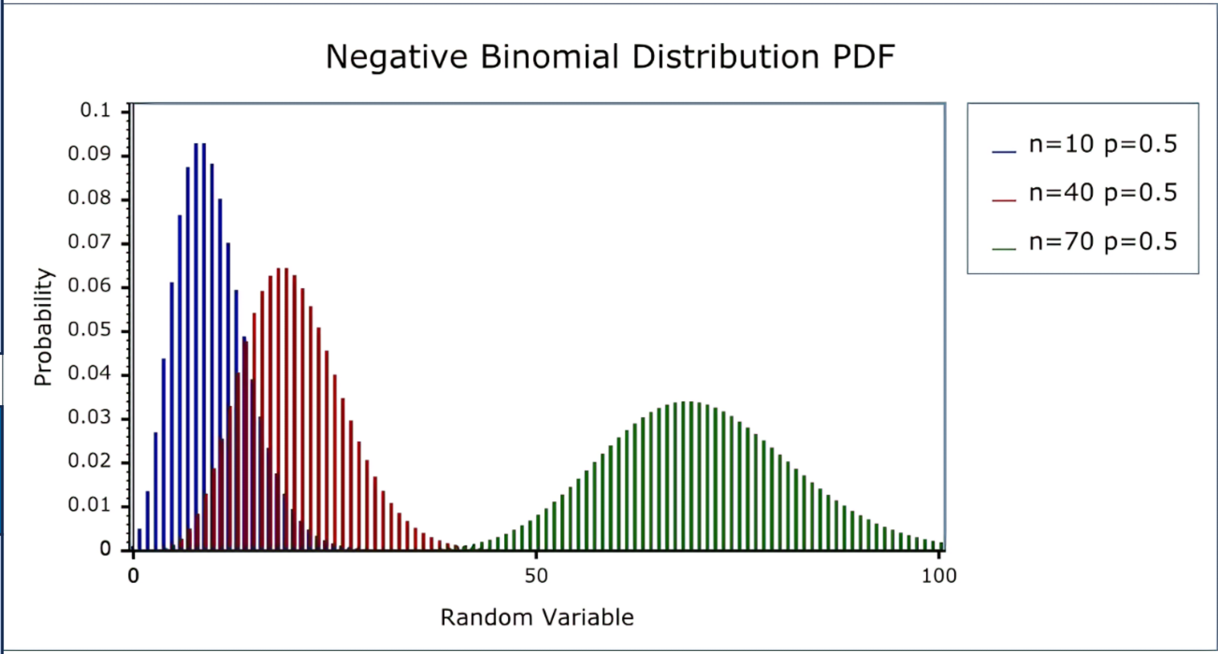
$$f(x) = \binom{r+x-1}{r-1}(1-p)^x p^r$$

$$x \in \{0,1,\dots\}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{1-p}{p}r$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}r$$



CEU Universidad San Pablo

Definición

Sea $p \in [0,1]$ y $r \in \mathbb{N}$. Si $X \sim NegBin(r,p)$, su densidad es:

$$f(x) = \binom{r+x-1}{r-1}(1-p)^x p^r$$

$$x \in \{0,1,\ldots\}$$

Ejemplo

Se lanza al aire una moneda con probabilidad de cara p de manera indefinida hasta obtener r caras. Si consideramos la variable aleatoria $X =$ “número de cruces obtenidas”, entonces $X \sim Bin(n,p)$.

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{1-p}{p} r$$

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} r$$

X cuenta el número de fracasos antes de obtener r éxitos al repetir indefinidamente un experimento de Bernoulli.

Definición

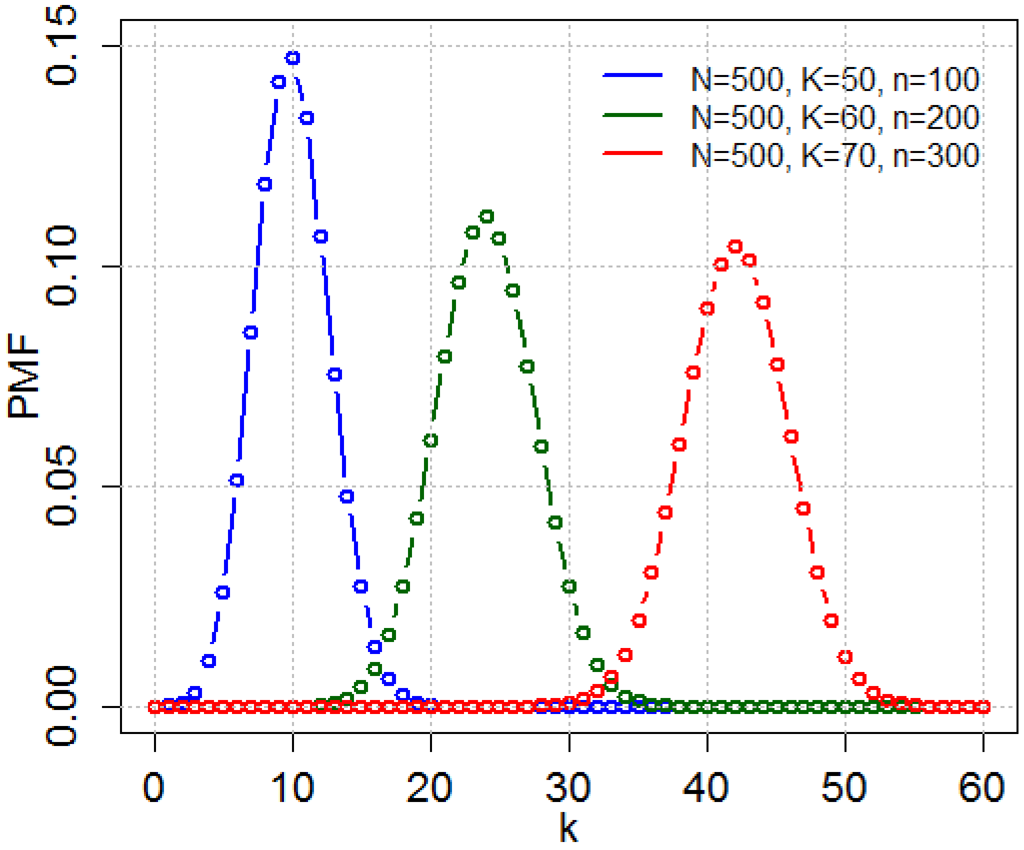
Sean $m, n, k \in \mathbb{N}$. Si $X \sim HGeom(m, n, k)$, su densidad es:

$$f(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}, \qquad x \in \{0, 1, \dots, k\}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{m}{m+n} \cdot k$$

$$\sigma^2 = \frac{m+n-k}{m+n-1} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot k$$



Definición

Sean $m, n, k \in \mathbb{N}$. Si $X \sim HGeom(m, n, k)$, su densidad es:

$$f(x) = \frac{\binom{m}{x}\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}, \qquad x \in \{0, 1, \dots, k\}$$

Ejemplo

Se considera una urna con m bolas blancas y n bolas negras y se extraen de la urna k bolas. Si consideramos la variable aleatoria X que contabiliza el número de bolas blancas obtenidas, $X \sim HGeom(m, n, k)$.

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{m}{m+n} \cdot k$$

$$\sigma^2 = \frac{m+n-k}{m+n-1} \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot k$$

X cuenta el número de éxitos al sacar bolas de una urna SIN DEVOLVER LAS BOLAS A LA URNA.

Definición

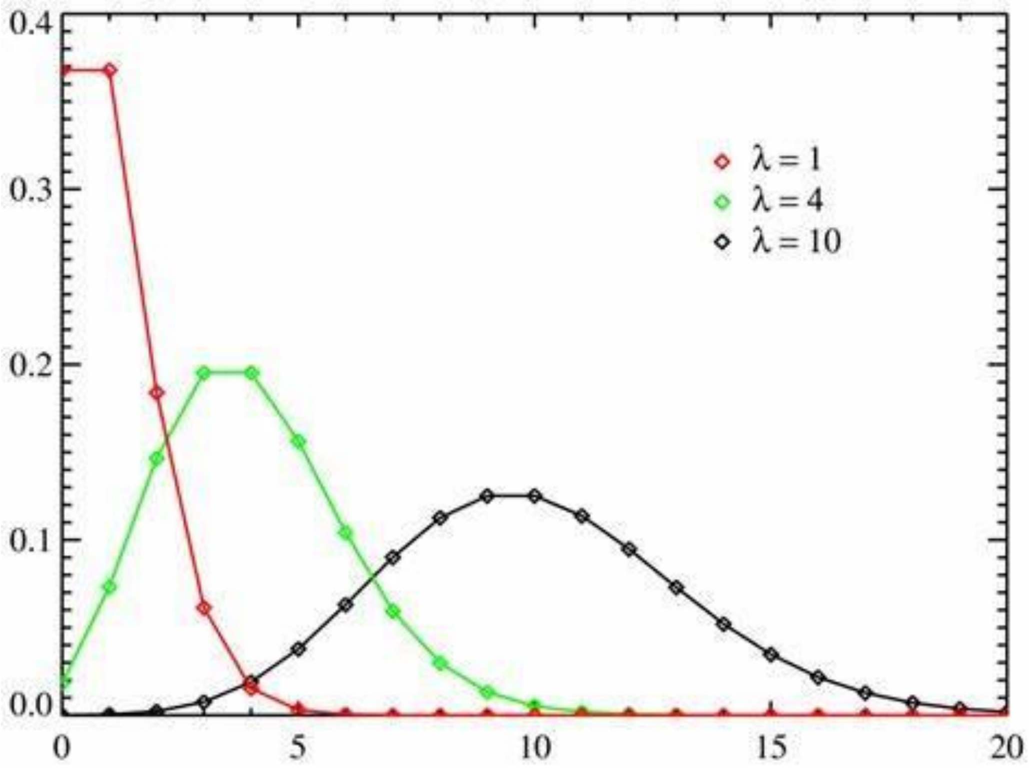
Sea $\lambda > 0$. Si $X \sim Pois(\lambda)$, su densidad es:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x \in \{0,1,\dots\}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$



Definición

Sea $\lambda > 0$. Si $X \sim Pois(\lambda)$, su densidad es:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x \in \{0,1,\ldots\}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

Ejemplo

Las siguientes variables observables son de poisson:

- Errores de ortografía.
- Llamadas por minuto en una central.
- Accesos a una web por minuto.
- Mutaciones ADN.
- Número de estrellas en un espacio del cielo.
- Inventiva de un científico.

Definición

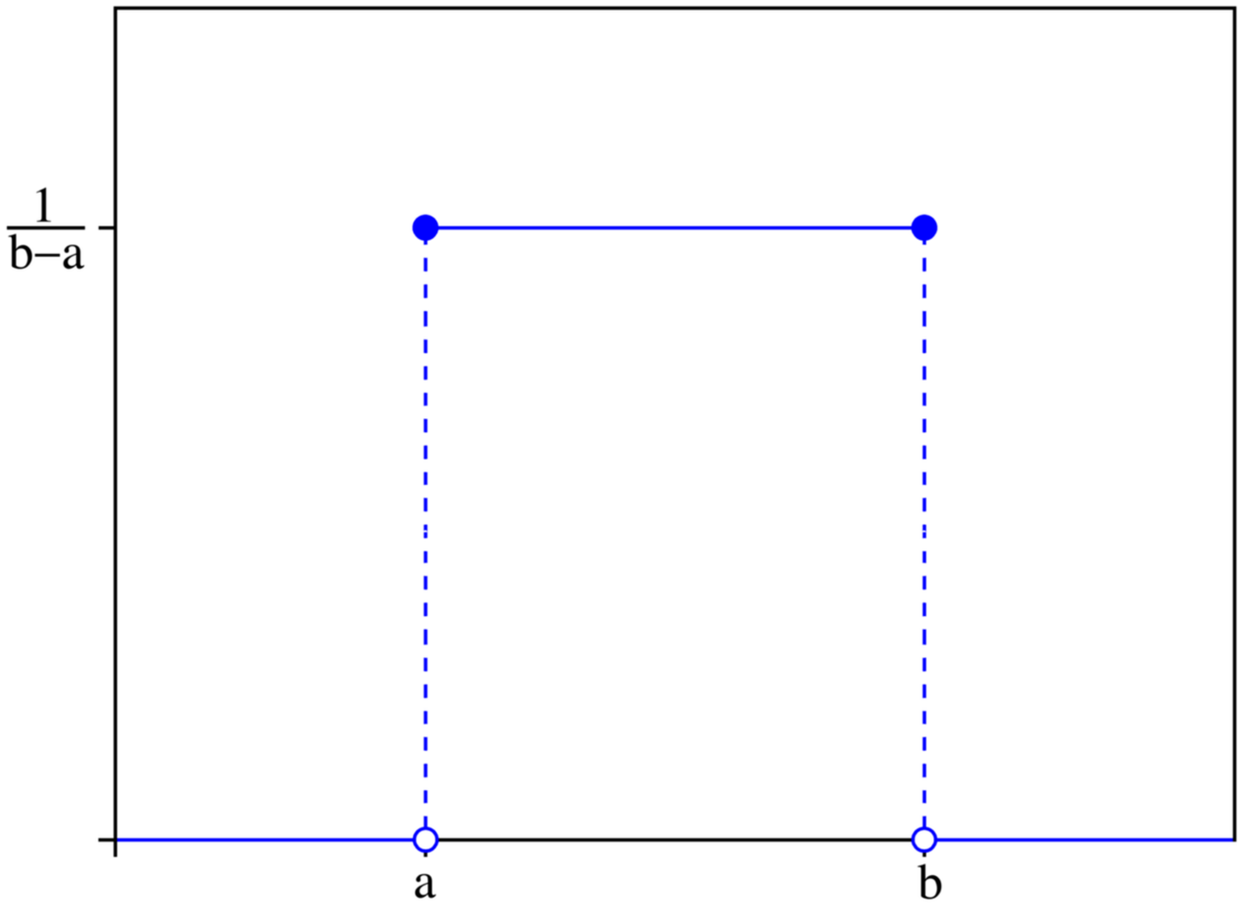
Sean a $< b$. Si $X \sim U(a,b)$, su densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & otro\ caso \end{cases}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



Definición

Sean a $< b$. Si $X \sim U(a,b)$, su densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & otro\ caso \end{cases}$$

Ejemplo

Sea X un número al azar entre 0 y 1:

$$X \sim U(0,1)$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

X puede tomar cualquier valor entre a y b con la misma probabilidad.

Definición

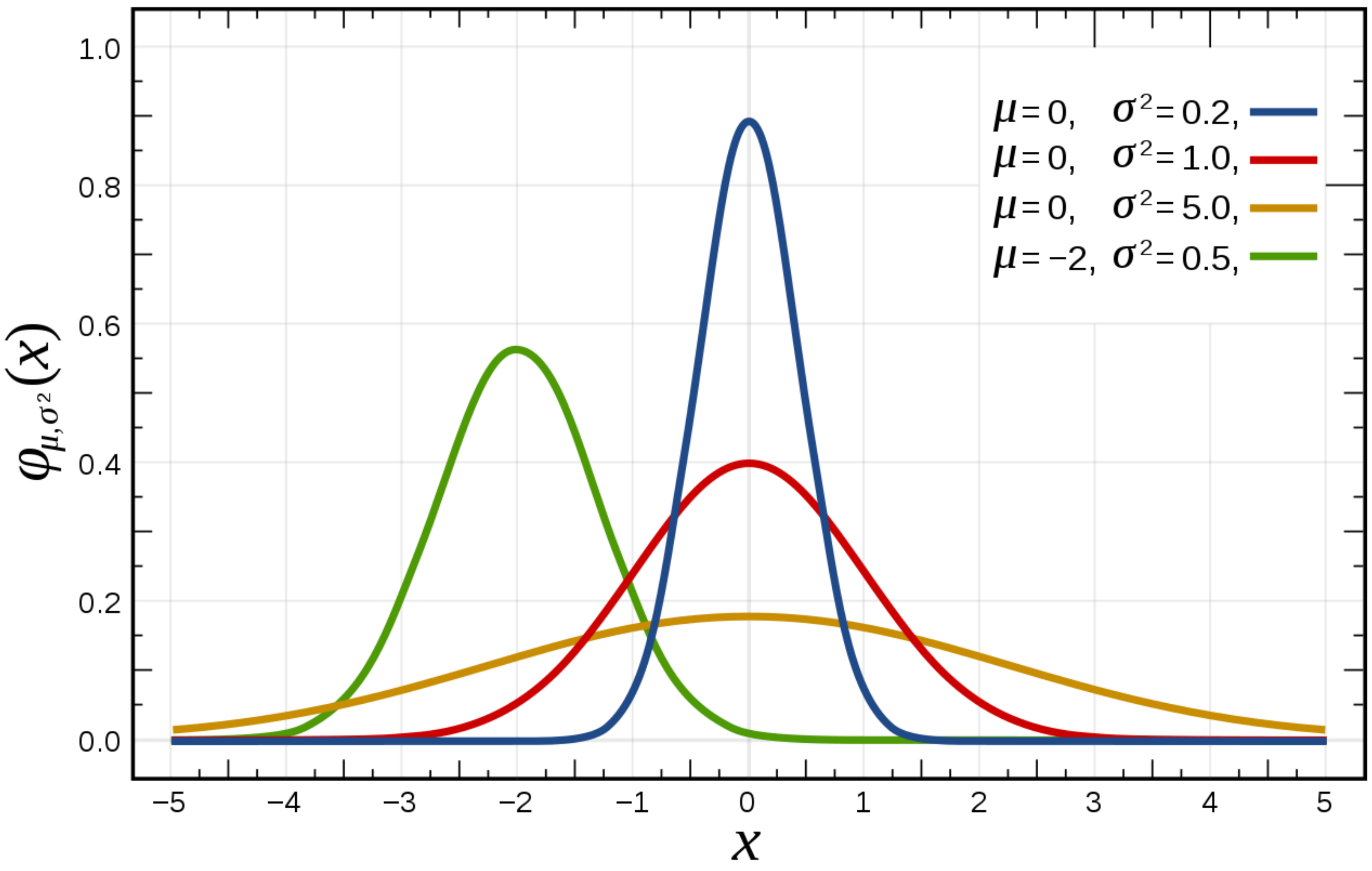
Sean $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Esperanza y varianza

$$E[X] = \mu$$

$$Var[X] = \sigma^2$$



CEU Universidad San Pablo

Definición

Sean $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Esperanza y varianza

$$E[X] = \mu$$

$$Var[X] = \sigma^2$$

Ejemplo

Las siguientes variables observables son normales:

- Estatura.
- Peso.
- Cociente Intelectual.
- Ruido en telecomunicaciones.
- Errores de medición.

X agrupa simétricamente los datos entorno a la media μ con una desviación típica σ.

CEU Universidad San Pablo

Definición

Sean $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Esperanza y varianza

$$E[X] = \mu$$

$$Var[X] = \sigma^2$$

Teorema del límite central

Sean $X_1, \dots, X_n$ variables aleatorias idénticamente distribuidas e independientes con media μ y varianza $\sigma^2 < \infty$. Si consideramos $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, para n suficientemente grande, entonces:

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Ejemplo

La distribución binomial es una suma de Bernoullis independientes, por lo tanto, la binomial tiende a la normal.

Definición

Sean $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Propiedad reproductiva

Sean X_1, X_2 dos variables aleatorias **normales** e independientes con medias μ_i y varianzas $\sigma_i^2 < \infty$.

$$X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Esperanza y varianza

$$E[X] = \mu$$

$$Var[X] = \sigma^2$$

Propiedad

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

Definición

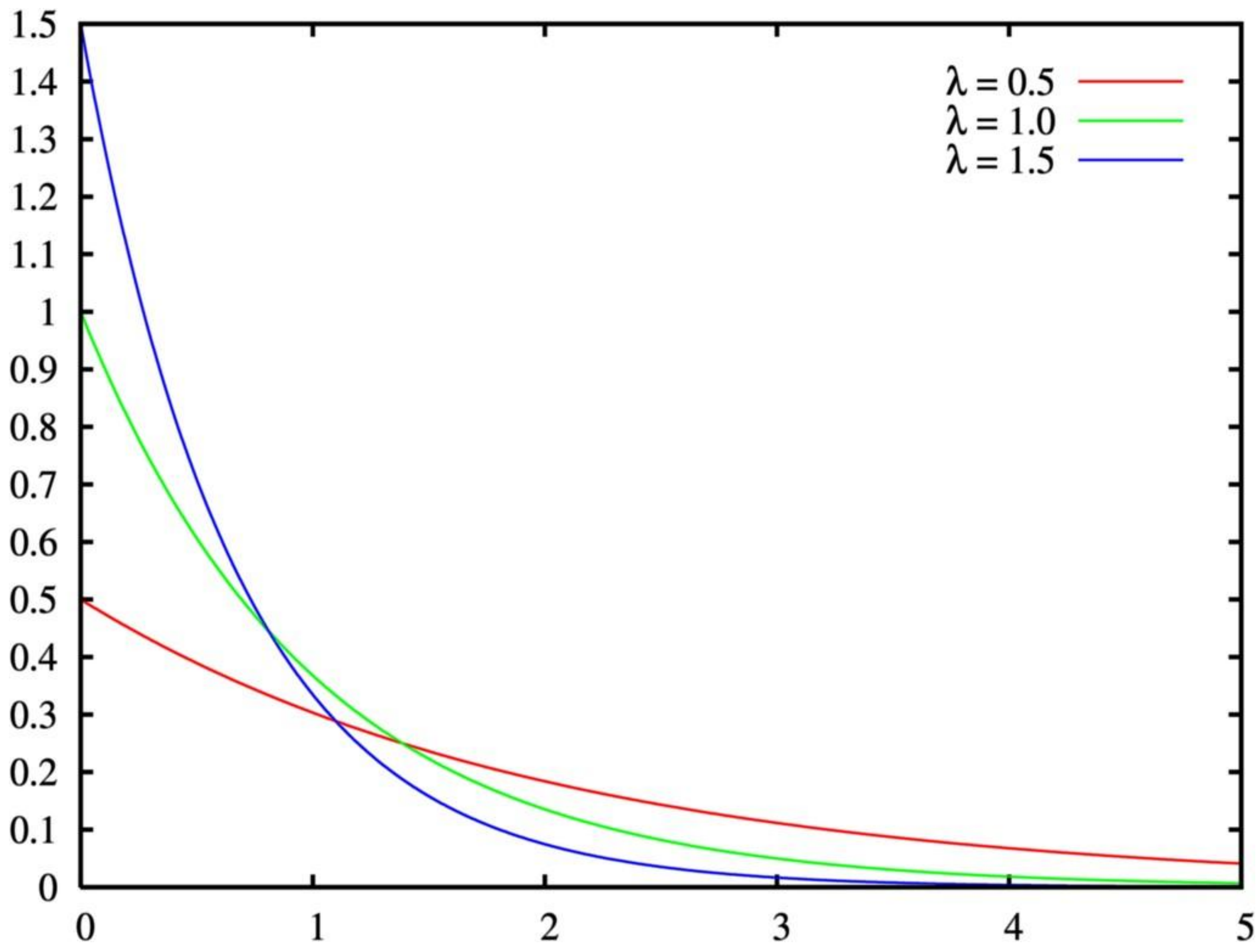
Sea $\lambda > 0$. Si $X \sim Exp(\lambda)$, su densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$



Definición

Sea $\lambda > 0$. Si $X \sim Exp(\lambda)$, su densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ejemplo

Las siguientes variables observables son exponenciales:

- Tiempo entre llamadas de un call-center.
- Tiempo entre terremotos.
- Tiempo de fallo en sistemas electrónicos.
- Máximo mensual de precipitaciones.

X es la versión continua de la geométrica.

Definición

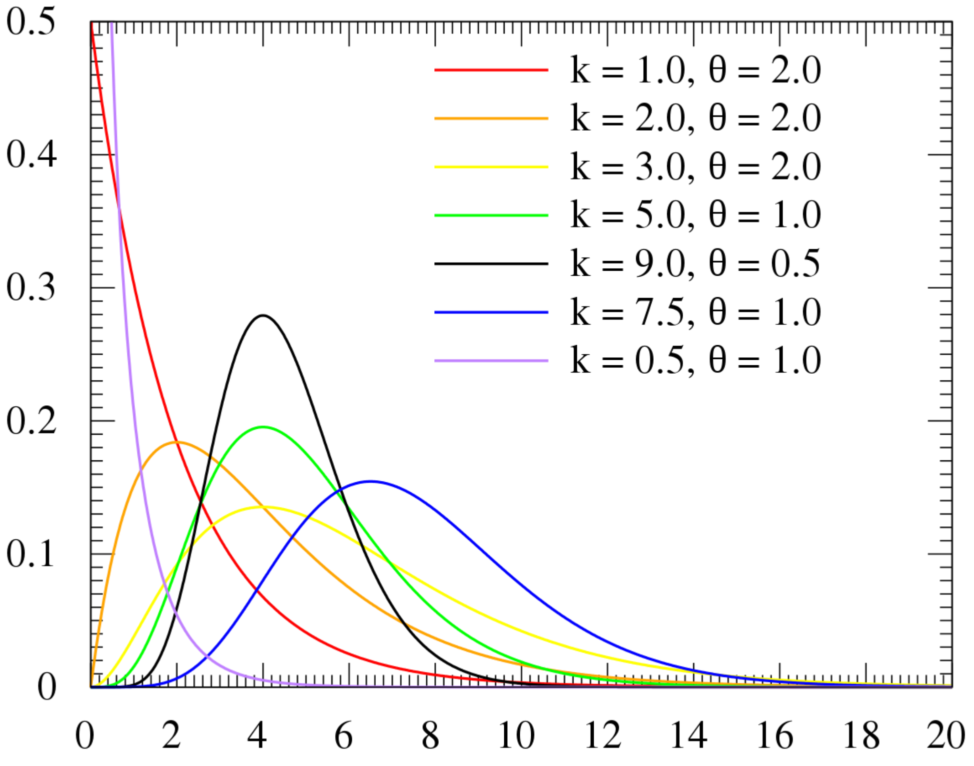
Sean $\alpha, \beta > 0$. Si $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, su densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & otro\ caso \end{cases}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$$



Definición

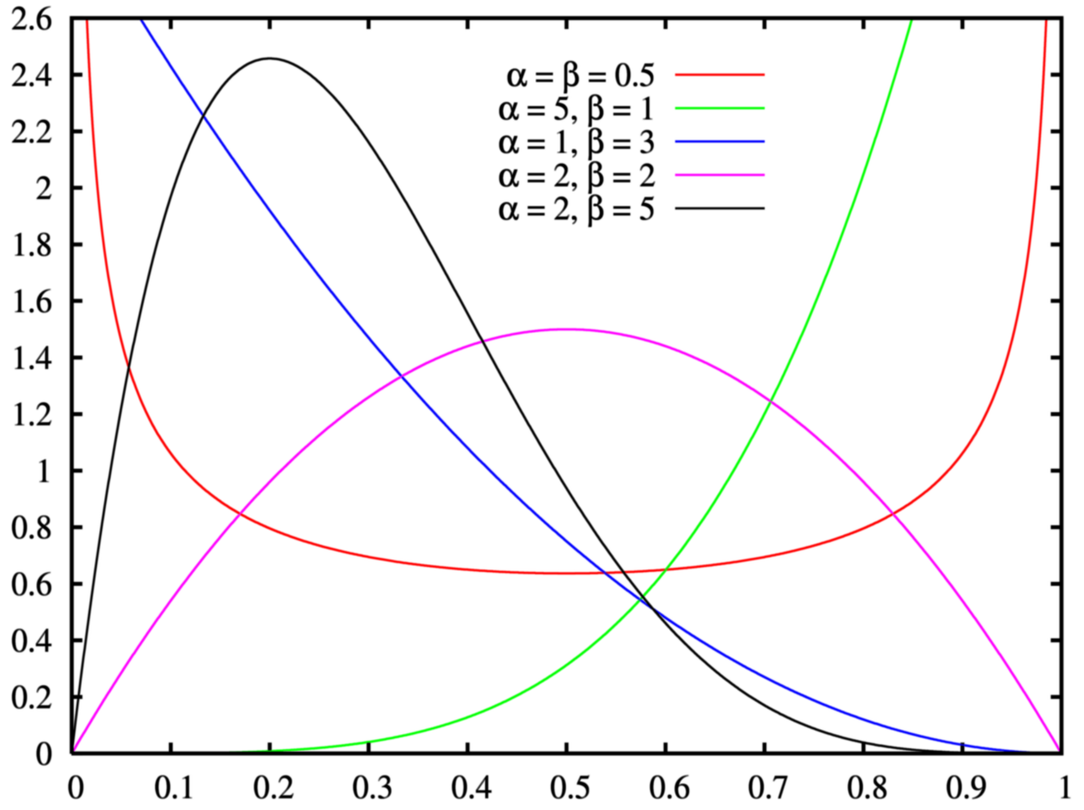
Sean $\alpha, \beta > 0$. Si $X \sim Beta(\alpha, \beta)$, su densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & otro\ caso \end{cases}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$



Definición

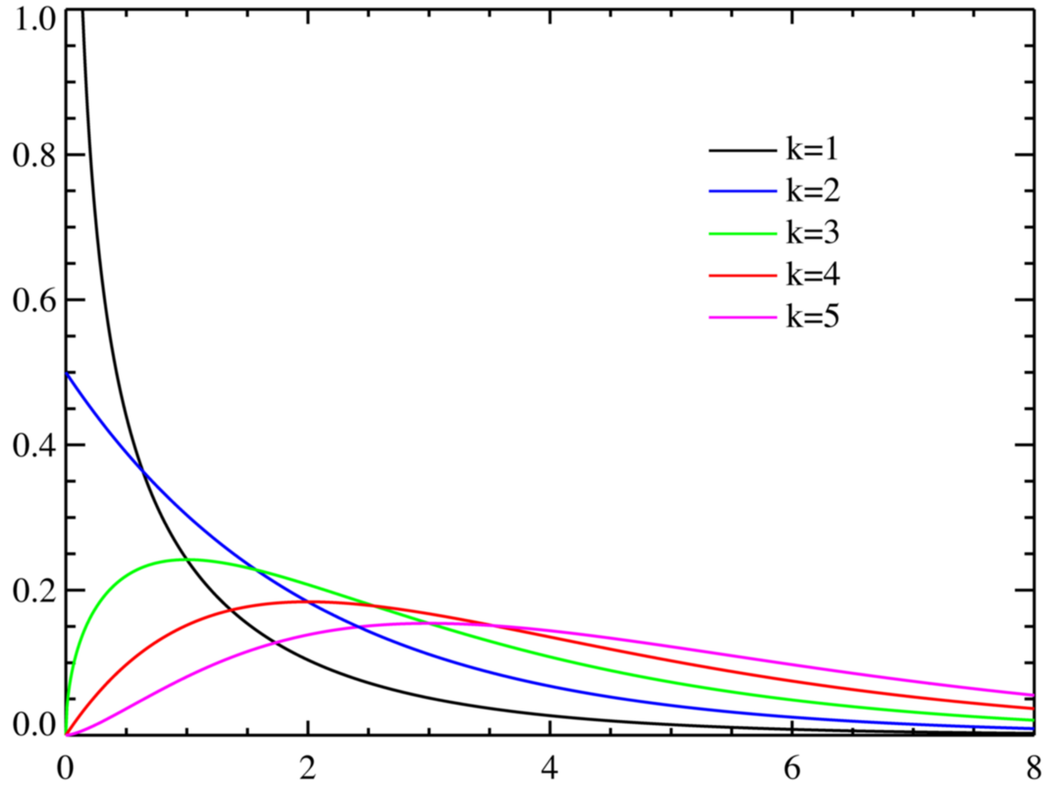
Se define la distribución *chi cuadrado de n grados de libertad* como:

$$\chi_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Esperanza y varianza

$$\mu = n$$

$$\sigma^2 = 2n$$



La distribución χ_n^2 tiene su principal uso en inferencia.

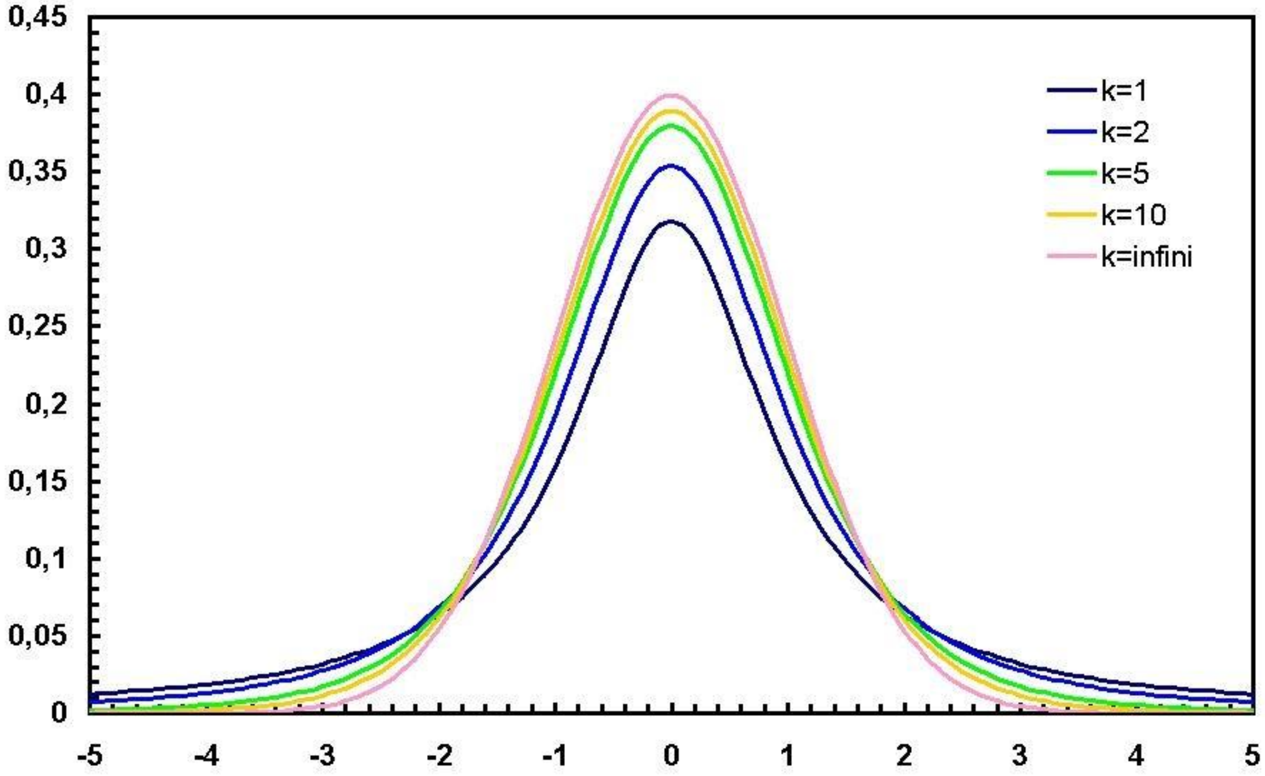
Definición

Se define la distribución t_n *(T de Student de n grados de libertad)* mediante su densidad como:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = 0 \text{ si } n > 1$$
$$\sigma^2 = \frac{n}{n-2} \; si \; n > 2$$



La distribución t_n tiene su principal uso en inferencia.

Definición

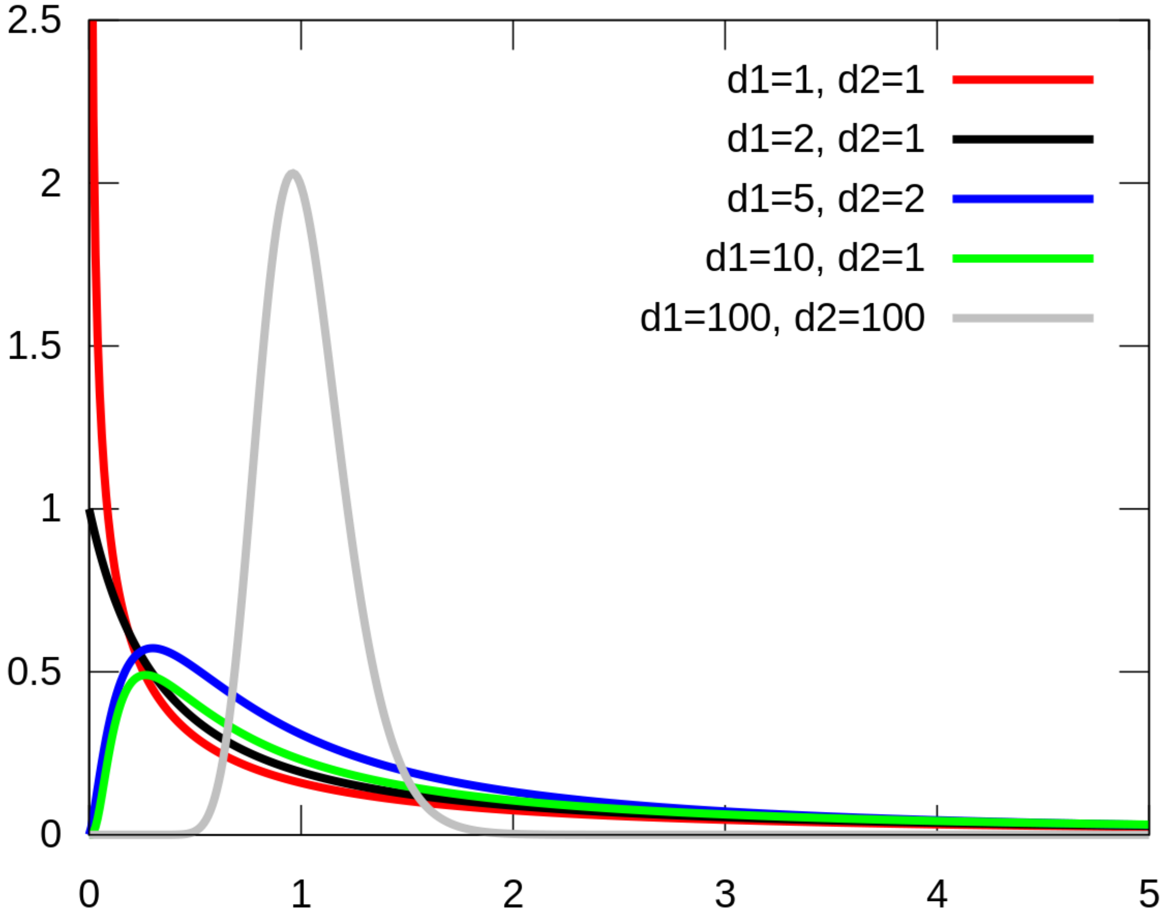
Se define la distribución $F_{m,n}$ (*F de Snedecor de m y n grados de libertad)* mediante su densidad como:

$$f(x) = \frac{1}{x\mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{(mx)^m n^n}{(mx+n)^{m+n}}}$$

Esperanza y varianza

$$\mu = \frac{n}{n-2} \text{ si } n > 2$$

$$\sigma^2 = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \text{ si } n > 4$$



La distribución $F_{m,n}$ tiene su principal uso en inferencia.