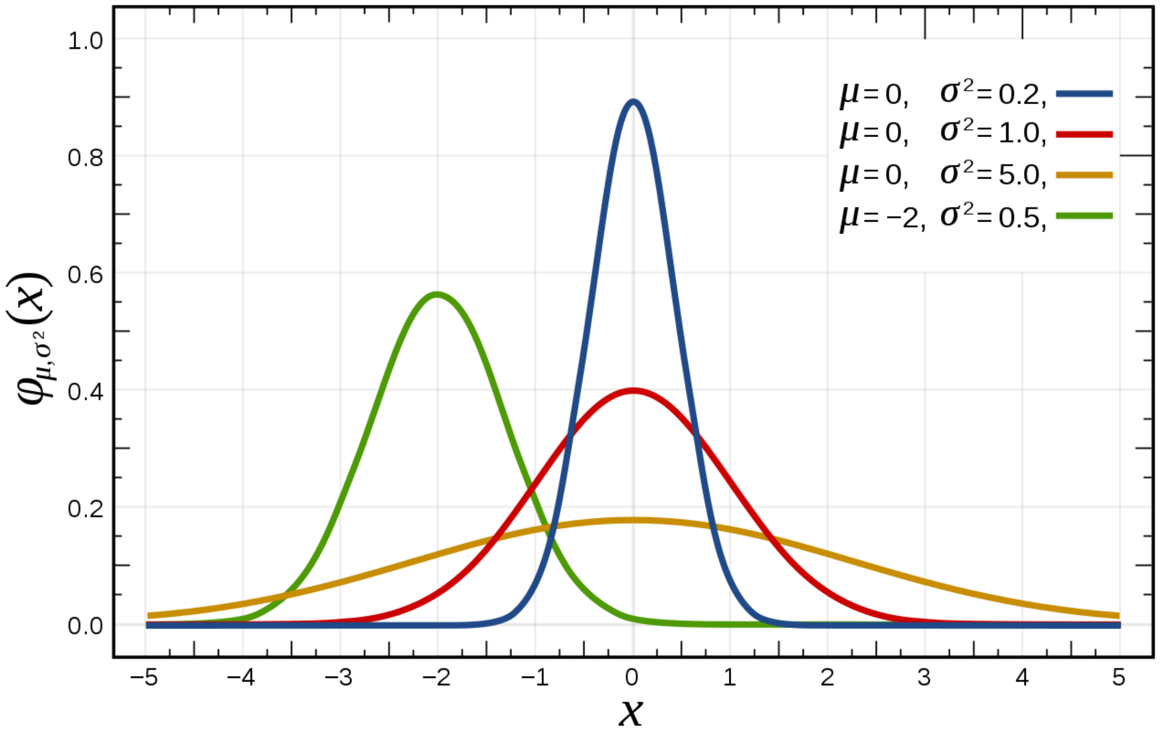
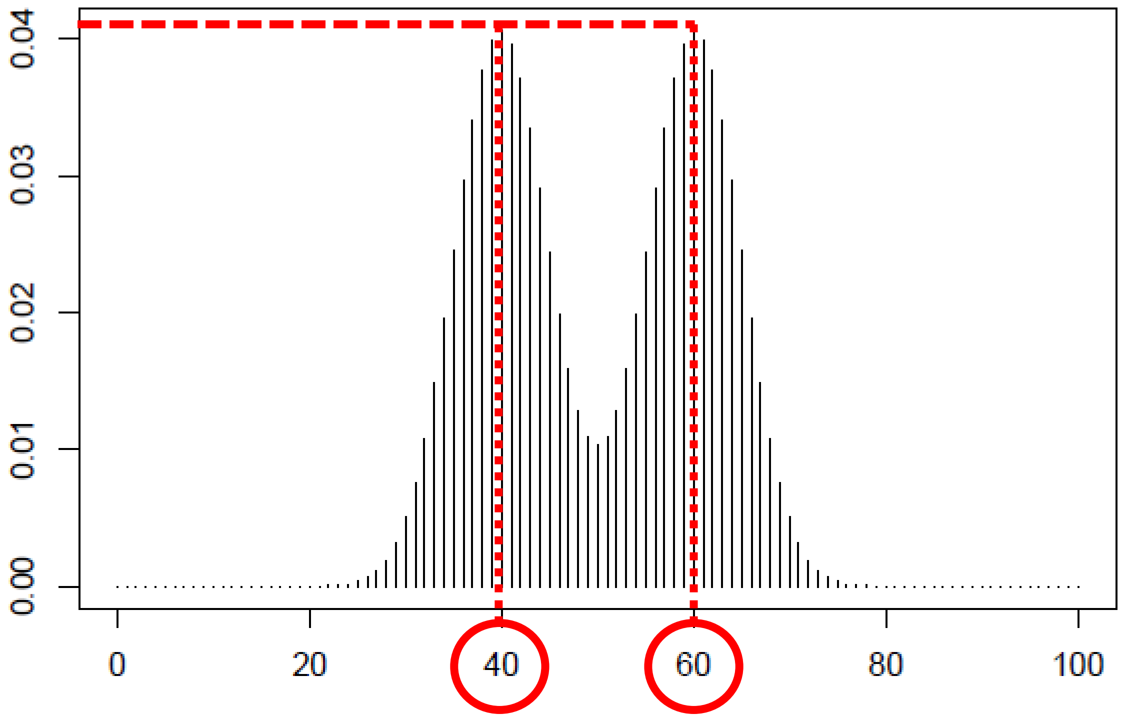
Parámetros estadísticos



Definición

Diremos que una moda de una variable aleatoria X es un máximo local de su función de densidad.



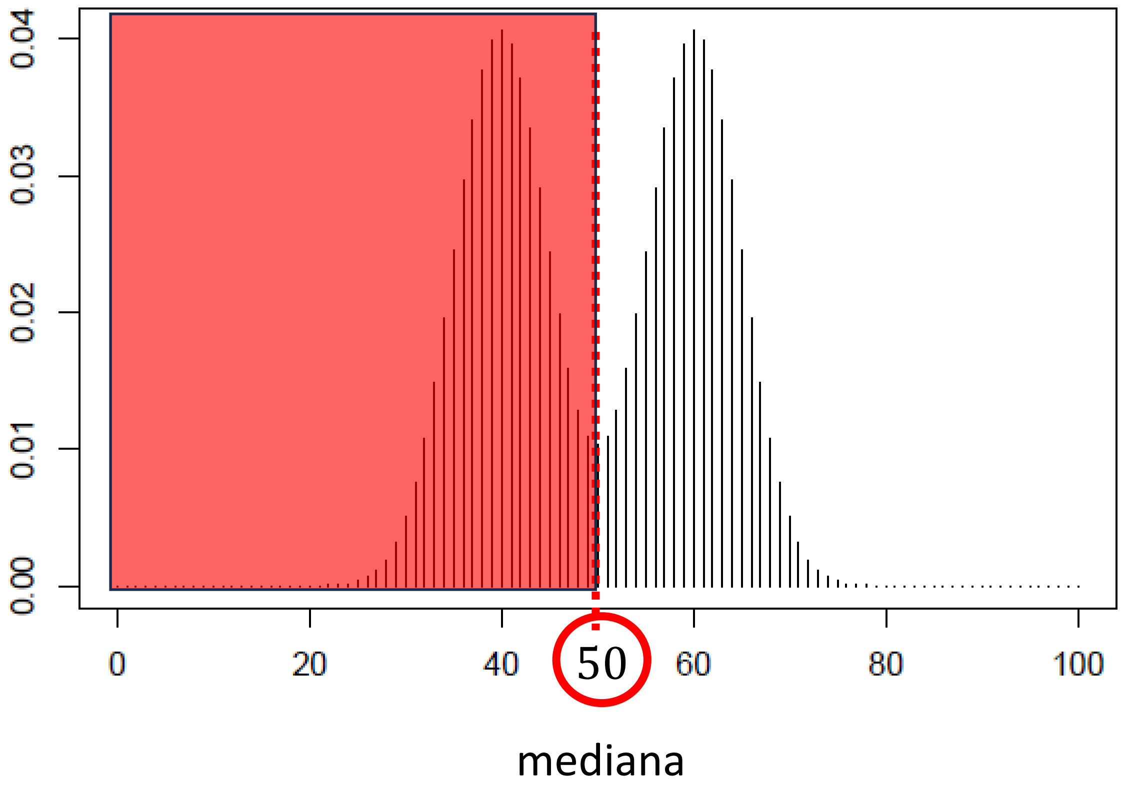
2 modas

Definición

Diremos que una moda de una variable aleatoria X es un máximo local de su función de densidad.

Definición

Diremos que la mediana de una variable aleatoria X es el mínimo x tal que $F(x) \geq \frac{1}{2}$



CEU Universidad San Pablo

Definición

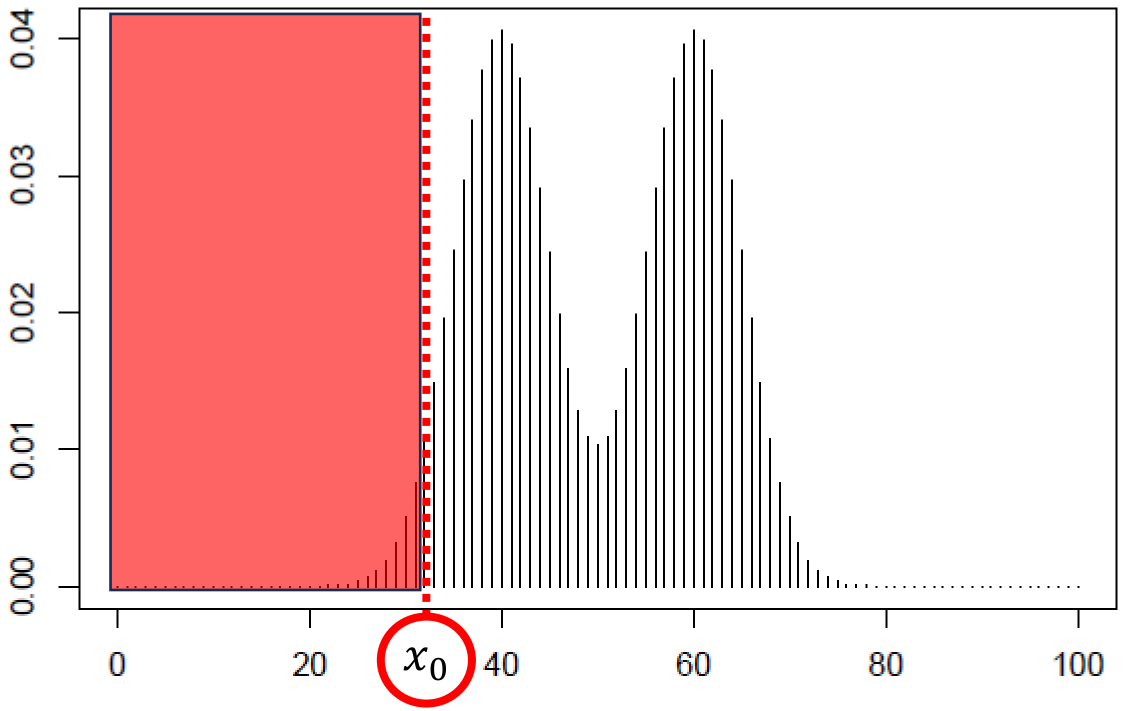
Diremos que una moda de una variable aleatoria X es un máximo local de su función de densidad.

Definición

Diremos que la mediana de una variable aleatoria X es el mínimo x tal que $F(x) \geq \frac{1}{2}$

Definición

Diremos que el $\alpha-$cuantil de una variable aleatoria X es el mínimo x tal que $F(x) \geq \alpha$



α −cuantil

Definición

Dada una variable aleatoria **discreta** X su esperanza se define como:

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x f(x)$$

CEU Universidad San Pablo

Definición

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x f(x)$$

Ejemplo

Calcular la esperanza de $X =$ “nº de caras obtenidas al lanzar 100 monedas”.

$$E[X] = \sum_{n=0}^{100} \binom{100}{n} \frac{n}{2^{100}} = \sum_{n=0}^{100} \binom{100}{n} n \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$$

$$= \sum_{n=0}^{100} \frac{100}{n} \binom{99}{n-1} n \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{100}{2} \sum_{n=0}^{99} \binom{99}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$$

$$= \frac{100}{2} \sum_{n=0}^{99} \binom{99}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{99} = 50 \sum_{n=0}^{99} \binom{99}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{99-n}$$

$$= 50 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{99} = 50$$

Definición

Dada una variable aleatoria **absolutamente continua** X su esperanza se define como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Definición	**Ejemplo**
$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$	Calcular la esperanza de la V.A. X con función de densidad $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

CEU Universidad San Pablo

Teorema

Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots$ una sucesión de V.A. idénticamente distribuidas, independientes y con la misma esperanza $\mu < \infty$ entonces:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{c.s.} \mu$$

Observación

Este teorema nos asegura que la media aritmética de los resultados obtenidos en una simulación tiende a la esperanza (por eso también se llama valor esperado).

Ejemplo

Un jugador gana 1 euro si al tirar un dado obtiene un 1 o un 3; pierde 2 euros si sale un 2, 4, 6; y gana 4 euros si sale un 5. ¿Cuál es la ganancia esperada? ¿Jugarías a este juego?

Definimos la V.A.

Valor del dado (Ω)	Ganancia obtenida (X)
{1,3}	1
{2,4,6}	-2
5	4

Densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & si\ x = -2 \\ \frac{1}{3}, & si\ x = 1 \\ \frac{1}{6}, & si\ x = 4 \end{cases}$$

Ejemplo

Un jugador gana 1 euro si al tirar un dado obtiene un 1 o un 3; pierde 2 euros si sale un 2, 4, 6; y gana 4 euros si sale un 5. ¿Cuál es la ganancia esperada? ¿Jugarías a este juego?

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x f(x) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

Ejemplo

Un jugador gana 1 euro si al tirar un dado obtiene un 1 o un 3; pierde 2 euros si sale un 2, 4, 6; y gana 4 euros si sale un 5. ¿Cuál es la ganancia esperada? ¿Jugarías a este juego?

El valor esperado de este juego es nulo: $E[X] = 0$

Ejemplo

Un jugador gana 1 euro si al tirar un dado obtiene un 1 o un 3; pierde 2 euros si sale un 2, 4, 6; y gana 4 euros si sale un 5. ¿Cuál es la ganancia esperada? ¿Jugarías a este juego?

Vamos a estimar la esperanza con simulaciones

```
# Número de simulaciones
N = 1000

# Realizamos N simulaciones
experimentos = replicate(N,{
      # Lanzamos  dado
      dado = sample(1:6,1)

      # Valores de X:
      ???????????????
})

# Aproximamos la esperanza
E = mean(experimentos)
```

Ejemplo

Un jugador gana 1 euro si al tirar un dado obtiene un 1 o un 3; pierde 2 euros si sale un 2, 4, 6; y gana 4 euros si sale un 5. ¿Cuál es la ganancia esperada? ¿Jugarías a este juego?

```
# Número de simulaciones
N = 1000

# Realizamos N simulaciones
experimentos = replicate(N,{
      ......
})

# Aproximamos la esperanza
E = mean(experimentos)
```

```
experimentos = replicate(N,{
      # Lanzamos  dado
      dado = sample(1:6,1)

      # Valores de X:
      if (dado == 1 || dado == 3){
            x = 1
      }else if (dado == 5){
            x = 4
      }else{
            x = -2
      }
      x
})
```

Ejemplo

La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si uno calla y el cómplice confiesa, el primero recibirá esa pena y será el cómplice quien salga libre. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un año por un cargo menor.

Tabla de tus posibles condenas en función de las decisiones tomadas.

	TÚ CONFIESAS	TÚ NIEGAS
ÉL CONFIESA	6 años	10 años
ÉL NIEGA	0 años	1 año

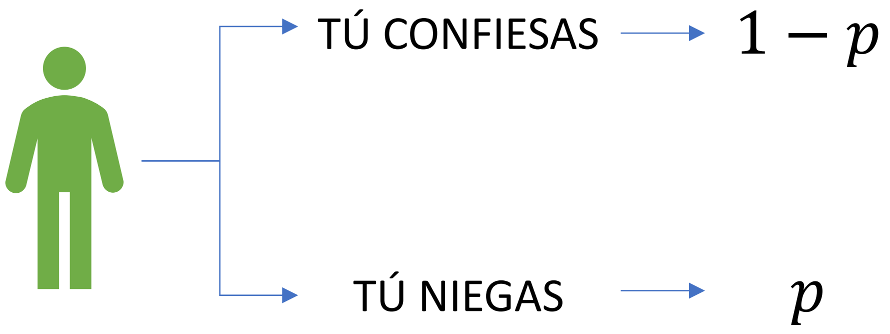
¿Función de densidad?

Definimos la V.A. $X =$ “Años de condena”

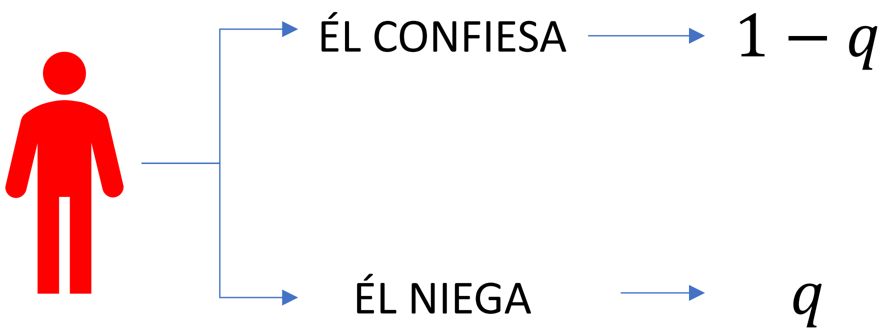
Tabla de tus posibles condenas en función de las decisiones tomadas.

	TÚ CONFIESAS	TÚ NIEGAS
ÉL CONFIESA	6 años	10 años
ÉL NIEGA	0 años	1 año

Definimos la V.A. $X =$ "Años de condena"



¿Función de densidad?



TÚ CONFIESAS $\longrightarrow$ $1-p$

TÚ NIEGAS $\longrightarrow$ p

	TÚ CONFIESAS	TÚ NIEGAS
ÉL CONFIESA	6 años	10 años
ÉL NIEGA	0 años	1 año

$$f(x) = \begin{cases} pq, & \text{si } x = 1 \\ q(1-p), & \text{si } x = 0 \\ (1-q)p, & \text{si } x = 10 \\ (1-p)(1-q), & \text{si } x = 6 \end{cases}$$

ÉL CONFIESA $\longrightarrow$ $1-q$

ÉL NIEGA $\longrightarrow$ q

TÚ CONFIESAS $\longrightarrow$ $1-p$

TÚ NIEGAS $\longrightarrow$ p

$$f(x) = \begin{cases} pq, & \text{si } x = 1 \\ q(1-p), & \text{si } x = 0 \\ (1-q)p, & \text{si } x = 10 \\ (1-p)(1-q), & \text{si } x = 6 \end{cases}$$

	TÚ CONFIESAS	TÚ NIEGAS
ÉL CONFIESA	6 años	10 años
ÉL NIEGA	0 años	1 año

Calculamos la esperanza

$$E[X] = \sum_{x \in R_X} x f(x)$$

ÉL CONFIESA $\longrightarrow$ $1-q$

ÉL NIEGA $\longrightarrow$ q

TÚ CONFIESAS $\longrightarrow$ $1-p$

TÚ NIEGAS $\longrightarrow$ p

$$f(x) = \begin{cases} pq, & \text{si } x = 1 \\ q(1-p), & \text{si } x = 0 \\ (1-q)p, & \text{si } x = 10 \\ (1-p)(1-q), & \text{si } x = 6 \end{cases}$$

	TÚ CONFIESAS	TÚ NIEGAS
ÉL CONFIESA	6 años	10 años
ÉL NIEGA	0 años	1 año

Calculamos la esperanza

$$E[X] = \begin{cases} 6-6q, & p = 0 \\ 10-9q, & p = 1 \end{cases}$$

ÉL CONFIESA $\longrightarrow$ $1-q$

ÉL NIEGA $\longrightarrow$ q

TÚ CONFIESAS → $1-p$

TÚ NIEGAS → p

$$f(x)=\begin{cases} pq, & \text{si } x=1 \\ q(1-p), & \text{si } x=0 \\ (1-q)p, & \text{si } x=10 \\ (1-p)(1-q), & \text{si } x=6 \end{cases}$$

	TÚ CONFIESAS	TÚ NIEGAS
ÉL CONFIESA	6 años	10 años
ÉL NIEGA	0 años	1 año

→ Calculamos la esperanza

ÉL CONFIESA → $1-q$

ÉL NIEGA → q

$$E[X]=\begin{cases} \boxed{6-6q, \quad p=0} \\ 10-9q, \quad p=1 \end{cases}$$

$6-6q<10-9q$, si $q\in[0,1]$

Ejemplo

Se realizan lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, se cuenta el número de lanzamientos que se han producido, supongamos que han sido n. Entonces, el jugador obtiene 2^n monedas. ¿Cuánto pagarías por jugar a este juego?

Nicolaus Bernoulli

No sé responder ☹

Mejor llamar al primo listo de la familia…

Daniel Bernoulli

Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk, 1738

Ejemplo

Se realizan lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, se cuenta el número de lanzamientos que se han producido, supongamos que han sido n. Entonces, el jugador obtiene 2^n monedas. ¿Cuánto pagarías por jugar a este juego?

```
# Número de simulaciones
N = 1000

# Realizamos N simulaciones
experimentos = replicate(N,{
       # Lanzamos  moneda
       ???????????????

       # Ganancias obtenidas
       ???????????????
})

# Aproximamos la esperanza
E = mean(experimentos)
```

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo

Se realizan lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, se cuenta el número de lanzamientos que se han producido, supongamos que han sido n. Entonces, el jugador obtiene 2^n monedas. ¿Cuánto pagarías por jugar a este juego?

```
experimentos = replicate(N,{
        # Condiciones iniciales
        moneda = 0
        n = 0

        # Lanzamos  moneda
        while (moneda == 0){
                moneda = sample(0:1,1)
                n = n + 1
        }

        # Ganancias obtenidas
        2^n
})
```

Ejemplo

Se realizan lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, se cuenta el número de lanzamientos que se han producido, supongamos que han sido n. Entonces, el jugador obtiene 2^n monedas. ¿Cuánto pagarías por jugar a este juego?

¿Resultados extraños?

CEU Universidad San Pablo

Ejemplo

Se realizan lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, se cuenta el número de lanzamientos que se han producido, supongamos que han sido n. Entonces, el jugador obtiene 2^n monedas.

Definimos la V.A.

$X =$ "Ganancias obtenidas del juego" $\xrightarrow{\text{Densidad}}$ $f(x) = \dfrac{1}{2^n}, \quad si\ x = 2^n$

$n = 1,2,3,\ldots$

Ejemplo

Se realizan lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, se cuenta el número de lanzamientos que se han producido, supongamos que han sido n. Entonces, el jugador obtiene 2^n monedas.

$$f(x) = \frac{1}{2^n}, \qquad si\ x = 2^n \qquad \xrightarrow{\text{Esperanza}} \qquad E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \infty$$

$$n = 1,2,3,\ldots$$

Ejemplo

Se realizan lanzamientos sucesivos de una moneda hasta que salga cruz por primera vez. Entonces se detiene el juego, se cuenta el número de lanzamientos que se han producido, supongamos que han sido n. Entonces, el jugador obtiene 2^n monedas.

$$E[X] = \infty \longrightarrow$$

NO SE PUEDE APLICAR LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

Teorema

Sean X, Y dos V.A. y $c \in \mathbb{R}$:

1. $E[cX] = cE[X]$
2. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
3. X, Y independientes $\Rightarrow E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$

Teorema

Sea X una V.A. **discreta** y g una función:

$$E[g(X)] = \sum_{x \in R_X} g(x) f(x)$$

Teorema

Sea X una V.A. **continua** y g una función:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$$

Definición

Dada una variable aleatoria X su momento k-ésimo se define como:

$$\alpha_k = E[X^k]$$

Definición

Dada una variable aleatoria X con esperanza $\mu = E[X]$, su momento centrado k-ésimo se define como:

$$\mu_k = E[(X-\mu)^k]$$

Definición

Dada una variable aleatoria X con esperanza $\mu = E[X]$, su momento varianza se define como:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$$

Además, se dice que la desviación típica es $\sigma = \sqrt{E[(X-\mu)^2]}$.

Teorema

Sean X, Y dos V.A. independientes y $c \in \mathbb{R}$:

1. $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$
2. $Var[cX] = c^2 Var[X]$
3. $Var\ [X + Y] = Var[X] + Var[Y]$