Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

Formulário

1. Cinemática

$v = \dfrac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}$ $\quad a_\mathrm{t} = \dfrac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}$ $\quad a_\mathrm{t} = v\,\dfrac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,s}$ $\quad v_x = \dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}$

$a_x = \dfrac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,t}$ $\quad a_x = v_x\,\dfrac{\mathrm{d}\,v_x}{\mathrm{d}\,x}$

2. Cinemática vetorial

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\,\cos\theta = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z$ $\quad a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ $\quad \vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}$ $\quad \vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$ $\quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \displaystyle\int_0^t \vec{v}\,\mathrm{d}\,t$ $\quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \displaystyle\int_0^t \vec{a}\,\mathrm{d}\,t$

Movimento relativo:

$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}\,'_\mathrm{O}$ $\quad \vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{v}\,'_\mathrm{O}$ $\quad \vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{a}\,'_\mathrm{O}$

3. Movimento curvilíneo

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ $\quad \vec{a}\times\vec{b} = a\,b\,\sin\theta\,\hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ $\quad \vec{v} = \dot{s}\,\hat{e}_\mathrm{t}$

$\vec{a} = \dot{v}\,\hat{e}_\mathrm{t} + \dfrac{v^2}{R}\,\hat{e}_\mathrm{n}$

$a^2 = a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2$

Movimento circular:

$s = R\,\theta$ $\quad v = R\,\omega$ $\quad a_\mathrm{t} = R\,\alpha$

Rotação plana:

$\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_\mathrm{axis}$ $\quad \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ $\quad \vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\vec{v}$ $\quad \omega = \dfrac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t}$

$\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,t}$ $\quad \alpha = \omega\,\dfrac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,\theta}$

4. Mecânica vetorial

$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\,\mathrm{d}\,t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ $\quad \vec{p} = m\,\vec{v}$ $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\,\vec{a}$ $\quad \vec{P} = m\,\vec{g}$

$F_\mathrm{e} \le \mu_\mathrm{e}\,R_\mathrm{n}$ $\quad F_\mathrm{c} = \mu_\mathrm{c}\,R_\mathrm{n}$

Esfera num fluido:

$N_\mathrm{R} = r\,v\left(\dfrac{\rho}{\eta}\right)$ $\quad F_\mathrm{f} = 6\,\pi\,\eta\,r\,v \quad (N_\mathrm{R} < 1)$ $\quad F_\mathrm{f} = \dfrac{\pi}{4}\,\rho\,r^2\,v^2 \quad (N_\mathrm{R} > 10^3)$

5. Dinâmica dos corpos rígidos

$M_\mathrm{O} = F\,b$ $\quad \vec{M}_\mathrm{O} = \vec{r}\times\vec{F}$ $\quad M_z = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$ $\quad \vec{r}_\mathrm{cm} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int \vec{r}\,\mathrm{d}\,m$

$$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{m}\int \vec{v}\,\mathrm{d}\,m \qquad \vec{a}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{m}\int \vec{a}\,\mathrm{d}\,m \qquad \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\,\vec{a}_{\mathrm{cm}} \qquad \sum_{i=1}^{n} M_{z,i} = I_z\,\alpha$$

$$I_z = \int R^2\,\mathrm{d}\,m$$

6. Trabalho e energia

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}\,s \qquad W_{12} = E_{\mathrm{c}}(2) - E_{\mathrm{c}}(1) \qquad E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}m\,v_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\,\omega^2 \qquad U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$$

$$W_{12} = U(1) - U(2) \qquad U_{\mathrm{g}} = m\,g\,z \qquad U_{\mathrm{e}} = \tfrac{1}{2}k\,s^2 \qquad E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + U$$

$$\int_{s_1}^{s_2} F_{\mathrm{t}}^{\mathrm{nc}}\,\mathrm{d}\,s = E_{\mathrm{m}}(2) - E_{\mathrm{m}}(1) \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\,\pi\,f \qquad s = A\,\sin(\Omega\,t + \phi_0) \qquad E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}k\,s^2$$

7. Sistemas dinâmicos

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \qquad \vec{u} = f_1(x_1, x_2)\,\hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\hat{e}_2 \qquad \ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

$$y = \dot{x} \qquad \vec{u} = y\,\hat{\imath} + f(x, y)\,\hat{\jmath}$$

Sistemas conservativos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \qquad f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \qquad f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

Ponto de equilíbrio: $\vec{u} = \vec{0}$ (estável ou instável).

Ciclo: curva fechada no espaço de fase.

Órbita homoclínica: começa e termina no mesmo ponto de equilíbrio instável.

Órbita heteroclínica: liga vários pontos de equilíbrio instável.

8. Mecânica lagrangiana

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \qquad Q_j = \sum_i \vec{F}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j$$

$\lambda\,\dfrac{\partial f}{\partial q_j}$ = força de ligação

9. Sistemas lineares

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{A}\,\vec{r} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Valores próprios: $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Estabilidade
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio repulsivo	instável
1 real, negativo	nó impróprio atrativo	estável

10. Sistemas não lineares

Matriz jacobiana: $J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

(Em cada ponto de equilíbrio é a matriz da aproximação linear do sistema.)

11. Ciclos limite e dinâmica populacional

Ciclo limite: Ciclo isolado no espaço de fase.

Sistemas de duas espécies:

$\dot{x} = f(x, y)$ $\dot{y} = g(x, y)$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$ $\lim\limits_{y \to 0} g(x, y) = 0$

12. Sistemas caóticos

Conjunto limite positivo: $\omega(\Gamma)$ = onde se aproxima a curva Γ em $t \to \infty$

Conjunto limite negativo: $\alpha(\Gamma)$ = onde se aproxima a curva Γ em $t \to -\infty$

Divergência: $\nabla \cdot \vec{u} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$

Teorema de Poincaré-Bendixson: Num sistema com apenas duas variáveis de estado, se existir $\omega(\Gamma)$ ou $\alpha(\Gamma)$, deverá ser um dos três casos segui

1. ponto de equilíbrio;
2. ciclo;
3. órbita homoclínica ou heteroclínica.

Com 3 ou mais variáveis de estado, um conjunto limite que não seja nenhum destes 3 casos é um **atrator estranho**.

Critério de Bendixson: Num sistema dinâmico com apenas duas variáveis de estado, se numa região simplesmente conexa sempre positiva ou sempre negativa, nessa região não existem nem ciclos nem órbitas.

Energia Potencial Elástica:

$$U_e = \frac{1}{2} k\, s^2$$

$$|F_e| = k\, s$$

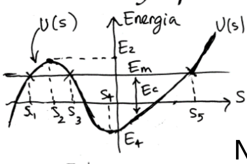
Forças conservativas:

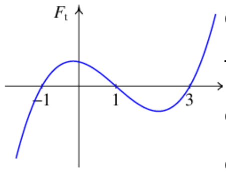
$$F_t^c = -\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega^2$$

$$U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Análise gráfica.

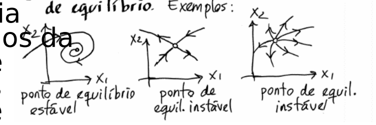




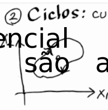
No gráfico da Energia Potencial (U) os máximos da função são pontos de equilíbrio instáveis e os mínimos são pontos de equilíbrio estável.

Nos gáficos da Força tangencial os pontos de equilíbrio são as raízes da função (zeros da função). Se o zero vier do negativo para o positivo o equilíbrio é instável, se vier do positivo para o negativo o equilíbrio é estável.

① **Curvas que começam/terminam num ponto de equilíbrio.** Exemplos:

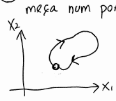


② **Ciclos:** curvas fechadas.

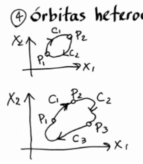


Um ciclo corresponde a uma solução do sistema que se repete indefinidamente no tempo: oscilação.
Dentro do ciclo deve haver um ponto de equilíbrio, estável ou instável.

③ **Órbitas homoclínicas:** curva que começa num ponto de equilíbrio e termina no mesmo ponto. O ponto de equilíbrio é instável.
Não corresponde a uma oscilação, porque não se repete no tempo. Quando o sistema se aproxima do ponto de equilíbrio nunca chega a esse ponto.



④ **Órbitas heteroclínicas:** sequência de n curvas que ligam n pontos de equilíbrio (instável) C_1 começa no primeiro ponto e termina no ponto P_2, C_2 vai de P_2 a $P_3, \ldots, C_n$ vai de P_n até P_1.
Cada curva C_i é uma solução diferente.



SISTEMAS AUTÓNOMOS

São os sistemas (com movimento de translação para usar um grau de liberdade, mas logo será generalizado) em que a força resultante na depende explicitamente do tempo: $F_t = f(s, v)$ como s e v são funções do tempo, F_t dependerá implicitamente de t.

SISTEMAS CONSERVATIVOS

São os sistemas em que Em permanece constante (as forças não conservativas não realizam trabalho)

O trabalho da força resultante, no centro de massa do corpo, é igual ao aumento da energia cinética de translação

1. Modelo de Malthus

$$\frac{f(x,t)}{x} = a = \text{constante positiva}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x,t) = a\,x \quad \text{(EDO de variáveis separáveis)}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t a\,dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = at$$

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{at}}$$ crescimento exponencial da população

2. Modelo logístico. Também chamado de Verhulst
A taxa de natalidade é constante, a, mas a taxa de mortalidade aumenta diretamente proporcional à população.

Equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos y = 3y$$

pode ser escrita como sistema dinâmico autónomo:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = u \\ \frac{du}{dx} = 3y - yu^2 - \cos y \end{cases}$$

variáveis de estado: (y, u)
variável independente: x (em vez de t)

como $H(x_1, x_2) = C$. A condição necessária e suficiente para que um sistema seja conservativo é:

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0}$$ divergência da velocidade de fase nula em todo o espaço de fase.

SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cy) \\ \dot{y} = y(bx - d) \end{cases}$$ é um sistema predador–presa em que x são presas e y predadores

(a, b, c e d positivas)

- A população de presas aumenta exponencialmente se não existirem predadores.
- A população de predadores diminui até zero se não existirem presas.

Um modelo mais realista, de **Holling-Tanner**, tem apenas um ciclo limite:

$$\dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7 + 7x} \qquad \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1 - \frac{y}{2x}\right)$$

x = presas, y = predadores

Unidade SI de trabalho e energia

$$1\text{ joule} = 1\text{ J} = 1\text{ N}\cdot\text{m} = 1\text{ kg}\cdot\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

O trabalho realizado por uma força conservativa, entre dois pontos P e Q é igual à energia potencial inicial, U_P, menos a energia potencial final, U_Q.

Teorema do trabalho e a energia mecânica.
O trabalho das forças não conservativas é igual ao aumento da energia mecânica do corpo.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \ldots n$$

Usar quando Qj representa a generalizada que resulta da contribuição de todas (conserva e não conservativas)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, \ldots n$$

Usar quando Qj representa a força generalizada que resulta da contribuição apenas das forças não conservativas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_\mathrm{c}}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j$$

Usar quando é preciso calcular forças de ligação

$$\boxed{\lambda^2 - \mathbf{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0}$$

Sistema conservativo -> traço da matriz = 0
Sistema linear -> matriz jacobiana constante

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Equilíbrio
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio	instável
1 real, negativo	nó impróprio	estável

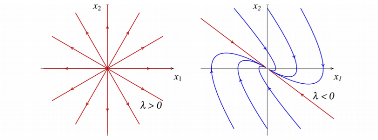
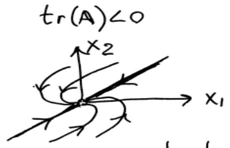


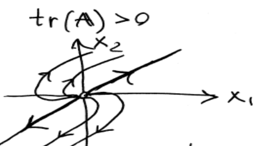
Figura 9.9: Retratos de fase de um nó próprio instável (esquerda) e de um nó impróprio estável (direita).

tr(A)<0

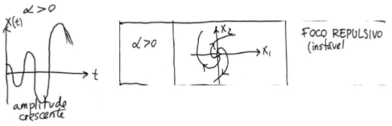


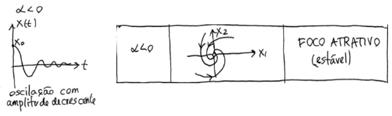
nó impróprio atrativo (estável)

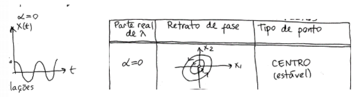
tr(A)>0



nó impróprio repulsivo (instável)







CICLOS LIMITE

Nos limites $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$, as curvas de evolução podem aproximar-se assimtoticamente de um ponto de equilíbrio ou também de uma curva fechada (ciclo).

Coordenadas polares.
Em alguns casos, a mudança de variáveis para um ponto de equilíbrio ajuda a descobrir ciclos limite. A derivada $\dot{r}$ igual a zero indica a presença de ciclos limite.
No caso do exemplo no início da aula, em que a velocidade de fase está na variável u e o ponto de equilíbrio é a origem, as coordenadas polares são:

[xp, yp]: [r*cos(q), r*sin(q)]$

definem-se as derivadas de r e q:

gradef (r,t,v)$
gradef (q,t,w)$

e substituem-se as coordenadas polares nas duas equações de evolução:

subst ([x=xp, y=yp], [diff(xp,t)=u[1], diff(yp,t)=u[2]]);

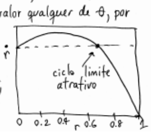
e resolvem-se essas duas novas equações para encontrar expressões para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$:

solve(%, [v,w]);
trigsimp(%); $\rightarrow \dot{\theta} = 1$, $\dot{r} = r^3(\cos^2\theta - 3) + r$

o gráfico de $\dot{r}$ para um valor qualquer de θ, por exemplo θ=0:

plot2d(r^3*(1-3)+r, [r,0,1]);

mostra que há um ciclo limite entre r=0.6 e r=0.8, onde $\dot{r}=0$.



O ciclo limite é atrativo, porque para r menor do que no ciclo limite r aumenta ($\dot{r}>0$) e para valores superiores r diminui ($\dot{r}<0$).

r=0 também dá $\dot{r}=0$, porque r=0 é ponto de equilíbrio.
Em casos mais complicados, o gráfico de $\dot{r}$ em função de r, para algum valor de θ, pode ser, por exemplo:

No exemplo da página anterior, $\dot{\theta} = 1$ mostra que o estado desloca-se no sentido anti-horário, com velocidade angular constante.
As curvas de evolução são oscilações com frequência angular $\Omega = 1$ e amplitude crescente, dentro do ciclo limite, ou decrescente fora do ciclo limite.

SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cy) \\ \dot{y} = y(bx - d) \end{cases}$$

é um sistema predador-presa em que x são presas e y predadores

(a,b,c e d positivas)

- A população de presas aumenta exponencialmente se não existirem predadores.
- A população de predadores diminui até zero se não existirem presas.

O problema deste modelo é que as oscilações das populações podem ser desde valores quase nulos até valores muito elevados

istemas lineares têm um único ponto de equilíbrio, origem.

Um sistema não linear com n pontos de equilíbrio pode ser aproximado, nas vizinhanças desses pontos, por n sistemas lineares diferentes

Frequência angular (Ω) = parte imaginária de λ

$$\Omega = 2\pi f \quad \left(f = \text{frequência} = \frac{1}{\text{período}}\right)$$

SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

x(t) e y(t) são as populações das duas espécies, que interagem entre si:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

As duas funções f e g deverão ter as seguintes propriedades: $f(0,y) = g(x,0) = 0$

A matriz jacobiana é:
$$\mathbb{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = aumento/diminuição próprio da 1ª espécie.
$\frac{\partial g}{\partial y}$ = aumento/diminuição próprio da 2ª espécie.
$\frac{\partial f}{\partial y}$ = aumento/diminuição da 1ª espécie devido à 2ª.
$\frac{\partial g}{\partial x}$ = aumento/diminuição da 2ª espécie devido à 1ª.

1. Sistema predador-presa. $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ com sinais diferentes
2. Sistema com cooperação. $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ positivas
3. Sistema com competição. $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ negativas

Comandos fixes

eigenvectors(matriz)

eigenvalues(matriz)

coefmatrix(lista_equacoes, lista_variaveis)

plotdf(lista_equacoes, lista_variaveis, (opcional) intervalo_variavel) - usar trajectory at para ver evolução

jacobian(lista_equacoes, lista_variaveis)

rk(lista_equacoes, lista_variaveis, lista_valores_inicias_variaveis, [variavel_independente,valor_inicial,valor_final,incremento])

Cenas:

Numa máquina de atwood(dois cilindros ligados por roldana)

aceleração:((massa1-massa2)*gravidade)/(massa1+massa2+roldana/2)

T1:massa1*gravidade-massa1*aceleração

T2:massa2*gravidade-massa2*aceleração