Diferenciabilidade; gradiente

- No caso de uma função real a uma variável, $f(x)$, diz-se que *f* é diferenciável em *x*, se existir o limite

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

em que o número $f'(x)$ representa a derivada de *f* em *x*.
Podemos afirmar que a derivada de *f* em *x* é o único número $f'(x)$ tal que:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$$

Quando $h \to 0$, $o(h) \to 0$, pelo que $f'(x)$ toma o valor do limite definido em (2).

- Diz-se que uma função real a várias variáveis, $f(\vec{x})$, é diferenciável em $\vec{x}$, desde que exista um vector $\vec{y}$, tal que:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \vec{y} \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$

É possível mostrar que o vector $\vec{y}$, se existir, é único, sendo designado por *gradiente de f em* $\vec{x}$, ou seja, $\vec{y} = \nabla f(\vec{x})$.
Podemos, então, afirmar que o gradiente de *f* em $\vec{x}$ é o único vector $\nabla f(\vec{x})$, tal que:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{h} + o(\vec{h})$$

- O cálculo de $\nabla f(\vec{x})$ através da definição é, na maioria dos casos, um processo laborioso. O teorema seguinte, cuja demonstração é complexa, relaciona o gradiente de uma função com as suas derivadas parciais, sendo apresentado para funções reais a duas e a três variáveis.

Teorema 1: Se a função real a três variáveis $f(x,y,z)$ tem derivadas parciais $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ e $\partial f/\partial z$ contínuas numa vizinhança de $\vec{x}$, então $f(x,y,z)$ é diferenciável em $\vec{x}$ e:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})\vec{k}$$

Se a função real é a duas variáveis, $f(x,y)$, então:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j}$$

Exemplo 36: Seja a função $f(x,y) = xe^{y} - ye^{x}$.
Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y} - ye^{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{y} - e^{x}$$

são funções contínuas, *o gradiente de f em* (x,y) é:

$$\nabla f(x,y) = (e^{y} - ye^{x})\vec{i} + (xe^{y} - e^{x})\vec{j}$$

Exemplo 37: Seja a função $f(x,y,z) = x\,\mathrm{sen}(\pi y) - y\cos(\pi z)$.
Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \mathrm{sen}(\pi y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \pi x\cos(\pi y) - \cos(\pi z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \pi y\,\mathrm{sen}(\pi z)$$

são funções contínuas, *o gradiente de f em* (x,y,z) é:

$$\nabla f(x,y,z) = \mathrm{sen}(\pi y)\vec{i} + (\pi x\cos(\pi y) - \cos(\pi z))\vec{j} + \pi y\,\mathrm{sen}(\pi z)\vec{k}$$

No ponto $\vec{x} = (0,1,2)$, obtém-se:

$$\nabla f(0,1,2) = -\vec{j} = (0,-1,0)$$

- No caso da função escalar

$$r(x,y,z) = \|\vec{r}\| \quad \text{e} \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

mostra-se que, se $r \neq 0$, então:

$$\nabla r = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{e} \quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Além disso, se $\vec{r} \neq \vec{0}$ e $n \in \mathbb{N}$, então:

$$\nabla r^n = n r^{n-2}\vec{r}$$

Teorama 2: Se a função real a várias variáveis $f(\vec{x})$ é diferenciável em $\vec{x}$, então $f(\vec{x})$ é contínua em $\vec{x}$.

Operações com o gradiente

- Sejam as funções reais a várias variáveis $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$. Se $\nabla f(\vec{x})$ e $\nabla g(\vec{x})$ existem, então $\nabla[f(\vec{x})+g(\vec{x})]$, $\nabla[\alpha f(\vec{x})]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e $\nabla[f(\vec{x})g(\vec{x})]$ também existem e:

$$\nabla[f(\vec{x})+g(\vec{x})] = \nabla f(\vec{x}) + \nabla g(\vec{x}),$$

$$\nabla[\alpha f(\vec{x})] = \alpha \nabla f(\vec{x}) \ , \ \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\nabla[f(\vec{x})g(\vec{x})] = f(\vec{x})\nabla g(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x})g(\vec{x})$$

Derivada direcional

- A derivada direcional é uma generalização da noção de derivada parcial, estando relacionada com o conceito de gradiente.

- No caso de uma função real a duas variáveis verifica-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{i}\,) - f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x}+h\vec{j}\,) - f(\vec{x})}{h}$$

- No caso de uma função real a três variáveis verifica-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{i})-f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{j})-f(\vec{x})}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{k})-f(\vec{x})}{h}$$

- Cada uma das derivadas parciais anteriores é dada pelo limite do quociente

$$\frac{f(\vec{x}+h\vec{u})-f(\vec{x})}{h}$$

onde $\vec{u}$ é um dos seguintes vectores coordenados unitários: $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$.

- Generalizando, para cada versor $\vec{u}$, o limite

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x}+h\vec{u})-f(\vec{x})}{h}$$

se existir, chama-se *derivada direcional de f em* $\vec{x}$ *na direcção de* $\vec{u}$.

- Perante a definição anterior, pode-se escrever:

  $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}) = f'_{\vec{i}}(\vec{x})$: *derivada direcional de f em* $\vec{x}$ *na direcção de* $\vec{i}$;

  $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}) = f'_{\vec{j}}(\vec{x})$: *derivada direcional de f em* $\vec{x}$ *na direcção de* $\vec{j}$;

  $\dfrac{\partial f}{\partial z}(\vec{x}) = f'_{\vec{k}}(\vec{x})$: *derivada direcional de f em* $\vec{x}$ *na direcção de* $\vec{k}$.

- Enquanto as derivadas parciais definem as *razões da variação de f em* $\vec{x}$ *nas direcções dos versores* $\vec{i}$ *,* $\vec{j}$ *e* $\vec{k}$, a derivada direcional $f'_{\vec{u}}(\vec{x})$ define a *razão da variação de f em* $\vec{x}$ *na direcção do versor* $\vec{u}$.

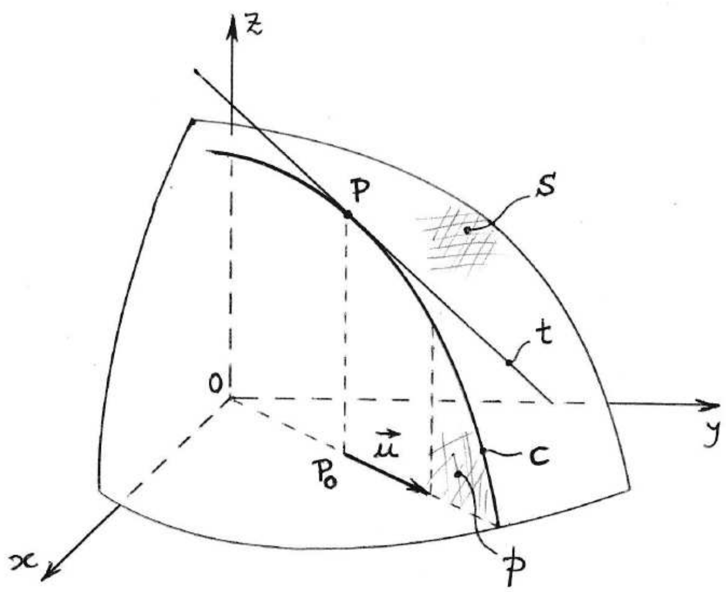
- Considere-se agora um vector $\vec{a}$ não nulo. Chama-se *derivada direcional de f em* $\vec{x}$ *na direcção do vector* $\vec{a}$, à derivada direcional $f'_{\vec{u}}(\vec{x})$, em que $\vec{u}$ é o versor com a mesma direcção e sentido do vector $\vec{a}$, isto é:

  $$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \tag{3}$$

  A operação definida em (3) é designada por *normalização do vector* $\vec{a}$.

- Tal como se verificou com as derivadas parciais, é possível apresentar uma interpretação geométrica para a derivada direcional de uma função real a duas variáveis.

- Seja a função real a duas variáveis $f(x,y)$ e admita-se que (x_0,y_0) pertence ao domínio de *f*.
  Seja a superfície $S\ :\ z=f(x,y)$ e fixem-se os pontos $P_0=(x_0,y_0,0)$, situado no plano *xOy*, e $P=\left(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\right)$ localizado sobre a superfície *S*.
  Seja o versor $\vec{u}$ do plano *xOy* aplicado em P_0.



Considere-se o plano, *p*, que passa em P_0, é paralelo ao versor $\vec{u}$ e é perpendicular ao plano *xOy*.
A intersecção deste plano com a superfície *S* é a curva *C* que passa no ponto *P*; seja *t* a *recta tangente a C* no ponto *P*.
Pode-se provar que a *derivada direcional* $f'_{\vec{u}}(x_0,y_0)$ determina o *declive da recta t no ponto P*.

Teorema 3: Se a função *f* é diferenciável em $\vec{x}$, então *f* possui derivada direcional em $\vec{x}$ em qualquer direcção. Além disso, para cada *versor* $\vec{u}$ obtém-se:

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x})=\nabla f(\vec{x})\cdot\vec{u}$$

Teorema 4: Se a função real $f(x,y,z)$ é diferenciável em $\vec{x}$, então as derivadas parciais $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$ e $\partial f / \partial z$ existem em $\vec{x}$ e:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{x})\vec{k}$$

Se a função real é a duas variáveis, $f(x,y)$, então:

$$\nabla f(\vec{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x})\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x})\vec{j}$$

Exemplo 38: Relativamente à função $f(x,y,z) = 2xz^2\cos(\pi y)$, pretende-se calcular a derivada direcional da função no ponto $P = (1,2,-1)$, na direcção do ponto $Q = (2,1,1)$.

Sabendo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2z^2\cos(\pi y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -2\pi xz^2 \mathrm{sen}(\pi y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4xz\cos(\pi y)$$

são funções contínuas, o gradiente de *f* em *P* é:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,-1) = 2\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,-1) = 0\,, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1) = -4$$

$$\nabla f(1,2,-1) = 2\vec{i} - 4\vec{k}$$

O versor que define a direcção que liga P a Q é:

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$$

Obtém-se, finalmente,

$$f'_{\vec{u}}(1,2,-1) = \nabla f(1,2,-1) \cdot \vec{u} = \frac{-6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6}$$

- Notando que $\vec{u}$ é versor, então

$$\overrightarrow{\text{proj}}_{\vec{u}}\ \nabla f(\vec{x}) = \left(\nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u}\right)\vec{u} = f'_{\vec{u}}(\vec{x})\vec{u} \tag{4}$$

  podendo concluir-se que (4) representa a *componente vectorial de* $\nabla f(\vec{x})$ *na direcção de* $\vec{u}$.
  Por outro lado, tem-se

$$f'_{\vec{u}}(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{u} = \left\|\nabla f(\vec{x})\right\|\left\|\vec{u}\right\|\cos\theta = \left\|\nabla f(\vec{x})\right\|\cos\theta$$

  onde θ é o ângulo formado pelos vectores $\nabla f(\vec{x})$ e $\vec{u}$.
  Uma vez que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, então

$$-\left\|\nabla f(\vec{x})\right\| \leq f'_{\vec{u}}(\vec{x}) \leq \left\|\nabla f(\vec{x})\right\| \tag{5}$$

  para qualquer direcção definida pelo versor $\vec{u}$.

- A expressão (5) permite afirmar que, em cada ponto $\vec{x}$ do domínio, *a função f cresce mais rapidamente na direcção de* $\nabla f(\vec{x})$; a razão da variação de *f* em $\vec{x}$ toma o valor $\left\|\nabla f(\vec{x})\right\|$. Por outro lado, *a função f decresce mais rapidamente na direcção de* $-\nabla f(\vec{x})$; neste caso, a razão da variação de *f* em $\vec{x}$ é $-\left\|\nabla f(\vec{x})\right\|$.

Exemplo 39: Admita-se que a temperatura em cada ponto de uma placa metálica é definida pela função

$$T(x,y) = e^x \cos(y) + e^y \cos(x)$$

a) Obtenha o gradiente de T no ponto genérico (x,y).

b) Em que direcção a temperatura cresce mais rapidamente em $(0,0)$? Qual é o maior valor da razão da variação da temperatura neste ponto?

c) Em que direcção a temperatura decresce mais rapidamente em $(0,0)$? Qual é o menor valor da razão da variação da temperatura neste ponto?

Solução:

a) Sabendo que

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = e^x \cos(y) - e^y \operatorname{sen}(x), \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = -e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(x)$$

são funções contínuas, o gradiente de T em (x,y) é:

$$\nabla T(x,y) = \left(e^x \cos(y) - e^y \operatorname{sen}(x)\right)\vec{i} + \left(-e^x \operatorname{sen}(y) + e^y \cos(x)\right)\vec{j}$$

b) No ponto $(0,0)$ a temperatura cresce mais rapidamente na direcção do gradiente:

$$\nabla T(0,0) = \vec{i} + \vec{j}$$

O maior valor da razão da variação de T neste ponto é $\|\nabla T(0,0)\| = \sqrt{2}$.

c) No ponto $(0,0)$ a temperatura decresce mais rapidamente na direcção de:

$$-\nabla T(0,0) = -\vec{i} - \vec{j}$$

O menor valor da razão da variação de T neste ponto é $-\|\nabla T(0,0)\| = -\sqrt{2}$.

Exemplo 40: Admita-se que a densidade mássica (massa por unidade de volume) de uma esfera metálica centrada na origem é definida pela função

$$\rho(x,y,z) = ke^{-(x^2+y^2+z^2)} \ , \ k > 0$$

a) Obtenha o gradiente de ρ no ponto genérico (x,y,z).

b) Em que direcção a densidade cresce mais rapidamente em (x,y,z)? Qual é o maior valor da razão da variação da densidade neste ponto?

c) Em que direcção a densidade decresce mais rapidamente em (x,y,z)? Qual é o menor valor da razão da variação da densidade neste ponto?

d) Quais são as razões da variação da densidade nas direcções dos vectores coordenados unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

Solução:

a) Sabendo que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}(x,y,y) = -2kxe^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y}(x,y,y) = -2kye^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z}(x,y,y) = -2kze^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

são funções contínuas, o gradiente de ρ em (x,y,z) é

$$\nabla\rho(x,y,z) = -2ke^{-(x^2+y^2+z^2)}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -2\rho(x,y,z)\vec{r} \qquad (6)$$

em que $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ é o vector de posição (vector radial) que determina a posição de cada ponto da esfera no espaço.
A equação (6) mostra que o vector gradiente é, em cada ponto (x,y,z) da esfera, paralelo ao vector de posição, mas com sentido oposto.

b) Atendendo a (6) verifica-se que, em cada ponto (x,y,z) da esfera, a densidade cresce mais rapidamente na direcção da origem do referencial.
A razão da variação de ρ é:

$$\|\nabla\rho(x,y,z)\| = 2\rho(x,y,z)\|\vec{r}\| = 2\rho(x,y,z)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

c) Atendendo a (6) verifica-se que, em cada ponto (x,y,z) da esfera, a densidade decresce mais rapidamente na direcção oposta à origem do referencial.
A razão da variação de ρ é:

$$-\|\nabla\rho(x,y,z)\| = -2\rho(x,y,z)\|\vec{r}\| = -2\rho(x,y,z)\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

d) As razões da variação da densidade nas direcções dos vectores coordenados unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são, respectivamente:

$$\rho'_{\vec{i}}(x,y,z) = \nabla\rho(x,y,z)\cdot\vec{i} = -2x\rho(x,y,z)$$

$$\rho'_{\vec{j}}(x,y,z) = \nabla\rho(x,y,z)\cdot\vec{j} = -2y\rho(x,y,z)$$

$$\rho'_{\vec{k}}(x,y,z) = \nabla\rho(x,y,z)\cdot\vec{k} = -2z\rho(x,y,z)$$

Note-se que os valores encontrados correspondem às derivadas parciais (de primeira ordem) obtidas na alínea a).

Teorema do valor médio

- Como é sabido o *teorema do valor médio*, também conhecido por *teorema de Lagrange*, assume um papel extremamente importante no estudo das funções reais a uma variável.
  Relembrando o teorema: se $f(x)$ é uma função contínua definida num intervalo fechado $[a,b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a,b), então existe, pelo menos, um ponto $c \in (a,b)$, tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

- Também é possível apresentar uma propriedade análoga para as funções reais a várias variáveis. O teorema seguinte é designado por *teorema do valor médio* para funções reais a várias variáveis.

Teorema 5: Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis diferenciável em cada ponto do segmento de recta que liga o ponto $\vec{a}$ ao ponto $\vec{b}$. Então existe, nesse segmento de recta, pelo menos um ponto $\vec{c}$ entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tal que:

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

- Um *conjunto aberto* (sem pontos fronteira) *U* diz-se *conexo*, se quaisquer dois pontos de *U* podem ser ligados através de uma linha poligonal que está totalmente contida em *U*.

Teorema 6: Sejam *U* um conjunto aberto conexo e $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis diferenciável em *U*. Se $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ para todo $\vec{x} \in U$, então $f(\vec{x})$ é constante em *U*.

Teorema 7: Sejam *U* um conjunto aberto conexo e $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ funções reais a várias variáveis diferenciáveis em *U*. Se $\nabla f(\vec{x}) = \nabla g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in U$, então $f(\vec{x})$ e $g(\vec{x})$ apenas diferem de uma constante em *U*.

Regra da cadeia

- Comecemos por relembrar a aplicação da regra da cadeia a funções reais a uma variável. Sejam $g(x)$ uma função diferenciável em x_0 e $f(x)$ uma função diferenciável em $g(x_0)$; então

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(g(x_0)\right)\right] = f'\left(g(x_0)\right)g'(x_0)$$

- Sejam a função real a três variáveis $f(x,y,z)$, definida num conjunto aberto *U*, e a função vectorial $\vec{r}(t)$, com $t \in [t_0,t_1]$, tal que $\vec{r}[t_0,t_1] \subset U$. Então é possível definir a *função composta*

$$(f \circ \vec{r})(t) = f\left(\vec{r}(t)\right) \ , \ t \in [t_0,t_1]$$

  A *derivada da função composta* $f \circ \vec{r}$ pode ser obtida recorrendo à *regra da cadeia*.

- Uma função real a três variáveis $f(x,y,z)$ é *continuamente diferenciável* num conjunto aberto *U*, se *f* é diferenciável em *U* e ∇f é contínuo em *U*.

Teorema 8: Se $f(x,y,z)$ é uma função real a três variáveis continuamente diferenciável num conjunto aberto *U* e $\vec{r}(t)$ é uma curva diferenciável contida em *U*, então a função composta $f \circ \vec{r}$ é diferenciável e:

$$\frac{d}{dt}\left[f\left(\vec{r}(t)\right)\right] = \nabla f\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \vec{r}\,'(t) \qquad (7)$$

- A expressão (7) pode ser reescrita sob uma forma alternativa. Notando que

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

então:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

- No caso de uma função real a duas variáveis $f(x,y)$ a equação (7) conduz-nos a:

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Exemplo 41: Considere-se a função $f(x,y,z) = x^2 y + z\cos(x)$ e a curva, *C*, parametrizada por $\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$.

a) Obtenha, usando a regra da cadeia, a razão da variação de *f* em relação *t* ao longo de *C*.

b) Confirme o resultado obtido na alínea anterior após calcular a função composta.

Solução:

a) O vector tangente à curva C é:

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

Sabendo que

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2xy - z\text{sen}(x)\right)\vec{i} + x^2\vec{j} + \cos(x)\vec{k}$$

e tendo em atenção que $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ e $z(t) = t^3$, obtém-se:

$$\nabla f\left(\vec{r}(t)\right) = t^3\left(2 - \text{sen}(t)\right)\vec{i} + t^2\vec{j} + \cos(t)\vec{k}$$

A razão da variação de *f* em relação a *t* ao longo de *C* é:

$$\frac{d}{dt}\left[f\left(\vec{r}(t)\right)\right] = \nabla f\left(\vec{r}(t)\right)\cdot\vec{r}'(t) = t^3\left(2 - \text{sen}(t)\right) + 2t^3 + 3t^2\cos(t) =$$

$$= 4t^3 - t^3\text{sen}(t) + 3t^2\cos(t)$$

b) A função composta $f \circ \vec{r}$ é a função escalar

$$g(t) = (f \circ \vec{r})(t) = f\left(\vec{r}(t)\right) = t^4 + t^3\cos(t)$$

pelo que:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left[f\left(\vec{r}(t)\right)\right] = 4t^3 + 3t^2\cos(t) - t^3\text{sen}(t)$$

Exemplo 42: Dadas as funções

$$u = x^2 - y^2 , \quad x = t^2 - 1 \ \text{ e } \ y = 3\text{sen}(\pi t)$$

calcule $\partial u / \partial t$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y , \quad \frac{dx}{dt} = 2t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 3\pi \cos(\pi t)$$

então:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x)(2t) + (-2y)\big(3\pi \cos(\pi t)\big) =$$

$$= 2(t^2 - 1)(2t) + (-2)\big(3\text{sen}(\pi t)\big)\big(3\pi \cos(\pi t)\big) =$$

$$= 4t(t^2 - 1) - 18\pi \text{sen}(\pi t) \cos(\pi t)$$

Em alternativa, é possível resolver o problema, começando por calcular a função composta

$$u(t) = x^2(t) - y^2(t) = (t^2 - 1)^2 - \big(3\text{sen}(\pi t)\big)^2 =$$

$$= (t^2 - 1)^2 - 9\text{sen}^2(\pi t)$$

e derivando:

$$\frac{du}{dt} = 2(2t)(t^2 - 1) - 9(2)\big(\pi \cos(\pi t)\big)\big(\text{sen}(\pi t)\big) =$$

$$= 4t(t^2 - 1) - 18\pi \text{sen}(\pi t) \cos(\pi t)$$

Outras aplicações da regra da cadeia

- Sabendo que

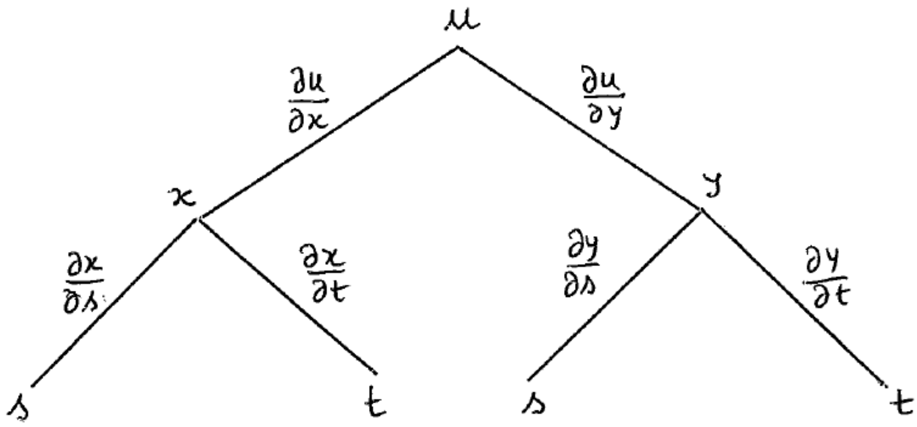
$$u = u(x,y)\text{, tal que } x = x(s,t) \text{ e } y = y(s,t)$$

então:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \quad (9)$$

As expressões (8) e (9) podem ser deduzidas a partir do *diagrama de árvore* seguinte:



Cada caminho que se inicia em *u* e termina numa variável (*s* ou *t*) determina um produto de derivadas (parciais). A *derivada parcial de u em relação a uma variável* (*s* ou *t*) é dada pela soma dos produtos gerados pelos vários caminhos que nos conduzem a essa variável.

Exemplo 43: Dadas as funções

$$u = x^2 - 2xy + 2y^3, \text{ tal que } x = s^2\ln(t) \text{ e } y = 2st^3$$

calcule $\partial u / \partial s$ e $\partial u / \partial t$.

Solução:

As derivadas parciais pretendidas podem ser obtidas recorrendo ao *diagrama de árvore* apresentado na página anterior.
Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} =$$

$$= (2x - 2y)2s\ln(t) + (-2x + 6y^2)2t^3 =$$

$$= (2s^2\ln(t) - 4st^3)2s\ln(t) + (-2s^2\ln(t) + 24s^2t^6)2t^3 =$$

$$= 4s^2\ln(t)(s\ln(t) - 2t^3) + 4s^2t^3(-\ln(t) + 12t^6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} =$$

$$= (2x - 2y)\frac{s^2}{t} + (-2x + 6y^2)(6st^2) =$$

$$= (2s^2\ln(t) - 4st^3)\frac{s^2}{t} + (-2s^2\ln(t) + 24s^2t^6)6st^2 =$$

$$= \frac{2s^3}{t}(s\ln(t) - 2t^3) + 12s^3t^2(-\ln(t) + 12t^6)$$

- Sabendo que

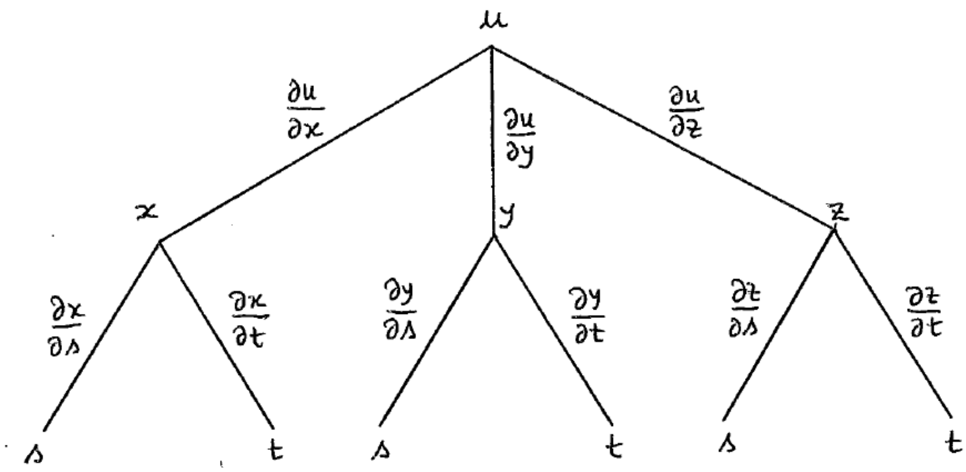
$$u = u(x,y,z)\,,\ \text{tal que}\ \ x = x(s,t)\,,\ \ y = y(s,t)\ \ \text{e}\ \ z = z(s,t)$$

então:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \tag{11}$$

O diagrama de árvore que corresponde às derivadas parciais apresentadas em (10) e (11) é o seguinte:



Derivação implícita

- Admita-se que $u = u(x,y)$ é uma função continuamente diferenciável e que y é uma função diferenciável em x que satisfaz a condição $u(x,y)=0$. Então, é possível calcular a *derivada de y em relação a x* sem que seja necessário *explicitar a função y em termos de x*; este processo é designado por *diferenciação (derivação) implícita*.

Teorema 9: Se $u = u(x,y)$ é uma função continuamente diferenciável e y é uma função diferenciável em x que satisfaz a equação $u(x,y) = 0$, então, para todos os pontos (x,y) onde $\partial u / \partial y \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}$$

Exemplo 44: Seja y uma função diferenciável em x que verifica a equação:

$$u(x,y) = 2x^2 y - y^3 + 1 - x - 2y = 0 \tag{12}$$

Notando que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4xy - 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 - 3y^2 - 2$$

então:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 1}{2x^2 - 3y^2 - 2} \tag{13}$$

O resultado (13) também pode ser obtido diferenciando (12) em relação a x, tendo em atenção que y é uma função de x.
Obtém-se, neste caso,

$$4xy + 2x^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} - 1 - 2\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x^2 - 3y^2 - 2)\frac{dy}{dx} = -4xy + 1$$

e, portanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 1}{2x^2 - 3y^2 - 2}$$

Exemplo 45: Calcule o declive da recta tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no ponto $P = (1,\sqrt{3})$:

a) Usando a derivação implícita.

b) A partir da função que explicita *y* em função de *x* nesse ponto.

Solução:

a) Considerando a função real a duas variáveis

$$u(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

obtém-se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

O declive da recta tangente em *P* é:

$$\frac{dy}{dx}(1,\sqrt{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) A função que define a linha que passa em *P* é:

$$y = +\sqrt{4 - x^2}$$

Derivando em ordem a *x*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

pelo que:

$$\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Teorema 10: Se $u = u(x,y,z)$ é uma função continuamente diferenciável e $z = z(x,y)$ é uma função diferenciável que satisfaz a equação $u(x,y,z) = 0$, então, para todos os pontos (x,y,z) onde $\partial u / \partial z \neq 0$, verifica-se:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial u / \partial y}{\partial u / \partial z}$$

Gradiente; curvas de nível

Teorema 11: Seja $f = f(x,y)$ uma função continuamente diferenciável. Então em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ do seu domínio, o *gradiente* ∇f, se não for nulo, é *perpendicular à curva de nível de f* que passa em $\vec{x}_0$.

Exemplo 46: Em relação à função $f(x,y) = x^2 + y^2$, as curvas de nível são as circunferências concêntricas:

$$x^2 + y^2 = c \ , \ c \geq 0$$

Em cada ponto $(x,y) \neq (0,0)$ o gradiente de $f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} = 2(x\vec{i} + y\vec{j}) = 2\vec{r}$$

é perpendicular à curva de nível (circunferência) que passa nesse ponto (tem a direcção radial) e aponta no sentido convexo da curva.
Na origem, a curva de nível reduz-se a um ponto e $\nabla f(0,0) = \vec{0}$.

- O gradiente $\nabla f(x,y)$ permite definir, em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ de uma curva de nível, a *linha normal* e a *linha tangente* a essa curva. Notando que o vector

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\vec{j}$$

é um *vector normal* à curva de nível no ponto $\vec{x}_0$, então a equação vectorial da *linha normal* à curva $f(x,y) = c$ em $\vec{x}_0$ é:

$$\vec{r}(u) = \vec{x}_0 + u\nabla f(\vec{x}_0) \ , \ u \in \mathbb{R}$$

Por outro lado, sabendo que o vector

$$\vec{t}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)\vec{j}$$

é perpendicular a $\nabla f(\vec{x}_0)$ (o produto escalar é nulo), então ele será um *vector tangente* à curva de nível em $\vec{x}_0$; assim, a equação vectorial da *linha tangente* à curva $f(x,y) = c$ em $\vec{x}_0$ é:

$$\vec{r}(v) = \vec{x}_0 + v\vec{t}(\vec{x}_0) \ , \ v \in \mathbb{R}$$

Exemplo 47: Considere a curva plana *C* de equação $x^2 + 2y^3 = xy + 4$ e o ponto $P = (2,1)$ situado em *C*. Determine em *P*:

a) O vector normal e a equação da linha normal à curva.

b) O vector tangente e a equação da linha tangente à curva.

Solução:

a) Sendo $f(x,y) = x^2 + 2y^3 - xy$, a curva *C* é a curva de nível $f(x,y) = 4$.
O gradiente de *f* é:

$$\nabla f(x,y) = (2x - y)\vec{i} + (6y^2 - x)\vec{j}$$

Assim, o *vector normal* a C em P é:

$$\vec{n} = \nabla f(2,1) = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

A equação vectorial da *linha normal* a C em P é:

$$\vec{r}(\alpha) = P + \alpha\vec{n} = (2+3\alpha, 1+4\alpha) \ , \ \alpha \in \mathbb{R}$$

As suas equações cartesianas são

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4}$$

enquanto a sua equação reduzida é:

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

b) O *vector tangente* a C em P é:

$$\vec{t} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

A equação vectorial da *linha tangente* a C em P é:

$$\vec{r}(\beta) = P + \beta\vec{t} = (2+4\beta, 1-3\beta) \ , \ \beta \in \mathbb{R}$$

As suas equações cartesianas são

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3}$$

enquanto a sua equação reduzida é:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

Gradiente; superfícies de nível

Teorema 12: Seja $f = f(x,y,z)$ uma função continuamente diferenciável. Então em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ do seu domínio, o *gradiente* ∇f, se não for nulo, é *perpendicular à superfície de nível de f* que passa em $\vec{x}_0$.

Exemplo 48: Em relação à função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, as superfícies de nível são as superfícies esféricas concêntricas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c \ , \ c \geq 0$$

Em cada ponto $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ o gradiente de $f(x,y,z)$

$$\nabla f(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 2\vec{r}$$

é perpendicular à superfície de nível (superfície esférica) que passa nesse ponto (tem a direcção radial) e aponta no sentido convexo da superfície.
Na origem, a superfície de nível reduz-se a um ponto e $\nabla f(0,0,0) = \vec{0}$.

- Neste caso, o gradiente $\nabla f(x,y,z)$ permite definir, em cada ponto $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de uma superfície de nível, a *linha normal* e o *plano tangente* a essa superfície.
  O plano tangente em $\vec{x}_0$ é o plano que mais se aproxima da superfície na vizinhança desse ponto.

- Um ponto $\vec{x} = (x, y, z)$ está no *plano tangente* à superfície $f(x, y, z) = c$ em $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, se e só se:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = 0$$

A equação vectorial da *linha normal* à superfície em $\vec{x}_0$ é:

$$\vec{r}(u) = \vec{x}_0 + u\nabla f(\vec{x}_0)\ ,\ u \in \mathbb{R}$$

Exemplo 49: Seja o cone elíptico de equação $z^2 = x^2 + 4y^2$ e o ponto $P = (3, 2, 5)$ situado nesta superfície. Determine em *P*:

a) O vector normal à superfície.

b) A equação da linha normal à superficie.

c) A equação do plano tangente à superficie.

Solução:

a) O cone elíptico é uma superfície de nível da forma $f(x, y, z) = 0$, em que $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2$.
O gradiente de *f* é:

$$\nabla f(x, y, z) = 2x\vec{i} + 8y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

Assim, o *vector normal* à superfície em *P* é:

$$\nabla f(3, 2, 5) = 6\vec{i} + 16\vec{j} - 10\vec{k}$$

b) Notando que o vector $\nabla f(3, 2, 5)$ é paralelo ao vector $\vec{n} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - 5\vec{k}$, a equação vectorial da *linha normal* à superfície em *P* é:

$$\vec{r}(\alpha) = P + \alpha\vec{n} = (3 + 3\alpha, 2 + 8\alpha, 5 - 5\alpha)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

As suas equações cartesianas são:

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{8}=\frac{x-5}{-5}$$

c) A equação cartesiana do *plano tangente* à superfície em *P* é:

$$(x-3,y-2,z-5)\cdot(3,8,-5)=0 \;\Leftrightarrow\; 3x+8y-5z=0$$

Trata-se de um plano que passa na origem.

Exemplo 50: A curva *C* de equação $\vec{r}(t)=2^{-1}t^2\vec{i}+4t^{-1}\vec{j}+(2^{-1}t-t^2)\vec{k}$ intersecta o paraboloide hiperbólico $x^2-4y^2-4z=0$ no ponto $P=(2,2,-3)$. Calcule o ângulo de intersecção.

Solução:

Pretende-se calcular o ângulo ϕ que o vector tangente à curva faz com o plano tangente ao cone hiperbólico no ponto *P*.
Sabendo que $P=\vec{r}(2)$ e uma vez que

$$\vec{r}\,'(t)=t\vec{i}-4t^{-2}\vec{j}+(2^{-1}-2t)\vec{k}$$

então o vector tangente a *C* em *P* é

$$\vec{r}\,'(2)=2\vec{i}-\vec{j}-\frac{7}{2}\vec{k}$$

sendo um vector paralelo a $\vec{t}=4\vec{i}-2\vec{j}-7\vec{k}$.
O paraboloide hiperbólico é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z)=0$, em que $f(x,y,z)=x^2-4y^2-4z$.
O gradiente de *f* é

$$\nabla f(x,y,z)=2x\vec{i}-8y\vec{j}-4\vec{k}$$

pelo que o *vector normal* à superfície em *P* é

$$\nabla f(2,2,-3) = 4\vec{i} - 16\vec{j} - 4\vec{k}$$

sendo um vector paralelo a $\vec{n} = \vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$.
Designando por θ o ângulo formado pelos vectores $\vec{t}$ e $\vec{n}$, então:

$$\theta = \arccos\frac{\left|\vec{t}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{t}\right\|\left\|\vec{n}\right\|} = \arccos\frac{19}{\sqrt{69}\sqrt{18}} = \arccos\frac{19\sqrt{138}}{414}$$

Assim:

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta = \operatorname{arc\,sen}\frac{19\sqrt{138}}{414}$$

Exemplo 51: Em que pontos da superfície $z = 3xy - x^3 - y^3$ o plano tangente é horizontal (paralelo ao plano *xOy*)?

Solução:

A superfície dada é uma superfície de nível da forma $f(x,y,z) = 0$, em que $f(x,y,z) = x^3 + y^3 - 3xy - z$.
O gradiente de *f* é:

$$\nabla f(x,y,z) = 3(x^2 - y)\vec{i} + 3(y^2 - x)\vec{j} - \vec{k}$$

Para que o plano tangente seja horizontal deverá verificar-se:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Concluindo, o plano tangente à superfície é horizontal nos pontos $(0,0,0)$ e $(1,1,1)$.