

Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

Navegação: [DEF](#) → [Dinâmica e Sistemas Dinâmicos](#) **Formulário** ([Mostrar tabela de conteúdo](#))

Formulário

1. Cinemática

$$v = \frac{ds}{dt}$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$
$$a_x = v_x \frac{dv_x}{dx}$$

$$a_t = v \frac{dv}{ds}$$
$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

2. Cinemática vetorial

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$
$$\vec{r} = r_0 + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt$$

Movimento relativo:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{r}'_O$$
$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}'_O$$

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}'_O$$

3. Movimento curvilíneo

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = a b \sin \theta \hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} = \dot{s} \hat{e}_t$$
$$\vec{a} = \dot{v} \hat{e}_t + \frac{v^2}{R} \hat{e}_n$$

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2$$

Movimento circular:

$$s = R \theta$$
$$v = R \omega$$

$$a_t = R \alpha$$

Rotação plana:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e}_{\text{axis}}$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$
$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

4. Mecânica vetorial

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$
$$\vec{p} = m \vec{v}$$
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}$$

$$F_e \leq \mu_e R_n$$
$$F_c = \mu_c R_n$$

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

Esfera num fluido:

$$N_R = r v \left(\frac{\rho}{\eta} \right)$$
$$F_f = 6 \pi \eta r v \quad (N_R < 1)$$
$$F_f = \frac{\pi}{4} \rho r^2 v^2 \quad (N_R > 10^3)$$

5. Dinâmica dos corpos rígidos

$$M_O = F b$$
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$M_z = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$$

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm$$

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \int \vec{v} \, dm \qquad \vec{a}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \int \vec{a} \, dm \qquad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \vec{a}_{\text{cm}} \qquad \sum_{i=1}^n M_{z,i} = I_z \alpha$$

$$I_z = \int R^2 \, dm$$

6. Trabalho e energia

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds \qquad W_{12} = E_c(2) - E_c(1) \qquad E_c = \frac{1}{2} m v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2 \qquad U = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{12} = U(1) - U(2) \qquad U_g = m g z \qquad U_e = \frac{1}{2} k s^2 \qquad E_m = E_c + U$$

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t^{\text{nc}} \, ds = E_m(2) - E_m(1) \qquad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f \qquad s = A \sin(\Omega t + \phi_0) \qquad E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k s^2$$

7. Sistemas dinâmicos

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \qquad \vec{u} = f_1(x_1, x_2) \hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2) \hat{e}_2 \ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

$$y = \dot{x} \qquad \vec{u} = y \hat{i} + f(x, y) \hat{j}$$

Sistemas conservativos:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0 \qquad f_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \qquad f_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$$

Ponto de equilíbrio = $\vec{0}$ (estável ou instável).

Ciclo curva fechada no espaço de fase.

Órbita homoclínica começa e termina no mesmo ponto de equilíbrio instável.

Órbita heteroclínica ligam vários pontos de equilíbrio instável.

8. Mecânica lagrangiana

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j \qquad Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} = \text{força de ligação}$$

9. Sistemas lineares

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \mathbf{A} \vec{r} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Valores próprios $\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A}) \lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Estabilidade
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	nó repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	nó atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio repulsivo	instável
1 real, negativo	nó impróprio atrativo	estável

10. Sistemas não lineares

$$\text{Matriz jacobiana: } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

(Em cada ponto de equilíbrio é a matriz da aproximação linear do sistema.)

11. Ciclos limite e dinâmica populacional

Ciclo limite Ciclo isolado no espaço de fase.

Sistemas de duas espécies:

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = 0$$

12. Sistemas caóticos

Conjunto limite positivo $(\Gamma^+) =$ onde se aproxima a curva $\rightarrow \infty$

Conjunto limite negativo $(\Gamma^-) =$ onde se aproxima a curva $\rightarrow -\infty$

Divergência: $\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$

Teorema de Poincaré-Bendixson Num sistema com apenas duas variáveis de estado, se existir um conjunto limite, este será um dos três casos seguintes:

1. ponto de equilíbrio;
2. ciclo;
3. órbita homoclínica ou heteroclínica.

Com 3 ou mais variáveis de estado, um conjunto limite que não seja nem um dos casos é um atrator estranho.

Crítério de Bendixson Num sistema dinâmico com apenas duas variáveis de estado, se numa região simplesmente conexa sempre positiva ou sempre negativa, nessa região não existem nem ciclos nem órbitas.