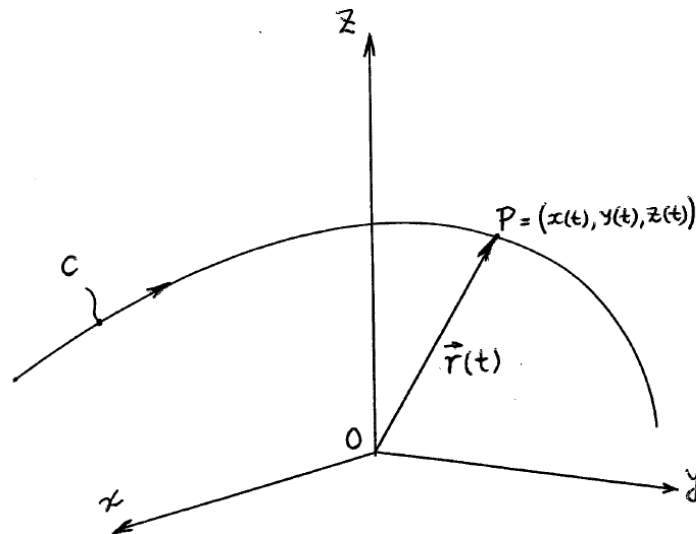


Curvas no espaço

- Admita-se que a função vectorial

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

é diferenciável no intervalo I ; nos extremos, caso existam, apenas se exige a continuidade da função. A extremidade do vector de posição (vector radial) $\vec{r}(t)$ é o ponto de coordenadas $P = (x(t), y(t), z(t))$, verificando-se que P traça um caminho, C , quando t toma valores no intervalo I . Diz-se, neste caso, que C é uma *curva diferenciável* e que é *parametrizada* por $\vec{r}(t)$ com o parâmetro t . É uma *curva orientada*, dado que quando t cresce no intervalo I , o vector de posição traça C segundo uma determinada orientação no espaço.



Exemplo 12: Tal como foi assinalado no exemplo 4, a curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

é uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do referencial Oxy e percorrida no *sentido directo*.

Exemplo 13: Em contrapartida, a curva parametrizada por

$$\vec{r}(u) = \cos(2\pi - u)\vec{i} + \sin(2\pi - u)\vec{j}, \quad u \in [0, 2\pi]$$

é uma circunferência de raio unitário, centrada na origem do referencial Oxy e percorrida no *sentido retrógrado*.

Tangente a uma curva

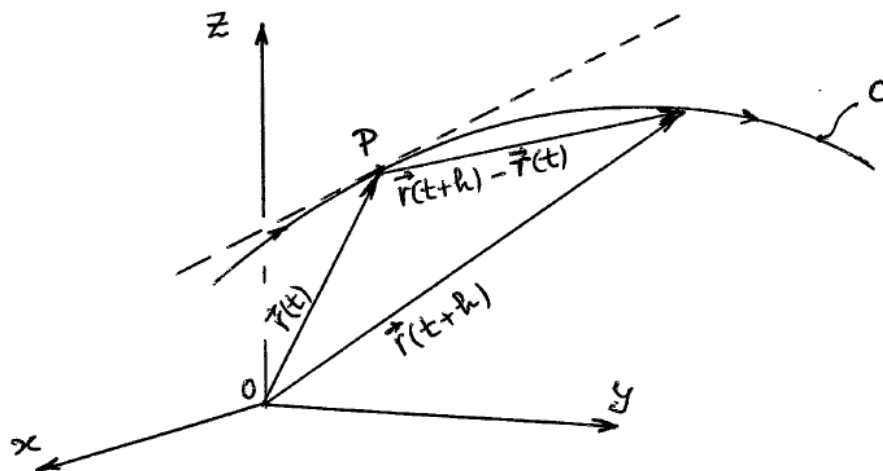
- Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

Notando que

$$\vec{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} \quad (9)$$

então, se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, é óbvio que, para um valor de h suficientemente pequeno, o vector $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t) \neq \vec{0}$.



Assim, para cada valor real $h \neq 0$, o vector

$$\frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}$$

é paralelo a $\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)$ e, portanto, o seu limite (9), que se assume diferente de zero, pode ser tomado como o vector direcção da *linha tangente* à curva C no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$.

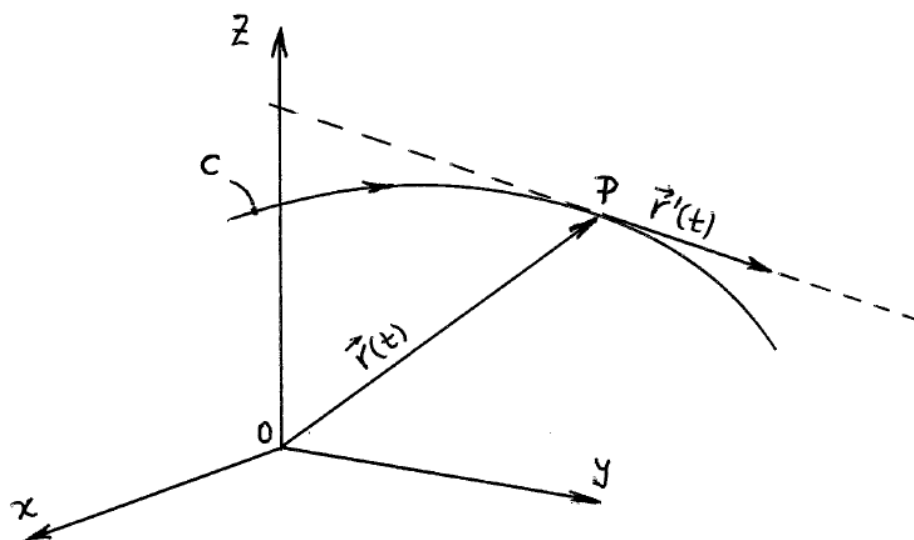
- Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I \quad (10)$$

O vector $\vec{r}'(t)$, se não for nulo, é designado por *vector tangente* à curva C no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ e aponta no sentido definido pelos valores crescentes de t . A linha recta parametrizada por

$$X(u) = P + u\vec{r}'(t), \quad u \in \mathbb{R}$$

chama-se *linha tangente* a C em P .



- Uma curva diferenciável e parametrizada por $\vec{r}(t)$, $t \in I$ diz-se *regular*, se e só se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$.

Exemplo 14: Seja a circunferência de raio a , centrada na origem do referencial Oxy e percorrida no sentido directo:

$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + a\sin(t)\vec{j} + 0\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (11)$$

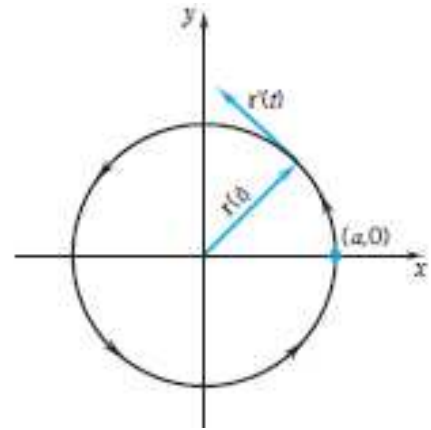
Neste caso, o vector tangente

$$\vec{r}'(t) = -a\sin(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + 0\vec{k}$$

é ortogonal, em cada ponto da curva, ao vector de posição, já que

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

(teorema 8) e aponta no sentido directo, o sentido de percurso da curva.



Exemplo 15: Seja a curva

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

que passa no ponto $P = (-2, 4, -8)$. Dado que $P = \vec{r}(-2)$ e

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

o vector tangente à curva em P é $\vec{a} = \vec{r}'(-2) = \vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$.

Além disso, a função vectorial

$$\vec{r}_1(u) = P + u\vec{a} = (-2 + u)\vec{i} + (4 - 4u)\vec{j} + (-8 + 12u)\vec{k}, \quad u \in \mathbb{R}$$

parametriza a linha tangente à curva no ponto P .

- A linha tangente a uma curva, C , é *invariante* face a uma alteração de parâmetro utilizado na sua parametrização.
Admitindo $t = t(v)$ em (10), a curva passa a ser parametrizada pela função vectorial $\vec{r}_1(v) = \vec{r}[t(v)]$.

Se a derivada $\vec{r}'[t(v)]$ existir, então $\vec{r}'_1(v)$ também existe, sendo dada por (*regra da cadeia*)

$$\frac{d\vec{r}_1}{dv} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{dv} \Leftrightarrow \vec{r}'_1(v) = \vec{r}'[t(v)]t'(v)$$

onde $t'(v) \neq 0$; portanto, se $\vec{r}'[t(v)] \neq \vec{0}$, então $\vec{r}'_1(v) \neq \vec{0}$.

Assim, $\vec{r}'_1(v)$ e $\vec{r}'[t(v)]$ são *vectorios paralelos*; com o mesmo sentido se $t'(v) > 0$ e com sentidos opostos se $t'(v) < 0$.

Conclui-se que as funções vectoriais $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}_1(v)$ mantêm a mesma linha tangente em cada um dos pontos da curva, sendo designadas por *funções equivalentes*.

- As duas curvas

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I_1$$

$$C_2 : \vec{r}_2(u) = x(u)\vec{i} + y(u)\vec{j} + z(u)\vec{k}, \quad u \in I_2$$

intersectam-se, se e só se existirem valores para t e u para os quais $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(u)$. O ângulo, θ , formado pelas curvas C_1 e C_2 num ponto onde $\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(u_0)$ é, por definição

$$\theta = \arccos \frac{|\vec{r}'_1(t_0) \cdot \vec{r}'_2(u_0)|}{\|\vec{r}'_1(t_0)\| \|\vec{r}'_2(u_0)\|}$$

ou seja, é o menor dos ângulos formados pelas respectivas linhas tangentes nesse ponto.

Versor da tangente

- Seja a curva duas vezes diferenciável, C , parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

tal que $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Então, em qualquer ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva é possível obter o vector

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \quad (12)$$

que é designado por *versor da tangente*. Uma vez que $\|\vec{r}'(t)\| > 0$, $\vec{T}(t)$ é um vector unitário com a mesma direcção (paralelo) e o mesmo sentido do vector tangente, $\vec{r}'(t)$.

Exemplo 16: No caso da hélice circular do exemplo 5, parametrizada em (3), o vector tangente à curva é:

$$\vec{f}'(t) = -2\sin(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + \vec{k} = (-2\sin(t), 2\cos(t), 1) \quad (13)$$

Notando que

$$\|\vec{f}'(t)\| = \sqrt{5} \quad (14)$$

o versor da tangente à curva é:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{f}'(t)}{\|\vec{f}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\sin(t), 2\cos(t), 1) \quad (15)$$

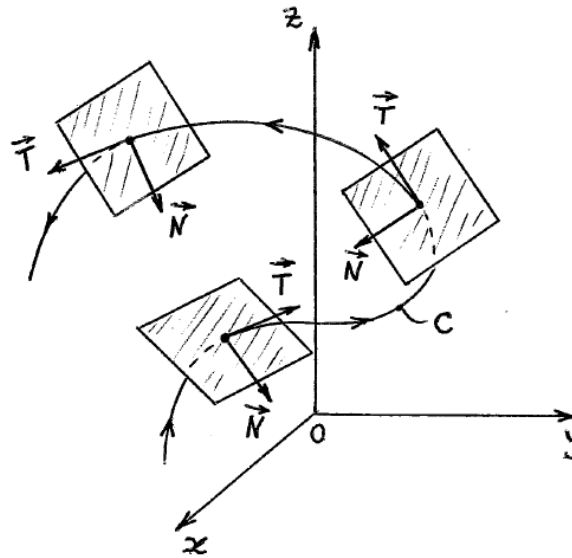
- De um modo geral, o versor $\vec{T}(t)$ vai-se alterando (tal como a linha tangente) ao longo da curva C . Dado que $\|\vec{T}(t)\| = 1$ (constante), essa variação reflecte-se unicamente na mudança da sua direcção.
- A taxa de variação de $\vec{T}(t)$ em relação a t é medida através da sua derivada, $\vec{T}'(t)$.
- O vector $\vec{T}'(t)$ é ortogonal a $\vec{T}(t)$ em cada ponto de C (teorema 8) e aponta no sentido definido pelo lado côncavo da curva.
- No caso de C ser uma linha recta o versor $\vec{T}(t)$ mantém a sua direcção no espaço, pelo que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$.

Versor normal principal

- Se o vector $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então é possível definir, em cada ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C , o *versor normal principal*

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \quad (16)$$

- Dado que $\|\vec{T}'(t)\| > 0$, $\vec{N}(t)$ é um vector unitário com a mesma direcção (paralelo) e o mesmo sentido do vector $\vec{T}'(t)$.



- A linha recta que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva e parametrizada por

$$X(v) = P + v\vec{N}(t), \quad v \in \mathbb{R}$$

chama-se *linha normal* à curva C em P .

Exemplo 17: Em relação à hélice circular dos exemplos 5 e 16, obtém-se:

$$\vec{T}'(t) = \frac{2}{\sqrt{5}}(-\cos(t), -\sin(t), 0) \quad (17)$$

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = (-\cos(t), -\sin(t), 0) \quad (18)$$

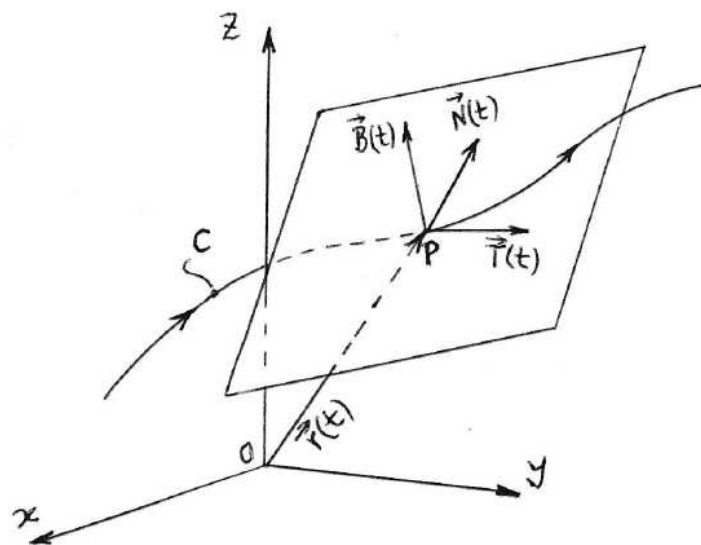
Atente-se que, neste caso (teorema 8):

$$\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$$

Versor binormal

- Se o vector $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então é possível definir, em cada ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C , o *versor binormal*

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$



- Relembrando as propriedades do produto vectorial, pode-se afirmar que $\vec{B}(t)$ é um vector unitário que tem a direcção ortogonal às direcções definidas pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$, sendo o seu sentido determinado pela *regra da mão direita*.
- A linha recta que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva e parametrizada por

$$X(w) = P + w\vec{B}(t), \quad w \in \mathbb{R}$$

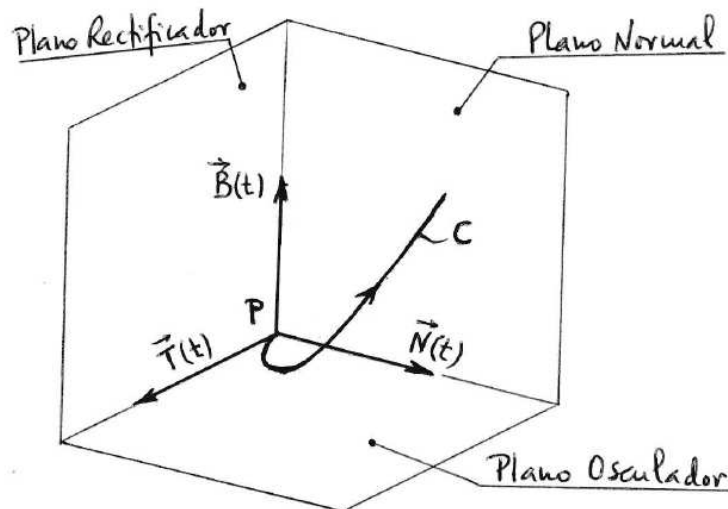
chama-se *linha binormal* à curva C em P .

Exemplo 18: Relativamente à hélice circular dos exemplos 5, 16 e 17, resulta:

$$\begin{aligned}\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin(t) & 2\cos(t) & 1 \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\sin(t), -\cos(t), 2) \end{aligned} \quad (19)$$

Triedro de Frenet

- A cada ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ de uma curva diferenciável C é possível associar o conjunto de versores $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$, que formam uma *base ortonormal* para o espaço vectorial \mathbb{R}^3 e que é designada por *triedro de Frenet*. Estes versores definem, para além das *linhas tangente, normal e binormal*, três planos ortogonais entre si que constituem os chamados *planos fundamentais* da curva C no ponto P , nomeadamente, os planos *osculador, normal e rectificador*.



Plano osculador

- O plano que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{N}(t)$ chama-se *plano osculador*. É o plano que mais se aproxima da curva no ponto P e tem a equação vectorial:

$$X(u, v) = P + u\vec{T}(t) + v\vec{N}(t), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor binormal, $\vec{B}(t)$, é um vector normal ao plano osculador no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$(X - P) \cdot \vec{B}(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{B}(t) = P \cdot \vec{B}(t)$$

- Se a curva é plana, e não é uma linha recta, o plano osculador coincide com o plano que contém a curva.

Exemplo 19: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I = \vec{f}(0) = (2, 0, 0)$$

onde o versor da binormal, definido em (19), toma o valor:

$$\vec{B}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -1, 2)$$

Designando $X = (x, y, z)$, a equação cartesiana do plano osculador da curva no ponto I é:

$$X \cdot \vec{B}(0) = I \cdot \vec{B}(0) \Leftrightarrow -y + 2z = 0$$

Trata-se do plano que contém o eixo dos xx e intersecta o plano coordenado yOz segundo a recta $y = 2z$.

Plano normal

- O plano que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{N}(t)$ e $\vec{B}(t)$ chama-se *plano normal*; a sua equação vectorial é:

$$X(u, v) = P + u\vec{N}(t) + v\vec{B}(t), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor tangente, $\vec{T}(t)$, é um vector normal ao plano normal no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$(X - P) \cdot \vec{T}(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{T}(t) = P \cdot \vec{T}(t)$$

Exemplo 20: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I = \vec{f}(0) = (2, 0, 0)$$

onde o versor da tangente, definido em (15), toma o valor:

$$\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$$

Designando $X = (x, y, z)$, a equação cartesiana do plano normal da curva no ponto I é:

$$X \cdot \vec{T}(0) = I \cdot \vec{T}(0) \Leftrightarrow 2y + z = 0$$

Trata-se do plano que contém o eixo dos xx e intersecta o plano coordenado yOz segundo a recta $z = -2y$.

Plano rectificador

- O plano que passa no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva C e é gerado pelos versores $\vec{T}(t)$ e $\vec{B}(t)$ chama-se *plano rectificador*, a sua equação vectorial é:

$$X(u, v) = P + u\vec{T}(t) + v\vec{B}(t), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

- Dado que o versor normal, $\vec{N}(t)$, é um vector normal ao plano rectificador no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$, a equação cartesiana deste plano é dada por:

$$(X - P) \cdot \vec{N}(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{N}(t) = P \cdot \vec{N}(t)$$

Exemplo 21: Seja o ponto inicial da hélice circular do exemplo 5

$$I = \vec{f}(0) = (2, 0, 0)$$

onde o versor da normal, definido em (18), toma o valor:

$$\vec{N}(0) = (-1, 0, 0) = -\vec{i}$$

Designando $X = (x, y, z)$, a equação cartesiana do plano rectificador da curva no ponto I é:

$$X \cdot \vec{N}(0) = I \cdot \vec{N}(0) \Leftrightarrow x = 2$$

Trata-se do plano paralelo ao plano coordenado yOz e que é tangente à curva no ponto I .

Segunda derivada do vector de posição

- A expressão (12) permite apresentar o vector tangente sob a forma:

$$\vec{r}'(t) = \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}(t), \text{ se } \|\vec{r}'(t)\| \neq 0$$

Assim, pode-se concluir que o vector tangente pode variar, ao longo da curva C , de duas maneiras distintas:

- i) Em direcção – relativa à variação do versor $\vec{T}(t)$;
 - ii) Na sua norma – relativa à variação da função escalar $\|\vec{r}'(t)\|$.
- A taxa de variação do vector tangente, $\vec{r}'(t)$, é medida, em termos globais, através da sua derivada, ou seja, através da função vectorial $\vec{r}''(t)$.

Teorema 12: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$. Se $\|\vec{r}'(t)\| \neq 0$, então:

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}'(t)$$

ou ainda, recorrendo a (11),

$$\vec{r}''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t) + \|\vec{r}'(t)\| \|\vec{T}'(t)\| \vec{N}(t) \quad (20)$$

- A equação (20) mostra que o vector $\vec{r}''(t)$ pode ser expresso, em cada ponto da curva C , através da soma de duas componentes que são ortogonais entre si, isto é, uma *componente tangencial* e uma *componente normal*.

- A *componente tangencial*, definida por

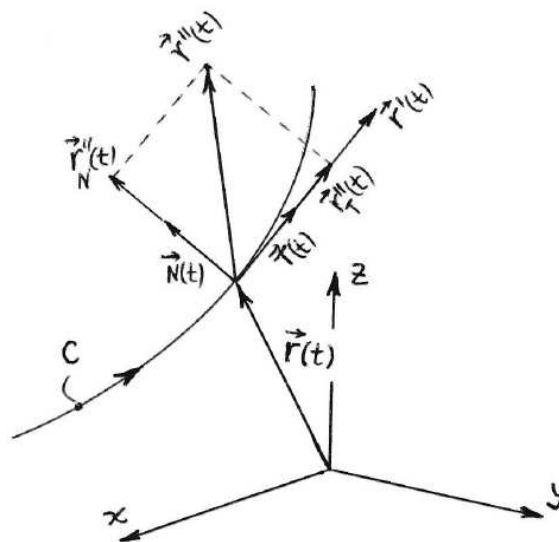
$$\vec{r}_T''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t)$$

é paralela ao versor $\vec{T}(t)$ e mede a variação da norma do vector tangente; não sendo nula, terá o mesmo sentido de $\vec{T}(t)$ se $\|\vec{r}'(t)\|' > 0$ e o sentido oposto se $\|\vec{r}'(t)\|' < 0$.

- A *componente normal*, definida por

$$\vec{r}_N''(t) = \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}'(t) = \|\vec{r}'(t)\| \|\vec{T}'(t)\| \vec{N}(t)$$

é paralela ao versor $\vec{N}(t)$ e mede a variação de direcção do vector tangente; não sendo nula, terá sempre o mesmo sentido de $\vec{N}(t)$, já que $\|\vec{r}'(t)\| \|\vec{T}'(t)\| > 0$.



- Se a curva não é uma linha recta, então $\vec{r}_N''(t) \neq \vec{0}$; caso contrário, obtém-se $\vec{r}''(t) = \vec{r}_T''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t)$, já que $\vec{T}'(t) = \vec{0}$.

Exemplo 22: Seja a hélice circular do exemplos 5 e parametrizada em (3). Tendo em atenção (13) conclui-se que:

$$\vec{f}_T''(t) = \|\vec{f}'(t)\|' \vec{T}(t) = 0 \vec{T}(t) = (0,0,0)$$

Além disso, recorrendo a (14) e (17), resulta:

$$\vec{f}_N''(t) = \|\vec{f}'(t)\| \vec{T}'(t) = 2(-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

Derivando (13)

$$\vec{f}''(t) = (-2\cos(t), -2\sin(t), 0) \quad (21)$$

obtém-se, tal como era de prever:

$$\vec{f}''(t) = \vec{f}_N''(t)$$

Neste caso o vector $\vec{f}''(t)$ tem, em cada ponto da curva, a direcção e o sentido do versor $\vec{N}(t)$ e mede apenas a variação de direcção do vector tangente.

Teorema 13: Seja a curva diferenciável, C , parametrizada por $\vec{r}(t)$.

i) Se $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ e $\vec{T}'(t) \neq \vec{0}$, então:

$$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{T}'(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{T}'(t)\|}$$

ii) Se $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}''(t)$ são vectores não nulos e não paralelos, então:

$$B(t) = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|} \quad (22)$$

- Sendo $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ um vector normal ao plano osculador no ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da curva, a equação cartesiana deste plano pode ainda ser dada por:

$$(X - P) \cdot \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = 0 \Leftrightarrow X \cdot \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = P \cdot \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$$

Exemplo 23: Seja a hélice circular do exemplo 5. Atendendo a (13), (21) e (22) resulta

$$\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t) = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sin(t) & 2\cos(t) & 1 \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = 2(\sin(t), -\cos(t), 2)$$

$$\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\| = 2\sqrt{5}$$

$$\vec{B}(t) = \frac{\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)}{\|\vec{f}'(t) \times \vec{f}''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sin(t), -\cos(t), 2)$$

confirmando-se o resultado encontrado em (19).

Exemplo 24: Em relação à circunferência do exemplo 14 e parametrizada em (11) obtém-se

$$\vec{r}'(t) = -a\sin(t)\vec{i} + a\cos(t)\vec{j} + 0\vec{k} = a(-\sin(t), \cos(t), 0), \quad \|\vec{r}'(t)\| = a$$

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = (-\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$\vec{T}'(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0), \quad \|\vec{T}'(t)\| = 1$$

$$\vec{N}(t) = \vec{T}'(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$\vec{r}''(t) = a(-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$\vec{r}_T''(t) = \|\vec{r}'(t)\|' \vec{T}(t) = 0 \vec{T}(t) = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_N''(t) = \|\vec{r}'(t)\| \vec{T}'(t) = \vec{r}''(t) = a(-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = a^2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = a^2 (0, 0, 1)$$

$$\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\| = a^2$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|} = (0, 0, 1) = \vec{k} \end{aligned}$$

Neste caso o plano osculador é constante em todos os pontos da circunferência e tem a equação $z=0$, sendo coincidente com o plano coordenado xOy , plano onde está situada toda a curva.

Por exemplo, no ponto inicial da curva $I = \vec{r}(0) = (a, 0, 0)$ tem-se

$$\vec{T}(0) = (0, 1, 0), \quad \vec{N}(0) = (-1, 0, 0)$$

pelo que, neste ponto, o plano normal tem a equação $y=0$ (plano coordenado xOz) e o plano rectificador tem a equação $x=a$, sendo um plano estritamente paralelo ao plano coordenado yOz .