$\vec{v}_{\mathrm{cm}} = \dfrac{1}{m}\int \vec{v}\,\mathrm{d}\,m$ $\quad\vec{a}_{\mathrm{cm}} = \dfrac{1}{m}\int \vec{a}\,\mathrm{d}\,m$ $\quad\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\,\vec{a}_{\mathrm{cm}}$ $\quad\sum_{i=1}^{n} M_{z,i} = I_z\,\alpha$

$I_z = \int R^2\,\mathrm{d}\,m$

6. Trabalho e energia

$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}\,s$ $\quad W_{12} = E_{\mathrm{c}}(2) - E_{\mathrm{c}}(1)$ $\quad E_{\mathrm{c}} = \dfrac{1}{2}m\,v_{\mathrm{cm}}^2 + \dfrac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\,\omega^2$ $\quad U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$

$W_{12} = U(1) - U(2)$ $\quad U_{\mathrm{g}} = m\,g\,z$ $\quad U_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}k\,s^2$ $\quad E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + U$

$\int_{s_1}^{s_2} F_{\mathrm{t}}^{\mathrm{nc}}\,\mathrm{d}\,s = E_{\mathrm{m}}(2) - E_{\mathrm{m}}(1)$ $\quad\Omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 2\,\pi\,f$ $\quad s = A\,\sin(\Omega\,t + \phi_0)$ $\quad E_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{2}m\,v^2 + \dfrac{1}{2}k\,s^2$

7. Sistemas dinâmicos

$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ $\quad\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ $\quad\vec{u} = f_1(x_1, x_2)\,\hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\hat{e}_2$ $\quad\ddot{x} = f(x, \dot{x})$

$y = \dot{x}$ $\quad\vec{u} = y\,\hat{\imath} + f(x, y)\,\hat{\jmath}$

Sistemas conservativos:

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$ $\quad f_1 = \dfrac{\partial H}{\partial x_2}$ $\quad f_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}$

Ponto de equilíbrio: $\vec{u} = \vec{0}$ (estável ou instável).

Ciclo: curva fechada no espaço de fase.

Órbita homoclínica: começa e termina no mesmo ponto de equilíbrio instável.

Órbita heteroclínica: liga vários pontos de equilíbrio instável.

8. Mecânica lagrangiana

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dfrac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial q_j} + \dfrac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j$ $\quad Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dfrac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial E_{\mathrm{c}}}{\partial q_j} + \dfrac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda\,\dfrac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j$ $\quad\lambda\,\dfrac{\partial f}{\partial q_j}$ = força de ligação j

9. Sistemas lineares

$\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{A}\,\vec{r}$ $\quad\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

Valores próprios: $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Estabilidade
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio repulsivo	instável
1 real, negativo	nó impróprio atrativo	estável

10. Sistemas não lineares

Matriz jacobiana: $J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

(Em cada ponto de equilíbrio é a matriz da aproximação linear do sistema.)

Energia Potencial Elástica:

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2}k\,s^2}$$

$$|F_e| = k\,s$$

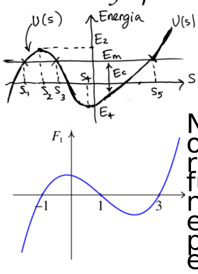
Forças conservativas:

$$\boxed{F_t^c = -\frac{dU}{ds}}$$

$$\boxed{U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

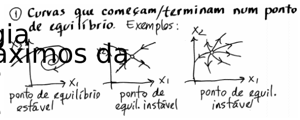
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m\,v_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\,\omega^2}$$

Análise gráfica.



No gráfico da Energia Potencial (U) os máximos da função são pontos de equilíbrio instáveis e os mínimos são pontos de equilíbrio estável.
Nos gáficos da Força tangencial os pontos de equilíbrio são as raízes da função (zeros da função). Se o zero vier do negativo para o positivo o equilíbrio é instável, se vier do positivo para o negativo o equilíbrio é estável.

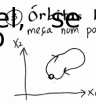
① Curvas que começam/terminam num ponto de equilíbrio. Exemplos:



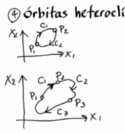
② Ciclos: curvas fechadas.

Um ciclo corresponde a uma solução do sistema que se repete indefinidamente no tempo: oscilação.
Dentro do ciclo deve haver um ponto de equilíbrio, estável ou instável.

③ Órbitas homoclínicas: curva que começa num ponto de equilíbrio e termina no mesmo ponto. O ponto de equilíbrio é instável.
Não corresponde a uma oscilação, porque não se repete no tempo. Quando o sistema se aproxima do ponto de equilíbrio nunca chega a esse ponto.



④ Órbitas heteroclínicas: sequência de n curvas que ligam n pontos de equilíbrio (instável) C_1 começa no primeiro ponto e termina no ponto P_2, C_2 vai de P_2 a $P_3, \dots, C_n$ vai de P_n até P_1.



Cada curva C_i é uma solução diferente.

SISTEMAS AUTÓNOMOS

São os sistemas (com movimento de translação para usar um grau de liberdade, mas logo será generalizado) em que a força resultante não depende explicitamente do tempo:

$F_t = f(s, v)$ como s e v são funções do tempo, F_t dependerá implicitamente de t.

SISTEMAS CONSERVATIVOS

São os sistemas em que E_m permanece constante (as forças não conservativas não realizam trabalho)

O trabalho da força resultante, no centro de massa do corpo, é igual ao aumento da energia cinética de translação

1. Modelo de Malthus

$\frac{f(x,t)}{x} = a$ = constante positiva

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x,t) = a\,x$ (EDO de variáveis separáveis)

$\Rightarrow \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = \int_0^t a\,dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = at$

$\boxed{x(t) = x_0 e^{at}}$ crescimento exponencial da população

2. Modelo logístico. Também chamado de Verhulst
A taxa de natalidade é constante, a, mas a taxa de mortalidade aumenta diretamente proporcional à população.

SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

$$\begin{cases}\dot{x} = x(a - cy)\\ \dot{y} = y(bx - d)\end{cases}$$

é um sistema predador-presa em que x são presas e y predadores

(a, b, c e d positivas)

- A população de presas aumenta exponencialmente se não existirem predadores.
- A população de predadores diminui até zero se não existirem presas.

Um modelo mais realista, de **Holling-Tanner**, tem apenas um ciclo limite:

$$\dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7+7x} \qquad \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1 - \frac{y}{2x}\right)$$

x = presas, y = predadores

Equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos y = 3y$$

pode ser escrita como sistema dinâmico autónomo:

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx} = u\\ \frac{du}{dx} = 3y - yu^2 - \cos y\end{cases}$$

variáveis de estado: (y, u)
variável independente: x (em vez de t)

como $H(x_1, x_2) = C$. A condição necessária e suficiente para que um sistema seja conservativo é:

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0}$$

divergência da velocidade de fase nula em todo o espaço de fase.

Unidade SI de trabalho e energia

1 joule = 1 J = 1 N·m = 1 kg·$\frac{m^2}{s^2}$

O trabalho realizado por uma força conservativa, entre dois pontos P e Q é igual à energia potencial inicial, U_P, menos a energia potencial final, U_Q.

Teorema do trabalho e a energia mecânica.
O trabalho das forças não conservativas é igual ao aumento da energia mecânica do corpo.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \dots n$$

Usar quando Qj representa a generalizada que resulta da contribuição de todas (conserv e não conservativas)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, \dots n$$

Usar quando Qj representa força generalizada que resulta da contribuição apenas das forças não conservativas

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda\frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j}$$

Usar quando é preciso calcular força de ligação

$$\boxed{\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0}$$

Sistema conservativo -> traço da matriz = 0
Sistema linear -> matriz jacobiana constante

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Equilíbrio
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio	instável
1 real, negativo	nó impróprio	estável

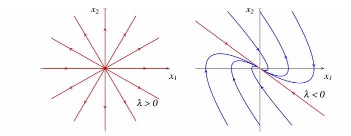
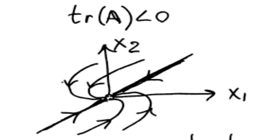


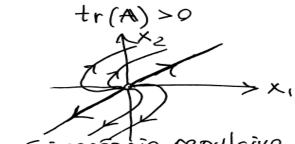
Figura 9.9: Retratos de fase de um nó próprio instável (esquerda) e de um nó impróprio estável (direita).

tr(A)<0

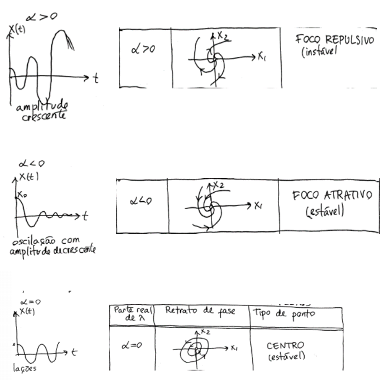


nó impróprio atrativo (estável)

tr(A)>0



nó impróprio repulsivo (instável)



CICLOS LIMITE

Nos limites $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$, as curvas de evolução podem aproximar-se assimtoticamente de um ponto de equilíbrio ou também de uma curva fechada (ciclo).

Coordenadas polares.
Em alguns casos, a mudança de variáveis para um ponto de equilíbrio ajuda a descobrir ciclos limite. A derivada $\dot{r}$ igual a zero indica a presença de ciclos limite.
No caso do exemplo no início da aula, em que a velocidade de fase está na variável u e o ponto de equilíbrio é a origem, as coordenadas polares são:

[xp, yp]: [r*cos(q), r*sin(q)]$

definem-se as derivadas de r e q:

gradef(r,t,v)$
gradef(q,t,w)$

e substituem-se as coordenadas polares nas duas equações de evolução:

subst([x=xp, y=yp], [diff(xp,t)=u[1], diff(yp,t)=u[2]]);

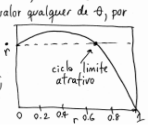
e resolvem-se essas duas novas equações para encontrar expressões para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$:

solve(%, [v,w]);
trigsimp(%); $\rightarrow \dot{\theta} = 1$, $\dot{r} = r^3(\cos^2\theta - 3) + r$

o gráfico de $\dot{r}$ para um valor qualquer de θ, por exemplo $\theta = 0$:

plot2d(r^3*(1-3)+r, [r,0,1]);

mostra que há um ciclo limite entre r=0.6 e r=0.8, onde $\dot{r} = 0$.



SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

$$\begin{cases}\dot{x} = x(a - cy)\\ \dot{y} = y(bx - d)\end{cases}$$

é um sistema predador-presa em que x são presas e y predadores

(a, b, c e d positivas)

- A população de presas aumenta exponencialmente se não existirem predadores.
- A população de predadores diminui até zero se não existirem presas.

O problema deste modelo é que as oscilações das populações podem ser desde valores quase nulos até valores muito elevados

istemas lineares têm um único ponto de equilíbrio origem.

Um sistema não linear com n pontos de equilíbrio pode ser aproximado, nas vizinhanças desses pontos, por n sistemas lineares diferentes

O ciclo limite é atrativo, porque para r menor do que no ciclo limite r aumenta ($\dot{r} > 0$) e para valores superiores r diminui ($\dot{r} < 0$).

r=0 também dá $\dot{r} = 0$, porque r=0 é ponto de equilíbrio.
Em casos mais complicados, o gráfico de $\dot{r}$ em função de r, para algum valor de θ, pode ser, por exemplo:

No exemplo da página anterior, $\dot{\theta} = 1$ mostra que o estado desloca-se no sentido anti-horário, com velocidade angular constante.
As curvas de evolução são oscilações com frequência angular $\Omega = 1$ e amplitude crescente, dentro do ciclo limite, ou decrescente fora do ciclo limite.

Comandos fixes

eigenvectors(matriz)

eigenvalues(matriz)

coefmatrix(lista_equacoes, lista_variaveis)

plotdf(lista_equacoes, lista_variaveis, (opcional) intervalo variavel) - usar trajectory at para ver evolução

jacobian(lista_equacoes, lista_variaveis)

rk(lista_equacoes, lista_variaveis, lista_valores_inicias_variaveis, [variavel_independente,valor_inicial,valor_final,incremento])

Cenas:

Numa maquina de atwood(dois cilindros ligados por roldana)

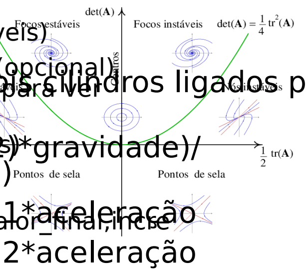
aceleração:((massa1-massa2)*gravidade)/(massa1+massa2+roldana/2)

T1:massa1*gravidade-massa1*aceleração

T2:massa2*gravidade-massa2*aceleração

Frequência angular (Ω) = parte imaginária de λ

$$\Omega = 2\pi f \quad \left(f = \text{frequência} = \frac{1}{\text{período}}\right)$$



SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

$x(t)$ e $y(t)$ são as populações das duas espécies, que interagem entre si:

$$\begin{cases}\dot{x} = f(x,y)\\ \dot{y} = g(x,y)\end{cases}$$

As duas funções f e g deverão ter as seguintes propriedades:

$$f(0,y) = g(x,0) = 0$$

A matriz jacobiana é:

$$\mathbb{J}(x,y) = \begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = aumento/diminuição próprio da 1ª espécie.

$\frac{\partial g}{\partial y}$ = aumento/diminuição próprio da 2ª espécie.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = aumento/diminuição da 1ª espécie devido à 2ª.

$\frac{\partial g}{\partial x}$ = aumento/diminuição da 2ª espécie devido à 1ª.

1. Sistema predador-presa. $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ com sinais diferentes

2. Sistema com cooperação. $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ positivas

3. Sistema com competição. $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ negativas