Dinâmica e Sistemas Dinâmicos

Formulário

1. Cinemática

$$v = \frac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, t} \qquad a_\mathrm{t} = \frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, t} \qquad a_\mathrm{t} = v\, \frac{\mathrm{d}\, v}{\mathrm{d}\, s} \qquad v_x = \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\, v_x}{\mathrm{d}\, t} \qquad a_x = v_x\, \frac{\mathrm{d}\, v_x}{\mathrm{d}\, x}$$

2. Cinemática vetorial

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b\, \cos\theta = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z \qquad a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \qquad \vec{r} = x\, \hat{\imath} + y\, \hat{\jmath} + z\, \hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\, \vec{r}}{\mathrm{d}\, t} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\, \vec{v}}{\mathrm{d}\, t} \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}\, \mathrm{d}\, t \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\, \mathrm{d}\, t$$

Movimento relativo:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{r}\,'_\mathrm{O} \qquad \vec{v}\,' = \vec{v} + \vec{v}\,'_\mathrm{O} \qquad \vec{a}\,' = \vec{a} + \vec{a}\,'_\mathrm{O}$$

3. Movimento curvilíneo

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = a\, b\, \sin\theta\, \hat{n} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad \vec{v} = \dot{s}\, \hat{e}_\mathrm{t}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\, \hat{e}_\mathrm{t} + \frac{v^2}{R}\, \hat{e}_\mathrm{n}$$

$$a^2 = a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2$$

Movimento circular:

$$s = R\, \theta \qquad v = R\, \omega \qquad a_\mathrm{t} = R\, \alpha$$

Rotação plana:

$$\vec{\omega} = \omega\, \hat{e}_\mathrm{axis} \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} \qquad \omega = \frac{\mathrm{d}\, \theta}{\mathrm{d}\, t}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\, \omega}{\mathrm{d}\, t} \qquad \alpha = \omega\, \frac{\mathrm{d}\, \omega}{\mathrm{d}\, \theta}$$

4. Mecânica vetorial

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\, \mathrm{d}\, t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \qquad \vec{p} = m\, \vec{v} \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\, \vec{a} \qquad \vec{P} = m\, \vec{g}$$

$$F_\mathrm{e} \le \mu_\mathrm{e}\, R_\mathrm{n} \qquad F_\mathrm{c} = \mu_\mathrm{c}\, R_\mathrm{n}$$

Esfera num fluido:

$$N_\mathrm{R} = r\, v \left(\frac{\rho}{\eta}\right) \qquad F_\mathrm{f} = 6\, \pi\, \eta\, r\, v \quad (N_\mathrm{R} < 1) \qquad F_\mathrm{f} = \frac{\pi}{4}\, \rho\, r^2\, v^2 \quad (N_\mathrm{R} > 10^3)$$

5. Dinâmica dos corpos rígidos

$$M_\mathrm{O} = F\, b \qquad \vec{M}_\mathrm{O} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad M_z = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \qquad \vec{r}_\mathrm{cm} = \frac{1}{m} \int \vec{r}\, \mathrm{d}\, m$$

$\vec{v}_{\text{cm}} = \dfrac{1}{m}\int \vec{v}\,\mathrm{d}\,m$ $\quad$ $\vec{a}_{\text{cm}} = \dfrac{1}{m}\int \vec{a}\,\mathrm{d}\,m$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\,\vec{a}_{\text{cm}}$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{n} M_{z,i} = I_z\,\alpha$

$I_z = \int R^2\,\mathrm{d}\,m$

6. Trabalho e energia

$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_{\text{t}}\,\mathrm{d}\,s$ $\quad$ $W_{12} = E_{\text{c}}(2) - E_{\text{c}}(1)$ $\quad$ $E_{\text{c}} = \dfrac{1}{2}m\,v_{\text{cm}}^2 + \dfrac{1}{2}I_{\text{cm}}\,\omega^2$ $\quad$ $U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$

$W_{12} = U(1) - U(2)$ $\quad$ $U_{\text{g}} = m\,g\,z$ $\quad$ $U_{\text{e}} = \frac{1}{2}k\,s^2$ $\quad$ $E_{\text{m}} = E_{\text{c}} + U$

$\int_{s_1}^{s_2} F_{\text{t}}^{\text{nc}}\,\mathrm{d}\,s = E_{\text{m}}(2) - E_{\text{m}}(1)$ $\quad$ $\Omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 2\,\pi\,f$ $\quad$ $s = A\,\sin(\Omega\,t + \phi_0)$ $\quad$ $E_{\text{m}} = \dfrac{1}{2}m\,v^2 + \dfrac{1}{2}k\,s^2$

7. Sistemas dinâmicos

$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ $\quad$ $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ $\quad$ $\vec{u} = f_1(x_1, x_2)\,\hat{e}_1 + f_2(x_1, x_2)\,\hat{e}_2$ $\quad$ $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$

$y = \dot{x}$ $\quad$ $\vec{u} = y\,\hat{\imath} + f(x, y)\,\hat{\jmath}$

Sistemas conservativos:

$\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$ $\quad$ $f_1 = \dfrac{\partial H}{\partial x_2}$ $\quad$ $f_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}$

Ponto de equilíbrio: $\vec{u} = \vec{0}$ (estável ou instável).

Ciclo: curva fechada no espaço de fase.

Órbita homoclínica: começa e termina no mesmo ponto de equilíbrio instável.

Órbita heteroclínica: liga vários pontos de equilíbrio instável.

8. Mecânica lagrangiana

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dfrac{\partial E_{\text{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial E_{\text{c}}}{\partial q_j} + \dfrac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j$ $\quad$ $Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dfrac{\partial E_{\text{c}}}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial E_{\text{c}}}{\partial q_j} + \dfrac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda\,\dfrac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j$ $\quad$ $\lambda\,\dfrac{\partial f}{\partial q_j}$ = força de ligação j

9. Sistemas lineares

$\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \mathbf{A}\,\vec{r}$ $\quad$ $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad$ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

Valores próprios: $\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Estabilidade
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio repulsivo	instável
1 real, negativo	nó impróprio atrativo	estável

10. Sistemas não lineares

Matriz jacobiana: $J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

(Em cada ponto de equilíbrio é a matriz da aproximação linear do sistema.)

11. Ciclos limite e dinâmica populacional

Ciclo limite: Ciclo isolado no espaço de fase.

Sistemas de duas espécies:

$\dot{x} = f(x, y)$ $\dot{y} = g(x, y)$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = 0$ $\lim\limits_{y \to 0} g(x, y) = 0$

12. Sistemas caóticos

Conjunto limite positivo: $\omega(\Gamma)$ = onde se aproxima a curva Γ em $t \to \infty$

Conjunto limite negativo: $\alpha(\Gamma)$ = onde se aproxima a curva Γ em $t \to -\infty$

Divergência: $\nabla \cdot \vec{u} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}$

Teorema de Poincaré-Bendixson: Num sistema com apenas duas variáveis de estado, se existir $\alpha(\Gamma)$ ou $\omega(\Gamma)$, deverá ser um dos três casos segui

1. ponto de equilíbrio;
2. ciclo;
3. órbita homoclínica ou heteroclínica.

Com 3 ou mais variáveis de estado, um conjunto limite que não seja nenhum desses 3 casos é um **atrator estranho**.

Critério de Bendixson: Num sistema dinâmico com apenas duas variáveis de estado, se numa região simplesmente conexa
sempre positiva ou sempre negativa, nessa região não existem nem ciclos nem órbitas.