Energia Potencial Elástica:

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} k\, s^2}$$

$$|F_e| = k\, s$$

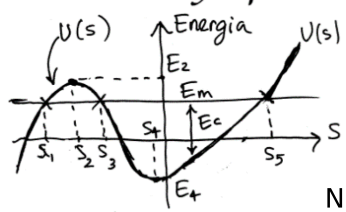
$$\boxed{F_t^c = -\frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,s}}$$

Forças conservativas:

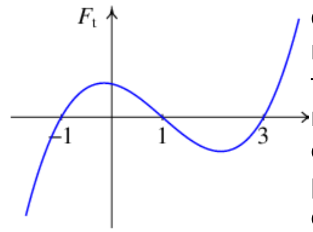
$$\boxed{U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m\, v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega^2}$$

Análise gráfica.

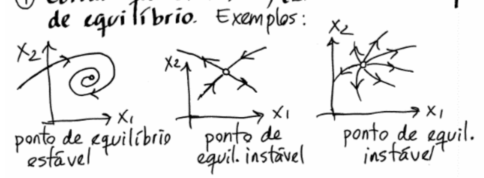


No gráfico da Energia Potencial (U) os máximos da função são pontos de equilíbrio instáveis e os mínimos são pontos de equilíbrio estável.

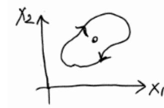


Nos gáficos da Força tangencial os pontos de equilíbrio são as raízes da função (zeros da função). Se o zero vier do negativo para o positivo o equilíbrio é instável, se vier do positivo para o negativo o equilíbrio é estável.

① **Curvas que começam/terminam num ponto de equilíbrio.** Exemplos:

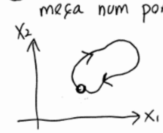


② **Ciclos:** curvas fechadas.



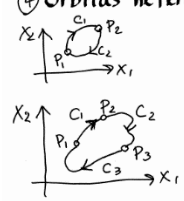
Um ciclo corresponde a uma solução do sistema que se repete indefinidamente no tempo: oscilação.
Dentro do ciclo deve haver um ponto de equilíbrio, estável ou instável.

③ **Órbitas homoclínicas:** curva que começa num ponto de equilíbrio e termina no mesmo ponto. O ponto de equilíbrio é instável.



Não corresponde a uma oscilação, porque não se repete no tempo. Quando o sistema se aproxima do ponto de equilíbrio nunca chega a esse ponto.

④ **Órbitas heteroclínicas:** sequência de n curvas que ligam n pontos de equilíbrio (instável) C_1 começa no primeiro ponto e termina no ponto P_2, C_2 vai de P_2 a $P_3, \ldots$, C_n vai de P_n até P_1.



Cada curva C_i é uma solução diferente.

SISTEMAS AUTÓNOMOS

São os sistemas (com movimento de translação) (para usar um grau de liberdade, mas logo será generalizado) em que a força resultante na depende explicitamente do tempo: $F_t = f(s, v)$ como s e v são funções do tempo, F_t dependerá implicitamente de t.

SISTEMAS CONSERVATIVOS

São os sistemas em que E_m permanece constante (as forças não conservativas não realizam trabalho)

1. Modelo de Malthus

$$\frac{f(x,t)}{x} = a = \text{constante positiva}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x,t) = a\,x \quad \text{(EDO de variáveis separáveis)}$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t a\,dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = at$$

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{at}}$$ crescimento exponencial da população

O trabalho da força resultante, no centro de massa do corpo, é igual ao aumento da energia cinética de translação

Equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos y = 3y$$

pode ser escrita como sistema dinâmico autónomo:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = u \\ \dfrac{du}{dx} = 3y - y\,u^2 - \cos y \end{cases}$$

variáveis de estado: (y, u)
variável independente: x (em vez de t)

2. Modelo logístico

. Também chamado de Verhulst
A taxa de natalidade é constante, a, mas a taxa de mortalidade aumenta diretamente proporcional à população.

como $H(x_1, x_2) = C$. A condição necessária e suficiente para que um sistema seja conservativo é:

$$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0}$$ divergência da velocidade de fase nula em todo o espaço de fase.

SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cy) \\ \dot{y} = y(bx - d) \end{cases}$$

$(a, b, c$ e d positivas$)$

é um sistema predador–presa em que x são presas e y predadores

- A população de presas aumenta exponencialmente se não existirem predadores.
- A população de predadores diminui até zero se não existirem presas.

Um modelo mais realista, de **Holling-Tanner**, tem apenas um ciclo limite:

$$\dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7 + 7x} \qquad \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1 - \frac{y}{2x}\right)$$

x = presas , y = predadores

Unidade SI de trabalho e energia

$$1 \text{ joule} = 1\,J = 1\,N \cdot m = 1\,kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$$

O trabalho realizado por uma força conservativa, entre dois pontos P e Q é igual à energia potencial inicial, U_P, menos a energia potencial final, U_Q.

Teorema do trabalho e a energia mecânica.
O trabalho das forças não conservativas é igual ao aumento da energia mecânica do corpo.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \ldots n$$

Usar quando Qj representa a força generalizada que resulta da contribuição de todas (conservativas e não conservativas)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, \ldots n$$

Usar quando Qj representa a força generalizada que resulta da contribuição apenas das forças não conservativas

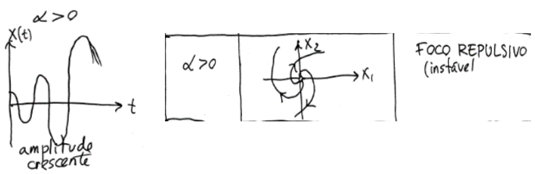
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda\,\frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j}$$

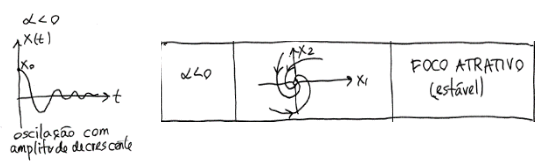
Usar quando é preciso calcular forças de ligação

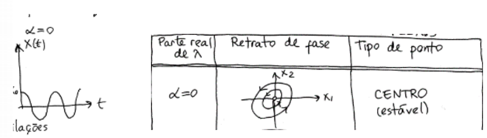
$$\boxed{\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\,\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0}$$

Sistema conservativo -> traço da matriz = 0
Sistema linear -> matriz jacobiana constante

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Equilíbrio
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio	instável
1 real, negativo	nó impróprio	estável







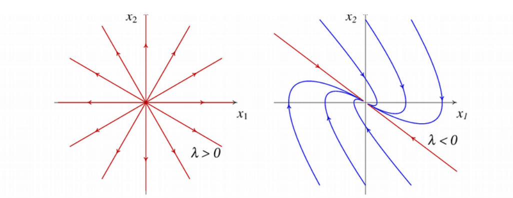
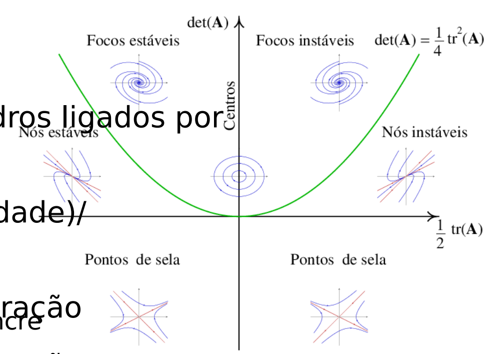


Figura 9.9: Retratos de fase de um nó próprio instável (esquerda) e de um nó impróprio estável (direita).

Frequência angular (Ω) = parte imaginária de λ

$$\Omega = 2\pi f \quad \left(f = \text{frequência} = \frac{1}{\text{período}}\right)$$



Comandos fixes

eigenvectors(matriz)

eigenvalues(matriz)

coefmatrix(lista_equacoes, lista_variaveis)

plotdf(lista_equacoes, lista_variaveis, (opcional) intervalo_variavel) - usar trajectory-at para ver evolução

jacobian(lista_equacoes,lista_variaveis)

rk(lista_equacoes, lista_variaveis, lista_valores_inicias_variaveis, [variavel_independente,valor_inicial,valor_final,incremento])

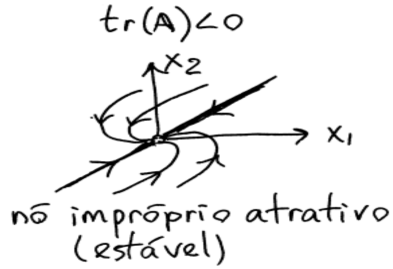
Cenas:

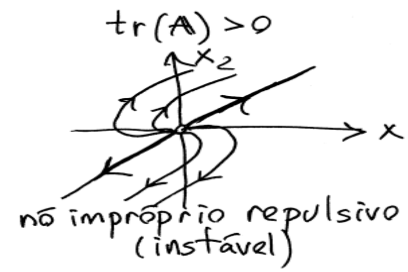
Numa máquina de atwood(dois cilindros ligados por roldana)

aceleração:((massa1-massa2)*gravidade)/(massa1+massa2+roldana/2)

T1:massa1*gravidade-massa1*aceleração

T2:massa2*gravidade-massa2*aceleração





CICLOS LIMITE

Nos limites $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$, as curvas de evolução podem aproximar-se assimtoticamente de um ponto de equilíbrio ou também de uma curva fechada (ciclo).

Coordenadas polares.

Em alguns casos, a mudança de variáveis para um ponto de equilíbrio ajuda a descobrir ciclos limite. A derivada $\dot{r}$ igual a zero indica a presença de ciclos limite.

No caso do exemplo no início da aula, em que a velocidade de fase está na variável u e o ponto de equilíbrio é a origem, as coordenadas polares são:

```
[xp, yp]: [r*cos(q), r*sin(q)]$
```

definem-se as derivadas de r e q:

```
gradef(r,t,v)$
gradef(q,t,w)$
```

e substituem-se as coordenadas polares nas duas equações de evolução:

```
subst([x=xp, y=yp], [diff(xp,t)=u[1], diff(yp,t)=u[2]]);
```

e resolvem-se essas duas novas equações para encontrar expressões para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$:

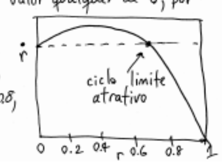
```
solve(%, [v,w]);
trigsimp(%);
```

$\longrightarrow \dot{\theta} = 1$, $\dot{r} = r^3(\cos^2\theta - 3) + r$

o gráfico de $\dot{r}$ para um valor qualquer de θ, por exemplo $\theta = 0$:

```
plot2d(r^3*(1-3)+r, [r,0,1]);
```

mostra que há um ciclo limite entre r=0.6 e r=0.8, onde $\dot{r} = 0$.



SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

x(t) e y(t) são as populações das duas espécies, que interagem entre si:
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

As duas funções f e g deverão ter as seguintes propriedades: $f(0,y) = g(x,0) = 0$

A matriz jacobiana é: $\mathbb{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = aumento/diminuição próprio da 1ª espécie.

$\frac{\partial g}{\partial y}$ = aumento/diminuição próprio da 2ª espécie.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = aumento/diminuição da 1ª espécie devido à 2ª.

$\frac{\partial g}{\partial x}$ = aumento/diminuição da 2ª espécie devido à 1ª.

SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cy) \\ \dot{y} = y(bx - d) \end{cases}$$
(a,b,c e d positivas)

é um sistema predador-presa em que x são presas e y predadores

- A população de presas aumenta exponencialmente se não existirem predadores.
- A população de predadores diminui até zero se não existirem presas.

O problema deste modelo é que as oscilações das populações podem ser desde valores quase nulos até valores muito elevados

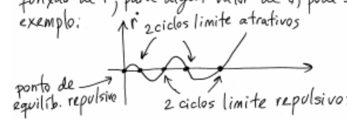
Sistemas lineares têm um único ponto de equilíbrio: origem.

Um sistema não linear com n pontos de equilíbrio pode ser aproximado, nas vizinhanças desses pontos, por n sistemas lineares diferentes

O ciclo limite é atrativo, porque para r menor do que no ciclo limite r aumenta ($\dot{r} > 0$) e para valores superiores r diminui ($\dot{r} < 0$).

r=0 também dá $\dot{r} = 0$, porque r=0 é ponto de equilíbrio.

Em casos mais complicados, o gráfico de $\dot{r}$ em função de r, para algum valor de θ, pode ser, por exemplo:



No exemplo da página anterior, $\dot{\theta} = 1$ mostra que o estado desloca-se no sentido anti-horário, com velocidade angular constante.

As curvas de evolução são oscilações com frequência angular $\Omega = 1$ e amplitude crescente, dentro do ciclo limite, ou decrescente fora do ciclo limite.

1. **Sistema predador-presa.** $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ com sinais diferentes
2. **Sistema com cooperação.** $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ positivas
3. **Sistema com competição.** $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ negativas