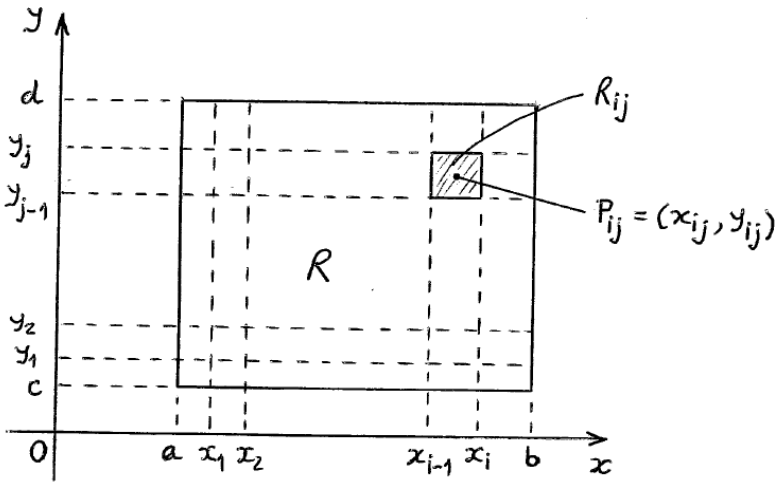
# INTEGRAIS DUPLOS

## Integral duplo sobre um rectângulo

- Seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis, contínua na região rectangular (fechada), $R$, do plano $xOy$, dada por:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \le x \le b \ , \ c \le y \le d\right\} = [a,b] \times [c,d]$$




Pretende definir o *integral duplo* de $f(x,y)$ sobre $R$:

$$\iint_R f(x,y)dxdy$$

Considere-se uma *partição* para $[a,b]$

$$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\} \text{ , tal que } a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$$

e uma *partição* para $[c,d]$:

$$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \text{ , tal que } c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d$$

O conjunto resultante do *produto cartesiano* de $P_1$ e $P_2$

$$P = P_1 \times P_2 = \left\{ (x_i, y_j) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_i \in P_1 \ , \ y_j \in P_2 \right\} \tag{1}$$

é designada por *partição P para a região R*.
A partição $P$ permite definir, sobre a região $R$, $m \times n$ rectângulos elementares (que não se sobrepõem)

$$R_{ij} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_{i-1} \le x \le x_i \ , \ y_{j-1} \le y \le y_j \right\} =$$

$$= [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \ , \ (i = 1, \ldots, m \ ; \ j = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

que, no seu conjunto, é designada por *partição P para a região R*.

- Chama-se *diâmetro da partição P para a região R* ao comprimento, $\delta_P$, da maior diagonal de $R_{ij}$, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

- Seja $\Delta A_{ij}$ a área de cada rectângulo $R_{ij}$, para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$, e selecione-se, em cada um destes rectângulos, um ponto arbitrário $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$.
Considerando o valor da função $f(x, y)$ em cada ponto $P_{ij}$, $f(x_{ij}, y_{ij})$, formem-se as *somas duplas de Riemann* relativas à partição $P$:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \ \Delta A_{ij} \tag{3}$$

Assim, se para toda a partição $P$ para a região $R$ o limite das somas (3) existir e for finito, sendo independente da escolha de $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$, esse limite é designado por *integral duplo de* $f(x, y)$ *sobre a região R*, escrevendo-se:

$$\iint_R f(x, y) dx dy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x, y) dA \, .$$

Nestas condições, verifica-se:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{\delta_P \to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij},y_{ij})\ \Delta A_{ij}\right) \tag{4}$$

e $f(x,y)$ diz-se uma *função integrável em R*.
Sendo $\delta_P$ o diâmetro de uma partição *P* para a região *R*, quando se considera em (4) o limite, quando $\delta_P$ tende para zero, está-se a admitir que a partição *P* é formada por um número crescente de rectângulos elementares, $R_{ij}$, cada um deles de área cada vez menor, ou seja:

$$\text{quando } \delta_P \to 0,\ \Delta A_{ij} \to 0.$$

## O integral duplo como o volume de um sólido

- Seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis, contínua na região rectangular $R = [a,b]\times[c,d]$, do plano *xOy*, e não negativa, isto é:

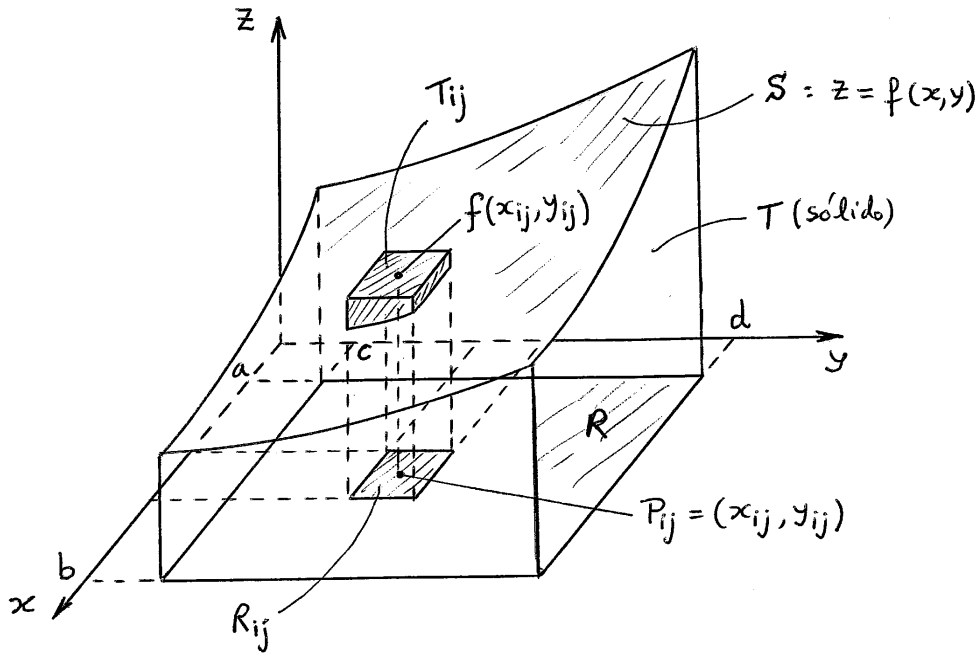
$$f(x,y) \geq 0\ ,\ \forall (x,y)\in R$$

Considere-se o sólido, *T*, limitado inferiormente pela região *R* e superiormente pela superfície, *S*, de equação $z = f(x,y)$, ou seja:

$$T = \left\{(x,y,z)\in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \leq z \leq f(x,y)\ ,\ (x,y)\in R\right\}$$

Tal como anteriormente, seja a partição *P*, apresentada em (1) para a região *R*, de que resulta a divisão desta região nos $m\times n$ rectângulos elementares, $R_{ij}$, definidos em (2).

Seja $f(x_{ij},y_{ij})$ o valor da função $f(x,y)$ num ponto arbitrário $P_{ij}=(x_{ij},y_{ij})$ situado no interior de cada rectângulo $R_{ij}$.




Considere-se o paralelepípedo (elementar), $T_{ij}$, de base $R_{ij}$ e altura $f(x_{ij},y_{ij})$; o seu volume (elementar), $\Delta V_{ij}$, tem o valor:

$$\Delta V_{ij} = f(x_{ij},y_{ij})\ \Delta A_{ij}$$

em que $\Delta A_{ij}$ é a área (elementar) do rectângulo $R_{ij}$.
A soma dos volumes dos paralelepípedos $T_{ij}$ $(i=1,\ldots,m\ ;\ j=1,\ldots,n)$ traduz uma aproximação do volume, $V$, do sólido $T$, ou seja:

$$V \cong \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta V_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij},y_{ij})\ \Delta A_{ij}$$

Quando o diâmetro, $\delta_P$, da partição $P$ tende para zero, tendo em atenção a equação (4), resulta:

$$V = \lim_{\delta_P\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta V_{ij} = \lim_{\delta_P\to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij},y_{ij})\ \Delta A_{ij}\right)$$

**Teorema 1**: Seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis, não negativa e integrável numa região rectangular *R* do plano *xOy*.
Então o volume, *V*, do sólido limitado inferiormente pela região *R*, superiormente pela superfície de equação $z = f(x,y)$ e de faces laterais paralelas aos planos coordenados *xOz* e *yOz*, é dado por:

$$V = \iint_R f(x,y)dxdy \tag{5}$$

- Se $f(x,y) \leq 0$ , $\forall(x,y) \in R$, a equação (5) pode ser reescrita sob a forma

  $$V = \iint_R -f(x,y)dxdy$$

  representando, neste caso, o volume do sólido limitado superiormente pela região *R*, inferiormente pela superfície de equação $z = f(x,y)$ e de faces laterais paralelas aos planos coordenados *xOz* e *yOz*.

**Exemplo 1**: O integral duplo

$$\iint_R 1\, dxdy = \iint_R dxdy$$

exprime o volume (em unidades cúbicas) de um sólido de altura igual a 1 (constante) e de base *R* (região do plano *xOy*). Conclui-se, então, que o seu valor é (em unidade quadradas) igual à área, *A*(*R*), da região *R*, isto é:

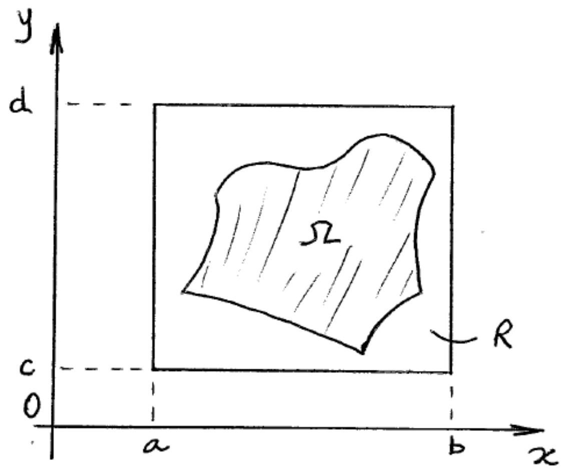
$$A(R) = \iint_R dxdy$$

- O cálculo do integral duplo usando a equação (4) é, na maioria das situações, muito complexo. Assim, irá apresentar-se um método simples e eficiente, designado por *método dos integrais iterados*, para o cálculo do integral duplo sobre uma região que não é, de um modo geral, rectangular.

## Integral duplo sobre uma região limitada do plano

- Considere-se uma região fechada e limitada, $\Omega$, do plano *xOy* e seja $f(x,y)$ uma função real a duas variáveis contínua em $\Omega$. Pretende-se definir o integral duplo:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$$




Assim, encerre-se $\Omega$ numa região rectangular $R=[a,b]\times[c,d]$ (com lados paralelos aos eixos coordenados) e seja a função real a duas variáveis $f^*(x,y)$ definida por

$$f^*(x,y)=\begin{cases} f(x,y) \text{ , se } (x,y)\in\Omega \\ 0 \text{ , se } (x,y)\in R\setminus\Omega \end{cases} \tag{6}$$

que resulta da extensão de $f(x,y)$ à região *R*.

A função $f^*(x,y)$ é limitada na região *R* e é contínua em todos os pontos de *R*, excepto, possivelmente, em pontos que pertencem à fronteira de $\Omega$.

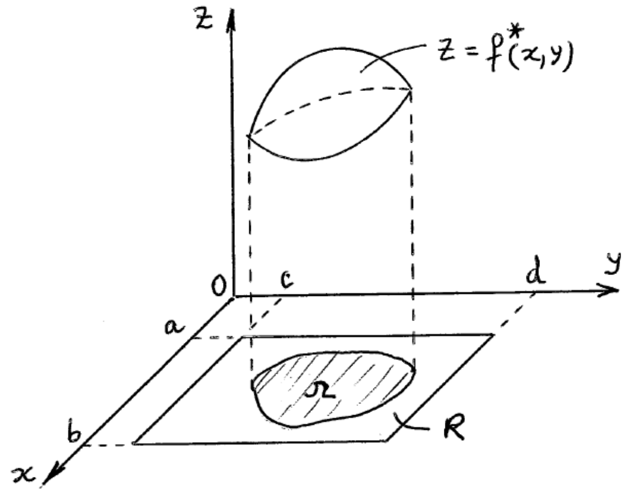
Apesar da possível existência de descontinuidades, pode-se mostrar que $f^*(x,y)$ é ainda integrável em *R*, pelo que existe o integral duplo

$$\iint_R f^*(x,y)dxdy$$

ou seja, atendendo a (6),

$$\iint_R f^*(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x,y)dxdy \tag{7}$$

- Se $f(x,y)$ é não negativa em $\Omega$, então $f^*(x,y)$ é não negativa em *R*; assim, o integral duplo (7) dá o volume do sólido limitado superiormente pela superfície de equação $z = f^*(x,y)$ e inferiormente pela região *R*.




No entanto, como $f^*(x,y) = 0$ nos pontos de *R* exteriores a $\Omega$, o volume do sólido na região $R \setminus \Omega$ é nulo, pelo que o integral

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

dá *o volume do sólido T*, $V(T)$, limitado superiormente pela superfície de equação $z = f(x,y)$ e inferiormente pela região $\Omega$, isto é:

$$V(T) = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

- Tal como se mostrou no exemplo 1, o integral duplo

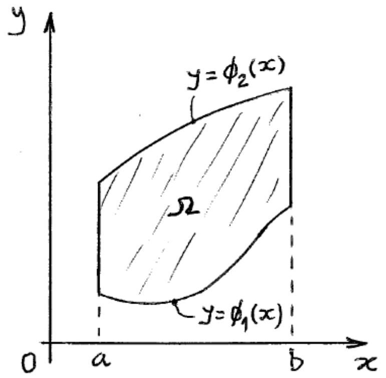
$$\iint_\Omega 1\, dxdy = \iint_\Omega dxdy$$

dá o volume (em unidade cúbicas) de um sólido de altura igual a 1 e de base $\Omega$; este valor (em unidade quadradas) é igual à área, $A(\Omega)$, de $\Omega$, ou seja:

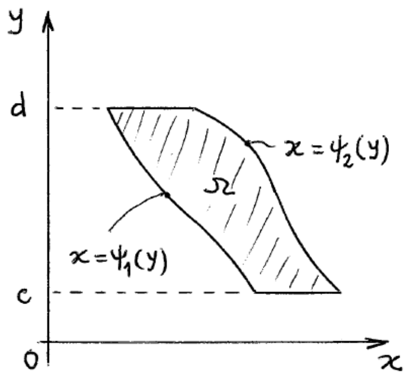
$$A(\Omega) = \iint_\Omega dxdy$$

## Cálculo do integral duplo sobre uma região

- O cálculo do integral duplo sobre uma região fechada e limitada, $\Omega$, do plano *xOy* pode ser reduzido ao cálculo do integral sobre um de dois tipos de regiões básicas: região *Tipo I*, ou *verticalmente simples*, e região *Tipo II*, ou *horizontalmente simples*.




**Tipo I**




**Tipo II**

- Se $\Omega$ é uma região do *Tipo I*, a sua projecção sobre o eixo dos *xx* é o intervalo fechado $[a,b]$, pelo que

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \le x \le b \ , \ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\right\} \tag{8}$$

em que $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ são funções contínuas.

Neste caso, tem-se:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right)dx \tag{9}$$

Em primeiro lugar calcula-se

$$A(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \tag{10}$$

integrando a função $f(x,y)$ relativamente à variável *y* entre $y = \phi_1(x)$ e $y = \phi_2(x)$. O resultado de (10) é uma função na variável *x*, $A(x)$, que deverá ser integrada relativamente a *x* entre $x = a$ e $x = b$.

- Se $\Omega$ é uma região do *Tipo II*, a sua projecção sobre o eixo dos *yy* é o intervalo fechado $[c,d]$, pelo que

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ c \le y \le d \ , \ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \right\}$$

em que $\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ são funções contínuas.
Neste caso, tem-se:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right)dy \tag{11}$$

Em primeiro lugar calcula-se

$$B(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \tag{12}$$

integrando a função $f(x,y)$ relativamente à variável *x* entre $x = \psi_1(y)$ e $x = \psi_2(y)$. O resultado de (12) é uma função na variável *y*, $B(y)$, que deverá ser integrada relativamente a *y* entre $y = c$ e $y = d$.

- Finalmente pode escrever-se:

$$\int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$$

$$\int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Os integrais anteriores são designados por *integrais iterados*.

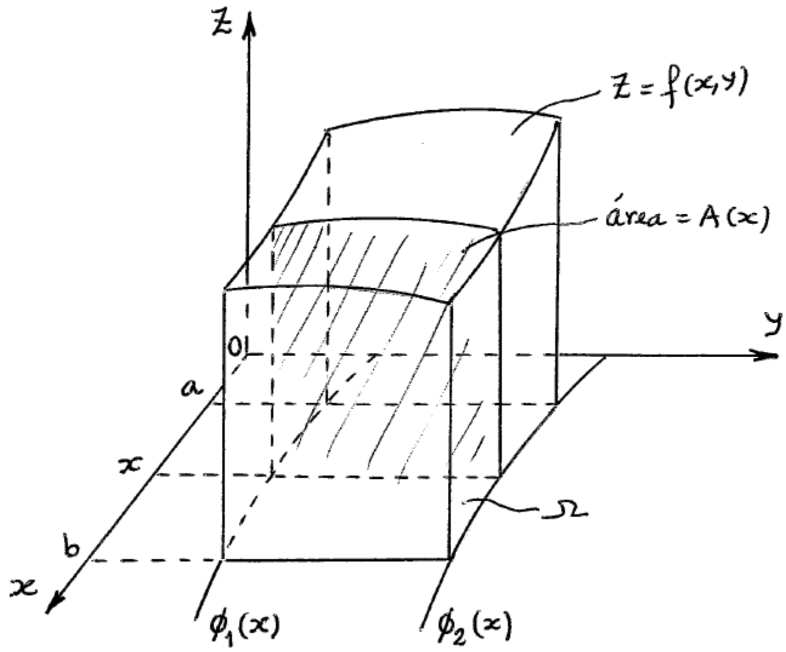
## Interpretação geométrica

- É possível fazer uma interpretação geométrica para os integrais duplos referidos em (9) e (11). Dada a semelhança existente entre os dois casos, apenas se considerará o primeiro deles.

- Seja $f(x,y)$ uma função não negativa e $\Omega$ a região *Tipo I* definida em (8).
O integral duplo de $f(x,y)$ sobre $\Omega$ dá o volume do sólido *T*, $V(T)$, limitado superiormente pela superfície $z = f(x,y)$ e inferiormente pela região $\Omega$, ou seja:

$$V(T) = \iint_\Omega f(x,y)dxdy$$

Considere-se a secção do sólido *T* resultante da sua intersecção com um plano paralelo a *yOz* e que passa no ponto $(x,0,0)$, em que $a \le x \le b$, e designe-se por $A(x)$ a área dessa secção.




Sabe-se que:

$$V(T) = \int_a^b A(x)dx$$

Uma vez que a área da secção é dada por

$$A(x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy$$

resulta

$$V(T) = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

e, portanto:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left( \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

## Propriedades do integral duplo

- Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ funções integráveis numa região fechada e limitada, $\Omega$, do plano *xOy* e $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Verifica-se:

  i) $\iint_{\Omega} [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]dxdy = \alpha \iint_{\Omega} f(x,y)dxdy + \beta \iint_{\Omega} g(x,y)dxdy$

  ii) Se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo o $(x,y) \in \Omega$, então:

  $$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy \geq \iint_{\Omega} g(x,y)dxdy$$

  iii) Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, em que $\Omega_1$ e $\Omega_2$ são regiões do plano que não se intersectam, excepto possivelmente nas suas fronteiras, então:

  $$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$$

  iv) $\left| \iint_{\Omega} f(x,y)dxdy \right| \leq \iint_{\Omega} |f(x,y)| dxdy$

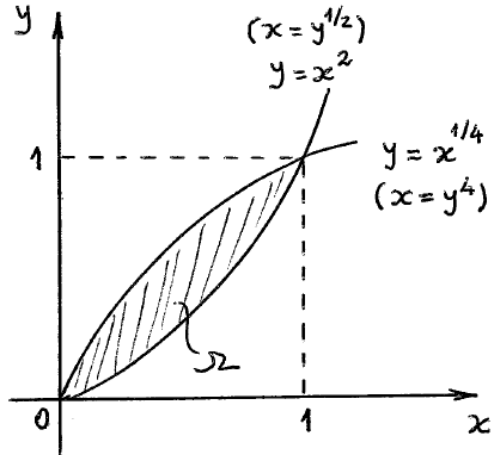
- O teorema seguinte é conhecido por *teorema do valor médio para o integral duplo*.

**Teorema 2**: Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ funções contínuas numa região fechada e limitada, $\Omega$, do plano *xOy*. Se $g(x,y) \geq 0$ para todo o $(x,y) \in \Omega$, então existe um ponto $(x_0,y_0) \in \Omega$ tal que:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)g(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)\iint_{\Omega} g(x,y)dxdy$$

O valor $f(x_0,y_0)$ chama-se *média ponderada da função* $f(x,y)$ *em* $\Omega$ *através da função (de peso)* $g(x,y)$.

**Exemplo 2**: Calcule o integral duplo $\iint_\Omega (x^{1/2} - y^2)dxdy$ onde $\Omega$ é a região apresentada na figura seguinte:




Resolva o problema considerando $\Omega$ como uma região *Tipo I*.

Solução:

Projectando $\Omega$ sobre o eixo dos *xx* (região *Tipo I*) obtém-se:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 1 \,,\; x^2 \le y \le x^{1/4}\right\}$$

Então:

$$\iint_\Omega (x^{1/2} - y^2)dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} (x^{1/2} - y^2)dydx =$$

$$= \int_0^1 \left[ x^{1/2}y - \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{x^{1/4}} dx = \int_0^1 \left( x^{3/4} - \frac{x^{3/4}}{3} - x^{5/2} + \frac{x^6}{3} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{2x^{3/4}}{3} - x^{5/2} + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left[ \frac{8x^{7/4}}{21} - \frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{x^7}{21} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{21} - \frac{2}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7}$$

**Exemplo 3**: Resolva o mesmo problema do exemplo 2 considerando agora $\Omega$ como uma região *Tipo II*.

Solução:

Projectando $\Omega$ sobre o eixo dos *yy* (região *Tipo II*) obtém-se:

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le 1 \,,\ y^4 \le x \le y^{1/2} \right\}$$

Então:

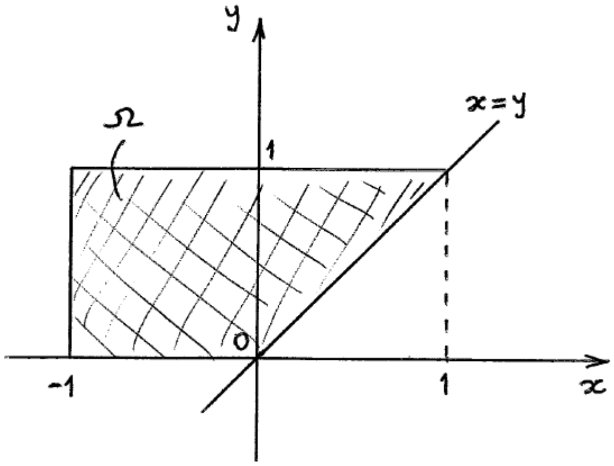
$$\iint_\Omega (x^{1/2} - y^2)dxdy = \int_0^1 \int_{y^4}^{y^{1/2}} (x^{1/2} - y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left[ \frac{2x^{3/2}}{3} - xy^2 \right]_{y^4}^{y^{1/2}} dy = \int_0^1 \left( \frac{2y^{3/4}}{3} - y^{5/2} - \frac{2y^6}{3} + y^6 \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{2y^{3/4}}{3} - y^{5/2} + \frac{y^6}{3} \right) dy = \left[ \frac{8y^{7/4}}{21} - \frac{2y^{7/2}}{7} + \frac{y^7}{21} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{21} - \frac{2}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7}$$

**Exemplo 4**: Calcule o integral duplo $\iint_{\Omega}(xy-y^3)dxdy$ onde $\Omega$ é a região apresentada na figura seguinte:




Resolva o problema considerando $\Omega$ como uma região *Tipo II*.

Solução:

Projectando $\Omega$ sobre o eixo dos *yy* (região *Tipo II*) obtém-se:

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le y\le 1\,,\ -1\le x\le y\right\}$$

Então:

$$\iint_{\Omega}(xy-y^3)dxdy=\int_0^1\int_{-1}^{y}(xy-y^3)dxdy=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{x^2y}{2}-xy^3\right]_{-1}^{y}dy=\int_0^1\left(\frac{y^3}{2}-y^4-\frac{y}{2}-y^3\right)dy=$$

$$=-\int_0^1\left(\frac{y^3}{2}+y^4+\frac{y}{2}\right)dy=-\left[\frac{y^4}{8}+\frac{y^5}{5}+\frac{y^2}{4}\right]_0^1=$$

$$=-\frac{1}{8}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=-\frac{23}{40}$$

**Exemplo 5**: Resolva o mesmo problema do exemplo 4 considerando agora $\Omega$ como uma região *Tipo I*.

Solução:

Projectando $\Omega$ sobre o eixo dos *xx* (região *Tipo I*) obtém-se:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

em que:

$$\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 \le x \le 0 \ , \ 0 \le y \le 1\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1 \ , \ x \le y \le 1\right\}$$

Então:

$$\iint_{\Omega} (xy - y^3)dxdy = \iint_{\Omega_1} (xy - y^3)dxdy + \iint_{\Omega_2} (xy - y^3)dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} (xy - y^3)dydx + \int_{0}^{1}\int_{x}^{1} (xy - y^3)dydx =$$

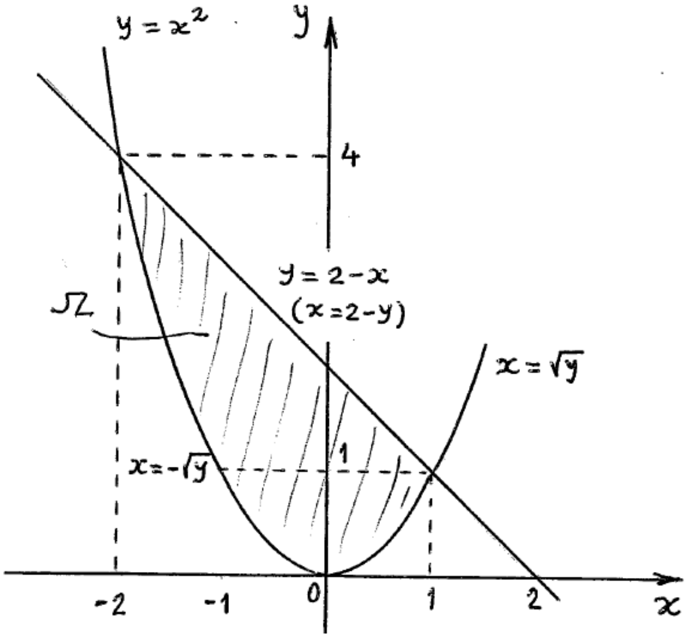
$$= \int_{-1}^{0}\left[\frac{xy^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 dx + \int_{-1}^{0}\left[\frac{xy^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_x^1 dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)dx + \int_{-1}^{0}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20}\right]_0^1 =$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{20}\right) = -\frac{23}{40}$$

**Exemplo 6**: Calcule a área da região $\Omega$, $A(\Omega)$, apresentada na figura seguinte:




Solução:

Projectando $\Omega$ sobre o eixo dos *xx* (região *Tipo I*) obtém-se:

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -2 \le x \le 1 \,,\; x^2 \le y \le 2 - x \right\}$$

Então:

$$A(\Omega) = \iint_\Omega dxdy = \int_{-2}^{1} \int_{x^2}^{2-x} dydx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2) dx =$$

$$= \left[ 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} = \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( -4 - 2 + \frac{8}{3} \right) = \frac{9}{2}$$

Se se optasse por considerar $\Omega$ como região *Tipo II*, o processo de cálculo era mais complexo.

Com efeito, projectando $\Omega$ sobre o eixo dos *yy* (região *Tipo II*) obtém-se:

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

em que:

$$\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le 1 \, , \ -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}\right\}$$

$$\Omega_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le y \le 4 \, , \ -\sqrt{y} \le x \le 2 - y\right\}$$

Neste caso, é necessário resolver os seguintes integrais duplos:

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dxdy = \iint_{\Omega_1} dxdy + \iint_{\Omega_2} dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dxdy + \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} dxdy$$

## Simetrias no integral duplo

- Seja $f(x,y)$ uma função integrável numa região fechada e limitada, $\Omega$, do plano *xOy*.
  Admitindo que $\Omega$ é *simétrica em relação ao eixo dos yy*:

  i) Se $f(x,y)$ é *ímpar na variável x*, $f(x,y) = -f(-x,y)$, então:

  $$\iint_{\Omega} f(x,y) dxdy = 0$$

  ii) Se $f(x,y)$ é *par na variável x*, $f(x,y) = f(-x,y)$, então

  $$\iint_{\Omega} f(x,y) dxdy = 2\iint_{\Omega_1} f(x,y) dxdy$$

  sendo $\Omega_1$ a *metade direita* (*em relação ao eixo dos yy*) de $\Omega$.

- Seja $f(x,y)$ uma função integrável numa região fechada e limitada, $\Omega$, do plano *xOy*.
  Admitindo que $\Omega$ é *simétrica em relação ao eixo dos xx*:
  i) Se $f(x,y)$ é *ímpar na variável y*, $f(x,y) = -f(x,-y)$, então:

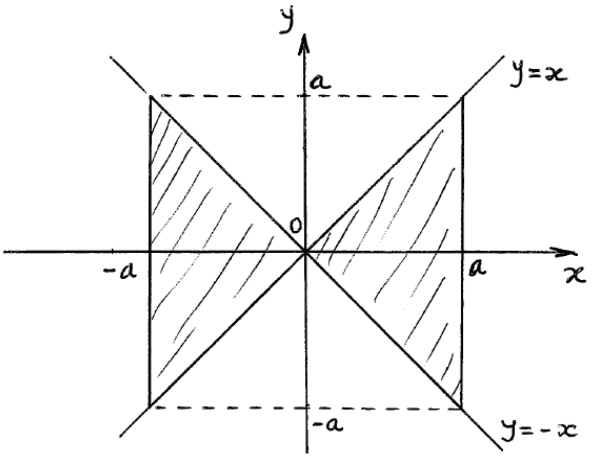
$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = 0$$

  ii) Se $f(x,y)$ é *par na variável y*, $f(x,y) = f(x,-y)$, então

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = 2\iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy$$

  onde $\Omega_1$ é a *metade superior* (*em relação ao eixo dos xx*) de $\Omega$.

**Exemplo 7**: Calcule o integral duplo $\iint_{\Omega}\left(2x^2 - \text{sen}(x^4 y)\right)dxdy$ onde $\Omega$ é a região apresentada na figura seguinte:




Solução:

A região $\Omega$ é simétrica em relação aos dois eixos coordenados.
Tendo em atenção que a função $\text{sen}(x^4 y)$ é *ímpar na variável y* e a região $\Omega$ é *simétrica em relação ao eixo dos xx*, então:

$$\iint_{\Omega} \text{sen}(x^4 y)dxdy = 0$$

Por outro lado, uma vez que a função $x^2$ *é par na variável x* e a região $\Omega$ é *simétrica em relação ao eixo dos yy*, então:

$$\iint_{\Omega} 2x^2 dxdy = 2\iint_{\Omega_1} 2x^2 dxdy$$

onde $\Omega_1$ é a *metade direita* (*em relação ao eixo dos yy*) da região $\Omega$. Projectando $\Omega_1$ sobre o eixo dos *xx* (região *Tipo I*) obtém-se:

$$\Omega_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le a \ , \ -x \le y \le x\right\}$$

Então:

$$\iint_{\Omega} 2x^2 dxdy = 2\iint_{\Omega_1} 2x^2 dxdy = 4\int_0^a \int_{-x}^{x} x^2 dydx =$$

$$= 4\int_0^a x^2 \left[y\right]_{-x}^{x} dx = 8\int_0^a x^3 dx =$$

$$= 2\left[x^4\right]_0^a = 2a^4$$