COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 5

INTEGRAÇÃO DUPLA

1) Calcule os seguintes integrais:

a) $\iint_Q xy(x+y)dxdy$, $Q=[0,1]\times[0,1]$.

b) $\iint_Q \sin(x+y)dxdy$, $Q=[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$.

c) $\iint_Q \left(\sqrt{y}+x-3xy^2\right)dxdy$, $Q=[0,1]\times[1,3]$.

d) $\iint_Q x\sin(x^2+y)dxdy$, $Q=\left[0,\sqrt{\pi/2}\right]\times[0,\pi/2]$.

e) $\iint_Q \sin^2(x)\sin^2(y)dxdy$, $Q=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

f) $\iint_Q y^{-3}e^{2xy^{-1}}dxdy$, $Q=[0,2]\times[1,2]$.

2) Altere a ordem de integração em cada um dos integrais seguintes, após identificar e esboçar o domínio de integração:

a) $\int_0^1\left[\int_0^y f(x,y)dx\right]dy$.

b) $\int_0^2\left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right]dy$.

c) $\int_{-1}^1\left[\int_0^{x^2} f(x,y)dy\right]dx$.

d) $\int_0^{5/\sqrt{2}}\left[\int_y^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx\right]dy$.

e) $\int_0^1\left[\int_{-y}^{y} f(x,y)dx\right]dy$.

f) $\int_1^3\left[\int_x^{x^2} f(x,y)dy\right]dx$.

g) $\int_1^2\left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$.

3) Calcule a área da região do plano limitada:

a) Pelas curvas $y = x^3$ e $y = x^2$, $0 \le x \le 1$.

b) Pelas linhas $x + y = 5$ e $xy = 6$.

c) Superiormente pela parábola $y = 4x - x^2$ e inferiormente pelas retas $y = -3x + 6$ e $y = 0$.

d) Pelas parábolas $y^2 = 10x + 25$ e $y^2 = -6x + 9$.

4) Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_1^2 \left[\int_0^{y^2} e^{x/y^2} dx \right] dy$.

b) $\int_0^1 \left[\int_0^x y\sqrt{x^2 - y^2}\, dy \right] dx$.

c) $\int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2} dy \right] dx$.

d) $\int_{1/4}^1 \left[\int_{x^2}^x \sqrt{\frac{x}{y}}\, dy \right] dx$.

5) Calcule cada um dos integrais seguintes, alterando a ordem de integração, após identificar e esboçar o domínio de integração:

a) $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 \sin\left(\frac{y^3+1}{2} \right) dy \right] dx$.

b) $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dy \right] dx$.

6) Calcule o integral $\iint_\Omega y\left(1 + x^2\right)^{-1} dxdy$, sendo Ω a região limitada pelas linhas $y = 0$, $y = \sqrt{x}$ e $x = 4$.

7) Calcule o integral $\iint_\Omega x\cos(x+y)\,dxdy$, sendo Ω a região triangular com vértices em $(0,0)$, $(\pi,0)$ e $(\pi/2, \pi/2)$.

8) Calcule o integral $\iint_\Omega (x^4 + y^2)\,dxdy$, sendo Ω a região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x^2$.

9) Calcule o integral $\iint_\Omega (3xy^2 - y)\,dxdy$, sendo Ω a região limitada pelas linhas $y = |x|$ e $y = -|x|$, $-1 \le x \le 1$.

10) Calcule o integral $\iint_D \left(y^2+2\right)^{-1} dxdy$, sendo D a região limitada pelas linhas $x=0$, $y=0$, $x=y^2+2$, $0 \le y \le 2$.

11) Calcule o integral $\iint_D 2\left(x^2+3x+2\right)^{-1} dydx$, sendo D a região do 1º quadrante limitada pelas linhas $y=x$, $y=0$ e $x=4$.

12) Calcule o integral $\iint_D (2x-y^2)dxdy$, sendo D a região limitada pelas retas $y=-x+1$, $y=x+1$ e $y=3$.

13) Determine os seguintes integrais:

a) $\iint_R e^{y/x} dxdy$, $R=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le x\right\}$.

b) $\iint_D x^2 e^{y^4} dxdy$, $D=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1 \ \wedge \ x \le y \le 1\right\}$.

14) Calcule o integral $\iint_D 2xdydx$, sendo D a região triangular com vértices nos pontos $O=(0,0)$, $P=(2,0)$ e $Q=(1,1)$.

15) Calcule o integral $\iint_\Omega (x+y+1)dxdy$, sendo Ω a região:

a) Triangular com vértices nos pontos $O=(0,0)$, $P=(1,0)$ e $Q=(1,1)$.

b) $\Omega=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le a^2 \ , \ a>0\right\}$.

16) Calcule o integral $\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $\Omega=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \ : \ 4 \le x^2+y^2 \le 9\right\}$.

17) Obtenha o valor médio da função $f(x,y)=xy$, definida na região do plano, *D*, tal que $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$.

18) Seja a função $f(x,y)$ definida na região do plano $Q=[0,1]\times[0,1]$, tal que:

$$f(x,y)=\begin{cases} 1-x-y \ \ , \text{ se } \ x+y\leq 1 \\ 0 \text{ , nos outros pontos de } Q \end{cases}$$

Calcule $\iint_Q f(x,y)dxdy$.

19) Seja a função $f(x,y)$ definida na região do plano $Q=[0,1]\times[0,1]$, tal que:

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y \ \ , \text{ se } \ x^2\leq y\leq 2x^2 \\ 0 \text{ , nos outros pontos de } Q \end{cases}$$

Calcule $\iint_Q f(x,y)dxdy$.

20) Usando um integral duplo, determine os seguintes volumes:

a) Da pirâmide limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x+2y+3z=6$.

b) Do sólido situado no 1º octante e limitado pelas superfícies $z=4-x^2$ e $x+y=2$.

c) Do sólido limitado superiormente pela superfície $z=x^3y$ e que tem por base a região triangular do plano *xOy* com vértices nos pontos $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,1)$.

21) Em cada uma das alíneas seguintes, esboce a região *S* e reescreva o integral $\iint_S f(x,y)dxdy$ como um integral em coordenadas polares:

a) $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2\leq a^2 \ , \ a>0\right\}$. **b)** $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2\leq 2x\right\}$.

22) Transforme o integral $\int_1^2\left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$ em coordenadas polares.

23) Transforme o integral $\int_0^{2a}\left[\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2+y^2)dy\right]dx$ em coordenadas polares e calcule-o.

24) Usando um integral duplo, determine os seguintes volumes:

a) Do sólido limitado pela superfície cilíndrica $x^2+y^2=1$ e pelos planos $z=0$ e $x+z=1$.

b) Do sólido limitado pelas superfícies $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=1$ e $z=0$.

c) Do sólido limitado pelo paraboloide $z=4-x^2-y^2$ e pelo plano $z=0$.

d) Do sólido limitado pelas superfícies $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=1$ e $z=0$.

e) Do sólido limitado pelas superfícies $z=2x+1$, $x^2+y^2=2x$ e $z=0$.

Soluções:

1) **a)** $\frac{1}{3}$. **b)** 2. **c)** $2\sqrt{3}-\frac{38}{3}$.

d) 1. **e)** $\frac{\pi^2}{4}$. **f)** $\frac{e^4-e^2-2}{8}$.

2) **a)** $\int_0^1\left[\int_x^1 f(x,y)dy\right]dx$. **b)** $\int_0^4\left[\int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\right]dx$.

c) $\int_0^1\left[\int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x,y)dx\right]dy+\int_0^1\left[\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx\right]dy$.

d) $\int_0^{5/\sqrt{2}}\left[\int_0^x f(x,y)dy\right]dx+\int_{5/\sqrt{2}}^5\left[\int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy\right]dx$.

e) $\int_{-1}^0\left[\int_{-x}^1 f(x,y)dy\right]dx+\int_0^1\left[\int_x^1 f(x,y)dy\right]dx$.

f) $\int_1^3\left[\int_{\sqrt{y}}^y f(x,y)dx\right]dy+\int_3^9\left[\int_{\sqrt{y}}^3 f(x,y)dx\right]dy$.

g) $\int_0^1\left[\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right]dy$.

3) **a)** $\int_0^1\left[\int_{x^3}^{x^2} dy\right]dx=\frac{1}{12}$. **b)** $\int_2^3\left[\int_{6x^{-1}}^{5-x} dy\right]dx=\frac{5}{2}+6\ln\frac{2}{3}$.

c) $\int_1^4\left[\int_0^{4x-x^2} dy\right]dx-\int_1^2\left[\int_0^{-3x+6} dy\right]dx=\frac{15}{2}$.

d) $2\int_0^{\sqrt{15}}\left[\int_{(y^2-25)/10}^{(9-y^2)/6} dx\right]dy = \frac{16\sqrt{15}}{3}$.

4) **a)** $\frac{7}{3}(e-1)$.

b) $-\frac{1}{12}$.

c) $1-\ln 2$.

d) $\frac{13}{80}$.

5) **a)** $\frac{2}{3}\left(\cos(2^{-1})-\cos(1)\right)$.

b) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

6) $\int_0^4\left[\int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{1+x^2}dy\right]dx = \frac{1}{4}\ln 17$.

7) $\int_0^{\pi/2}\left[\int_y^{\pi-y} x\cos(x+y)dx\right]dy = -\frac{3\pi}{4}$.

8) $\int_0^1\left[\int_{x^3}^{x^2}(x^4+y^2)dy\right]dx = \frac{9}{280}$.

9) Atendendo às propriedades dos integrais, conclui-se que $\iint_\Omega (3xy^2-y)dxdy = 0$.

10) $\int_0^2 \frac{1}{y^2+2}\left[\int_0^{y^2+2} dx\right]dy = 2$.

11) $2\int_0^4 \frac{1}{x^2+3x+2}\left[\int_0^x dy\right]dx = -2\ln(5)+4\ln(3)$.

12) $\int_1^3\left[\int_{1-y}^{y-1}(2x-y^2)dx\right]dy = -\frac{68}{3}$.

13) **a)** $\int_0^1\left[\int_0^x e^{y/x}dy\right]dx = \frac{e-1}{2}$.

b) $\int_0^1 e^{y^4}\left[\int_0^y x^2dx\right]dy = \frac{e-1}{12}$.

14) $\iint_D 2xdydx = 2\iint_D xdydx = 2\bar{x}A(D) = 2(1)(1) = 2$, tal que $A(D)$ designa a área da região D e $\bar{x}$ a coordenada, segundo o eixo dos *xx*, do seu centroide.

15) **a)** $\iint_\Omega xdxdy + \iint_\Omega ydxdy + \iint_\Omega dxdy = \bar{x}A(\Omega)+\bar{y}A(\Omega)+A(\Omega) = \frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, tal que $A(\Omega)$ designa a área da região Ω e $(\bar{x},\bar{y})$ as coordenadas do seu centroide.

b) $\iint_\Omega x\,dxdy + \iint_\Omega y\,dxdy + \iint_\Omega dxdy = \bar{x}A(\Omega) + \bar{y}A(\Omega) + A(\Omega) = 0 + 0 + \pi a^2 = \pi a^2$, tal que $A(\Omega)$ designa a área da região Ω e $(\bar{x}, \bar{y})$ as coordenadas do seu centroide.

16) $\int_0^{2\pi}\left[\int_2^3 r^2 dr\right]d\theta = \dfrac{38\pi}{3}$.

17) $f_m = \dfrac{\iint_D f(x,y)dxdy}{\iint_D dxdy} = \dfrac{4}{\pi}\iint_D xydxdy = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)\left[\int_0^1 r^3 dr\right]d\theta = \dfrac{1}{2\pi}$.

18) $\int_0^1\left[\int_0^{1-x}(1-x-y)dy\right]dx = \dfrac{1}{6}$.

19) $\int_0^1\left[\int_{\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y}}(x+y)dx\right]dy = \dfrac{21}{40} - \dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

20) a) 6. **b)** $\dfrac{20}{3}$. **c)** $\dfrac{2}{15}$.

21) a) $\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\right]d\theta$. **b)** $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\right]d\theta$.

22) $\int_0^{\pi/4}\left[\int_{2/(\sin(\theta)+\cos(\theta))}^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\right]d\theta$.

23) $\int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{2a\cos\theta} r^3 dr\right]d\theta = \dfrac{3}{4}\pi a^4$.

24) a) π. **b)** $\dfrac{\pi}{2}$. **c)** 8π.

d) $\dfrac{2\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})$. **e)** 3π.