COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 3

FUNÇÕES VETORIAIS

1) Considere a função vetorial $\boldsymbol{f}(t)=\left(\frac{1}{t}, \frac{\ln t}{t}, e^{-2t}\right)$, $t \in (0,+\infty)$. Determine:

a) A sua função derivada, $\boldsymbol{f}'(t)$.

b) $\int_1^3 \boldsymbol{f}(t)\,dt$.

2) Parametrize as curvas do plano *xOy* que são o gráfico das funções:

a) $y = f(x)$, $x \in [a,b]$.

b) $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha,\beta]$.

3) Obtenha a parametrização do segmento de recta que liga o ponto $P=(2,7,-1)$ ao ponto $Q=(4,2,3)$.

4) Determine as equações cartesianas das curvas do plano *xOy* definidas parametricamente pelas equações:

a) $\boldsymbol{f}(t)=(3t-1,5-2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) $\boldsymbol{f}(t)=(2\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$.

c) $\boldsymbol{f}(t)=(\sin t, 1+\cos^2 t)$, $t \in [-\pi/2,\pi/2]$.

d) $\boldsymbol{f}(t)=(\operatorname{tg} t, \sec t)$, $t \in [-\pi/2,\pi/2]$.

e) $\boldsymbol{f}(t)=(e^{2t}, e^{2t}-1)$, $t \le 0$.

f) $\boldsymbol{f}(t)=(2\sin t, \cos t)$, $t \in [0,\pi/2]$.

g) $\boldsymbol{f}(t)=(t^{-1}, t^{-2})$, $t \in (0,3)$.

5) Esboce as curvas definidas em cada uma das alíneas do exercício anterior; identifique o sentido do percurso das mesmas.

6) Considere a curva *C* do espaço descrita pela função vetorial $\boldsymbol{f}(t)=(\cos t, \sin t, t)$, $t \ge 0$.

a) Calcule o comprimento de arco dessa curva entre os pontos $P=(1,0,0)$ e $Q=(1,0,2\pi)$.

b) Parametrize a curva em função do comprimento de arco.

7) Determine o comprimento da curva do plano *xOy* descrita pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

8) Seja a curva *C* do espaço descrita pela função vetorial $\boldsymbol{f}(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$, $t \geq 0$.

a) Esboce a curva.

b) Determine os versores da tangente, da normal principal e da binormal.

c) Obtenha as equações cartesianas dos planos osculador, normal e retificador no ponto $P = (1, 0, 1)$.

d) Calcule a curvatura, o raio de curvatura e o centro de curvatura em *P*.

e) Obtenha a função comprimento de arco, que define o comprimento da curva, medido a partir do seu ponto inicial.

f) Calcule o comprimento do arco da curva, medido entre o seu ponto inicial e o ponto $\boldsymbol{f}(2)$.

g) Determine o comprimento do arco da curva, medido entre os pontos $\boldsymbol{f}(1)$ e $\boldsymbol{f}(2)$.

9) Seja a curva *C* do espaço descrita pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 4t)$, $t \geq 0$.

a) Esboce a curva.

b) Determine o comprimento de arco em função do parâmetro *t*.

c) Obtenha as coordenadas do ponto *Q* da curva, tal que o comprimento de arco da curva entre os pontos $P = (3, 0, 0)$ e *Q* seja igual a 5π.

d) Parametrize a curva em relação ao comprimento de arco, isto é, defina a função $\boldsymbol{r}(s)$, $s \geq 0$.

e) Mostre que a primeira derivada da função vetorial encontrada na alínea anterior é versor.

10) Parametrize as seguintes linhas do plano *xOy*:

a) $y = x^2$, percorrida no sentido do ponto $(-1, 1)$ para o ponto $(3, 9)$.

b) $y = x^2$, percorrida no sentido do ponto $(3, 9)$ para o ponto $(-1, 1)$.

c) $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido direto.

d) $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido retrógrado.

e) $x^2 + y^2 = 2x$, percorrida no sentido direto e unindo o ponto $(2, 0)$ ao ponto $(0, 0)$.

11) Seja a curva C do espaço descrita pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t)=\left(t^2-1,\sin(2t),e^{-t}\right)$, $t\in\mathbb{R}$. Obtenha a equação cartesiana do plano que passa no ponto $P=(0,-1,1)$ e é paralelo ao plano osculador da curva no ponto $Q=(-1,0,1)$.

12) Faça um esboço das superfícies dadas e parametrize a curva de interseção dessas superfícies:

a) $x^2+y^2=2$ e $y=z$. **b)** $x^2+y^2=2-z$ e $z=-1$.

13) Obtenha a curva do espaço definida pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, tal que $\boldsymbol{r}'(t)=\alpha\boldsymbol{r}(t)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ e $\boldsymbol{r}(0)=(1,2,3)$.

14) Determine o comprimento da curva do plano *xOy* definida, em coordenadas polares, pela função $r=1+\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$.

15) Calcule o comprimento da curva (espiral de Arquimedes) do plano *xOy* definida, em coordenadas polares, pela função $r=\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$.

16) Seja a curva do plano *xOy* definida, em coordenadas polares, pela função $r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$. Mostre que a curvatura, num ponto da curva, é dada pela expressão:

$$k(\theta)=\frac{\left|r^2-rr''+2(r')^2\right|}{\left(r^2+(r')^2\right)^{3/2}}$$

Soluções:

1) **a)** $\boldsymbol{f}'(t)=\left(\frac{-1}{t^2},\frac{1-\ln t}{t^2},-2e^{-2t}\right)$. **b)** $\int_1^3 \boldsymbol{f}(t)dt=\left(\ln 3,\frac{\ln^2 3}{2},\frac{e^{-2}-e^{-6}}{2}\right)$.

2) **a)** $\boldsymbol{r}(t)=\left(t,f(t)\right)$, $t\in[a,b]$.

b) $\boldsymbol{r}(\theta)=\left(f(\theta)\cos\theta,f(\theta)\sin\theta\right)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$.

3) $[PQ]$: $\boldsymbol{r}(t)=P+t\overrightarrow{PQ}=(2+2t,7-5t,-1+4t)$, $t\in[0,1]$.

4) **a)** $2x+3y=13$.

b) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

c) $y=2-x^2$, $x\in[-1,1]$.

d) $y=\sqrt{1+x^2}$.

e) $y=x-1$, $x\in(0,1]$.

f) $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}$, $x\in[0,2]$.

g) $y=x^2$, $x\in(1/3,+\infty)$.

5) - - - -

6) **a)** $2\sqrt{2}\pi$.

b) $\boldsymbol{f}(s)=\left(\cos\dfrac{s}{\sqrt{2}},\sin\dfrac{s}{\sqrt{2}},\dfrac{s}{\sqrt{2}}\right),\ s\geq 0$.

7) $s=3\int_0^{\pi/2}\sin(t)\cos(t)dt=\dfrac{3}{2}$.

8) **a)** - - - -

b) $\boldsymbol{T}(t)=\dfrac{\boldsymbol{f}\,'(t)}{\|\boldsymbol{f}\,'(t)\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\cos t-\sin t,\sin t+\cos t,1)$;

$\boldsymbol{N}(t)=\dfrac{\boldsymbol{T}\,'(t)}{\|\boldsymbol{T}\,'(t)\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t-\sin t,-\sin t+\cos t,0)$;

$\boldsymbol{B}(t)=\boldsymbol{T}(t)\times\boldsymbol{N}(t)=\dfrac{\boldsymbol{f}\,'(t)\times\boldsymbol{f}\,''(t)}{\|\boldsymbol{f}\,'(t)\times\boldsymbol{f}\,''(t)\|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-\cos t+\sin t,-\sin t-\cos t,2)$.

c) Plano osculador: $x+y-2z=-1$;

Plano normal: $x+y+z=2$;

Plano retificador: $x-y=1$.

d) Curvatura: $k(0)=\dfrac{\|\boldsymbol{T}\,'(0)\|}{\|\boldsymbol{f}\,'(0)\|}=\dfrac{\|\boldsymbol{f}\,'(0)\times\boldsymbol{f}\,''(0)\|}{\|\boldsymbol{f}\,'(0)\|^3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$;

Raio de curvatura: $\rho(0)=\dfrac{1}{k(0)}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$;

Centro de curvatura: $\boldsymbol{C}(0)=P+\rho(0)\boldsymbol{N}(0)=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},1\right)$.

e) $s(t)=\int_0^t\|\boldsymbol{f}\,'(u)\|du=\sqrt{3}(e^t-1)$, $t\geq 0$.

f) $s=s(2)-s(0)=\int_0^2\|\boldsymbol{f}\,'(t)\|dt=\sqrt{3}(e^2-1)$.

g) $s = s(2) - s(1) = \int_1^2 \| \boldsymbol{f}\,'(t) \| \, dt = \sqrt{3} e(e-1)$.

9) **a)** - - - -

b) $s(t) = \int_0^t \| \boldsymbol{r}\,'(u) \| \, du = 5t$.

c) $Q = \boldsymbol{r}(\pi) = (-3, 0, 4\pi)$.

d) $\boldsymbol{r}(s) = \left(3\cos\frac{s}{5}, 3\sin\frac{s}{5}, \frac{4s}{5} \right),\ s \geq 0$.

e) Notando que $\boldsymbol{r}'(s) = \frac{1}{5}\left(-3\sin\frac{s}{5}, 3\cos\frac{s}{5}, 4 \right)$, obtém-se $\| \boldsymbol{r}\,'(s) \| = 1$.

10) **a)** $\boldsymbol{r}(t) = (t, t^2)\ ,\ t \in [-1, 3]$.

b) $\boldsymbol{r}(u) = (-u, u^2)\ ,\ u \in [-3, 1]$.

c) $\boldsymbol{r}(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)\ ,\ \theta \in [0, 2\pi]$.

d) $\boldsymbol{r}(\alpha) = \left(2\cos(-\alpha), 2\sin(-\alpha) \right)\ ,\ \alpha \in [-2\pi, 0]$.

e) $\boldsymbol{r}(\theta) = (1 + \cos\theta, \sin\theta)\ ,\ \theta \in [0, \pi]$.

11) $x - y - 2z = -1$.

12) **a)** $\boldsymbol{r}(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, \sqrt{2}\sin\theta)\ ,\ \theta \in [0, 2\pi]$.

b) $\boldsymbol{r}(\theta) = (\sqrt{3}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta, -1)\ ,\ \theta \in [0, 2\pi]$.

13) $\boldsymbol{r}(t) = (e^{\alpha t}, 2e^{\alpha t}, 3e^{\alpha t})\ ,\ t \in \mathbb{R}$.

14) $s = \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta} \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} \cos(\theta/2) \, d\theta = 4$.

15) $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} \, d\theta = \pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln\sqrt{2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}}$.

16) - - - -