EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

$v = \frac{ds}{dt}$ $\quad a_t = \frac{dv}{dt}$ $\quad a_t = v\frac{dv}{ds}$

VETORES

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\hat{e}_t + \frac{v^2}{R}\hat{e}_n}$

LANÇAMENTO DE PROJÉTEIS

$v_x = \text{constante} = v_{x_0}$

$a_y = \text{constante} = -9.8\ \frac{m}{s^2}$

Movimento uniforme.

$\frac{dx}{dt} = v_{x_0}$ (constante) $\Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = v_{x_0}\int_0^t dt$ $(t_0=0)$ $\Rightarrow \boxed{x = x_0 + v_{x_0} t}$

Movimento uniformemente acelerado.

$\frac{dv_y}{dt} = -g$ (constante) $\Rightarrow \int_{v_{y_0}}^{v_y} dv_y = -g\int_0^t dt$

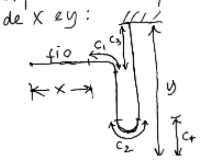
$\Rightarrow \boxed{v_y = v_{y_0} - gt}$

$\frac{dy}{dt} = v_{y_0} - gt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t (v_{y_0} - gt)\,dt$

$\Rightarrow \boxed{y = y_0 + v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2}$

MOVIMENTOS DEPENDENTES

A relação entre x e y encontra-se escrevendo a expressão do comprimento do fio, L, em função de x e y:



$L = x + c_1 + (y - c_3 - c_4) + c_2 + (y - c_4)$

$L = x + 2y + c_1 + c_2 - c_3 - 2c_4$

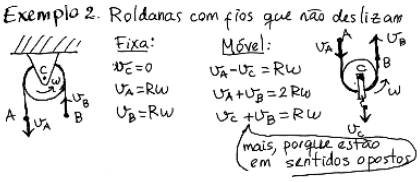
$\dot{x} + 2\dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{v_{bloco} = -2v_{cilindro}}$

MOVIMENTO COM RESTRIÇÕES

$v_P = 0 \Rightarrow v_Q = R_{Q/P}\,\omega$

$\boxed{v_C = R\omega}$

Exemplo 2. Roldanas com fios que não deslizam



FORÇAS DE ATRITO

ⓐ **Atrito estático.** Quando a velocidade da superfície 1, relativa à superfície 2, é nula: $v_{1/2} = 0$

F_e = força de atrito estático.

É indeterminada, entre 0 e um valor máximo, e pode apontar em qualquer direção tangente às superf.

$\boxed{F_e \le \mu_e N}$ $\quad \mu_e$ = coeficiente de atrito estático (número sem unidades)

ⓑ **Atrito cinético.** Quando $v_{1/2} \neq 0$,

F_c = força de atrito cinético. $\boxed{F_c = \mu_c N}$

μ_c = coeficiente de atrito cinético. Costuma ser menor que μ_e.

$\vec{F}_c$ tem a mesma direção de $\vec{v}_{1/2}$, mas sentido oposto

FORÇA DE RESISTÊNCIA NOS FLUIDOS

$\boxed{F_{esfera} = \frac{\pi}{4}\rho R^2 v^2}$ $\boxed{F_{esfera} = 6\pi\eta R v}$ ρ = massa volúmica do fluido.

η = coeficiente de viscosidade do fluido

$F_r = \begin{cases} \text{constante} \times v, \text{ se } v \text{ for baixa} \\ \text{constante} \times v^2, \text{ se } v \text{ for elevada} \end{cases}$

LEIS DE NEWTON

quantidade de movimento $= \vec{p} = m\vec{v}$ $\quad \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,dt$

$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ $\quad 1\,\text{newton} = N = 1\ kg\cdot\left(\frac{m}{s^2}\right)$ $\quad \vec{F}_r = m\vec{a}_{cm}$

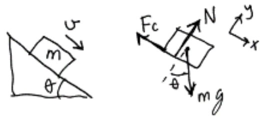
1ª LEI (lei da inércia)

"Todo corpo mantém o seu estado de repouso ou de movimento uniforme segundo uma linha reta, se não for compelido a mudar o seu estado por forças nele impressas".

3ª LEI (lei de ação e reação).

"A toda ação opõe sempre uma igual reação. Isto é, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e opostas".

② Bloco a deslizar sobre um plano inclinado, com velocidade constante. $\Rightarrow \vec{a} = 0$



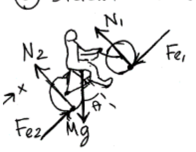
$\sum F_x = mg\sin\theta - \mu_c N = 0$

$\sum F_y = -mg\cos\theta + N = 0$

$\Rightarrow N = mg\cos\theta$

$\mu_c = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

③ Bicicleta a subir uma rampa, com $a_t > 0$.



5 forças: Mg = peso da bicicleta mais homem

N_1 e N_2: reações normais nas duas rodas

F_{e1} = força de atrito estático na roda da frente, oposta ao movimento.

F_{e2} = força de atrito estático na roda traseira na direção do movimento (roda com tração)

$a_x \neq 0$, $a_y = 0$

$\sum F_y = N_1 + N_2 - Mg\cos\theta = 0$

$\sum F_x = F_{e2} - F_{e1} - Mg\sin\theta = ma$

Apenas é possível calcular $N_1 + N_2$ e $F_{e2} - F_{e1}$

ROTAÇÃO DOS CORPOS RÍGIDOS

$\vec{r}_{P/Q} = \vec{r}_P - \vec{r}_Q$ = posição de P relativa a Q

$\boxed{v_{P/Q} = R_{P/Q}\,\omega}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P/Q} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q}$

MOVIMENTO CIRCULAR

$\boxed{\omega = \dot{\theta}}$ ve

$\boxed{\alpha = \dot{\omega}}$ ac

$\boxed{\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta}}$

$v = R\omega$, $a_t = R\alpha$, $a_n = R\omega^2$

Movimento circular uniforme

$\alpha = 0 \Rightarrow a_t = \dot{v} = R\dot{\omega} = 0 \Rightarrow \omega$ constante

$\Rightarrow \theta = \omega t$

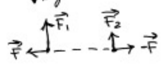
período de rotação = T = tempo que demora a dar uma volta

$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

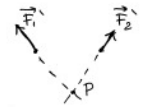
FORÇAS NOS CORPOS RÍGIDOS

③ **Forças paralelas.**

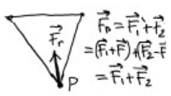
ⓐ Adicionam-se duas forças auxiliares $\vec{F}$ e $-\vec{F}$, co-lineares, nos pontos de ação de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Isso não altera nada porque a resultante das forças auxiliares é nula.

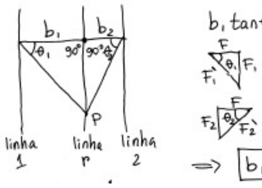


ⓑ Soma-se cada força $\vec{F}_i$ à força auxiliar no mesmo ponto. Os resultados, $\vec{F}_1'$ e $\vec{F}_2'$, são sempre duas forças concorrentes.



ⓒ Somam-se $\vec{F}_1'$ e $\vec{F}_2'$ no ponto comum. Observe-se que a resultante, $\vec{F}_r$, é também paralela a $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ e igual à soma delas, como se fossem vetores livres; mas a linha de ação está entre as linhas de ação de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$





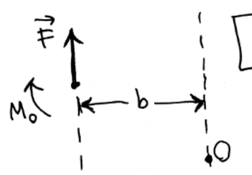
$b_1\tan\theta_1 = b_2\tan\theta_2$

$\tan\theta_1 = \frac{F_1}{F}$

$\tan\theta_2 = \frac{F_2}{F}$

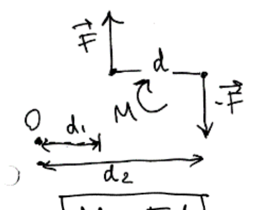
$\Rightarrow \boxed{b_1F_1 = b_2F_2}$

Momento de uma força, em relação a um ponto



$\boxed{M_O = Fb}$

BINÁRIO



$\boxed{M = Fd}$

MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO, SEM ROTAÇÃO

$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\vec{a}}$ $\quad \boxed{\sum_{i=1}^{m} M_{cm} = 0}$

VETOR MOMENTO

Várias formas de calcular M_o.

$|M_o| = d|\vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$ $\quad \vec{M}_o = \vec{r}\times\vec{F}$, $\quad M_o = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}$

ROTAÇÃO COM EIXO FIXO

$M_{r,eixo} = I_{eixo}\,\alpha$

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

$\boxed{I_2 = I_{CM} + md^2}$

$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds$$

$$W_{12} = E_c(2) - E_c(1)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

$$U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{12} = U(1) - U(2)$$

$$U_g = m g z$$

$$U_e = \tfrac{1}{2} k s^2$$

$$E_m = E_c + U$$

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t^{nc} \, ds = E_m(2) - E_m(1)$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$$

$$s = A \sin(\Omega t + \phi_0)$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k s^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \dots n$$

Usar quando Qj representa a força generalizada q da contribuição de todas (conservativas e não conservativas)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, \dots n$$

Usar quando Qj representa a força generalizada da contribuição apenas das forças não conserva

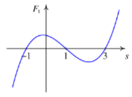
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} - \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j} = Q_j}$$

Usar quando é preciso calcular forças de ligação

SISTEMAS CONSERVATIVOS

São os sistemas em que Em permanece constante (as forças não conservativas não realizam trabalho)

O trabalho da força resultante, no centro de massa do corpo, é igual ao aumento da energia cinética de translação

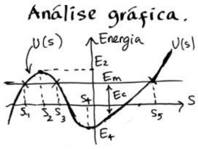


Nos gráficos da Força tangencial os pont equilíbrio são as raízes da função (zeros da função) Se o zero vier do negativo para o positivo o equilíbrio é instável, se vier do positivo para o negativo o equilíbrio é estáv

Valores próprios λ	Tipo de ponto	Equilíbrio
2 reais; sinais opostos	ponto de sela	instável
2 reais, positivos	nó repulsivo	instável
2 reais, negativos	nó atrativo	estável
2 complexos; parte real positiva	foco repulsivo	instável
2 complexos; parte real negativa	foco atrativo	estável
2 imaginários	centro	estável
1 real, positivo	nó impróprio	instável
1 real, negativo	nó impróprio	estável

Sistema conservativo -> traço da matr
Sistema linear -> matriz jacobiana con
Sistema não linear -> nenhum dos ant

Análise gráfica.



No gráfico da Energia Potencial (U) os máximos da função são pontos de equilíbrio instáveis e os mínimos são pontos de equilíbrio estável.

Forças conservativas:

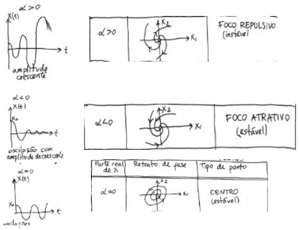
$$\boxed{U = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Matriz Jacobiana

$$\mathbb{J}_{f,g}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

CICLOS LIMITE

Nos limites $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$, as curvas de evolução podem aproximar-se assimtoticamente de um ponto de equilíbrio ou também de uma curva fechada (ciclo).



Coordenadas polares.

Em alguns casos, a mudança de variáveis para um ponto de equilíbrio ajuda a descobrir ciclos limite. A derivada $\dot{r}$ igual a zero indica a presença de ciclos limite.

No caso do exemplo no início da aula, em que a velocidade de fase está na variável u e o ponto de equilíbrio é a origem, as coordenadas polares são:

[xp, yP]: [r*cos(q), r*sin(q)]$

definem-se as derivadas de r e q:

gradef (r, t, v)$

gradef (q, t, w)$

e substituem-se as coordenadas polares nas duas equações de evolução:

subst([x=xp, y=yP], [diff(xp,t)=u[1], diff(yP,t)=u[2]]);

e resolvem-se essas duas novas equações para encontrar expressões para $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$:

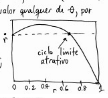
solve(%, [v, w]);

trigsimp(%); $\rightarrow \dot{\theta} = 1$, $\dot{r} = r^3(\cos^2\theta - 3) + r$

o gráfico de $\dot{r}$ para um valor qualquer de θ, por exemplo θ=0:

plotdf(r^3*(1-3)+r, [r,0,1]);

mostra que há um ciclo limite entre r=0.6 e r=0.8, onde $\dot{r}=0$.



O ciclo limite é atrativo, porque para r menor do que no ciclo limite r aumenta ($\dot{r}>0$) e para valores superiores r diminui ($\dot{r}<0$).

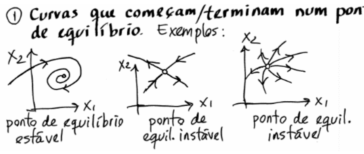
r=0 também dá $\dot{r}=0$, porque r=0 é ponto de equilíbrio.

Em casos mais complicados, o gráfico de $\dot{r}$ em função de r, para algum valor de θ, pode ser, por exemplo:

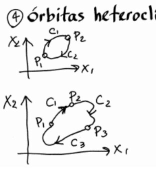
No exemplo da página anterior, $\dot{\theta} = 1$ mostra que o estado desloca-se no sentido anti-horário, com velocidade angular constante.

As curvas de evolução são oscilações com frequência angular $\Omega = 1$ e amplitude crescente, dentro do ciclo limite, ou decrescente fora do ciclo limite.

① Curvas que começam/terminam num ponto de equilíbrio. Exemplos:

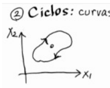


④ Órbitas heteroclínicas: sequência de n curvas que ligam n pontos de equilíbrio (instável) C1 começa no primeiro ponto e termina no ponto P2, C2 vai de P2 a P3, ..., Cn vai de Pn até P1.



Cada curva Ci é uma solução diferente.

② Ciclos: curvas fechadas.



Um ciclo corresponde a uma solução do sistema que se repete indefinidamente no tempo: oscilação.

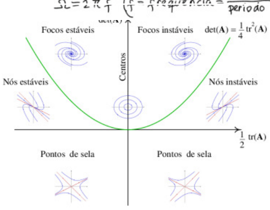
Dentro do ciclo deve haver um ponto de equilíbrio, estável ou instável.

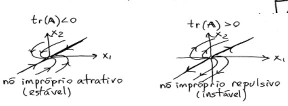
③ Órbitas homoclínicas: curva que começa num ponto de equilíbrio e termina no mesmo ponto. O ponto de equilíbrio é instável.

Não corresponde a uma oscilação, porque não se repete no tempo. Quando o sistema se aproxima do ponto de equilíbrio nunca chega a esse ponto.

Frequência angular (Ω) = parte imaginária de λ

$\Omega = 2\pi f$ $\left(f = \text{frequência} = \frac{1}{\text{período}} \right)$





SISTEMAS DE DUAS ESPÉCIES

x(t) e y(t) são as populações das duas espécies, que interagem entre si: $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$

As duas funções f e g deverão ter as seguintes propriedades: $f(0,y) = g(x,0) = 0$

A matriz jacobiana é: $\mathbb{J}(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = aumento/diminuição próprio da 1ª espécie.

$\frac{\partial g}{\partial y}$ = aumento/diminuição próprio da 2ª espécie.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = aumento/diminuição da 1ª espécie devido à 2ª.

$\frac{\partial g}{\partial x}$ = aumento/diminuição da 2ª espécie devido à 1ª.

1. Sistema predador-presa. $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ com sinais diferentes

2. Sistema com cooperação. $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ positivas

3. Sistema com competição. $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ negativas

> Um sistema não linear com n pontos de equilíbrio pode ser aproximado, nas vizinhanças desses pontos, por n sistemas lineares diferentes

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2}$$

> Os sistemas lineares têm um único ponto de equilíbrio na origem.

SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA

$\begin{cases} \dot{x} = x(a - cy) \\ \dot{y} = y(bx - d) \end{cases}$ é um sistema predador-presa em que x são presas e y predadores

(a, b, c e d positivas)

- A população de presas aumenta exponencialmente se não existirem predadores.
- A população de predadores diminui até zero se não existirem presas.

O problema deste modelo é que as oscilações das populações podem ser desde valores quase nulos até valores muito elevados

SISTEMAS AUTÓNOMOS

São os sistemas (com movimento de translação para usar um grau de liberdade, mas logo será generalizado) em que a força resultante não depende explicitamente do tempo: $F_t = f(s, v)$ como s e v são função do tempo, F_t dependerá implicitamente de t.

como $H(x_1, x_2) = C$. A condição necessária e suficiente para que um sistema seja conservativo é:

$\boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0}$ divergência da velocidade de fase nula em todo o espaço de fase.

Equação diferencial

$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos y = 3y$

pode ser escrita como sistema dinâmico autónomo:

$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = u \\ \frac{du}{dx} = 3y - yu^2 - \cos y \end{cases}$ variáveis de estado: (y, u) variável independente: x (em vez de t)

Um modelo mais realista, de **Holling-Tanner**, tem apenas um ciclo limite:

$\dot{x} = x\left(1 - \frac{x}{7}\right) - \frac{6xy}{7 + 7x}$ $\quad \dot{y} = \frac{y}{5}\left(1 - \frac{y}{2x}\right)$

x = presas , y = predadores

Comandos fixes

eigenvectors(matriz)

eigenvalues(matriz)

coefmatrix(lista_equacoes, lista_var

plotdf(lista_equacoes, lista_variaveis
usar trajectory at para ver evolucao

jacobian(lista_equacoes, lista_variaveis)

$$\boxed{F_t^c = -\frac{dU}{ds}}$$

E.Pot.E

$$\boxed{U_e = \frac{1}{2} k s^2}$$

$$|F_e| = k s$$

2. Modelo logístico. Também chamado de Verhulst

A taxa de natalidade é constante, a, mas a taxa de mortalidade aumenta diretamente proporcional à população.

Unidade SI de trabalho e energia

$1 \text{ joule} = 1\,J = 1\,N \cdot m = 1\,kg \cdot \frac{m^2}{s^2}$

O trabalho realizado por uma força conservativa, entre dois pontos P e Q é igual à energia potencial inicial, U_P, menos a energia potencial final, U_Q.

1. Modelo de Malthus

$\frac{f(x,t)}{x} = a$ = constante positiva

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = f(x,t) = ax$ (EDO de variáveis separáveis)

$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t a\,dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = at$

$\boxed{x(t) = x_0 e^{at}}$ crescimento exponencial da população

Teorema do trabalho e a energia mecânica.

O trabalho das forças não conservativas é igual ao aumento da energia mecânica do corpo.