Extremos locais

- Tal como acontece nas funções reais a uma variável, também é possível analisar a existência de *extremos locais* em funções reais a várias variáveis.

- Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis e $\vec{x}_0$ um ponto interior do seu domínio.
  i) A função $f(\vec{x})$ tem um *máximo local em* $\vec{x}_0$, se e só se:

  $$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ numa vizinhança de } \vec{x}_0.$$

  ii) A função *f* tem um *mínimo local em* $\vec{x}_0$, se e só se:

  $$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ numa vizinhança de } \vec{x}_0.$$

  Os *máximos locais* e os *mínimos locais* da função $f(\vec{x})$ constituem os *extremos locais* da função.

- Se uma função real a uma variável, $f(x)$, possui um extremo local em x_0, então:

  $$f'(x_0) = 0 \text{ ou } f'(x_0) \text{ não existe.}$$

- O teorema seguinte estabelece a relação entre o gradiente e a existência de extremos locais para uma função real a várias variáveis.

Teorema 13: Se a função real a várias variáveis $f(\vec{x})$ possui um *extremo local em* $\vec{x}_0$, então:

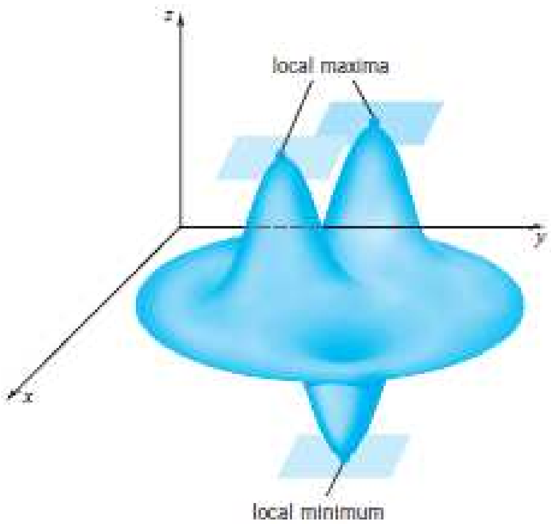
$$\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \text{ ou } \nabla f(\vec{x}_0) \text{ não existe.}$$

- Os pontos no interior do domínio de $f(\vec{x})$ onde o gradiente é nulo ou o gradiente não existe chamam-se *pontos críticos*. Estes são os únicos pontos onde poderão existir *extremos locais* (teorema 13).

- *Os pontos críticos onde o gradiente é nulo* designam-se por *pontos estacionários*. Os pontos estacionários onde não existem *extremos locais* (*máximos ou mínimos locais*) são designados por *pontos de sela*.

- No caso presente limitar-se-á a análise a funções reais a duas variáveis, $f(x,y)$. De um modo geral, o estudo deste problema em funções reais a mais de duas variáveis é demasiado complexo em termos do cálculo envolvido.

- Seja a função real a duas variáveis, $f(x,y)$, definida num conjunto aberto conexo, *U*, e continuamente diferenciável em *U*. O gráfico da função é a superfície $z = f(x,y)$.



Nos pontos onde $f(x,y)$ possui um máximo local ou um mínimo local, o gradiente, $\nabla f(x,y)$, é nulo e, portanto, o plano tangente à superfície é horizontal.

- Convém referir que o anulamento do gradiente num ponto apenas assinala a possibilidade da existência de um extremo local nesse ponto; no entanto, não o garante.

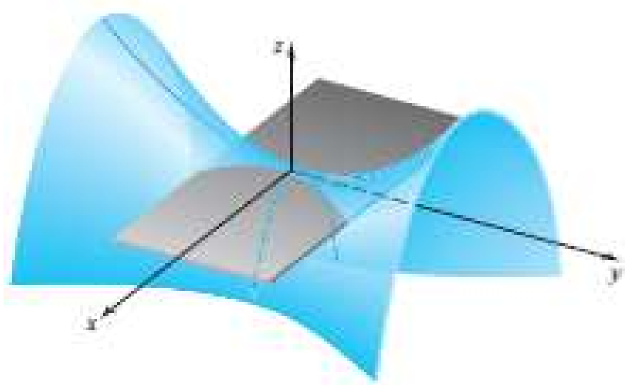
Exemplo 52: Seja a função real a duas variáveis:

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

O gráfico da função é o *paraboloide hiperbólico*:

$$z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Na origem o plano tangente à superfície é horizontal e, portanto, o gradiente é nulo, $\nabla f(0,0) = \vec{0}$.
Contudo, não é possível concluir que existe um máximo local ou um mínimo local neste ponto (trata-se de um *ponto de sela*).



Com efeito, considerando o comportamento da função ao longo do eixo dos *xx*, verifica-se que existe um *máximo local na origem*. Por outro lado, considerando o comportamento da função ao longo do eixo dos *yy*, verifica-se que existe um *mínimo local na origem*.

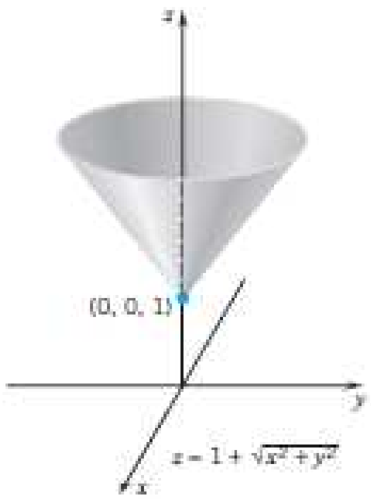
Exemplo 53: Seja a função:

$$f(x,y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

O gráfico da função é a folha superior do cone circular que tem o seu vértice no ponto $(0,0,1)$:

$$z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Analisando a figura é óbvio que o valor $f(0,0) = 1$ é um *mínimo local* da função.



Uma vez que as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

não estão definidas em $(0,0)$, conclui-se que $\nabla f(0,0)$ não existe.
Assim, o ponto $(0,0)$ *é um ponto crítico* da função $f(x,y)$, mas *não é um ponto estacionário*.
No ponto $(0,0,1)$ o plano tangente à superfície não está definido.

- Relembremos o *teste da segunda derivada* para uma função real a uma variável, $f(x)$. Assim, a função $f(x)$ possui um *mínimo local* em x_0, se $f''(x_0) > 0$; por outro lado, a função $f(x)$ possui um *máximo local* em x_0, se $f''(x_0) < 0$.

- O teorema seguinte estabelece um teste similar para funções reais a duas variáveis, $f(x,y)$, que é designado por *teste das derivadas parciais de segunda ordem*.

Teorema 14: Admita-se que $f(x,y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas numa vizinhança de (x_0,y_0) e que $\nabla f(x_0,y_0) = \vec{0}$. Sejam:

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \ , \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \ \text{ e } \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Considerando o *discriminante* $D = AC - B^2$:
i) Se $D < 0$, então (x_0,y_0) é um *ponto de sela*;
ii) Se $D > 0$ e $A > 0$, então $f(x,y)$ possui um *mínimo local* em (x_0,y_0);
iii) Se $D > 0$ e $A < 0$, então $f(x,y)$ possui um *máximo local* em (x_0,y_0).

- No exemplo seguinte faz-se uma interpretação geométrica do *teste das derivadas parciais de segunda ordem*.

Exemplo 54: Seja a função real a duas variáveis:

$$f(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{c}{2}y^2 \ , \text{com } a \neq 0 \ \wedge \ c \neq 0$$

O gráfico de *f* é um paraboloide:

$$z = \frac{a}{2}x^2 + \frac{c}{2}y^2 \tag{14}$$

Notando que

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = (ax)\vec{i} + (cy)\vec{j}$$

conclui-se que o gradiente é nulo na origem, $\nabla f(0,0) = \vec{0}$.
Sabendo que

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = a \ , \ B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0 \ \text{ e } \ C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = c$$

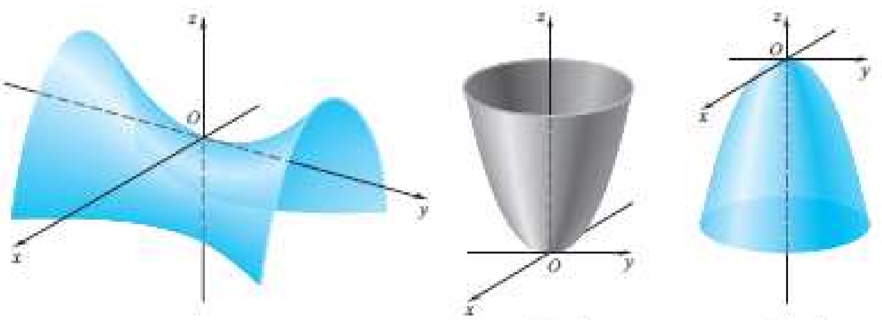
obtém-se o seguinte valor para o discriminante:

$$D = AC - B^2 = ac$$

Se $D < 0$, então a e c possuem sinais opostos; neste caso (14) descreve um *paraboloide hiperbólico*; neste caso, $(0,0)$ é um *ponto de sela*.

Se $D > 0$ e $a > 0$, então $c > 0$; neste caso (14) descreve um *paraboloide elíptico* definido no semieixo positivo do eixo dos *zz*; a função $f(x,y)$ possui um *mínimo local* em $(0,0)$.

Se $D > 0$ e $a < 0$, então $c < 0$; neste caso (14) descreve um *paraboloide elíptico* definido no semieixo negativo do eixo dos *zz*; a função $f(x,y)$ possui um *máximo local* em $(0,0)$.



$a > 0,\ c > 0$ $a < 0,\ c < 0$

$D < 0$ $D > 0$

Exemplo 55: Determine os pontos críticos e os extremos locais da função:

$$f(x,y) = -xye^{-(x^2+y^2)/2}$$

Solução:

As derivadas parciais são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -ye^{-(x^2+y^2)/2} + x^2ye^{-(x^2+y^2)/2} = y(x^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xe^{-(x^2+y^2)/2} + xy^2e^{-(x^2+y^2)/2} = x(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

O gradiente da função $f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/2}\left[y(x^2-1)\vec{i} + x(y^2-1)\vec{j}\right]$$

está definido em todos os pontos do seu domínio, pelo que, neste caso, os pontos críticos são pontos estacionários (pontos onde o gradiente é nulo). Uma vez que

$$e^{-(x^2+y^2)/2} \neq 0$$

então $\nabla f(x,y) = \vec{0}$, se e só se:

$$y(x^2-1) = 0 \quad \text{e} \quad x(y^2-1) = 0$$

As soluções destas equações são

$$x = 0 \ , \ y = 0 \ , \ x = \pm 1 \ , \ y = \pm 1$$

a que correspondem os pontos estacionários:

$$(0,0) \ , \ (1,1) \ , \ (1,-1) \ , \ (-1,1) \ , \ (-1,-1)$$

As derivadas parciais de segunda ordem são:

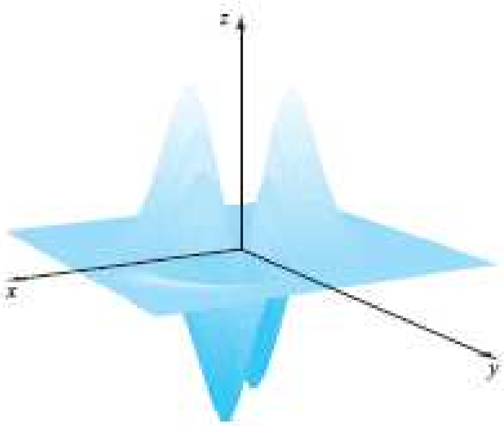
$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = xy(3 - x^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

$$B = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (x^2 - 1)(1 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

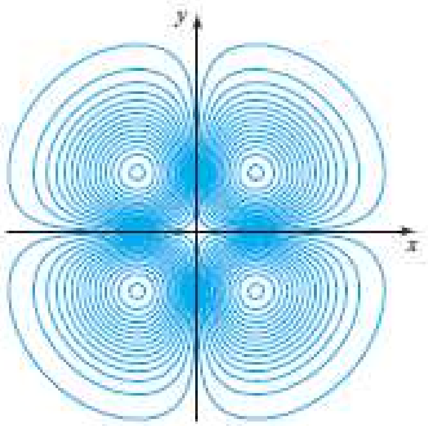
$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xy(3 - y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

A tabela seguinte apresenta os resultados obtidos para cada um dos pontos estacionários:

Ponto	*A*	*B*	*C*	*D*	Classificação	Extremo
(0,0)	0	-1	0	-1	ponto de sela	------
(1,1)	$2e^{-1}$	0	$2e^{-1}$	$4e^{-2}$	mínimo local	$-e^{-1}$
(1,-1)	$-2e^{-1}$	0	$-2e^{-1}$	$4e^{-2}$	máximo local	e^{-1}
(-1,1)	$-2e^{-1}$	0	$-2e^{-1}$	$4e^{-2}$	máximo local	e^{-1}
(-1,-1)	$2e^{-1}$	0	$2e^{-1}$	$4e^{-2}$	mínimo local	$-e^{-1}$



Gráfico



curvas de nível

- No caso de uma função real a uma variável, $f(x)$, o *teste da segunda derivada* só pode ser aplicado num ponto x_0 onde $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)\neq 0$; se $f''(x_0)=0$, o teste nada permite concluir.

- Uma situação semelhante ocorre quando se está em presença de uma função real a duas variáveis, $f(x,y)$. A aplicação do *teste das derivadas parciais de segunda ordem* só é possível em pontos (x_0,y_0) onde $\nabla f(x_0,y_0)=\vec{0}$ e o discriminante $D=AC-B^2\neq 0$. Se $D=0$, o teste nada permite concluir.

Exemplo 53: Sejam as funções

$$f(x,y)=x^4+y^4\ ,\quad g(x,y)=-(x^4+y^4)\quad \text{e}\quad h(x,y)=x^4-y^4$$

No ponto $(0,0)$, cada uma das funções possui gradiente nulo, enquanto o discriminante é $D=0$; nestas condições *o teste das derivadas parciais de segunda ordem é inconclusivo*.
No entanto, analisando o comportamento de cada uma das funções na vizinhança do ponto $(0,0)$,verifica-se:
i) A função *f* possui um *mínimo local* em $(0,0)$;
ii) A função *g* possui um *máximo local* em $(0,0)$;
iii) A função *h* possui um *ponto de sela* em $(0,0)$.
Enquanto as conclusões apontadas em i) e ii) são óbvias, o mesmo já não acontece em iii).
Para confirmar iii), note-se que $h(0,0)=0$, ao passo que em pontos situados na vizinhança de $(0,0)$ a função assume valores positivos e negativos:

$$h(x,0)>0\ ,\ \text{se}\ x\neq 0$$

$$h(0,y)<0\ ,\ \text{se}\ y\neq 0$$

Extremos absolutos

- Enquanto a existência de *extremos locais* num ponto interior, $\vec{x}_0$, do domínio de uma função real a várias variáveis depende do comportamento da função numa vizinhança de $\vec{x}_0$, os *extremos absolutos* dependem do comportamento da função em todo o seu domínio.

- Seja $f(\vec{x})$ uma função real a várias variáveis:
  i) A função $f(\vec{x})$ tem um *máximo absoluto em* $\vec{x}_0$, se e só se:

  $$f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ no domínio de } f(\vec{x}).$$

  ii) A função $f(\vec{x})$ tem um *mínimo absoluto em* $\vec{x}_0$, se e só se:

  $$f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}), \text{ para todo o } \vec{x} \text{ no domínio de } f(\vec{x}).$$

Reconstrução da função a partir do seu gradiente

- O teorema seguinte estabelece as condições para que um *campo vectorial seja gradiente.*

Teorema 15: Seja

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

um campo vectorial continuamente diferenciável num *conjunto aberto conexo* $D \subseteq \mathbb{R}^3$. O *campo vectorial é gradiente*,

$$\vec{f}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$$

se e só se:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ , \ \ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \ \text{ e } \ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

No caso de

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

e $D \subseteq \mathbb{R}^2$, as condições anteriores reduzem-se a:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Exemplo 57: Verifique que o campo vectorial

$$\vec{f}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j} = \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{x}} + 2x\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - \sqrt{x} + 1\right)\vec{j}$$

é gradiente e determine o campo escalar $\varphi(x,y)$, tal que $\vec{f}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

conclui-se que o campo vetorial $\vec{f}(x,y)$ é gradiente; então, existe um campo escalar $\varphi(x,y)$, tal que $\vec{f}(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$.
Notando que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = P(x,y) = \sqrt{y} - \frac{y}{2\sqrt{x}} + 2x$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = Q(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}} - \sqrt{x} + 1$$

recorrendo ao integral indefinido, resulta:

$$\varphi(x,y) = \int P(x,y)dx = x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + x^2 + \phi_1(y) + k_1 \qquad (15)$$

$$\varphi(x,y) = \int Q(x,y)dy = x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + y + \phi_2(x) + k_2 \qquad (16)$$

Compatibilizando (15) e (16), obtém-se:

$$\varphi(x,y) = x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + x^2 + y + k$$

Exemplo 58: Verifique que é gradiente o campo vectorial:

$$\vec{f}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} =$$

$$= (x + y + 1)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (-y + e^z)\vec{k}$$

Obtenha o campo escalar $\varphi(x,y,z)$, tal que $\vec{f}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$.

Solução:

Sabendo que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \;,\; \frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x} \;\text{ e }\; \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

conclui-se que o campo vetorial $\vec{f}(x,y,z)$ é gradiente; então, existe um campo escalar $\varphi(x,y,z)$, tal que $\vec{f}(x,y,z) = \nabla\varphi(x,y,z)$.
Notando que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z) = x + y + 1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,z) = x - z$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z) = -y + e^z$$

recorrendo ao integral indefinido, resulta:

$$\varphi(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx = \frac{x^2}{2} + xy + x + \phi_1(y,z) + k_1 \tag{17}$$

$$\varphi(x,y,z) = \int Q(x,y,z)dy = xy - zy + \phi_2(x,z) + k_2 \tag{18}$$

$$\varphi(x,y,z) = \int R(x,y,z)dz = -yz + e^z + \phi_3(x,y) + k_3 \tag{19}$$

Compatibilizando (17), (18) e (19), obtém-se:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + x + xy - yz + e^z + k$$