

## **CAPÍTULO 2 – ESTATÍSTICA DESCRITIVA**

### **Problemas**

#### **PROBLEMA 2.1**

No âmbito de uma campanha de lançamento de um novo modelo automóvel, um fabricante contempla a possibilidade de recorrer a uma série de comparações entre as características do modelo em causa e as de modelos concorrentes situados na mesma gama.

Entre as características que podem ser objecto de comparação figuram as seguintes:

- (i) consumo de combustível,
- (ii) ruído dentro da cabina, e
- (iii) segurança na travagem.

Para cada uma destas características, poderão ser escolhidos dados expressos em diferentes tipos de escalas. Para cada característica, dê exemplos de dados expressos em escalas distintas, discutindo os seus méritos e limitações.

#### **PROBLEMA 2.2**

Num determinado dia, o gabinete de um médico de uma universidade efectuou 73 consultas a alunos, tendo classificado estes segundo a faculdade a que pertenciam:

- Psicologia (P)
- Engenharia (E)
- Letras (L)
- Farmácia (F)
- Medicina (M)
- Outras (O)

Na tabela seguinte apresentam-se os resultados obtidos.

E	L	F	E	L	E	E	P	F	L
M	E	E	O	E	P	O	E	F	O
O	L	O	E	L	F	L	E	L	E
O	E	O	L	P	E	E	L	E	M
E	O	E	O	P	P	E	F	E	O
P	E	L	E	F	O	L	F	P	E
E	O	E	E	E	M	E	L	E	P
O	E	L							

Represente adequadamente e interprete a informação contida nestes dados.

#### **PROBLEMA 2.3**

Na tabela seguinte apresentam-se os valores (em Euros) das compras efectuadas por 64 clientes de uma casa comercial.

649	719	1863	129	3498	1295
2125	6849	938	97	219	4169
465	319	1045	2385	890	1197
444	1388	812	6468	2468	997
367	1493	775	6725	450	3495
749	569	2295	7495	2445	6791
890	3595	126	397	435	599
1197	525	985	650	2997	357
1630	1339	1199	444	6198	692
1185	997	746	1243	2150	168
4987	1383	1956	277		

Represente adequadamente e interprete a informação contida nestes dados.

#### PROBLEMA 2.4

Considere-se uma amostra constituída por 100 latas de pêssego em calda de uma determinada marca, cujo rótulo indica um peso médio líquido escorrido de 450 gramas. Na tabela seguinte incluem-se os pesos observados na amostra.

452	455	425	453	464	438	457	444	447	454
441	450	457	445	454	450	429	442	454	447
455	436	444	453	421	438	432	452	445	458
440	451	446	436	441	448	435	447	427	450
443	450	432	449	445	436	433	441	449	443
448	449	437	437	449	440	424	453	438	452
447	435	443	451	426	449	441	451	445	454
453	445	449	431	446	437	441	428	450	447
447	440	441	430	439	454	439	444	455	448
459	450	456	440	445	442	430	436	450	454

Represente adequadamente e interprete a informação contida nestes dados.

#### PROBLEMA 2.5

Na tabela seguinte apresentam-se os dados relativos à amostra considerada no problema anterior (2.4), agrupados num conjunto de 9 células (de amplitude 5 gramas).

Peso (gramas)	Frequência
[420-425[	2
[425-430[	5
[430-435[	6
[435-440[	14
[440-445[	18
[445-450[	23
[450-455[	23
[455-460[	8
[460-465[	1

Calcule medidas amostrais de localização, dispersão, assimetria e kurtose e compare-as com as que são obtidas directamente a partir dos dados do problema anterior.

### PROBLEMA 2.6

Na tabela seguinte apresentam-se os volumes de produção (em toneladas de produtos acabados) registados numa empresa metalomecânica em vinte dias sucessivos.

Dia	Volume de produção	Dia	Volume de produção
1	9.6	11	10.2
2	11.5	12	12.5
3	10.5	13	11.8
4	11.1	14	11.8
5	12.	15	10.0
6	10.3	16	11.8
7	9.1	17	11.7
8	10.7	18	11.3
9	8.6	19	14.4
10	10.3	20	10.1

Represente e interprete a informação contida nestes dados.

### PROBLEMA 2.7

Numa sondagem efectuada recentemente sobre audiências num país com apenas dois canais, TV1 e TV2, 1973 telespectadores responderam que estavam a ver televisão às 22 horas da última sexta-feira do mês passado.

Dos telespectadores do sexo feminino, 598 responderam que viam o programa da TV1, 212 seguiam a TV2 e 186 sintonizavam uma estação via satélite. As respostas dos telespectadores do sexo masculino foram as seguintes: 528 viam a TV1, 164 a TV2 e 285 uma estação recebida por satélite.

Represente adequadamente e interprete a informação contida nestes dados.

### PROBLEMA 2.8

Uma empresa que produz válvulas de um determinado tipo, recolheu informação relativa à dimensão de 30 lotes de fabrico dessas válvulas e ao correspondente custo directo de produção.

Na tabela seguinte apresentam-se os dados recolhidos: 30 pares ordenados (dimensão do lote em unidades, custos directos em euros).

(26, 2300)	(20, 2090)	(5, 1280)
(50, 3410)	(30, 2470)	(10, 1550)
(100, 6290)	(4, 1350)	(10, 1430)
(20, 1870)	(5, 1250)	(6, 1310)
(8, 1590)	(50, 3660)	(20, 2190)
(40, 3270)	(200, 11460)	(15, 1710)
(25, 2060)	(50, 3390)	(30, 2580)
(6, 1240)	(20, 2080)	(65, 4150)
(8, 1550)	(10, 1500)	(22, 2260)
(10, 1470)	(15, 1790)	(10, 1590)

Represente graficamente estes dados, ajuste uma relação linear entre as variáveis dimensão do lote e custo directo de produção e caracterize o grau de ajuste obtido.

## **CAPÍTULO 3 – TEORIA ELEMENTAR DA PROBABILIDADE**

### **Problemas**

#### **PROBLEMA 3.1**

Na tabela seguinte apresenta-se a composição por raça e género da população de um país.

		Género	
		Masculino	Feminino
Raça	Branca	1 726 348	2 110 253
	Negra	628 309	753 125
	Outra	15 239	7 435

Admita que se selecciona ao acaso um indivíduo desta população.

- (i) Qual a probabilidade de o indivíduo seleccionado ser branco?
- (ii) E a de ser negro?
- (iii) E a de ser uma mulher branca?
- (iv) Qual a probabilidade de o indivíduo seleccionado ser de raça branca, admitindo que é uma mulher?

Será que os acontecimentos «o indivíduo é mulher» e «o indivíduo é de raça negra» são independentes?

#### **PROBLEMA 3.2**

Calcule a probabilidade de, com uma aposta simples, ganhar cada um dos três primeiros prémios do Totoloto.

#### **PROBLEMA 3.3**

Calcule a probabilidade de, entre um conjunto de 25 pessoas reunidas numa sala, haver pelo menos duas que façam anos no mesmo dia.

#### **PROBLEMA 3.4**

O grupo empresarial Sucesso tem 13 directores, entre os quais figura você.

Numa sessão para quadros das empresas do grupo, os directores ocuparão lugares marcados numa mesa colocada sobre um palco. O critério de colocação é desconhecido, presumindo-se que a distribuição dos lugares seja aleatória.

Por razões circunstanciais, você não quer ficar ao lado do seu colega da Direcção Financeira. Acha que há uma probabilidade elevada de tal vir a suceder? Calcule essa

probabilidade antes de se decidir a telefonar à secretária encarregada da colocação das pessoas na sala.

### **PROBLEMA 3.5**

Um míssil encomendado à firma Joaquim Tiro & Filhos Lda. acerta e destrói determinado tipo de alvo inimigo com uma probabilidade de 30%.

Num ataque surpresa, quantos mísseis deverão ser disparados simultaneamente para que a probabilidade de destruir aquele tipo de alvo seja, pelo menos, de 90%?

### **PROBLEMA 3.6**

Admita que dois contentores A e B, cada um com 13 peças, incluem, respectivamente, 3 e 6 peças defeituosas. Considere que, por lapso, se perderam as referências dos contentores.

Se se seleccionar ao acaso um dos contentores e se dele se retirarem, também ao acaso, duas peças, qual a probabilidade de ambas serem boas? Calcule também a probabilidade de entre as duas peças haver pelo menos uma boa.

### **PROBLEMA 3.7**

Num determinado país faz sol em 75% dos dias e chove nos restantes 25%. Verificou-se que um tipo de barómetro, que se limita a indicar «sol» ou «chuva», dá frequentemente indicações erradas: prevê sol em 10% dos dias chuvosos e chuva em 30% dos dias com sol.

- (i) Qual a probabilidade de o barómetro errar a previsão?
- (ii) Qual a probabilidade de fazer sol num dia para o qual a previsão seja de chuva?

### **PROBLEMA 3.8**

Três máquinas – A, B e C – produzem, respectivamente, 60%, 30% e 10% do total de peças de um determinado tipo. Para cada uma das máquinas A, B e C, o número de peças defeituosas representa, respectivamente, 2%, 3% e 4% das peças produzidas pela máquina.

Admita que, de um contentor no qual se juntaram as peças, foi seleccionada ao acaso uma delas, que se revelou defeituosa. Calcule a probabilidade de esta peça ter sido produzida pela máquina C.

### **PROBLEMA 3.9**

Admita que 42% dos acidentes de aviação são causados por falhas estruturais e que, para este tipo de acidentes, a probabilidade de atribuir (correctamente) a sua ocorrência a uma falha estrutural é de 80%. Admita, ainda, que a probabilidade de um acidente cuja causa não é daquele tipo ser diagnosticado (incorrectamente) como devido a uma falha estrutural é de 15%.

Determine a probabilidade de um acidente ao qual foi atribuída como causa uma falha estrutural ter resultado efectivamente de uma falha deste tipo.

### PROBLEMA 3.10

Uma dona de casa dispõe de oito chaves, das quais três abrem a porta da sua despensa. Admita que a senhora tenta abrir a porta seleccionando sucessivamente as chaves de uma forma aleatória e pondo de lado as que já tentou (e que não abriam a porta). Calcule a probabilidade de a dona de casa ser bem sucedida na quarta tentativa.

### PROBLEMA 3.11

Dois estudantes combinaram encontrar-se à porta da biblioteca entre as 12h00 e as 13h00, de acordo com a seguinte regra: aquele que chegar em primeiro lugar espera pelo outro até ao limite de 15 minutos. Passado este tempo, vai-se embora.

Admitindo que cada estudante escolhe ao acaso, dentro do período estipulado, o momento da sua chegada, calcule a probabilidade do encontro se concretizar.

### PROBLEMA 3.12

O mercado do serviço de telemóvel reparte-se por três empresas: empresa A com uma quota de 41%, empresa B com 38% e empresa C com 21%.

Um estudo levado a cabo por uma associação de consumidores revelou que 17% dos utilizadores do serviço estavam insatisfeitos e que tais utilizadores se distribuíam da seguinte forma: 35% eram clientes de A, 35% de B e 30% de C.

Calcule a probabilidade de um cliente satisfeito estar ligado à rede da empresa B.

### PROBLEMA 3.13

Dois jogadores, A e B, disputam um jogo na TV. Em cada jogada, cada um dos participantes selecciona ao acaso um de seis temas, lançando um dado. Seguidamente terá de responder a uma pergunta do tema seleccionado.

Na tabela seguinte apresenta-se, para cada jogador, as probabilidades de sucesso nas respostas às perguntas de cada tema.

	Desporto	Literatura	Política	Cinema	Telenovela	Música
A	0.90	0.10	0.80	0.10	0.40	0.30
B	0.40	0.50	0.70	0.55	0.20	0.85

Calcule a probabilidade de, numa jogada, sair o tema Desporto a ambos os jogadores, sabendo que, nessa jogada, A acerta e B falha.

## **CAPÍTULO 4 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS. DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE**

### **Problemas**

#### **PROBLEMA 4.1**

Uma empresa de fiscalização de obras de construção civil tem 7 fiscais, dos quais 2 são do sexo feminino. Para visitar as obras de uma ponte ferroviária, foram seleccionados ao acaso dois fiscais. Denote-se por  $Y$  o número de mulheres seleccionadas.

- (i) Defina o espaço amostral da experiência, designando os fiscais por A, ..., E (homens) e F, G (mulheres).
- (ii) Defina o valor da variável aleatória  $Y$ , para cada elemento do espaço amostral.
- (iii) Defina as funções de probabilidade e de distribuição da variável  $Y$ . Represente ambas as funções na forma tabular e através de diagramas de barras.
- (iv) Calcule o valor esperado, o desvio padrão e o coeficiente de assimetria da variável  $Y$ .

#### **PROBLEMA 4.2**

Num balcão de uma companhia de aviação, o intervalo de tempo,  $\Delta t$  [minutos], que separa duas quaisquer chamadas consecutivas para reserva de voos, tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(\Delta t) = \begin{cases} e^{-\Delta t}, & \text{para } \Delta t \geq 0 \\ 0 & , \text{ para } \Delta t < 0 \end{cases}$$

- (v) Calcule a probabilidade  $P(\Delta t > 2)$ .
- (vi) Calcule a probabilidade  $P(\Delta t > 3)$ .
- (vii) Calcule a probabilidade condicional de  $\Delta t > 3$ , dado que  $\Delta t > 1$  (compare esta probabilidade com a obtida em (i) e procure generalizar a relação entre elas).

#### **PROBLEMA 4.3**

Admita que, para acções de uma determinada empresa cotada na bolsa de Nova Iorque, o lucro anual por acção, depois de impostos, aqui denotado por  $x$  [US\$], tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{27}\right) \cdot (9x - 6x^2 + x^3), & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & , \text{ para outros valores de } x \end{cases}$$

- (i) Represente graficamente esta função.



- (ii) Calcule as probabilidades seguintes:  
 $P(x \leq 1.50)$ ,  $P(x \geq 2)$  e  $P(1.00 \leq x \leq 2.5)$ .
- (iii) Calcule a função de distribuição  $F(x)$  e represente-a graficamente.

#### PROBLEMA 4.4

Admita que, num determinado processo de fabrico, a temperatura da água registada no início de cada turno no reservatório «R» segue uma distribuição com valor esperado  $153^\circ \text{F}$  e desvio padrão  $7^\circ \text{F}$ . Calcule estes dois parâmetros da distribuição da temperatura quando esta for expressa em  $^\circ \text{C}$ .

#### PROBLEMA 4.5

Numa determinada barragem, a relação entre a cota a montante e o volume de água armazenada na albufeira é a seguinte:

$$N = 75.22 + 0.2511 \cdot V - 0.000481 \cdot V^2 + 0.386 \cdot 10^{-6} \cdot V^3$$

onde

$N$ : cota a montante [m]

$V$ : volume de água armazenada [ $10^6 \text{ m}^3$ ]

No fim do mês de Março, contempla-se a possibilidade de efectuar uma reparação que impede a utilização dos grupos de geradores. Durante a reparação, que decorrerá ao longo de um período de 3 meses, o volume de água que afluirá à albufeira,  $\Delta V$  (expresso em  $10^6 \text{ m}^3$ ), segue uma distribuição com valor esperado  $\mu = 20$  e variância  $\sigma^2 = 225$ .

Admitindo que, no início da reparação, o volume de água armazenada na barragem é  $V_0 = 400 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ , calcule o valor esperado e o desvio padrão da cota a montante no fim da reparação, se no decurso desta não for descarregado qualquer caudal.

#### PROBLEMA 4.6

No planeamento de um concerto ao ar livre, programado para o dia 6 de Maio, a organização considera que a adesão do público depende do estado do tempo. Na tabela seguinte apresentam-se as estimativas do número de espectadores em função do estado do tempo. Foi ainda pedido ao instituto de meteorologia informação relativa ao estado do tempo no mês de Maio durante os últimos 10 anos.

Estado do tempo	Frequência relativa do estado do tempo [%]	Estimativa do n.º de espectadores
Húmido e frio	20	5000
Húmido e quente	20	20000
Seco e frio	10	30000
Seco e quente	50	50000

- (i) Qual o valor esperado do número de espectadores?

- (ii) Considere que os bilhetes vão ser vendidos a 4.5 € cada. Os custos associados à limpeza e à segurança da área do concerto são de 1.0 € por cada bilhete vendido. Sabe-se que o grupo musical cobra 75000 euros e que a organização do concerto custará 30000 euros (valor que inclui os custos de aluguer de espaço). Sabendo que os organizadores do concerto pretendem ter lucro, recomendaria avançar com o concerto? Justifique.
- (iii) Suponha que a organização decidiu avançar com a preparação do concerto. Na semana anterior à realização do concerto a previsão do tempo não é favorável, de tal forma que os quatro tipos de condições meteorológicas têm agora as seguintes probabilidades estimadas:

Estado do tempo	Probabilidade de ocorrência [%]
Húmido e frio	30
Húmido e quente	20
Seco e frio	20
Seco e quente	30

Se o concerto for cancelado, a organização terá de pagar metade dos custos de organização mais 7500 euros ao grupo musical devido ao cancelamento do concerto. Nestas condições, recomendaria avançar ou cancelar o concerto?

#### PROBLEMA 4.7

Uma empresa de veículos de aluguer possui três veículos com idades e estados de conservação diferentes. Considere as seguintes probabilidades associadas à disponibilidade num determinado dia:

Veículo mais novo: 0.95

Veículo mais antigo: 0.85

Terceiro veículo: 0.9

A disponibilidade de um dado veículo não é afectada pelo facto de cada um dos outros estar, ou não, disponível.

- Defina a função de probabilidade e a função distribuição para a variável “número de veículos disponíveis por dia”.
- Calcule o valor esperado e o desvio padrão da variável definida na alínea anterior.
- Admitindo que o lucro líquido relativo à utilização de cada Veículo é de 50 euros por dia, calcule o valor esperado e o desvio padrão do lucro líquido por dia.

## **CAPÍTULO 6 – CARACTERIZAÇÃO DE ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS UNIVARIADAS**

### **Problemas**

#### **PROBLEMA 6.1**

O patrão da firma patrocinadora RFM estima que a probabilidade de um Fórmula 1 de determinada marca completar um Grande Prémio é de 20%.

- (i) Calcule a probabilidade de, num conjunto de 6 Grandes Prémios, o Fórmula 1 completar
  - a) exactamente 2 Grandes Prémios.
  - b) pelo menos 3 Grandes Prémios.
  - c) no máximo 2 Grandes Prémios.
- (ii) Se a firma patrocinar 3 carros Fórmula 1 da marca em questão, calcule a probabilidade de, no conjunto dos 6 Grandes Prémios, haver pelo menos três nos quais haja, no mínimo, 2 carros Fórmula 1 à chegada.

#### **PROBLEMA 6.2**

O Conselho de Gerência de uma determinada empresa, constituído por um presidente e seis vogais, prepara-se para tomar uma decisão polémica. O presidente deseja ver a «sua» proposta aprovada, mas não está certo de conseguir a maioria dos 7 votos do Conselho (maioria essa que é necessária para que consiga a aprovação). Admite-se que os seis vogais actuarão independentemente e que a probabilidade de que cada um deles vote favoravelmente a proposta é de 35%.

- (i) Calcule a probabilidade de a proposta ser aprovada.
- (ii) Qual será o valor desta probabilidade se o presidente tiver a certeza que dois dos vogais votarão a favor dele?
- (iii) Admite que, em alternativa a (ii), o presidente convoca dois vogais para, antes da votação do Conselho, formarem uma aliança. Os três concordam em fazer uma votação prévia entre si e comprometem-se a formar um bloco no Conselho, votando neste de acordo com a decisão tomada por maioria entre si. Calcule a probabilidade de, nestas condições, a proposta vir a ser aprovada.

#### **PROBLEMA 6.3**

Uma empresa de travões sabe que 5% dos calços por si produzidos são defeituosos. Uma remessa de 10 calços foi enviada a um cliente que usa o seguinte critério de recepção:

«A remessa é rejeitada se, entre 2 calços seleccionados ao acaso, houver pelo menos um defeituoso.»

Calcule a probabilidade de a remessa ser rejeitada.

#### PROBLEMA 6.4

Admita que, no final de uma linha de soldadura automática, 7% das peças são retocadas manualmente por um operador. Admita ainda que o ritmo de produção é uma peça por minuto.

- (i) Calcule a probabilidade de o operador permanecer dez minutos sem executar nenhum retoque.
- (ii) Calcule a probabilidade de, numa sequência de seis peças, a última ser a segunda peça a necessitar de retoque.
- (iii) Calcule o tempo que, em média, o operador permanece sem executar nenhum retoque.

#### PROBLEMA 6.5

Para comemorar o 50º aniversário de uma revolução, os correios de um país puseram recentemente em circulação um conjunto de seis selos com um valor correspondente à tarifa mínima de expedição de cartas.

Um determinado coleccionador possui já quatro daqueles selos e continuará a recolher os selos de todas as cartas que lhe forem dirigidas. Admitindo que cada carta recebida contém um só selo, defina a distribuição de probabilidade da variável

$Y$ : número de cartas com um selo comemorativo da revolução recebidas pelo coleccionador até estar completa a sua colecção.

#### PROBLEMA 6.6

De um lote de 300 peças retiram-se 5. Admitindo que a percentagem de peças defeituosas no lote é de 1%, calcule a probabilidade de, entre as 5 peças retiradas, haver pelo menos uma que é defeituosa.

#### PROBLEMA 6.7

Uma máquina que funciona em contínuo tem, em média, duas avarias por cada turno de 8 horas de funcionamento. Para efeitos práticos, pode considerar-se que as avarias são reparadas instantaneamente.

Se numa oficina estiverem a funcionar em simultâneo 20 máquinas daquele tipo, calcule:

- (i) a probabilidade de ocorrerem 3 avarias nos últimos 10 minutos de um turno;
- (ii) o valor esperado e a variância do número global de avarias por hora.

#### PROBLEMA 6.8

Num processo de fabricação de placas de vidro produzem-se pequenas bolhas que se distribuem aleatoriamente pelas placas, com uma densidade média de  $0.4$  bolhas/m<sup>2</sup>.

- (i) Calcule a probabilidade de, numa placa de  $1.5 \times 3.0$  m<sup>2</sup>, haver pelo menos uma bolha.
- (ii) Calcule a probabilidade de, num conjunto de 6 placas de  $1.5 \times 3.0$  m<sup>2</sup>, haver pelo menos quatro sem bolhas.

### PROBLEMA 6.9

Um entreposto, com capacidade para armazenar 80 toneladas de cimento, é abastecido todos os dias por um comboio, que o enche durante a noite.

Ao entreposto dirigem-se diariamente camiões com capacidade para transportar 20 toneladas, de acordo com uma distribuição de Poisson com parâmetro  $\lambda = 3/\text{dia}$ .

Admita que, se houver cimento, cada camião será carregado até ao limite da sua capacidade.

- (i) Determine o valor esperado da quantidade de cimento que é transferida diariamente do comboio para o entreposto.
- (ii) Calcule o valor esperado da procura não satisfeita diariamente.

### PROBLEMA 6.10

Um determinado casino, situado num país exótico, lançou um novo jogo de dados. No início do jogo o jogador escolhe uma face do dado, lançando-o posteriormente de uma forma sucessiva. Uma partida acaba ou quando o jogador consegue obter três vezes a face que escolheu (e ganha 30 moedas de ouro), ou ao fim de seis tentativas se, nesses lançamentos, não obtiver os três resultados com a face seleccionada (e perde 10 moedas de ouro). O Sr. Jo Gador foi de imediato experimentar este novo jogo.

- (i) Calcule a probabilidade de o Sr. Jo Gador ganhar uma partida.
- (ii) O Sr. Jo Gador segue uma regra: depois de ganhar uma partida pára de jogar. Quantas partidas deve ele jogar para que a probabilidade de ganhar uma partida seja de pelo menos 25%?
- (iii) Para além de ter decidido parar de jogar após a primeira partida que venha a ganhar, o Sr. Jo Gador decidiu ainda abandonar o jogo se ao fim de 5 partidas não tiver ganho nenhuma. Calcule o lucro esperado do Sr. Jo Gador se seguir estas regras.

## **CAPÍTULO 7 – CARACTERIZAÇÃO DE ALGUMAS DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS UNIVARIADAS**

### **Problemas**

#### **PROBLEMA 7.1**

O tempo de funcionamento sem avarias de uma determinada máquina de produção contínua segue uma lei Exponencial Negativa com valor esperado igual a 4.5 horas. Imagine que a máquina é recolocada em funcionamento no instante  $t = 0$  horas.

- (i) Qual a probabilidade de não ocorrer qualquer avaria antes do instante  $t = 6$  horas?
- (ii) Admitindo que a máquina se encontrava ainda em funcionamento no instante  $t = 4$  horas, qual a probabilidade de não ocorrer qualquer avaria antes do instante  $t = 6$  horas?
- (iii) Qual a probabilidade de se verificarem duas avarias durante as primeiras 6 horas de funcionamento da máquina?

#### **PROBLEMA 7.2**

A altura dos cidadãos adultos de um determinado país segue uma distribuição Normal com valor esperado igual a 1.70 m e com desvio padrão igual a 0.05 m.

- (i) Qual a probabilidade de a altura de um cidadão ser de 1.80 m?
- (ii) Qual a probabilidade de a altura de um cidadão ultrapassar 1.80 m?
- (iii) Sabe-se que um determinado cidadão tem uma altura superior a 1.75 m. Qual a probabilidade de ter uma altura superior a 1.80 m?
- (iv) Qual a proporção de cidadãos que têm alturas compreendidas entre 1.60 m e 1.80 m?

#### **PROBLEMA 7.3**

Admita-se que o rendimento mensal (em milhares de euros) dos agricultores numa determinada região tem valor esperado 3.25 e variância 0.25 e segue uma distribuição Lognormal.

- (i) Qual a probabilidade de o rendimento mensal de um agricultor ser superior a 3.25 milhares de contos?
- (ii) Qual o rendimento mensal mediano?
- (iii) Qual a proporção de agricultores cujos rendimentos mensais são inferiores a 0.9 milhares de euros?

#### **PROBLEMA 7.4**

Admita que, por engano, se juntaram dois lotes: um incluindo 5000 peças com grau qualidade A e outro integrando 2000 peças com grau qualidade B.

Qual a probabilidade de, numa amostra de dimensão 300 seleccionada aleatoriamente a partir da mistura dos dois lotes, haver mais do que 220 peças com grau qualidade A?

### PROBLEMA 7.5

A variável  $X$  segue uma distribuição  $\chi^2$  com 19 graus de liberdade.

- (i) Determine o valor  $x_0$ , tal que  $P(X < x_0) = 5\%$ .
- (ii) Determine a probabilidade  $P(8.91 < X < 22.72)$ .

### PROBLEMA 7.6

A variável  $V$  segue uma distribuição  $t$  com 7 graus de liberdade.

- (i) Determine o valor  $v_0$ , tal que  $P(V > v_0) = 1\%$ .
- (ii) Determine a probabilidade  $P(-1.12 < V < 2.99)$ .

### PROBLEMA 7.7

A variável  $U$  segue uma distribuição  $F_{24, 30}$

- (i) Determine o valor  $u_0$ , tal que  $P(U > u_0) = 5\%$ .
- (ii) Determine o valor  $u_1$ , tal que  $P(U < u_1) = 1\%$ .

### PROBLEMA 7.8

As longevidades de 2 tipos de pilhas – medidas, em horas, de acordo com uma norma europeia – seguem as seguintes distribuições:

- Bateria T: distribuição Normal  $N(150, 5^2)$
- Bateria A: distribuição Normal  $N(156, 3^2)$

Calcule a probabilidade de uma pilha do tipo T ter uma longevidade superior à de uma pilha qualquer do tipo A.

## **CAPÍTULO 8 – AMOSTRAGEM ALEATÓRIA. DISTRIBUIÇÕES POR AMOSTRAGEM**

### **Problemas**

#### **PROBLEMA 8.1**

O número de computadores pessoais vendidos por semana numa loja segue a seguinte distribuição:

$y$	$p(y)$
0	0.10
1	0.15
2	0.45
3	0.30

Admita que as vendas registadas em quaisquer duas semanas consecutivas são independentes.

- Calcule o valor esperado e o desvio padrão das vendas quinzenais.
- Defina a função de probabilidade das vendas quinzenais e verifique, com base nela, os resultados obtidos na alínea anterior.
- Gere duas amostras aleatórias de vendas semanais (cada uma com dimensão 500) e a partir delas construa uma amostra de vendas quinzenais; calcule a média, o desvio padrão e o coeficiente de assimetria desta amostra de vendas quinzenais.

#### **PROBLEMA 8.2**

Uma empresa fabricante de brinquedos distribui os seus jogos por duas grandes lojas, uma situada no Porto e outra em Lisboa. O número de jogos vendidos por dia na loja do Porto segue uma distribuição  $N(150, 25^2)$ . Relativamente à loja de Lisboa, o número de jogos vendidos por dia segue uma distribuição  $N(200, 30^2)$ .

- Qual a probabilidade de num determinado dia serem vendidos mais jogos na loja do Porto que na de Lisboa?
- Qual a probabilidade de em 200 dias serem vendidos mais do que 69000 jogos no conjunto das duas lojas?

#### **PROBLEMA 8.3**

Um elevador de acesso a um grupo de galerias de uma mina tem capacidade nominal de 3800 kg. Os mineiros que usam regularmente o elevador são 650 e têm pesos que seguem uma distribuição com valor esperado de 75 kg e desvio padrão de 8 kg.

Calcule a probabilidade de ser excedida a capacidade nominal do elevador quando nele se encontram 50 mineiros.



#### PROBLEMA 8.4

Numa recente publicação da União Europeia incluíam-se estatísticas relativas aos salários dos engenheiros recém formados a trabalhar em países da Comunidade Europeia. O valor esperado do salário horário na Alemanha era estimado em 15.4 Euros. Para Portugal, a estatística correspondente era de 11.2 Euros. O desvio padrão amostral dos salários horários nos dois países é de 3.0 Euros.

Considere que foram seleccionados aleatoriamente 40 engenheiros recém-formados na Alemanha e 50 engenheiros recém-formados em Portugal, sendo-lhes perguntado o valor do seu salário horário.

- (i) Qual a probabilidade da média dos salários dos 40 engenheiros inquiridos na Alemanha estar entre 15 e 16 Euros?
- (ii) Qual a probabilidade da diferença entre a média dos salários dos 40 engenheiros inquiridos na Alemanha e dos 50 engenheiros inquiridos em Portugal ser superior a 4.5 Euros?

#### PROBLEMA 8.5

Os três lados de um determinado tipo de peças paralelepipedicas têm comprimentos que seguem distribuições Normais independentes com parâmetros idênticos:  $\mu = 30$  cm e  $\sigma^2 = 25$  cm<sup>2</sup>.

- (i) Calcule o valor esperado e o desvio padrão do volume de peças em questão.
- (ii) Determine a probabilidade de o volume das peças exceder 35 litros.
- (iii) Repita os cálculos das alíneas anteriores, admitindo agora que os três lados de cada peça têm o mesmo comprimento, que segue uma distribuição Normal  $N(\mu = 20$  cm,  $\sigma^2 = 25$  cm<sup>2</sup>).

#### PROBLEMA 8.6

A variável  $X$  segue uma distribuição Exponencial Negativa com valor esperado  $\mu = 3$ . Recorrendo à geração de números aleatórios, caracterize a distribuição desta variável, bem como a da média amostral calculada com base em amostras aleatórias de dimensão  $N = 2, 5, 10$  e  $15$ .

#### PROBLEMA 8.7

A partir de duas amostras independentes de dimensão 500 de um variável  $U(0,1)$ , e recorrendo ao método de Box-Muller, gere duas amostras independentes de dimensão 500 de uma variável  $N(0,1)$ . Caracterize tais amostras.

#### PROBLEMA 8.8

Admita que, em média, chegam 4 navios por hora a um determinado cais (pode admitir-se que as chegadas seguem uma distribuição de Poisson).

- (i) Gere três amostras aleatórias do número de navios que chegam ao cais num período de 3 horas.

- (ii) Supondo que não conhecia a distribuição populacional correspondente ao número de navios que chegam aos cais, estime, com base nas amostras geradas, o número médio de navios que chegam ao cais por hora.

## **CAPÍTULO 10 – ESTIMAÇÃO POR INTERVALO**

### **Problemas**

#### **PROBLEMA 10.1**

Um conjunto de 140 condutores de camião, escolhidos aleatoriamente nas estradas nacionais, dispôs-se a participar numa experiência que tinha por objectivo medir os seus tempos de reacção depois do almoço. A média e o desvio padrão dos tempos observados foram, respectivamente, 0.85 e 0.20 segundos.

Determine o intervalo de confiança a 95% para o valor esperado do tempo de reacção dos condutores em causa, após o almoço.

#### **PROBLEMA 10.2**

A empresa SCB controla regularmente a resistência à rotura dos cabos por si produzidos. Recentemente, foram analisadas as tensões de rotura de 10 cabos SCB-33R seleccionados aleatoriamente a partir de um lote de grandes dimensões, tendo sido obtidos os seguintes resultados:

$$\begin{cases} \bar{x} = 4537 & \text{kg / cm}^2 \\ s = 112 & \text{kg / cm}^2 \end{cases}$$

O director comercial pretende saber qual o intervalo de confiança (aberto à direita), a 95%, para o valor esperado da tensão de rotura dos cabos do lote em causa. Defina esse intervalo.

#### **PROBLEMA 10.3**

No âmbito do estudo de uma determinada operação de montagem, recolheram-se 25 observações do tempo necessário para a sua realização. A variância amostral obtida foi de  $(0.3 \text{ horas})^2$ .

Construa os intervalos de confiança a 90, 95 e 99% para a variância dos tempos de montagem, indicando as hipóteses subjacentes à construção destes intervalos.

#### **PROBLEMA 10.4**

O director fabril de uma empresa industrial que emprega 4000 operários emitiu um novo conjunto de normas internas de segurança. Passada uma semana, seleccionou aleatoriamente 300 operários e verificou que apenas 75 deles conheciam suficientemente bem as normas em causa.

Construa um intervalo de confiança a 95% para a proporção de operários que conheciam adequadamente o conjunto de normas uma semana após a sua emissão.

#### **PROBLEMA 10.5**

O gerente de um banco está interessado em analisar a diferença entre os valores esperados dos saldos das contas à ordem de duas das suas agências. De cada uma delas foi recolhida uma amostra aleatória de saldos, tendo-se registado os seguintes resultados:

Agência A: Dimensão da amostra:  $N_A = 17$

$$\begin{cases} \bar{x}_A = 48.2 & \text{euros} \\ s_A = 2.74 & \text{euros} \end{cases}$$

Agência B: Dimensão da amostra:  $N_B = 13$

$$\begin{cases} \bar{x}_B = 41.5 & \text{euros} \\ s_B = 3.91 & \text{euros} \end{cases}$$

Calcule os intervalos de confiança a 90% e a 95% para a diferença entre os valores esperados dos saldos à ordem das agências A e B.

### PROBLEMA 10.6

No âmbito de um inquérito efectuado com o objectivo de medir a audiência de um semanário, foram inquiridos 350 quadros superiores da função pública e 325 gestores de empresas. Uns e outros foram seleccionados aleatoriamente.

De entre os primeiros, 105 declararam que tinham lido a última edição. Para os segundos, aquele número foi de 130.

Defina um intervalo de confiança a 99% para a diferença de proporções reais de gestores e de quadros da função pública que leram a última edição do semanário em causa.

### PROBLEMA 10.7

O gabinete de projecto de uma empresa de material de construção civil pretende estimar a tensão de rotura do material utilizado num determinado tipo de tubos.

Com base num vasto conjunto de ensaios realizados no passado, estima-se que o desvio padrão da tensão de rotura do material em causa é de 70 psi.

Deseja-se definir um intervalo de confiança a 99% para o valor esperado da tensão de rotura, pretendendo-se que a sua amplitude não exceda 60 psi. Qual o número de ensaios necessário para definir este intervalo?

### PROBLEMA 10.8

A direcção de uma Faculdade dispõe-se a oferecer aos seus 3800 alunos a possibilidade de estes frequentarem aulas ao sábado de manhã, se a procura para este horário for suficientemente alta. Qual a dimensão apropriada da amostra de alunos a inquirir, para que a amplitude do intervalo de confiança a 95% para a proporção de alunos com interesse por aquele horário não exceda 0.1?

Admita que não existe qualquer estimativa desta proporção e que não há tempo para recolher uma amostra piloto.

## **CAPÍTULO 11 – TESTE DE HIPÓTESES**

### **Problemas**

#### **PROBLEMA 11.1**

A empresa MQL garante que, se os pneus forem utilizados em condições normais, têm uma vida esperada superior a 40000 km.

Uma amostra constituída por 30 pneus utilizados nas condições acima referidas proporcionou os seguintes resultados:

$$\bar{x} = 43\,200 \text{ km}$$

$$s = 8\,000.$$

Teste, ao nível de significância de 5%, se os pneus têm a vida esperada que o fabricante reivindica.

#### **PROBLEMA 11.2**

Duas máquinas são utilizadas no fabrico de anéis de metal. O director de produção pretende saber se o valor esperado dos diâmetros dos anéis produzidos na máquina 1 é maior do que o dos anéis produzidos na máquina 2.

Para o efeito foram recolhidos os seguintes dados:

Máq.1 (amostra de dimensão 10):  $\bar{x}_1 = 1.051 \text{ cm}$  e  $s_1 = 0.021 \text{ cm}$

Máq.2 (amostra de dimensão 15):  $\bar{x}_2 = 1.036 \text{ cm}$  e  $s_2 = 0.015 \text{ cm}$ .

Admitindo que os diâmetros dos anéis seguem distribuições Normais, teste se  $\mu_1 > \mu_2$ , ao nível de significância de 5%.

#### **PROBLEMA 11.3**

Uma empresa construtora de equipamento para a industria alimentar pretende adquirir termóstatos para comandar a abertura de um certo tipo de fornos, contemplando a possibilidade de os adquirir a um dos fornecedores  $A$  ou  $B$ .

O fornecedor  $B$  vende os termóstatos mais caros, invocando que são os mais fiáveis do mercado.

Num ensaio de 9 termóstatos do fornecedor  $A$  e 11 do fornecedor  $B$ , todos regulados para actuarem à mesma temperatura, as temperaturas observadas de abertura dos fornos foram as seguintes:

Fornecedor A: 423 425 401 430 417 425 416 421 419

Fornecedor B: 419 414 422 435 418 421 420 410 406 418 421

Verifique, ao nível de significância de 5%, se os resultados confirmam a maior fiabilidade dos termóstatos fornecidos por  $B$ .

#### PROBLEMA 11.4

Num processo de fabricação de placas de vidro, produzem-se bolhas que se distribuem aleatoriamente pelas placas. Com base na abundante informação recolhida pelo Departamento de Qualidade, a densidade média de bolhas estimava-se, até há pouco tempo, em 0.4 bolhas/m<sup>2</sup>.

Recentemente fez-se uma tentativa para melhorar o processo produtivo, em particular no tocante ao aparecimento daqueles defeitos. Depois de serem introduzidas as alterações no processo recolheu-se uma amostra constituída por 15 placas de 1.5·3.0 m<sup>2</sup> e registou-se o número de bolhas em cada uma delas. Os resultados foram os seguintes:

$$\{1, 0, 3, 0, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 2, 1\}.$$

Verifique, ao nível de significância de 5%, se a densidade de bolhas diminui.

#### PROBLEMA 11.5

Uma empresa de aluguer de automóveis que opera numa cidade resolveu publicar um anúncio num jornal diário. Nas duas anteriores publicações do anúncio, os números de contratos de aluguer celebrados por dia foram os seguintes:

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N.º de contratos:	22	19	19	24	21	25	22	21	19	24	22	23	24	19

Nos três dias seguintes à publicação do anúncio, o número de contratos celebrados foi de 25, 24 e 27 respectivamente.

- Poder-se-ia concluir, após se ter conhecimento do primeiro destes resultados (25), que o anúncio teve um efeito positivo sobre o número de contratos? Admita, embora a aproximação se possa considerar algo grosseira, que a variável “número de contratos celebrados diariamente” antes e depois do anúncio segue, aproximadamente, uma distribuição Normal. Efectue o teste adequado, ao nível de significância de 5%.
- Com base nos três resultados observados após a publicação do anúncio, a conclusão seria a mesma?

#### PROBLEMA 11.6

Sete indivíduos saudáveis ofereceram-se para realizar uma experiência envolvendo uma nova droga para combater a insónia. Os sete indivíduos submeteram-se, antes e depois de ingerir a tal droga, a um exame em que foi medido (em centésimos de segundo) o tempo de resposta a um sinal sonoro (admite-se que, em ambas as situações, o tempo de resposta se distribui Normalmente). Os resultados desse exame apresentam-se na seguinte tabela:

	Indivíduo						
	A	B	C	D	E	F	G
Tempo de reacção com droga	17	27	39	27	30	21	36
Tempo de reacção sem droga	19	22	34	21	27	24	29

Teste, ao nível de significância de 5%, se a tal droga provoca, como efeito secundário, o aumento do tempo de resposta a estímulos auditivos.

### PROBLEMA 11.7

No laboratório DMC foi recentemente desenvolvido um método mais barato e mais rápido do que o convencional para efectuar certas análises de rotina.

Em testes realizados com o objectivo de comparar a fiabilidade do novo método com a do convencional, repetiu-se sucessivamente a mesma análise, tendo-se obtido os seguintes resultados:

	N.º de observações	$\sum_n (x_n - \bar{x})^2$
Método convencional	24	30.5
Método novo	30	55.7

- Poder-se-á concluir que o novo método é menos fiável do que o método convencional?
- Será que a média de 3 observações obtidas com o novo método é mais precisa do que uma observação obtida com o método convencional?

Efectue os testes adequados ao nível de significância de 5%.

### PROBLEMA 11.8

Um molde de injeção tem produzido peças de um determinado material isolante térmico com uma resistência à compressão com valor esperado de  $5.18 \text{ kg/cm}^2$  e variância de  $0.0625 \text{ (kg/cm}^2\text{)}^2$ .

As últimas 12 peças produzidas nesse molde foram recolhidas e ensaiadas, tendo-se obtido para a resistência à compressão o valor de  $4.95 \text{ kg/cm}^2$ . Admite-se que a resistência à compressão segue uma distribuição Normal.

- Poder-se-á afirmar, ao nível de significância de 5%, que as peças produzidas recentemente são menos resistentes do que o habitual?
- Qual a potência de teste efectuado em (i), admitindo que o valor esperado da resistência à compressão das peças produzidas recentemente é de  $4.90 \text{ kg/cm}^2$ ?

### PROBLEMA 11.9

Uma empresa produz veios de um determinado tipo em duas máquinas, A e B, do mesmo modelo. Os diâmetros dos veios devem obedecer a tolerâncias relativamente apertadas. Num teste recentemente efectuado com as duas máquinas (devidamente

reguladas pelo mesmo operário), obtiveram-se os resultados que se apresentam na tabela seguinte.

Máquina	N.º de veios produzidos	Diâmetro médio [mm]	Variância amostral do diâmetro [mm <sup>2</sup> ]	N.º de veios defeituosos
A	132	30.1	12.7	15
B	120	29.8	4.7	7

Teste ao nível de significância de 5%, se as máquinas diferem,

- (i) Na precisão.
- (ii) Na proporção de veios defeituosos.

### PROBLEMA 11.10

Para controlar o peso da castanha de caju incluída em embalagens de 200 gramas com origem num determinado fornecedor, o departamento de controlo de qualidade de um hipermercado recolheu uma amostra constituída por 35 embalagens, a partir da qual foram calculadas as seguintes estatísticas:

$$\bar{x} = 196g$$

$$s^2 = 20.47g^2.$$

- (i) Construa um intervalo de confiança bilateral, a 95%, para o valor esperado do peso da castanha de caju incluída em cada embalagem.
- (ii) Admita que o departamento de controlo de qualidade do hipermercado desconfiava, *a priori*, da honestidade do fornecedor em causa. Recorrendo a um intervalo de confiança a 95%, efectue o teste de hipóteses apropriado.