COMPLEMENTOS de MATEMÁTICA

Aula Teórico-Prática – Ficha 4

FUNÇÕES A VÁRIAS VARIÁVEIS; GRADIENTES

1) Determine a função de campo escalar $f(x,y,z)$, tal que o seu valor no ponto (x,y,z) é:

a) A área da superfície da caixa, sem a sua tampa superior, cujos lados são definidos pelos vetores $x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$ e $z\boldsymbol{k}$.

b) O valor do ângulo formado pelos vetores $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ e $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

c) O volume do prisma definido pelos vetores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ e $x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

2) Considere a equação $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=z$, $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

a) Que superfície é o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas satisfazem a equação dada.

b) O que acontece a esta superfície quando $b\to\infty$.

c) Qual a secção resultante da interseção da superfície dada com a superfície $z=1$.

d) O que acontece a esta secção quando $b\to\infty$.

3) Identifique as superfícies definidas pelas equações:

a) $g(x,y)=\sqrt{x^2+4y^2}$.

b) $\rho(\theta,\varphi)=\sin\varphi\cos\theta$.

4) Obtenha o limite da função $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo de:

a) Eixo dos *xx*.

b) Eixo dos *yy*.

c) Reta $y=mx$, $m\neq 0$.

d) Espiral $r=\theta$, $\theta>0$.

e) Arco $r=\sin(3\theta)$, $\theta\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right)$.

f) Curva descrita pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t)=\dfrac{1}{t}\boldsymbol{i}+\dfrac{\sin t}{t}\boldsymbol{j}$, $t>0$.

5) Calcule as derivadas parciais das seguintes funções de campo escalares:

a) $\rho(\theta,\varphi)=\sin\varphi\cos\theta$.

b) $g(x,y)=\sqrt{x^2+4y^2}$.

c) $h(x,y)=\operatorname{arc\,tg}(2x+y)$.

d) $u(x,y,z)=\dfrac{e^z}{xy^2}$.

e) $\omega(x,y,z)=\ln(zx+3y)$.

f) $v(x,y,z)=x^{y^z}$.

g) $f(x,y)=\ln\left(x^2+\sqrt{x^3+y^2}\right)$.

6) Calcule o gradiente das seguintes funções de campo escalar:

a) $f(x,y,z)=xe^y\sin(z+x)$.

b) $g(x,y,z)=(-x+2y)^5+\dfrac{2}{z}$.

7) Seja a função de campo escalar $f(x,y)=x(4-y^2)$ e a função vetorial $\alpha(t)=(2\cos t, 2\sin t)$. Obtenha a derivada da função composta das funções dadas:

a) Sem efetuar a composição das funções.

b) Determinando a função composta.

8) Determine a derivada direcional da função de campo escalar $f(x,y,z)=z\ln\dfrac{x}{y}$ no ponto $P=(1,2,-2)$, na direção do ponto $Q=(2,2,1)$.

9) Calcule a derivada direcional da função de campo escalar $f(x,y,z)=xe^{y^2-z^2}$ em $P=(1,2,-2)$, na direção do percurso descrito pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t)=\left(t, 2\cos(t-1), -2e^{t-1}\right)$, $t\in\mathbb{R}$.

10) Obtenha a derivada direcional da função de campo escalar $f(x,y,z)=\left(x+y^2+z^3\right)^2$ no ponto $P=(1,-1,1)$, na direção definida pelo vetor $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$.

11) Determine a direção e o sentido segundo os quais a função de campo escalar $f(x,y)=y^2e^{2x}$ tem a sua taxa de variação máxima no ponto $P=(0,1)$.

12) Obtenha a direção e o sentido segundo os quais a função de campo escalar $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ tem a sua taxa de variação máxima no ponto $P=(1,-2,1)$.

13) Calcule a derivada direcional da função de campo escalar $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ no ponto $(x,y)\neq(0,0)$, na direção da origem.

14) Calcule a derivada direcional de:

a) $f(x,y,z)=x^2+xy+yz$ em $P=(1,0,2)$, segundo a normal à superfície $z=3-x^2-y^2+6y$.

b) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ em $Q=(3,4,5)$, segundo o vetor tangente à curva de interseção das superfícies $2x^2+2y^2-z^2=25$ e $z^2=x^2+y^2$ nesse ponto.

15) Seja *f* uma função de campo escalar contínua e diferenciável em todos os pontos do segmento de reta $[AB]$ e $f(A)=f(B)$. Mostre que existe um ponto *C* situado entre *A* e *B*, tal que $\nabla f(C)\cdot(B-A)=0$.

16) Considere a função de campo escalar $f(x,y,z)=4xz-y^2+z^2$, diferenciável em $\mathbb{R}$, e os pontos $A=(0,1,1)$ e $B=(1,3,2)$. Determine o ponto C situado no segmento de reta $[AB]$, tal que $f(B)-f(A)=\nabla f(C)\cdot(B-A)$.

17) Obtenha um vetor que seja normal e um vetor que seja tangente à curva de equação cartesiana $x^3+y^2+2x=6$ no ponto $P=(-1,3)$.

18) A temperatura, *T*, na vizinhança do ponto $P=(\pi/4,0)$ é dada pela função de campo vetorial $T(x,y)=\sqrt{2}e^{-y}\cos x$. Uma partícula desloca-se nessa vizinhança seguindo uma trajetória que passa em *P* e que, em cada ponto, segue uma direção que corresponde à máxima taxa de variação de temperatura. Determine essa trajetória.

19) Determine os pontos das superfícies $z-xy=0$ e $4x+2y-x^2+xy-y^2-z=0$, onde o plano tangente é horizontal.

20) Calcule o vetor normal e o plano tangente à superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ no ponto $P = (1,1,1)$.

21) Obtenha o plano tangente e a reta normal à superfície $xy + yz + xz = 11$ no ponto $P = (1,2,3)$.

22) Mostre que a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$ é tangente ao elipsoide de equação $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ no ponto $P = (2,1,1)$.

23) A curva do espaço descrita pela função vetorial $\boldsymbol{r}(t) = (2t, 3t^{-1}, -2t^2)$, $t > 0$, e o elipsoide de equação $x^2 + y^2 + 3z^2 = 25$ intersetam-se no ponto $P = (2,3,-2)$. Determine o valor do ângulo, α, de interseção.

24) Sejam as superfícies de equações $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{\omega}$, $\omega > 0$. Mostre que a soma das coordenadas dos pontos de interseção de todos os planos tangentes às superfícies com os eixos coordenados é igual a ω.

25) Supondo que a equação $x\cos(xy) + y\cos x = 2$ define y implicitamente em função de x, $y = f(x)$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

26) Admitindo que a equação $x^2 + z^4 + z^3 + y^2 + xy = 2$ define z implicitamente em função de x e y, $z = f(x, y)$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

27) Seja a função de campo escalar $\omega = \omega(x, y, z)$, em que $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ e $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$. Desenhe a árvore diagrama para o cálculo das derivadas parciais $\dfrac{\partial \omega}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial \omega}{\partial t}$; calcule-as.

28) A equação $x + z + (y + z)^2 = 6$ define z implicitamente em função de x e y, $z = f(x, y)$. Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, em função de *x*, *y* e *z*.

29) Considere a função de campo escalar $z = f(x, y)$, definida implicitamente pela equação $e^{\cos z}\ln(z+1) = \mathrm{arctg}(2x + y)$. Determine o valor das derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ no ponto $P = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

30) A equação $x\ln(y) + y^2z + z^2 = 6$ define z implicitamente em função de x e y, $z = f(x, y)$, na vizinhança de $P = (1,1,2)$. Obtenha as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ em P.

31) Considerando $z(r, s, v) = \frac{r+s}{v}$, $r(x, y) = x\cos y$, $s(x, y) = y\sin x$ e $v(x, y) = 2x - y$, calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

32) Seja a curva definida implicitamente pela equação $\sqrt{x}\cos(-2y + z) = 1$. Calcule as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ nos pontos com coordenadas $x = 2$ e $y = 0$.

33) Considere a curva definida implicitamente pela equação $xz^2 - yz^2 + xy^2z - 5 = 0$. Determine as derivadas $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ nos pontos com coordenadas $x = 3$ e $y = 1$.

34) Considere a função de campo escalar $z = f(y, x, v, u) = x + \ln(u) + (y + v)^2$, em que $x(u, v) = 2u + 3v$ e $y(u, v) = \cos(u) + \sin(v)$. Utilize a regra de derivação em cadeia para obter as derivadas $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$.

35) Seja a função de campo escalar $w = f(x, y, z) = \frac{xy}{z}$, em que $x = \mathrm{tg}(u-1) - e^v$, $y = u^2 - v^2$ e $z = \cos(u^2 v)$. Usando a regra de derivação em cadeia, obtenha as derivadas parciais $\frac{\partial w}{\partial u}$ e $\frac{\partial w}{\partial v}$.

36) Seja a função diferenciável $u = f(x,y)$. Considerando $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, obtenha:

a) As derivadas parciais $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ em função das derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ em função das derivadas parciais, de 1ª e 2ª ordens, de *f* em relação a *x* e *y*.

37) Verifique que as derivadas, de 2ª ordem, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ são iguais, se $z = e^x\left(\cos(y) + x\sin(y)\right)$.

38) Classifique os pontos críticos das seguintes funções e, se possível, determine os seus máximos/mínimos locais:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$.

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x$.

d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

e) $f(x,y) = 1 - (x-1)^2 - y^2$.

f) $f(x,y) = (x - y + 1)^2$.

g) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6x + 2$.

h) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 4x + 2y$.

i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

j) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y - 2$.

k) $f(x,y) = e^x \cos y$.

l) $f(x,y) = x\sin y$.

m) $f(x,y) = (x+y)(xy+1)$.

n) $f(x,y) = xy + x^{-1} + 8y^{-1}$.

o) $f(x,y) = xy + x^{-1} + y^{-1}$.

p) $f(x,y) = x^2 y + x^2 - 4y$.

39) Seja um paralelepípedo situado no 1º octante, com um dos seus vértices na origem do referencial e duas das suas arestas situadas nos eixos dos *xx* e dos *yy*. Determine o valor máximo para o seu volume, se o vértice oposto à origem estiver situado no plano $x + y + z = 1$.

40) Calcule a distância entre as retas com equações cartesianas $6x = 3y = 2z$ e $x = y - 2 = z$.

41) Pretende-se construir uma embalagem com a forma de um paralelepípedo, aberta no seu topo e com volume $96\ m^3$. Sabendo que o custo da produção da sua base é de $0{,}30€/m^2$, enquanto o das suas faces é de $0{,}10€/m^2$, calcule as dimensões da embalagem de modo a minimizar o custo da sua produção.

Soluções:

1) **a)** $f(x,y,z)=|xy|+2|xz|+2|zy|$, $D_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0\ \wedge\ z\neq 0\right\}$.

b) $f(x,y,z)=\arccos\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}}\right)$, $D_f=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.

c) $f(x,y,z)=|z|$, $D_f=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ,\ z\neq 0\right\}$.

2) **a)** É um paraboloide elíptico.

b) A superfície inicial transforma-se num cilindro parabólico.

c) Trata-se de uma elipse situada no plano $z=1$.

d) A secção anterior transforma-se nas duas retas paralelas $x=\pm 1$, situadas no plano $z=1$.

3) **a)** É um cone quadrático de uma folha.

b) Superfície esférica de raio $\dfrac{1}{2}$ e com centro em $C=\left(\dfrac{1}{2},0,0\right)$.

4) **a)** 0. **b)** 0. **c)** $\dfrac{m}{1+m^2}$.

d) 0. **e)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **f)** Não existe.

5) **a)** $\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}=-\sin\varphi\sin\theta$ e $\dfrac{\partial\rho}{\partial\varphi}=\cos\varphi\cos\theta$.

b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}}$.

c) $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{2}{1+(2x+y)^2}$ e $\dfrac{\partial h}{\partial y}=\dfrac{1}{1+(2x+y)^2}$.

d) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{e^z}{x^2y^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2e^z}{xy^3}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial z}=u$.

e) $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=\dfrac{z}{xz+3y}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}=\dfrac{3}{xz+3y}$ e $\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=\dfrac{x}{xz+3y}$.

f) $\dfrac{\partial v}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=z\ln(x)y^{z-1}x^{y^z}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial z}=\ln(x)\ln(y)y^z x^{y^z}$.

g) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{4x\sqrt{x^3+y^2}+3x^2}{2\left(x^3+y^2+x^2\sqrt{x^3+y^2}\right)}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\left(x^3+y^2+x^2\sqrt{x^3+y^2}\right)}$.

6) a) $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = e^y\left(\sin(x+z) + x\cos(x+z), x\sin(x+z), x\cos(x+z)\right)$.

b) $\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = \left(-5(-x+2y)^4, 10(-x+2y)^4, -\frac{2}{z^2}\right)$.

7) $\frac{df}{dt} = f\,'(t) = -24\sin(t)\cos^2(t)$.

8) Designando $\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}$, tem-se $f\,'(P,\boldsymbol{u}) = \nabla f(P)\cdot\boldsymbol{u} = -\frac{\sqrt{10}}{5} - 3\frac{\sqrt{10}}{10}\ln(2)$.

9) Designando $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}(1) = \frac{\boldsymbol{r}\,'(1)}{\left\|\boldsymbol{r}\,'(1)\right\|}$, tem-se $f\,'(P,\boldsymbol{u}) = \nabla f(P)\cdot\boldsymbol{u} = -\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

10) $-3\sqrt{2}$.

11) Segundo a direção e o sentido definidos pelo versor $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$.

12) Segundo a direção e o sentido definidos pelo versor $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

13) $\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

14) a) $\pm\frac{14}{\sqrt{41}}$. **b)** 0.

15) - - - -

16) $C = \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$.

17) Vetor normal: $(5,6)$; vetor tangente: $(6,-5)$.

18) $y = \ln\left(\sqrt{2}\left|\sin x\right|\right)$.

19) No caso da superfície $z - xy = 0$ é o ponto $O = (0,0,0)$; para a restante é o ponto $P = \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}, \frac{28}{3}\right)$.

20) Vetor normal: $(1,1,1)$; plano tangente: $x + y + z = 3$.

21) Plano tangente: $5x + 4y + 3z = 22$; reta normal: $X(t) = (1,2,3) + t(5,4,3)$, $t \in \mathbb{R}$.

22) - - - -

23) $\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{19\sqrt{29}}{203}$.

24) - - - -

25) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy\sin(xy) + y\sin(x) - \cos(xy)}{\cos(x) - x^2\sin(xy)}$.

26) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2x+y}{(4z+3)z^2}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x+2y}{(4z+3)z^2}$.

27) $\dfrac{\partial \omega}{\partial s} = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s}\right) + \dfrac{\partial \omega}{\partial y}\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s}\right) + \dfrac{\partial \omega}{\partial z}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s}\right)$;

$\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{\partial \omega}{\partial x}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t}\right) + \dfrac{\partial \omega}{\partial y}\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t}\right) + \dfrac{\partial \omega}{\partial z}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)$.

28) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1}{1+2y+2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -2\dfrac{y+z}{1+2y+2z}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{2}{(1+2y+2z)^3}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \dfrac{2}{(1+2y+2z)^3} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

29) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right) = \dfrac{2}{e}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(-\dfrac{1}{2},1,0\right) = \dfrac{1}{e}$.

30) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1,2) = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1,2) = -1$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1,2) = -\dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(1,1,2) = -\dfrac{1}{5}$.

31) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\cos(y) + y\cos(x)}{2x-y} - 2\dfrac{x\cos(y) + y\sin(x)}{(2x-y)^2}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-x\sin(y) + \sin(x)}{2x-y} + \dfrac{x\cos(y) + y\sin(x)}{(2x-y)^2}$.

32) $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(2, 0, \arccos(1/\sqrt{2})\right) = \pm\dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(2, 0, \arccos(1/\sqrt{2})\right) = 2$.

33) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(3,1,1) = -\dfrac{2}{7}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(3,1,1) = -\dfrac{5}{7}$ ou $\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(3,1,-\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{15}{28}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(3,1,-\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{85}{28}$.

34) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial u} = -2\sin(u)\left(\cos(u) + \sin(v) + v\right) + 2 + \dfrac{1}{u}$;

$\dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial v} = 2\left(1 + \cos(v)\right)\left(\cos(u) + \sin(v) + v\right) + 3$.

35) $\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{u^2 - v^2}{\cos(u^2v)\cos^2(u-1)} + \dfrac{2u\left(\operatorname{tg}(u-1) - e^v\right)}{\cos(u^2v)} + \dfrac{2uv\sin(u^2v)(u^2-v^2)\left(\operatorname{tg}(u-1) - e^v\right)}{\cos^2(u^2v)}$;

$\dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\partial w}{\partial v}=-\frac{(u^2-v^2)e^v}{\cos(u^2v)}-\frac{2v\left(\mathrm{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos(u^2v)}+\frac{u^2\sin(u^2v)(u^2-v^2)\left(\mathrm{tg}(u-1)-e^v\right)}{\cos^2(u^2v)}.$$

36) a) $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-r\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}+r\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=r^2\left(\sin^2(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\cos^2(\theta)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\dfrac{r^2\sin(2\theta)}{2}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)-r\left(\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}\right).$

37) - - - -

38) a) Ponto estacionário em $(0,0)$, com um mínimo local de valor igual a 0.

b) Ponto de sela em $(0,0)$.

c) Ponto estacionário em $(2,1)$, com um mínimo local de valor igual a -3.

d) Pontos estacionários em $(-1,-1)$ e $(1,1)$, com mínimos locais de valor igual a -2; ponto de sela em $(0,0)$.

e) Ponto estacionário em $(1,0)$, com um máximo local de valor igual a 1.

f) Ponto estacionário ao longo da reta $y=x+1$, com um mínimo local de valor igual a 0.

g) Ponto estacionário em $(4,-2)$, com um mínimo local de valor igual a -10.

h) Ponto estacionário em $\left(\frac{10}{3},\frac{8}{3}\right)$, com um máximo local de valor igual a $\frac{28}{3}$.

i) Ponto estacionário em $(2,2)$, com um mínimo local de valor igual a -8; ponto de sela em $(0,0)$.

j) Ponto estacionário em $\left(5,\frac{27}{2}\right)$, com um mínimo local de valor igual a $-\frac{117}{4}$; ponto de sela em $\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

k) Sem pontos estacionários nem mínimos ou máximos locais.

l) Pontos de sela em $(0,k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$.

m) Pontos de sela em $(1,-1)$ e $(-1,1)$.

n) Ponto estacionário em $\left(\frac{1}{2},4\right)$, com um mínimo local de valor igual a 6.

o) Ponto estacionário em $(1,1)$, com um mínimo local de valor igual a 3.

p) Pontos de sela em $(2,-1)$ e $(-2,-1)$.

39) $\dfrac{1}{27}$.

40) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

41) O cesto tem uma base quadrada de dimensões $4\times4\ m^2$ e a sua altura é $6\ m$.